

Prom. N° 2365

# Calcul numérique des plaques et des parois minces

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH

POUR L'OBTENTION DU

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

**Pierre Dubas**

de Enney (Fribourg)

Rapporteur: Prof. Dr F. Stüssi

Corapporteur: Prof. Dr P. Lardy



Zurich 1955

Imprimerie Leemann S.A.

Paraît comme N° 27 des Publications de l'Institut de Statique Appliquée  
de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich  
MM. les Prof. F. Stüssi et P. Lardy, Drs ès sc.

Édition Leemann Zurich

Les méthodes originales de statique appliquée, développées par Monsieur le Professeur F. Stüssi, servent de base au présent ouvrage. Que Monsieur le Professeur Stüssi trouve ici l'expression de ma très vive reconnaissance pour son appui bienveillant et ses conseils judicieux.

Je remercie également Monsieur le Professeur Lardy de l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

Leer - Vide - Empty

## Table des matières

<i>Avant-propos</i> . . . . .	7
<i>Chapitre premier. Rappel de la théorie générale des plaques minces et de celle des parois minces</i> . . . . .	10
1 <sup>o</sup> Objet de ce rappel. Définitions et notations. . . . .	10
2 <sup>o</sup> Théorie générale de la flexion des plaques minces . . . . .	12
3 <sup>o</sup> Equations générales de l'élasticité bidimensionnelle, en particulier celles des parois minces . . . . .	20
4 <sup>o</sup> Analogie entre l'équation des plaques et celle des parois . . . . .	25
5 <sup>o</sup> Problème mixte plaque-paroi. Grandes déformations des plaques . . . . .	26
<i>Chapitre deuxième. Résolution des équations différentielles des plaques et des parois minces par la méthode du polygone funiculaire</i> . . . . .	31
1 <sup>o</sup> Introduction . . . . .	31
2 <sup>o</sup> Relations fondamentales . . . . .	31
3 <sup>o</sup> Les divers procédés d'application de la méthode . . . . .	38
4 <sup>o</sup> Procédé formel. Etablissement des schémas. . . . .	40
5 <sup>o</sup> Procédé formel et procédé implicite. Etablissement des tableaux permettant de remonter des $w$ connus à leurs dérivées . . . . .	54
6 <sup>o</sup> Procédé semi-implicite. Etablissement de deux schémas . . . . .	62
7 <sup>o</sup> Comparaison des divers procédés exposés. . . . .	64
8 <sup>o</sup> Résolution des équations algébriques linéaires . . . . .	65
<i>Chapitre troisième. Application de la méthode du polygone funiculaire au calcul des plaques minces fléchies</i> . . . . .	65
1 <sup>o</sup> Introduction . . . . .	65
2 <sup>o</sup> Plaques rectangulaires simplement appuyées sur les quatre bords . . . . .	66
3 <sup>o</sup> Plaques rectangulaires totalement encastrées sur les quatre côtés . . . . .	85
4 <sup>o</sup> Plaques rectangulaires soumises à des conditions diverses sur leurs côtés . . . . .	96
5 <sup>o</sup> Plaques rectangulaires orthotropes . . . . .	111
6 <sup>o</sup> Plaque en forme de parallélogramme . . . . .	113
7 <sup>o</sup> Voilement des tôles . . . . .	121

<i>Chapitre quatrième. Application de la méthode du polygone funiculaire</i>	
<i>au calcul des parois minces . . . . .</i>	128
1 <sup>o</sup> Introduction . . . . .	128
2 <sup>o</sup> Paroi sollicitée par des contraintes perpendiculaires à son contour ou soumise à des tensions d'origine thermique. Nouvelle analogie avec le problème de la plaque totalement encastrée . . . . .	129
3 <sup>o</sup> Répartition à l'intérieur d'une paroi des contraintes données sur les bords; quelques applications. . . . .	135
4 <sup>o</sup> Tensions de retrait dans les soudures . . . . .	150
5 <sup>o</sup> Largeur utile des tables des poutres simples . . . . .	154
6 <sup>o</sup> Grandes déformations des plaques minces fléchies . . . . .	165
 <i>Chapitre cinquième: Précision de la méthode du polygone funiculaire.</i>	
<i>Extension possible de ses applications. . . . .</i>	170
1 <sup>o</sup> Introduction . . . . .	170
2 <sup>o</sup> Précision de la méthode du polygone funiculaire . . . . .	170
3 <sup>o</sup> Méthode aux différences et méthode du polygone funiculaire . . . . .	172
4 <sup>o</sup> Extension des applications de la méthode du polygone funiculaire . . . . .	175

## Avant-propos

Les charpentes métalliques ont été longtemps formées presque uniquement de barres et de poutres, éléments *linéaires* dont la longueur est grande par rapport aux autres dimensions. Le développement de techniques nouvelles, en particulier de la soudure électrique, a permis l'emploi de tôles larges. Les ouvrages réalisés de cette manière diffèrent notablement des constructions classiques. Pensons notamment aux vannes à caisson<sup>1)</sup> ou aux tabliers métalliques des ponts récents<sup>2)</sup>.

En béton armé, à cause du monolithisme inhérent à ce matériau, on a utilisé très tôt des plaques et des voiles, sans d'ailleurs que le praticien disposât toujours de méthodes de calcul à la fois simples et précises.

Pensant répondre à un besoin, nous avons voué cette étude au *calcul numérique des plaques et des parois minces*, éléments *bidimensionnels*, qui sont les plus employés à part les poutres. La plaque ne diffère de la paroi mince que par le mode de sa sollicitation. Il s'agit dans les deux cas du „solide découpé„ dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque „ou de la paroi“, est petite par rapport aux autres dimensions“<sup>3)</sup>. Si les forces extérieures

---

<sup>1)</sup> Cf. *C. Prince*: Particularités du calcul des vannes du type à caisson, Schweizerische Bauzeitung, 4. Juli 1953.

<sup>2)</sup> A ce sujet on consultera notamment les ouvrages suivants. *W. Cornelius*: Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonalanisotropen Platten, Der Stahlbau, Februar, März und April 1952; *H. Homberg*: Über die Lastverteilung durch Schubkräfte, Theorie des Plattenkreuzwerks, Der Stahlbau, März, April und Mai 1952.

<sup>3)</sup> Cf. *Henry Favre*: Cours de Mécanique, Tome III, Chapitres choisis, Dunod, Paris, et Leemann, Zurich, 1949, p. 14 et 103.

s'exercent *normalement* aux faces, on parle de *plaque mince*; si leurs lignes d'action sont *dans le plan équidistant des faces*, on parle de *paroi mince*<sup>4)</sup>.

De nombreux auteurs se sont occupés des plaques et des parois minces et la théorie générale est bien au point. La solution de beaucoup de problèmes particuliers a été donnée, la plupart du temps par des méthodes de mathématiques supérieures, peu accessibles au praticien. Celui-ci en est souvent réduit à l'usage de tables incontrôlables. Bien plus, certains problèmes n'ont pas reçu de solution satisfaisante: pensons aux plaques continues et notamment aux parois. Dans ce domaine on a surtout étudié le demi-plan et la bande indéfinie, mais, pour prendre un cas apparemment simple, le problème du carré soumis à deux forces axiales n'a pas été résolu mathématiquement à notre connaissance.

Les méthodes utilisées se divisent en deux grands groupes: celles basées sur l'analyse mathématique d'une part, les procédés expérimentaux d'autre part. Parmi ces derniers relevons les divers emplois de la photo-élasticité, la méthode optique<sup>5)</sup> et les essais sur modèle réduit. Pour fécondes qu'elles soient, ces études ne sauraient cependant évincer l'analyse mathématique. A mi-chemin entre cette dernière et les procédés expérimentaux se situe la méthode graphomécanique du professeur *Ch. Massonnet*, méthode qui part d'états élastiques connus mathématiquement mais postule l'usage d'un sommateur idoine<sup>6)</sup>.

Les travaux mathématiques utilisent de préférence des séries doubles. Des méthodes spéciales (*Ritz*, énergie de déformation, etc.)

---

<sup>4)</sup> Le terme „paroi“ est pris comme l'équivalent de l'allemand „Scheibe“, de préférence à „disque“ ou „plaque“ qui prêtent à confusion. On a voulu éviter l'expression „élasticité plane“ qui serait trop générale dans notre cas (surfaces multiplement connexes par exemple).

<sup>5)</sup> Cf. *P. Dantu*: Etude expérimentale des plaques par une méthode optique, Annales des Ponts et Chaussées, juin 1952; Application à une méthode nouvelle de détermination des contraintes en élasticité plane, Annales des Ponts et Chaussées, août 1952.

<sup>6)</sup> Cf. *Ch. Massonnet*: Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane, Bulletin du Centre d'Etudes, de Recherches et d'Essais scientifiques des Constructions du Génie civil et d'Hydraulique fluviale, Tome IV, 1949.



permettent des développements élégants, elles n'en exigent pas moins des connaissances très poussées, peu familières au praticien; elles ne conduisent même pas toujours au résultat. Ces inconvénients ont fait le succès de la méthode aux différences, méthode qui pêche malheureusement par manque de précision<sup>7)</sup>. Pour garantir des résultats corrects, il faudra serrer le réseau, ce qui ne va pas sans un surcroît de besogne, souvent incompatible avec les besoins de la pratique.

Il serait donc utile de posséder une méthode numérique, n'utilisant que des notions familières à tout ingénieur, et dont la précision serait élevée pour un calcul d'une étendue normale. Or cette méthode existe: elle est fondée sur les propriétés du *polygone funiculaire*. Son équation est l'équivalent d'une relation différentielle du deuxième degré, celle qui lie dans une poutre le moment de flexion à la charge qui le provoque. Cette méthode de statique appliquée a été mise au point par le professeur *F. Stüssi*<sup>8)</sup> qui l'a employée à la solution de nombreux problèmes régis par des équations

<sup>7)</sup> Pour la théorie générale et les applications aux plaques voir *H. Marcus*: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Springer, Berlin, 1924.

Pour la précision dans l'application de la méthode aux parois minces, voir par exemple *H. Bay*: Über den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisenbetontragwänden, Wittwer, Stuttgart, 1931, p. 30. Pour un réseau de six fois six mailles, il est impossible à l'auteur de donner même l'ordre de grandeur des contraintes extrêmes.

<sup>8)</sup> On consultera notamment:

*F. Stüssi*: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers, Abhandlungen I.V.B.H., dritter Band, 1935, p. 405 sqq. — Baustatische Methoden, Schweizerische Bauzeitung, 20. Juni 1936. — Vorlesungen über Baustatik, erster Band, Birkhäuser, Basel, 1946, p. 259. — Polygone funiculaire et équations différentielles, Bulletin de la Société royale des sciences de Liège, N° 6 et 7, 1949. — Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. I, 1950, p. 53—70. — Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten, Abhandlungen I.V.B.H., achter Band, 1947, p. 237—248. — Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues, Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von F. Schleicher, zweite Auflage, Springer, Berlin, 1955.

Les relations fondamentales données au chapitre deuxième, paragraphe 2<sup>o</sup>, sont tirées des ouvrages précités.

tions différentielles d'une seule variable. L'extension de la méthode aux problèmes à deux dimensions a été esquissée en principe<sup>9)</sup>.

Le présent travail se propose d'appliquer systématiquement la méthode du polygone funiculaire aux plaques et aux parois minces, en établissant les procédés de calcul et en montrant quelques exemples.

La théorie générale des plaques et des parois minces sera d'abord rappelée; elle sera ensuite traduite dans la langue du polygone funiculaire. Après quoi on passera en revue les principaux cas d'application aux plaques (librement appuyées, encastrées, continues, obliques, etc., voilement) et aux parois (répartition des forces qui sollicitent le pourtour, tensions de retrait, largeur utile des tables de compression des poutres).

Sans épuiser la question, ces exemples montreront les possibilités nombreuses de la méthode dont on examinera pour terminer la précision et les extensions futures à d'autres domaines.

## CHAPITRE PREMIER

### **Rappel de la théorie générale des plaques minces et de celle des parois minces**

#### **1<sup>o</sup> Objet de ce rappel. Définitions et notations**

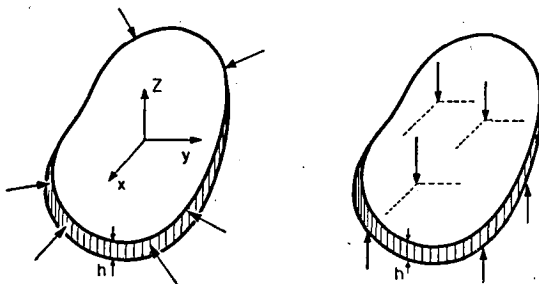
Le présent chapitre n'apportera rien de nouveau au lecteur; celui qu'intéresse seule la solution numérique peut le sauter sans inconvénient. Il a paru cependant opportun de rappeler la théorie générale des plaques minces et celle des parois minces, de préciser les simplifications et les hypothèses qui en sont la base et d'établir brièvement les équations différentielles qui régissent ces problèmes.

---

<sup>9)</sup> Cf. *Ch. Dubas*: Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies, Publication N<sup>o</sup> 23 de l'Institut de statique appliquée, Leemann, Zurich, 1948.

On se servira à cet effet des ouvrages classiques<sup>10)</sup>, ouvrages que le lecteur désirant rafraîchir ses connaissances n'aura ainsi plus besoin de consulter.

Définitions. Comme nous l'avons déjà dit dans l'avant-propos, une plaque ou une paroi mince „est le solide découpé, dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque „ou de la paroi“, est petite par rapport aux autres dimensions“<sup>11)</sup>. Géométriquement, un tel corps est défini par son épaisseur et son contour, trace du cylindre (fig. 1). De ce point de vue il n'existe entre plaques et parois minces aucune différence. Celle-ci provient uniquement du mode de sollicitation.



Paroi mince Fig. 1 Plaque mince fléchie

Les forces quelconques agissant sur le solide défini ci-dessus peuvent se décomposer en deux systèmes; dans le premier les lignes d'action seront normales aux faces, dans l'autre elles seront toutes dans le plan équidistant.

<sup>10)</sup> Cf. notamment:

*Henry Favre*, op. cit. à la note 3; *K. Girkmann*: Flächentragwerke, Springer, Wien, 1946; *A. E. H. Love*: Elasticity, Dover, New York, 1944; *G. Pigeaud*: Résistance des matériaux et élasticité, Gauthier-Villars, Paris, 1934; *Schleicher*: Taschenbuch für Bauingenieure, Springer, Berlin, 1943; *S. Timoshenko*: Théorie des plaques et des coques, Béranger, Paris et Liège, 1951; *S. Timoshenko*: Théorie de l'élasticité, Béranger, Paris et Liège, 1936.

<sup>11)</sup> Cf. *Henry Favre*, op. cit. à la note 3, ou *G. Pigeaud*, op. cit. à la note 10, p. 872. Voir aussi *Ch. Massonnet*, op. cit. à la note 6, p. 13.

Dans le premier cas — forces données et réactions perpendiculaires aux faces — on parle d'une *plaque mince* fléchie.

Dans le second — forces extérieures situées toutes dans le plan équidistant des faces — on parle d'une *paroi mince*.

Notations principales. Elles sont empruntées généralement à *S. Timoshenko*<sup>10</sup>).

$x, y, z$	Coordonnées rectangulaires, $xy$ dans le plan équidistant
$h$	Épaisseur de la plaque ou de la paroi
$p$	Charge par unité de surface
$\rho$	Masse par unité de volume
$\sigma$	Contrainte normale
$\tau$	Contrainte de cisaillement
$u, v, w$	Composantes suivant les trois axes des déplacements
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Allongements unitaires
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Distorsions ou dilatations angulaires
$E$	Module d'élasticité
$\nu$	Nombre de Poisson
$G$	Module de cisaillement
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion et de torsion d'une plaque mince
$Q_x, Q_y$	Efforts tranchants

## 2° Théorie générale de la flexion des plaques minces

Hypothèses simplificatrices. Il n'existe pas encore de théorie exacte traitant la flexion des plaques. Si celles-ci sont minces et que leurs déformations restent petites par rapport à l'épaisseur, certaines simplifications sont permises, plus ou moins analogues à celles de la théorie des poutres, et qui conduisent à une théorie approchée. A part les deux conditions énoncées plus haut (épaisseur faible, déformations petites), les hypothèses admises sont les suivantes:

a) Prenons les axes  $x$  et  $y$  de coordonnées dans le plan équidistant des faces, appelé feuillet moyen et que la déformation transformera en une surface élastique. L'axe  $z$  sera perpendiculaire à ce plan. Si l'on appelle  $u_0 = u(x, y, 0)$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  les déplacements correspondants

du feuillet moyen, on admet que  $u_0$  et  $v_0$  sont négligeables. D'après la définition du paragraphe 1<sup>o</sup> les forces données et les réactions sont toutes normales au feuillet moyen qui est une surface neutre.

b) Une normale au feuillet moyen reste droite après la déformation, elle est perpendiculaire à la surface déformée. On néglige ainsi l'influence du cisaillement sur les déformations (*Bernoulli-Navier*).

c) Les tensions  $\sigma_z$  sont petites et leur influence sur les déformations peut être omise.

Généralement on considère une matière homogène et isotrope. Nous allons par contre admettre que la matière présente, par rapport à ses propriétés élastiques, deux directions privilégiées  $x$  et  $y$ .

On parle alors de matière *orthotrope*. Il est bien entendu que l'on se limite au *domaine élastique* où la loi de Hooke est valable.

Conditions d'équilibre d'un élément prismatique infiniment petit. Selon les hypothèses admises les seules tensions à considérer sont  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Par définition ces

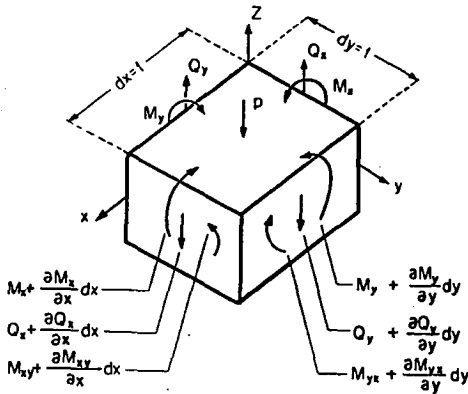


Fig. 2

contraintes n'admettent pas de résultantes dans le feuillet moyen mais seulement des moments et des efforts tranchants (fig. 2) qui valent respectivement:

$$M_x = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad (1) \quad M_y = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad (2)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (3)$$

$$Q_x = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \cdot dz \quad Q_y = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \cdot dz$$

Avec les conventions de signe habituelles<sup>12)</sup> les lois de l'équilibre exigent que

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

En groupant ces trois relations on obtient

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p \quad (6)$$

On a trois équations d'équilibre pour cinq grandeurs inconnues  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ . Le problème est hyperstatique et pour lever l'indétermination il faut tenir compte des déformations.

Conditions de déformation. Elles nous sont fournies par les hypothèses admises. La figure 3a, qui en est l'expression graphique, permet d'écrire

<sup>12)</sup> Les tensions normales de traction sont positives. Le sens positif de la tension de cisaillement est celui de l'axe de coordonnées correspondant si une traction sur la même facette est orientée positivement. Le feuillet moyen étant horizontal, les forces  $p$  sont positives quand elles agissent selon la pesanteur. Les moments de flexion positifs comprennent les fibres supérieures de la plaque; si ces mêmes fibres sont soumises à des tensions de cisaillement négatives, les moments de torsion sont positifs. Les efforts tranchants ont le sens contraire des cisaillements correspondants.

Dans l'établissement des équations d'équilibre (fig. 2) et d'élasticité (fig. 3b) on néglige les infiniments petits d'ordre supérieur.

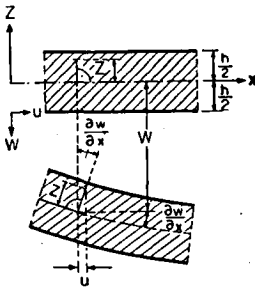


Fig. 3a

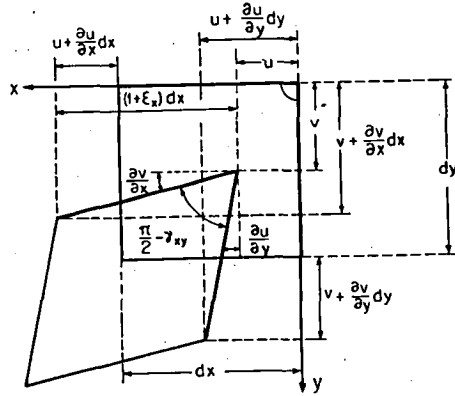


Fig. 3b

$$u = z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Il reste à exprimer ces déplacements  $u$  et  $v$  en fonction des contraintes. On voit facilement (fig. 3b) que

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7) \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8) \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9)$$

$$\text{d'où} \quad \epsilon_x = z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10) \quad \epsilon_y = z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11) \quad \gamma_{xy} = 2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

Les relations (1) à (12) sont toutes indépendantes des propriétés élastiques de la matière envisagée. Celles par contre qui lient les déformations aux contraintes en sont directement fonction.

Comme indiqué plus haut, on admet que la matière de la plaque est orthogonalement anisotrope, plus simplement *orthotrope*. Les caractéristiques d'une telle matière possèdent en chaque point deux directions privilégiées perpendiculaires entre elles et prises parallèles aux axes de coordonnées. En analogie avec la matière isotrope on peut écrire alors dans le domaine élastique

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y} \quad (13) \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} \quad (14) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (15)$$

Les cinq constantes élastiques ne sont pas indépendantes et l'on peut montrer qu'elles doivent remplir la condition<sup>13)</sup>

$$\frac{E_x}{\nu_x} = \frac{E_y}{\nu_y}$$

En remplaçant  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  par leurs valeurs tirées de (10), (11) et (12) et en résolvant les équations (13), (14) et (15) par rapport à  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  on obtient facilement

$$\sigma_x = \frac{1}{1 - \nu_x \cdot \nu_y} \cdot E_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot z \quad (16a)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1 - \nu_x \cdot \nu_y} \cdot E_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot z \quad (16b)$$

$$\tau_{xy} = 2 G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z \quad (16c)$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$D_x = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} E_x \cdot \frac{h^3}{12} \quad (17a)$$

$$D_y = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} E_y \cdot \frac{h^3}{12} \quad (17b)$$

$$C = G_{xy} \cdot \frac{h^3}{12} \quad (18)$$

$D_x$  et  $D_y$  sont les rigidités à la flexion,  $C$  la rigidité à la torsion de la plaque.

En introduisant les valeurs précédentes de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  dans les relations (1), (2), (3) on obtient

$$M_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (19) \quad M_y = -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (20)$$

$$M_{xy} = -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

Avec ces valeurs les équations (4) et (5) deviennent

<sup>13)</sup> L'étude de la plaque anisotrope a été faite d'abord par *J. Boussinesq*: Journal de Math., 3<sup>e</sup> série, vol. 5, 1879. Elle a été reprise par *M. T. Huber*. On consultera par exemple: Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, Gastvorlesungen an der ETH, Gebethner & Wolff, Warszawa, 1929.



$$Q_x = -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2C + \nu_y D_x) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (22)$$

$$Q_y = -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (2C + \nu_x D_y) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (23)$$

Equation différentielle de la surface élastique. Le problème serait résolu si l'on connaissait  $w$ . Mais pour satisfaire (6) il faut que

$$\underline{D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p} \quad (24)$$

avec

$$\underline{D_{xy} = 2C + \frac{\nu_y D_x}{2} + \frac{\nu_x D_y}{2}}$$

Cette équation permet de déterminer, en tenant compte des conditions au contour dont il va être question plus loin, les ordonnées  $w$  de la surface élastique. Les relations (19) à (23) donnent alors les moments et les efforts tranchants ou (16), directement les contraintes. Les tensions de flexion  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et celles de torsion  $\tau_{xy}$  sont linéairement réparties sur l'épaisseur de la plaque, elles s'annulent sur le feuillet moyen. Connaissant les moments résultants, on peut calculer les contraintes correspondantes par les lois ordinaires de la résistance des matériaux, comme pour les poutres. Il en est de même pour les cisaillements  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ .

Equations simplifiées pour les plaques isotropes. Si la matière est isotrope on a  $E_x = E_y = E$ ,  $\nu_x = \nu_y = \nu$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Alors  $D_x = D_y = D$ ,  $C = D \frac{1-\nu}{2}$  d'où  $D_{xy} = D$

avec 
$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (18a)$$

L'équation différentielle de la surface élastique peut s'écrire

$$\underline{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \quad (24a)$$

ou 
$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

C'est l'équation bien connue de *Lagrange*. Les formules des moments et des efforts tranchants se simplifient également et deviennent

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (19 \text{ a}) \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (20 \text{ a})$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (21 \text{ a}) \quad Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (22 \text{ a})$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (23 \text{ a})$$

Conditions au contour de la plaque. L'équation différentielle de la surface élastique admet une infinité de solutions. La solution réelle d'un problème donné sera celle qui remplit les conditions au contour. Nous nous bornerons à l'examen de plaques à contour polygonal et nous prendrons l'axe des  $y$  parallèle au bord considéré d'équation  $x=a$ . Les principaux cas qui se présentent sont les suivants:

a) *Côté complètement encasté*. Les déformations sont nulles le long de ce côté et le plan tangent à la surface élastique se confond avec le feuillet moyen non déformé. Ce qui s'exprime par

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left| \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (25)$$

b) *Côté simplement appuyé*. Comme sous a) le déplacement est nul tout le long du bord. Le moment de flexion  $M_x$  doit l'être aussi. Comme  $w$  est identiquement nul le long du côté, ses dérivées en  $y$  le sont également et l'on a les conditions suivantes

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left| \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (26)$$

ou aussi  $(w)_{x=a} = 0 \quad (\Delta w)_{x=a} = 0$

En effectuant le calcul, on voit que le moment de torsion  $M_{xy}$  ne disparaît pas au bord comme l'exigerait une théorie exacte. Il reste des tensions  $\tau_{xy}$ . Du point de vue de l'équilibre ces couples de torsion sont équivalents aux moments produits par des efforts *verticaux* de grandeur  $M_{xy}$  et dont le bras de levier serait  $dy$ . D'après le principe de *B. de Saint-Venant* les perturbations appor-

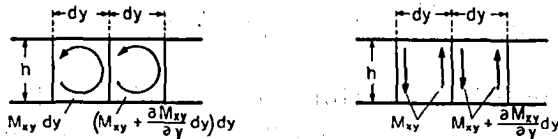


Fig. 4

tées par la substitution du second système au premier sont purement locales. La figure 4 montre que l'on obtient une réaction d'appui supplémentaire qui vaut  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ . La réaction d'appui totale est alors

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (4C + \nu_y D_x) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (27)$$

Si en un point du contour le moment de torsion présente une discontinuité, un saut brusque, par exemple de  $M_{xy}^1$  à  $M_{xy}^2$ , on obtient une réaction d'appui concentrée qui vaut  $M_{xy}^1 - M_{xy}^2$ . Ce cas se présente dans les coins. Si ce coin est à angle droit, à cause de l'égalité  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , il se produit une réaction concentrée  $2M_{xy}$ .

c) *Côté libre*. Le moment de flexion  $M_x$  doit être nul. L'effort tranchant  $Q_x$  et le moment de torsion  $M_{xy}$  devraient l'être aussi. Comme vu sous b) les hypothèses simplificatrices admises ne permettent pas de remplir ces trois conditions. L'artifice étudié conduit à grouper les deux dernières conditions en une seule, celle de la réaction totale.

$$D'où \quad M_x = V_x = 0 \quad (28)$$

$$\text{Plaque isotrope} \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad \left| \quad \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (28a)$$

**Moments principaux.** On passe des moments  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  aux tensions correspondantes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  par une même proportion. Les formules de transformation de l'élasticité bidimensionnelle sont donc applicables aux moments. En particulier les directions des moments principaux, directions pour lesquelles les moments  $M_{xy}$  de torsion s'annulent, sont données par

$$\text{tg } 2\beta = - \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad (29)$$

et

$$M_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2} \quad (30)$$

Domaine d'application de la théorie des plaques orthotropes. A part les matériaux à peu près orthotropes comme le bois, cette théorie est surtout appliquée par analogie à des milieux discontinus fléchis: dalles en béton armé, plaques raidies par des nervures perpendiculaires entre elles, en acier ou en béton, tôles ondulées, etc. Il s'agit d'un calcul approximatif, d'autant plus proche de la réalité que les discontinuités sont relativement faibles. La détermination des constantes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  est souvent difficile. On a alors recours à l'expérimentation. Comme cette question dépasse le cadre de notre étude, elle ne sera pas étudiée plus avant<sup>14</sup>).

### 3° Equations générales de l'élasticité bidimensionnelle, en particulier celles des parois minces

On distingue deux états d'élasticité bidimensionnelle:

*L'état de tension à deux dimensions.* Les contraintes non nulles sont alors toutes parallèles à un plan. Si l'axe  $z$  est normal au plan, on a  $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$ . Seules restent les tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Ceci est le cas d'une *paroi mince*, tout au moins si les forces appliquées au contour dans le plan équidistant et les contraintes se distribuent uniformément sur l'épaisseur. Celle-ci, par définition, doit être faible par rapport aux autres dimensions afin que la variation des tensions dans l'étendue de cette épaisseur soit négligeable.

*L'état de déformation à deux dimensions.* Il existe dans un corps cylindrique de grande longueur, sollicité par des forces perpendiculaires à ses génératrices et ne variant pas sur toute la longueur. Alors que dans l'état de tension plane les faces peuvent gauchir, dans l'état de déformation plane les sections transversales restent planes.

<sup>14</sup> On consultera par exemple: *M. T. Huber*, op. cit. à la note 13, ou les divers articles de *Der Bauingenieur*, 1923, 24, 25, 26; *Timoshenko* op. cit. à la note 10; *W. Cornelius*, op. cit. à la note 2; *R. Mayer*: Die Kurpfalzbrücke über den Neckar in Mannheim, *Der Stahlbau*, August 1952.

L'état de déformation à deux dimensions ne sera pas étudié plus avant. Remarquons cependant que, si les forces massiques sont constantes, les équations sont valables aussi bien pour l'état de tension que pour l'état de déformation plane. Même dans le cas général, la différence entre les deux états est faible. Il est bien entendu que  $\sigma_z$  s'annule dans le cas d'une paroi mince alors que  $\epsilon_z$ , la dilatation de l'épaisseur, est variable; dans l'état de déformation plane, au contraire,  $\epsilon_z$  est constant et  $\sigma_z$  fonction des autres contraintes.

Pour établir les équations de correspondance qui régissent l'état de tension plane, faisons quelques *restrictions*:

1. Forces appliquées. Elles agissent toutes sur le pourtour de la paroi et pas à l'intérieur.
2. Forces massiques. Ce sont seulement celles de la pesanteur.
3. La surface de la paroi est simplement connexe, il n'y a pas de cavités intérieures.
4. La matière est supposée homogène mais pas nécessairement isotrope. On étudie le cas plus général de la paroi *orthotrope*.

Comme les forces appliquées et les contraintes sont admises uniformes dans l'étendue de l'épaisseur, il est permis de prendre celle-ci égale à l'unité;  $h$  disparaît des calculs et l'on raisonne uniquement sur les tensions.

Conditions d'équilibre du parallélipède élémentaire. La figure 5 montre qu'on doit avoir les relations

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\rho \cdot g$$

où  $\rho$  est la masse spécifique et  $g$ , l'accélération de la pesanteur.

Ces équations sont satisfaites si l'on pose

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (31) \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (32) \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x \quad (33)$$

La fonction  $F$  est appelée fonction de tension d'Airy. On verra plus loin qu'il ne s'agit pas d'un simple artifice de calcul, mais qu'on peut en donner une interprétation mécanique.

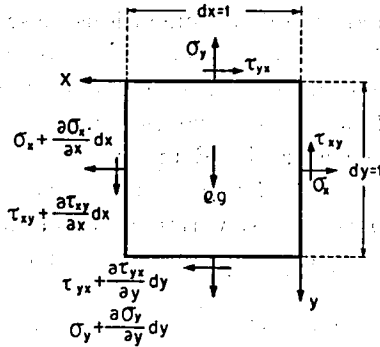


Fig. 5

Condition de compatibilité. Comme le problème de la plaque fléchie, celui de la paroi mince est hyperstatique : les deux équations d'équilibre ne suffisent pas à déterminer les trois contraintes inconnues  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . On doit introduire une condition de déformation qui s'exprime par l'équation de compatibilité. Les relations (7), (8) et (9) montrent que les trois dilatations linéaires et angulaire  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  ne sont pas indépendantes, puisqu'elles sont exprimées par les deux fonctions  $u$  et  $v$ . Elles doivent remplir la condition évidente

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (34)$$

Les équations (13), (14) et (15) permettent d'exprimer les dilatations en fonction des contraintes et donc de la fonction d'Airy grâce à (31) (32) (33). On obtient

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\nu_y}{E_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (35) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\nu_x}{E_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (36)$$

$$-\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \rho \cdot g \cdot x \right) \quad (37)$$

(34) devient alors

$$E_x \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 E_{xy} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (38)$$

avec 
$$E_{xy} = \frac{E_x E_y}{2} \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{\nu_x}{E_x} - \frac{\nu_y}{E_y} \right)$$

Si la matière est isotrope,  $E_x = E_y = E$ ,  $\nu_x = \nu_y = \nu$ ,  $G_{xy} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$   
 et

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (38a)$$

Si l'on trouve une fonction  $F$  solution de (38)<sup>15)</sup> et satisfaisant aux conditions le long du contour dont il va être question, les contraintes seront déterminées du même coup par (31) (32) (33).

Conditions au contour. On distingue deux problèmes différents:

Le problème *aux tensions*, le plus important, lorsque la distribution des forces appliquées est donnée tout le long du pourtour.

Le problème *aux déformations*, quand on impose les déplacements du contour.

*Problème aux tensions.* Considérons d'abord le cas où les forces massiques sont nulles. On suppose d'autre part que le contour est polygonal et l'on prend l'axe  $y$  parallèle au côté examiné. Si l'on décompose les forces appliquées selon les axes de coordonnées, on obtient une tension normale  $\sigma_x^0$  et un cisaillement  $\tau_{xy}^0$ . La fonction  $F$  doit donc remplir les conditions

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x^0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}^0$$

Sous cette forme, le problème est difficile à résoudre et il serait plus avantageux de connaître, le long du côté,  $F$  et  $\frac{\partial F}{\partial x}$ . Remarquons que le plan de référence de la fonction  $F$  peut être choisi quelconque. En effet une fonction  $F' = F + Ax + By + C$ , où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des constantes arbitraires, satisfait les relations et donne les mêmes contraintes que  $F$ . On a ainsi le droit de prendre en un point quelconque, et en un seul, de la paroi ou de son pourtour,  $F = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ . Les relations  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_x^0$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\tau_{xy}^0$  suggèrent

<sup>15)</sup> Si la paroi est soumise à des tensions d'origine thermique ou à d'autres contraintes internes, le terme de droite de l'équation (38) est différent de 0. Ce cas sera étudié au chapitre quatrième, équation (71).

immédiatement une analogie avec la statique appliquée. La dérivée seconde d'un moment est en effet une charge, au signe près; la dérivée première d'un effort tranchant, également.

*Au signe près, la variation de la fonction d'Airy  $F$  le long d'un bord rectiligne parallèle à  $y$  est égale à celle du moment provoqué par des forces normales au bord, de grandeur  $\sigma_x^0$ . De même la variation de la tangente  $\frac{\partial F}{\partial x}$  est égale à celle de l'effort tranchant provoqué par des forces normales au bord de grandeur  $\tau_{xy}$ .*

Cette propriété est aussi valable le long de toute droite intérieure, et même, de façon générale, pour une courbe. Partant d'un point quelconque du contour où, grâce à la remarque énoncée plus haut, on fixe arbitrairement  $F$  et ses dérivées  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ , on déterminera facilement par les méthodes ordinaires de la statique appliquée les valeurs de  $F$  et de sa dérivée  $\frac{\partial F}{\partial n}$  (normale au contour) tout le long du pourtour. En revenant au point de départ on doit retrouver les valeurs admises au début, ce qui donne un contrôle.

Passons rapidement en revue les divers cas qu'on rencontre: Contour rectiligne complètement libre:  $F$  est linéaire,  $\frac{\partial F}{\partial n}$  constant. Bord sollicité uniquement par des efforts normaux:  $\frac{\partial F}{\partial n}$  est constant tandis que  $F$  varie comme le moment des forces appliquées. Bord soumis à du cisaillement pur:  $F$  est linéaire (la pente est donnée par la tangente initiale connue),  $\frac{\partial F}{\partial n}$  varie comme l'effort tranchant provoqué par des forces normales égales aux cisaillements.

Des forces concentrées ou discontinues n'apportent aucune difficulté spéciale puisque leur moment et leurs efforts tranchants se calculent sans autre.

Si l'on considère les forces massiques de la pesanteur, la seule différence et que  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\tau_x^0 - \rho g x$ . Il faut tenir compte du terme supplémentaire en déterminant l'effort tranchant.

*Problème aux déformations.* Ce cas moins fréquent se rencontre notamment quand la paroi mince est liée à un autre élément, une nervure par exemple. Si cette nervure est supposée incompressible, ses dilatations longitudinales  $\epsilon_y$  seront nulles, ainsi que celles de la



paroi. Si de plus les efforts appliqués normaux sont nuls eux aussi ( $\sigma_x = 0$ ) la relation (14) entraîne  $\sigma_y = 0$ , ou  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ . De plus,  $F$  est linéaire. Le bord se comporte alors comme celui d'une plaque mince simplement appuyée. Des conditions du même genre apparaissent dans l'étude de la largeur utile des dalles de compression des poutres.

Parfois on rencontre des problèmes mixtes, les conditions au contour renfermant à la fois des tensions et des déformations.

**Tensions principales.** La fonction d'Airy  $F$  étant connue en tous points,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  le sont également grâce aux relations (31) (32) (33). Il est alors facile de déterminer la direction et la grandeur des tensions principales. On sait que :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (39a) \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (39b)$$

Domaine d'application de la théorie des parois orthotropes. Comme pour les plaques orthotropes, on étudiera surtout ainsi des milieux discontinus dont les éléments structuraux sont perpendiculaires: tôles ondulées raidies ou non<sup>16)</sup>, réseaux divers, etc.

#### 4° Analogie entre l'équation des plaques et celle des parois

La comparaison des relations (24) et (38) montre une analogie frappante. Les problèmes des plaques et ceux des parois obéissent à des équations différentielles du même type. Les conditions au contour sont aussi semblables: dans le problème aux tensions de la paroi, la valeur de  $F$  et de  $\frac{\partial F}{\partial n}$  est donnée au bord, ce qui correspond à une plaque encastrée. Dans le problème aux déformations, on

<sup>16)</sup> Cf. *C. Weber*: Über die mittragende Wirkung einer zweiachsig gewellten Stahlplatte als Gurt von Trägern, *Der Bauingenieur*, März und Mai 1953; *Huber*, op. cit. à la note 13; *E. Schapitz*: Festigkeitslehre für den Leichtbau, Deutscher Ingenieur Verlag, Düsseldorf, 1951, p. 211. Voir aussi *E. Chwalla*: Veröffentlichungen d. Deutschen Stahlbau-Verbandes, 3/54, Köln, 1954, p. 11.

peut obtenir, comme on l'a vu plus haut, des conditions semblables à celles d'une plaque simplement appuyée.

On peut se représenter la fonction d'Airy comme la déflexion  $w$  d'une plaque fléchie soumise à une charge nulle mais dont le pourtour est déformé (déplacements  $F$  et tangentes  $\frac{\partial F}{\partial n}$  fixés). Les contraintes dérivées de la fonction d'Airy correspondent aux courbures de la plaque le long de la fibre perpendiculaire à la direction de la contrainte considérée. C'est donc la contrainte  $\sigma_x$  qui correspond à la courbure le long des  $y$  et inversement.  $\tau_{xy}$  se déduit, avec inversion de signe, de la torsion géodésique de la surface élastique. Les trajectoires des courbures principales de cette dernière, ses lignes de courbure, sont les isostatiques de la paroi. La correspondance que nous venons d'établir est au fond la même que celle employée sous 3<sup>o</sup> dans l'établissement des conditions au contour (contrainte = charge, fonction d'Airy = moment). L'analogie de *Mohr* apprend en effet qu'une ligne élastique — ou l'intersection d'une surface élastique par un plan vertical — est identique au moment des courbures — ou, pour une poutre, des moments réduits  $\frac{M}{EJ} = -\frac{1}{R}$ .

Alors que dans une plaque fléchie les courbures varient d'une façon continue sur toute l'étendue, sauf dans le cas purement théorique d'une charge concentrée, ce n'est pas toujours le cas pour une paroi. Sur le pourtour, les courbures sont en effet données par les forces appliquées qui peuvent présenter des discontinuités. La deuxième dérivée de la fonction  $F$  sur le contour n'est pas continue. C'est un cas limite. La surface élastique présente un point singulier, ce qui complique l'analyse du problème. Nous aurons l'occasion de revenir à cette question plus loin.

### 5<sup>o</sup> Problème mixte plaque-paroi. Grandes déformations des plaques

Considérons de nouveau le corps de la figure 1, soumis cette fois en même temps à des forces perpendiculaires aux faces et à des forces situées dans le plan moyen. On a donc un problème de plaque fléchie et un problème de paroi. En première approximation, on

peut les traiter séparément et superposer les résultats. Ce procédé n'est suffisamment précis que lorsque les déformations de la plaque et celles de la paroi restent très petites et donc négligeables. Autrement il faut tenir compte de la dépendance réciproque. C'est ce que nous allons faire brièvement maintenant.

Pour ne pas alourdir l'exposé, nous nous limitons à l'étude d'un matériau homogène, *isotrope* et parfaitement élastique.

Influence des contraintes du plan moyen sur la flexion de la plaque. Le plan moyen de la plaque fléchie n'est plus une surface neutre. On y trouve, comme d'ailleurs sur tous les autres feuillet, des contraintes  $\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ , contraintes données par le problème de la paroi, et par suite définies par une fonction de tension d'Airy selon les formules (31), (32) et (33). Leurs résultantes sur l'épaisseur  $h$  de la plaque sont les efforts normaux de cette dernière et valent

$$N_x = h \sigma_x \quad N_y = h \sigma_y \quad N_{xy} = h \tau_{xy} = N_{yx} = h \tau_{yx}$$

Considérons un petit élément de la plaque sur lequel agissent les efforts  $N$  définis plus haut (fig. 6a). A cause des déformations  $w$

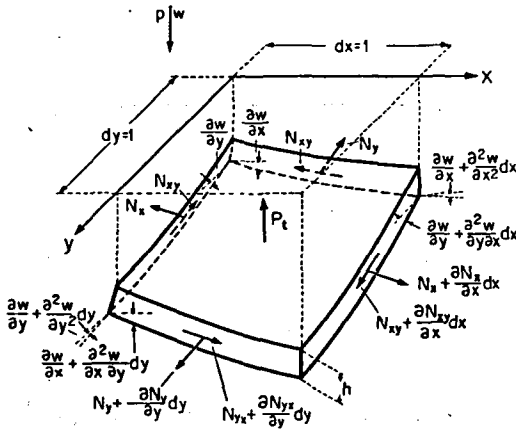


Fig. 6a

de la plaque, la résultante verticale  $p_t$  des efforts  $N$  n'est pas nulle, mais vaut: <sup>9)</sup>

$$p_t = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx$$

$$+ N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy$$

En négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur en  $\frac{\partial N}{\dots} \frac{\partial^2 w}{\dots}$  et en introduisant la fonction  $F$  on a:

$$p_t = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) h;$$

(24a) devient  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$

$$= \frac{h}{D} \left( \frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (40a)$$

Influence des déformations du plan moyen sur les tensions de la paroi. Dans la théorie des plaques fléchies, nous avons négligé les déplacements  $u_0$  et  $v_0$  du plan moyen. Cette hypo-

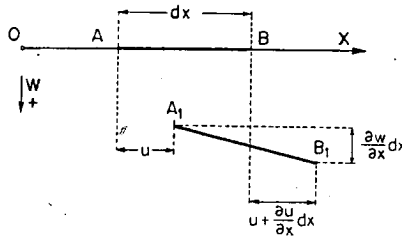


Fig. 6b

thèse doit être abandonnée dans notre cas, puisque le plan moyen n'est plus une surface neutre. La figure (6b) montre un élément linéaire  $AB$  de ce plan suivant la direction  $x$ . L'allongement dû au

déplacement  $u$  vaut  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$ , celui dû à la déformation  $w$  vaut  $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$  puisque  $A_1 B_1 = AB \left[1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}$ . L'allongement unitaire est par suite  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ . Au lieu des relations (7), (8) et (9) on obtient finalement

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Comme auparavant ces dilatations, exprimées par les deux seules fonctions  $u$  et  $v$ , ne sont pas indépendantes et la condition de compatibilité, qui est le pendant de la formule (34), s'exprime par

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (34a)$$

Les équations (35), (36) et (37) demeurent inchangées, sauf que  $E_x = E_y$ ,  $\nu_x = \nu_y$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  puisque la matière est isotrope. En les substituant dans l'équation de compatibilité (34a) on trouve

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (40b)$$

Les équations (40a) et (40b)<sup>17)</sup> et les conditions au contour déterminent les deux fonctions  $w$  et  $F$ . Leur connaissance permet, grâce aux formules (19a) à (23a) et (31) à (33), de calculer les contraintes en chaque point.

