

Prom. Nr. 3144

**Influence du type d'amortisseur
des machines synchrones sur leur coefficient
d'amortissement et leurs réactances
transitoires et subtransitoires**

Thèse

présentée à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich
pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences Techniques

Par

Moutawé Achab

ing. dipl. de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich
citoyen de la République Arabe Unie (Syrie)

Rapporteur: Prof. A. Dutoit
Corapporteur: Prof. Ed. Gerecke

Juris-Verlag Zürich

1961

Leer - Vide - Empty

"L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature; mais c'est un roseau pensant. Il ne faut pas que l'univers entier s'arme pour l'écraser. Une vapeur, une goutte d'eau, suffit pour le tuer: Mais, quand l'univers l'écraserait, l'homme serait encore plus noble que ce qui le tue, parce qu'il sait qu'il meurt, et l'avantage que l'univers a sur lui; l'univers n'en sait rien."

Pascal

Leer - Vide - Empty

Cette étude a été entreprise à l'institut de Construction des Machines électriques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich. J'exprime à cette occasion ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur A. Dutoit, qui m'a initié dans le domaine de la recherche scientifique, qui m'a soutenu par ses conseils et précieuses directives pour mener à bien ce travail. Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur A. Dutoit pour son aide et sa patience.

Je tiens aussi à remercier Monsieur le Professeur E. Ger e c k e qui a bien voulu accepter d'être du jury, ses critiques et ses remarques me sont d'un intérêt précieux.

Je remercie également le conseil de l'Ecole Polytechnique, qui a pu m'accorder un important crédit pour entreprendre la partie expérimentale de ce travail, grâce à la générosité de la Maison Brown Boveri à Baden.

A mes collègues les assistants au susdit Institut et au personnel de son Laboratoire, j'exprime mes sincères remerciements pour leur précieux concours.

Leer - Vide - Empty

Avant-propos

L'enroulement amortisseur pose un problème très délicat dans les machines synchrones, suivant les conditions que doit remplir cet amortisseur soit en régime permanent, oscillatoire, capacitif ou inductif, ou en cas de court-circuit dissymétrique. De toute manière, l'emploi d'enroulement amortisseur dans les alternateurs a pour but principal d'augmenter leur stabilité de fonctionnement et d'améliorer leur réglage à l'égard du rôle de ces machines dans les réseaux à interconnexions multiples.

On s'est appliqué dans le présent travail à étudier théoriquement la perméance de certains types de barres d'amortisseurs et suivant que ces barres ont la forme trapézoïdale, circulaire ou rectangulaire, à chercher les conditions d'amortissement maximum et de mettre en évidence la corrélation existant entre leurs coefficients de perméance et les réactances subtransitoires et transitoires de la machine.

Il était généralement difficile de déterminer à l'avance et sans essai préalable, ces réactances en fonction des dimensions de la machine et de ses constantes physiques.

Sur la suggestion de Monsieur le Professeur A. Dutoit une partie de ce travail a été dirigée dans ce sens. On peut trouver ici des formules simples, assez exactes, pour calculer les dites réactances. Cependant, une difficulté subsiste qui est de déterminer par le calcul et sans recours à une méthode graphique, la perméance de l'enroulement d'excitation.

Les machines synchrones présentent en cas de court-circuit brusque une particularité dont on a cherché à limiter les effets nocifs. En effet, au moment du court-circuit polyphasé dissymétrique, des courants de fréquence double se trouvent engendrés dans les parties mobiles de la machine, surtout dans les têtes de pôles et qui sont dûs à la composante inverse de la réaction d'induit. Il s'agit alors pour rendre maximum les pertes par effet Joule engendrées par ces courants et le couple retardateur qui en résulte, de les concentrer dans des amortisseurs résistants.

L'utilité d'un enroulement amortisseur résistant pendant un court-circuit, devient illusoire lors des oscillations qui lui succèdent, puisque sa résistance devait être faible à ce moment. Pour concilier ces deux contraires, on a équipé certains alternateurs de deux amortisseurs, l'un à forte résistance l'autre à faible résistance, mais à grande réactance.

L'effet de freinage du premier, s'exerce surtout lors des court-circuits dissymétriques, le second intervient peu en raison de sa grande constante de temps. Les oscillations succédant au court-circuit, sont amorties cette fois par l'amortisseur peu

résistant, comme on pourra le constater plus loin dans le chapitre concernant la variation du moment de la machine durant le régime oscillatoire.

CHAPITRE PREMIER

I. Perméance d'une encoche rectangulaire

Pour traiter le problème, on suppose que les lignes magnétiques sont parallèles entre elles et sont par conséquent, comme le champ magnétique, perpendiculaires aux parois de l'encoche considérée. Cela implique que la perméabilité magnétique du fer est infinie.

Les grandeurs \vec{H} , champ magnétique, \vec{E} champ électrique, et \vec{i} densité de courant, sont supposées fonctions sinusoïdales du temps. Le champ électrique et la densité de courant \vec{i} ont la direction de l'axe de l'encoche.

On considère l'élément de surface hachuré d'épaisseur dy et on calcule \vec{i} en fonction de la seule coordonnée y , cela veut dire que la répartition des courants sera étudiée dans une section donnée de l'encoche.

Loi de l'induction. $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt}$ (1)

Théorème d'Ampère. $\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{i}$ (2)

D'après la définition du rotationnel, on peut écrire, figure (1):

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \lim_{b dy \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}}{b \cdot dy} = \vec{i}$$

Or, $\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = H(y)b_n - H(y+dy)(b_n+dy) = -\frac{\partial}{\partial y}(b_n \cdot H)dy = \vec{i} \cdot b$

b_n étant la largeur de l'encoche, est constant et par conséquent $\frac{\partial b_n}{\partial y} = 0$. Il reste:

$$\frac{dH}{dy} = -i \cdot \frac{b}{b_n} \quad (3)$$

La relation vectorielle $\vec{\text{rot}}\vec{E}$ a pour composantes sur les axes de coordonnées:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad \text{proj. sur } ox$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \text{proj. sur } oy$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad \text{proj. sur } oz$$

Les deux dernières composantes sont identiquement nulles car $\vec{\text{rot}}\vec{E}$ est parallèle au plan xoy. La première composante est différente de zéro et comme $E_y = E_x = 0$ (\vec{E} perpendiculaire au plan xoy), il reste $-\frac{\partial E_z}{\partial y} \neq 0$ et l'on peut écrire:

$$\frac{dE}{dy} = \mu_0 \frac{dH}{dt} = j\omega\mu_0 H \quad (4)$$

D'après la loi d'Ohm on a:

$$\vec{E} = \frac{\vec{i}}{\gamma}$$

γ étant la conductibilité spécifique du conducteur.