Les fonctions  $w$  et  $F$  figurent à la fois dans les deux équations différentielles. Leur intégration est en général très difficile. Nous montrerons dans une application comment elle peut s'effectuer par approximations successives.

<sup>17)</sup> Ces équations ont été établies par *Th. von Karman*: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV, 2, II, Leipzig, 1910. *A. Föppl* avait étudié auparavant les grandes déformations d'une plaque très mince, dont on peut négliger la résistance à la flexion; voir *A. Föppl*: Vorlesungen über technische Mechanik, Band 5, Leipzig, 1907.

Le problème général que nous venons d'exposer contient plusieurs cas particuliers importants.

Grandes déformations des plaques minces fléchies. Même si les forces appliquées sont toutes perpendiculaires au plan moyen de la plaque, l'équation (24a) n'est plus applicable quand les déformations  $w$  ne sont pas petites par rapport à l'épaisseur  $h$ . Cette restriction avait été expressément énoncée au début du paragraphe 2°. On emploiera alors les équations générales (40a) et (40b), précisées par les conditions au contour.

Si la plaque est très mince et que ses déformations sont plusieurs fois plus grandes que l'épaisseur  $h$ , on peut négliger la résistance de la plaque à la flexion et poser  $D=0$ . L'équation (40b) reste inchangée mais (40a) devient

$$\frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

C'est l'équation d'une membrane.

Voilement des plaques minces. Dans ce cas, les forces données sont toutes dans le plan moyen. Si ces forces sont des compressions, l'équilibre peut cesser d'être stable. A côté de son état initial non déformé, la plaque peut prendre une position voisine déformée; l'équilibre est alors assuré par les efforts  $p_i$  dont nous avons parlé. Pour cela, il faut que les charges données aient une certaine valeur appelée charge critique.

Au début du phénomène de voilement, les déformations de la plaque sont très petites, théoriquement même infiniment petites. Leur influence sur la répartition des contraintes ou de leurs résultantes  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  est négligeable. Celles-ci sont déterminées par l'équation (38a). Les solutions obtenues sont introduites dans l'équation (40a) qui, à elle seule, permet de résoudre le problème.

Si l'on veut étudier le comportement *postcritique* de la plaque, on ne peut plus négliger l'influence des déformations sur la répartition de  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$ . On emploiera conjointement (40a) et (40b).

## CHAPITRE DEUXIÈME

### Résolution des équations différentielles des plaques et des parois minces par la méthode du polygone funiculaire

#### 1<sup>o</sup> Introduction

Les difficultés d'une résolution purement mathématique des équations différentielles des plaques et des parois minces ont été soulignées dans l'avant-propos. Le praticien a l'habitude de parler moments, efforts tranchants, flèches; les connaissances lui font parfois défaut qui seraient nécessaires à la compréhension des développements analytiques complexes. En désespoir de cause il se résout souvent à l'emploi de procédés très approximatifs. Pour une plaque par exemple, on répartira les charges par égalisation de la flèche médiane.

La méthode exposée dans ce chapitre n'a recours qu'à des notions simples de la statique appliquée et à des calculs élémentaires. Elle donne néanmoins une solution précise des problèmes posés.

L'analogie établie au chapitre précédent entre les plaques et les parois minces va nous permettre de considérer ces deux problèmes comme un seul et de nous attacher à la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles du type

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (24)$$

$D_x$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_y$  sont des constantes dans toute l'étendue du domaine considéré tandis que  $p$ , donné en chaque point, varie d'une façon quelconque; pour les parois il est nul partout. La fonction  $w$  doit de plus satisfaire à des conditions au contour imposées.

#### 2<sup>o</sup> Relations fondamentales <sup>8)</sup>

La propriété qui sert de base à la méthode du polygone funiculaire est, comme on l'a vu dans l'avant-propos, la suivante: un moment et sa charge sont liés par une relation différentielle du

deuxième degré. La fonction  $w$  que nous devons étudier est généralement continue, ses dérivées aussi. Leur variation correspond à celle d'une charge répartie d'une façon quelconque, mais ne possédant pas de discontinuités ou de sauts brusques.

Pour chercher mathématiquement le moment d'une telle charge, on procéderait à une double intégration. En statique appliquée, il importe de connaître la valeur numérique du moment en un certain nombre de points convenablement choisis qu'on appellera les *nœuds*. Pour calculer le moment aux nœuds, on remplace les charges réparties par des forces concentrées aux points considérés et statiquement équivalentes, les *charges nodales*.

Aux nœuds, le moment des charges nodales doit être égal à celui de la charge répartie donnée. Cette condition est remplie si les charges nodales sont les réactions d'appui de poutres simples secondaires dont la portée vaut la distance entre les nœuds<sup>18)</sup>. Pour calculer exactement ces réactions, il faudrait connaître la variation de la charge répartie. La valeur de cette dernière étant donnée souvent aux nœuds seulement, on en est réduit aux hypothèses. On peut admettre soit une variation linéaire, soit une variation parabolique entre trois points consécutifs<sup>19)</sup>.

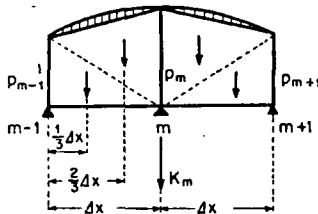


Fig. 7

<sup>18)</sup> En effet, la résultante de toutes les forces à droite — ou à gauche — du nœud considéré est exactement la même. Entre les nœuds, le moment de la charge répartie est augmenté de celui de la poutre secondaire. Le diagramme des moments des charges nodales est le polygone inscrit à la courbe réelle.

<sup>19)</sup> Cette méthode a été introduite par *J. Wanke*: Die günstigste Form des eingespannten Gewölbes und die Bestimmung seiner Eigengewichtsspannungen, Technische Blätter 1920.



Si l'on se borne au cas d'*intervalles égaux entre les nœuds*, on trouve comme l'apprend la figure 7:

Variation linéaire entre deux points consécutifs. *Formule du trapèze*

$$K_m = \frac{\Delta x}{6} (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) \quad (41)$$

Variation parabolique entre trois points consécutifs. Il faut ajouter la surface d'un secteur parabolique qui vaut d'après *Simpson*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta x}{3} (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) - \frac{\Delta x}{2} (p_{m-1} + 2p_m + p_{m+1}) \right] = \\ = \frac{\Delta x}{12} (-p_{m-1} + 2p_m - p_{m+1}) \end{aligned}$$

d'où la *formule de la parabole*

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}) \quad (42)$$

Aux points extrêmes, pour exprimer les conditions au contour, on a besoin des charges nodales de la forme  $K_{m-1}$ . On obtient

$$\text{Formule du trapèze} \quad K_{m-1} = \frac{\Delta x}{6} (2p_{m-1} + p_m) \quad (43)$$

$$\text{Formule de la parabole} \quad K_{m-1} = \frac{\Delta x}{24} (7p_{m-1} + 6p_m - p_{m+1}) \quad (44)$$

On voit sans peine que la formule de la parabole donne une meilleure approximation que celle du trapèze. Il faudra donc l'employer de préférence. Dans certains cas, par contre, on ne peut plus admettre une variation parabolique. Par exemple, on peut savoir que la courbe présente à un nœud une pointe ou un saut brusque. Il faut introduire alors des charges nodales appropriées, comme on le montrera dans les applications.

Les formules des charges nodales nous permettent de considérer uniquement des charges concentrées aux nœuds. C'est la relation liant ces charges verticales concentrées au diagramme de leurs moments que traduit l'équation du polygone funiculaire. Considérons la surface des moments d'une poutre chargée par des forces concentrées verticales. La figure 8a montre que l'équilibre n'est satisfait que si

$$M_m = M_{m-1} + Q_{m-1,m} \cdot \Delta x_{m-1,m}$$

$$Q_{m-1,m} - Q_{m,m+1} = K_m$$

où  $Q$  est l'effort tranchant, constant entre les nœuds.

De même on doit avoir pour le tronçon suivant:

$$M_{m+1} = M_m + Q_{m,m+1} \cdot \Delta x_{m,m+1}$$

Si les distances entre nœuds sont égales:  $\Delta x_{m-1,m} = \Delta x_{m,m+1} = \Delta x$ , on obtient, en éliminant l'effort tranchant par soustraction

$$\underline{-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = K_m \cdot \Delta x} \quad (45)$$

C'est l'équation du polygone funiculaire.

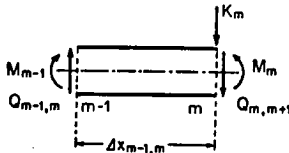


Fig. 8 a

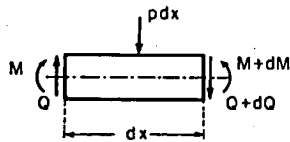


Fig. 8 b

Considérons maintenant un petit élément  $dx$  d'une poutre chargée. On trouve d'après la figure 8 b, en négligeant les infiniments petits de second ordre,

$$\frac{dQ}{dx} = -p \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

En réunissant ces deux relations, on obtient l'équation différentielle bien connue du moment fléchissant

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p \quad (46)$$

Ainsi, comme on l'a déjà dit souvent, la charge spécifique  $p$  est, au signe près, la dérivée seconde du moment fléchissant.

Les mêmes conditions servent de base aux formules (45) et (46). Ces équations ont donc la même signification et le polygone funiculaire représente une relation différentielle du second degré. Ceci

est vrai non seulement pour des moments, mais pour une fonction quelconque  $w^{20}$ ) et l'on peut écrire

$$\underline{w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \Delta x \cdot K_m(w'')} \quad (47)$$

On a changé les signes puisque  $M'' = -p$ .

Il existe cependant quelques différences de principe entre les relations (45) et (46). La formule *analytique* se rapporte à des fonctions continues et décrit leur variation sur tout le domaine. On obtient le moment par une double intégration et l'effort tranchant  $Q = M'$  joue un rôle aussi important que la charge  $p = -M''$  ou le moment  $M$ . On ne dit rien par contre sur la manière d'effectuer l'intégration; la solution du problème dépend de la variation de la charge.

Dans l'équation du *polygone funiculaire* n'interviennent que les charges nodales et les valeurs des moments aux nœuds. On peut tenir compte des particularités de la charge en adaptant les charges nodales. D'autre part, l'effort tranchant  $Q$  a disparu de la relation, son rôle est secondaire.

Dans le cas général de la fonction  $w$ , on a quelquefois besoin de connaître la valeur de la dérivée première  $w'$ , par exemple pour exprimer les conditions au contour. La même analogie de statique appliquée donne la valeur de  $w'$ . L'effort tranchant  $Q = w'$  est facile à calculer à partir des moments  $M = w$  et de la charge  $p = -w''$ . D'après la figure 9

$$Q_{m-1} = \frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta x} + K_{m-1}^{\text{droit}}(p) \quad Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta x} - K_m^{\text{gauche}}(p)$$

<sup>20)</sup> Nous avons envisagé jusqu'ici les charges nodales  $K$  uniquement du point de vue de la statique appliquée. Il est cependant possible d'en donner l'expression mathématique exacte. La définition de la page 32, traduite en langage analytique, permet d'écrire pour une fonction quelconque  $w(x)$ , l'origine des  $x$  coïncidant avec le point  $m$  (fig. 7)

$$\begin{aligned} K_m[w(x)] &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{m-1}^m w(x) \cdot (\Delta x + x) dx + \int_m^{m+1} w(x) \cdot (\Delta x - x) dx \right] = \\ &= \int_{m-1}^{m+1} w(x) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_m^{m-1} w(x) \cdot x dx + \int_m^{m+1} w(x) \cdot x dx \right] \end{aligned}$$

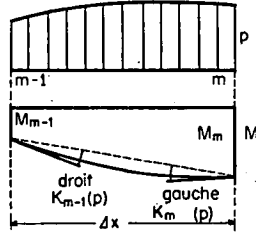


Fig. 9

En passant aux  $w$  et en utilisant la formule du *trapèze* pour les charges nodales, on obtient

$$\Delta x \cdot w'_{m-1} = w_m - w_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{6} (2w''_{m-1} + w''_m) \quad (48a)$$

$$\Delta x \cdot w'_m = w_m - w_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{6} (w''_{m-1} + 2w''_m) \quad (48b)$$

La formule de la *parabole* donne

$$\Delta x \cdot w'_{m-1} = w_m - w_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{24} (7w''_{m-1} + 6w''_m - w''_{m+1}) \quad (49a)$$

$$\Delta x \cdot w'_m = w_m - w_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{24} (3w''_{m-1} + 10w''_m - w''_{m+1}) \quad (49b)$$

En calculant la moyenne pour  $w' \cdot \Delta x$  à partir de relations du type (48b)

$$\Delta x \cdot w'_m = w_m - w_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{6} (w''_{m-1} + 2w''_m)$$

$$\Delta x \cdot w'_m = w_{m+1} - w_m - \frac{\Delta x^2}{6} (2w''_m + w''_{m+1})$$

ou (49b) 
$$\Delta x \cdot w'_m = w_m - w_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{24} (3w''_{m-1} + 10w''_m - w''_{m+1})$$

$$\Delta x \cdot w'_m = w_{m+1} - w_m - \frac{\Delta x^2}{24} (-w''_{m-1} + 10w''_m + 3w''_{m+1}).$$

on obtient la même valeur

$$\Delta x \cdot w'_m = \frac{1}{2} (w_{m+1} - w_{m-1}) - \frac{\Delta x^2}{12} (w''_{m+1} - w''_{m-1}) \quad (50)$$

On peut aussi exprimer la dérivée  $w'$  uniquement en fonction de  $w$ , sans passer par les  $w''$ . Si l'on admet que la fonction  $w'$  varie paraboliquement, on peut écrire :

$$w_{m+1} - w_{m-1} = \frac{\Delta x}{3} (w'_{m-1} + 4w'_m + w'_{m+1}) \quad (\text{Simpson})$$

D'autre part :

$$w_m - w_{m-1} = \frac{\Delta x}{12} (5w'_{m-1} + 8w'_m - w'_{m+1})$$

ou aussi 
$$w_{m+1} - w_m = \frac{\Delta x}{12} (-w'_{m-1} + 8w'_m + 5w'_{m+1})$$

La moyenne donne

$$w_m = \frac{w_{m-1} + w_{m+1}}{2} + \frac{\Delta x}{4} (w'_{m-1} - w'_{m+1}).$$

En combinant ces relations on obtient l'équation

$$w'_m = \frac{1}{12\Delta x} (w_{m-2} - 8w_{m-1} + 8w_{m+1} - w_{m+2}) \quad (51a)$$

et d'autre part les formules de récurrence

$$w'_{m+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{w_{m+2} + 4w_{m+1} - 5w_m - w'_m}{2\Delta x} \right) \quad (51b)$$

$$w'_{m+2} = \frac{5w_{m+2} - 4w_{m+1} - w_m - 2w'_{m+1}}{2\Delta x} \quad (51c)$$

Ces trois relations permettent de calculer la dérivée  $w'$  à partir des  $w$  sur une ligne d'au moins quatre intervalles. La précision est moins grande que par les formules précédentes (48), (49), (50). On a admis en effet une variation parabolique des  $w'$  tandis qu'auparavant cette hypothèse s'appliquait seulement à la fonction  $w''$ .

Toutes les relations qu'on vient d'établir restent valables pour des *dérivées partielles*. En particulier, l'équation (47) devient, si l'on utilise la formule de la parabole

$$w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 10 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] \quad (47a)$$

$$w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1} = \frac{\Delta y^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{n-1} + 10 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_n + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{n+1} \right] \quad (47b)$$

Et de même pour les dérivées deuxièmes et quatrièmes.

Connaissant la fonction  $w$  aux nœuds, on peut calculer ses dérivées secondes et toutes celles d'ordre pair grâce aux équations (47). Il suffit de résoudre un système d'équations linéaires. La valeur au bord doit être fixée par une condition spéciale. Les dérivées d'ordre impair sont fournies par les relations (49), (50) ou (51). L'équation du polygone funiculaire (47) permet également de remplacer une dérivée quelconque par une autre dont l'ordre est inférieur de deux et en fin de compte d'exprimer une relation différentielle par les valeurs de la fonction  $w$  seulement.

Contrairement à la formule aux différences<sup>7)</sup>  $w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \Delta x^2 \cdot w''_m$ , la relation (47) est absolument exacte. La simplification n'intervient que dans le calcul du  $K(w'')$ . On admet une variation parabolique de  $w''$  et non de  $w$ .

### 3° Les divers procédés d'application de la méthode

Généralités. Pour commencer, on décrit le domaine étudié par un réseau rectangulaire dont les lignes sont parallèles aux axes de coordonnées. Toutes les mailles parallèles à l'axe des  $x$  ont la même longueur  $\Delta x$ , dans la direction des  $y$  les mailles valent toutes  $\Delta y$ . Il est bien évident que les surfaces rectangulaires sont particulièrement faciles à traiter de cette manière, mais il est possible d'étudier aussi des formes plus compliquées, comme on le verra plus loin.

C'est aux nœuds de ce réseau que l'on va remplir les équations différentielles. Pour ce faire, on remplace les dérivées partielles par des relations entre les valeurs nodales de la fonction cherchée; ces valeurs sont les inconnues du problème. On peut écrire en chaque nœud les équations différentielles transformées, on obtient autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Ces équations algébriques sont linéaires et leur résolution n'offre pas de difficultés. L'élimination des dérivées peut se faire par divers procédés. Nous allons les décrire brièvement, les développer séparément et les comparer pour terminer.

Procédé explicite ou formel. Pour transformer les équations différentielles (24), on se sert explicitement de l'équation du

polygone funiculaire (47). En écrivant les relations différentielles sous la forme de „charges nodales“ et en les combinant adroitement on trouve des groupes ternaires de dérivées, semblables au membre de droite de la relation (47a), ce qui permet, grâce à la dite relation (47), de réduire l'ordre des dérivées de deux. En fin de calcul, on obtient des schémas fixes, valables pour tous les réseaux et de forme semblable à ceux de la méthode aux différences. Les schémas des bords, influencés par les conditions au contour, sont différents. Les équations linéaires sont déterminées par les schémas, leur résolution fournit la valeur de la fonction aux nœuds. Il est alors aisé de trouver les dérivées le long des lignes du réseau grâce aux relations (47) comme expliqué en fin de 2<sup>o</sup>.

Procédé implicite. Les inconnues sont comme auparavant les valeurs de la fonction aux nœuds du réseau. Supposons qu'elles soient connues. Il est facile alors de remonter aux dérivées secondes, quatrièmes et mixtes. On se sert pour cela de l'analogie du polygone funiculaire. La fonction connue est considérée comme un moment dont on cherche la charge, compte tenu des conditions au contour. Cette recherche peut se faire en appliquant l'équation du polygone funiculaire (47) comme on l'a vu en fin du procédé formel. On pourrait aussi calculer les moments pour des charges unitaires séparément en chaque nœud et résoudre par rapport aux charges le système obtenu.

Remarquons tout de suite une différence essentielle d'avec le procédé formel. Le passage de la fonction à ses dérivées secondes dépend du nombre de mailles, on n'obtient pas des schémas. L'établissement des équations linéaires doit être refait pour chaque cas particulier. D'autre part, chaque équation renfermera toutes les inconnues.

Les valeurs de la fonction  $w$  sont inconnues. Mais rien n'empêche de la prendre successivement égale à 1 en chaque nœud et de calculer pour ces  $w$  unitaires les dérivées nécessaires comme plus haut <sup>21)</sup>. Les vraies valeurs de la fonction  $w$  sont celles qui remplissent l'équa-

---

<sup>21)</sup> Une fois les dérivées secondes connues dans les deux directions, on peut remonter sans autre aux dérivées quatrièmes et mixtes. On a alors un contrôle puisque  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2}$ .

tion différentielle et les conditions aux limites en chaque nœud. On obtient donc de nouveau un système d'équations linéaires dont le nombre est celui des nœuds du réseau. Ce système est simplement moins facile à établir que par le procédé formel. Les solutions sont rigoureusement les mêmes.

Au lieu de prendre comme inconnues les  $w$ , on peut aussi adopter les  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ , etc.<sup>22)</sup>.

Procédé semi-formel. Avec certaines conditions au contour, il n'est pas possible de trouver des combinaisons pour éliminer toutes les dérivées comme dans le procédé formel. On s'arrêtera par exemple aux dérivées secondes. Les schémas renfermeront ces dérivées. Pour les faire disparaître, on procédera comme dans la méthode implicite en tenant compte du réseau.

#### 4<sup>o</sup> Procédé formel. Etablissement des schémas

L'équation donnée (24) doit être satisfaite en tous les points du domaine et l'on peut écrire la relation suivante entre les charges nodales

$$D_x K \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + 2 D_{xy} K \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_y K \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = K(p) \quad (24b)$$

Comme la fonction  $w$  est une fonction de deux variables, il faut d'abord généraliser la formule des charges nodales. Si le réseau est numéroté comme l'indique la figure 10, il suffit de concentrer

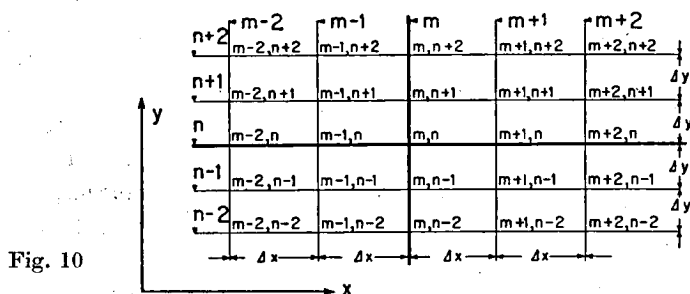


Fig. 10

<sup>22)</sup> Cf. *Ch. Dubas*, op. cit. à la note 9, p. 39.



d'abord, par exemple, parallèlement à la direction  $m$ , ce qui donne en  $m-1, n$  pour une fonction  $p(x, y)$

$$K_{m-1, n}(p) = \frac{\Delta y}{12} (p_{m-1, n+1} + 10 p_{m-1, n} + p_{m-1, n-1}) \text{ de même}$$

$$K_{m, n}(p) = \frac{\Delta y}{12} (p_{m, n+1} + 10 p_{m, n} + p_{m, n-1}) \text{ etc.}$$

En appliquant alors la formule (42) le long de l'axe  $n$ , on obtient:

$$K_{m, n}(p) = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{144} (100 p_{m, n} + 10 p_{m+1, n} + 10 p_{m, n+1} + 10 p_{m-1, n} + 10 p_{m, n-1} + p_{m+1, n+1} + p_{m-1, n+1} + p_{m-1, n-1} + p_{m+1, n-1})$$

Ce qui peut s'écrire schématiquement

$$K(p) = \frac{\Delta x \Delta y}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p \quad \begin{array}{l} \text{Charge nodale} \\ \text{parabolique} \\ \text{dans le plan} \end{array}$$

Relation intermédiaire. Ecrite schématiquement sous forme de charges nodales, l'équation (24b) devient

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \left( D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

Nous allons transformer les trois termes de gauche grâce à (47). Le premier terme devient, si l'on applique (47a) aux dérivées quatrièmes et deuxièmes avec

$$\begin{aligned} \frac{12}{\Delta x^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] = \\ = \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{m-1} + 10 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_m + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{m+1} \quad (47c) \end{aligned}$$

$$D_x \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{12 D_x}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline +10 & -20 & +10 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

La relation (47a) peut aussi s'écrire

$$D_x \left\{ \frac{144}{\Delta x^4} (w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1}) - \frac{12}{\Delta x^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + 10 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] \right\} = 0$$

En ajoutant cette égalité une fois sur les lignes  $n+1$  et  $n-1$ , puis dix fois sur la ligne  $n$ , on transforme le premier terme en

$$\frac{144 D_x}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{144 D_x}{\Delta x^4} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline +10 & -20 & +10 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

Le troisième terme se transforme de la même façon. On permute  $x$  et  $y$ . Quant au deuxième terme, il devient après un double emploi des relations (47)

$$2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{24 D_{xy}}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline +10 & -20 & +10 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\ = \frac{288 D_{xy}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline -2 & +4 & -2 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

On obtient donc la *relation intermédiaire* suivante

$$\left. \begin{array}{l} \frac{144 D_x}{\Delta x^2} \cdot \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline -10 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{144 D_x}{\Delta x^4} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline +10 & -20 & +10 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w + \\ + 2 \frac{144 D_{xy}}{\Delta x^2 \Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline -2 & +4 & -2 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w + \frac{144 D_y}{\Delta y^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -10 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \\ \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{144 D_y}{\Delta y^4} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline -2 & -20 & -2 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w = \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p \end{array} \right\} (24c)$$

On peut aussi écrire sous une forme très condensée

$$F(w) = \frac{144}{\Delta x \Delta y} K(p)$$

Pour éliminer les  $\partial^2$  qui restent, on écrit la relation (24c) un certain nombre de fois en  $m, n$  et dans les autres nœuds. Près du bord, il faut tenir compte des conditions au contour.

Schéma de calcul pour un nœud intérieur. Un tel nœud n'est pas situé sur la première ligne du réseau, c'est-à-dire celle qui est immédiatement parallèle au contour. La position extrême du point considéré  $m, n$  est celle pour laquelle le contour coïncide avec les lignes  $m \pm 2$  ou  $n \pm 2$ .

Pour éliminer les  $\partial^2$ , on écrit la relation (24c) suivant le schéma

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot (24c)$$

Les calculs sont élémentaires et nous ne les reproduirons que pour les deux premiers termes de (24c). Par raison de symétrie, il suffit d'étudier les nœuds du premier quadrant. On remarquera qu'on écrit les relations (24c) d'après le schéma même des charges nodales.

Nœud	$m, n$	$m+1, n$	$m+2, n$	$m, n+1$	$m+1, n+1$	$m+2, n+1$	$m, n+2$	$m+1, n+2$	$m+2, n+2$
Termes en $\partial^2 w / \partial x^2$									
100 fois en $m, n$	-1000			-100					
10 fois en $m \pm 1, n$		-100			-10				
10 fois en $m, n \pm 1$	-10 · 2			-100			-10		
1 fois en $m \pm 1, n \pm 1$		-1 · 2			-10			-1	
144 $D_x / \Delta x^2 \cdot \partial^2 w / \partial x^2$	-1020	-102		-200	-20		-10	-1	
(47) $\rightarrow$ 144 $w D_x / \Delta x^2$	+24 · 102	-12 · 102		+24 · 20	-12 · 20		+24	-12	
Termes en 144 $D_x / \Delta x^2$									
100 fois en $m, n$	-2000	+1000		-200	+100				
10 fois en $m \pm 1, n$	+100 · 2	-200	+100	+10 · 2	-20	+10			
10 fois en $m, n \pm 1$	-20 · 2	+10 · 2		-200	+100		-20	+10	
1 fois en $m \pm 1, n \pm 1$	+4 · 1	-2 · 2	+2 · 1	+10 · 2	-20	+10	+2 · 1	-2	+1
144 $w D_x / \Delta x^2$	-1836	+816	+102	-360	+160	+20	-18	+8	+1
$\Sigma \rightarrow$ 144 $w D_x / \Delta x^2$	+612	-408	+102	+120	-80	+20	+6	-4	+1

On voit qu'il est facile de combiner (24c) pour obtenir des expressions en  $\partial^2$  de la forme 1, 10, 1 et d'éliminer ainsi les dérivées

secondes à l'aide de (47). Pour le terme en  $y^2$ , on procède de la même façon; le schéma est simplement tourné d'un droit. Quant aux autres termes, ils ne contiennent déjà plus de dérivées et le calcul est élémentaire. Pour simplifier, on multiplie à gauche et à droite par  $\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144}$ . On obtient ainsi les schémas (A) qui suivront.

Premières lignes du réseau. Conditions aux limites. Dans le procédé formel, il n'est pas possible de tenir compte de toutes les conditions au contour. Il faut faire certaines restrictions:

1. La plaque ou la paroi étudiée est rectangulaire. Les axes de coordonnées  $x$  et  $y$  sont parallèles aux côtés,  $n$  et  $m$  aussi.
2. Le long des bords parallèles à  $y$ , les valeurs de  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  sont fixées. Les conditions des bords parallèles à  $x$  sont analogues.

On peut alors établir des schémas semblables aux schémas (A). Le nœud considéré se trouve sur la première ligne intérieure du réseau, donc la ligne  $m \pm 1$  ou  $n \pm 1$  coïncide avec le contour. Nous ne donnerons pas le détail de l'établissement des schémas, mais seulement le principe général des opérations. On peut se borner à l'étude d'un bord parallèle à  $y$ . Le schéma pour le côté parallèle à  $x$  s'obtient par rotation d'un droit et permutation de  $x$  et  $y$ .

Nous considérons les deux conditions au contour suivantes:

*Condition au contour (B).* Sur la ligne  $m-1$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  donné<sup>23</sup>). Ce qui peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{m-1,i} = \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\right)_{m-1,i} \quad (52)$$

*Condition au contour (C).* Sur la ligne  $m-1$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  donné. D'après (49a), cette condition s'exprime pour un point à gauche par

$$\frac{144}{\Delta x^4} \cdot 6 \Delta x \cdot \left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)_{m-1,i} = \frac{144}{\Delta x^4} \cdot 6 (w_{m,i} - w_{m-1,i}) - \frac{144}{4 \Delta x^2} \left[ 7 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{m-1,i} + 6 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{m,i} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{m+1,i} \right] \quad (53)$$

<sup>23</sup>) Ce cas a été traité en partant des mêmes bases mais par un procédé très différent, cf. *E. Amstutz*: Genauere Differenzgleichungen zur Berechnung gebogener Platten, Schweizerische Bauzeitung, 20. August 1938.

Pour un bord parallèle à  $x$ , les conditions correspondantes sont  $(B')$  et  $(C')$ . Sur la ligne  $m-1$ , le long du bord, les valeurs de  $w$  peuvent être fixées ou inconnues. Dans le premier cas, il n'est pas nécessaire de disposer d'équations pour les nœuds du contour. On introduit les valeurs données dans les schémas. Dans le second cas, on doit avoir des conditions supplémentaires pour les nœuds du contour.

Nœud sur la première ligne du réseau mais pas au coin. Le processus d'élimination à partir de  $(24c)$ ,  $(52)$ ,  $(53)$  est fixé par

Condition  $(B)$ 

	+10	+1
	+100	+10
	+10	+1

 $\cdot (24c)$ 

-1
-20
-102
-20
-1

 $\cdot (52)$

Condition  $(C)$ 

	+16	+2
	+160	+20
	+16	+2

 $\cdot (24c)$ 

+1
+20
+102
+20
+1

 $\cdot (53)$

Nœud au coin, à l'intersection des lignes  $m-1, n+1$ . Condition  $(B)$  sur le bord  $m-1$ , condition  $(B')$  sur le bord  $n+1$ . Cas  $(BB')$

	+100	+10
	+10	+1

 $\cdot (24c)$ 

-10	-101	-20	-1
-10			
-101			
-20			
-1			

 $\cdot (52')$ 

-101
-20
-1

 $\cdot (52)$

Condition  $(C)$  sur le bord  $m-1$ , condition  $(C')$  sur le bord  $n+1$ . Cas  $(CC')$

	+128	+16
	+16	+2

 $\cdot (24c)$ 

+8	+81	+18	+1
+8			
+81			
+18			
+1			

 $\cdot (53')$ 

+81
+18
+1

 $\cdot (53)$

Condition (C) sur le bord  $m-1$ , condition (B') sur le bord  $n+1$ .  
 Cas (CB')

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline +160 & +20 \\ \hline +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot (24c)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -16 & -162 & -36 & -2 \\ \hline +10 & & & \\ \hline +101 & & & \\ \hline +20 & & & \\ \hline +1 & & & \\ \hline \end{array} \cdot (52')$$

$$\begin{array}{|c|} \hline +101 \\ \hline +20 \\ \hline +1 \\ \hline \end{array} \cdot (53)$$

On obtient ainsi facilement les schémas correspondants.

Récapitulation des schémas du procédé formel.  
 L'équation aux dérivées partielles

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

écrite au nœud  $m, n$  d'un réseau, peut être remplacée par une équation linéaire entre les valeurs des  $w$  aux points voisins. Les schémas qui vont suivre donnent les coefficients de l'équation. Les lignes et les nœuds du réseau sont numérotés comme indiqué à la figure 10. Les axes de coordonnées  $x$  et  $y$  sont respectivement parallèles à  $n$  et  $m$ .

Nœud intérieur  $m, n$ . (Les lignes  $m \pm 1$ ,  $n \pm 1$  ne coïncident pas avec le contour.)

### Schéma (A)

Indépendant des conditions au contour

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ \hline +20 & -80 & +120 & -80 & +20 \\ \hline +102 & -408 & +612 & -408 & +102 \\ \hline +20 & -80 & +120 & -80 & +20 \\ \hline +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +1 & +8 & -18 & +8 & +1 \\ \hline +8 & +64 & -144 & +64 & +8 \\ \hline -18 & -144 & +324 & -144 & -18 \\ \hline +8 & +64 & -144 & +64 & +8 \\ \hline +1 & +8 & -18 & +8 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

$$+D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ \hline -4 & -80 & -408 & -80 & -4 \\ \hline +6 & +120 & +612 & +120 & +6 \\ \hline -4 & -80 & -408 & -80 & -4 \\ \hline +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ \hline +20 & +400 & +2040 & +400 & +20 \\ \hline +102 & +2040 & +10404 & +2040 & +102 \\ \hline +20 & +400 & +2040 & +400 & +20 \\ \hline +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

Alors que le schéma précédent (A) est valable en général, les schémas suivants qui renferment les conditions au contour ne sont établis que pour des parois ou des plaques rectangulaires. On envisage les conditions au contour suivantes:

- (B) Sur les côtés parallèles à  $y$ , dérivée seconde  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  donnée.
- (B') Sur les côtés parallèles à  $x$ , dérivée seconde  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  donnée.
- (C) Sur les côtés parallèles à  $y$ , dérivée première  $\frac{\partial w}{\partial x}$  donnée.
- (C') Sur les côtés parallèles à  $x$ , dérivée première  $\frac{\partial w}{\partial y}$  donnée.

*Nœud  $m, n$  sur la première ligne intérieure du réseau. (La ligne  $m-1$  coïncide avec le bord parallèle à  $y$ .) Conditions au contour (B), (C)*

*Schéma (B)*

Sur la ligne  $m-1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$  donnée

$$\begin{aligned}
 & D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -2 & +5 & -4 & +1 \\ \hline -40 & +100 & -80 & +20 \\ \hline -204 & +510 & -408 & +102 \\ \hline -40 & +100 & -80 & +20 \\ \hline -2 & +5 & -4 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +10 & -19 & +8 & +1 \\ \hline +80 & -152 & +64 & +8 \\ \hline -180 & +342 & -144 & -18 \\ \hline +80 & -152 & +64 & +8 \\ \hline +10 & -19 & +8 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w \\
 & + D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline -40 & -404 & -80 & -4 \\ \hline +60 & +606 & +120 & +6 \\ \hline -40 & -404 & -80 & -4 \\ \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w = \\
 & = D_x \Delta y^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline -20 \\ \hline -102 \\ \hline -20 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline +200 & +2020 & +400 & +20 \\ \hline +1020 & +10302 & +2040 & +102 \\ \hline +200 & +2020 & +400 & +20 \\ \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p
 \end{aligned}$$

*Schéma (C)*

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  donnée

$$\begin{aligned}
 & D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline -220 & +360 & -180 & +40 \\ \hline -1122 & +1836 & -918 & +204 \\ \hline -220 & +360 & -180 & +40 \\ \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline -288 & +540 & -216 & -36 \\ \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w \\
 & + D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline -64 & -648 & -144 & -8 \\ \hline +96 & +972 & +216 & +12 \\ \hline -64 & -648 & -144 & -8 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w = \\
 & = D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +6 & & & \\ \hline +120 & & & \\ \hline +612 & \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x + \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} & & \\ \hline +120 & & & \\ \hline +6 & & & \\ \hline \end{array} \cdot p + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline +320 & +3240 & +720 & +40 \\ \hline +1632 & +16524 & +3672 & +204 \\ \hline +320 & +3240 & +720 & +40 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot p
 \end{aligned}$$

Pour la ligne  $m + 1$  les schémas sont symétriques. Si les lignes  $n \pm 1$  coïncident avec les bords, on tourne les schémas de  $\frac{\pi}{2}$  et permute  $x$  et  $y$ .

*Nœud  $m, n$  au coin.* (La ligne  $m - 1$  coïncide avec le bord parallèle à  $y$ , la ligne  $n + 1$  avec le bord parallèle à  $x$ .) *Conditions au contour (B) (C)*

*Schéma (BB')*

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$  donnée

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -20 & +50 & -40 & +10 \\ \hline -202 & +505 & -404 & +101 \\ \hline -40 & +100 & -80 & +20 \\ \hline -2 & +5 & -4 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +100 & -190 & +80 & +10 \\ \hline -190 & +361 & -152 & -19 \\ \hline +80 & -152 & +64 & +8 \\ \hline +10 & -19 & +8 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w$$



$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -20 & -202 & -40 & -2 \\ \hline +50 & +505 & +100 & +5 \\ \hline -40 & -404 & -80 & -4 \\ \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \Delta y^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline -10 \\ \hline -101 \\ \hline -20 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$$

$$+ D_y \cdot \Delta x^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -10 & -101 & -20 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +100 & +1010 & +200 & +10 \\ \hline +1010 & +10201 & +2020 & +101 \\ \hline +200 & +2020 & +400 & +20 \\ \hline +10 & +101 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

*Schéma (CC')*

Sur la ligne  $m - 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  donnée

Sur la ligne  $n + 1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial y}$  donnée

$$D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -88 & +144 & -72 & +16 \\ \hline -891 & +1458 & -729 & +162 \\ \hline -198 & +324 & -162 & +36 \\ \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline -240 & +450 & -180 & -30 \\ \hline +96 & -180 & +72 & +12 \\ \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -88 & -891 & -198 & -11 \\ \hline +144 & +1458 & +324 & +18 \\ \hline -72 & -729 & -162 & -9 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline +48 \\ \hline +486 \\ \hline +108 \\ \hline +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x$$

$$+ D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +48 & +486 & +108 & +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial y} \Delta y$$

$$+ \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +128 & +1296 & +288 & +16 \\ \hline +1296 & +13122 & +2916 & +162 \\ \hline +288 & +2916 & +648 & +36 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

*Schéma (CB')*

Sur la ligne  $m-1$ , dérivée  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  donnée

Sur la ligne  $n+1$ , dérivée  $\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$  donnée

$$\begin{aligned}
 & D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -110 & +180 & -90 & +20 \\ \hline -1111 & +1818 & -909 & +202 \\ \hline -220 & +360 & -180 & +40 \\ \hline -11 & +18 & -9 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w + 2 D_{xy} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +160 & -300 & +120 & +20 \\ \hline -304 & +570 & -228 & -38 \\ \hline +128 & -240 & +96 & +16 \\ \hline +16 & -30 & +12 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w \\
 & + D_y \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -32 & -324 & -72 & -4 \\ \hline +80 & +810 & +180 & +10 \\ \hline -64 & -648 & -144 & -8 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot w = D_x \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline +60 \\ \hline +606 \\ \hline +120 \\ \hline +6 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x \\
 & + D_y \Delta x^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -16 & -162 & -36 & -2 \\ \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +160 & +1620 & +360 & +20 \\ \hline +1616 & +16362 & +3636 & +202 \\ \hline +320 & +3240 & +720 & +40 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot p
 \end{aligned}$$

Pour les coins des autres quadrants on prendra les schémas symétriques.

**Cas particulier important**

Matière isotrope  $D_x = D_{xy} = D_y = D$ . Mailles carrées  $\Delta x = \Delta y$ .

*Schéma (A)\**

(pour ce cas particulier, on a gardé la même désignation des schémas mais on a ajouté un astérisque \*)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +4 & +32 & +72 & +32 & +4 \\ \hline +32 & -32 & -576 & -32 & +32 \\ \hline +72 & -576 & +1872 & -576 & +72 \\ \hline +32 & -32 & -576 & -32 & +32 \\ \hline +4 & +32 & +72 & +32 & +4 \\ \hline \end{array} \cdot w = \frac{\Delta x^4}{144 D} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ \hline +20 & +400 & +2040 & +400 & +20 \\ \hline +102 & +2040 & +10404 & +2040 & +102 \\ \hline +20 & +400 & +2040 & +400 & +20 \\ \hline +1 & +20 & +102 & +20 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

Schéma (B)\*

+28	+68	+32	+4
+80	-608	-32	+32
-504	+1800	-576	+72
+80	-608	-32	+32
+28	+68	+32	+4

 $\cdot w = \Delta x^2 \cdot$ 

-1
-20
-102
-20
-1

 $\cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{144 D} \cdot$ 

+10	+101	+20	+1
+200	+2020	+400	+20
+1020	+10302	+2040	+102
+200	+2020	+400	+20
+10	+101	+20	+1

 $\cdot p$

Schéma (C)\*

+37	+120	+51	+8
-28	-768	-132	+64
-1602	+3888	-1134	+144
-28	-768	-132	+64
+37	+120	+51	+8

 $\cdot w =$ 

+6
+120
+612
+120
+6

 $\cdot \frac{\partial w^0}{\partial x} \Delta x + \frac{\Delta x^4}{144 D} \cdot$ 

+16	+162	+36	+2
+320	+3240	+720	+40
+1632	+16524	+3672	+204
+320	+3240	+720	+40
+16	+162	+36	+2

 $\cdot p$

Schéma (BB')\*

+160	-532	+80	+28
-532	+1732	-608	+68
+80	-608	-32	+32
+28	+68	+32	+4

 $\cdot w = \Delta x^2 \cdot$ 

-10
-101
-20
-1

 $\cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$



$$+\Delta x^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -16 & -162 & -36 & -2 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + \frac{\Delta x^4}{144 D} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +160 & +1620 & +360 & +20 \\ \hline +1616 & +16362 & +3636 & +202 \\ \hline +320 & +3240 & +720 & +40 \\ \hline +16 & +162 & +36 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

Les termes de droite des schémas précédents ne sont exacts que si les charges nodales peuvent être calculées d'après la formule de la parabole. Ceci n'est pas toujours le cas. Aussi nous allons donner la forme générale des schémas des charges, schémas où ne figurent que les charges nodales. Ces dernières peuvent ainsi être calculées séparément d'après la formule qui convient le mieux. Les relations (52) et (53) ne contiennent pas de termes de charges et à partir de la forme condensée de (24c) on obtient facilement les

*Schémas généraux des termes de charge*

Remplaçant la dernière expression des schémas précédents:

(A)<sup>a</sup>

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

(B)<sup>a</sup>

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & +10 & +1 \\ \hline & +100 & +10 \\ \hline & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

(C)<sup>a</sup>

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & +16 & +2 \\ \hline & +160 & +20 \\ \hline & +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

(BB')<sup>a</sup>

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & +100 & +10 \\ \hline & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

(CC')<sup>a</sup>

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & +128 & +16 \\ \hline & +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

(CB')<sup>a</sup>

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & +160 & +20 \\ \hline & +16 & +2 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

Les schémas que l'on vient de donner permettent d'établir sans difficulté les équations algébriques qui remplacent l'équation aux dérivées partielles (24). Celui qui a déjà pratiqué la méthode aux différences se retrouvera, en terrain connu, puisque les schémas se ressemblent extérieurement. Rappelons pour mémoire le schéma de la méthode aux différences<sup>7)</sup> correspondant à notre schéma (A)\*.