La relation (4) s'écrit:

$$\frac{dE}{dy} = \frac{di}{\gamma \cdot dy} = \mu_0 \frac{dH}{dt} = j\omega\mu_0 H \quad (4a)$$

La dérivée de l'équation (3) donne:

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = -\frac{b}{b_n} \cdot \frac{di}{dy} = -j\omega\mu_0 \gamma H \frac{b}{b_n}$$

Posant:

$$\alpha^2 = +j\omega\mu_0 \gamma \cdot \frac{b}{b_n}$$

Ou:

$$\alpha = (1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2} \mu_0 \gamma \frac{b}{b_n}} = (1+j)\beta$$

β étant la partie réelle de α :

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2} \mu_0 \gamma \frac{b}{b_n}}$$

L'équation différentielle du champ magnétique devient:

$$\frac{d^2 H}{dy^2} + \alpha^2 H = 0 \quad (5)$$

Elle a pour solution générale:

$$H = \frac{(1+j) \cdot \beta}{j\omega\mu_0} \left[a \cdot e^{-\beta y(1+j)} - b \cdot e^{+\beta y(1+j)} \right] \quad (6)$$

On détermine les constantes a et b par les conditions aux limites du champ magnétique H.

En effet: pour $y = 0$, $H = 0$ l'équation (6) devient:

$$0 = \frac{(1+j) \cdot \beta}{j\omega\mu_0} (a - b)$$

D'où: $a = b$

D'après le théorème d'Ampère $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{eff}}$, on a:
 pour $y = h$, $H_{y=h} = \frac{I_{\text{eff}}}{b_n}$ et l'équation (6) devient:

$$I_{\text{eff}} = - \frac{b_n(1+j) \cdot \beta}{2 \cdot j\omega\mu_0} \left[e^{-\beta h(1+j)} - e^{+\beta h(1+j)} \right] \cdot 2a \quad (7)$$

Ce qui donne pour les constantes a et b:

$$a = b = - \frac{I_{\text{eff}} \cdot j\omega\mu_0}{\beta(1+j) b_n} \cdot \frac{1}{2 \cdot \text{sh} [(1+j)\beta h]}$$

D'après l'équation (3), on a:

$$i = - \frac{b_n}{b} \cdot \frac{dH}{dy}$$

Dérivant l'équation (6) par rapport à y, on a:

$$\frac{dH}{dy} = - \frac{a\beta^2(1+j)^2}{j\omega\mu_0} \left[e^{+\beta y(1+j)} + e^{-\beta y(1+j)} \right] \quad (8)$$

D'où:

$$i = \frac{b_n}{b} \cdot \frac{4a\beta^2}{\omega\mu_0} \cdot \text{ch} [\beta y(1+j)]$$

En remplaçant a par sa valeur, on a:

$$i = \frac{-j\omega\mu_0 \cdot I_{\text{eff}}}{\beta b_n(1+j)} \cdot \frac{\text{ch} \beta y(1+j)}{\text{sh} \beta h(1+j)} \quad (9)$$

Pour calculer le module de i, il suffit de multiplier i par son conjugué, on obtient:

$$i \cdot i^* = i^2 = I_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{\gamma^2 \omega^2 \mu_0^2}{2b_n^2 \beta^2} \cdot \frac{\text{ch} 2\beta y + \cos 2\beta y}{\text{ch} 2\beta h - \cos 2\beta h}$$

Prenant la racine carrée des deux membres de l'équation précédente, on a:

$$|i| = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \sqrt{\frac{\text{ch} 2\beta y + \cos 2\beta y}{\text{ch} 2\beta h - \cos 2\beta h}} \quad (10)$$

=====

II. Calcul des pertes dans l'encoche

En désignant par R_{\sim} la résistance du conducteur au courant alternatif, la puissance dissipée en une seconde dans l'encoche est:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R_{\sim}$$

D'autre part cette puissance est égale à l'intégrale suivante:

$$P = bl \int_0^h \frac{i^2}{\gamma} dy$$

l = longueur axiale de l'encoche considérée.

Remplaçant i par sa valeur dans l'intégrale et effectuant l'intégration, on obtient:

$$P = I_{\text{eff}}^2 \frac{l\beta}{\gamma b} \cdot \frac{\text{sh}2\beta h + \sin2\beta h}{\text{ch}2\beta h - \cos2\beta h}$$

R_0 étant la résistance du conducteur au courant continu, on a:

$$R_0 = \frac{l}{\gamma bh}$$

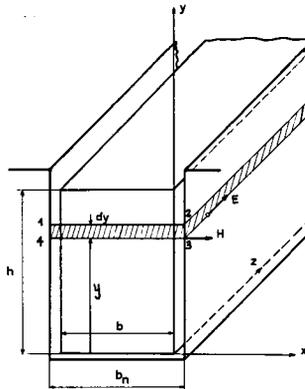


Fig. 1

- \vec{H} = champ magnétique
- \vec{E} = champ électrique
- b = largeur du conducteur
- b_n = largeur de l'encoche
- h = hauteur de l'encoche

Formant ensuite le rapport $\frac{R_{\sim}}{R_0}$ et posant $\xi = \beta h$, on a:

$$\frac{R_{\sim}}{R_0} = \xi \cdot \frac{\text{sh}2\xi + \sin 2\xi}{\text{ch}2\xi - \cos 2\xi} \quad (11)$$

Développant en série le rapport (11), on a:

$$\begin{aligned} \frac{R_{\sim}}{R_0} &= \xi \cdot \frac{\frac{2\xi}{1!} + \frac{(2\xi)^5}{5!} + \frac{(2\xi)^9}{9!} + \dots}{\frac{(2\xi)^2}{2!} + \frac{(2\xi)^6}{6!} + \frac{(2\xi)^{10}}{10!} + \dots} \\ &\cong 1 + \frac{4\xi^4}{45} + \frac{8\xi^8}{45 \cdot 45} + \dots \\ &= 1 + 0,0889 \cdot \xi^4 - 0,0034 \cdot \xi^8 + \dots \end{aligned}$$

Pour $\xi \leq 1,2$, on a:

$$\frac{R_{\sim}}{R_0} = 1 + 0,089 \cdot \xi^4$$

Il est courant de chercher pour quelle valeur de h le rapport $\frac{R_{\sim}}{R_0}$ est extremum. Pour cela on dérive R_{\sim} par rapport à h, on pose $\frac{dR_{\sim}}{dh} = 0$ et on cherche ensuite la valeur critique de h pour laquelle R_{\sim} est maximum.

$$\frac{dR_{\sim}}{dh} = 0 = 1 + 0,89\alpha^4 h^4 - 0,356\alpha^4 h^4$$

D'où: $h_{\text{critique}} = \frac{1}{\beta}(3,745)^{1/4}$

Et: $\frac{R_{\sim}}{R_0} = \frac{4}{3}$

La relation (11) a été représentée graphiquement en fonction des valeurs de ξ allant de zéro à neuf, voir figure 2, courbe 1.

III. Perméance de l'encoche considérée

Pour calculer le coefficient de perméance, il est nécessaire de connaître le champ \vec{H} régnant dans l'encoche. De l'équation (4), on tire \vec{H} en fonction de la dérivée du courant \vec{i} par rapport à y .

$$H = \frac{1}{(j\omega\mu_0 r)} \cdot \frac{di}{dy} = I_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{b_n} \cdot \frac{\text{sh}\beta y(1+j)}{\text{sh}\beta h(1+j)}$$

Pour calculer la valeur absolue du champ \vec{H} , il suffit de multiplier H par sa valeur conjuguée, on obtient:

$$H^2 = I_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1 \cdot \text{ch}2\beta y - \cos2\beta y}{b_n^2 \text{ch}2\beta h - \cos2\beta h}$$

On sait que le coefficient de perméance est donné par l'intégrale suivante:

$$\lambda_{\sim} = \int_0^h \frac{H^2}{I_{\text{eff}}^2} \cdot b_n dy$$

Après intégration, on trouve:

$$\lambda_{\sim} = \frac{1}{2\beta b_n} \cdot \frac{\text{sh}2\beta h - \sin2\beta h}{\text{ch}2\beta h - \cos2\beta h}$$

Sachant que dans le cas où le conducteur est parcouru par un courant continu, le coefficient de perméance est $\lambda_0 = \frac{h}{3b_n}$, on forme le rapport:

$$\frac{\lambda_{\sim}}{\lambda_0} = \frac{3}{2\xi} \cdot \frac{\text{sh}2\xi - \sin2\xi}{\text{ch}2\xi - \cos2\xi} \quad (12)$$

La courbe 2, figure 2, représente la variation du rapport (12) en fonction de ξ , appelé généralement la hauteur virtuelle de l'encoche.

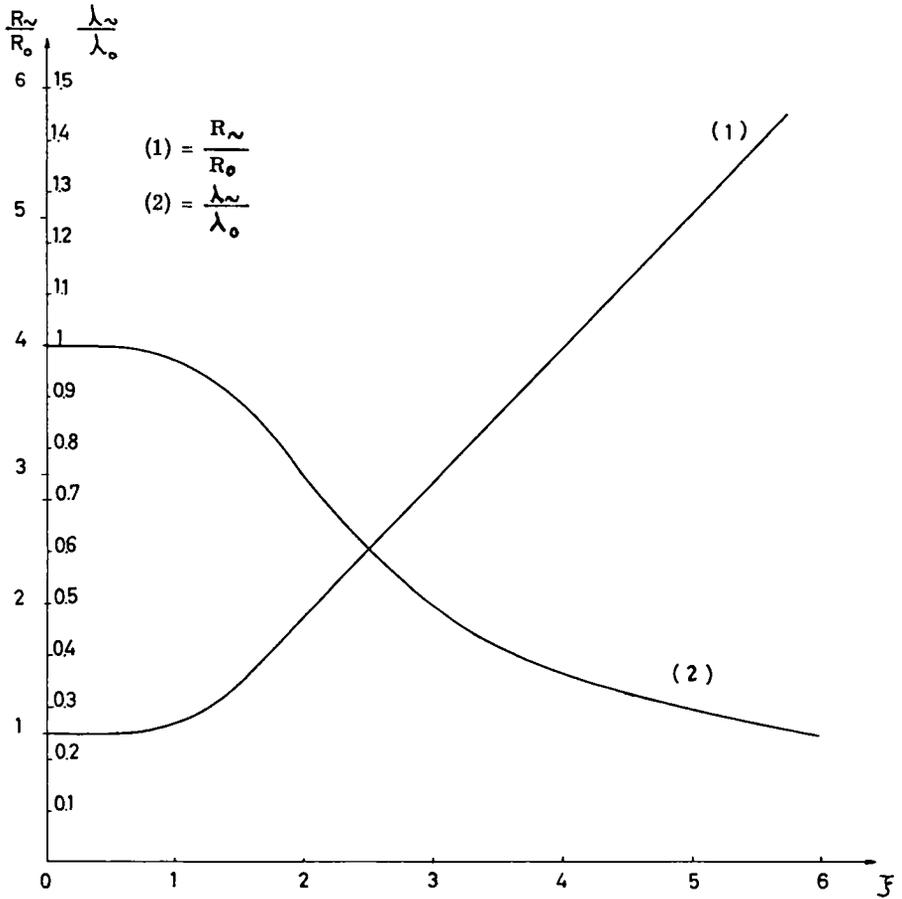


Fig. 2 Encoche rectangulaire

λ_{\sim} = coefficient de perméance au courant alternatif

λ_0 = coefficient de perméance au courant continu

ξ = hauteur virtuelle de l'encoche

CHAPITRE II

Impédance d'une encoche trapézoïdale

I. Cas où l'encoche est parcourue par un courant continu

On emploie, pour traiter ce problème, un système de coordonnées polaires.

Soit sur la figure 3, un élément d'encoche (1234) d'épaisseur dr , de surface frontale df :

La loi de Maxwell permet d'écrire:

$$\overrightarrow{\text{rotH}} = \lim \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}}{df} = \vec{i}$$

\vec{i} est la densité de courant, considérée dans ce paragraphe comme constante sur toute la section de l'encoche.

L'intégration le long du contour (1234), figure 4 donne en remarquant que $df = rd\alpha \cdot dr$.

$$\overrightarrow{\text{rotH}} = \left[\left(H + \frac{\partial H}{\partial r} dr \right) (rd\alpha + dr \cdot d\alpha) - H \cdot rd\alpha \right] \cdot \frac{1}{rd\alpha \cdot dr} = \vec{i}$$

Où: $\left(H + \frac{\partial H}{\partial r} dr \right) (b + dr \cdot d\alpha) - Hb = i \cdot bdr$

Avec: $b(r) = rd\alpha$ et $\frac{\partial b}{\partial r} = d\alpha$

On a l'équation différentielle:

$$\frac{H}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial r} = i \quad (13)$$

Où: $\frac{H}{r} + \frac{dH}{dr} = i \quad (13\text{bis})$

Telle est l'équation différentielle qui lie le champ magnétique à la densité de courant i . Comme il s'agit de courant continu, la dérivée du deuxième membre de l'équation (13)bis par rapport à r est nulle. Par dérivation de cette équation on obtient:

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dH}{dr} - \frac{H}{r^2} = 0 \quad (14)$$

La solution générale de cette équation est:

$$H = A.R + \frac{B}{r} \quad (15)$$

A et B, étant deux constantes arbitraires à déterminer par les conditions aux limites.

Le champ H est défini pour toutes les valeurs de r, sauf au point r = 0, origine des coordonnées, où il est infini. On intègre donc depuis r₁ à r₀, domaine d'existence de la solution (15).

Conditions aux limites:

1. Pour r = r₀, on a, H = 0, d'où $B = -Ar_0^2$

2. Pour r = r₁, on a d'après la loi de l'induction: b₁H₁ = I_{eff}

H₁ est la valeur du champ au bord supérieur de l'encoche où r = r₁.