			+1		
		+2	-8	+2	
+1	-8	+20	-8	+1	
		+2	-8	+2	
			+1		

$$w = \frac{\Delta x^4}{D} \cdot p$$

La seule différence est que, dans notre méthode, les chiffres ne sont pas si simples et que les vingt-cinq cases sont remplies. Ces propriétés ne compliquent que peu la préparation des équations et presque pas leur résolution.

**5° Procédé formel et procédé implicite. Etablissement des tableaux permettant de remonter des  $w$  connus à leurs dérivées**

La résolution des équations linéaires, résolution à laquelle nous reviendrons en fin de chapitre, nous fournit les valeurs de la fonction  $w$  aux différents nœuds du réseau. Pour les plaques,  $w$  est l'ordonnée de la surface élastique. Mais ce qu'il importe de connaître, c'est la grandeur des moments et des efforts tranchants. De même dans les parois, la fonction d'Airy qui correspond à  $w$  est moins intéressante que les contraintes. L'examen des formules (19) à (23) et (31) à (33) montre que l'on a besoin des dérivées de la fonction  $w$ . Il suffit d'ailleurs de savoir remonter des  $w$  aux  $w''$ , car les relations (48) à (51) donnent alors les  $w'$ . Pour les dérivées d'ordre supérieur, on procède de façon identique en partant des  $w''$  calculés.

C'est l'équation (47) qui sert de base à ce qui va suivre. Répétons-la en écrivant la charge nodale par la formule de la parabole

$$w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} (w''_{m-1} + 10w''_m + w''_{m+1}) \quad (47d)$$

Considérons maintenant une ligne du réseau à étudier. En tous les nœuds de cette ligne, on connaît les valeurs de  $w$ , on cherche les  $w''$  correspondants. Ecrivons en chaque nœud intérieur la relation (47d). Si la ligne contient  $n$  mailles, il y a  $n - 1$  nœuds intérieurs et l'on peut écrire  $n - 1$  équations linéaires entre les  $w''$  inconnus. Il manque encore deux équations pour les deux points extrêmes, celui du bord gauche et celui du bord droit. Ces équations sont déterminées par les conditions au contour. Ces dernières ont deux formes possibles:

- (I) la dérivée seconde  $w''$  est donnée sur les deux bords;
- (II) la dérivée première  $w'$  est donnée sur les deux bords.

Par  $w''$  il faut entendre  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  ou  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  et de même pour  $w'$ .

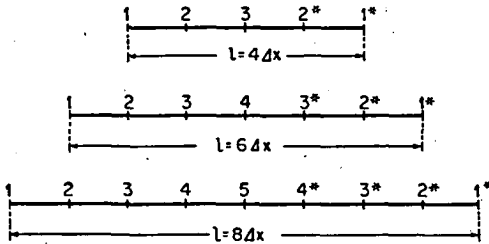


Fig. 11

Nous allons étudier des lignes contenant un nombre de mailles  $n$  valant quatre, six et huit, ceci pour les deux conditions au bord. Les nœuds de ces lignes seront numérotés comme l'indique la figure 11.

Pour obtenir des tableaux généraux, le plus simple est de calculer séparément l'influence d'un  $w$  unitaire successivement en chaque nœud, tous les autres  $w$  étant nuls. L'ensemble de ces résultats donne les diverses lignes d'influence des  $w''$ . Le principe de superposition permet de résoudre tous les cas particuliers. En appelant  $w''_{ik}$  la valeur de  $w''$  au nœud  $i$  pour  $w_k=1$  au nœud  $k$ , tous les autres  $w$  étant nuls, on trouve

$$w_i'' = \sum_{k=1}^n w''_{ik} \cdot w_k \quad (55)$$

Les tableaux des  $w''_{ik}$  se simplifient si l'on utilise la méthode de décomposition des charges d'Andrée<sup>24</sup>). Au lieu de conserver les valeurs  $w_k$  et  $w_{k^*}$ , on considère d'abord aux nœuds symétriques  $k$  et  $k^*$  un  $w$  égal valant  $\frac{1}{2}(w_k + w_{k^*})$ . En ces mêmes points, on envisage ensuite un  $w$  de  $\pm \frac{1}{2}(w_k - w_{k^*})$ , le signe  $+$  se rapportant au nœud  $k$  et le signe  $-$  au  $k^*$ . Le tout redonne bien  $w_k$  en  $k$  et  $w_{k^*}$  en  $k^*$ , mais le premier cas est *symétrique* avec  $w_k = w_{k^*}$  et  $w_k'' = w_{k^*}''$  tandis que le second est *antisymétrique* avec  $w_k = -w_{k^*}$  et  $w_k'' = -w_{k^*}''$ . Au lieu de résoudre les  $n+1$  équations d'une ligne, compte tenu des équations au bord, on travaille avec un système symétrique de  $\frac{n}{2} + 1$  et un système antisymétrique de  $\frac{n}{2}$  équations, ce qui est plus simple. Dans les applications qui suivront, on fera d'ailleurs un usage général du procédé d'Andrée. Les  $w$  obtenus seront donc déjà soit symétriques soit antisymétriques.

Condition au contour (I) dérivée seconde  $w''$  connue au bord. Comme les dérivées secondes  $w''_1$  et  $w''_{1^*}$  sont connues, les deux équations au bord tombent et seules les dérivées  $w''$  des points intérieurs sont inconnues. Nous n'écrivons que les équations pour le réseau à huit mailles, les autres pour quatre et six mailles contiennent simplement moins de termes intermédiaires. En plus de l'influence des  $w$  unitaires, il faut aussi étudier l'influence des dérivées au bord données  $w''_1$  et  $w''_{1^*}$ .

<sup>24</sup>) W. L. Andrée: La méthode de décomposition des charges, Béranger, Paris et Liège, 1925. Dans le cas symétrique  $w''_{ik}$  désigne alors la valeur de  $w''$  au nœud  $i$  pour  $w_k=1$  et  $w_{k^*}=1$ , les autres  $w$  étant nuls.



Pour le réseau à huit mailles, on obtient les systèmes suivants:

Système symétrique									
Inconnues				Termes connus pour					
$w_2''$	$w_3''$	$w_4''$	$w_5''$	$w_1=1$	$w_2=1$	$w_3=1$	$w_4=1$	$w_5=1$	$w_1'' = 1/l^2$
+10	+ 1			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>			-1
+ 1	+10	+ 1			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>		
	+ 1	+10	+ 1			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>	
		+ 1	+5				+12n <sup>2</sup>	-12n <sup>2</sup>	

$\left. \vphantom{\begin{matrix} +10 \\ + 1 \end{matrix}} \right\} \frac{1}{l^2}$

Système antisymétrique							
$w_2''$	$w_3''$	$w_4''$	$w_1=1$	$w_2=1$	$w_3=1$	$w_4=1$	$w_1'' = 1/l^2$
+10	+ 1		+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>		-1
+ 1	+10	+ 1		+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>	
	+ 1	+10			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	

$\left. \vphantom{\begin{matrix} +10 \\ + 1 \end{matrix}} \right\} \frac{1}{l^2}$

On a mis dans les termes connus la lettre  $n$  qui indique le nombre de mailles afin de pouvoir employer les mêmes systèmes pour les lignes à quatre et six intervalles. On doit avoir  $l = n \cdot \Delta$ .

En résolvant les équations, on obtient les tableaux suivants.

Tableau ( $I_4$ ). Quatre mailles, dérivée seconde  $w''$  donnée au bord

Cas symétrique <sup>24)</sup>				
	$w_1 = w_1 = 1$	$w_2 = w_2 = 1$	$w_3 = 1$	$w_1'' = w_1'' = 1/l^2$
	$w_1'' = w_1'' = 0$			$w = 0$ partout
$w_2''$	+19,591837	-43,102041	+23,510204	-0,10204082
$w_3''$	- 3,918367	+47,020408	-43,102041	+0,02040816

$\left. \vphantom{\begin{matrix} +19,591837 \\ - 3,918367 \end{matrix}} \right\} \frac{1}{l^2}$

Cas antisymétrique			
	$w_1 = -w_1 = 1$	$w_2 = -w_2 = 1$	$w_1'' = -w_1'' = 1/l^2$
$w_2''$	+19,2	-38,4	-0,1

$\left. \vphantom{\begin{matrix} +19,2 \\ -38,4 \end{matrix}} \right\} \frac{1}{l^2}$

Tableau ( $I_6$ ). Six mailles, dérivée seconde  $w''$  donnée au bord

Cas symétrique					
	$w_1 = w_{1^*} = 1$	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = w_{3^*} = 1$	$w_4 = 1$	$w_1'' = w_{1^*}'' = 1/l^2$
	$w_1'' = w_{1^*}'' = 0$				$w = 0$ partout
$w_2''$	+43,645361	-91,744330	+ 53,443299	- 5,344330	-0,10103093
$w_3''$	- 4,453608	+53,443299	-102,432990	+53,443299	+0,01030928
$w_4''$	+ 0,890722	-10,688660	+106,886598	-97,088660	-0,00206186

$\frac{1}{l^2}$

Cas antisymétrique				
	$w_1 = -w_{1^*} = 1$	$w_2 = -w_{2^*} = 1$	$w_3 = -w_{3^*} = 1$	$w_1'' = -w_{1^*}'' = 1/l^2$
	$w_1'' = -w_{1^*}'' = 0$			$w = 0$ partout
$w_2''$	+43,636364	-91,636364	+52,363636	-0,10101010
$w_3''$	- 4,636364	+52,363636	-91,636364	+0,01010101

$\frac{1}{l^2}$

Tableau ( $I_8$ ). Huit mailles, dérivée seconde  $w''$  donnée au bord

Cas symétrique						
	$w_1 = w_{1^*} = 1$	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = w_{3^*} = 1$	$w_4 = w_{4^*} = 1$	$w_5 = 1$	$w_1'' = w_{1^*}'' = 1/l^2$
	$w_1'' = w_{1^*}'' = 0$					$w = 0$ partout
$w_2''$	+77,58384	-163,00604	+ 94,06040	- 9,59800	+ 0,95980	-0,10102062
$w_3''$	- 7,83837	+ 94,06040	-172,60404	+ 95,98000	- 9,59800	+0,01020621
$w_4''$	+ 0,79983	- 9,59800	+ 95,98000	-182,20204	+ 95,02020	-0,00104145
$w_5''$	- 0,15997	+ 1,91960	- 19,19600	+190,04041	-172,60404	+0,00020829

$\frac{1}{l^2}$

Cas antisymétrique					
	$w_1 = -w_{1^*} = 1$	$w_2 = -w_{2^*} = 1$	$w_3 = -w_{3^*} = 1$	$w_4 = -w_{4^*} = 1$	$w_1'' = -w_{1^*}'' = 1/l^2$
	$w_1'' = -w_{1^*}'' = 0$				$w = 0$ partout
$w_2''$	+77,58367	-163,00408	+ 94,04082	- 9,40408	-0,10102041
$w_3''$	- 7,83673	+ 94,04082	-172,40816	+ 94,04082	+0,01020408
$w_4''$	+ 0,78367	- 9,40408	+ 94,04082	-163,00408	-0,00102041

$\frac{1}{l^2}$

Condition au contour (II) dérivée première  $w'$  connue au bord. Si c'est la dérivée première  $w'$  qui est donnée, les équations supplémentaires pour les points des bords sont fournies par la relation (49a) qui peut s'écrire

$$w_1' \Delta x = w_2 - w_1 - \frac{\Delta x^2}{24} (7w_1'' + 6w_2'' - w_3'')$$

Comme auparavant il faut aussi étudier l'influence des dérivées connues au bord, ici  $w' \Delta x$ .

Pour le réseau à huit mailles, on peut écrire les systèmes suivants, ceux des réseaux à quatre et six mailles sont semblables.

Système symétrique										
$w_1''$	$w_2''$	$w_3''$	$w_4''$	$w_5''$	$w_1=1$	$w_2=1$	$w_3=1$	$w_4=1$	$w_5=1$	$w_1' \Delta x = 1$
+1	+10	+1			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>			
	+1	+10	+1			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>		
		+1	+10	+1			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>	
		+1	+1	+5				+12n <sup>2</sup>	-12n <sup>2</sup>	
+7	+6	-1			-24n <sup>2</sup>	+24n <sup>2</sup>				-24n <sup>2</sup>

}  $\frac{1}{j^2}$

Système antisymétrique									
$w_1''$	$w_2''$	$w_3''$	$w_4''$	$w_1=1$	$w_2=1$	$w_3=1$	$w_4=1$	$w_1' \Delta x = 1$	
+1	+10	+1		+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>			
	+1	+10	+1		+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>		
		+1	+10			+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>		
+7	+6	-1		-24n <sup>2</sup>	+24n <sup>2</sup>			-24n <sup>2</sup>	

}  $\frac{1}{j^2}$

Tableau (II<sub>4</sub>). Quatre mailles, dérivée première  $w'$  donnée au bord<sup>25)</sup>

Cas symétrique				
	$w_1 = w_{1^*} = 1$	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = 1$	$w_1' \Delta x =$ $= w_{1^*}' \Delta x = 1$ $w = 0$ partout
	$w_1' = w_{1^*}' = 0$			
$w_1''$	-79,384616	+108,307692	-28,923077	-60,307692
$w_2''$	+27,692308	- 54,153846	+26,461539	+ 6,153846
$w_3''$	- 5,538462	+ 49,230769	-43,692308	- 1,230769

}  $\frac{1}{l^2}$

Cas antisymétrique			
	$w_1 = -w_{1^*} = 1$	$w_2 = -w_{2^*} = 1$	$w_1' \Delta x =$ $-w_{1^*}' \Delta x = 1$ $w = 0$ partout
	$w_1' = -w_{1^*}' = 0$		
$w_1''$	-78	+96	-60
$w_2''$	+27	-48	+ 6

}  $\frac{1}{l^2}$

Tableau (II<sub>6</sub>). Six mailles, dérivée première  $w'$  donnée au bord

Cas symétrique					
	$w_1 = w_{1^*} = 1$	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = w_{3^*} = 1$	$w_4 = 1$	$w_1' \Delta x =$ $= w_{1^*}' \Delta x = 1$ $w = 0$ partout
	$w_1' = w_{1^*}' = 0$				
$w_1''$	-177,069768	+229,953488	- 66,279070	+13,395349	-135,348837
$w_2''$	+ 61,534884	-114,976744	+ 60,139535	- 6,697674	+ 13,674419
$w_3''$	- 6,279070	+ 55,813953	-103,116279	+53,581395	- 1,395349
$w_4''$	+ 1,255814	- 11,162791	+107,023256	-97,116279	+ 0,279070

}  $\frac{1}{l^2}$

Cas antisymétrique				
	$w_1 = -w_{1^*} = 1$	$w_2 = -w_{2^*} = 1$	$w_3 = -w_{3^*} = 1$	$w_1' \Delta x =$ $-w_{1^*}' \Delta x = 1$ $w = 0$ partout
	$w_1' = -w_{1^*}' = 0$			
$w_1''$	-177,037975	+229,670886	-63,569620	-135,341772
$w_2''$	+ 61,518987	-114,835443	+58,784810	+ 13,670886
$w_3''$	- 6,151899	+ 54,683544	-92,278481	- 1,367089

}  $\frac{1}{l^2}$

<sup>25)</sup> Alors que dans les tableaux (I) les termes étaient symétriques par

Tableau (II<sub>8</sub>). Huit mailles, dérivée première  $w'$  donnée au bord

Cas symétrique						
	$w_1 = w_{1^*} = 1$	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = w_{3^*} = 1$	$w_4 = w_{4^*} = 1$	$w_5 = 1$	$w_1' \Delta x =$ $= w_{1^*}' \Delta x = 1$
	$w_1' = w_{1^*}' = 0$					$w = 0$ partout
$w_1''$	-314,76273	+408,55756	-115,44558	+ 24,05638	- 2,40564	-240,61394
$w_2''$	+109,38136	-204,27878	+105,72279	- 12,02819	+ 1,20282	+ 24,30697
$w_3''$	- 11,05090	+ 98,23023	-173,78230	+ 96,22553	- 9,62255	- 2,45576
$w_4''$	+ 1,12764	- 10,02349	+ 96,10023	-182,22709	+ 95,02271	+ 0,25059
$w_5''$	- 0,22553	+ 2,00470	- 19,22005	+190,04542	-172,60454	- 0,05012

$\frac{1}{l^2}$

Cas antisymétrique					
	$w_1 =$ $-w_{1^*} = 1$	$w_2 =$ $-w_{2^*} = 1$	$w_3 =$ $-w_{3^*} = 1$	$w_4 =$ $-w_{4^*} = 1$	$w_1' \Delta x =$ $-w_{1^*}' \Delta x = 1$
	$w_1' = -w_{1^*}' = 0$				$w = 0$ partout
$w_1''$	-314,76215	+408,55243	-115,39642	+ 23,57033	-240,61381
$w_2''$	+109,38107	-204,27621	+105,69821	- 11,78517	+ 24,30691
$w_3''$	- 11,04859	+ 98,20972	-173,58568	+ 94,28133	- 2,45524
$w_4''$	+ 1,10486	- 9,82097	+ 94,15857	-163,02813	+ 0,24552

$\frac{1}{l^2}$

Utilisation des tableaux. Dans le procédé formel, ces tableaux servent à remonter des  $w$ , donnés par la résolution des équations bâties sur les schémas, aux dérivées de  $w$ ; ils permettent ainsi d'obtenir les moments, contraintes, etc.

Dans le procédé implicite, les tableaux précédents, ou d'autres analogues, sont utilisés pour établir les valeurs des dérivées entrant dans l'équation différentielle (24) et partant, les équations algébriques qui remplacent (24). Nous n'insisterons pas sur ce point, car nous n'aurons pas à appliquer le procédé implicite.

rapport à la diagonale principale, cette propriété n'est pas remplie pour les tableaux (II). La loi de réciprocité  $w_{ik}'' = w_{ki}''$  ne joue pas, ce qui ne doit pas surprendre, car les  $w''$  ne sont pas des flèches.

## 6° Procédé semi-implicite. Etablissement de deux schémas

Le procédé formel, on l'a vu sous 4°, ne permet pas de tenir compte de toutes les conditions au contour. Aussi allons-nous montrer comment le procédé semi-implicite traite deux nouveaux cas :

*D)* Réaction d'appui  $V_x$  nulle au bord. Ce cas se présente dans le bord complètement libre d'une plaque.

*E)* Effort tranchant  $Q_x$  nul au bord. Si le bord libre de la plaque doit avoir partout une tangente horizontale, le  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  est nul et par conséquent les réactions d'appui supplémentaires le sont aussi. C'est donc simplement l'effort tranchant  $Q_x$  qui s'annule au bord.

*D)* Réaction d'appui  $V_x$  nulle au bord, sur la ligne  $m$ . En se bornant au cas de la matière isotrope, la condition  $V_x = 0$  s'exprime par (28a)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (28a)$$

On pose

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Gamma$$

Alors la relation (48a) permet d'écrire

$$\Gamma_{m+1} - \Gamma_m - \frac{\Delta x^2}{6} (2\Gamma_m'' + \Gamma_{m+1}'') = 0$$

Comme la valeur de  $w$  varie sans fortes courbures aux environs d'un bord libre, la formule du trapèze (48) donne une précision suffisante.

Mais  $\Gamma'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$

En tenant compte de l'équation différentielle fondamentale (24)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D},$$

on obtient

$$\Gamma'' = \frac{p}{D} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

D'où

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+1} - \Gamma_m + \frac{\Delta x^2}{6} \left[ 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] = \\ = \frac{\Delta x^2}{6D} (2p_m + p_{m+1}) \end{aligned}$$

En écrivant cette relation 10 fois en  $m, n$ , 1 fois en  $m, n+1$  et en  $m, n-1$  pour  $\Delta y = \Delta x$ , on peut éliminer les dérivées quatrièmes grâce à l'équation du polygone funiculaire (47c). On obtient ainsi les schémas suivants:

Nœud  $m, n$  sur le bord du réseau. Le long de la ligne  $m$ ,  $V_x = 0$   
Isotropie. Mailles carrées;  $\Delta y = \Delta x$

Schéma (D) \* entre dérivées secondes

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -1+4\nu & +1+2\nu \\ \hline -10-8\nu & +10-4\nu \\ \hline -1+4\nu & +1+2\nu \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \begin{array}{|c|c|} \hline +2+\nu & +4-\nu \\ \hline -28+10\nu & +16-10\nu \\ \hline +2+\nu & +4-\nu \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\Delta x^2}{6D} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +2 & +1 \\ \hline +20 & +10 \\ \hline +2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

E) Effort tranchant  $Q_x$  nul au bord, sur la ligne  $m$ . Comme sous (D) on admet que la matière est isotrope et l'on a d'après (22a)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

On introduit l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

L'équation (49a) doit être prise de préférence à cause de la forte variation des courbures près d'un point encastré et l'on obtient

$$(\Delta w)_{m+1} - (\Delta w)_m - \frac{\Delta x^2}{24} [7(\Delta'' w)_m + 6(\Delta'' w)_{m+1} - (\Delta'' w)_{m+2}] = 0$$

Mais 
$$\Delta'' w = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Comme plus haut (24) permet de transformer  $\Delta'' w$  en  $\frac{p}{D} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Delta w)$

Donc 
$$(\Delta w)_{m+1} - (\Delta w)_m + \frac{\Delta x^2}{24} \left[ 7 \frac{\partial}{\partial y^2} (\Delta w)_m + 6 \frac{\partial}{\partial y^2} (\Delta w)_{m+1} - \frac{\partial}{\partial y^2} (\Delta w)_{m+2} \right] = \frac{\Delta x^2}{24D} (7p_m + 6p_{m+1} - p_{m+2})$$

En procédant exactement comme sous (D) on trouve le schéma correspondant.

Noeud  $m, n$  sur le bord du réseau. Le long de la ligne  $m$ ,  $Q_x = 0$   
Isotropie. Mailles carrées,  $\Delta y = \Delta x$

Schéma (E) \* entre les opérateurs  $\Delta$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +5 & +8 & -1 \\ \hline & & \\ \hline -34 & +8 & +2 \\ \hline +5 & +8 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta w = \frac{\Delta x^2}{12 D} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +7 & +6 & -1 \\ \hline & & \\ \hline +70 & +60 & -10 \\ \hline +7 & +6 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot p \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Rappelons pour conclure que la relation intermédiaire (24c) est aussi un schéma semi-explicite entre les dérivées secondes et les  $w$ .

### 7° Comparaison des divers procédés exposés

Relevons tout d'abord que les divers procédés conduisent tous à des résultats absolument identiques pour les  $w$ . Ceci est évident, puisque l'on part des mêmes relations de base. La différence consiste uniquement dans la manière de mettre en œuvre ces relations.

Le procédé *formel* est le plus simple à appliquer. Il doit être préféré partout où cela est possible. Les schémas sont valables pour tous les réseaux, indépendamment du nombre et de la grandeur des mailles. L'établissement des équations linéaires est un travail purement mécanique qui n'exige pas de connaissances théoriques.

On peut voir là justement un inconvénient du procédé formel, car la signification de statique appliquée des opérations effectuées a complètement disparu. Le procédé *implicite* offre de ce point de vue un avantage didactique certain. Malheureusement, il rend laborieux l'établissement des équations algébriques. La disposition des réseaux y joue un rôle prépondérant, de sorte que, pratiquement, on doit reprendre tout le calcul dès le début pour chaque cas.

Dans les applications, on emploiera donc le procédé formel. Pour les conditions aux limites où il est en défaut, on se servira du procédé *semi-formel* qui, tout en présentant à un moindre degré les inconvénients du procédé implicite, est néanmoins plus rapide.



## 8° Résolution des équations algébriques linéaires

Il n'est pas dans notre intention de parler longuement de la résolution des systèmes d'équation algébriques linéaires. La méthode à la fois la plus rapide et la plus sûre est à notre avis celle de l'*algorithme de Gauss*<sup>26)</sup>. Celui qui a déjà résolu des équations par ce procédé sait que les calculs sont beaucoup moins longs et fastidieux que l'on ne se l'imagine. D'autre part, si seuls les termes connus du système changent, le travail supplémentaire est faible.

Les divers procédés d'itération ou de relaxation ne sont pas à conseiller dans notre cas. Les coefficients des équations n'ont pas tous le même signe, de sorte que le système est très sensible. D'autre part, les dérivées des  $w$  se calculant par des différences de grands nombres, les  $w$  doivent donc être précis.

## CHAPITRE TROISIÈME

### Application de la méthode du polygone funiculaire au calcul des plaques minces fléchies

#### 1° Introduction

Le problème des plaques minces fléchies a fait l'objet d'un grand nombre de publications. Malheureusement les résultats obtenus concernent généralement des cas facilement accessibles à l'analyse mathématique. Telles sont les plaques circulaires, car l'équation de *Lagrange* (24a), transformée en coordonnées polaires, ne contient plus qu'une seule variable si la charge est symétrique par rapport au centre. De nombreux auteurs se sont de même occupés

---

<sup>26)</sup> Pour l'application de ce procédé, tant aux systèmes symétriques par rapport à la diagonale principale qu'à ceux qui ne le sont pas, voir par exemple: *F. Stüssi*: Vorlesungen über Baustatik, zweiter Band, Birkhäuser, Basel, 1954, p. 82. Ou *R. Guldán*, Rahmentragwerke und Durchlaufträger, Springer, Wien, 1949, p. 132.

des plaques rectangulaires simplement appuyées. Les plaques de même forme, mais soumises à d'autres conditions sur leur périmètre, sont moins souvent traitées. Les surfaces plus compliquées, triangle, parallélogramme, etc., n'ont pas tenté beaucoup d'auteurs.

Bien que la méthode du polygone funiculaire soit utile surtout pour les problèmes inaccessibles à l'analyse, on a consacré aux plaques rectangulaires simplement appuyées une partie importante de l'étude qui va suivre; on disposait ainsi des valeurs exactes pour la comparaison et le contrôle de la précision obtenue. Pour les conditions au contour et les formes plus complexes, on donnera quelques exemples qui montreront les vastes possibilités d'application de la méthode.

On traitera principalement les *plaques isotropes* qu'on appellera simplement *plaques*. Les plaques orthotropes seront désignées expressément.

## 2° Plaques rectangulaires simplement appuyées sur les quatre bords

Prenons les axes de coordonnées comme l'indique la figure 12 a. L'équation différentielle de la plaque, supposée isotrope comme on vient de le dire, est donnée par (24 a)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (24 a)$$

Quant aux conditions aux limites c'est (26) qui les fournit, d'où

$$\left. \begin{array}{l} w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \frac{a}{2} \\ w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{b}{2} \end{array} \right\} \quad (56)$$

Pour établir les équations algébriques qui remplacent l'équation différentielle (24 a), il faudra donc employer le schéma (A) pour les nœuds intérieurs, le schéma (B) pour la première ligne intérieure du réseau et le schéma (BB') pour le coin. Dans tous ces schémas, on fera  $D_x = D_{xy} = D$ . Pour remonter aux dérivées, on se servira des tableaux (I) avec  $w_1 = w_{1*} = 0$  et  $w_1'' = w_{1*}'' = 0$ .

Nous allons d'abord donner un exemple complet de calcul pour un réseau de quatre fois quatre mailles avec différents cas de charge. Nous étudierons ensuite brièvement des réseaux à mailles plus serrées.

a) Réseau à quatre fois quatre mailles. Rapport  $\frac{b}{a} = 1,4$

Le réseau est numéroté comme l'indique la figure 12a. On étudie les charges suivantes:

Charge sinusoïdale dans les deux sens.

Charge uniformément répartie sur toute la surface.

Charge en forme de prisme triangulaire.

Charge uniformément répartie sur une partie de la surface.

Charge concentrée au centre de la plaque.

Charge linéaire uniforme le long de l'un des axes de symétrie.

Charge hydrostatique.

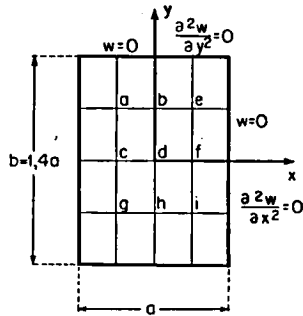


Fig. 12a

Nous appliquons à toutes ces charges le procédé de décomposition des charges d'Andrée, déjà cité au chapitre précédent. Toutes les charges envisagées présentent au moins un axe de symétrie confondu avec  $x$  ou  $y$ . On obtiendra donc par décomposition un système symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées  $x$  et  $y$  et un système antisymétrique par rapport à  $x$  et symétrique par rapport à  $y$  ou inversement. Dans le cas général, la décomposition donne quatre systèmes. Etudions d'abord le système symétrique par rapport à  $x$  et  $y$ .

*Système symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées  $x$  et  $y$ .* La surface élastique présentera les mêmes symétries que les

charges et l'on aura  $w_a = w_e = w_g = w_i$ ,  $w_b = w_h$ ,  $w_c = w_f$ . Seules sont donc inconnues les ordonnées  $w_a$ ,  $w_b$ ,  $w_c$ ,  $w_d$  et l'on obtient quatre équations linéaires. Comme on étudie de nombreux cas de charge, le plus simple est de prendre le terme connu successivement égal à 1 dans chaque équation. Les résultats forment la matrice conjuguée du système, qui permet de traiter par superposition tous les cas de charge obéissant aux symétries exigées.

Pour écrire les coefficients des équations, on se sert, comme on l'a dit plus haut, du schéma (A) en  $d$ , du schéma (B) en  $c$ , du schéma (B) tourné d'un droit avec permutation des  $x$  et des  $y$  en  $b$  et du schéma (BB') en  $a$ <sup>27)</sup>.

On a  $\Delta x = \frac{a}{4}$ ,  $\Delta y = \frac{b}{4}$  et par conséquent les coefficients des schémas valent  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1,4^2 = 1,96$  et  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = \frac{1}{1,4^2} = 0,510204082$ . On passe à droite le terme  $D$  et on multiplie par deux les équations écrites en  $b$  et  $c$  et par quatre celle écrite en  $a$  pour obtenir une matrice symétrique par rapport à la diagonale principale, ce qui facilite la résolution par l'algorithme de Gauss. Donnons quelques exemples de calcul des coefficients des équations.

Equation  $d$ , coefficient de  $w_d$ . Le schéma (A) donne  $1,96 \cdot 612 + 2 \cdot 324 + 0,510204082 \cdot 612 = 2159,76490$ .

Equation  $d$ , coefficient de  $w_a$ . Le schéma (A) donne  $[1,96(-80) + 2 \cdot 64 + 0,510204082 \cdot (-80)] 4 = -278,46531$ .

Equation  $b$ , coefficient de  $w_a$ . Le schéma (B) tourné d'un droit avec permutation de  $x$  et  $y$  donne  $[0,510204082 \cdot 2(100 + 20) + 2 \cdot 2(-152 + 8) + 1,96 \cdot 2(-404 - 4)] 2 = -4105,82204$ , etc.

On obtient donc le système suivant

	$w_d$	$w_c$	$w_b$	$w_a$	Termes de charge			
$d$	+2159,76490	-2052,91102	- 521,92653	- 278,46531	+1			
$c$	-2052,91102	+4319,52980	- 278,46531	-1043,85306		+2		
$b$	- 521,92653	- 278,46531	+4319,52980	-4105,82204			+2	
$a$	- 278,46531	-1043,85306	-4105,82204	+8639,05959				+4

<sup>27)</sup> Pour faciliter le travail on pourra utiliser un calque des schémas, à la même échelle que le réseau soigneusement numéroté, et qu'on promènera sur les nœuds de ce dernier.

La résolution fournit la matrice conjuguée suivante n° 1

	l en d	l en c	l en b	l en a
$w_d$	+1,595489545	+1,863172678	+1,490981252	+2,073179161
$w_c$	+0,931586339	+1,595489545	+1,036589581	+1,490981252
$w_b$	+0,745490626	+1,036589581	+1,595489545	+1,863172678
$w_a$	+0,518294790	+0,745490626	+0,931586339	+1,595489545

} · 10<sup>-3</sup>

Charge sinusoidale dans les deux sens.  $p = p_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$  (Fig. 12b). Cette charge est symétrique par rapport à  $x$  et  $y$ . On peut donc directement employer la matrice conjuguée. Il suffit de calculer les termes de charge en  $d, c, b, a$  d'après les schémas (A), (B), (BB').

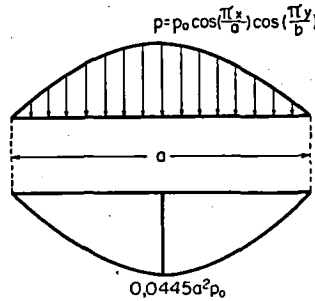


Fig. 12b. Variation le long de l'axe  $x$  du moment  $M_x$ , plaque de la fig. 12a, charge sinusoidale,  $\nu = 0$

Valeurs de	
$p = p_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$	
0,5	0,707106781
0,707106781	1

Termes de charge	
+ 8486,9957	+12002,4244
+12002,4244	+16973,9913

$\cdot \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144 D} p_0$

Avec  $\frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144} = 53,1684028 \cdot 10^{-6} \cdot a^4$ , la matrice conjuguée donne

Nœud	$d$	$c$	$b$	$a$	
$w$	+4515,85123	+3193,18903	+3193,18903	+2257,92561	$\cdot 10^{-6} a^4 p_0/D$
$\partial^2 w/\partial x^2$	- 44,497354	- 31,464381	- 31,464381	- 22,248677	$\cdot 10^{-3} a^2 p_0/D$
$\Delta w$	- 67,200086	- 47,517636	- 47,517636	- 33,600043	$\cdot 10^{-3} a^2 p_0/D$

Pour trouver les  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  il suffit d'employer le tableau (I<sub>4</sub>). Par exemple  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  au nœud  $c$ ,  $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_c = [3193,18903 (-43,102041) + 4515,85123 (23,510204)] 10^{-6} = -31,464381 \cdot 10^{-3}$ . Quant aux  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  on voit qu'ils valent  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . Donc  $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  sera égal à  $1,5102040816 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ .

Ce  $\Delta w$  est nécessaire pour le calcul des  $Q$ . En effet on sait que

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \quad (22a)$$

La formule (49a) nous permet alors d'écrire

$$Q_{x_m} = \left[ \frac{1}{\Delta x} (-\Delta w_{m+1} + \Delta w_m) + \frac{\Delta x}{24} (7 \Delta'' w_m + 6 \Delta'' w_{m+1} - \Delta'' w_{m+2}) \right] D$$

Il faut donc connaître les  $\Delta'' w$ . Ceux-ci sont donnés à partir des  $\Delta w$  par le tableau (I<sub>4</sub>) si l'on connaît le  $\Delta'' w$  au bord. Mais  $\Delta'' w$  vaut  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p}{D} - \frac{\partial}{\partial y^2} (\Delta w)$  d'après (24a).

D'autre part, le long du bord  $x = \pm \frac{a}{2}$ ,  $w$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  sont nuls partout, donc  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  et  $\Delta w$  le sont également et  $\Delta'' w = \frac{p}{D}$  au bord. Dans le cas qui nous occupe  $p=0$  au bord donc  $\Delta'' w=0$ . On obtient ainsi

	$d$	$c$	$b$	$a$	
$\Delta'' w$	+662,16223	+468,21936	+468,21936	+331,08112	$10^{-3} \cdot \frac{p_0}{D}$

d'où  $Q_x$  au milieu du grand côté, qui est  $(Q_x)_{max}$ , avec  $\Delta x = \frac{a}{4}$  et  $\Delta w = \Delta'' w = 0$  au bord  $(Q_x)_{max} = \frac{p_0 a^2}{a} \left[ 47,517636 \cdot 4 + \frac{1}{4 \cdot 24} (6 \cdot 468,21936 - 662,16223) \right] 10^{-3} = 0,21243673 p_0 \cdot a$ . On

trouve de même pour  $Q_x$  au quart du côté  $Q_x = 0,15021546 p_0 \cdot a$ . Il reste encore à calculer les  $M_{xy}$ . Nous déterminerons la réaction au coin de la plaque qui vaut comme on l'a vu au chapitre premier  $2(M_{xy})_{max}$ . D'où

$$R = -2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot D = -2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot D$$

Il faut d'abord connaître les  $\frac{\partial w}{\partial x}$  le long du bord  $x = \pm \frac{a}{2}$ . Pour cela on emploie la relation (49a) qui donne

$$\frac{\partial w}{\partial x} m = \frac{1}{\Delta x} (w_{m+1} - w_m) - \frac{\Delta x}{24} \left( 7 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} m + 6 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} m+1 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} m+2 \right)$$

Au milieu du grand côté

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\alpha^3 p_0}{D} \left[ 3,19318903 \cdot 4 - \frac{1}{4 \cdot 24} (-6 \cdot 31,464381 + 44,497354) \right] \cdot 10^{-3} = 14,275766 \cdot \alpha^3 \frac{p_0}{D} 10^{-3}$ . Au quart du grand côté  $\frac{\partial w}{\partial x} = 10,094491 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^3 \frac{p_0}{D}$ . Pour passer au  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)$  on utilise de nouveau la relation (49a). On doit d'abord calculer les  $\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$ , ce qui se fait à l'aide de (I<sub>4</sub>). Au bord  $\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  est nul puisque  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  s'annule le long du bord. On obtient alors

$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$	0	-99,466994	-140,667566	$10^{-3} \cdot \frac{\alpha^3 p_0}{D}$
--	---	------------	-------------	--

$$D'où R = 2(1-\nu) a^2 p_0 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{4}{1,4} \cdot 10,094491 + \frac{1}{24 \cdot 4 \cdot 1,4} \cdot (6 \cdot 99,466994 - 140,667566) \right] = 2(1-\nu) a^2 \cdot p_0 \cdot 0,03223525$$

On remarquera que les  $w$ , les  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , les  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , etc. suivent une loi exactement sinusoïdale comme les  $p$ . L'erreur relative est donc nulle, puisque la solution analytique est bien de la forme  $w = w_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ . Il suffit donc de comparer les valeurs extrêmes que donne le tableau suivant. Les valeurs exactes sont calculées d'après les relations

$$w_{max} = \frac{p_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{max} = \frac{\pi}{a} w_{max}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 w_{max},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2}{ab} w_{max}, \quad \left(\frac{Q_x}{D}\right)_{max} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \pi^3}{a} w_{max}$$

	$w$ $p_0 a^4/D$	$\partial w/\partial x$ $p_0 a^3/D$	$\partial^2 w/\partial x^2$ $p_0 a^2/D$	$R$ $p_0 a^2 \cdot 2(1-\nu)$	$Q_x$ $p_0 a$	
Résultat exact	+4,50120953	+14,14097	-44,42516	± 31,73226	+210,7728	· 10 <sup>-3</sup>
Trouvé	+4,51585123	+14,27577	-44,49735	± 32,23525	+212,4367	· 10 <sup>-3</sup>
Erreur en %	+0,325%	+ 0,953%	+ 0,163%	+ 1,585%	+0,789%	

Comme un chapitre sera spécialement consacré à la précision, nous ne nous y attarderons pas plus longtemps pour le moment.

*Charge uniformément répartie sur toute la plaque:  $p = p_0$  (Fig. 12 c).* Comme la précédente, cette charge est symétrique par rapport à  $x$  et  $y$ . Le calcul est donc semblable et nous ne le répéterons pas en entier. Les termes de charge sont déterminés par les schémas, les  $w$  par la matrice conjuguée et les  $\partial^2 w$  par le tableau (I<sub>4</sub>). On obtient

Nœud	$d$	$c$	$b$	$a$	
T. ch.	+20736	+19008	+19008	+17424	· $\Delta x^2 \Delta y^2 p_0 / 144 D$
$w$	+7069,4252	+5068,3733	+5208,0032	+3744,3874	$a^4/D \cdot 10^{-6} \cdot p_0$
$\partial^2 w/\partial x^2$	-66,389674	-52,253605	-48,412944	-38,949522	$a^2/D \cdot 10^{-3} \cdot p_0$
$\partial^2 w/\partial y^2$	-30,522561	-21,629903	-29,730581	-21,547066	$a^2/D \cdot 10^{-3} \cdot p_0$
$\Delta w$	-96,912235	-73,883508	-78,143525	-60,496588	$a^2/D \cdot 10^{-3} \cdot p_0$

Avec  $\nu = 0,3$  on trouve alors, en se rappelant que  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ .

$$w_{max} = 0,077198 \frac{a^4 p_0}{E h^3} (0,0770)^{28} (M_x)_{max} = 0,075546 a^2 p_0 (0,0753)$$

$$(M_y)_{max} = 0,050439 a^2 p_0 (0,0506).$$

<sup>28)</sup> Les valeurs entre parenthèses sont tirées de l'ouvrage déjà cité de *S. Timoshenko: Théorie des plaques et des coques*, Béranger, Paris et Liège, 1951, ou *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York and London, 1940.



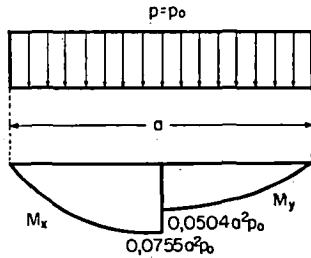


Fig. 12c. Variation le long de l'axe  $x$  des moments  $M_x$  et  $M_y$ , plaque de la fig. 12a, charge uniforme,  $\nu = 0,3$

Le calcul des  $Q$  se fait à partir des  $\Delta w$  comme plus haut. La seule différence est que  $p$  au bord vaut  $p_0$ , donc  $\Delta'' w = \frac{p_0}{D}$ ; le tableau (I<sub>4</sub>) donne alors à partir des  $\Delta w$  et du  $\Delta'' w_1$  connus

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta w)$	+1,0	+0,906104	-0,102041	+0,703082	+0,02041	$\cdot \frac{p_0}{D}$
--	------	-----------	-----------	-----------	----------	-----------------------

D'où  $(Q_x)_{max} = 0,41117 a \cdot p_0$  (0,411). Le  $(Q_y)_{max}$  se calcule de façon semblable, en n'oubliant pas que  $\frac{b}{a} = 1,4$ .

On trouve  $(Q_y)_{max} = 0,36103 a p_0$  (0,361). Les réactions d'appui  $V_x$  valent  $V_x = Q_x + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ . Pour obtenir  $(V_x)_{max}$  il suffit de déterminer le terme supplémentaire; on procède comme pour le  $Q_x$ , avec la seule différence que l'on part des  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  et non du  $\Delta w$ . Au bord le  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  est nul et l'on a

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$	0	+0,229751	+0,268297	$\cdot \frac{p_0}{D}$
--	---	-----------	-----------	-----------------------

D'où  $(V_x)_{max} = 0,4796 a p_0$  (0,478).

Pour  $(V_y)_{max}$  on obtient de même

$$(V_y)_{max} = 0,47124 a p_0 \text{ (0,471).}$$

Pour le calcul de la réaction au coin  $R$  on procède également comme pour la charge sinusoidale. Il se présente une petite difficulté pour la détermination de  $\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$ . En effet  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  est bien

théoriquement nul tout le long du bord. Mais au coin  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  et  $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$  le sont également. Il faut donc que  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p}{2D}$  au coin. On peut admettre une variation parabolique de  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  entre le coin et le premier noeud du réseau sur le bord et alors  $\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cong \frac{1}{3} \Delta x \frac{p}{2D}$ , ici  $0,041667 p_0 \frac{a}{D}$ . Ce terme correctif est proportionnel à la longueur de la maille du réseau et à la limite il s'annule comme il se doit.