On remplace H₁ par sa valeur dans (15), on obtient:

$$H_1 = \frac{I_{eff}}{b_1} = Ar_1 - A \cdot \frac{r_0^2}{r_1}$$

D'où les constantes A et B:

$$A = \frac{I_{eff}}{(r_1^2 - r_0^2)} \cdot \frac{r_1}{b_1}, \quad B = I_{eff} \cdot \frac{r_1 r_0^2}{b_1 (r_1^2 - r_0^2)}$$

On remplace dans (15), les constantes A et B par leurs valeurs; on a:

$$H = I_{eff} \cdot \frac{r_1}{b_1 (r_1^2 - r_0^2)} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \quad (16)$$

La perméance de l'encoche est donnée par l'intégrale:

$$\lambda_{\sim} = \frac{\mu_0}{I_{eff}} \int_{r_1}^{r_0} H^2 \cdot df$$

En remarquant que $\frac{b}{r} = \frac{b_1}{r_1}$ et posant $K = \frac{r_1}{b_1 (r_1^2 - r_0^2)}$, l'intégrale devient:

$$\begin{aligned} \lambda_{\sim} &= \mu_0 \int_{r_1}^{r_0} K^2 \left(r^2 + \frac{r_0^4}{r^2} - 2r_0^2 \right) \frac{b_1}{r_1} \cdot r dr \\ &= \mu_0 \frac{b_1 K^2}{r_1} \cdot \left[\frac{1}{4} (r_0^4 - r_1^4) + r_0^4 \cdot \log \frac{r_0}{r_1} - r_1^2 (r_0^2 - r_1^2) \right] \end{aligned}$$

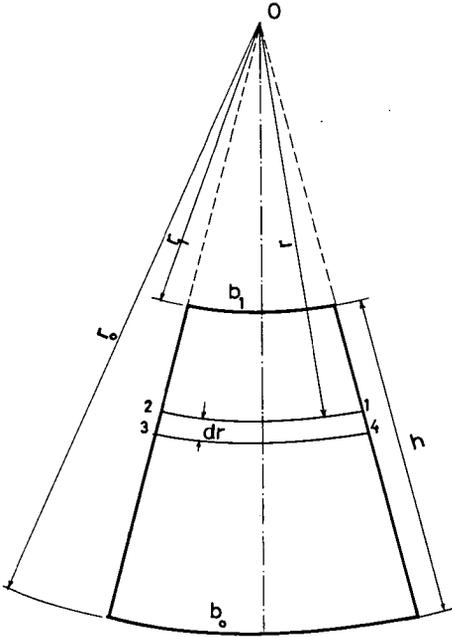


Fig. 3 Encoche trapézoidale

(1234) = élément d'encoche
d'épaisseur dr

d = hauteur de l'encoche

b = petite base

b_0 = grande base

r = rayon polaire

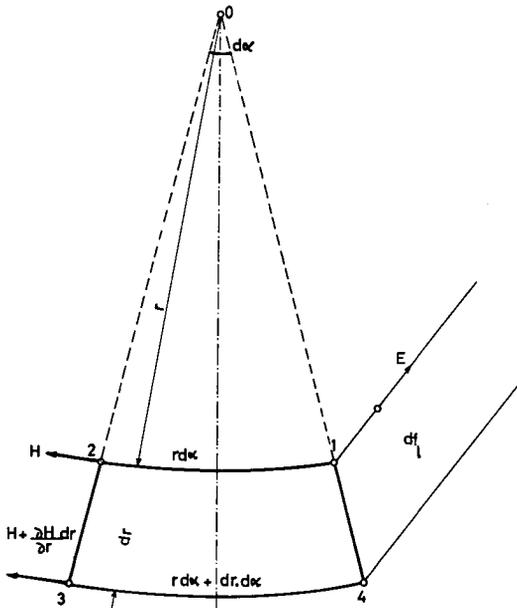


Fig. 4 Encoche trapézoidale

1234 = élément de surface
frontale

df_1 = élément de surface
axiale

H = champ magnétique

E = champ électrique

Soit $\beta = \frac{b_1}{b_0}$, et d'après la figure 3, on a :

$$r_0 = \frac{h}{1 - \beta}, \quad r_1 = \frac{\beta h}{1 - \beta}$$

En remplaçant ces relations par leurs valeurs dans l'équation de λ_{\sim} , on a :

$$\lambda_{\sim} = \frac{h\beta\mu_0}{b_1(1-\beta)(1-\beta^2)} \cdot \left[\frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{1-\beta^2} \log \frac{1}{\beta} - 0,75 \right] \quad (17)$$

=====

En désignant par λ_p le coefficient de perméance, et par $y(\beta)$ la quantité :

$$y(\beta) = \frac{3\beta}{(1-\beta)(1-\beta^2)} \left[\frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{1-\beta^2} \log (1/\beta) - 0,75 \right]$$

D'où :

$$\lambda_p = \frac{h}{3b_1} y(\beta) \quad (18)$$

=====

On a vu précédemment (page 14) que $\frac{h}{3b_1}$ était le coefficient de perméance d'une encoche rectangulaire, l'on déduit alors de l'égalité (18), que le coefficient de perméance d'une encoche trapézoïdale, est inférieur à celui d'une encoche rectangulaire de même hauteur et de même bord supérieur, ce qui est d'ailleurs évident a priori, puisque l'encoche s'élargit en direction de sa profondeur.

La fonction $y(\beta)$

Tableau I

β	$y(\beta)$	β	$y(\beta)$
0		0,6	0,972
0,1	0,531	0,7	0,999
0,2	0,732	0,8	0,992
0,3	0,841	0,9	0,998
0,4	0,906	1,0	1,000
0,5	0,947		

Pour la courbe représentative de la fonction $y(\beta)$, voir figure 5.

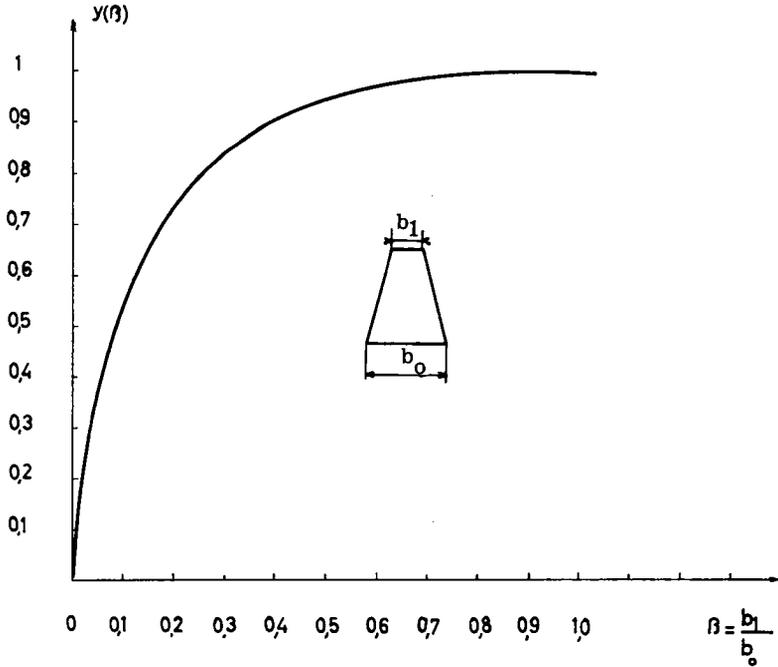


Fig. 5 Variation de l'inductivité d'une encoche trapézoïdale par rapport à β

$$y(\beta) = \frac{3\beta}{(1-\beta)(1-\beta^2)} \left[\frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{1-\beta^2} \log \frac{1}{\beta} - 0,75 \right]$$