On obtient donc

$\frac{\partial w}{\partial x}$	+16,90759	+22,84778	$p_0 \frac{a^3}{D} 10^{-3}$
---------------------------------	-----------	-----------	-----------------------------

$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$	-0,041667	-0,097753+0,004252	-0,096829-0,000850	$p_0 \frac{a}{D}$
--	-----------	--------------------	--------------------	-------------------

D'où  $R_{max} = 0,083045 a^2 \cdot p_0 (0,083)$ .

Charge en forme de prisme triangulaire, arête le long de l'axe des  $y$ . Cette charge remplit également les conditions de symétrie exigées. Seul le calcul des termes de charge introduit un problème nouveau. La charge obéit à l'équation

$$p = p_0 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \quad 0 < x < \frac{a}{2}, \quad p = p_0 \left(1 + \frac{2x}{a}\right) \quad -\frac{a}{2} < x < 0 \quad (\text{Fig. 12d})$$

Elle présente au droit de l'axe  $y$  une variation brusque de tangente. En remplaçant cette ligne brisée par une parabole, on introduit

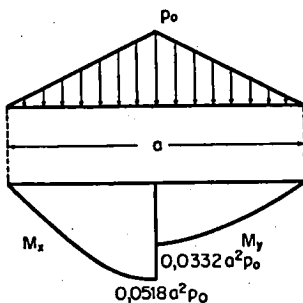


Fig. 12d. Variation le long de l'axe  $x$  des moments  $M_x$  et  $M_y$ , plaque de la fig. 12a, charge prismatique,  $\nu = 0,3$

une erreur non négligeable. Mais rien n'est plus facile que d'adapter la charge nodale aux circonstances.

Examinons le cas plus général d'une courbe quelconque dont la tangente a en  $m$  un saut  $\alpha_m$  (fig. 13). En considérant la courbe comme la différence d'un trapèze ( $p_0$ ) et d'une parabole ( $\Delta p$ ), on trouve

$$K_m(p_0) = \frac{\Delta x}{6} (p_{0_{m-1}} + 4p_{0_m} + p_{0_{m+1}})$$

$$K_m(\Delta p) = \frac{\Delta x}{12} (\Delta p_{m-1} + 10\Delta p_m + \Delta p_{m+1})$$

Avec

$$\alpha_m \Delta x = -p_{0_{m-1}} + 2p_{0_m} - p_{0_{m+1}}$$

on obtient

$$K_m(p) = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}) - \frac{\Delta x^2}{12} \alpha_m \quad (42a)$$

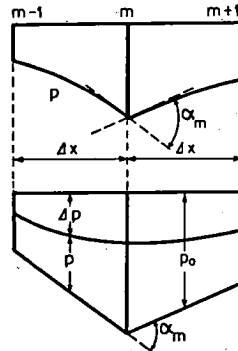


Fig. 13

Le terme correctif pour la formule de la parabole est donc  $-\frac{\Delta x^2}{12} \alpha_m$ . Pour la charge nodale parabolique dans le plan, avec des sauts donnés  $\alpha$  le long de la ligne  $m$  (fig. 10), on obtient

$$K(p) = \frac{\Delta x \Delta y}{144} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p - \frac{\Delta x^2}{144} \cdot \Delta y \cdot \begin{array}{|c|} \hline +1 \\ \hline +10 \\ \hline +1 \\ \hline \end{array} \cdot \alpha$$

Le terme de droite de la relation intermédiaire (24c) devient

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p - \begin{array}{|c|} \hline +1 \\ \hline +10 \\ \hline +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \cdot \alpha \text{ ou g\u00e9n\u00e9ralement } K_{m,n}(p) \cdot \frac{144}{\Delta x \Delta y}$$

On se rappelle que la relation (24c) a \u00e9t\u00e9 \u00e9crite un certain nombre de fois dans les points autour de  $m$ . Pour les sch\u00e9mas (A), (B), (BB') par exemple on a d\u00e9j\u00e0 donn\u00e9 les sch\u00e9mas g\u00e9n\u00e9raux des termes de charge, sch\u00e9mas r\u00e9p\u00e9t\u00e9s ci-dessous

$(A)^a$ 

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline +10 & +100 & +10 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

 $(B)^a$ 

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & +10 & +1 \\ \hline & +100 & +10 \\ \hline & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta y K(p)$$

 $(BB')^a$ 

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & +100 & +10 \\ \hline & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta x \Delta x K(p)$$

Dans le cas qui nous occupe  $\alpha = \frac{p_0}{\Delta x}$ . Le terme correctif pour les charges nodales dans le plan des points situés sur l'axe des  $y$  vaut  $\frac{12 \Delta x p_0}{\Delta x} = 12 p_0$ . De là on trouve facilement les corrections définitives, par exemple en  $d$  120·12 (A) en  $c$  12·12 (B), etc.

Le reste du calcul s'effectue comme dans les deux exemples précédents et nous ne donnerons pas de détails.

Nœud		$d$	$c$	$b$	$a$	
T. de ch.	Parab.	+17568	+10224	+16104	+9372	} $\Delta x^2 \Delta y^2 / 144 D$
	Correc.	- 1440	- 144	- 1320	- 132	
	Défin.	+16128	+10080	+14784	+9240	
	$w$	+4557,1530	+3201,2035	+3364,2588	+2360,0656	} $10^{-6} a^4 p_0 / D$
	$\partial^2 w / \partial x^2$	-45,900681	-30,838825	-34,035173	-22,629234	
	$\partial^2 w / \partial y^2$	-19,507028	-13,779171	-19,319808	-13,501371	
	$\Delta w$	-65,407709	-44,617996	-53,354981	-36,130605	

Avec  $\nu = 0,3$  on a  $w_{max} = 0,049764 \frac{a^4}{E h^3} p_0$  (0,0497).

$(M_x)_{max} = 0,051753 a^2 p_0$  (0,0518)  $(M_y)_{max} = 0,033277 a^2 p_0$  (0,0331).  
 $(Q_x)_{max} = 0,19505 a p_0$  (0,193)  $(V_x)_{max} = 0,23814 a p_0$  (0,236).  $(Q_y)_{max} = 0,19786 b p_0$  (0,193)  $(V_y)_{max} = 0,25373 b p_0$  (0,250)  $R = 0,03435 a b p_0$  (0,035). Si l'arête du prisme est le long de l'axe des  $x$ , seuls les termes de charge en  $b$  et  $c$  sont permutés.

On trouve facilement

$$\begin{aligned}
 w_{max} &= 0,050780 \frac{a^4}{E h^3} p_0 \quad (0,0507) & (M_x)_{max} &= 0,050813 a^2 p_0 \quad (0,0508) \\
 (M_y)_{max} &= 0,037910 a^2 p_0 \quad (0,0382) & R &= 0,032236 a b p_0 \quad (0,033) \\
 (Q_x)_{max} &= 0,31359 a p_0 \quad (0,311) & (V_x)_{max} &= 0,37050 a p_0 \quad (0,371) \\
 (Q_y)_{max} &= 0,099335 b p_0 \quad (0,099) & (V_y)_{max} &= 0,14712 b p_0 \quad (0,146)
 \end{aligned}$$

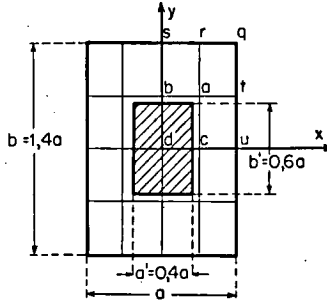


Fig. 14

*Charge uniformément répartie sur un rectangle intérieur d'axes  $x y$ .*  
 La figure 14 montre que les conditions de symétrie sont satisfaites. On peut donc utiliser la matrice conjuguée. Pour le calcul des termes de charge, il faut tenir compte des discontinuités de la charge. Sur les côtés du rectangle intérieur,  $p$  passe en effet brusquement de 0 à  $p_0$ . La formule de la parabole donnerait alors une approximation très grossière de la réalité, surtout quand les mailles sont très lâches.

Mais il est facile de calculer les charges nodales exactes. Il suffit de se rappeler que ces charges nodales sont les réactions de poutres simples dont la portée est la distance entre les nœuds. Concentrons d'abord parallèlement à  $x$ . On trouve  $0,08 a p_0$  en  $a$  et  $c$  et  $0,24 a p_0$  en  $b$  et  $d$ . De même, avec  $b_1 = 0,6 a = 0,428571429 b$ , on obtient dans la direction  $y$   $0,091836735 b p_0$  en  $a$  et  $b$  et  $0,244897959 b p_0$  en  $c$  et  $d$ . De là les charges nodales dans le plan et, grâce aux schémas généraux  $(A)^a$ ,  $(B)^a$ ,  $(BB')^a$  de l'exemple précédent, les termes de charge définitifs. La suite des opérations n'offre rien de spécial.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	
<i>K</i> ( <i>p</i> )	+7,3469388	+22,0408163	+19,5918367	+58,7755102	$10^{-3} a b p_0$
T. ch.	+1,2097959	+ 2,9779592	+ 2,7379592	+ 6,7395918	$\Delta x \Delta y a b p_0 / D$
<i>w</i>		+ 7,588775	+ 7,930651	+11,638747	$10^{-3} a_1 b_1 a^2 p_0 / D$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,1287513 a_1 b_1 \frac{p_0}{D} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,0738910 a_1 b_1 \frac{p_0}{D}$$

$$a_1 = 0,4 a, \quad b_1 = 0,6 a \quad \nu = 0,3$$

$$(M_y)_{max} = 0,11252 a_1 b_1 p_0 (0,111) \quad (M_x)_{max} = 0,15092 a_1 b_1 p_0 (0,151)$$

*Charge concentrée centrale P.* C'est le cas limite de l'exemple précédent, quand  $a_1$  et  $b_1$  tendent vers 0. On ne peut toutefois pas procéder de la même façon, en faisant en  $d$   $K(p) = P$ . Sous la charge, les courbures  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  sont infinies, leur variation entre  $c$  et  $d$  n'est pas parabolique. Cette supposition n'est acceptable que lorsque le rectangle intérieur a ses côtés du même ordre de grandeur que les mailles.

Comme le cas de la charge concentrée est purement théorique — il y a toujours répartition — nous allons utiliser une méthode semi-analytique, celle introduite par *A. Pucher* pour la détermination des surfaces d'influence<sup>29)</sup>. On considère d'abord la solution connue de la plaque circulaire fléchie par une charge centrale  $P = 1$ .

On a

$$w_0 = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi D} \left( \ln r^2 + \frac{2x^2}{r^2} + 1 \right)$$

$r$  est la coordonnée polaire des points de la plaque, mesurée avec une unité quelconque;  $\ln$  est le logarithme naturel de base  $e$ . Cette fonction  $w_0$  ne remplit pas les conditions au contour. Il reste sur les bords des  $w_0$  et des  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$ . Nous considérons maintenant notre plaque rectangulaire, soumise sur son contour à des déplacements  $-w_0$  et à des courbures  $-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ ,  $-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$  de même grandeur mais de signe contraire à celles dont on vient de parler, plaque au surplus

<sup>29)</sup> *A. Pucher*: Die Momenteneinflussfelder rechteckiger Platten, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1938. Voir aussi *Girkmann*, op. cit. à la note 10, p. 229.

non chargée. Les schémas (A), (B), (BB') nous permettent sans autre de résoudre ce problème. Il suffit d'y introduire les  $w_0$  et les  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$  ou  $\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$  connus au bord, ce qui fournit les „termes de charge“ des équations. Par superposition, on obtient finalement une solution qui remplit les conditions aux limites et l'équation  $\Delta \Delta w = \frac{P}{D}$  sous le point d'application de la charge et  $\Delta \Delta w = 0$  ailleurs. C'est la solution cherchée.

Revenons à notre problème particulier et prenons comme unité pour la coordonnée polaire  $r = \frac{a}{2} = 2 \Delta x$  (Fig. 14).

	$u$	$t$	$q$	$r$	$s$	
$r^2$	1	1,49	2,96	2,21	1,96	$\frac{a^2}{4}$
$\ln r^2$	0	0,39778	1,08519	0,79299	0,67295	$\frac{a^2}{32 \pi D}$
$w_0$	0	+0,29709	+1,60607	+0,87625	+0,65949	$\frac{1}{8 \pi D}$
$\partial^2 w_0 / \partial x^2$	+3	+2,74106	+2,76086			
$\partial^2 w_0 / \partial y^2$			+3,40951	+3,56675	+3,67295	

Ces valeurs changées de signe, introduites dans les schémas (A), (B), (BB'), donnent les „termes de charge“. La matrice conjuguée fournit alors les solutions  $w_{part}$ .

	$a$	$b$	$c$	$d$	
T. ch.	+59,740	+232,911	+383,711	+192,924	} $\frac{a^2}{32 \pi D}$ $\frac{a^2}{E h^3} 10^{-1}$
$w_{part}$	+0,6983356	+1,0244867	+1,1224364	+1,4938455	
$w_0$	+0,1141	-0,17477	-0,17329	0	
$w_{tot}$	+0,63754	+0,92299	+1,03099	+1,62266	

On a donc  $w_{max} = 0,162266 \frac{a^2}{E h^3} P$  (0,1621)

Les  $\partial^2 w$  se calculent aussi par superposition, par exemple  $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_c = \frac{-1,395}{8 \pi D}$ . Le choix de l'unité pour la coordonnée polaire ne joue aucun rôle sur le résultat final bien que tous les calculs intermédiaires soient différents. Les  $w$  et les  $\partial^2 w$  concordent exactement.

C'est la loi de réciprocité de Maxwell qui donne à l'étude de la charge concentrée son importance pratique. En effet, puisque  $w_{ik} = w_{ki}$  la surface élastique de la plaque fléchie par une force  $P = 1$  en  $k$  est aussi la surface d'influence de l'ordonnée  $w_k$ . Pour les plaques simplement appuyées sur les quatre bords, cette concordance est aussi valable pour les courbures  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . L'étude des surfaces d'influence est très vaste et nous ne pouvons nous y attarder davantage.

*Charge linéaire uniforme le long de l'axe de symétrie  $x$  ou  $y$ .* La remarque précédente nous permet de traiter ce cas par la méthode des surfaces d'influence. Les ordonnées  $w_{tot}$  trouvées pour  $P = 1$  au centre sont les ordonnées de la surface d'influence de la déformation  $w_d = w_{max}$ . Il suffit d'intégrer le long des  $x$  ou des  $y$ . Pour cela on peut employer la formule de *Simpson* qui donne pour  $x$

$F_{Simpson} = \frac{\Delta x}{12} (32 p_c + 8 p_d)$ . En sommant les charges nodales on aurait  $F_{ch. nod.} = \frac{\Delta x}{12} (28 p_c + 11 p_d)$ . En moyenne  $F = \frac{\Delta x}{12} (30 p_c + 9,5 p_d)$ . D'où pour la charge

$$\text{le long de } y \quad w_{max} = 0,12573 \frac{p a^3}{E h^3} \quad (0,1257)$$

$$\text{le long de } x \quad w_{max} = 0,09655 \frac{p a^3}{E h^3} \quad (0,0963)$$

A partir des mêmes formules pour le plan on peut aussi retrouver le cas de la charge uniforme sur toute la plaque. La concentration le long de  $y$  donne 0,08453 et 0,12573, puis en intégrant le long de  $x$ ,  $w_{max} = 0,07760 \frac{p_0 a^4}{E h^3}$  (0,0770).

*Charge hydrostatique dans la direction  $x$ .*  $p = p_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right)$  (Fig. 12e). On obtient ce cas par superposition d'une charge uniformément répartie sur toute la surface  $\frac{p_0}{2}$  et d'une charge antisymétrique par rapport à l'axe des  $y$  obéissant à la loi  $p = p_0 \cdot \frac{x}{a}$ , valant donc sur les bords  $x = \pm \frac{a}{2}$   $\pm \frac{p_0}{2}$ .



La première sollicitation a déjà été calculée; il suffit de diviser tous les résultats par 2. Pour la charge antisymétrique on ne peut employer la matrice conjuguée et il faut écrire à l'aide des mêmes

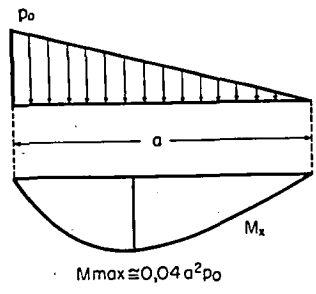


Fig. 12e. Variation le long de l'axe  $x$  du moment  $M_x$ , plaque de la fig. 12a, charge hydrostatique,  $\nu = 0,3$

schémas (B), (BB') un nouveau système tenant compte des relations  $w_a = w_g = -w_e = -w_i$ ,  $w_c = -w_f$ ,  $w_b = w_d = w_h = 0$ . On n'a donc que deux inconnues  $w_a$  et  $w_c$ . Le calcul des termes de charge ne présente aucune difficulté et l'on obtient le système suivant

	$w_c$	$w_a$	T. ch.	
c	+1825,80245	- 734,56327	+4320	$\frac{4 x^2 \Delta y^2}{144 D}$
a	- 367,28163	+1825,80245	+3960	

On trouve alors facilement les  $w$ , les  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  à l'aide du tableau (I<sub>4</sub>), cas antisymétrique et les  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  à l'aide de (I<sub>4</sub>), cas symétrique.

On obtient

	$w$ $10^{-6} p_0 a^4 / D$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $10^{-3} p_0 a^2 / D$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ $10^{-3} p_0 a^2 / D$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ $10^{-3} p_0 a^2 / D$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]$ $p_0 / D$	
a	+153,0069	-5,87546	-1,117377	-7,77500	+0,5	+0,2986-0,05
c	+187,3591	-7,19459	-0,449547	-7,95882	+0,5	+0,3056-0,05

De là on tire facilement les valeurs des moments, réactions, etc. Il ne reste plus qu'à superposer.

Le cas de la charge hydrostatique dans le sens  $y$  se calcule de façon identique. Nous donnerons simplement les résultats.

Charge hydrostatique $p = p_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{a} \right)$							
$w(x = -0,25a)$ $a^4 p_0 / E h^3$	$w(x = +0,25a)$ $a^4 p_0 / E h^3$	$M_x(x = -0,25a)$ $a^2 p_0$	$M_x(x = +0,25a)$ $a^2 p_0$	$M_y(x = -0,25a)$ $a^2 p_0$	$M_y(x = +0,25a)$ $a^2 p_0$	$V_{max}$ $a p_0$	$R_{max}$ $a b p_0$
+0,02563 (0,0257)	+0,02972 (0,0298)	+0,02204 (0,0221)	+0,03670 (0,0367)	+0,01605 (0,0160)	+0,02126 (0,0212)	0,3245 (0,323)	0,0350 (0,035)
Charge hydrostatique $p = p_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{b} \right)$							
+0,023744 (0,0238)	+0,03313 (0,0332)	+0,02253 (0,0225)	+0,03480 (0,0348)	+0,01263 (0,0126)	+0,03163 (0,0315)	0,2491 (0,250)	0,0377 (0,038)

*b) Autres réseaux à quatre fois quatre mailles*

Nous avons étudié, en plus, des plaques de rapport  $\frac{b}{a}$  valant 1 et 1,5. Pour la charge sinusoïdale, la précision est rigoureusement la même que pour le rapport 1,4. Les résultats des autres cas de charge sont également à peu de chose près ceux qu'indique *Timoshenko*. Il n'y a donc pas d'intérêt à les reproduire.

En définitive, on voit qu'un réseau de quatre fois quatre mailles donne une précision suffisante pour l'étude des plaques simplement appuyées, et ceci quelle que soit la charge. Nous allons cependant envisager des réseaux plus denses afin de chiffrer l'amélioration de la précision.

*c) Réseau à six fois six mailles. Plaque carrée*

Pour un tel réseau, les erreurs seront encore plus petites, de l'ordre de 0,1 %. Comme *Timoshenko* ne donne que des valeurs à trois chiffres, la seule charge qui permette d'évaluer exactement la précision est la charge sinusoïdale dans les deux sens. Cette charge donne d'ailleurs en général, sauf pour les courbures, les

erreurs les plus grandes. C'est donc la seule que l'on va considérer. Le réseau sera numéroté comme l'indique la figure 15. On a tenu compte des symétries par rapport aux axes et aux diagonales qui permettent de réduire le nombre des équations à six.

Valeurs de $\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$		
0,25	0,4330127019	0,5
0,4330127019	0,75	0,8660254038
0,5	0,8660254038	1,0

Les schémas (A)\*, (B)\*, (BB')\* permettent sans difficulté d'écrire les équations linéaires. Pour faciliter la résolution on multiplie par deux l'équation en *b* et on divise par quatre l'équation en *f*.

	$w_a$	$w_b$	$w_c$	$w_d$	$w_e$	$w_f$	Termes de charge $p_0 \Delta x^2 / 144 D$
<i>a</i>	+1732	-1216	+ 136	- 32	+ 64	+ 4	+ 4736,262
<i>b</i>	-1216	+3672	-1152	-1088	+ 88	+ 64	+16406,894
<i>c</i>	+ 136	-1152	+1808	- 64	- 512	+ 72	+ 9472,525
<i>d</i>	- 32	-1088	- 64	+2020	-1088	- 32	+14208,787
<i>e</i>	+ 64	+ 88	- 512	-1088	+1880	-576	+16406,894
<i>f</i>	+ 4	+ 64	+ 72	- 32	- 576	+468	+ 4736,262

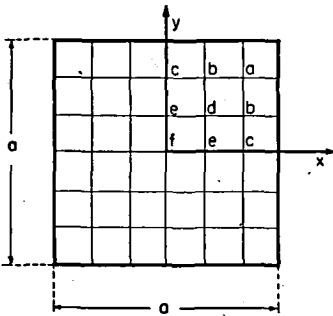


Fig. 15

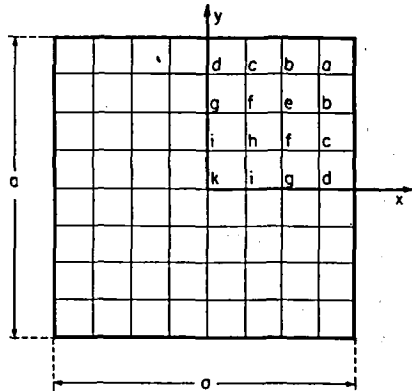


Fig. 16

Les termes de charge suivent la même loi sinusoïdale que les  $p$ . La résolution du système montre qu'il en est de même pour les  $w$ . On avait d'ailleurs déjà remarqué cette propriété pour le réseau précédent. Il suffit par conséquent de donner  $w_{max} = w_f$  qui vaut

$$w_{max} = 479,271 p_0 \frac{\Delta x^4}{144 D} = 0,00256811 p_0 \frac{\alpha^4}{D}$$

Le calcul des courbures se fait à l'aide du tableau (I<sub>6</sub>). Les  $Q$  et  $R$  se déterminent comme auparavant à l'aide de (49a). Les opérations ne présentent rien de particulier et nous donnerons seulement plus loin les résultats.

*d) Réseau à huit fois huit mailles. Plaque carrée*

Nous nous limiterons aussi à la charge sinusoïdale. Les symétries réduisent le nombre des inconnues à dix comme le montre la figure 16.

Valeurs de $\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$			
0,1464466094	0,2705980501	0,3535533906	0,3826834324
0,2705980501	0,5	0,6532814806	0,7071067812
0,3535533906	0,6532814806	0,8535533906	0,9238795325
0,3826834324	0,7071067812	0,9238795325	1,0

En écrivant le système on multiplie les équations en  $b, c, f$  par deux et on divise l'équation en  $k$  par quatre.

	$w_a$	$w_b$	$w_c$	$w_d$	$w_e$	$w_f$	$w_g$	$w_h$	$w_i$	$w_k$	$p_0 \Delta x^4 / 144 D$
$a$	+1732	-1216	+ 136		- 32	+ 64		+ 4			+ 288,5521
$b$	-1216	+3536	-1152	+ 136	-1152	+ 80	+ 64	+ 64	+ 8		+1066,3494
$c$	+ 136	-1152	+3744	-1216	- 64	-1024	- 64	+ 152	+ 64		+1393,2526
$d$		+ 136	-1216	+1800	+ 64	- 56	- 576	+ 64	+ 72		+ 754,0229
$e$	- 32	-1152	- 64	+ 64	+1872	-1152	+ 144	- 32	+ 64	+ 4	+ 985,1784
$f$	+ 64	+ 80	-1024	- 56	-1152	+3824	-1088	-1088	+ 88	+ 64	+2574,3951
$g$		+ 64	- 64	- 576	+ 144	-1088	+1880	- 64	- 512	+ 72	+1393,2526
$h$	+ 4	+ 64	+ 152	+ 64	- 32	-1088	- 64	+2020	-1088	- 32	+1681,8046
$i$		+ 8	+ 64	+ 72	+ 64	+ 88	- 512	-1088	+1880	-576	+1820,3722
$k$					+ 4	+ 64	+ 72	- 32	- 576	+468	+ 492,5892

Comme la résolution du système donne des  $w$  exactement de la forme  $w = w_{max} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ , il suffit d'indiquer  $w_{max} = w_k$  qui vaut  $w_{max} = 0,002567005 a^4 \frac{p_0}{D}$ .

Le tableau qui va suivre permet de voir le degré de précision atteint par les différents réseaux.

Plaque carrée simplement appuyée sur les quatre bords, $p = p_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$					
Genre de réseau	$w_{max}$ $a^4 p_0 / D$	$(\partial w / \partial x)_{max}$ $a^3 p_0 / D$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_{max}$ $a^2 p_0 / D$	$R$ ( $\nu = 0,3$ ) $a^2 p_0$	$Q_{max}$ $a p_0$
Valeur exacte	0,002566496	0,00806288	0,02533030	0,0354624	0,159155
4 × 4 mailles	0,002574843	0,00813974	0,02537146	0,0360245	0,160411
6 × 6 mailles	0,00256811	0,00807979	0,0253381	0,035589	0,159436
8 × 8 mailles	0,002567005	0,00806846	0,02533281	0,0355044	0,159249
4 × 4 mailles	+0,325 %	+0,953 %	+0,1625 %	+1,585 %	+0,789 %
6 × 6 mailles	+0,063 %	+0,210 %	+0,031 %	+0,357 %	+0,176 %
8 × 8 mailles	+0,020 %	+0,069 %	+0,010 %	+0,118 %	+0,059 %

Puisque les  $w$  et les dérivées calculées obéissent à la loi  $w = w_{max} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$  l'erreur relative est nulle. Comme la question de la précision sera reprise plus tard, on terminera ici l'étude des plaques rectangulaires simplement appuyées.

### 3° Plaques rectangulaires totalement encastrées sur les quatre côtés

Si les axes de coordonnées coïncident avec les axes du rectangle, les conditions au contour sont données par (25), soit avec la fig. 17

$$\left. \begin{aligned} w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \frac{a}{2} \\ w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

L'équation différentielle (24a) reste naturellement valable. Pour les nœuds intérieurs, on emploie donc le schéma (A) comme pour les plaques appuyées. Par contre, c'est le schéma (C) qu'on utilisera

pour la première ligne intérieure du réseau et le schéma (CC') pour le coin. On fera  $D_x = D_{xy} = D_y = D$  et  $\frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w^0}{\partial y} = 0$ . Pour remonter aux dérivées, on se servira des tableaux (II) avec  $w_1 = w_{1*} = 0$  et  $w_1' = w_{1*}' = 0$ .

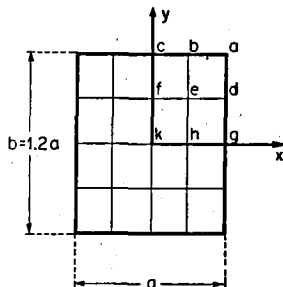


Fig. 17

On se contentera d'envisager des charges uniformément réparties sur toute la surface ou des charges concentrées centrales afin de disposer des valeurs exactes. Remarquons tout de suite qu'il ne faut pas s'attendre à une précision aussi bonne que pour les plaques simplement appuyées. Considérons en effet une charge uniformément répartie. La surface élastique présentera des points d'inflexion. Environ la moitié de la portée totale correspondra à une plaque simplement appuyée. Pour obtenir dans l'étude d'une plaque encastree la même précision que dans celle d'une plaque simplement appuyée, il faudra donc à peu près doubler le nombre de mailles par ligne; sur la surface, on aura besoin de quatre fois plus de points.

Nous allons étudier successivement des réseaux à quatre, six et huit mailles.

a) Réseau à quatre fois quatre mailles. Rapport  $\frac{b}{a} = 1,2$

Comme nous n'envisageons que des charges symétriques par rapport aux deux axes de coordonnées, la surface élastique présente les mêmes symétries et l'on peut numérotter les nœuds comme indiqué à la figure 17. Il y a quatre inconnues  $w_e, w_f, w_h, w_k$ . L'équation en  $k$  s'écrit à l'aide du schéma (A), celles en  $h$  et  $f$  à l'aide du schéma (C) ou (C) tourné d'un droit avec permutation

de  $x$  et  $y$ , celle en  $e$  à l'aide du schéma (CC'). Comme  $\Delta x = \frac{a}{4}$ ,  $\Delta y = \frac{b}{4}$ , les coefficients des schémas valent  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1,2^2 = 1,44$ ,  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0,69444444$ . On établit facilement le système suivant

	$w_k$	$w_h$	$w_f$	$w_e$	$p=p_0$ $\Delta x^2 \Delta y^2 / 144 D$	$P$ au centre $a^2 / 32 \pi D$
$k$	+1954,28	-1584,3733	- 797,0667	- 171,0222	+20736	+118,772
$h$	-1603,92	+4628,9333	- 334,4000	- 655,1111	+31104	+794,051
$f$	- 758,46	- 280,7200	+3841,6267	-2229,7244	+31104	+486,542
$e$	- 201,78	- 330,1000	-1148,7200	+4284,4889	+23328	+445,495

On remarquera qu'il n'y a pas de symétrie par rapport à la diagonale principale, comme on l'a vu aussi pour les tableaux (II) à la note 24. Ce fait complique légèrement la résolution du système.

Charge uniformément répartie sur toute la surface:  $p=p_0$ . Les termes de charge sont donnés sans autre par les schémas et l'on obtient ceux qui sont indiqués dans le système. D'où

$w_k$	$w_h$	$w_f$	$w_e$	
+1814,4480	+1072,1462	+1153,3063	+689,9565	$10^{-8} \frac{a^4 p_0}{D}$

$$w_{max} = 0,01981 \frac{a^4 p_0}{E h^3} (0,0188)$$

	$g$	$h$	$k$	
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	+0,063642	-0,010048	-0,026495	$\frac{a^2 p_0}{D}$

	$c$	$f$	$k$	
$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	+0,050300	-0,010030	-0,015624	$\frac{a^2 p_0}{D}$

Les  $\partial^2$  sont calculés comme on l'a déjà dit à l'aide du tableau (II<sub>4</sub>).

$$\text{Avec } \nu = 0,3 \quad (M_x)_g = -0,063642 a^2 p_0 \quad (-0,639)$$

$$(M_x)_k = +0,031182 a^2 p_0 \quad (0,0299)$$

$$(M_y)_c = -0,0503 a^2 p_0$$

$$(M_y)_k = +0,023572 a^2 p_0 \quad (0,0228)$$

Les efforts tranchants se calculeraient de la même façon que ceux des plaques simplement appuyées.

*Charge concentrée P au milieu de la plaque.* Nous utiliserons aussi la méthode de *Pucher*. La seule différence est qu'il faut annuler ici les  $w_0$ ,  $\frac{\partial w_0}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial w_0}{\partial y}$  sur les bords de la plaque. Comme auparavant on a

$$w_0 = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad \text{et} \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{x}{8\pi D} (\ln r^2 + 1),$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{1}{8\pi D} \left( \ln r^2 + 2 \frac{x^2}{r^2} + 1 \right)$$

Prenons  $\frac{a}{2}$  comme unité de la coordonnée polaire  $r$ .

	$c$	$b$	$a$	$d$	$g$	
$r^2$	1,44	1,69	2,44	1,36	1	$a^2/4$
$\ln(r^2)$	0,36464	0,52474	0,89200	0,30749	0	
$\partial w_0/\partial x$			+1,8920	+1,3075	+1	$a/16\pi D$
$\partial w_0/\partial y$	+1,6376	+1,8297	+2,2704			$a/16\pi D$
$w_0$	+0,26254	+0,44340	+1,08824	+0,20909	0	$a^2/32\pi D$

Ces valeurs changées de signe, introduites dans les schémas, donnent les termes de charge du système. Remarquons que dans les schémas (C) et (CC') le signe du  $\frac{\partial w}{\partial x}$  se rapporte à la valeur prise dans le sens des ordonnées négatives.

On trouve les solutions suivantes pour  $w_{part}$ .

	$k$	$h$	$f$	$e$	
$w_{part}$	+0,6624142	+0,4765496	+0,4642698	+0,2963672	$\frac{a^2}{32\pi D}$

Flèche au centre  $w_{max} = 0,071954 \frac{Pa^2}{Eh^3}$  (0,0706). Courbure au milieu du grand côté, point  $g$ ,  $\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)_g = \frac{3}{8\pi D}$ ; le tableau (II<sub>4</sub>) donne, avec  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_g = \frac{a}{16\pi D}$ ,  $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{part} = \frac{2,3011}{32\pi D}$ . D'où  $(M_x)_g = -0,14226 P$  (0,1490). Le calcul d'une plaque carrée se fait d'une façon semblable; nous donnerons les résultats en fin du paragraphe.



b) Réseau à six fois six mailles. Plaque carrée

A cause des symétries, il reste six inconnues comme on le voit sur la figure 18. Les schémas (A)\*, (C)\*, (CC')\* permettent d'écrire le système. On a divisé l'équation en  $k$  par quatre.

	$w_k$	$w_i$	$w_h$	$w_g$	$w_f$	$w_e$	$p=p_0$ $\Delta x^4/144D$	$P$ au centre $a^2/288\pi D$
$k$	+468	-576	-32	+72	+64	+4	+5184	0
$i$	-576	+1880	-1088	-512	+88	+64	+20736	+1582,11
$h$	-32	-1088	+2020	-64	-1088	-32	+20736	+3553,85
$g$	+144	-1006	-264	+3904	-1434	+240	+31104	-6874,43
$f$	+64	+20	-1083	-704	+3876	-768	+31104	-6504,67
$e$	+8	+102	-180	+240	-1530	+3816	+23328	-26125,91

Charge uniformément répartie sur toute la surface:  $p=p_0$ . Les termes de charge donnés par les schémas sont ceux du système. D'où

$w_k$	$w_i$	$w_h$	$w_g$	$w_f$	$w_e$	
+1285,0893	+1046,5476	+854,3428	+448,1741	+368,5920	+161,9856	$10^{-6} \frac{a^4 p_0}{D}$

Le tableau (II<sub>6</sub>) donne

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_d = +0,050909 a^2 \frac{p_0}{D} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = -0,017801 a^2 \frac{p_0}{D}$$

Les valeurs des moments sont données en fin du paragraphe.

Charge concentrée  $P$  au milieu de la plaque. Le calcul est semblable à celui du réseau à quatre mailles. En prenant pour unité de la coordonnée  $r$  la valeur  $\frac{a}{6}$  on trouve

	$a$	$b$	$c$	$d$	
$r^2$	9	10	13	18	$a^2/36$
$\ln r^2$	2,1972	2,3026	2,5649	2,8904	
$w_0$	+9,8875	+11,5130	+16,6722	+26,0133	$a^2/288\pi D$
$\partial w_0/\partial x$	+9,5917	+9,9078	+10,6948	+11,6711	$a/48\pi D$

D'où les termes de charge inscrits dans le système. Les solutions sont

	$w_k$	$w_i$	$w_h$	$w_g$	$w_f$	$w_e$	
$w_{part}$	+ 5,106218	+ 3,440981	+ 1,816317	- 1,605039	- 3,154850	- 8,027388	$\frac{a^2}{288 \pi D}$

Ordonnée  $w_{max}$  au centre,  $w_{max} = 0,061628 a^2 \frac{P}{E h^3}$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_d = 0,12258 P$$

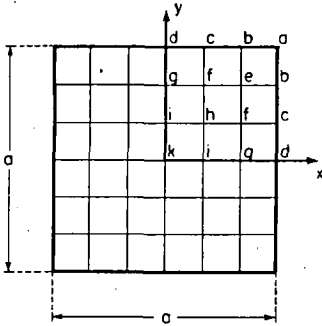


Fig. 18

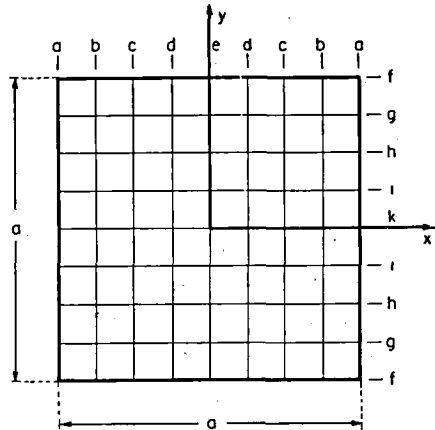


Fig. 19

c) Réseau à huit fois huit mailles. Plaque carrée

Le réseau sera numéroté comme l'indique la figure 19. Pour les charges qui nous occupent, les symétries réduisent le nombre des inconnues à dix. Comme le même système nous servira pour un certain nombre de problèmes de parois, nous donnons la matrice conjuguée. L'équation en  $(e, k)$  étant divisée par quatre et celle en  $(d, h)$  étant multipliée par deux, on fait successivement le terme de charge égal à 1 dans les équations sauf 0,25 en  $(e, k)$  et 2 en  $(d, h)$ .

	$w_{(e,k)}$	$w_{(e,i)}$	$w_{(d,i)}$	$w_{(e,h)}$	$w_{(d,h)}$	$w_{(e,h)}$	$w_{(e,g)}$	$w_{(d,g)}$	$w_{(e,g)}$	$w_{(d,g)}$	$w_{(e,g)}$	$w_{(b,g)}$	Termes de charge					
$(e,k)$	+468	- 576	- 32	+ 72	+ 64	+ 4												
$(e,i)$	-576	+1880	-1088	- 512	+ 88	+ 64	+ 72	+ 64	+ 8									
$(d,i)$	- 32	-1088	+2020	- 64	-1088	- 32	+ 64	+ 152	+ 64	+ 4								
$(e,h)$	+ 72	- 512	- 64	+1880	-1088	+ 144	- 576	- 64	+ 64									
$(d,h)$	+ 64	+ 88	-1088	-1088	+3824	-1152	- 56	-1024	+ 80	+ 64								
$(c,h)$	+ 4	+ 64	- 32	+ 144	-1152	+1872	+ 64	- 64	-1152	- 32								
$(e,g)$		+ 144	+ 128	-1134	- 248	+ 102	+3888	-1536	+ 240									
$(d,g)$		+ 64	+ 152	- 132	-1019	- 132	- 768	+4016	- 717	+ 120								
$(c,g)$		+ 8	+ 64	+ 51	+ 12	-1134	+ 120	- 704	+3756	- 768								
$(b,g)$			+ 8	+ 102	+ 102	- 180	+ 240	-1530	+3816									

Matrice conjuguée du système n° 2

	I en $(e,k)$	I en $(e,i)$	I en $(d,i)$	I en $(e,h)$	I en $(d,h)$	I en $(e,h)$	I en $(d,h)$	I en $(c,h)$	I en $(e,g)$	I en $(d,g)$	I en $(c,g)$	I en $(b,g)$
$w_{(e,k)}$	2975,1735	8565,7851	6921,1762	4597,5773	7690,8977	2177,7087	612,4293	1016,8078	535,5652	22,3245		
$w_{(e,i)}$	2146,3550	7571,4473	6165,4845	4241,8167	7091,7831	2031,1616	578,0792	959,1309	509,7285	23,5237		
$w_{(d,i)}$	1739,1526	6181,4630	5747,1527	3740,7107	6610,8978	1984,4978	523,5175	905,3432	508,4248	28,8668		
$w_{(e,h)}$	1170,9943	4308,2196	3790,3125	3363,3671	5082,6268	1479,1411	509,4216	775,4208	392,2361	20,3653		
$w_{(d,h)}$	983,9451	3616,9543	3360,0971	2548,4868	4974,5507	1566,7323	398,3988	744,1449	450,0568	35,0775		
$w_{(e,g)}$	572,0299	2124,0311	2042,1969	1514,3559	3188,8209	1719,0776	233,3481	527,1809	546,0151	78,8463		
$w_{(d,g)}$	362,6657	1360,0092	1233,1487	1149,2639	1843,2098	546,5314	459,7493	396,0036	153,2590	6,2234		
$w_{(c,g)}$	308,0965	1146,7543	1073,5885	901,0882	1706,0176	600,4353	197,8160	546,2333	229,0823	18,5310		
$w_{(b,g)}$	175,0507	658,5733	642,9110	490,4988	1078,1627	599,8392	78,2162	231,0680	492,6516	87,1987		
	47,9702	182,4792	184,7172	135,4598	328,5747	237,8304	18,1794	61,3692	195,7774	298,5718		

10<sup>-6</sup>

Tous les termes sont positifs.

Charge uniformément répartie sur toute la surface:  $p = p_0$ . Les termes de charge donnés par les schémas valent

$(e,k), (e,i), (d,i), (e,h), (d,h), (c,h)$	$(e,g), (d,g), (c,g)$	$(b,g)$	$\frac{\Delta x^4}{144 D} p_0$
+20736	+31104	+23328	

D'où

$w_{\begin{smallmatrix} (e,k) \\ (c,h) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (e,i) \\ (e,g) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (d,i) \\ (d,g) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (e,h) \\ (c,g) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (d,h) \\ (b,g) \end{smallmatrix}}$	$\frac{a^4}{D} p_0 10^{-6}$
+1272,678 + 464,380	+1137,126 + 281,789	+1016,798 + 253,636	+764,057 +173,884	+684,813 + 65,599	

Les valeurs dérivées sont données en fin du paragraphe.

Charge concentrée  $P$  au milieu de la plaque. Comme le réseau est assez serré, on remplace la charge concentrée  $P$  par une charge répartie  $p = \frac{P}{\Delta x^2}$  au nœud  $(e,k)$ . Cette substitution ne donne pas, pour les moments, des résultats précis au voisinage de la force. Il faudrait pour cela employer la méthode de *Pucher*. Pour les autres régions du domaine, ce remplacement est admissible comme le montrera la précision des résultats.

Les termes de charge sont

$(e,k)$	$(e,i)$	$(d,i)$	$(e,h)$	$(d,h)$	$(c,h)$	$\frac{\Delta x^2}{144} \cdot \frac{P}{D}$
+10404	+2040	+400	+102	+20	+1	

D'où

$w_{\begin{smallmatrix} (e,k) \\ (c,h) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (e,i) \\ (e,g) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (d,i) \\ (d,g) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (e,h) \\ (c,g) \end{smallmatrix}}$	$w_{\begin{smallmatrix} (d,h) \\ (b,g) \end{smallmatrix}}$	$64 a^2 \frac{P}{D} 10^{-6}$
+87,85896 +19,19430	+69,20565 +12,19938	+56,82869 +10,30829	+38,88295 + 5,92393	+32,75654 + 1,63753	

d) Réseau à six fois huit mailles. Rapport  $\frac{b}{a} = 2$ .

La figure 20 donne la numérotation du réseau. Pour des charges symétriques par rapport aux deux axes le nombre d'inconnues est de douze.  $\Delta x = \frac{a}{6}$ ,  $\Delta y = \frac{b}{8}$ . Donc  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 2,25$ ,  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0,44444444$ . On écrit facilement le système où l'on divise par quatre l'équation en  $(d, k)$  et par deux celles en  $(c, k)$ ,  $(d, h)$ ,  $(d, g)$ . De là, la matrice (p. 94, 95).

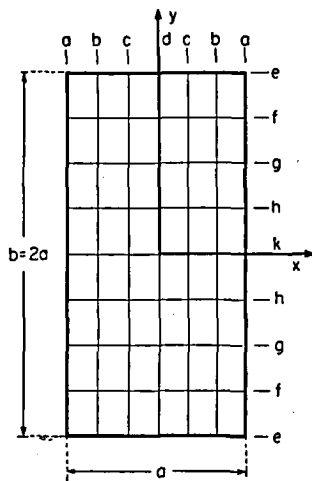


Fig. 20

Charge uniformément répartie sur toute la surface:  $p = p_0$ . Les termes de charge valent  $20736 \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{144 D} p_0 = 0,25 \frac{a^4 p_0}{D}$  en  $(d, k)$ ,  $(c, k)$ ,  $(d, h)$ ,  $(c, h)$ ,  $(d, g)$ ,  $(c, g)$ , 1,5 fois la même valeur en  $(b, k)$ ,  $(b, h)$ ,  $(b, g)$ ,  $(c, f)$ ,  $(d, f)$ , 1,125 cette même valeur en  $(b, f)$ . D'où

$w(d, k)$	$w(c, k)$	$w(b, k)$	$w(d, h)$	$w(d, g)$	$w(d, f)$	$\frac{a^4 p_0}{D} 10^{-6}$
+2544,757	+2016,448	+794,379	+2420,425	+1943,842	+945,171	

Charge concentrée  $P$  au milieu de la plaque. On procède comme pour le réseau de huit fois huit mailles.

Système								
	$w(d,k)$	$w(c,k)$	$w(d,h)$	$w(c,h)$	$w(d,g)$	$w(c,g)$	$w(b,k)$	$w(b,h)$
$(d,k)$	+ 574,25	- 576,333	- 99,667	- 87,556	+ 11,417	+ 15,889	+ 98,083	+ 59,222
$(c,k)$	- 576,333	+ 1246,583	- 87,556	- 140,111	+ 15,889	+ 27,528	- 576,333	- 87,556
$(d,h)$	- 99,667	- 87,556	+ 1159,917	- 1136,778	- 99,667	- 87,556	+ 59,222	+ 200,861
$(c,h)$	- 87,556	- 140,111	- 1136,778	+ 2520,694	- 87,556	- 140,111	- 87,556	- 1136,778
$(d,g)$	+ 11,417	+ 15,889	- 99,667	- 87,556	+ 1148,500	- 1152,667	+ 4,694	+ 59,222
$(c,g)$	+ 15,889	+ 27,528	- 87,556	- 140,111	- 1152,667	+ 2493,167	+ 15,889	- 87,556
$(b,k)$	+ 392,333	- 2401,500	+ 236,889	- 554,00	+ 18,778	+ 39,500	+ 5643,000	+ 84,000
$(b,h)$	+ 118,444	- 277,000	+ 401,722	- 2381,750	+ 118,444	- 277,000	+ 42,000	+ 5695,500
$(b,g)$	+ 9,389	+ 19,750	+ 118,444	- 277,000	+ 392,333	- 2401,500	+ 52,500	+ 42,000
$(d,f)$			+ 45,667	+ 63,556	- 354,000	- 424,000		+ 18,778
$(c,f)$			+ 31,778	+ 55,056	- 212,000	- 253,000		+ 31,778
$(b,f)$			+ 9,389	+ 19,750	+ 101,000	- 292,500		+ 52,500

Matrice conjuguée n° 3						
	1 en $(d,k)$	1 en $(c,k)$	1 en $(d,h)$	1 en $(c,h)$	1 en $(d,g)$	1 en $(c,g)$
$w(d,k)$	+ 1,590990	+ 2,019546	+ 1,544794	+ 2,324171	+ 0,549961	+ 0,818408
$w(c,k)$	+ 1,019867	+ 1,840660	+ 1,179350	+ 1,821027	+ 0,419698	+ 0,625109
$w(d,h)$	+ 0,772792	+ 1,162880	+ 1,863150	+ 2,425235	+ 0,806371	+ 1,207407
$w(c,h)$	+ 0,589893	+ 0,910997	+ 1,227300	+ 2,150141	+ 0,614338	+ 0,942837
$w(d,g)$	+ 0,277118	+ 0,413610	+ 0,810818	+ 1,216732	+ 1,473754	+ 1,840754
$w(c,g)$	+ 0,211062	+ 0,315304	+ 0,616923	+ 0,948763	+ 0,928306	+ 1,700902
$w(b,k)$	+ 0,342000	+ 0,672781	+ 0,419559	+ 0,693755	+ 0,146483	+ 0,216147
$w(b,h)$	+ 0,209756	+ 0,346900	+ 0,414095	+ 0,779321	+ 0,216827	+ 0,355386
$w(b,g)$	+ 0,073142	+ 0,108256	+ 0,216661	+ 0,355879	+ 0,307606	+ 0,620067
$w(d,f)$	+ 0,059961	+ 0,087144	+ 0,214313	+ 0,321086	+ 0,499235	+ 0,755683
$w(c,f)$	+ 0,044144	+ 0,063745	+ 0,161555	+ 0,242220	+ 0,378504	+ 0,590969
$w(b,f)$	+ 0,013201	+ 0,018547	+ 0,053484	+ 0,079060	+ 0,129302	+ 0,226968

Système										
$w(b,g)$	$w(d,f)$	$w(c,f)$	$w(b,f)$	Termes de charge						
+ 4,694				+0,25						
+ 15,889					+0,5					
+ 59,222	+ 11,417	+ 15,889	+ 4,694		+0,5					
- 87,556	+ 15,889	+ 27,528	+ 15,889			+1				
+ 196,167	- 99,667	- 87,556	+ 59,222				+0,5			
-1152,667	- 87,556	- 140,111	- 87,556					+1		
+ 105,000									+1	
+ 42,000	+ 9,389	+ 19,75	+ 52,500						+1	
+5643,000	+ 118,444	- 277,000	+ 42,000							+1
+ 202,000	+4083,000	-3556,000	+ 625,000							+1
- 212,000	-1778,000	+4395,500	-1778,000							+1
+ 45,000	+ 312,500	-1856,250	+4828,500							+1

Matrice conjuguée n° 3					
1 en (b,k)	1 en (b,h)	1 en (b,g)	1 en (d,f)	1 en (c,f)	1 en (b,f)
+0,298739	+0,346129	+0,108557	+0,054735	+0,074520	+0,006345
+0,303207	+0,289784	+0,081032	+0,041005	+0,055374	+0,003981
+0,173327	+0,352844	+0,175708	+0,099656	+0,142504	+0,024720
+0,145077	+0,343537	+0,146355	+0,075988	+0,108864	+0,017808
+0,055572	+0,178130	+0,273685	+0,239884	+0,350456	+0,085327
+0,041429	+0,148040	+0,283638	+0,180921	+0,277500	+0,078438
+0,290906	+0,110993	+0,024932	+0,013292	+0,017377	+0,000482
+0,055542	+0,303247	+0,055401	+0,026579	+0,037569	+0,004370
+0,012691	+0,055782	+0,283582	+0,062830	+0,109927	+0,031378
+0,009722	+0,043998	+0,119029	+0,482706	+0,486920	+0,115287
+0,006820	+0,032129	+0,103817	+0,245846	+0,533094	+0,163547
+0,001687	+0,008838	+0,039479	+0,067834	+0,180751	+0,265021

10<sup>-3</sup>

Termes de charge

$(d, k)$	$(c, k),$ $(d, h)$	$(c, h)$	$(d, g), (b, k)$	$(c, g), (b, h)$	$(b, g)$	$\frac{\Delta x \Delta y P}{144 D}$
+10404	+2040	+400	+102	+20	+1	

$w(d, k)$	$w(c, k)$	$w(b, k)$	$a^2 \frac{P}{D} 10^{-3}$
+7,19431	+5,09029	+1,76945	

Résultats $\nu=0,3$								
		Plaque carrée				Plaque $b/a=2$		
		Timo-shenko	4 × 4 mailles	6 × 6 mailles	8 × 8 mailles	Timo-shenko	6 × 8 mailles	
$p_0$	$w_{max}$	+0,0138	+0,0146	+0,014033	+0,013897	+0,0277	+0,02779	$a^4 p_0 / E h^3$
	$(M_x)_{min}$	-0,0513	-0,0494	-0,050909	-0,051214	-0,0829	-0,08311	$a^2 p_0$
	$(M_x)_{max}$	+0,023	+0,0238	+0,023141	+0,022990	+0,0411	+0,04130	$a^2 p_0$
$P$	$w_{max}$	+0,0611	+0,0625	+0,061628	+0,061403	+0,0788	+0,07856	$a^2 P / E h^3$
	$(M_x)_{min}$	-0,1257	-0,1176	-0,12258	-0,1247	-0,1674	-0,1659	$P$

Comme on l'avait prévu, la précision du réseau à huit fois huit mailles est du même ordre que celle du réseau à quatre fois quatre mailles pour les plaques simplement appuyées. Mais un réseau de six fois six mailles donne généralement des erreurs de l'ordre de 1% seulement.

**4° Plaques rectangulaires soumises à des conditions diverses sur leurs côtés**

a) *Plaque simplement appuyée par deux côtés opposés et totalement encastrée sur les deux autres. Rapport  $\frac{b}{a} = 1,5$*

Avec les axes de coordonnées de la figure 21. les conditions au contour sont les suivantes



$$\left. \begin{aligned} w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \frac{a}{2} \\ w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Pour écrire le système d'équations on utilisera donc le schéma (A) pour les nœuds intérieurs, le schéma (B) pour les nœuds sur la première ligne parallèle au bord appuyé, le schéma (C') pour les nœuds de la première ligne parallèle au bord encastré et le schéma

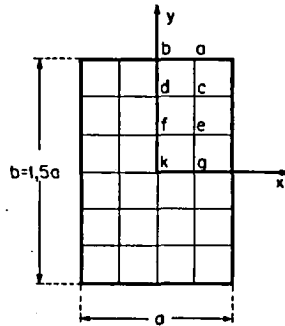


Fig. 21

(BC') pour le nœud au coin. Pour obtenir une bonne précision dans les deux sens on prend  $x = \frac{a}{4}$ ,  $y = \frac{b}{6}$ , donc  $\Delta x = \Delta y$ . Les schémas en (\*) sont valables. On n'envisage qu'une charge uniformément répartie sur toute la surface,  $p = p_0$ .

Système d'équations							
	$w_k$	$w_g$	$w_f$	$w_e$	$w_d$	$w_c$	$p_0 \frac{\Delta x^4}{144 D}$
$k$	+1872	-1152	-1152	- 128	+ 144	+ 128	+20736
$g$	-1152	+3744	- 128	-2304	+ 128	+ 288	+38016
$f$	-1152	- 128	+3888	-2176	-1152	- 128	+41472
$e$	- 128	-2304	-2176	+7776	- 128	-2304	+76032
$d$	+ 144	+ 128	-1134	- 264	+3888	-1536	+31104
$c$	+ 64	+ 144	- 132	-1134	- 768	+3888	+28512

On a multiplié les équations en  $g$  et  $f$  par deux et celle en  $e$  par quatre. Les solutions sont les suivantes

$w_k$	$w_g$	$w_f$	$w_e$	$w_d$	$w_c$	$\frac{\alpha^4 p_0}{D} 10^{-6}$
+5388,419	+3879,290	+4439,104	+3205,157	+1971,606	+1441,555	

Les  $\partial^2$  se calculent d'après les schémas (I<sub>4</sub>) et (II<sub>6</sub>). Avec  $\nu = 0,3$

$$(M_x)_k = +0,0592 a^2 p_0 (0,059) \quad (M_y)_k = +0,0462 a^2 p_0 (0,046)$$

$$(M_y)_b = -0,1028 a^2 p_0 (0,105) \quad (w)_{max} = +0,05884 \frac{\alpha^4 p_0}{E h^3} (0,0582)$$

b) Plaque rectangulaire continue à trois travées égales

On prend les coordonnées comme le montre la figure 22. Si les bords extérieurs de la plaque sont simplement appuyés on doit avoir

$$\left. \begin{aligned} w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm 3 \frac{a}{2} \\ w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{a}{2} \\ w=0 \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{gauche} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{droit}, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{gauche} = - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{droit} \\ \text{pour} \quad x = \pm \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} (59)$$

Les deux premières conditions sont faciles à satisfaire. Quant à la troisième il suffit d'accoler deux schémas du type (C) pour éliminer

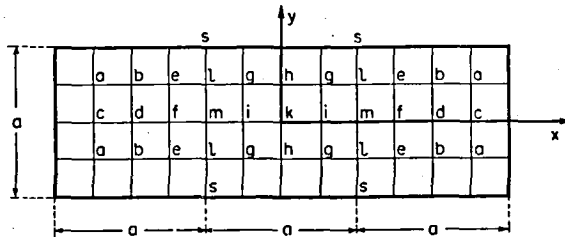


Fig. 22

les  $\frac{\partial w^0}{\partial x}$  et d'accoler un schéma du type (B) avec un autre du même type, mais changé de signe, pour faire disparaître  $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{gauche} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{droit}$  qui vaut 0. Dans les coins on prendra les schémas (CB) et (BB). Donnons les nouveaux schémas combinés pour le cas particulier  $\Delta x = \Delta y$ .

$$\text{Sur la ligne } m, w = 0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{gauche} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{droit}$$

+4	+32	+68		-68	-32	-4	
+32	-32	-608		+608	+32	-32	
+72	-576	+1800		-1800	+576	-72	$\cdot w =$
+32	-32	-608		+608	+32	-32	
+4	+32	+68		-68	-32	-4	

	+1	+20	+101	+10-10	-101	-20	-1	
	+20	+400	+2020	+200-200	-2020	-400	-20	
$\frac{\Delta x^4}{144 D}$	+102	+2040	+10302	+1020-1020	-10302	-2040	-102	$\cdot p$
	+20	+400	+2020	+200-200	-2020	-400	-20	
	+1	+20	+101	+10-10	-101	-20	-1	



	+2	+36	+162	+16+16	+162	+36	+2	
	+40	+720	+3240	+320+320	+3240	+720	+40	
$\frac{\Delta x^4}{144 D}$	+204	+3672	+16524	+1632+1632	+16524	+3672	+204	$\cdot p$
	+40	+720	+3240	+320+320	+3240	+720	+40	
	+2	+36	+162	+16+16	+162	+36	+2	

Sur la ligne  $m$ ,  $w=0$ ,  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{gauche} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{droit}$  ;

sur la ligne  $n+1$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ ,  $w=0$

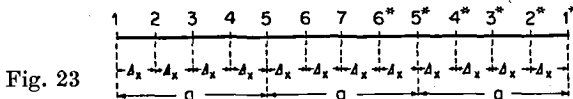
	+136	-1185	+3768	+3768	-1185	+136	$\cdot w =$
	+64	-132	-768	-768	-132	+64	
	+8	+51	+120	+120	+51	+8	

	+20	+360	+1620	+160+160	+1620	+360	+20	
$\frac{\Delta x^4}{144 D}$	+202	+3636	+16362	+1616+1616	+16362	+3636	+202	$\cdot p$
	+40	+720	+3240	+320+320	+3240	+720	+40	
	+2	+36	+162	+16+16	+162	+36	+2	

On obtient alors facilement le système d'équations suivant

	$w_d$	$w_c$	$w_b$	$w_a$	$w_k$	$w_h$	$w_f$	$w_e$	$w_i$	$w_g$	tr. cen- trale	tr. laté- rales
	$p_0 \Delta x^4 / 144 D$											
$d$	+1872	- 576	-1152	- 64			- 576	- 64				+20736
$c$	- 576	+1800	- 64	-1216			+ 72	+ 64				+19008
$b$	-1152	- 64	+3744	-1152			- 64	-1152				+38016
$a$	- 64	-1216	-1152	+3600			+ 64	+ 144				+34848
$k$					+1872	-1152			-1152	- 128	+20736	
$h$					-1152	+3744			- 128	-2304	+38016	
$e$	- 64	+ 64	-1152	+ 144	+ 64	+1152	-1216	+3600	+1152	-3744	-34848	+34848
$f$	-1134	+ 144	- 264	+ 128	-1134	- 264	+3888	-1536	+4032	-1408	+31104	+31104
$i$	- 576	+ 72	- 64	+ 64	+ 576	+ 64	+1800	-1216	-1872	+1152	-19008	+19008
$g$	- 132	+ 64	-1134	+ 144	- 132	-1134	- 768	+3888	- 704	+4032	+28512	+28512

Les équations une fois résolues, il faut encore remonter aux courbures. Dans le sens  $y$ , cela ne présente pas de difficulté. Pour la direction  $x$ , par contre, il faut calculer un nouveau tableau en tenant compte des conditions aux extrémités. Considérons une



ligne parallèle à  $x$ , numérotée comme l'indique la figure 23. On doit avoir  $w_1'' = w_{13}'' = 0$  et  $(w_5')_{gauche} = -(w_5')_{droit}$ . A l'aide des relations (47a) et (49b) on peut écrire le système symétrique suivant, avec  $n = 4$

$w_2''$	$w_3''$	$w_4''$	$w_5''$	$w_6''$	$w_7''$	$w_2 = 1$	$w_3 = 1$	$w_4 = 1$	$w_6 = 1$	$w_7 = 1$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \frac{1}{a^2}$	
+10	+ 1					-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>					
+ 1	+10	+ 1				+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>				
	+ 1	+10	+ 1				+12n <sup>2</sup>	-24n <sup>2</sup>				
	- 1	+ 6	+14	+ 6	-1			+24n <sup>2</sup>	+24n <sup>2</sup>			
			+ 1	+10	+1				-24n <sup>2</sup>	+12n <sup>2</sup>		
				+ 1	+5				+12n <sup>2</sup>	-12n <sup>2</sup>		

Tableau (III). Trois fois quatre mailles

	$w_2 = w_{2^*} = 1$	$w_3 = w_{3^*} = 1$	$w_4 = w_{4^*} = 1$	$w_5 = w_{5^*} = 1$	$w_7 = 1$
$w_2''$	-40,75403	+23,52494	- 2,40320	- 0,05519	+ 0,01474
$w_3''$	+23,54031	-43,24942	+24,03198	+ 0,55188	- 0,14738
$w_4''$	- 2,64904	+24,96925	-45,91664	- 5,46364	+ 1,45904
$w_5''$	+ 2,95006	-14,44303	+51,13444	+54,08451	-14,44302
$w_6''$	- 0,30103	+ 1,47378	- 5,21780	-48,62087	+24,98398
$w_7''$	+ 0,06021	- 0,29476	+ 1,04356	+48,12417	-43,39680

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \frac{1}{a^2}$

Charge uniformément répartie sur la travée centrale. Les termes de charge sont donnés dans le système. La résolution du système et l'emploi des tableaux (I<sub>4</sub>) et (III) conduisent à

$w_d$	$w_h$	$w_c$	$w_f$	$w_b$	$w_e$	$w_a$	$w_i$	$w_k$	$w_g$
-20,78764		-10,65790		-14,72131		- 7,53961		+107,7801	
+78,55736		-24,67110		-17,55428		+72,67098		+ 53,22841	

$\frac{\alpha^4 p_0}{144 \cdot 4^4 D}$

$(w)_{max} = 0,031927 \frac{\alpha^4 p_0}{E h^3}$  ( $M_x$ )<sub>m</sub> = -0,03746  $\alpha^2 p_0$  (0,0381). On donne dans la figure 24a la variation de  $M_x$  et  $M_y$  le long de  $x^{30}$ .

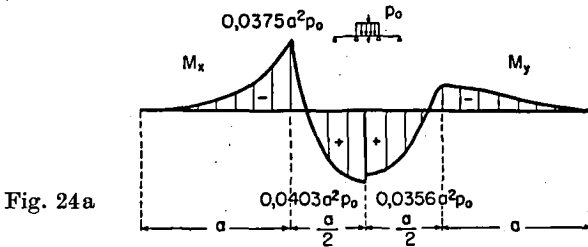


Fig. 24a

Charge uniformément répartie sur les deux travées latérales. On trouve dans ce cas

$w_d$	$w_h$	$w_c$	$w_f$	$w_b$	$w_e$	$w_a$	$w_i$	$w_k$	$w_g$
+128,56771		+97,34209		+93,27867		+70,78269		-41,57527	
- 29,44262		+83,32887		+60,76801		-35,32899		-25,09389	

$\frac{\alpha^4 p_0}{144 \cdot 4^4 D}$

<sup>30)</sup> Le même problème a été aussi traité analytiquement par H. Marcus, op. cit. à la note 7, p. 218.

$(w)_{max} = 0,038085 \frac{a^4 p_0}{E h^3}$   $(M_x)_m = -0,03746 a^2 p_0$ . Pour la variation de  $M_x$  et  $M_y$  le long de l'axe  $x$ , voir fig. 24 b.

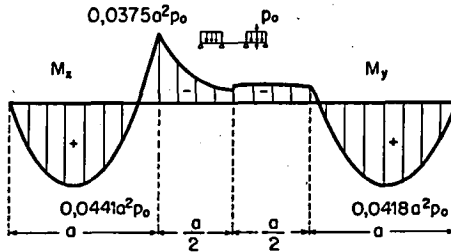


Fig. 24 b. Variation le long de l'axe  $x$  des moments  $M_x$  et  $M_y$ , plaque de la fig. 22,  $\nu = 0,3$

c) *Plaque supportée par des rangées de colonnes équidistantes*

C'est le problème de la *dalle à champignon*. On étudie seulement ici le panneau central d'une plaque de grande dimension, uniformément chargée. Comme on veut obtenir le moment et la flèche au centre du panneau, on suppose que l'appui sur les colonnes est ponctuel. Pour la plaque carrée de la figure 25, les conditions au contour sont les suivantes

$$Q=0 \quad w'=0 \quad \text{pour } x \text{ et } y = \pm \frac{a}{2}. \quad (60)$$

Au nœud central  $k$  on peut utiliser le schéma (A)\*. Pour les nœuds  $e$  et  $f$  on emploiera le schéma (C)\* qui exprime justement la con-

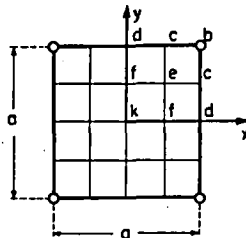


Fig. 25



dition  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ .  $w$  n'est pas donné sur le bord, mais il suffit de l'introduire comme inconnu dans les schémas. On a donc en tout cinq inconnues. Les deux équations manquantes sont fournies par la condition  $Q=0$  qu'on remplit en  $c$  et  $d$ . Pour cela on a le schéma ( $E$ )\* du procédé semi-implicite. Mais il faut d'abord exprimer l'opérateur de Laplace  $\Delta$  en fonction des inconnues  $w$ . Le tableau (II<sub>4</sub>) donne les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ; de là on trouve  $\Delta = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ .

	$w_k$	$w_f$	$w_e$	$w_d$	$w_c$	
$\Delta_k$	-87,384616	+ 98,461540		- 11,076924		} $\frac{1}{a^2}$
$\Delta_f$	+26,461538	- 97,846154	+ 49,230770	+ 27,692308	- 5,538462	
$\Delta_e$		+ 52,923076	-108,307692		+ 55,384616	
$\Delta_d$	-28,923076	+108,307692		-123,076922	+ 49,230770	
$\Delta_c$		- 28,923076	+108,307692	+ 26,461538	-133,538460	
$\Delta_b$				- 57,846152	+216,615384	

On peut alors établir les cinq équations du système. On se souviendra que  $p$  est constant et vaut  $p_0$ .

	$w_k$	$w_f$	$w_e$	$w_d$	$w_c$	$\frac{p_0 \Delta x^4}{144 D}$
$k$	+1872	-2304	- 128	+ 288	+ 256	+20736
$f$	-1134	+3768	-1408	-1500	+ 200	+31104
$e$	- 180	-1428	+4064	- 156	-2380	+23328
$d$	+ 967,385	-3515,077	- 354,462	+4593,231	-2156,308	+27648
$c$	+ 236,308	+ 531,692	-3190,154	-1181,538	+5139,692	+27648

D'où

$w_k$	$w_f$	$w_e$	$w_d$	$w_c$	$\frac{a^4 p_0}{D} 10^{-3}$
+6,212024	+5,520292	+4,401314	+4,896377	+3,146702	

Le tableau (II<sub>4</sub>) donne sans difficulté les courbures. Avec  $\nu=0,3$   $(w)_{max} = 0,067835 \frac{a^4 p_0}{E h^3} (0,0634) (M_x)_k = 0,03480 a^2 p_0 (0,0359)$ . Comme il fallait s'y attendre, la précision est du même ordre que celle des plaques totalement encastées.

d) *Plaque rectangulaire simplement appuyée par deux côtés opposés et appuyée et encastrée élastiquement sur les deux autres*

Nous reprendrons la plaque de la figure 21, mais les bords  $y = \pm \frac{b}{2}$  ne seront plus totalement encastrés mais seulement liés à une poutre rigide à la flexion et à la torsion. La charge sera uniformément répartie sur toute la surface.

Les conditions au contour sont les suivantes. *Poutre marginale*

$$\left. \begin{array}{l} w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \text{Angle de torsion } \varphi = 0 \end{array} \right\} \text{ pour les quatre points } \left( \pm \frac{a}{2}, \pm \frac{b}{2} \right) \quad (61)$$

*Plaque.* Réaction de la plaque = charge de la poutre  $V_y = p_{\text{poutre}}$

$$-D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=\pm b/2} = - \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} EJ_{\text{poutre}} \right)_{y=\pm b/2} \quad (62)$$

Tangente de la surface élastique = - angle de torsion  $\varphi_{\text{poutre}}$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b/2} = - \varphi_{\text{poutre}} \quad (63)$$

On a huit inconnues à déterminer. Le schéma (A) est applicable aux quatre nœuds intérieurs, le schéma (C) aux nœuds  $c, d$ . Pour les équations en  $a$  et  $b$ , on emploiera le procédé semi-implicite. La condition étant

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

on suit le même chemin que pour l'établissement du schéma (D)\* et l'on trouve facilement pour  $\Delta y = \Delta x$ .

*Schéma F\**

+2+ν	-28+10ν	+2+ν	· $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ +	-1+4ν	-10-8ν	-1+4ν	· $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ =
+12 $\frac{EJ}{D\Delta x}$	-24 $\frac{EJ}{D\Delta x}$	+12 $\frac{EJ}{D\Delta x}$		+1+2ν	+10-4ν	+1+2ν	
+4-ν	+16-10ν	+4-ν					

$$= \frac{\Delta x^2}{6D} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +2 & +20 & +2 \\ \hline +1 & +10 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot p$$

Pour écrire les schémas du type (C) en  $c$  et  $d$  et pour déterminer les expressions des  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  en fonction des  $w$ , il faut connaître les valeurs de  $\frac{\partial w}{\partial y} \Delta y$  en  $a$  et en  $b$ . Mais la relation (63) lie cette tangente de la plaque à l'angle de torsion  $\varphi$  de la poutre. Les moments de torsion de la plaque sont égaux aux moments d'encastrement  $(M_y)_{y=\pm b/2}$ . On sait que la variation de l'angle  $\varphi$  est celle du moment provoqué par une charge  $\frac{M_y}{C}$ ,  $C$  étant la rigidité à la torsion de la poutre<sup>31</sup>). Le moment  $M_y$  vaut 0 au coin,  $(M_y)_a$  en  $a$  et  $(M_y)_b$  en  $b$ . Pour chercher le moment fléchissant des „charges“  $\frac{M_y}{C}$  nous les concentrons par la formule des charges nodales (42). On obtient

$$K \left( \frac{M_y}{C} \right)_a = \frac{\Delta x}{12} \left[ 10 \left( \frac{M_y}{C} \right)_a + \left( \frac{M_y}{C} \right)_b \right]$$

$$K \left( \frac{M_y}{C} \right)_b = \frac{\Delta x}{12} \left[ 2 \left( \frac{M_y}{C} \right)_a + 10 \left( \frac{M_y}{C} \right)_b \right]$$

En calculant le moment de ces charges nodales on trouve facilement

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a &= \frac{\Delta x^2}{12} \left[ 11 \left( \frac{M_y}{C} \right)_a + 6 \left( \frac{M_y}{C} \right)_b \right] \\ \varphi_b &= \frac{\Delta x^2}{12} \left[ 12 \left( \frac{M_y}{C} \right)_a + 11 \left( \frac{M_y}{C} \right)_b \right] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

D'après le tableau (II<sub>6</sub>) on peut exprimer  $\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a$  en fonction des  $w_a, w_c, w_e, w_g$  et de  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a \Delta y$ ; le tableau (I<sub>4</sub>) donne  $\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_a$  en

<sup>31</sup>) Cf. *F. Stüssi: Baustatik, I, Birkhäuser, Basel, 1946, p. 297.* Si la poutre latérale a une section en I ou en U, les ailes participent à la résistance et le problème se complique. Il reste cependant possible d'exprimer l'angle  $\varphi$  en fonction de  $(M_y)$ .

fonction de  $w_a$  et  $w_b$ . Comme  $(M_y)_a = - \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_a + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_a \right] D$ , il dépendra également des mêmes  $w$  et de  $\frac{\partial w}{\partial y}$  en  $a$ . Pour  $(M_y)_b$  la relation est semblable. En introduisant dans les équations (64)  $(M_y)_a$  et  $(M_y)_b$  exprimés en fonction des  $w$  et  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b$ , en remplaçant d'autre part  $\varphi$  grâce à (63) par  $-\frac{\partial w}{\partial y}$ , on obtient deux relations entre  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b$ . La résolution de ce système donne  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a$  et  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b$  en fonction des  $w$ .

Pour le calcul numérique, il faut fixer la valeur des constantes. On prend  $\nu = 0,3$   $\frac{EJ}{bD} = 2$   $\frac{C}{bD} = \frac{1}{2}$   $\frac{EJ}{C} = 4$ .

Si l'on appelle  $(M_y^*)$  la partie de  $M_y$  qui ne dépend que de  $w$  directement, on obtient les deux relations suivantes pour  $\Delta y = \Delta x$

$$-\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a = \frac{\Delta x^2}{6b} \left[ \frac{11}{D} (M_y^*)_a + \frac{6}{D} (M_y^*)_b + 1488,837 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a \cdot \frac{\Delta x}{b^2} + 812,093 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b \cdot \frac{\Delta x}{b^2} \right]$$

$$-\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b = \frac{\Delta x^2}{6b} \left[ \frac{12}{D} (M_y^*)_a + \frac{11}{D} (M_y^*)_b + 1624,186 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a \cdot \frac{\Delta x}{b^2} + 1488,837 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b \cdot \frac{\Delta x}{b^2} \right]$$

d'où

$$\Delta x \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_a = -0,1168324 (M_y^*)_a \frac{\Delta x^2}{D} - 0,0434931 (M_y^*)_b \frac{\Delta x^2}{D}$$

$$\Delta x \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_b = -0,0869863 (M_y^*)_a \frac{\Delta x^2}{D} - 0,1168324 (M_y^*)_b \frac{\Delta x^2}{D}$$

Les tableaux (I<sub>4</sub>) et (II<sub>6</sub>) permettent alors d'écrire

		$w_a$	$w_b$	$w_c$	$w_d$	$w_e$	$w_f$	$w_g$	$w_h$	
$(M_y^*)$	$a$	+91,62829	-7,05306	-102,20155		+29,45736		-5,95349		$\frac{D}{a^2}$
	$b$	-14,10612	+91,62829		-102,20155		+29,45736		-5,95349	
$\frac{\partial w}{\partial y} \Delta x$	$a$	-10,09163	-3,16117	+11,94045	+4,44506	-3,44157	-1,28119	+0,69556	+0,25894	$\frac{\Delta x^2}{a^2}$
	$b$	-6,32235	-10,09169	+8,89013	+11,94045	-2,56238	-3,44157	+0,51787	+0,69556	



Système									
	$w_k$	$w_g$	$w_f$	$w_e$	$w_d$	$w_c$	$w_b$	$w_a$	T. charges
$k$	+1872	-1152	-1152	-128	+144	+128			+20736
$g$	-1152	+3744	-128	-2304	+128	+288			+38016
$f$	-1152	-128	+3888	-2176	-1152	-128	+144	+128	+41472
$e$	-128	-2304	-2176	+7776	-128	-2304	+128	+288	+76032
$d$	+113,511	+97,758	-983,142	-114,365	+3364,602	-2055,154	-1168,578	+337,204	+31104
$c$	+48,879	+113,511	-57,183	-983,142	-1027,577	+3364,602	+168,602	-1168,578	+28512
$b$	-65,342	+18,530	+428,903	-53,282	-1508,040	+610,401	+21083,251	-27585,980	+13824
$a$	+9,265	-65,342	-26,641	+428,903	+305,200	-1508,040	-13792,990	+21083,251	+13824

$$\frac{\Delta x^4}{144} p_0$$

Les solutions sont les suivantes

$w_k$	$w_f$	$w_g$	$w_b$	$w_e$	$w_c$	$w_a$
+7312,225	+6524,779	+4347,257	+1888,724	+5239,759	+4680,410	+1339,984

$$p_0 D^{-1}$$

Ces valeurs donnent  $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_b \Delta x = +1593,645 p_0 D^{-1} 10^{-6}$ . On peut alors aisément calculer les courbures à l'aide des tableaux (I<sub>4</sub>) et (II<sub>6</sub>).  $(w)_{max} = 0,07985 \frac{\alpha^4}{E h^3} p_0$   $(M_x)_k = 0,07647 \alpha^2 p_0$   $(M_y)_k = 0,04621 \alpha^2 p_0$ . La variation des moments est visible à la figure 26. Les valeurs des moments sont légèrement inférieures à celles d'une plaque de même forme simplement appuyée sur ses quatre côtés. L'encastrement élastique a donc plus que compensé l'influence du tassement des appuis.

Remarquons pour terminer que le calcul précédent n'est valable que si le plan moyen de la plaque contient l'axe neutre de la poutre latérale. Autrement la plaque est sollicitée de plus dans son plan moyen, ce qui est un problème de paroi.

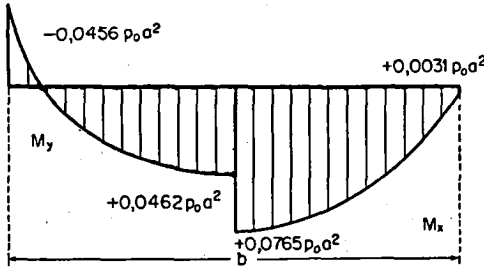


Fig. 26. Variation le long de l'axe  $y$  des moments  $M_y$  et  $M_x$ , plaque de la fig. 21, simplement appuyée sur les longs bords et appuyée et encadrée élastiquement sur les deux autres; charge uniforme,  $\nu = 0,3$ ,  $\frac{EJ}{bD} = 2$ ,  $\frac{EJ}{C} = 4$

### 5° Plaques rectangulaires orthotropes

Comme les calculs sont exactement les mêmes que pour les plaques isotropes, nous ne nous attarderons pas et donnerons seulement un exemple de *plaque simplement appuyée* sur ses quatre bords. La charge sera

- a) sinusoïdale dans les deux sens;
- b) uniformément répartie sur toute la surface.

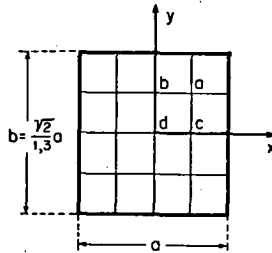


Fig. 27

Pour les rigidités on prend  $D_x = \frac{1}{2} D_{xy}$ ,  $D_y = 2 D_{xy}$ , d'autre part  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1,3}$ . Ainsi nous avons les mêmes valeurs que *M. T. Huber*<sup>32)</sup> de sorte qu'une comparaison sera possible. Voir figure 27.

Avec  $D_x \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 0,2958579875 D_y$ ,  $2 D_{xy} = D_y$ ,  $D_y \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0,845 D_y$  les schémas (A), (B), (BB') conduisent au système suivant

	$w_d$	$w_c$	$w_b$	$w_a$	T. de charge sinusoïde $\Delta x^2 \Delta y^2 / 144 D_y$	T. de charge $p = p_0$ $\Delta x^2 \Delta y^2 / 144 D_y$
d	+1022,205	- 326,620	- 906,514	- 109,075	+16973,99	+20736
c	- 326,620	+2044,410	- 109,075	-1813,028	+24004,84	+38016
b	- 906,514	- 109,075	+2044,410	- 653,240	+24004,84	+38016
a	- 109,075	-1813,028	- 653,240	+4088,820	+33947,98	+69696

a) Charge sinusoidale dans les deux sens

Les termes de charge ne dépendent pas des rigidités; ce sont rigoureusement les mêmes que pour les plaques isotropes. On trouve

$w_d$	$w_c$	$w_b$	$w_a$	$\frac{b^4}{D_y} p_0 10^{-6}$
+4065,186	+2874,521	+2874,521	+2032,593	

$$w_{max} = 0,601358 \frac{a^2 b^2}{D_y} p_0 10^{-3}$$

$$w_{exact} = \frac{a^2 b^2 p_0}{\pi^4 \left[ 2 D_{xy} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 D_x + \left(\frac{a}{b}\right)^2 D_y \right]} = 0,59941 \frac{a^2 b^2}{D_y} p_0 10^{-3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{max} = 0,0400567 \frac{b^2}{D_y} p_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{exact} = \frac{\pi^2}{b^2} w_{exact} = 0,0399916 \frac{b^2}{D_y} p_0$$

La précision est exactement la même que celle des plaques isotropes.

<sup>32)</sup> *M. T. Huber*, op. cit. à la note 13, ou *Der Bauingenieur*, 1926, p. 152. Dans ce cas particulier  $D_{xy}^2 = D_x \cdot D_y$ , ce qui simplifie l'étude analytique.



b) Charge uniformément répartie sur toute la surface.  $p = p_0$

On trouve

$w_d$	$w_c$	$w_b$	$w_a$	$\frac{b^4}{D_y} p_0 10^{-6}$
+6376,984	+4672,727	+4578,107	+3364,182	

$$w_{max} = 0,006377 \frac{b^4 p_0}{D_y} \quad (0,00638)$$

Entre parenthèses nous donnons les valeurs de *M. T. Huber*.

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{max} = 0,016316 \frac{b^2 p_0}{D_y} \quad (0,01625) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{max} = 0,059596 \frac{b^2 p_0}{D_y} \quad (0,05965)$$

Nous avons également calculé une plaque carrée avec  $D_{xy} = D_x$ ,  $D_y = 2 D_x$ . Pour une charge sinusoidale dans les deux sens on obtient la même précision que plus haut.

Comme il fallait s'y attendre, la valeur des coefficients constants  $D_x$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_y$  n'a pas d'influence sur la précision de la méthode. Il serait donc inutile d'étudier plus longuement les plaques orthotropes.

## 6° Plaque en forme de parallélogramme

### a) Données du problème

Nous allons étudier une dalle biaise à  $45^\circ$  dont deux bords parallèles sont simplement appuyés tandis que les deux autres sont libres. La charge sera *uniformément répartie* sur toute la dalle. On a dans ce cas une symétrie par rapport au centre et l'on peut numéroter les nœuds comme le montre la figure 28, la condition de symétrie est en effet  $w(+x, +y) = w(-x, -y)$ .

### b) Conditions au contour

Bords libres

$$\left. \begin{array}{l} M_y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{a}{2} \\ V_y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{a}{2} \end{array} \right\} \quad (65)$$

Bords simplement appuyés

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$$

$$\text{ou} \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \frac{a}{2} + y \quad (66)$$

Pour remplir la condition  $w=0$  le long du bord appuyé il suffit de poser  $w_a = w_f = w_l = w_k = w_e = 0$ .

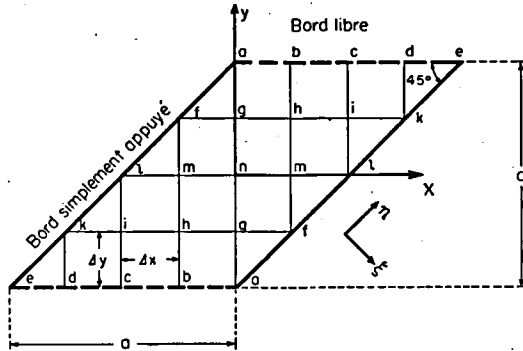


Fig. 28

Considérons la plaque à étudier comme appartenant à une suite de plaques (fig. 29). Ces plaques sont chargées alternativement dans

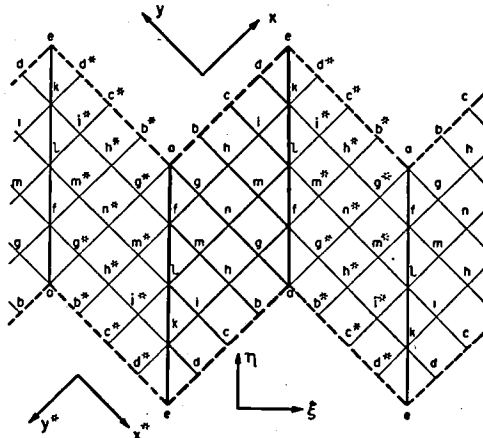


Fig. 29

le sens positif et dans le sens négatif. Les surfaces élastiques seront alors antisymétriques les unes des autres par rapport aux axes  $a-f-l-k-e$ , axes le long desquels les ordonnées  $w$  seront nulles comme l'exige la première condition au contour. De plus  $w_b^* = -w_b$ ,  $w_c^* = -w_c$  etc. Pour les courbures, en tenant compte des directions différentes des axes  $x, y$  et  $x^*, y^*$ , on peut écrire

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_b = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^{*2}}\right)_{b^*} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{b^*} \text{ et } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_b = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{b^*} \text{ etc. (67)}$$

Le long des axes d'antisymétrie cette condition devient

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_f + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_f = 0, \text{ etc. ou } \Delta w = 0 \text{ comme demandé.}$$

Pour satisfaire aux conditions le long des bords simplement appuyés il suffit donc d'étudier la suite de plaques de la figure 29.

### c) Méthode de calcul

Il est impossible de se servir des schémas explicites car, même au nœud central  $n$ , les schémas s'étendent au delà des bords. On aura donc recours au procédé *semi-implicite*, qu'on doit de toute façon employer pour les bords libres. Il s'agit d'exprimer d'abord la valeur des courbures  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  en fonction des inconnues  $w$ .

Considérons donc la figure 29. Dans l'angle aigu, au nœud  $e$ , on doit avoir à la fois  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$  et  $\Delta w = 0$ ; cela n'est possible que si  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . (Dans l'angle obtus, au nœud  $a$ , ce raisonnement ne joue pas, car les courbures sont discontinues). La ligne  $e-d-c-b-a-g^*-n^*-g^*-a-b-c-d-e$  est symétrique par rapport au nœud central  $n^*$ ; on doit avoir de plus  $w'' = 0$  aux extrémités en  $e$  et  $w = 0$  en  $e$  et  $a$ . C'est exactement le cas étudié dans ce même chapitre en 4°, b) (fig. 23). Le tableau (III) donne donc directement en fonction des  $w$  la valeur de  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  aux nœuds  $a, b, c, d, e$ . Grâce à la relation (67) on obtient également les  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  en  $g$  et  $n$ ; il suffit de changer les signes.

Les valeurs des  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  en  $b, c, d$  se déduisent des  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  puisque d'après la condition au contour (65)  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ .

Examinons maintenant les lignes  $b-h-m-f-g^*-h^*-i^*-k-d$  et  $c-i-l-m^*-n^*-m^*-l-i-c$ . Elles ont huit mailles égales comme celle envisagée au chapitre deuxième, fig. 11. D'autre part, les  $w''$  et les  $w$  sont connus à leurs extrémités (les  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  en  $b, c, d$  viennent d'être déterminés). Pour la ligne  $c-n^*-c$  qui est symétrique on emploie directement le tableau ( $I_8$ ), cas symétrique, en n'oubliant pas le  $w_1''$  qui vaut  $(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})_c$ . Pour la ligne  $b-h^*-d$  on utilise la méthode de décomposition d'Andrée et l'on superpose simplement le tableau ( $I_8$ ), cas symétrique, et le tableau ( $I_8$ ), cas antisymétrique. Comme pour la plaque étudiée  $a = 4 \Delta x = \frac{l}{2}$ , il faut diviser toutes les valeurs par 4. En tenant compte également de la relation (67) on obtient pour finir toutes les valeurs des  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et des  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  données à la page 117. Exceptionnellement on a pris  $\nu = 0,33^{33}$ .