II. Cas où l'encoche est parcourue par un courant alternatif

On avait dans le paragraphe I de ce chapitre, trouvé l'équation différentielle:

$$\frac{H}{r} + \frac{dH}{dr} = i$$

Maintenant, la densité de courant \vec{i} n'est plus uniformément répartie dans la section d'encoche comme c'était le cas pour un courant continu. On supposera qu'elle varie en fonction de la coordonnée polaire r .

Les grandeurs, densité de courant \vec{i} , champ magnétique \vec{H} , et champ électrique

\vec{E} , sont considérées comme fonctions sinusoïdales du temps.

Soit df_1 l'élément de surface pris sur la section d'encoche d'épaisseur dr et de longueur axiale l égale à la longueur axiale de l'encoche.

Il est évident, d'après la loi d'Ohm ($\vec{E} = \frac{i}{\gamma}$), que le champ électrique \vec{E} a la direction de \vec{i} , c.à.d. l'axe de l'encoche.

Appliquant la loi d'Ohm sur l'élément de surface df_1 figure 4 on a:

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}{dr \cdot l} = \left[l \cdot E(r) - l \left(E + \frac{\partial E}{\partial r} \cdot dr \right) \right] \cdot \frac{1}{dr \cdot l} = - \frac{\partial \vec{E}}{\partial r}$$

La loi de Maxwell donne:

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$$

D'où:

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} = j\omega\mu_0 H \tag{19}$$

Dérivant l'équation (13)bis, par rapport au temps, on a:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial t} = \gamma \frac{\partial E}{\partial t} \tag{(13)bis}^+$$

Dérivant l'équation (19) par rapport à r , on a:

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial r^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial r \cdot \partial t}$$

La substitution dans l'équation (13)bis⁺, de $\frac{\partial H}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial r \cdot \partial t}$ par leurs valeurs donne:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} - j\omega\mu_0 \gamma i = 0$$

Equation différentielle du second ordre qu'il faut essayer de résoudre. On pose:

$$\alpha^2 = -\mu_0 \omega j \gamma, \quad \alpha = \sqrt{-j} \cdot \sqrt{\mu_0 \omega \gamma} = \sqrt{-j} \cdot |\alpha|$$

$|\alpha| = \sqrt{\mu_0 \omega \gamma}$, est la valeur absolue de α .

L'équation différentielle devient:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} + \alpha^2 i = 0 \tag{20}$$

C'est une équation de Kelvin qui admet comme solution générale:

$$i = A J_0(\sqrt{-j} |\alpha| r) + B N_0(\sqrt{-j} |\alpha| r) \tag{21}$$

J_0 et N_0 étant les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre zéro.
A et B sont deux constantes arbitraires à déterminer.

1. Impédance par unité de longueur du conducteur trapézoïdal

Soit R_{\sim} et X , respectivement la résistance et la réactance par unité de longueur du conducteur.

Impédance du conducteur:

$$Z = R_{\sim} + jX = R_{\sim} + j\omega L$$

On sait qu'entre tension efficace et champ électrique existe la relation suivante:

$$U_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \cdot l_{r=r_1} = \frac{1}{r} \cdot i_{r=r_1}$$

Or:

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{i_{r=r_1}}{I_{\text{eff}}} \quad (22)$$

La loi de l'induction donne:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = b_1 H_{r=r_1} = I_{\text{eff}}$$

D'où la valeur du champ au bord supérieur de l'encoche:

$$H_{r=r_1} = \frac{1}{b_1} \cdot I_{\text{eff}}$$

D'autre part, l'équation (19) donne:

$$H = \frac{1}{j\omega\mu_0 r} \cdot \frac{\partial i}{\partial r}$$

Pour la condition aux limites $r=r_1$, on a:

$$H_{r=r_1} = \frac{1}{j\omega\mu_0 r} \cdot \left[\frac{\partial i}{\partial r} \right]_{r=r_1}$$

En remplaçant $H_{r=r_1}$ par sa valeur dans l'égalité précédente, on obtient:

$$I_{\text{eff}} = -\frac{b_1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{\partial i}{\partial r} \right)_{r=r_1}$$

De plus la substitution de I_{eff} par sa valeur dans l'équation (22) donne la valeur de

l'impédance du conducteur pour $r=r_1$:

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{b_1} \cdot \left[\frac{i}{\frac{\partial i}{\partial r}} \right]_{r=r_1} \quad (23)$$

Pour déterminer l'impédance Z, il suffit donc de calculer i ainsi que sa dérivée par rapport à r, au point $r = r_1$. Pour simplifier l'écriture, on remplace dans l'égalité (21) $\sqrt{-j} |\alpha| r$, par x et l'on a pour $r=r_1$, $\sqrt{-j} |\alpha| r_1 = x_1$.

$$i_{r=r_1} = A J_0(x_1) + B N_0(x_1) \quad (21)\text{bis}$$

$$\left[\frac{\partial i}{\partial r} \right]_{r=r_1} = -A |\alpha| \sqrt{-j} J_1(x_1) - B |\alpha| \sqrt{-j} N_1(x_1) \quad (21)\text{bis}^+$$

En tenant compte des relations de récurrence:

$$\underline{N'_0 = -N_1, \quad J'_0 = -J_1}$$

On détermine la constante A par la condition aux limites, qui est $H = 0$ pour $r=r_0$, c.à.d. au bord inférieur de l'encoche où il n'y a pas de lignes magnétiques couplées au conducteur. Donc $H = 0$, entraîne:

$$\left[\frac{\partial i}{\partial r} \right]_{r=r_0} = 0$$

Où:
$$0 = -A |\alpha| \sqrt{-j} J_1(x_0) - B |\alpha| \sqrt{-j} N_1(x_0)$$

Alors, on a pour la constante A:

$$A = -B \cdot \frac{N_1(x_0)}{J_1(x_0)}$$

La dérivée de i au point $r=r_1$ est:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial r} \right)_{r=r_1} = B |\alpha| \sqrt{-j} \cdot \left[J_1(x_1) \cdot \frac{N_1(x_0)}{J_1(x_0)} - N_1(x_1) \right]$$

Pour la densité de courant au point $r = r_1$, on a:

$$i_{r=r_1} = -B \cdot \frac{N_1(x_0)}{J_1(x_0)} \cdot J_0(x_1) + B \cdot N_0(x_1)$$