#### d) Système d'équations linéaires

On utilise pour les nœuds intérieurs la relation intermédiaire (24c) qui devient dans le cas particulier  $\Delta x = \Delta y$

$$\left(\frac{a}{\Delta x}\right)^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline +4 & +4 & +4 \\ \hline +4 & -32 & +4 \\ \hline +4 & +4 & +4 \\ \hline \end{array} \cdot w + a^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline -10 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & & \\ \hline -1 & -10 & -1 \\ \hline -1 & & \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a^2 \cdot \frac{K(p)}{D}$$

On tiendra compte en  $g, m$  et  $i$  des antisymétries avec par exemple  $w_{m^*} = -w_m, p_{m^*} = -p_m$ . Le plus simple est de calculer directement les charges nodales d'après la figure 29.

<sup>33)</sup> Cette valeur de  $\nu$  est celle des essais sur maquettes du Laboratoire de statique de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, cf. *L. Marguerat*: De quelques problèmes à l'ordre du jour et des tendances actuelles en matière de construction de ponts aux Chemins de Fer Fédéraux, Bulletin technique de la Suisse romande, 13 juin 1953.

Valeurs des  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et des  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

	$w_n$	$w_m$	$w_g$	$w_h$	$w_i$	$w_b$	$w_c$	$w_d$
$d$	- 0,014738	+ 0,002449	+ 0,055188	- 2,375015	+23,512653	- 2,403198	+23,524942	-40,754031
$c$	+ 0,147378	+ 0,024485	- 0,551883	+23,750154	-43,126526	+24,031983	-43,249419	+23,540306
$b$	- 1,459040	- 0,242399	+ 5,463639	-43,126526	+23,752603	-45,916643	+24,969245	- 2,649037
$a$	+14,443021	+ 2,399500	-54,084507	+23,515101	- 2,399500	+51,134444	-14,443022	+ 2,950064
$k$	+ 0,000491	- 0,002449	+ 0,238110	- 0,024485	+ 0,242399	+ 0,080095	- 0,784245	-18,037331
$i$	- 0,000049	+ 0,024485	- 2,399312	+23,750154	-43,126526	- 0,007905	+ 0,079233	+ 1,822140
$h$	+ 0,000010	- 0,242399	+23,755013	-43,126526	+23,752603	- 0,001044	- 0,008089	- 0,184065
$g$	- 0,000050	+ 2,399500	-43,150820	+23,515101	- 2,399500	+ 0,018335	+ 0,001667	+ 0,018504
$f$	+ 0,000496	-23,752603	+23,753192	- 0,024485	+ 0,242399	- 0,182309	+ 0,008574	- 0,009980
$l$	- 2,399004	+23,995001	- 0,001859	- 0,024485	-23,515101	+ 0,080939	+ 1,813929	+ 0,079283
$m$	+23,755000	-45,550510	+ 0,000188	- 0,024485	+ 2,399500	- 0,008259	- 0,185094	- 0,008050
$n$	-43,151000	+47,510103	- 0,000038	- 0,024485	- 0,479900	+ 0,001652	+ 0,037018	+ 0,001618

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot a^2$

$d$	+ 0,004863		- 0,018212			+ 0,793055	- 7,763231	+13,448830
$c$	- 0,048635		+ 0,182121			- 7,930554	+14,272308	- 7,768301
$b$	+ 0,481483		- 1,803001			+15,152492	- 8,239851	- 0,874182
$a$	-14,443021		+54,084507			-51,134444	+14,443022	+ 2,950064
$k$	- 0,000491	+ 0,002449	- 0,238110	+ 2,375015	-23,512653	- 0,080095	+ 0,784245	+18,037331
$i$	- 0,235040	+ 2,399500	- 0,018398	-40,751510	-40,751510	+ 0,801149	+17,954163	+ 0,784758
$h$	- 0,048640	+23,512653	- 0,057810	-40,727026	- 0,002449	+17,865226	+ 0,832394	- 0,088290
$g$	+24,963981	+23,752603	-48,620868	+ 0,024485	- 0,242399	+ 5,217800	- 1,473778	+ 0,301027
$f$	- 0,000496	-23,753192	-23,753192	+ 0,024485	- 0,242399	+ 0,182309	+ 0,008574	+ 0,000980
$l$	+ 2,399004	-23,995001	+ 0,001859	+23,515101	+23,515101	- 0,080939	- 1,813929	- 0,079283
$m$	+ 0,004914	-43,126526	+ 2,381100	+23,270254	+ 0,024485	- 1,804794	- 0,084096	+ 0,008780
$n$	-43,396796		+48,124174			- 1,043560	+ 0,294756	- 0,060205

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot a^2$

Pour les nœuds  $b, c, d$  on se sert du schéma  $(D)^*$  qui exprime justement la condition  $V=0$ . Pour  $\nu=0,33$  le schéma s'écrit, si l'on multiplie par 0,3

$$a^2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +0,699 & -7,41 & +0,699 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 \cdot \\ \hline +1,01 & +3,81 & +1,01 & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{a^2 \Delta x^2}{20 D} \cdot p \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline +0,096 & -3,782 & +0,096 & +2 \\ \hline +0,498 & +2,604 & +0,498 & +1 \\ \hline \end{array}$$

D'où le système d'équations linéaires

	$w_n$	$w_m$	$w_g$	$w_h$	$w_i$	$w_b$	$w_c$	$w_d$	$a^4 p_0 / D \cdot 10^{-3}$
$n$	+353,4682	-265,6470	-271,7019	+34,4293	+9,5490	+13,9919	-3,1529	+0,5314	62,5000
$m$	-132,6019	+358,7604	+8,5529	-125,5515	-7,7500	+19,4380	+4,2277	+0,3181	57,2917
$g$	-157,0822	+9,2296	+419,6124	-130,4485	+24,7198	-57,5450	+28,2862	-6,0597	57,2917
$h$	+17,4414	-125,5515	-129,7966	+326,5355	-135,1495	+74,7359	+14,4924	+4,2948	62,5000
$i$	+4,6517	-7,7500	+25,0268	-135,1495	+309,8106	+14,1695	-76,5151	-3,6376	57,2917
$b$	+29,9914	+64,1672	-50,6468	-218,3262	+20,0726	+379,1812	-180,9139	+35,4384	112,500
$c$	-2,5273	+17,7825	+24,1615	+21,2916	-230,1005	-169,2490	+345,7060	-176,0773	112,500
$d$	+0,0746	+1,2190	-3,0792	+23,2847	-39,4203	+31,6480	-168,8284	+252,8306	93,750

Les solutions  $w$  permettent de calculer facilement les courbures à l'aide du tableau des  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Les formules (49) et (50) donnent directement les tangentes. Celles-ci, introduites dans les équations (51), conduisent aux torsions géodésiques  $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y}$  sans que l'on ait besoin de chercher les  $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$  ou  $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$ . On obtient

Nœud	d		c		b		a		k		i	
	h		g		f	l	m	n				n
w	+ 4,331584 + 4,572953	+ 6,696394 + 3,140828	+ 5,143332 0	0 0	0 0	0 0	0 + 2,908803	0 + 2,908803	0 + 2,908803	0 + 2,908803	+ 3,4069000 + 4,0893456	$\frac{\alpha^4 p_0}{D} 10^{-3}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	-31,24460 -43,24430	-65,17457 -29,00564	-69,24141 + 5,22961	+68,25606 - 7,22342	-12,98270 -28,49625	+8,25606 + 7,22342	-12,98270 -21,25843	-12,98270 -21,25843	-12,98270 -21,25843	-12,98270 -21,25843	-37,40155 -39,63045	$\frac{\alpha^2}{D} 10^{-3}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	+10,31071 -21,15953	+21,50761 -32,26986	+22,84963 - 5,22961	-68,25606 + 7,22342	+12,98270 -21,25843	+12,98270 + 7,22342	+12,98270 -21,25843	+12,98270 -21,25843	+12,98270 -21,25843	+12,98270 -21,25843	- 5,12762 -29,96909	$\frac{\alpha^2}{D} 10^{-3}$
$\frac{\partial w}{\partial x}$	+14,7506 - 0,7071	+ 2,4151 -10,1558	-16,1726 -13,1464	-18,6831 +13,3319	+16,0414 + 8,8538	-18,6831 +13,3319	+16,0414 + 8,8538	+16,0414 + 8,8538	+16,0414 + 8,8538	+16,0414 + 8,8538	+ 9,7764 0	$\frac{\alpha^3}{D} 10^{-3}$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	- 3,0 -45,5	-29,5 -37,2	-78,5 0	-30,0 0	0 -29,1	-30,0 0	0 -29,1	0 -29,1	0 -29,1	0 -29,1	-25,5 -41,7	$\frac{\alpha^2}{D} 10^{-3}$

On peut calculer ensuite les moments  $M_x, M_y, M_{xy}$  grâce aux relations (19a) à (20a) et les directions et grandeurs des moments principaux  $M_1, M_2$  grâce aux formules (29) et (30). On trouve avec  $\nu = 0,33$

	d		c		b		i		h		g		m		n		
$M_x$	+27,84	+58,08	+61,70	+39,09	+50,23	+39,65	+35,51	+49,52	+50,23	+39,65	+35,51	+49,52	+35,51	+49,52	+35,51	+49,52	$\alpha^2 p_0 10^{-3}$
$M_y$	0	0	0	+17,47	+35,43	+41,84	+30,66	+43,05	+35,43	+41,84	+30,66	+43,05	+30,66	+43,05	+30,66	+43,05	$\alpha^2 p_0 10^{-3}$
$M_{xy}$	+ 2,0	+19,8	+52,6	+17,1	+30,5	+24,9	+19,5	+27,9	+30,5	+24,9	+19,5	+27,9	+19,5	+27,9	+19,5	+27,9	$\alpha^2 p_0 10^{-3}$
$\beta$	4°	17° 20'	29° 50'	28° 50'	38° 10'	46° 20'	41° 30'	41° 40'	38° 10'	46° 20'	41° 30'	41° 40'	41° 30'	41° 40'	41° 30'	41° 40'	$\alpha^2 p_0 10^{-3}$
$M_1$	+28,0	+64,2	+91,8	+48,5	+74,2	+65,7	+52,7	+74,5	+74,2	+65,7	+52,7	+74,5	+52,7	+74,5	+52,7	+74,5	$\alpha^2 p_0 10^{-3}$
$M_2$	- 0,1	- 6,1	-30,1	+ 8,1	+11,4	+15,8	+13,4	+18,2	+11,4	+15,8	+13,4	+18,2	+13,4	+18,2	+13,4	+18,2	$\alpha^2 p_0 10^{-3}$

Ces résultats sont représentés à la figure 30. Le long du bord simplement appuyé les directions principales sont parallèles à  $x$  et  $y$  puisque les moments s'annulent pour les directions  $\xi$  et  $\eta$ . Le  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  doit donc valoir 0. Le long du bord libre  $M_{xy}$ , et par conséquent

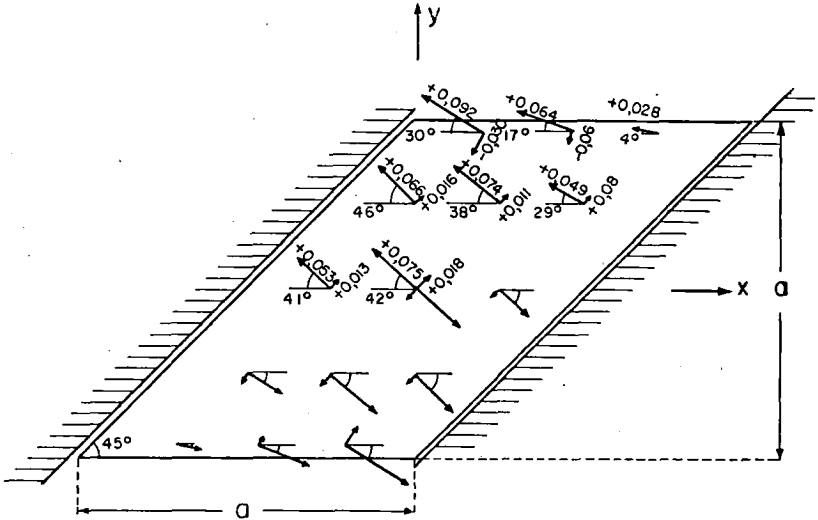


Fig. 30. Dalle biaisée à 45°. Direction et grandeurs des moments principaux, charge uniformément répartie sur toute la dalle,  $\nu = 0,33$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , n'est pas nul comme l'exigeraient les conditions au contour strictes. On a vu au chapitre premier, 2<sup>o</sup>, que cette circonstance ne produit que des perturbations locales. Les valeurs calculées seront donc valables un peu à l'intérieur de la plaque. Remarquons bien que cette imprécision est inhérente à la théorie des plaques et non à leur résolution par la méthode du polygone funiculaire.

Donnons pour terminer quelques résultats de mesures faites sur une plaque semblable à la nôtre<sup>34</sup>) (résultats en millièmes):

<sup>34</sup>) Les résultats détaillés ne figurent pas dans l'article de *L. Marguerat* cité à la note 33; l'auteur a bien voulu me les communiquer et je l'en remercie. Une importante notice bibliographique, tenant compte des plaques obliques, figure dans l'ouvrage de *H. Rüsçh*, *Fahrbahnplatten von Straßenbrücken*, Ernst & Sohn, Berlin, 1953.



$$\begin{array}{l} \text{Au point } n \quad M_1 = 77 \quad M_2 = 21 \quad \beta = 44^\circ \quad M_x + M_y = 98 \\ \quad \quad \quad c \quad M_1 = 62 \quad \quad \quad \beta = 20^\circ \quad M_x + M_y = 61 \end{array}$$

La concordance est satisfaisante.

## 7° Voilement des tôles

L'étude de la stabilité élastique des plaques minces est très vaste et nous ne pourrions que l'effleurer. Le problème des panneaux sollicités sur deux côtés opposés par des contraintes normales conduit à une équation différentielle totale si les bords sollicités sont simplement appuyés<sup>35)</sup>. Nous allons considérer deux cas où cette propriété n'existe pas. Rappelons l'équation fondamentale<sup>36)</sup>

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( \sigma_x \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \cdot h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (68)$$

Cette relation se déduit de l'équation (40 a) établie au chapitre premier pour les grandes déformations des plaques. Ici  $p = 0$ .

a) *Panneau carré, raidi diagonalement, sollicité à la compression  $\sigma_0$  sur deux bords opposés (Fig. 31)*

On admet les conditions suivantes:

La plaque est simplement appuyée, donc  $w = 0$ ,  $w'' = 0$  pour  $x = \pm \frac{\alpha}{2}$  et  $y = \pm \frac{\alpha}{2}$ . La rigidité à la flexion du raidisseur est très grande,  $w = 0$  pour  $y = x$ . La rigidité à la torsion de ce même raidisseur est négligeable.

L'équation générale (68) devient dans notre cas, avec  $\sigma_y = -\sigma_0$ ,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\sigma_0 \cdot \frac{h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

<sup>35)</sup> Cf. *F. Stüssi*: Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten, Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau (Mémoires A. I. P. C.), achter Band, 1947.

<sup>36)</sup> Cf. *S. Timoshenko*: Théorie de la stabilité élastique, Béranger, Paris et Liège, 1943.

ou 
$$\Delta \Delta w = -\sigma_0 \cdot \frac{h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\sigma \text{ positif} = \text{compression}).$$

Si l'on pose comme d'habitude  $\sigma_0 = k \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$  on peut écrire

$$\Delta \Delta w = -\frac{\pi^2}{a^2} \cdot k \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (69)$$

Le cas de voilement déterminant est antisymétrique par rapport à la diagonale du raidisseur. On peut alors numéroter les nœuds comme le montre la figure 31. Il n'y a que trois inconnues.

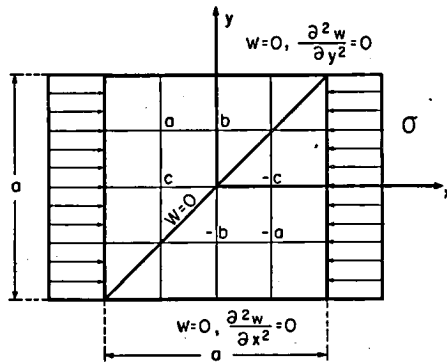


Fig. 31

L'équation à résoudre contient un terme supplémentaire qui ne figure pas dans (24). Pourtant l'élimination peut s'opérer comme au chapitre deuxième, grâce à la relation (47), en partant de

$$K (\Delta \Delta w) = -K \left( \frac{\pi^2}{a^2} \cdot k \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (K = \text{charge nodale}).$$

La relation intermédiaire (24 c) contient l'expression

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & +2 & -1 \\ \hline -10 & +20 & -10 \\ \hline -1 & +2 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot k \cdot \frac{12}{\Delta x^2} \cdot w$$

au lieu de celle en  $p$ . Dans les schémas on a en plus, au lieu des  $p$ , pour  $w = 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  au bord.

(A)

$$\frac{\pi^2 \Delta y^2}{12 a^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & -8 & +18 & -8 & -1 \\ \hline -20 & -160 & +360 & -160 & -20 \\ \hline -102 & -816 & +1836 & -816 & -102 \\ \hline -20 & -160 & +360 & -160 & -20 \\ \hline -1 & -8 & +18 & -8 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot k w$$

(B)

$$\frac{\pi^2 \Delta y^2}{12 a^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & +19 & -8 & -1 \\ \hline & +380 & -160 & -20 \\ \hline & +1938 & -816 & -102 \\ \hline & +380 & -160 & -20 \\ \hline & +19 & -8 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot k w$$

(B')

$$\frac{\pi^2 \Delta y^2}{12 a^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -101 & -808 & +1818 & -808 & -101 \\ \hline -20 & -160 & +360 & -160 & -20 \\ \hline -1 & -8 & +18 & -8 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot k w$$

(B B')

$$\frac{\pi^2 \Delta y^2}{12 a^2} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & +1919 & -808 & -101 \\ \hline & +380 & -160 & -20 \\ \hline & +19 & -8 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot k w$$

En posant  $k \pi^2 \left(\frac{\Delta y}{a}\right)^2 = \varphi$  on trouve facilement

	$w_a$	$w_b$	$w_c$	
$a$	+1728 -160,0000 $\varphi$	- 640 + 66,6667 $\varphi$	- 640 - 33,3333 $\varphi$	0
$b$	- 640 + 66,6667 $\varphi$	+1728 -150,0000 $\varphi$	0	0
$c$	- 640 - 33,3333 $\varphi$	0	+1728 -170,0000 $\varphi$	0

Le présent système n'a pas de termes de charge proprement dits, il est homogène. Ce qu'il s'agit de déterminer ici c'est la valeur de  $\varphi$ . La condition mathématique à satisfaire est de rendre le déterminant du système nul.

Le calcul de  $\varphi$  peut se faire par deux procédés différents:

1. Par tâtonnements. On admet une valeur de  $\varphi$ . Si l'on emploie l'algorithme de Gauss, il faut que le dernier coefficient du système réduit s'annule pour rendre le déterminant nul.
2. Par le procédé d'approximations successives d'Engesser-Vianello. On admet des valeurs pour les ordonnées  $w$  du terme de droite de l'équation (69), c'est-à-dire celles qui sont multipliées par  $\varphi$

dans le système. On obtient ainsi des „termes de charge“ qui permettent de déterminer de nouvelles ordonnées  $w$ , et ainsi de suite. A la fin les ordonnées  $w$  admises et celles qui en sont déduites à partir du système concordent parfaitement, à un multiplicateur près qui est la valeur de  $\varphi$ .

Ces deux procédés conduisent au même résultat, mais avec plus ou moins de peine<sup>37)</sup>. Nous donnerons ci-dessous le calcul par le premier procédé.

Après quelques essais on admet  $\varphi = 5,259923214$ , d'où le système

	$w_a$	$w_b$	$w_c$
$a$	+886,4122858	-289,3384524	-815,3307738
$b$	-289,3384524	+939,0115179 - 94,4444717	-266,1363657
		+844,5670462	-266,1363657
$c$	-815,3307738	0	+833,8130536 -749,9492971 - 83,8637565
			0,0000000

Nous avons voulu montrer que l'on peut faire le reste aussi petit que l'on veut avec de la patience. Dans la pratique on vérifiera simplement la dernière décimale en constatant que le reste change de signe quand on modifie de  $\pm 1$  le dernier chiffre de  $\varphi$ .

Le coefficient de voilement  $k$  vaut donc  $k = \frac{a^2}{4y^2} \frac{\varphi}{\pi^2} = 8,53$ . Ce cas de voilement a été déjà étudié par le procédé aux différences par *W. Burchard*<sup>38)</sup>. Pour un réseau de six fois six mailles l'auteur

<sup>37)</sup> Le système du procédé par tâtonnements ne contient pas de termes connus. D'autre part, il n'est pas nécessaire de remonter aux ordonnées  $w$ . Par contre les coefficients des  $w$  sont chaque fois différents et il faut recommencer l'élimination dès le début. Le système du procédé d'approximations successives contient des termes connus et on doit calculer les ordonnées  $w$ . Mais l'élimination est faite une fois pour toutes. Ce procédé sera donc plus indiqué si l'on a un grand nombre d'équations.

<sup>38)</sup> Cf. *W. Burchard*: Beulspannungen der quadratischen Platte mit Schrägsteife unter Druck bzw. Schub. Ingenieur-Archiv, VIII. Band, Fünftes Heft, Oktober 1937.

obtient 8,61. On voit donc que la méthode du polygone funiculaire permet, pour une même précision, de prendre un réseau moins dense. Comme nous ne cherchons pas la valeur exacte de  $k$ , nous pouvons arrêter ici le calcul.

b) *Panneau carré, raidi diagonalement, cisailé uniformément sur ses quatre bords. Fig. 32*

Les conditions seront les mêmes que dans l'exemple précédent

a) soit  $w = w'' = 0$  pour  $x = \pm \frac{a}{2}$  et  $y = \pm \frac{a}{2}$ ,  $w = 0$  pour  $y = x$ .

En posant  $\tau_0 = k \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$  l'équation générale (68) devient

$$\Delta \Delta w = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot k \cdot 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (70)$$

Le cas de voilement déterminant est antisymétrique par rapport à la diagonale du raidisseur et symétrique par rapport à l'autre diagonale. La figure 32 montre la numérotation des nœuds.

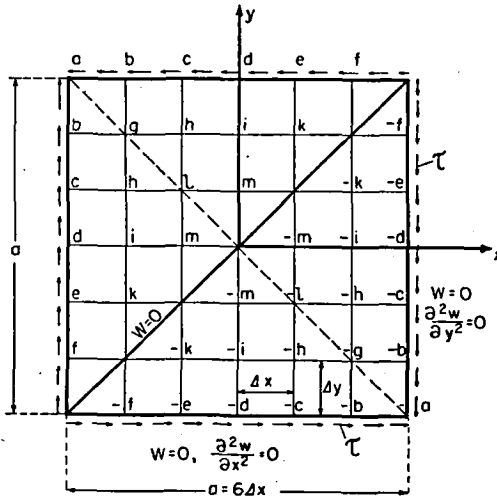


Fig. 32

L'équation (70) ne peut être résolue par le procédé implicite car les termes en  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  ne se laissent pas éliminer. On les exprimera donc en fonction des  $w$  pour le réseau donné. Il n'y aura plus alors qu'à introduire les valeurs des  $\frac{\pi^2}{a^2} \cdot k \cdot 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  comme „charges“  $p$  dans les schémas (A), (B), (BB').

Calcul des  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  en fonction des  $w$ .

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ . Il suffit donc d'appliquer les relations (49) et (50) deux fois de suite. Pour cela il faut connaître les  $w''$ . Les lignes du réseau ont six mailles, comme la fig. 11. Au bord  $w_1'' = 0$  (pour le calcul de  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$  pour  $x = \pm \frac{a}{2}$ ; pour le calcul de  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$  pour  $y = \pm \frac{a}{2}$ ). Pour obtenir le cas général il suffit de superposer le tableau (I<sub>6</sub>) cas symétrique et le tableau (I<sub>6</sub>) cas antisymétrique. On trouve pour  $w_1 = w_1^* = 0$ .

	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_{3^*}$	$w_{2^*}$
$w_2''$	-91,690346	+52,903468	- 5,344330	+ 0,539832	-0,053983
$w_3''$	+52,903468	-97,034676	+53,443300	- 5,398314	+0,539832
$w_4''$	- 5,344330	+53,443300	-97,088660	- 53,44330	-5,334330

}  $\frac{1}{a^2}$

Le  $w'$  sur la même ligne, calculé par les équations (49) et (50), vaut :

Ligne à six mailles égales, au bord ordonnée $w$ et dérivée seconde $w''$ nulles, valeurs de la dérivée première $w'$ en fonction des $w$					
	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_{3^*}$	$w_{2^*}$
$w_1'$	+10,187816	-2,878163	+0,593814	-0,059981	+0,005998
$w_2'$	- 0,734770	+4,347704	-0,742268	+0,074977	-0,007498
$w_3'$	- 4,199250	-0,007498	+4,274227	-0,734770	+0,073477
$w_4'$	+ 0,727273	-4,272727	0	+4,272727	-0,727273

}  $\frac{1}{a}$

A partir de ce tableau on calcule aisément les torsions géodésiques  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  en tous les points du réseau. Comme les ordonnées  $w$ , les torsions  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  sont antisymétriques par rapport à la diagonale du raidisseur et symétriques par rapport à l'autre diagonale.

Valeurs des torsions géodésiques  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

	$w_g$	$w_h$	$w_i$	$w_k$	$w_l$	$w_m$
$a$	+103,79156	-58,64367	+12,09221	- 1,18763	+ 8,28022	- 3,34695
$b$	- 7,48566	+46,40750	- 7,98950	+ 0,76027	-12,50890	+ 4,62900
$c$	- 42,78163	+12,01372	+40,98220	- 7,02230	- 0,02249	-11,61369
$d$	+ 7,41369	-45,69222	+ 0,86373	+41,41855	+12,55389	- 5,07441
$e$	- 0,77376	+ 7,94901	-46,05661	+12,16251	- 2,11434	+12,47741
$f$	+ 0,07198	- 0,71528	+ 7,12577	-42,17882	- 0,04498	+ 0,44536
$g$	+ 0,53983	- 6,39025	+ 1,07966	- 0,04499	+18,89691	- 6,34302
$h$	+ 3,08603	-18,26261	+ 0,06230	- 0,09436	+ 0,02249	+17,72277
$i$	- 0,53983	+ 6,38801	- 1,07966	+ 0,04499	-18,89691	+ 6,34302
$k$	+ 0,08548	- 1,17413	+ 6,28004	-18,26272	+ 3,19400	-18,80244
$l$	+ 17,62830	+ 0,17094	-36,52521	+ 6,17207	- 0,53983	+ 6,21706
$m$	- 3,00056	+17,08847	+ 6,21706	-18,16813	+ 3,17151	-36,52521

$\frac{1}{a^2}$

En posant  $\frac{k \pi^2 \Delta x^2}{2a^2} = \psi$  on obtient finalement le système suivant

	$w_g$	$w_h$	$w_i$	$w_k$	$w_l$	$w_m$
$g$	+1732	-1216	+ 136	0	- 32	+ 64
	- 2,3846 $\psi$	+ 34,8419 $\psi$	+ 1,4127 $\psi$	- 0,2681 $\psi$	-127,1251 $\psi$	- 10,3943 $\psi$
$h$	- 608	+1768	- 576	+ 68	- 576	+ 36
	- 17,9454 $\psi$	+ 130,9876 $\psi$	+ 23,1939 $\psi$	- 1,5400 $\psi$	+ 0,4094 $\psi$	- 131,6876 $\psi$
$i$	+ 68	- 576	+1800	- 640	- 32	- 576
	- 4,7651 $\psi$	- 14,1451 $\psi$	+ 0,3047 $\psi$	+ 21,5991 $\psi$	+ 129,4962 $\psi$	+ 10,5882 $\psi$
$h$	0	+ 68	- 640	+1832	+ 32	- 100
	+ 0,1430 $\psi$	- 2,5646 $\psi$	- 12,6473 $\psi$	+ 131,1010 $\psi$	+ 3,7406 $\psi$	+ 132,0269 $\psi$
$l$	- 32	-1152	- 64	+ 64	+1868	-1216
	- 135,0427 $\psi$	- 0,9632 $\psi$	+ 267,5737 $\psi$	+ 0,0085 $\psi$	+ 0,1088 $\psi$	+ 8,6089 $\psi$
$m$	+ 32	+ 36	- 576	- 100	- 608	+1800
	- 3,9014 $\psi$	- 135,4770 $\psi$	+ 7,7301 $\psi$	+ 135,6724 $\psi$	+ 3,3934 $\psi$	+ 268,6338 $\psi$

Le déterminant s'annule pour

$\psi = -1,6924$  (raidisseur tendu)

$k = \frac{2a^2}{\Delta x^2 \pi^2} \psi = -12,346$

$\psi = +5,9444$  (raidisseur comprimé)

$k = \frac{2a^2}{\Delta x^2 \pi^2} \psi = 43,37$

*W. Burchard* (note 38) a trouvé par la méthode aux différences: pour le raidisseur tendu  $\psi = -12,34$  pour un réseau à 9 mailles, pour le raidisseur comprimé  $\psi = 42,09$  pour un réseau à 7 mailles.

Comme dans l'exemple précédent on voit que, surtout pour le raidisseur tendu, on peut travailler avec un réseau sensiblement moins dense que dans la méthode aux différences.

Nous terminons ici les applications de la méthode du polygone funiculaire à l'étude des plaques minces fléchies. Ces exemples ont, nous voulons l'espérer, montré les avantages de la méthode.

## CHAPITRE QUATRIÈME

### Application de la méthode du polygone funiculaire au calcul des parois minces

#### 1<sup>o</sup> Introduction

L'élasticité plane comprend un domaine très étendu. Dans le cadre des restrictions énoncées au chapitre deuxième, paragraphe 3<sup>o</sup>, nous étudierons quelques applications choisies. Seules seront envisagées des parois *rectangulaires isotropes*. Comme on l'a vu pour les plaques minces, on peut employer le même procédé pour des parois orthotropes ou de forme plus compliquée.

Comme on ne trouve guère de résultats numériques chez les auteurs qui se sont occupés des parois minces, il nous sera pratiquement impossible de comparer directement nos résultats avec ceux que donneraient les méthodes analytiques. Néanmoins l'analogie qui existe entre la théorie des plaques et celle des parois nous permettra d'évaluer approximativement la précision obtenue.

Nous allons d'abord établir une nouvelle analogie entre le problème de la paroi rectangulaire soumise à des contraintes perpendiculaires à son contour et celui de la plaque mince fléchie; ceci nous facilitera l'examen des divers cas de sollicitations qui se présentent. Après quoi nous passerons à l'étude détaillée de quelques



problèmes de répartition des contraintes. Nous parlerons des tensions de retrait dans les soudures et de la largeur utile des tables de compression des poutres. Pour terminer nous donnerons un exemple de problème mixte plaque-paroi, celui d'une plaque dont les déformations sont grandes.

**2° Paroi sollicitée par des contraintes perpendiculaires à son contour ou soumise à des tensions d'origine thermique. Nouvelle analogie avec le problème de la plaque totalement encastrée**

On a indiqué au chapitre deuxième qu'il est possible de ramener tout problème de paroi à celui d'une plaque non chargée mais déformée le long de son contour. L'analogie qui va suivre se rapporte par contre à une plaque totalement encastrée dont les déformations et les tangentes s'annulent sur les bords, cette plaque étant chargée.

Considérons la paroi de la figure 33. Les faces  $y = \pm \frac{b}{2}$  sont sollicitées par des contraintes  $\sigma_y^0$  réparties de façon quelconque le long de la face, mais symétriques par rapport à l'axe  $x$ . Il en est de même des faces  $x = \pm \frac{a}{2}$ . Les tensions d'origine thermique seront provoquées par une élévation de température  $t(x, y)$ .

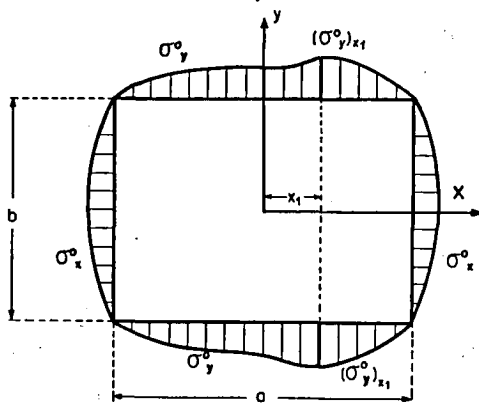


Fig. 33

Considérons d'abord ces tensions d'origine thermique. Si l'on désigne par  $\alpha_t$  le coefficient de dilatation, les relations (13) et (14) doivent être complétées et deviennent

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \alpha_t \cdot t \quad (13a) \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_t \cdot t \quad (14a)$$

La relation (15) reste inchangée. En introduisant les valeurs de  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  dans l'équation de compatibilité (34) et en exprimant  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  par la fonction d'Airy  $F$  grâce aux équations (31) à (33), on obtient pour une matière isotrope<sup>39)</sup>

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -E \cdot \alpha_t \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (71)$$

Pour étudier de façon semblable la paroi sollicitée par des contraintes perpendiculaires à son contour, il suffit de considérer ce problème comme provenant de la superposition de deux états:

- a) Un état où tous les points de même abscisse  $x_1$ , y compris les bords, ont une contrainte  $(\sigma_y^0)_{x_1}$  (fig. 33); il en est de même pour les points d'ordonnée  $y_1$ . Ce état ne demande aucun calcul puisque toutes les contraintes sont données.
- b) Un état où les bords ne sont *pas sollicités* et où les points *intérieurs* de même abscisse  $x_1$  ont une contrainte initiale extérieure  $-(\sigma_y^0)_{x_1}$ , et de même pour les points d'ordonnée  $y_1$ . Comme il n'y a pas de forces le long du contour, la résultante des tensions intérieures,  $\sigma_x$  ou  $\sigma_y$  est nulle dans chaque section, comme c'est le cas aussi pour les tensions thermiques.

Les relations (13) et (14) se transforment en

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x^0}{E} + \nu \frac{\sigma_y^0}{E} \quad (13b) \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y^0}{E} + \nu \frac{\sigma_x^0}{E} \quad (14b)$$

tandis que (15) ne change pas. En procédant comme ci-dessus et

<sup>39)</sup> En désignant par  $\alpha_{t,x}$  le coefficient de dilatation dans la direction  $x$  et  $\alpha_{t,y}$  le coefficient de dilatation dans la direction  $y$ , on obtiendrait pour une matière orthotrope

$$E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2E_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -E_x E_y \left( \alpha_{t,y} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \alpha_{t,x} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

en sachant que  $\frac{\partial^2 \sigma_x^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y^0}{\partial y^2} = 0$ , on trouve facilement

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 \sigma_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^0}{\partial x^2} \quad (72)$$

Les équations (71) et (72) sont construites comme l'équation (24a) des plaques isotropes, avec  $p$  valant  $p = -E \cdot D \cdot \alpha_t \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$  ou respectivement  $p = D \left( \frac{\partial^2 \sigma_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^0}{\partial x^2} \right)$ .

D'autre part, dans les deux cas, les bords ne sont pas sollicités et les conditions au contour sont  $\sigma_x = \tau = 0$  pour  $x = \pm \frac{a}{2}$  et  $\sigma_y = \tau = 0$  pour  $y = \pm \frac{b}{2}$ . Ces conditions sont remplies si l'on prend  $F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$  tout le long du contour, comme dans la condition (25). Les solutions  $F$  des équations (71) et (72) sont donc les ordonnées de la surface élastique d'une plaque totalement encastrée sur ses côtés et soumise à une charge

$$p = -E \cdot D \cdot \alpha_t \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (71)$$

respectivement 
$$p = D \left( \frac{\partial^2 \sigma_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^0}{\partial x^2} \right) \quad (72)$$

Les contraintes correspondent, avec permutation de  $x$  et  $y$ , aux courbures de la plaque. Pour la paroi sollicitée par des forces normales à son contour, il faut encore superposer l'état a) pour trouver les contraintes totales.

La valeur de la charge  $p$  dépend des courbures  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Passons en revue les différents cas qui se présentent:

$\alpha$ )  $t$  ou  $\sigma^0$  varie de façon continue, sa tangente de même (fig. 34a).  $p$  est une charge répartie, qui peut d'ailleurs présenter des sauts. Nous avons vu en détail au chapitre troisième comment on calcule les plaques ainsi chargées.

La température  $t$  obéit pratiquement toujours à une telle loi et les cas suivants n'intéressent que les contraintes  $\sigma^0$ .

$\beta$ )  $\sigma^0$  varie de façon continue, la tangente est discontinue (fig. 34b). Si par exemple  $\sigma_y^0$  présente une brisure pour  $x = x_1$ , on aura le long

de la droite  $x = x_1$  une charge linéaire, concentrée pour la direction  $x$  et répartie uniformément pour la direction  $y$ . Nous avons traité également au chapitre troisième un cas de cette espèce.

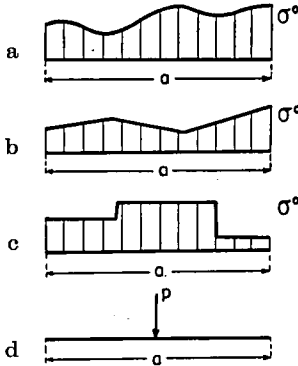


Fig. 34

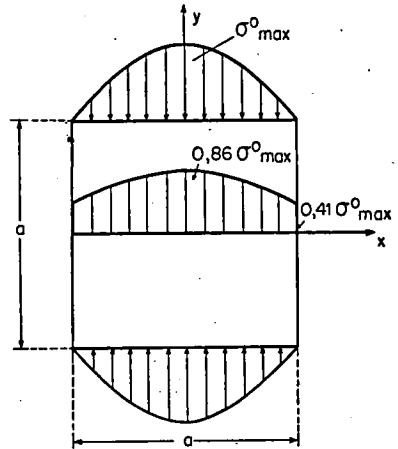


Fig. 35

$\gamma$ )  $\sigma^0$  présente des sauts brusques (fig. 34c). Supposons que pour  $x = x_1$ ,  $\sigma_y^0$  passe de  $\sigma_{droite}$  à  $\sigma_{gauche}$ . Le long de la droite  $x = x_1$  la plaque sera sollicitée par des moments constants, proportionnels à  $\sigma_{droite} - \sigma_{gauche}$ .

$\delta$ ) La force appliquée est concentrée (fig. 34d). C'est le cas limite de  $\gamma$ ), quand la largeur de charge tend vers 0. Si la charge concentrée  $P$  agit à l'abscisse  $x_1$ , la plaque devra subir le long de la droite  $x = x_1$  une variation brusque de tangente  $\frac{\partial w}{\partial x}$ , variation proportionnelle à  $P$ .

L'analogie que nous venons d'exposer est principalement applicable aux cas  $\alpha$ ) et  $\beta$ ). Prenons par exemple le cas le plus simple, celui d'une variation parabolique de  $\sigma_y^0$  (ou de  $t$ ) (fig. 35).

Comme  $\sigma_y^0 = \sigma_{max}^0 \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)$  la charge  $p = D \frac{\partial^2 \sigma_y^0}{\partial x^2}$  est constante et vaut  $p = -\frac{8\sigma_{max}^0}{a^2} \cdot D$ . Pour une paroi carrée les résultats sont ceux du chapitre troisième, paragraphe 3<sup>o</sup>c.

Pour  $x=y=0$ ; état a)  $\sigma_{max}^0$ ; état b)  $-0,02299 \cdot \frac{8\sigma_{max}^0}{1,3}$ ;  
total:  $+0,8585 \sigma_{max}^0$

Pour  $x = \pm \frac{a}{2}, y=0$ ; état a) 0; état b)  $+0,05121 \cdot 8\sigma_{max}^0$ ;  
total:  $+0,4097 \sigma_{max}^0$

Le recours à l'analogie exposée simplifie considérablement le problème qui, autrement, est assez compliqué. (Voir *Timoshenko: Théorie de l'élasticité*, Béranger, Paris et Liège, 1936, p. 161).

Pour les cas  $\gamma$ ) et  $\delta$ ) il est généralement plus simple de résoudre directement le problème de la paroi, c'est-à-dire de déterminer les valeurs de  $F$  et  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$  sur les bords, valeurs qu'on introduira dans les schémas (A), (C) et (C'). On obtient ainsi les „termes de charge“ des équations linéaires des  $F$ . Mais les particularités des contraintes données  $\sigma^0$  ne seront pas exprimées. En effet, les schémas ont été calculés à l'aide des charges nodales paraboliques. Il faudra donc introduire des corrections grâce aux charges nodales exactes. Examinons d'abord le cas  $\gamma$ ).

$\gamma$ )  $\sigma_0$  présente des sauts brusques. Considérons pour fixer les idées le bord  $y = +\frac{b}{2}$  et supposons que  $\sigma_y^0$  présente au nœud  $m, n$  un saut brusque  $(\Delta \sigma_y^0)_{m,n}$ . Par définition  $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ . Il faut donc rechercher dans les schémas (A), (C') = (C) tourné d'un droit avec permutation de  $x$  et  $y$ , les termes qui dépendent de  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  au bord. Ce sont ceux qui sont multipliés par  $D_x$ . La relation (47) permet d'écrire la ligne supérieure du premier terme du schéma (A) sous la forme

$$\frac{\begin{array}{ccccc} |_{+1} & |_{-4} & |_{+6} & |_{-4} & |_{+1} \end{array}}{\cdot} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \cdot w = \frac{\begin{array}{ccc} |_{+1} & |_{-2} & |_{+1} \end{array}}{\cdot} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \cdot \Delta x K(w'')$$

De même pour (C')

$$\frac{\begin{array}{ccccc} |_{+16} & |_{-64} & |_{+96} & |_{-64} & |_{+16} \end{array}}{\cdot} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \cdot w = \frac{\begin{array}{ccc} |_{+16} & |_{-32} & |_{+16} \end{array}}{\cdot} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \cdot \Delta x K(w'')$$

D'après la figure 36 la charge nodale exacte vaut dans notre cas

$$K_m(p) = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10 p_{m \text{ gauche}} + p_{m+1} - \Delta p) + \frac{\Delta x}{2} \Delta p$$

$$K_m(p) = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 5 p_{m \text{ gauche}} + 5 p_{m \text{ droite}} + p_{m+1})$$

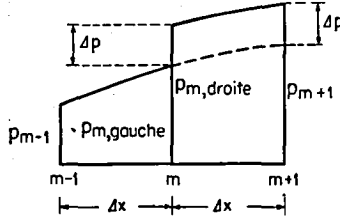


Fig. 36

alors que nous avons calculé avec  $\frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10 p_{m \text{ gauche}} + p_{m+1})$ . La différence est donc de  $\frac{5}{12} \Delta x \cdot \Delta p$ . Ainsi les termes de charge correctifs seront les suivants

$$\begin{array}{c} m, n \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline +16 & -32 & +16 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta y^2 \cdot \frac{5}{12} (\Delta \sigma_y^0)_{m, n} \quad \parallel \quad \begin{array}{c} m, n \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline & +16 & -32 & +16 \\ \hline & +2 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \Delta y^2 \cdot \frac{5}{12} (\Delta \sigma_y^0)_{m, n} \end{array}$$

δ) La force appliquée est une charge concentrée  $P$ . La charge nodale exacte vaut ici  $P$ , alors que la formule de la parabole donne 0. On obtient donc les termes de charge correctifs ci-dessous

$$\begin{array}{c} m, n \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline +16 & -32 & +16 \\ \hline +1 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \cdot \Delta x \cdot P \quad \parallel \quad \begin{array}{c} m, n \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline & +16 & -32 & +16 \\ \hline & +2 & -2 & +1 \\ \hline \end{array} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \cdot \Delta x \cdot P \end{array}$$

Si  $\sigma^0$  présente à la fois plusieurs particularités, il suffit d'appliquer le principe de superposition et de décomposer pour obtenir les cas élémentaires que l'on vient de traiter<sup>40)</sup>.

<sup>40)</sup> Les corrections indiquées sont approximatives. Au voisinage des discontinuités, la réalité ne sera pas serrée de très près. Si l'on désire améliorer la précision dans ces parages, on utilisera un réseau secondaire à mailles plus serrées. Les conditions au contour de ce réseau seront fournies par les résultats du réseau principal qui, d'après le principe de B. de Saint-Venant, sont suffisamment précis à quelque distance des perturbations locales.