On rappelle la signification de x , x_0 , et x_1 .

$$x = |\alpha| \sqrt{-j} \cdot r$$

$$x_0 = |\alpha| \sqrt{-j} \cdot r_0$$

$$x_1 = |\alpha| \sqrt{-j} \cdot r_1$$

Remplaçant dans l'équation (23), $i_{r=r_1}$ et $\left(\frac{\partial i}{\partial r}\right)_{r=r_1}$ par leurs valeurs, on a :

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{1+\beta}{2} \cdot h |\alpha| \sqrt{-j} \cdot \left[\frac{J_0(x_1) \cdot N_1(x_0) - J_1(x_0) \cdot N_0(x_1)}{N_1(x_1) \cdot J_1(x_0) - J_1(x_1) \cdot N_1(x_0)} \right] \quad (24)$$

$$\underline{R_0 = \frac{2}{r(b_1+b_0)}}, \quad \underline{\beta = \frac{b_1}{b_0}}, \quad \underline{r_1 = \frac{h\beta}{1-\beta}}, \quad \underline{r_0 = \frac{h}{1-\beta}}$$

La formule (24) ne s'adapte pas au calcul numérique, on est pour cela obligé d'employer la notation qui suit :

$$|\alpha| r_0 = p$$

$$|\alpha| r_1 = q$$

L'équation (24) devient après cette transformation :

$$\frac{Z}{R_0} = \sqrt{-j} \frac{(1-\beta^2)}{2\beta} p \cdot \left[\frac{J_0(q\sqrt{-j}) \cdot N_1(p\sqrt{-j}) - N_0(q\sqrt{-j}) \cdot J_1(p\sqrt{-j})}{J_1(p\sqrt{-j}) \cdot N_1(q\sqrt{-j}) - N_1(p\sqrt{-j}) \cdot J_1(q\sqrt{-j})} \right] \quad (25)$$

Désignant par :

$$U_1 = p\sqrt{-j} \cdot [J_0(q\sqrt{-j}) \cdot N_1(p\sqrt{-j}) - N_0(q\sqrt{-j}) \cdot J_1(p\sqrt{-j})]$$

$$V_1 = J_1(p\sqrt{-j}) \cdot N_1(q\sqrt{-j}) - N_1(p\sqrt{-j}) \cdot J_1(q\sqrt{-j})$$

L'équation (25) devient :

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{\tilde{R}}{R_0} + j \cdot \frac{X}{R_0} = \left(\frac{1-\beta^2}{2\beta} \right) \cdot \frac{U_1}{V_1}$$

On prend les conjugués des deux membres de l'équation précédente et on les multiplie ensuite par j , on a :

$$\frac{X}{R_0} + j \cdot \frac{R}{R_0} = \frac{p(1-\beta^2)}{2\beta} \cdot \frac{U}{V}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot [J_0(q\sqrt{j}) \cdot N_1 p\sqrt{j}) - N_0(q\sqrt{j}) \cdot J_1(p\sqrt{j})]$$

$$V = J_1(q\sqrt{j}) \cdot N_1(p\sqrt{j}) - N_1(q\sqrt{j}) \cdot J_1(p)$$

On remplace les fonctions de Neumann par celles de Hankel, pour pouvoir employer les tables numériques de Emde et de Janhke.

Relation de transformation Neumann-Hankel:

$$H_1^1) = J_1(z) + jN_1(z)$$

$$H_1^2) = J_1(z) - jN_1(z)$$

Alors on a:

$$\frac{X}{R_0} + j \frac{R_{\infty}}{R_0} = \frac{p(1-\beta^2)}{2\beta} \cdot \frac{\sqrt{j}}{j} \cdot \left[\frac{J_0(q\sqrt{j}) - C \cdot H_0^1(q\sqrt{j})}{J_1(q\sqrt{j}) - C \cdot H_1^1(q\sqrt{j})} \right] \quad (26)$$

La constante C peut être calculée à part:

$$C = \frac{J_1(p\sqrt{j})}{H_1^1(p\sqrt{j})}$$

Cas du cuivre

$$p = \frac{1}{1-\beta} h \sqrt{\mu_0 \omega \gamma} = \frac{1 \cdot h'}{1-\beta}$$

$$q = \frac{1\beta}{1-\beta} h \sqrt{\mu_0 \omega \gamma} = \frac{\beta \cdot h'}{1-\beta}$$

h': grandeur sans dimension, s'appelle hauteur virtuelle de l'encoche.

$$h' = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{f \cdot L}}{\sqrt{50 \cdot 50}} h = h$$

Car pour f = 50 Hz et L = 50m/1 mm², la hauteur virtuelle est pratiquement égale à la hauteur effective de l'encoche.

Calcul numérique de $\frac{X}{R_0}$ et $\frac{R_{\infty}}{R_0}$

On multiplie le deuxième membre de l'équation (26), numérateur et dénominateur par \sqrt{j} , et l'on pose:

$$J_0(q\sqrt{j}) = u_0 + jv_0$$

$$H_0^1(q\sqrt{j}) = h_0 + jk_0$$

$$\sqrt{j} \cdot J_1(q\sqrt{j}) = u_1 + jv_1$$

$$\sqrt{j} \cdot H_1^1(p\sqrt{j}) = h_1 + jk_1$$

$$C = a + jb$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (26), donne:

$$\frac{X}{R_0} + j \frac{R}{R_0} = \frac{p(1-\beta^2)}{2\beta} \cdot \frac{u_0 - ah_0 + bk_0 + j(v_0 - bh_0 - ak_0)}{u_1 - ah_1 + bk_1 + j(v_1 - bh_1 - ak_1)} \quad (27)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on a:

$$\frac{X}{R_0} = \frac{p(1-\beta^2)}{2\beta} \cdot \frac{(u_0 - ah_0 + bk_0)(u_1 - ah_1 + bk_1) - (v_0 - bh_0 - ak_0)(v_1 - bh_1 - ak_1)}{(u_1 - ah_1 + bk_1)^2 + (v_1 - bh_1 - ak_1)^2}$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{p(1-\beta^2)}{2\beta} \cdot \frac{(v_0 - bh_0 - ak_0)(u_1 - ah_1 + bk_1) - (u_0 - ah_0 + bk_0)(v_1 - bh_1 - ak_1)}{(u_1 - ah_1 + bk_1)^2 + (v_1 - bh_1 - ak_1)^2}$$

$\frac{X}{R_0}$ et $\frac{R}{R_0}$, ont été calculées en fonction de p et q, c. à. d. en fonction de la hauteur virtuelle de l'encoche, β étant un paramètre qui varie de 0,1 à 1, domaine où commence à apparaître l'effet de peau.

Le rapport $\frac{R}{R_0}$ est représenté graphiquement en fonction de h' sur la figure 7. Tandis que le rapport $\frac{X}{R_0}$ est représenté sur la figure 6, où l'on peut voir la définition mathématique du coefficient de perméance.

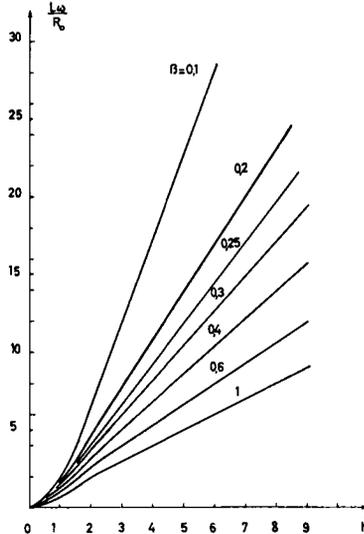


Fig. 6 λ = coefficient de perméance

$$L\omega = \lambda\omega\mu_0 : \mu_0 = 4\pi 10^{-9} \frac{VS}{Acm}$$

L = inductance de l'encoche

R_0 = résistance au courant continu

h' = hauteur de l'encoche

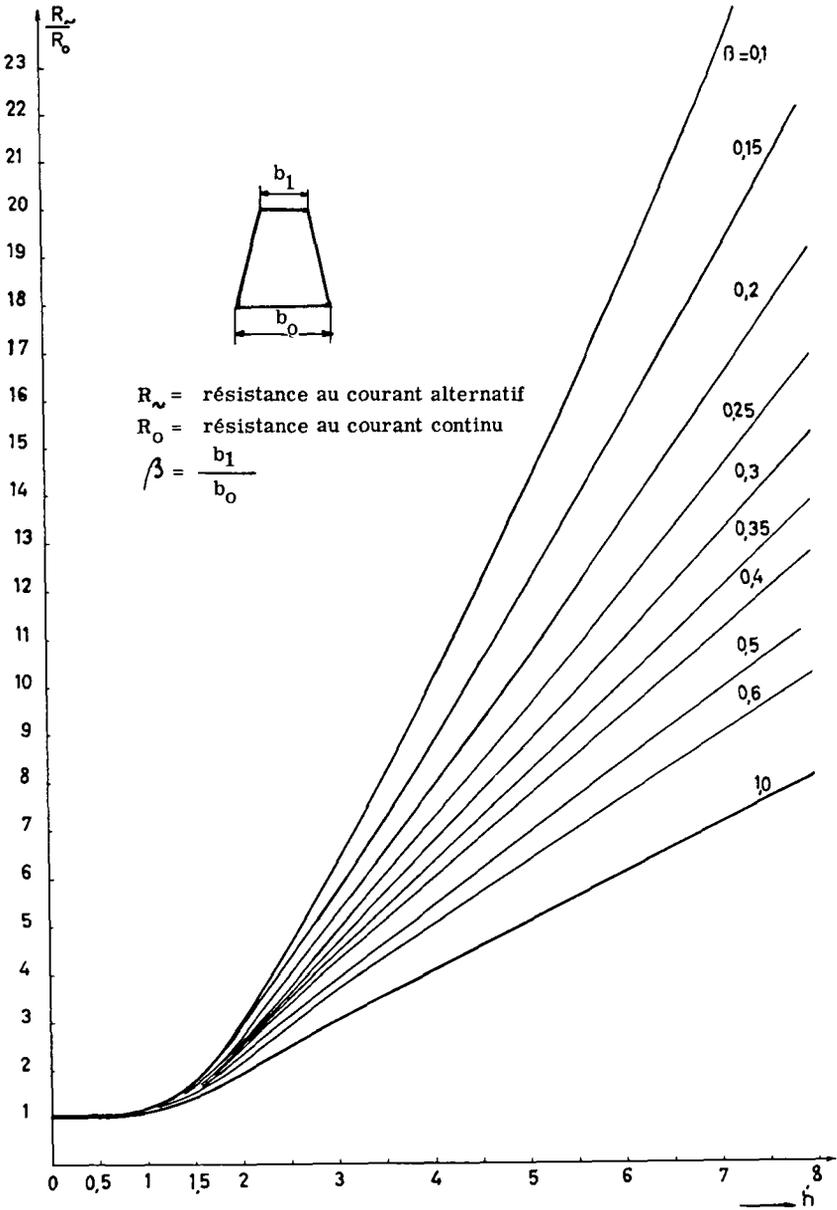


Fig. 7

CHAPITRE III

Inductance et perméance d'une encoche ronde avec isthme

I. Cas où le conducteur logé dans l'encoche est parcouru par un courant continu

Soit en un point de la section d'encoche, figure 8, H_φ et H_ρ les composantes tangentielle et radiale du champ magnétique H au point considéré.

Pour résoudre ce problème, on émet l'hypothèse suivante:

1. La perméabilité magnétique du fer est infinie.
2. $H_\varphi = 0$, pour $\varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1$ et $\rho = a$
3. H_φ est constant dans l'entrefer.

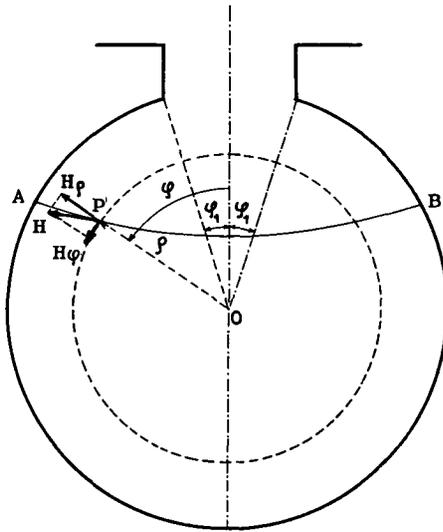


Fig. 8 Encoche circulaire

$2\varphi_1$ = angle d'ouverture

ρ = rayon polaire

H_φ = composante tangentielle du champ magnétique

H_ρ = composante radiale du champ magnétique

AB = une ligne du champ magnétique

Théorème d'Ampère

$$\oint \vec{H}_\varphi \cdot \vec{ds} = I = H_{\varphi_1} \cdot 2\varphi_1 a, \quad -\varphi_1 < \varphi < \varphi_1 \text{ et } \varphi = a$$

D'où la valeur du champ dans l'entrefer:

$$H_{\varphi_1} = \frac{I}{2\varphi_1 a}, \quad I = \text{courant dans l'encoche.}$$

Développant en série de Fourier la composante H_φ conformément à l'hypothèse énoncée plus haut (voir figure 9), on a:

$$H_\varphi = b_0 + \sum_1^\infty [b_m \cos(m\varphi) + c_m \sin(m\varphi)]$$

Comme la fonction H_φ est paire, il ne reste dans le développement de Fourier que les termes en cosinus.

$$H_\varphi = b_0 + \sum_1^\infty (b_m \cos m\varphi) \tag{28}$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par les intégrales:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} H_{\varphi_1} \cdot d\varphi = \frac{I}{2\pi a}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1} H_{\varphi_1} \cos m\varphi \cdot d\varphi = \frac{2}{\pi} H_{\varphi_1} \frac{\sin m\varphi_1}{m}$$