Si d'autre part le saut ou la charge concentrée ne correspond pas avec un nœud du bord, on répartira en première approximation sur les deux nœuds voisins, pour le calcul des corrections seulement.

Pour trouver l'analogie qu'on vient d'exposer, on a supposé que les contraintes sur deux faces opposées étaient symétriques. Il serait possible de généraliser à l'aide du procédé d'Andrée déjà cité.

### 3° Répartition à l'intérieur d'une paroi des contraintes données sur les bords; quelques applications

a) Carré soumis à deux forces axiales  $P$  (fig. 37)

L'équation qui régit ce problème est, comme on l'a exposé au chapitre deuxième

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (38a)$$

Pour fixer la solution, il faut déterminer d'abord les conditions au contour comme exposé au chapitre deuxième. On sait que la variation de la fonction d'Airy  $F$  est égale à celle du moment provoqué par les forces données. On obtient donc facilement

Bord sollicité

$$F = \frac{Pa}{4} \left( 1 \pm \frac{2x}{a} \right) \quad + \text{ pour } x < 0, \quad - \text{ pour } x > 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Bord libre

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \pm \frac{P}{2} \quad + \text{ pour } x = -\frac{a}{2}, \quad - \text{ pour } x = +\frac{a}{2}$$

Pour simplifier les opérations numériques, séparons  $F$  en deux parts:

une part  $F_1$  donnée par une charge uniformément répartie le long des bords sollicités et dont la résultante vaut  $P$ . La surface d'Airy est un cylindre à directrice parabolique. Ce cylindre remplit les conditions imposées le long des bords libres (fig. 38);

une part  $F_2$  qui est inconnue, les conditions au contour étant

$$\text{Bord sollicité} \quad y = \pm \frac{a}{2} \quad F = \frac{Pa}{8} \left[ 1 \pm \frac{4x}{a} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \right]; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\text{Bord libre} \quad x = \pm \frac{a}{2} \quad F = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Aux contraintes calculées à partir de  $F_2$ , il faudra ajouter celles provenant de l'état  $F_1$ . Ces dernières valent simplement en tout point  $\sigma_y = \frac{P}{a}$ ,  $\sigma_x = \tau = 0$ .

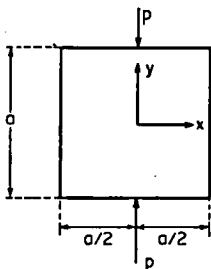


Fig. 37

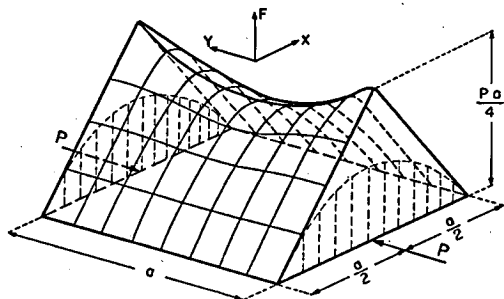


Fig. 38. Carré soumis à deux forces axiales.  
Fonction d'Airy

Pour le calcul proprement dit, on peut donc se limiter à  $F_2$ . A la fin on augmente simplement tous les  $\sigma_y$  de  $\frac{P}{a}$ .

Nous allons d'abord étudier le problème avec un réseau à quatre fois quatre mailles, puis à huit fois huit mailles.

*Réseau à quatre fois quatre mailles.* Le réseau sera numéroté comme celui de la figure 17, mais nous avons ici  $b = a$  ou  $\Delta y = \Delta x$ .

Comme les tangentes  $\frac{\partial F}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial F}{\partial y}$  sont données le long du contour, on utilisera, pour établir les équations algébriques, les schémas (A)\* en  $k$ , (C)\* et (C')\* en  $h$  et  $f$ , (CC')\* en  $e$ . Les valeurs de  $F$  connues sur les bords sont également introduites dans les schémas; elles donnent alors les termes connus des équations. Il en serait de même des valeurs des tangentes données  $\frac{\partial F}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial F}{\partial y}$ , si celles-ci ne s'annulaient pas comme dans notre cas particulier.



Nous avons en effet

Nœud	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>g</i>
<i>F</i>	0	0,125	0,250	0	0
<i>F</i> <sub>1</sub>	0	0,09375	0,125	0	0
<i>F</i> <sub>2</sub>	0	0,03125	0,125	0	0
$\partial F_2$	0	0	0	0	0

*Pa*

Ces valeurs introduites dans les schémas nous donnent les termes connus. Il faut encore calculer les termes correctifs dont on vient de parler au paragraphe précédent. On a  $P \Delta x \left(\frac{\Delta y}{\Delta y}\right)^2 = 0,25 Pa$ . On trouve donc

Nœuds	<i>k</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>e</i>
Termes connus	-2 · 11	-2 · 10,375	+202	+46,9375
Corrections	-2 · 0,5	+2 · 0,5	-8	+4

*Pa*

Les équations linéaires sont les suivantes

	<i>F<sub>k</sub></i>	<i>F<sub>h</sub></i>	<i>F<sub>f</sub></i>	<i>F<sub>e</sub></i>	Termes corrigés
<i>k</i>	+1872	-1152	-1152	- 128	- 23
<i>h</i>	-1134	+4032	- 264	-1408	- 19,75
<i>f</i>	-1134	- 264	+4032	-1408	+194
<i>e</i>	- 180	- 714	- 714	+4064	+ 50,9375

*Pa*

Les solutions de l'équation et les valeurs des contraintes déduites des relations (31) et (32) grâce au tableau (II<sub>4</sub>) sont données ci-dessous:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	
<i>F</i> <sub>2</sub>	0	31,2500	125,000	0	33,0000	76,3952	0	+26,6396	+53,3761	10 <sup>-3</sup> <i>Pa</i>
$\sigma_y$	0	0	$\infty$	+0,3646	-0,7655	-2,7133	+0,3415	+ 1,0302	+ 2,0206	<i>P/a</i>
$\sigma_x$	0	+0,3229	-3,1927	0	-0,2167	+0,7369	0	+ 0,2876	+ 0,7366	<i>P/a</i>

Le signe positif + désigne des tractions, - des compressions.

Réseau à huit fois huit mailles. Le réseau sera numéroté comme celui de la figure 19. Le procédé de calcul est semblable à celui du réseau à quatre mailles. On a

	(a, f)	(b, f)	(c, f)	(d, f)	(e, f)	(a, g)	(a, h)	(a, i)	(a, k)	
$F$	0	0,0625	0,1250	0,1875000	0,250	0	0	0	0	Pa
$F_1$	0	0,0546875	0,09375	0,1171875	0,125	0	0	0	0	
$F_2$	0	0,0078125	0,03125	0,0703125	0,125	0	0	0	0	
$\partial F_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Pour simplifier la résolution des équations on décompose d'après *Andrée* en un système symétrique et un système antisymétrique par rapport aux diagonales du carré.

Système symétrique. On obtient les termes de charge suivants, en tenant compte des corrections avec  $P \Delta x \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 0,125 P a$ ,

Nœud	(b, g)	(c, g)	(d, g)	(e, g)	(c, h)	(d, h)	(e, h)	(d, i)	(e, i)	(e, k)	
	+9,421875	+22,265625	+57,0625 + 1,0	+100,9375 - 2	-5,25	-5,1875 +0,0625	-6,875 -0,125	0	0	0	Pa
T. corrigés	+9,421875	+22,265625	+58,0625	+ 98,9375	-5,25	-5,125	-7,0	0	0	0	

La matrice conjuguée n° 2 du chapitre troisième donne immédiatement les solutions  $F_2$  par simple superposition.

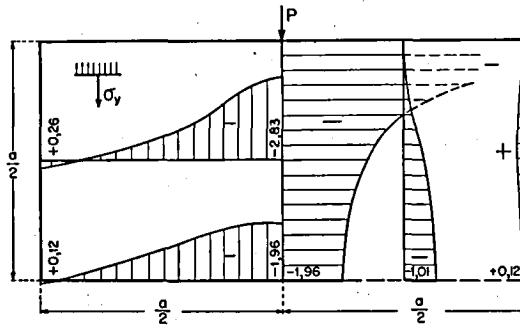


Fig. 39a. Carré soumis à deux forces axiales. Contraintes  $\sigma_y$   
(en fonction de  $\frac{P}{a}$ )

Système antisymétrique. Les termes connus sont les suivants

Nœud	(c,g)	(d,g)	(e,g)	(d,h)	(e,h)	(e,i)	
	+25,359375	+57,0625 + 1,0	+100,9375 - 2	-5,1875 +0,0625	-6,875 -0,125	0	
T. corrigé	+25,359375	+58,0625	+ 98,9375	-5,125	-7,0	0	<i>Pa</i>

Le système antisymétrique contient six inconnues et s'écrit

	$F_{(e,i)}$	$F_{(e,h)}$	$F_{(d,h)}$	$F_{(e,g)}$	$F_{(d,g)}$	$F_{(c,g)}$	Termes de charge					
(e,i)	+2008	- 640	- 216	+ 72	+ 64	+ 8	+1					
(e,h)	- 640	+1864	-1216	- 576	- 64	+ 64		+1				
(d,h)	- 216	-1216	+3952	- 72	-1152	- 208			+2			
(e,g)	+ 144	-1134	- 280	+3888	-1536	+ 240				+1		
(d,g)	+ 64	- 132	-1147	- 768	+4000	- 819					+1	
(c,g)	+ 8	+ 51	- 276	+ 120	- 832	+4020						+1

La résolution donne la matrice conjuguée n° 4.

	1 en (e,i)	1 en (e,h)	1 en (d,h)	1 en (e,g)	1 en (d,g)	1 en (c,g)	
$F_{(e,i)}$	628,4470	371,2639	349,3948	60,4419	72,1031	12,9589	
$F_{(e,h)}$	372,7179	1090,7295	876,9713	206,0395	224,8122	38,0817	
$F_{(d,h)}$	176,1335	439,5282	927,1592	106,1967	188,6406	48,7301	
$F_{(e,g)}$	129,1181	431,4683	461,1775	365,0431	217,0895	27,2392	
$F_{(d,g)}$	81,4559	250,0851	402,6144	109,7240	368,3603	74,7682	
$F_{(c,g)}$	19,1179	54,4794	121,3953	16,3691	79,7133	266,2543	$10^{-6}$

Par superposition du cas symétrique et du cas antisymétrique on obtient finalement les valeurs suivantes de  $F_2$  (voir aussi fig. 38)

0	7,8125	31,2500	70,3125	125,0000	} $10^{-3} Pa$
0	8,6533	32,8338	68,6849	95,6181	
0	8,8410	30,6282	56,2827	69,2658	
0	8,0333	26,5483	45,5749	53,8582	
0	7,5617	24,7172	41,6470	48,7338	
0					

Les contraintes  $\sigma_y$  et  $\sigma_x$ , données par les formules (31) et (32), se déduisent du tableau (II<sub>8</sub>), cas symétrique. On trouve par exemple

au centre du carré  $\sigma_y = -1,9568 \frac{P}{a}$ ,  $\sigma_x = +0,6560 \frac{P}{a}$ . Les autres valeurs sont représentées graphiquement à la figure 39.

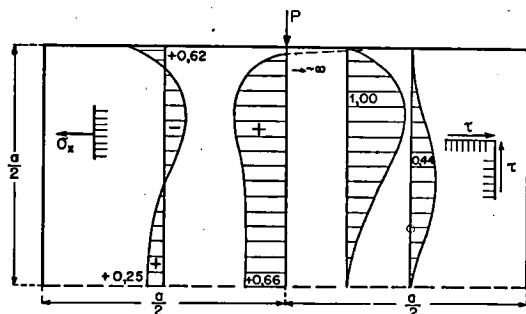


Fig. 39b. Carré soumis à deux forces axiales. Contraintes  $\sigma_x$  et  $\tau$   
(en fonction de  $\frac{P}{a}$ )

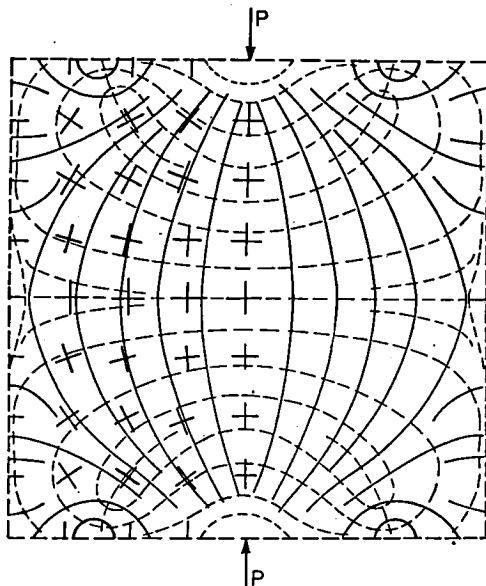


Fig. 40. Carré soumis à deux forces axiales. Lignes isostatiques  
(en trait plein  $\sigma_2$ , en traitillé  $\sigma_1$ )

Les cisaillements valent  $\tau = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$ . Ils se calculent facilement par les relations (50) ou (51). Dans le cas particulier nous avons déterminé les  $\frac{\partial F}{\partial x}$  à l'aide de (50), puisque les  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_y$  sont connus. Ces valeurs de  $\frac{\partial F}{\partial x}$ , introduites dans (51), ont donné les  $\tau$ .

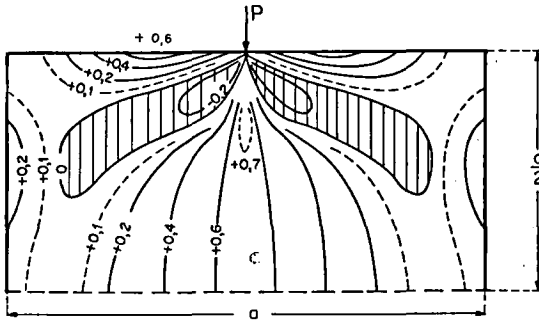


Fig. 41. Carré soumis à deux forces opposées. Isostates de  $\sigma_1$   
(en fonction de  $\frac{P}{a}$ )

Pour connaître la grandeur et la direction des tensions principales on emploiera les équations (39). La figure 40 donne les trajectoires des tensions principales ou lignes isostatiques, la figure 41 les isostates de  $\sigma_1$ , c'est-à-dire les lignes passant par les points où  $\sigma_1$  prend la même valeur. La zone hachurée est comprimée. Les isostates comme les isostatiques sont approximatives puisque l'on ne connaît les contraintes qu'en un nombre limité de points<sup>41)</sup>. En particulier, le voisinage immédiat du point d'application de la force n'est pas très bien défini. Il faudrait recourir à un réseau plus dense. On pourrait aussi partir de la solution analytique connue de la

<sup>41)</sup> Il est impossible de déterminer la position exacte des points singuliers, sauf sur les axes et les côtés du carré où  $\tau$  est partout nul et où il suffit donc que  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ . Le même problème a été traité expérimentalement, cf. *P. Dantu*, op. cit. à la note 5. La concordance est satisfaisante, elle est meilleure si l'on refait le calcul avec une charge répartie sur un quart du côté.

bande indéfinie et superposer une solution qui remplit les conditions sur les bords latéraux. On procéderait donc à un calcul analogue à celui exposé au chapitre troisième pour les plaques sollicitées par une charge concentrée.

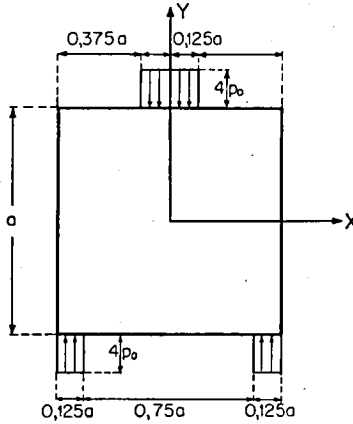


Fig. 42

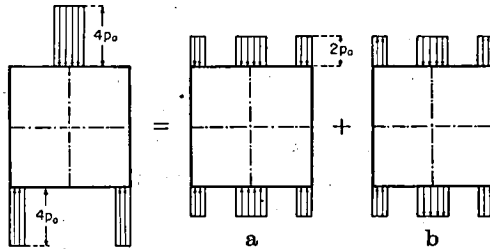


Fig. 43. Décomposition des charges par la méthode d'Andrée  
 a) Système symétrique b) Système antisymétrique

b) Poutre simple, rapport hauteur / portée = 1 (fig. 42)

Le problème est symétrique par rapport à  $y$ , mais non par rapport à  $x$ . Aussi allons-nous décomposer les charges comme indiqué à la figure 43. On obtient ainsi un cas symétrique par rapport à  $x$

et  $y$  et un cas symétrique par rapport à  $y$  et antisymétrique par rapport à  $x$ . Le réseau adopté a huit fois huit mailles, numérotées comme celles de la figure 19.

*Système symétrique par rapport aux deux axes* (fig. 43 a). En procédant exactement comme à l'exemple précédent on obtient

	(a,f)	(b,f)	(c,f)	(d,f)	(e,f)	(a,g)	(a,h)	(a,i)	(a,k)	
$F$	0	0,046875	0,078125	0,109375	0,125	0	0	0	0	$p_0 a^2$
$F_1$	0	0,0546875	0,09375	0,1171875	0,125	0	0	0	0	
$F_2$	0	-0,0078125	-0,015625	-0,0078125	0	0	0	0	0	
$\partial F_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Afin de pouvoir utiliser les matrices conjuguées n° 2 et 4, on considère un cas symétrique et un cas antisymétrique par rapport aux diagonales. Les termes connus sont donnés à partir des  $F_2$  par les schémas  $(A)^*$ ,  $(C)^*$ ,  $(CC')^*$ . Il faut aussi tenir compte des corrections indiquées au paragraphe 2° avec  $\Delta p = \pm 2 p_0 (+en(d,f), -en(b,f))$ . On trouve le système symétrique par rapport aux axes et aux diagonales

Nœud	(b,g)	(c,g)	(d,g)	(e,g)	(c,h)	(d,h)	(e,h)	(d,i)	(e,i)	(e,k)	
Terme	-10,515625	-11,835938	-6,1875	+0,359375	+1,625	+0,5625	+0,3125				$p_0 a^2$
Corr.	+ 0,416667	+ 0,026042	-0,208333	+0,208333		-0,013021	+0,013021				
T. corr.	-10,098958	-11,809896	-6,395833	+0,567708	+1,625	+0,549479	+0,325521	0	0	0	

et le système symétrique par rapport aux axes et antisymétrique par rapport aux diagonales

Nœud	(c,g)	(d,g)	(e,g)	(d,h)	(e,h)	(e,i)	
	-13,632813	-6,1875	+0,359375	+0,5625	+0,3125		$p_0 a^2$
	- 0,026042	-0,208333	+0,208333	-0,013021	+0,013021		
T. corrigé	-13,658855	-6,395833	+0,567708	+0,549479	+0,325521	0	

La superposition des résultats donnés par les matrices n° 2 et 4 conduit aux solutions suivantes pour  $F_2$

0	-7,8125	-15,6250	-7,8125	0	} $10^{-3} p_0 a^2$
0	-5,0984	-10,4582	-7,0797	-3,0290	
0	-2,3526	- 5,4453	-5,2530	-4,2210	
0	-1,0551	- 2,9344	-3,7466	-3,7765	
0	-0,7102	- 2,2128	-3,1945	-3,4447	

Le tableau (II<sub>8</sub>), cas symétrique permet de calculer  $\sigma_x, \sigma_y$  et de là les  $\tau$  grâce aux relations (50) et (51).

Système symétrique par rapport à l'axe  $y$  et antisymétrique par rapport à l'axe  $x$  (fig. 43b). Dans ce cas  $F_1$  vaut 0 partout puisque la résultante des contraintes sur chaque face est nulle. On a simplement

	(a, f)	(b, f)	(c, f)	(d, f)	(e, f)	(a, g)	(a, h)	(a, i)	(a, k)	
$F_2 = F$	0	+0,015625	+0,046875	+0,078125	+0,09375	0	0	0	0	} $p_0 a^2$
$\partial F$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

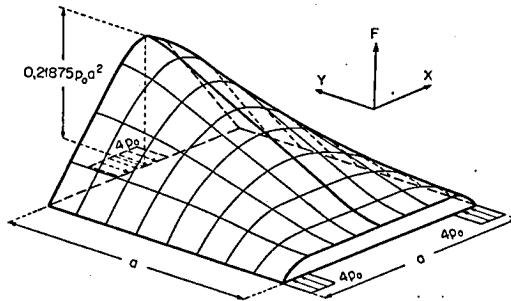


Fig. 44. Poutre simple. Fonction de tension d'Airy

Les termes connus se calculent comme précédemment ainsi que leurs corrections. On a  $\Delta p = +2 p_0$  en (b, f) et (d, f), d'où  $\frac{5}{12} \Delta y^2 \Delta p = 0,0130208 p_0 a^2$



Nœud	(b, g)	(c, g)	(d, g)	(e, g)	(b, h)	(c, h)	(d, h)	(e, h)	autres
	+19,9375	+74,25	+125,625	+151,09375	-4,890625	-6,75	-10,5	-12,125	
	- 0,416667	+ 0,416667	- 0,416667	+ 0,416667	-0,052083	+0,026042	-0,026042	+ 0,026042	
T. corrigé	+19,52083	+74,6667	+125,20833	+151,51042	-4,94271	-6,72396	-10,52604	-12,09896	0

$p_0 a^2$

Le système s'écrit, en tenant compte des antisymétries,

	(e, i)	(d, i)	(e, h)	(c, i)	(d, h)	(c, h)	(b, i)	(b, h)	(e, g)	(d, g)	(c, g)	(b, g)	Termes connus
(e, i)	+1800	-1216	- 576	+ 136	- 64	+ 64			+ 72	+ 64	+ 8		0
(d, i)	-1216	+3736	- 64	-1216	-1088	- 64	+ 136	+ 64	+ 64	+ 152	+ 64	+ 8	0
(e, h)	- 576	- 64	+1872	+ 64	-1152	+ 144			- 576	- 64	+ 64		- 12,09896
(c, i)	+ 136	-1216	+ 64	+3600	- 64	-1152	-1216	- 64	+ 8	+ 64	+ 144	+ 64	0
(d, h)	- 64	-1088	-1152	- 64	+3888	-1152	+ 64	+ 144	- 64	-1088	- 64	+ 64	- 21,05208
(c, h)	+ 64	- 64	+ 144	-1152	-1152	+3744	- 64	-1152	+ 64	- 64	-1152	- 64	- 13,44792
(b, i)		+ 136		-1185	+ 64	- 132	+3768	- 768		+ 8	+ 51	+ 120	0
(b, h)		+ 64		- 132	+ 144	-1134	- 768	+3888		+ 64	- 132	- 768	- 4,94271
(e, g)	+ 144	+ 132	-1134	+ 16	- 264	+ 102			+3888	-1536	+ 240		+151,51042
(d, g)	+ 64	+ 152	- 132	+ 64	-1083	- 132	+ 8	+ 51	- 768	+4008	- 768	+ 120	+125,20833
(c, g)	+ 8	+ 64	+ 51	+ 144	- 132	-1134	+ 64	- 132	+ 120	- 768	+3888	- 768	+ 74,66667
(b, g)		+ 8		+ 51	+ 51	- 180	+ 120	- 765		+ 120	- 765	+3816	+ 19,52083

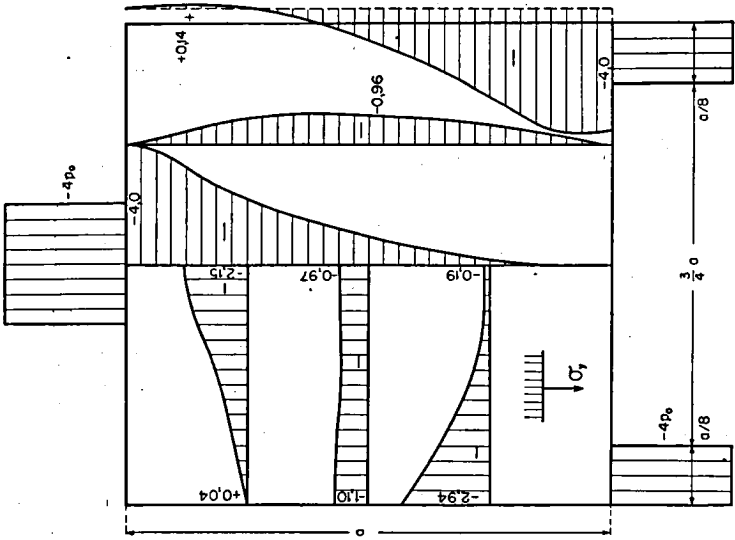


Fig. 45. Poutre simple. Contraintes  $\sigma_y$   
(en fonction de  $p_0$ )

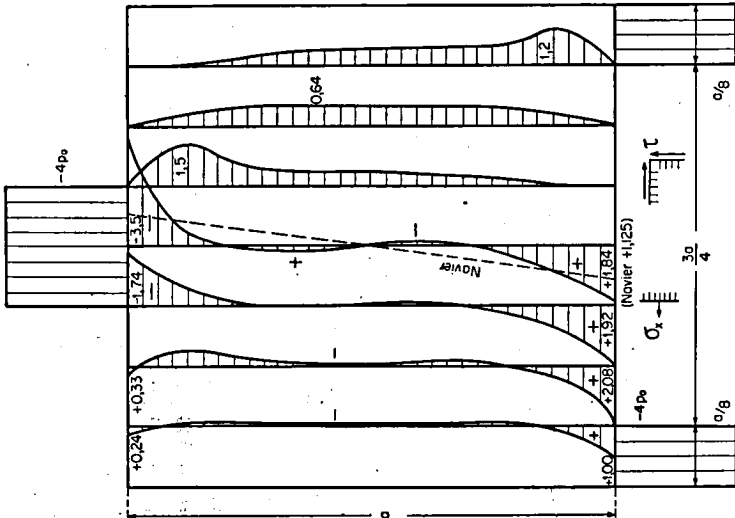


Fig. 46. Poutre simple. Contraintes  $\sigma_x$  et  $\tau$   
(en fonction de  $p_0$ )

On ne donnera pas la matrice conjuguée mais seulement les solutions du cas particulier qui sont

$F$	0	+15,625	+46,875	+78,125	+93,75	} $p_0 \alpha^2 10^{-3}$
	0	+13,4629	+41,2001	+67,4385	+79,2469	
	0	+ 9,2959	+28,4968	+46,1356	+53,4204	
	0	+ 4,6137	+14,1792	+22,8670	+26,3471	
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	

Les contraintes  $\sigma_y$  se déduisent du tableau  $(II_8)$ , cas symétrique; les  $\sigma_x$  du tableau  $(II_8)$ , cas antisymétrique. Les  $\tau$  se calculent comme plus haut, en tenant compte de l'antisymétrie des  $\frac{\partial F}{\partial x}$ .

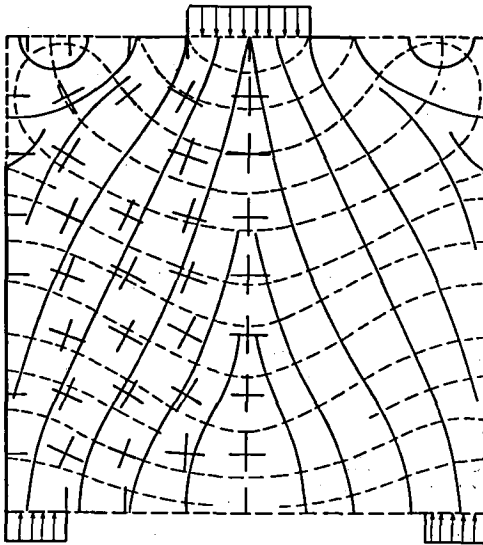


Fig. 47. Poutre simple. Lignes isostatiques.  $\sigma_1$ -----  $\sigma_2$ ———

Au lieu de donner les valeurs des contraintes dans des tableaux, on a préféré les représenter aux figures 45, 46. La figure 47 indique les trajectoires des tensions principales, 44 la fonction  $F$ .

c) Rectangle soumis à deux forces axiales réparties  $6p_0$  (fig. 48)

Le réseau considéré a huit fois six mailles, numérotées comme la figure 20. La charge appliquée vaut  $\frac{6}{a}$  au nœud  $(d, e)$  et 0 en  $(c, e)$ ,  $(b, e)$ ,  $(a, e)$ . Entre les nœuds  $p$  a une variation correspondant

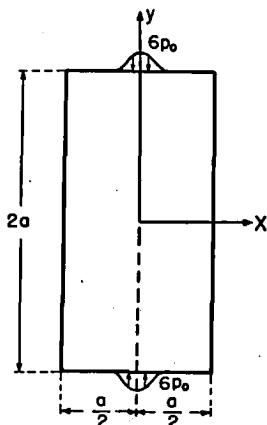


Fig. 48

à la formule parabolique des charges nodales. La résultante passe par  $(d, e)$  et vaut  $6p_0 \Delta x = 1$ . A une certaine distance du point d'application, on a donc l'équivalent d'une charge concentrée  $P = 1$ .

Les conditions au contour sont les suivantes, en calculant avec  $F_1$  et  $F_2$  comme à l'exemple a).

	$(a, e)$	$(b, e)$	$(c, e)$	$(d, e)$	$(a, f)$	$(a, g)$	$(a, h)$	$(a, k)$
$F$	0	0,08333333	0,16666667	0,23611111	0	0	0	0
$F_1$	0	0,06944444	0,11111111	0,125	0	0	0	0
$F_2$	0	0,01388889	0,05555556	0,11111111	0	0	0	0
$\partial F_2$	0	0	0	0	0	0	0	0

$p_0 a^2$

Comme la charge appliquée a une variation parabolique, les termes connus n'ont pas besoin d'être corrigés et l'on a grâce aux schémas (A), (C) et (CC'), avec  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 2,25$ ,  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 0,44444444$ ,

Nœud	(b,f)	(c,f)	(d,f)	(b,g)	(c,g)	(d,g)	autres
T. c.	+3,8765	+42,4198	+92,0741	-2,8696	-3,5154	-4,4329	0

$p_0 a^2$

La matrice conjuguée n° 3 conduit aux solutions suivantes pour  $F_2$

0	+13,8889	+55,5556	+111,1111	$10^{-3} a^2 p_0$
0	+13,4562	+41,8304	+ 60,3355	
0	+ 6,2126	+17,8253	+ 23,4948	
0	+ 1,6884	+ 5,2258	+ 6,9932	
0	+ 0,4821	+ 1,8493	+ 2,5989	

Les contraintes  $\sigma_y$  se calculent à l'aide du tableau (II<sub>6</sub>), les contraintes  $\sigma_x$  à l'aide du tableau (II<sub>8</sub>). Elles sont représentées à la figure 49.

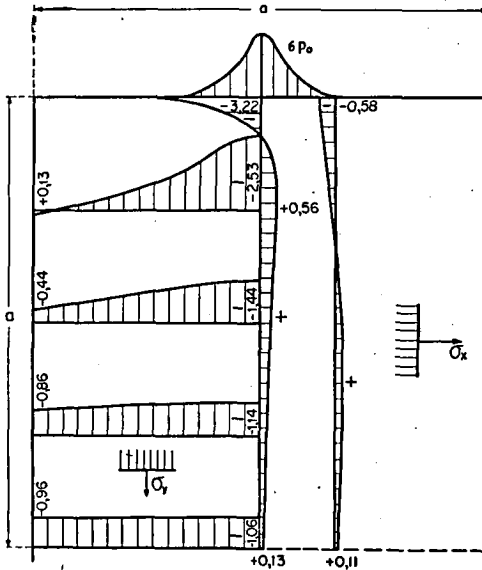


Fig. 49. Rectangle soumis à deux forces réparties axiales  
Contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  (en fonction de  $p_0$ )

Le problème que l'on vient de traiter se rapproche de celui du prisme infiniment long soumis à une force axiale concentrée. La figure 50 montre comment passer approximativement d'un pro-

blème à l'autre. On sait que pour le prisme infiniment long, à une distance du point d'application double de la largeur, les contraintes  $\sigma_y$  sont réparties uniformément tandis que  $\sigma_x$  et  $\tau$  s'annulent (cette propriété est déjà presque satisfaite pour une distance égale à la

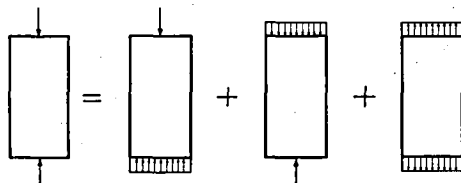


Fig. 50

largeur). Par superposition des résultats analytiques de divers auteurs<sup>42)</sup>, on trouverait dans notre cas (entre parenthèses nos résultats). Nœud

$(d, k)$	1,056 (1,059)	0,116 (0,131)
$(d, g)$	1,39 (1,44)	0,314 (0,316)

#### 4<sup>o</sup> Tensions de retrait dans les soudures

Dans le vaste domaine des tensions d'origine thermique, nous allons étudier maintenant un problème particulier, celui des tensions de retrait dans les *éprouvettes libres*.

L'éprouvette est de forme rectangulaire, ses deux parties sont réunies par une soudure bout à bout située dans l'un des axes de symétrie du rectangle. Les faces extérieures de l'éprouvette sont libres, toutes les contraintes s'y annulent.

<sup>42)</sup> Le problème du prisme infiniment long, sollicité par une force concentrée axiale, a été traité par un grand nombre d'auteurs, par exemple *Timoshenko*, op. cit. à la note 39; *V. Tesař*: Détermination expérimentale des tensions dans les extrémités des pièces prismatiques munies d'une semi-articulation, Mémoires A.I.P.C., premier volume, 1932; du même auteur: Etude expérimentale des contraintes produites dans une poutre par des charges concentrées, Mémoires A.I.P.C., quatrième volume, 1936; *Y. Guyon*: Contraintes dans les pièces prismatiques soumises à des forces appliquées sur leurs bases, au voisinage de ces bases, Mémoires A.I.P.C., onzième volume, 1951.

Le dépôt du cordon de soudure provoque une augmentation considérable de la température des deux parties de l'éprouvette. Mais à ce moment le cordon et les régions avoisinantes sont à l'état plastique. Les déformations de l'éprouvette restent donc plastiques et ne provoquent pratiquement pas de contraintes. Il en est ainsi tant que la température dépasse environ 600°. Pendant le refroidissement, par contre, le module d'élasticité recouvre peu à peu sa valeur normale et, à cause de la liaison réalisée par la soudure, les déformations s'accompagnent de tensions internes. Pour permettre un calcul approximatif de ces tensions, nous allons faire quelques hypothèses:

- a) On néglige les températures supérieures à 600°.
- b) Les températures et les contraintes sont réparties uniformément sur l'épaisseur de l'éprouvette; le problème est à deux dimensions.
- c) Le module d'élasticité reste invariable. On prend une valeur moyenne de  $\frac{3}{4} E_{max} = 1575 \text{ t/cm}^2$ . Le coefficient de dilatation  $\alpha_t$  est constant, il vaut  $11 \cdot 10^{-6}$  <sup>43)</sup>.
- d) La température ne varie pas le long du cordon.

Dans ces conditions, le problème est semblable à celui que nous avons traité au paragraphe 2<sup>o</sup>. Comme il s'agit d'un refroidissement, la température  $t$  est négative et l'équation (71) devient

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \alpha_t \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

C'est l'équation qui régit notre problème. L'éprouvette étant libre, on a au contour  $\sigma_x = \tau = 0$ ,  $\sigma_y = \tau = 0$ ; on prendra

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

On a donc simplement à calculer une plaque totalement encastree, soumise à une charge

$$p = D E \alpha_t \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad \text{d'après d)}$$

<sup>43)</sup> Ces valeurs sont celles admises par *G. Grüning*: Die Schrumpfspannungen beim Schweißen, *Der Stahlbau*, 6. Juli 1934; voir aussi *K. Jäger*: Der Eigenspannungszustand in Stumpfschweißungen als ebenes Problem, *Der Stahlbau*, Dezember 1940.

Pour fixer les résultats numériques, il faut se donner la variation de la température. On prendra la courbe de la figure 51<sup>44</sup>).

Premier exemple. Eprouvette rectangulaire, cordon le long du petit axe. (Rapport longueur/largeur = 2.)

Le calcul se fera avec un réseau à huit fois six mailles (fig. 20). Les températures  $t$  admises sont les suivantes :

	$e$	$f$	$g$	$h$	$k$	
$t$	0	+75,8	+206,4	+396,7	+600,0	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$	0	-3822	-3822	-3822	-32000	$\frac{1}{a^2}$

Les schémas (A), (C) et (C') conduisent aux termes connus suivants

$$\begin{array}{llll}
 (b, f) - 82555 & (b, g) - 110316 & (b, h) + 35872 & (b, k) + 670351 \\
 (c, f) - 110074 & (c, g) - 73544 & (c, h) + 23914 & (c, k) + 446901 \\
 (d, f) - 110074 & (d, g) - 73544 & (d, h) + 23914 & (d, k) + 446901
 \end{array}$$

La matrice conjuguée n° 3 donne les solutions  $F$ , les tableaux (II<sub>6</sub>) et (II<sub>8</sub>) les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . Ces calculs n'offrent pas d'intérêt et nous donnerons simplement la variation des tensions le long des axes à la figure 51a. Notons que  $E\alpha_t = 17,325 \text{ kg/cm}^2$ .

Deuxième exemple. Eprouvette carrée.

Les opérations sont semblables; on utilise les matrices conjuguées n° 2 et 4. Les résultats sont représentés à la figure 51b.

Troisième exemple. Eprouvette rectangulaire, cordon le long du grand axe. (Rapport longueur/largeur =  $\frac{1}{2}$ .)

Pour le réseau de la figure 20, on a ici

	$a$	$b$	$c$	$d$	
$t$	0	+113,3	+331,8	+600	
$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$	0	-4133	-4133	+24000	$\frac{1}{a^2}$

<sup>44</sup>) Voir par exemple E. Uhlir: Die Sprödbrecherscheinungen bei Schweißkonstruktionen, Radex Rundschau, Heft 4/5, 1953.



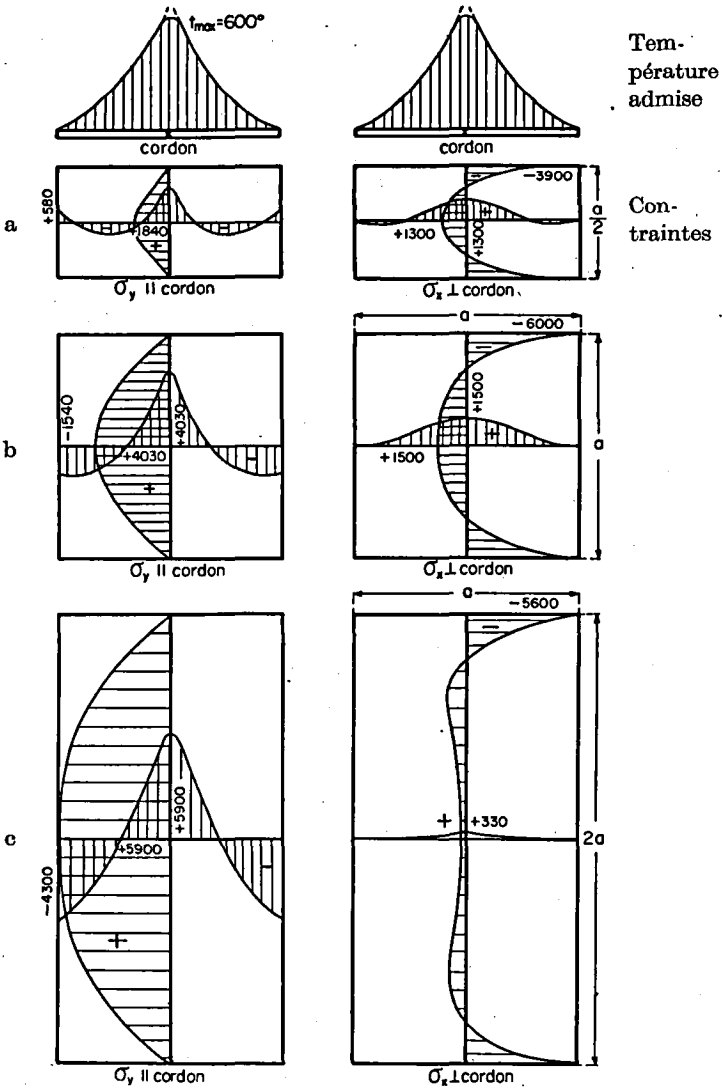


Fig. 51

En procédant comme au premier exemple on obtient les valeurs de la figure 51 c.

Les contraintes calculées dépendent directement de la variation de la température. Il importe donc de considérer l'allure générale des courbes et non les valeurs des contraintes. Certaines dépassent même la limite élastique, elles seront donc en réalité plastifiées.

On remarquera que, malgré la simplification des hypothèses, les courbes trouvées présentent une analogie avec les résultats expérimentaux<sup>45)</sup>.

### 5° Largeur utile des tables des poutres simples

Le problème de la largeur utile des poutres est bien connu des ingénieurs. Il se pose dans les planchers à nervures en béton comme dans les caissons métalliques. Nous allons étudier dans ce paragraphe la largeur utile d'une *poutre simple en*  $\square$  (fig. 52). Cette

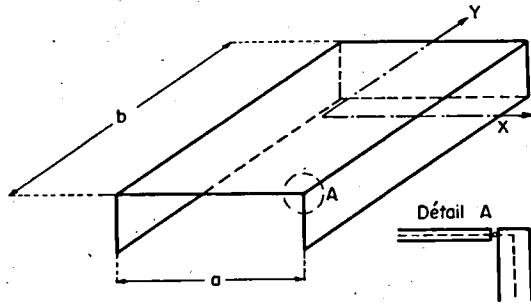


Fig. 52

poutre se compose de deux âmes verticales réunies par une table horizontale comprimée. Le problème est susceptible d'être traité par les équations de l'élasticité plane moyennant les hypothèses suivantes:

<sup>45)</sup> On citera entre autres *J. Quadflieg*: Beitrag zur Kerbzähigkeit von Schweißverbindungen, Arcos, Dezember 1937; *F. Campus*: Recherches, Etudes et Considérations sur les Constructions soudées, Editions Sciences et Lettres, Liège, 1946; *Stahlbau-Handbuch* 1948, W. Dorn, Bremen-Horn, p. 280 et suivantes.

Le matériau est homogène et isotrope (cette seconde hypothèse n'est pas indispensable, le matériau pouvant être orthotrope). La table est mince, ses flexions propres sont négligeables; la table ne travaille donc pas comme plaque fléchie. La table est liée aux âmes uniquement le long d'une ligne située dans son plan moyen.

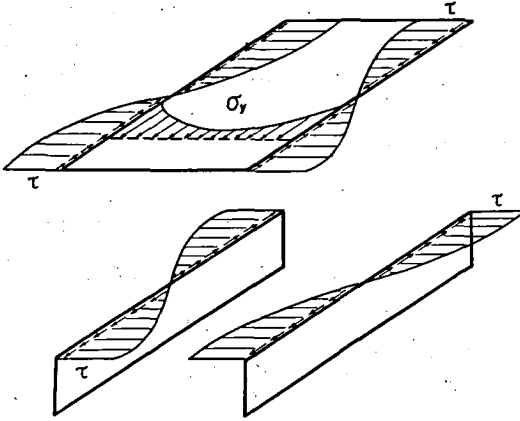


Fig. 53

C'est dans ce plan que se transmettent les efforts; il existe donc dans la table un état de tension à deux dimensions; la table est ce que nous avons appelé une *paroi mince*. Les forces verticales données agissent dans le plan de symétrie.

Nous avons donc à considérer deux éléments (fig. 53), entre lesquels agissent des tensions de cisaillement:

I) *une table* cisillée sur ses bords longitudinaux, les autres conditions au contour devant être fixées de cas en cas. Si la largeur de cette table n'est pas petite vis-à-vis de sa longueur, les tensions  $\sigma_y$  ne seront pas réparties uniformément sur toute la largeur comme l'exigerait la théorie élémentaire de la flexion. Il s'agit justement de déterminer cette répartition et d'en déduire la largeur utile, largeur réduite, telle qu'en appliquant la théorie élémentaire à la section modifiée, on retrouve la valeur exacte de la contrainte  $(\sigma_y)_{max}$ ;

II) *deux âmes* fléchies. Leur hauteur est faible et le calcul des tensions et des déformations s'effectue, à partir de l'hypothèse de *Bernoulli-Navier*, par les formules classiques de la résistance des matériaux.

Afin de simplifier l'étude, faisons encore une hypothèse *provisoire*, dont nous examinerons l'influence en fin du paragraphe:

La répartition des cisaillements  $\tau$  le long des bords longitudinaux de la table suit la même loi que celle des efforts tranchants. Autrement dit, on néglige l'inertie propre des âmes, toute la section est concentrée au centre de gravité et la résultante des compressions de la table est proportionnelle aux moments (fig. 54).

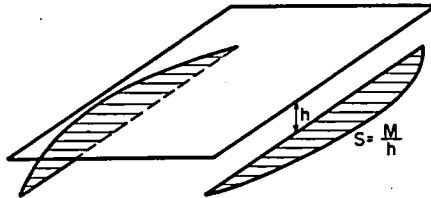


Fig. 54

Le long de l'arête commune à la table et à l'âme, on doit donc avoir  $\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \alpha Q$  ou, ce qui revient au même,  $\frac{\partial F^0}{\partial x} = \beta M$ . Les autres conditions au contour doivent être également fixées et nous allons envisager successivement les cas qui se présentent.

$$a) \text{ Bord } x = \pm \frac{a}{2} \quad \frac{\partial F^0}{\partial x} = \beta M \quad \sigma_x = 0 \quad d'où \quad F = 0$$

$$\text{Bord } y = \pm \frac{b}{2} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau = 0 \quad d'où \quad F = 0, \quad \frac{\partial F^0}{\partial y} = 0$$

Les bords latéraux sont donc libres, leur dilatation n'est pas entravée.  $F$  est évidemment la fonction d'*Airy*, puisqu'il s'agit d'un problème d'élasticité plane. Pour le résoudre, on emploiera les schémas (A), (C), (CC'), les termes connus des équations étant calculés à partir des  $\frac{\partial F^0}{\partial x}$  donnés.

Considérons d'abord une table carrée; le réseau de huit fois huit mailles sera numéroté comme celui de la figure 19. Pour traiter facilement plusieurs cas de répartition des moments, nous calculons d'abord les solutions  $F$  pour  $\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$  unitaire en  $(a, g)$  puis en  $(a, h)$ , etc. Les matrices conjuguées n° 2 et 4 donnent facilement

	$F(b, g)$	$F(c, g)$	$F(d, g)$	$F(e, g)$	$F(b, h)$	$F(c, h)$	$F(d, h)$	$F(e, h)$
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, g)$	157,0367	56,4165	18,7985	11,1235	88,8453	72,6617	42,7938	32,7986
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, h)$	29,9809	49,7732	47,2508	43,9007	15,6947	38,7173	45,8884	46,0340
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, i)$	95,9449	88,1474	60,4224	50,5375	260,8570	208,6269	161,6777	145,4274
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, k)$	151,7004	215,4117	216,1571	210,8795	97,6391	198,1833	228,1881	230,9768
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, i)$	34,6827	68,2972	74,9037	74,2477	153,4392	224,1345	231,0050	227,9151
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, k)$	337,8564	378,9197	373,2515	366,1550	299,2880	420,8683	426,7758	419,9526
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, k)$	9,8324	28,6856	38,0914	40,0930	49,8667	104,6733	123,9480	126,9338
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$ = 1 en $(a, k)$	149,8944	211,8696	216,0420	213,1088	289,7135	280,2359	258,8293	250,0183
	$F(i, b)$	$F(i, c)$	$F(i, d)$	$F(i, e)$	$F(k, b)$	$F(k, c)$	$F(k, d)$	$F(k, e)$

10-3

Seule la variation du moment importe, et non sa grandeur réelle.

On peut donc prendre  $\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x = 1$  en  $(a, k)$ .

Moment à variation sinusoidale  $M = M_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ . Les valeurs de

$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$  sont les suivantes

Nœud	$(a, f)$	$(a, g)$	$(a, h)$	$(a, i)$	$(a, k)$
$\frac{\partial F^0}{\partial x} \Delta x$	0	0,3826834	0,7071068	0,9238795	1

Les tableaux ci-dessus donnent les  $F$ , d'où l'on tire les contraintes  $\sigma_y$  grâce au tableau (II<sub>8</sub>). La figure 55 représente la variation de  $\sigma_y$  dans la section médiane  $k$ . La largeur réduite, appelée  $\lambda$ , est celle qui donnera la même résultante; donc la même surface, avec un rectangle de hauteur  $\sigma_{max}$ . On voit que  $\lambda = \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}$ , où  $\sigma_m$  est la

contrainte moyenne et vaut  $\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx = -2 \frac{\partial F^0}{\partial x} \cdot \frac{1}{a} = -16 \frac{\partial F^0}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{a^2}$ .

Pour obtenir la variation de  $\lambda$ , on calcule les différents  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_m$  dans chaque section, ce qui donne la figure 56.

Moment à variation parabolique  $M = M_0 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)$ . Le calcul est analogue et l'on obtient les résultats de la figure 57.

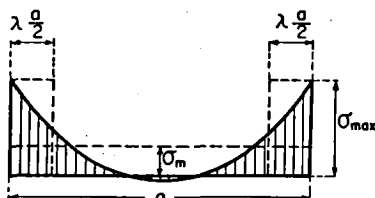


Fig. 55

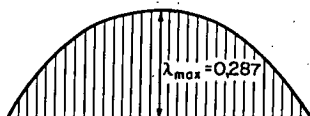


Fig. 56. Moment sinusoidal

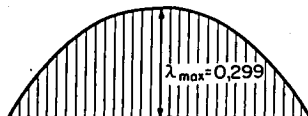


Fig. 57. Moment parabolique

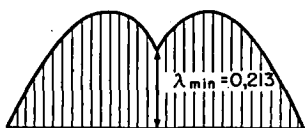


Fig. 58. Moment lineaire

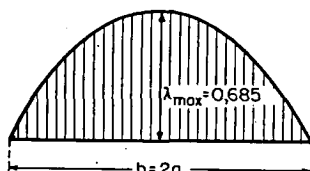


Fig. 59. Moment sinusoidal

Moment à variation linéaire, provenant d'une charge concentrée en  $k$ . Les valeurs obtenues sont représentées à la figure 58.

Passons maintenant à une table rectangulaire, avec  $\frac{b}{a} = 2$ .

On utilise le réseau à huit fois six mailles de la figure 20. Les valeurs de  $F$  sont déterminées par la matrice conjuguée n° 3. Pour un moment à variation sinusoidale on obtient la courbe de la figure 59.

$$b) \text{ Bord } x = \pm \frac{a}{2} \quad \frac{\partial F^0}{\partial x} = \beta M \quad \sigma_x = 0 \quad d'o\grave{u} \quad F = 0$$

$$\text{Bord } y = \pm \frac{b}{2} \quad \sigma_y = 0 \quad \epsilon_x = 0 \quad \text{donc} \quad \sigma_x = 0 \quad d'o\grave{u} \quad F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Les bords latéraux sont liés à une nervure très rigide qui les empêche pratiquement de se dilater. Comme  $E \epsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y$  et que  $\sigma_y = 0$ , cela revient à poser  $\sigma_x = 0$ .

Le procédé normal consisterait maintenant à écrire le système des équations linéaires à l'aide des schémas (A), (C) pour le bord  $x = \pm \frac{a}{2}$ , (B') pour le bord  $y = \pm \frac{b}{2}$  et (CB') pour le coin. Nous allons procéder autrement, pour utiliser les résultats déjà connus. En chaque nœud du bord  $y = \pm \frac{b}{2}$  nous allons prendre  $\frac{\partial F}{\partial y}$  comme inconnue, la condition à remplir étant que  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$  en ces mêmes nœuds.

Examinons pour commencer la *table carrée* (fig. 19). La fonction d'Airy déterminée sous a) ne remplit pas la condition  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ . Les  $F$  calculés donnent en effet, pour un *moment sinusoïdal*,

	(b, f)	(c, f)	(d, f)	(e, f)	
$\frac{\partial^2 F^0}{\partial y^2}$	+34,4655	+31,2129	+25,7970	+23,7470	$\frac{1}{a^2}$

Sous a) nous avons établi des tableaux donnant les valeurs de  $F$  pour des  $\frac{\partial F}{\partial x}$  unitaires; ces tableaux, pour un carré, valent aussi pour les  $\frac{\partial F}{\partial y}$ . Les  $\frac{\partial F}{\partial y} \Delta x$  unitaires et les  $F$  correspondants, introduits dans le tableau (II<sub>8</sub>), permettent de calculer les valeurs des  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$  qui sont provoquées par  $\frac{\partial F}{\partial y} \Delta x = 1$ . Ces  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\frac{\partial F}{\partial y} \Delta x = 1}$  sont les coefficients des inconnues  $\frac{\partial F}{\partial y} \Delta x$ , les  $\frac{\partial^2 F^0}{\partial y^2}$  donnés ci-dessus étant les termes connus. On peut donc écrire les équations suivantes en changeant les signes.

	(e,f)	(d,f)	(c,f)	(b,f)	Termes connus
(e,f)	+148,9762	- 82,9454	- 21,9455	- 2,9356	+23,7470
(d,f)	- 41,4656	+138,2265	- 41,8027	- 7,5339	+25,7970
(c,f)	- 10,9657	- 41,8223	+154,5844	- 28,8605	+31,2129
(b,f)	- 1,5254	- 7,9086	- 30,3548	+182,5430	+34,4655

Les solutions sont

	(e,f)	(d,f)	(c,f)	(b,f)
$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta x$	0,491713	0,476119	0,418467	0,283130

Ces valeurs, introduites dans les tableaux donnés sous a), déterminent des valeurs  $F$  supplémentaires qui s'ajoutent à celles trouvées auparavant. Il ne reste plus qu'à calculer la diminution correspondante de  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_m$  restant le même. On obtient finalement pour un moment à variation sinusoïdale un  $\lambda = 0,3720$  qui est constant sur la longueur  $b$ . Pour ce même cas, *Dischinger*<sup>46)</sup> indique 0,3714. La concordance est parfaite.

Pour les moments à variation *parabolique et linéaire*, on consultera les courbes de la figure 60 et de la figure 61.

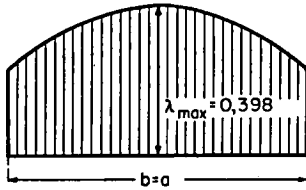


Fig. 60. Moment parabolique

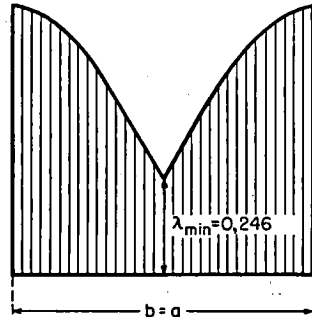


Fig. 61. Moment linéaire

<sup>46)</sup> *F. Dischinger*: Abschnitt Massivbau, p. 1442, Taschenbuch für Bauingenieure, Springer, Berlin, 1949, herausgegeben von F. Schleicher.



Quant à la *plaque rectangulaire*, avec  $\frac{b}{a} = 2$ , on obtient pour un moment à variation sinusoïdale  $\lambda = 0,7027$  (*Dischinger 0,702*).

L'influence des nervures latérales est, comme on le voit, assez importante quand  $\frac{b}{a}$  est proche de l'unité, mais elle diminue rapidement à mesure que  $\frac{b}{a}$  augmente, du moins dans la partie centrale. Ces nervures provoquent des perturbations locales aux extrémités, perturbations qui s'atténuent d'après le principe de *B. de Saint-Venant*.

Considérons de plus près le *moment à variation sinusoïdale*. Une fonction d'Airy  $F$  de la forme  $F = X \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ , où  $X$  est une fonction de la seule variable  $x$ , remplit les conditions aux limites. En effet, pour  $x = \pm \frac{a}{2}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x} = X' \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ , donc a la même variation que le moment; pour  $y = \pm \frac{b}{2}$ ,  $F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$  puisque  $\cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Au lieu de l'équation aux dérivées partielles  $\Delta \Delta F = 0$ , il suffit de résoudre l'équation différentielle

$$X''' - 2 \frac{\pi^2}{b^2} X'' + \frac{\pi^4}{b^4} X = 0 \quad (73)$$

Cette résolution peut également se faire par la méthode du polygone funiculaire<sup>47)</sup>. Le résultat est exactement le même que plus haut.

$$c) \text{ Bord } x = \pm \frac{a}{2} \quad \frac{\partial F^0}{\partial x} = \beta M \quad u = \int \epsilon_x dx = 0$$

$$\text{Bord } y = \pm \frac{b}{2} \quad \sigma_y = 0 \quad \epsilon_x = 0 \quad \text{donc } \sigma_x = 0 \quad \text{d'où } F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Les bords latéraux ont les mêmes conditions que sous *b*), mais le bord longitudinal ne peut pas se dilater transversalement. Ce cas se présente si l'on a plus de deux âmes. Au droit des âmes intermédiaires, par raison de symétrie, le bord reste rectiligne (fig. 62). Nous n'étudierons qu'un *moment à variation sinusoïdale*. Comme

<sup>47)</sup> *F. Stüssi*: Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten, Abhandlungen I.V.B.H. (Mémoires A.I.P.C.), achter Band, 1947.

expliqué sous *b*), une fonction  $F = X \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$  remplit les conditions au contour. L'équation différentielle est ici aussi (73)

$$X''' - \frac{2\pi^2}{b^2} X'' + \frac{\pi^4}{b^4} X = 0$$

Les conditions au bord sont  $X' \Delta x = 1$  et  $\int \epsilon_x dx = 0$ .

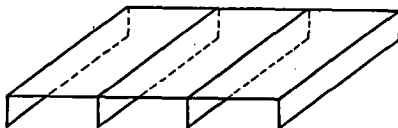


Fig. 62

On divise la ligne considéré en huit intervalles (fig. 11).

En posant comme M. le professeur *Stüssi*  $\gamma = \frac{\pi^2 \Delta x^2}{12b^2} = \frac{\pi^2}{768}$  pour  $\frac{a}{b} = 1$ , les équations linéaires s'écrivent en général<sup>47)</sup>

$$+X_{m-2}(1-2\gamma+\gamma^2) - X_{m-1}(4+16\gamma-20\gamma^2) + X_m(6+36\gamma+102\gamma^2) - \\ - X_{m+1}(4+16\gamma-20\gamma^2) + X_{m+2}(1-2\gamma+\gamma^2) = 0$$

et pour exprimer la condition  $X_1' \Delta x$  donné (Fig. 11)

$$-X_1(11+32\gamma-16\gamma^2) + X_2(18+60\gamma+162\gamma^2) - X_3(9+24\gamma-36\gamma^2) + \\ + X_4(2-4\gamma+2\gamma^2) = 6 X_1' \cdot \Delta x$$

On doit avoir de plus  $E \int \epsilon_x dx = \int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx = 0$ . En remplaçant l'intégration par une somme de charges nodales paraboliques, cette condition devient avec  $\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} X$ ,  $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = X''$  et par suite  $\nu \int \sigma_y dx = -2\nu X_1'$ ,  $\nu = \frac{1}{9}$ :

$$-\frac{2\pi^2}{12} (4,5 X_1 + 14 X_2 + 11,5 X_3 + 12 X_4 + 6 X_5) = -2\nu X_1' \Delta x \left(\frac{b}{\Delta x}\right)^2 = \\ = -\frac{128}{9} X_1' \Delta x. \text{ D'où le système suivant, avec } X' \Delta x = 1,$$

	$X_5$	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	Termes connus
5	+3,239741	-4,202313	+0,974463			
4	-4,202313	+7,453946	-4,202314	+0,974463		
3	+0,974463	-4,202314	+6,479483	-4,202313	+0,974463	
2		+0,974463	-4,651240	+9,398908	-5,704296	+3
1	+3	+6	+5,75	+7	+2,25	+4,323037

Les solutions sont

	5	4	3	2	1
X	+0,5619619	+0,5086179	+0,3250619	-0,0653264	-0,8117234

On calcule comme à l'ordinaire  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_m$  et l'on obtient  $\lambda = 0,4162$ , tandis que *Dischinger* indique 0,4158. La différence par rapport à *b*) est faible. Il en est de même si l'on compare notre cas *a*) (0,287) avec le résultat de *L. Beschkine*<sup>48)</sup> (0,305). L'auteur a calculé un cas semblable à notre cas *a*) mais avec  $u = 0$  pour  $x = \pm \frac{a}{2}$  au lieu de  $\sigma_x = 0$ . On voit que les conditions  $\sigma_x = 0$  et  $u = 0$  sont pratiquement équivalentes.

*d) Influence de la rigidité propre des âmes*

Nous avons supposé provisoirement que la répartition des cisaillements  $\tau$  suivait la même loi que les efforts tranchants  $Q$ . En réalité, le problème est hyperstatique, la condition d'élasticité à remplir étant  $(\epsilon_y)_{âme} = (\epsilon_y)_{table}$  ou  $(E \epsilon_y)_{âme} = \sigma_y - \nu \sigma_x$  pour  $x = \pm \frac{a}{2}$ .

Pour fixer les idées, nous adoptons les conditions au contour énoncées sous *a*) soit, avec la différence décrite ci-dessus,

$$\text{Bord } x = \pm \frac{a}{2} \quad (E \epsilon_y)_{âme} = \sigma_y - \nu \sigma_x, \quad \sigma_x = 0 \quad \text{d'où } F = 0$$

$$\text{Bord } y = \pm \frac{b}{2} \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{d'où } F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Comme inconnues hyperstatiques nous prenons, non les cisaillements  $\tau$ , mais  $\int \tau dy = - \int \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dy = \frac{\partial F^0}{\partial x}$ , soit la moitié de l'effort normal  $2S$  de la table supposée d'épaisseur unitaire. Il reste à exprimer la condition de déformation en fonction des inconnues.

$$E (\epsilon_y)_{âme} = (\sigma_y - \nu \sigma_x)_{table} = \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{puisque } \sigma_x = 0$$

L'âme est sollicitée par le moment extérieur  $M$ , mais elle est soulagée par les cisaillements, ou par leur somme, l'effort normal  $S$ . Si

<sup>48)</sup> *L. Beschkine*: Détermination de la largeur utile des tables de compression des poutres, Mémoires A.I.P.C., cinquième volume, 1937/38.

$h$  désigne la distance entre l'arête commune et le centre de gravité de l'âme, on peut écrire (fig. 54)

$$E(\epsilon_y)_{\text{âme}} = \sigma_y \text{ âme} = -\frac{M \cdot h}{J} + S \left( \frac{1}{F} + \frac{h^2}{J} \right)$$

$I$  et  $F$  sont le moment d'inertie et la surface de l'âme. En chaque nœud du bord  $x = \pm \frac{a}{2}$ , on doit ainsi avoir, avec  $S = \frac{\partial F^0}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{M h}{J} + \frac{\partial F^0}{\partial x} \left( \frac{1}{F} + \frac{h^2}{J} \right) \text{ pour une table d'épaisseur } t = 1.$$

Les cas limites sont les suivants:

1. L'âme n'a pas de rigidité propre, elle se réduit à son centre de gravité. Il n'y a pas de  $(\epsilon_y)_{\text{âme}}$  proprement dit et la répartition des  $\tau$  est isostatique. C'est le cas envisagé jusqu'à maintenant.
2. L'âme est très rigide,  $S$  est pratiquement nul et la répartition des  $(\epsilon_y)_{\text{âme}}$  est la même que celle du moment extérieur  $M$ . Pour  $x = \pm \frac{a}{2}$   $E(\epsilon_y)_{\text{âme}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \beta M$ .

Le problème est semblable à celui exposé sous b); la seule différence est qu'il s'agit du bord  $x = \pm \frac{a}{2}$ , au lieu de  $y = \pm \frac{b}{2}$ . Pour une *paroi carrée*, par raison de symétrie, les équations écrites sous b) restent valables, à l'exception des termes connus qui deviennent pour un moment à variation sinusoïdale

	$(a, g)$	$(a, h)$	$(a, i)$	$(a, k)$
T. connu	0,3826834	0,7071068	0,9238795	1
d'où $\frac{\partial F^0}{\partial x} \cdot \Delta x$	0,4691377	1,077882	1,526681	1,688284

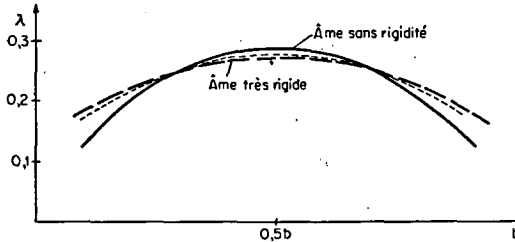


Fig. 63. Moment sinusoïdal  $\frac{b}{a} = 1$

Les figures 63 et 64 donnent les courbes  $\lambda$  pour des moments à variation parabolique et sinusoïdale. Elles contiennent également les valeurs déjà données sous a). On voit que la *différence est faible*.

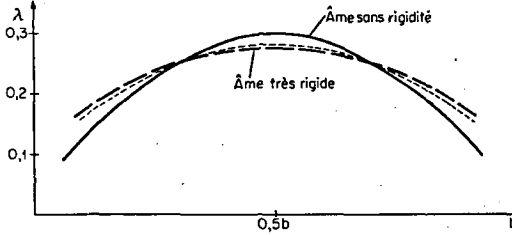


Fig. 64. Moment parabolique  $\frac{b}{a} = 1$

Les exemples précédents montrent l'utilité de la méthode du polygone funiculaire dans le problème de la largeur utile<sup>49)</sup>.

### 6° Grandes déformations des plaques minces fléchies

On traitera dans ce paragraphe un problème mixte plaque-paroi, celui d'une plaque carrée dont les déformations  $w$  ont le même ordre de grandeur que l'épaisseur  $h$ . Comme il s'agit d'un problème du second ordre, *les sollicitations ne sont pas proportionnelles aux charges*. Aussi allons-nous fixer des valeurs numériques (fig. 65).

Considérons par exemple la tôle de bordage d'une vanne. Les dimensions sont les suivantes. Longueur = largeur  $a = b = 100$  cm; épaisseur  $h = 1$  cm; pression uniforme  $p = 0,0005$  t/cm<sup>2</sup> (5 m d'eau); module d'élasticité  $E = 2100$  t/cm<sup>2</sup>; nombre de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Le calcul ordinaire donnerait<sup>50)</sup>:

<sup>49)</sup> Les résultats numériques sont encore trop rares, voir *H. Rüsck: Die mitwirkende Plattenbreite bei Plattenbalken, Der Stahlbau, Januar 1953, article contenant 9 références.*

<sup>50)</sup> *S. Timoshenko, op. cit. à la note 28, p. 127.*

Ordonnée de la surface élastique au centre  $w_{max} = 0,0443 \frac{p a^4}{E h^3} = 1,055 \text{ cm}$ . Moment au centre  $M_{max} = 0,0479 p a^2 = 0,24 t$  d'où  $\sigma_{max} = 1,44 t/cm^2$ .

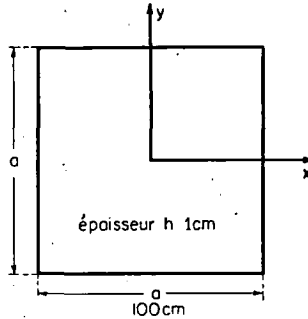


Fig. 65

Pour obtenir les sollicitations plus exactes, il faut résoudre les équations établies dans ce but au chapitre deuxième, paragraphe 5<sup>o</sup>,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{h}{D} \left( \frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (40 a)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (40 b)$$

Les conditions au contour seront les suivantes

$$\begin{array}{llll} x = \pm \frac{a}{2} & y = \pm \frac{a}{2} & w = 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ x = \pm \frac{a}{2} & \sigma_x = \tau = 0 & \text{d'où} & F = 0 & \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ y = \pm \frac{a}{2} & \sigma_y = \tau = 0 & \text{d'où} & F = 0 & \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{array}$$

Les bords sont donc simplement appuyés, de plus les déplacements horizontaux du feuillet moyen ne sont pas empêchés.

Nous allons résoudre le problème par approximations successives,

ce qui est tout indiqué ici, puisque l'effet de membrane est secondaire. Comme première approximation, nous prenons les résultats de la théorie ordinaire des plaques à faibles déformations; autrement dit, nous négligeons dans l'équation (40a) les termes en  $\partial^2 F$ . On introduit les valeurs ainsi trouvées de  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , dans l'équation (40b). Puisque  $F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ , il s'agit du calcul d'une plaque totalement encastree, dont la charge vaut  $DE \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$ . Cette charge est connue et l'on peut déterminer facilement  $F$  et surtout  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ . Substituons ces valeurs calculées des  $\partial^2 F$  et celles connues des  $\partial^2 w$  dans la relation (40a); il n'y a plus qu'à recommencer le même cycle d'opérations jusqu'à ce que les résultats concordent pratiquement avec les valeurs admises.

Il s'agit pour le calcul numérique de connaître les flèches et les courbures d'une plaque simplement appuyée et celles d'une plaque encastree, plaques chargées d'une façon quelconque. On utilise dans les deux cas un réseau à quatre fois quatre mailles (fig. 66). Un tel réseau donne une très bonne précision pour une plaque simplement appuyée. Pour la plaque encastree la précision est moins bonne, mais il s'agit de termes correctifs.

Les calculs s'effectuent comme au chapitre troisième. Sans détails, donnons simplement les tableaux suivants. Toutes les solutions s'en déduisent par superposition.

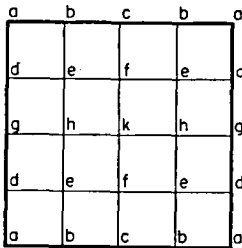


Fig. 66

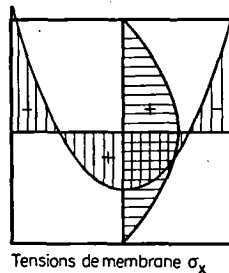


Fig. 67

Plaque simplement appuyée carrée								
charge $p =$ 0,001 t/cm <sup>2</sup>	$w_k$ cm	$(\partial^2 w / \partial x^2)_e$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_f$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_h$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_k$	$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_a$	$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_b$	$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_e$
		$(\partial^2 w / \partial y^2)_e$	$(\partial^2 w / \partial y^2)_h$	$(\partial^2 w / \partial y^2)_f$	$(\partial^2 w / \partial y^2)_k$			
en $a, b$ et $c$	0,1899	-0,14006	-0,09957	-0,17679	-0,13856	-0,29666	-0,1282	-0,0803
en $e$	0,6106	-0,52320	-0,24174	-0,57077	-0,44318	-1,1468	-0,3651	-0,2643
en $f$ et $h$	0,9310	-0,40625	-0,74479	-0,74479	-0,81250	-0,7786	-0,7363	-0,4091
en $k$	0,3753	-0,11080	-0,28538	-0,12087	-0,52320	-0,2786	-0,2160	-0,2198

Paroi (fonction d'Airy)					
$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_e$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_f$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_h$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_k$	$(\partial^2 F / \partial x \partial y)_e$
	$(\partial^2 F / \partial y^2)_e$	$(\partial^2 F / \partial y^2)_h$	$(\partial^2 F / \partial y^2)_f$	$(\partial^2 F / \partial y^2)_k$	
= 1 en $a$	- 0,86	+ 0,27	- 0,48	- 0,26	- 0,30
= 1 en $b$ et $d$	-17,20	+ 2,78	- 11,70	- 7,01	- 6,46
= 1 en $e$	-85,76	- 1,25	- 67,76	- 50,22	-37,88
= 1 en $f$ et $h$	-14,56	-148,55	-104,37	-158,77	-62,08
= 1 en $k$	+ 2,50	- 69,22	+ 13,11	-158,66	-76,36

Les valeurs ci-dessous remplissent les équations

$(\partial^2 w / \partial x^2)_e$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_f$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_h$	$(\partial^2 w / \partial x^2)_k$	$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_a$	$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_b$	$(\partial^2 w / \partial x \partial y)_e$
-0,549	-0,554	-0,732	-0,771	-1,162	-0,615	-0,405

$10^{-3}$  cm<sup>-1</sup>

$(\partial^2 F / \partial x^2)_e$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_f$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_h$	$(\partial^2 F / \partial x^2)_k$	$(\partial^2 F / \partial x \partial y)_e$
+8,5	+103,0	+38,8	+162,6	+72,9

$10^{-3}$  t/cm<sup>2</sup>

Les solutions définitives sont les suivantes

$$w_k = w_{max} = 0,899 \text{ cm (calcul ordinaire 1,055 cm, différence 17 \%)}$$

$$M_k = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k (1 + \nu) = 2100 \frac{0,771}{12(1 - 0,3^2)} 1,3 = 0,193 \text{ t}$$

$$\sigma_k = 6 \cdot 0,193 + 0,163 = 1,32 \text{ t/cm}^2 \text{ (1,44 t/cm}^2 \text{ 9 \%)}.$$

Ce problème a été étudié expérimentalement et contrôlé numériquement par R. Kaiser<sup>51</sup>). Pour  $p^* = \frac{p}{Eh^4} = \frac{0,0005 \cdot 50^4}{2 \cdot 100 \cdot 1^4} = 1,49$ ,



l'auteur a mesuré une diminution sur la valeur de la flèche au centre de 18 % par rapport à la théorie ordinaire.

Les tensions de flexion et de membrane mesurées au centre sont également voisines de celles de notre calcul. Mais les essais ont montré que, si les déformations sont importantes, les contraintes au centre de la plaque ne sont pas les plus grandes. Les tensions de membrane (fig. 67) soulagent très fortement la partie centrale tout en chargeant les autres.

Si l'on avait admis comme condition au contour  $u=0$  au lieu de  $\sigma_x=0$  — bord simplement appuyé mais tenu — les tensions de membrane se répartiraient de façon plus uniforme. *Roark*<sup>52)</sup> donne alors  $w_k=0,676$  cm (1,055 28%)  $\sigma_k=1,287$  t/cm<sup>2</sup> (1,44 12%).

Les déformations sont inférieures mais les contraintes presque les mêmes que dans notre cas. On avait déjà remarqué la concordance des conditions  $u=0$  et  $\sigma_x=0$  dans le calcul des largeurs utiles.

Il existe un grand nombre d'autres problèmes mixtes plaque-paroi. L'étude de la largeur utile en est un, si l'on tient compte de la résistance à la flexion de la table<sup>53)</sup>. Dans ce cas, les conditions aux limites sont mixtes elles aussi. Nous ne pouvons examiner en détail toutes ces questions<sup>54)</sup>, mais nous espérons cependant que les applications données permettront au lecteur de résoudre d'autres problèmes du même genre.

---

<sup>51)</sup> *R. Kaiser*: Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und großen Ausbiegungen. Z. f. ang. Math. und Mech., April 1936.

<sup>52)</sup> *R. J. Roark*: Formulas for stress and strain, McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1943, p. 213.

<sup>53)</sup> Cf. *K. Marguerre*: Über die Beanspruchung von Plattenträgern, Der Stahlbau, August 1952; *B. Gilg*: Der Randträger einfluß bei Plattenbrücken, Schweizerische Bauzeitung, 28. November 1953.

<sup>54)</sup> Pour le voilement non linéaire à grandes déformations voir *S. Timoshenko*: Théorie de la stabilité élastique, Béranger, Paris et Liège, 1943, p. 377; *G. Winter*: Performance of thin steel compression flanges, Int. Assoc. Bridge and Struct. Engineering, 3rd Congress, Prel. Publ., Liège, 1948; *Ch. Massonnet*: Le voilement des plaques planes sollicitées dans leur plan, A.I.P.C., 3ème Congrès, Rapport final, Liège, 1948.

## CHAPITRE CINQUIÈME

### Précision de la méthode du polygone funiculaire Extension possible de ses applications

#### 1<sup>o</sup> Introduction

A l'aide des exemples des chapitres précédents, nous donnerons d'abord la précision obtenue dans les diverses applications de la méthode du polygone funiculaire: plaques simplement appuyées, plaques encastrées, parois, etc. Ces résultats nous permettront d'énoncer un critère général.

La méthode aux différences sera examinée ensuite. On en donnera la précision, toujours bien inférieure à celle de la méthode du polygone funiculaire. Les avantages de cette dernière seront ainsi démontrés.

Pour clore cette étude, nous indiquerons brièvement quelques applications plus étendues de la méthode du polygone funiculaire.

#### 2<sup>o</sup> Précision de la méthode du polygone funiculaire

##### a) Plaques rectangulaires simplement appuyées

Au chapitre troisième, paragraphe 2<sup>o</sup>, nous avons donné les erreurs en % pour des charges sinusoïdales dans les deux sens. Pour le réseau à quatre fois quatre mailles, nous avons calculé un grand nombre de cas de charge. Nous ne reproduirons pas le tableau correspondant, mais uniquement les valeurs extrêmes des erreurs.

Réseau à quatre fois quatre mailles			
$w$	$M_x$ ou $M_y$	$Q$ ou $V$	$M_{xy}$
0,6 %	0,7 %	1 %	1,5 %

On peut remarquer aussi que les erreurs dépendent très peu de la charge envisagée, tout au moins si l'on prend les charges nodales appropriées. Mentionnons l'égalité de la précision des déformations et de celle des courbures (moments). Leurs erreurs restent toujours

inférieures à 1 %. Pour les dérivées impaires ou mixtes, par contre, elles peuvent être légèrement supérieures, mais il s'agit d'éléments moins importants du calcul: pentes, efforts tranchants, réactions d'appui, moments de torsion.

L'étude de la charge sinusoïdale montre que l'erreur devient cinq fois plus petite lorsque l'on passe d'un réseau à quatre fois quatre mailles à un réseau à six fois six mailles. De ce dernier à un réseau à huit fois huit mailles l'erreur est divisée par trois.

*b) Plaques rectangulaires totalement encastrées*

Le tableau figurant au paragraphe 3<sup>o</sup> du chapitre troisième montre, comme on l'a déjà dit, qu'il faut doubler le nombre des mailles pour obtenir la même précision que pour une plaque simplement appuyée. On trouve en effet pour les déformations  $w$  et les moments de flexion

	quatre fois quatre	six fois six	huit fois huit	six fois huit
$w$	6 %	1,5 %	0,5 %	0,5 %
$M$	6 %	2 %	0,7 %	1 %

Pour les plaques soumises à d'autres conditions au contour, la précision dépend de ces conditions; les cas limites sont ceux étudiés ci-dessus: plaque simplement appuyée, plaque encastrée.

*c) Parois minces*

Comme il y a peu de résultats exacts connus, il nous est difficile de calculer directement la précision. L'analogie qui existe entre le problème des plaques et celui des parois nous permet cependant de fixer au moins l'ordre de grandeur de l'exactitude.

Pour les contraintes d'origine thermique et pour la répartition à l'intérieur de la paroi des tensions données sur les bords, le calcul se ramène à celui d'une plaque totalement encastrée (chapitre quatrième, paragraphe 2<sup>o</sup>). Avec les charges nodales corrigées dont nous avons parlé, on obtiendra des erreurs du même ordre que celles des plaques encastrées.

D'autres problèmes de paroi se rapprochent davantage des plaques simplement appuyées. C'est le cas de la largeur utile pour

certaines conditions au contour (chapitre quatrième, paragraphe 5<sup>o</sup> b)). Pour le réseau à huit fois huit mailles la différence d'avec les résultats analytiques n'est que de 0,15%.

#### d) Critère général de précision

Ce qui détermine la précision de la méthode, c'est la variation des courbures de la surface élastique ou de la fonction d'*Airy*. Ces courbures changent de signe aux points d'inflexion. La précision sera d'autant plus grande que la partie de la courbe située entre deux points d'inflexion successifs est définie par un plus grand nombre de nœuds, ou correspond à un plus grand nombre de mailles du réseau. Les tableaux en a) et b) conduisent donc au critère général suivant:

Si l'intervalle entre deux points d'inflexion consécutifs

correspond à	deux	trois	quatre	six	huit	mailles
la précision sera de l'ordre de	6 %	2 %	0,7 %	0,15 %	0,05 %	

pour les valeurs des ordonnées  $w$  ou  $F$  et des courbures ( $M_x$ ,  $M_y$ ;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ). Pour les dérivées d'ordre impair et les torsions géodésiques ( $Q$ ,  $M_{xy}$ ,  $\tau$ ), multiplier par 1,5 ÷ 2. Il s'agit bien entendu d'un ordre de grandeur. D'autre part, le critère ne joue pas pour les points voisins d'un point singulier de la surface: point d'application d'une charge concentrée sur la plaque, discontinuités des contraintes au bord de la paroi, etc.

A l'ordinaire il est possible de fixer sans calcul la position approximative des points d'inflexion de la surface élastique ou de la fonction d'*Airy*. Le critère permet, soit de prendre le nombre de mailles nécessaire à l'obtention d'une précision donnée, soit de chiffrer à l'avance les erreurs probables du réseau choisi.

### 3<sup>o</sup> Méthode aux différences et méthode du polygone funiculaire

Afin de faciliter la comparaison, donnons d'abord quelques résultats de la méthode aux différences finies<sup>55)</sup>.

<sup>55)</sup> Cf. H. Marcus, op. cit. à la note 7; K. Beyer: Die Statik im Stahlbetonbau, Springer, Berlin, 1948; E. Doeinck: Allgemeine Festigkeitslehre

Plaque carrée simplement appuyée. Charge uniforme			
	quatre fois quatre mailles	six fois six mailles	huit fois huit mailles
$w_{max}$	0,7 %	0,2 %	0,1 %
$M_{max}$	4,8 %	2,1 %	1,2 %

Plaques totalement encastrées. Charge uniforme			
	quatre fois quatre mailles	huit fois six mailles	huit fois huit mailles
$w_{max}$	—	15 %	12 %
$M_{min}$	25 %	12 %	8 %

La charge uniforme est celle qui donne les erreurs les plus faibles. Pour une charge sinusoïdale par exemple, *E. Doeinck*<sup>55)</sup> montre que les erreurs sur les déformations  $w$  atteignent, pour une plaque simplement appuyée, 10% pour un réseau à quatre fois quatre mailles et 4% pour un réseau à six fois six mailles, soit 15 fois plus que pour la charge uniforme. L'augmentation est considérable. Revenons à la charge uniforme. On voit que la méthode aux différences, présente, par rapport à celle du polygone funiculaire, deux inconvénients majeurs: *d'une part* la précision obtenue est bien inférieure. Si l'on s'en tient aux courbures (moments de flexion, contraintes normales), les erreurs sont au moins 10 fois plus grandes. Pour les déformations, le rapport n'est pas aussi grand, mais les déformations seules ne sont généralement d'aucune utilité pour le calcul des constructions. *D'autre part*, la convergence est moins bonne. Lorsque l'on passe de quatre à six, respectivement huit mailles, les erreurs ne sont divisées que par 2,5 respectivement 4 au lieu de 5 et 15.

Si la charge est quelconque, les inconvénients sont encore augmentés; bien plus, on ne peut indiquer l'ordre de grandeur de la précision à l'avance.

für Bauingenieure, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel und Hannover, 1948; *E. Czerny*: Über den Einfluß der Querdehnungszahl auf die Momentenwerte querbelasteter Quadratplatten, Österreichische Bauzeitung, September 1952.

Pourquoi existe-t'il une telle différence entre l'exactitude de deux méthodes apparemment voisines? C'est qu'il y a entre elles une *différence de principe*. Comme nous l'avons déjà dit au chapitre deuxième, la relation du *polygone funiculaire* sous la forme générale

$$w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \Delta x \cdot K_m(w'') \quad (47)$$

est rigoureusement exacte. La simplification réside dans le calcul de  $K(w'')$ . Mais, comme on l'a vu dans les diverses applications, il est possible de tenir compte des particularités des fonctions en jeu par le choix de charges nodales appropriées. Même dans les cas spéciaux, les erreurs ne sont pas sensiblement augmentées, sauf peut-être au voisinage des perturbations.

La méthode aux *différences finies* repose sur la relation

$$w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1} = \Delta x^2 \cdot w_m''$$

relation qui n'est exacte que pour une différentielle, lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ . D'autre part, on ne peut remplir les conditions imposées qu'au voisinage immédiat des nœuds, la variation entre les nœuds échappe au calcul puisque n'intervient que  $w_m''$  et non la charge nodale. La précision dépendra des fonctions en jeu.

La méthode du polygone funiculaire permet, pour une précision du même ordre, de réduire considérablement le nombre de mailles, et partant d'équations linéaires à résoudre. Comme l'établissement de ces équations et la suite des opérations numériques est sensiblement la même que pour la méthode aux différences finies<sup>56</sup>), on voit le très grand avantage de la méthode du polygone funiculaire.

---

<sup>56</sup>) On a vu que les schémas du procédé explicite sont semblables à ceux de la méthode aux différences finies, ils contiennent simplement quelques termes supplémentaires; on a en tout 25 termes au lieu de 13. Comme le nombre total d'inconnues est toujours limité, la résolution du système d'équations n'est guère compliquée. Par contre le calcul des courbures est certainement plus rapide dans la méthode aux différences: une fonction donnée en trois points équidistants définit la dérivée seconde au point médian. Dans la méthode du polygone funiculaire cette même dérivée dépend des valeurs de la fonction en tous les nœuds de la ligne. Mais la précision est aussi de beaucoup supérieure.

## 4<sup>o</sup> Extension des applications de la méthode du polygone funiculaire

### a) Plaques et parois minces

Les quelques applications que nous avons données ne sont pas restrictives. Une foule de problèmes semblables sont accessibles à la même méthode. Citons en particulier les plaques et parois de forme plus complexe. Eventuellement on choisira des réseaux non rectangulaires<sup>57)</sup> ou l'on partira de coordonnées obliques<sup>58)</sup>.

Pensons aussi aux plaques d'épaisseur variable ou aux tensions d'origine thermique quand le module d'élasticité dépend de la température. Les équations qui régissent ces deux problèmes sont semblables. Bien que plus compliquées<sup>59)</sup> que l'équation (24), elles peuvent être résolues par le procédé implicite.

Rappelons les phénomènes de voilement non linéaire que nous avons seulement effleurés.

### b) Autres problèmes

On pourra bien entendu résoudre toutes les équations différentielles semblables à (24), même si  $w$  n'est pas la déformation d'une plaque ou une fonction de tension d'*Airy*.

Le but de la présente étude était l'application systématique de la méthode du polygone funiculaire aux problèmes à deux dimensions: plaques et parois minces. Le pas suivant serait de traiter par la même méthode les corps de l'espace: coques et voiles, barrages arqués, etc.

La méthode du polygone funiculaire offre des ressources nombreuses et variées. Si nous avons su en présenter quelques aspects au lecteur, pour lui permettre par là de résoudre ses problèmes particuliers et surtout l'inciter à pousser plus avant, notre but principal aura été atteint.

<sup>57)</sup> Cf. *N. J. Nielsen*: Skaevinklede Plader, G.E.C. Gad, København, 1944.

<sup>58)</sup> Voir par exemple *H. Favre*: Contribution à l'étude des plaques obliques, Schweizerische Bauzeitung, 25. Juli 1942; *H. Favre*: Sur l'introduction des coordonnées cartésiennes obliques dans la Théorie de l'élasticité, Bulletin technique de la Suisse romande, 7 décembre 1946; *P. Lardy*: Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte, Schweizerische Bauzeitung, 9. April 1949; *P. Lardy*: Die Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe, Schweizerische Bauzeitung, 30. Juli 1949.

<sup>59)</sup> *S. Timoshenko*, op. cit. à la note 28.

## **Curriculum vitae**

Né à Lausanne le 24 décembre 1924, je fréquentai l'école primaire puis l'école secondaire de Bulle. Terminant mes études classiques au Collège St-Michel à Fribourg, j'y obtins en 1944 le baccalauréat latin-grec.

En automne de cette même année, je m'inscrivis comme étudiant régulier de la Section de Génie Civil à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich. Le diplôme d'ingénieur civil me fut délivré en décembre 1948.

Au début de 1949, je suis entré au service de la S.A. Conrad Zschokke, Constructions métalliques, Doettingen (Argovie).