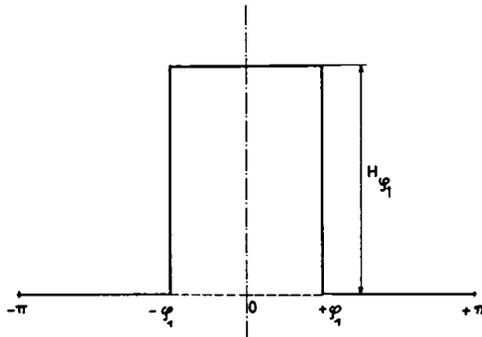


Fig. 9 Configuration de la composante tangentielle H du champ dans l'isthme de l'encoche

- H_{φ_1} = valeur de la composante tangentielle du champ dans l'isthme
- $2\varphi_1$ = ouverture d'isthme

En remplaçant b_0 et b_m par leurs valeurs respectives dans l'équation (28), on a :

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi a} + \frac{I}{\pi\varphi_1 \cdot a} \sum_1^{\infty} \frac{\sin m\varphi_1}{m} \cos m\varphi \quad (29)$$

Si i désigne la densité de courant, on a aussi :

$$H_\varphi = \frac{ia}{2} + ia \sum_1^{\infty} \frac{\sin m\varphi_1}{m\varphi_1} \cos m\varphi, \text{ avec } i = \frac{I}{\pi a^2} \quad (29) \text{ bis}$$

Loi de Maxwell :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} &= \vec{i} \\ \overrightarrow{\text{div}} \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

En coordonnées polaires on peut écrire :

$$\frac{H_\varphi}{\rho} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \varphi} = i, \text{ pour le rotationnel de } \vec{H} \quad (30)$$

$$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \rho} = 0, \text{ divergence de } \vec{H} \quad (31)$$

Dérivant l'équation (30) respectivement par rapport à φ et ρ , on a :

$$\frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{\partial^2 H_0}{\rho \partial \varphi^2} = 0 \quad (30) \text{ bis}$$

$$- \frac{H_\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 H_\rho}{\rho \partial \varphi \partial \rho} = 0 \quad (30) \text{ bis}^+$$

Dérivant l'équation (31) par rapport à φ et ρ , on a :

$$\frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial^2 H_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (31) \text{ bis}$$

$$- \frac{H_\rho}{\rho^2} + \frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2 H_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \varphi \partial \rho \cdot \rho} - \frac{\partial H_\varphi}{\rho^2 \partial \varphi} = 0 \quad (31) \text{ bis}^+$$

De l'équation (31)bis, tirant

$$\frac{\partial^2 H_\rho}{\rho \partial \rho \partial \varphi} = - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) \text{ et remplaçant dans l'équation}$$

(30)bis⁺,

on obtient :

$$- \frac{1}{\rho^2} H_\varphi + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 H_\rho}{\partial \varphi} = 0 \quad (32)$$

De l'équation (30), on tire $\frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \varphi}$ et on remplace dans l'équation (32).

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{\rho} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{H_\varphi}{\rho^2} - \frac{2i}{\rho} = 0 \quad (33)$$

Telle est l'équation différentielle qui permet de déterminer la composante H_φ en un point quelconque de la section d'encoche.

Une solution finie au point $\varphi = 0$ de cette équation différentielle est:

$$H_\varphi = \frac{i\rho}{2} - \sum_1^{\infty} \varepsilon_m m \varphi^{m-1} \cdot \cos(m\varphi) \quad (34)$$

En comparant la solution (34) avec l'équation (29)bis, on détermine ainsi la constante ε_m . En effet, on obtient:

$$\varepsilon_m = - \frac{iasin(m\varphi_1)}{m^2 \varphi_1 a^{m-1}}$$

D'où la valeur du champ H_φ :

$$H_\varphi = \frac{i\rho}{2} + ia \sum_1^{\infty} \frac{\sin(m\varphi_1)}{m\varphi_1} \cdot \left[\frac{\varphi}{a} \right]^{m-1} \cdot \cos(m\varphi) \quad (35)$$

Reste à déterminer la composante radiale H_ρ . Pour cela on écrit la relation qui existe entre la fonction potentielle V et les composantes du champ magnétique.

$$H_\varphi = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad H_\rho = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}$$

D'où: $dV = -H_\varphi \mu_0 d\varphi$ et par intégration on a:

$$V = - \frac{\mu_0 \rho^2 i}{4} - \mu_0 a^2 i \sum_1^{\infty} \frac{\sin m \varphi_1}{m^2 \varphi_1} \left[\frac{\rho}{a} \right]^m \cdot \cos m \varphi$$

Ayant déterminé le potentiel V dans la section d'encoche, on peut à présent calculer la composante radiale H_ρ :

$$H_\rho = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}$$

D'où:

$$H_\rho = ia \sum_1^{\infty} \frac{\sin m \varphi_1}{m \varphi_1} \left[\frac{\rho}{a} \right]^{m-1} \cdot \sin(m\varphi) \quad (36)$$

Coefficient de perméance λ_p de l'encoche

Le coefficient de perméance est donné par l'intégrale:

$$\lambda_p = \int \frac{H^2}{I^2} d\tau$$

$d\tau$ étant l'élément de volume $d\tau = \rho d\varphi d\varphi$ pour une épaisseur égale à l'unité de section d'encoche.

On sait d'autre part que:

$$H^2 = H_\rho^2 + H_\varphi^2$$

Intégrant de 0 à 2π pour φ , et de 0 à a pour ρ , et remarquant que les fonctions H_ρ^2 et H_φ^2 sont orthogonales, c. à. d. que tous les produits en cosinus et sinus disparaissent, on a:

$$\lambda_p = \int_0^{2\pi} \int_0^a (H_\rho^2 + H_\varphi^2) \rho d\rho d\varphi$$

Or:
$$\int_0^{2\pi} \int_0^a H_\rho^2 \rho d\rho d\varphi = i^2 a^4 \pi \left[1/8 + 1/2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\sin m \varphi_1}{m \varphi_1} \right)^2 \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a H_\varphi^2 \rho d\rho d\varphi = i^2 a^4 \frac{\pi}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\sin m \varphi_1}{m \varphi_1} \right)^2$$

D'où le coefficient de perméance:

$$\lambda_p = \frac{1}{\pi} \left[1/8 + \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 m \varphi_1}{m^3 \varphi_1^2} \right], \text{ on peut démontrer que:}$$

$$\lim_{\varphi_1 \rightarrow 0} \zeta(\varphi_1) = 3/2 \quad \text{cas où l'encoche est fermée.}$$

Le calcul de $\zeta(\varphi_1)$, a été effectué par un développement en série, la courbe figure 10 en donne l'allure.

Plusieurs auteurs ont calculé λ_p dans l'hypothèse où les lignes magnétiques du champ sont parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe vertical de l'encoche, ce qui donne pour $\lambda_p = 0,55$, une valeur constante indépendante de l'ouverture de l'encoche.

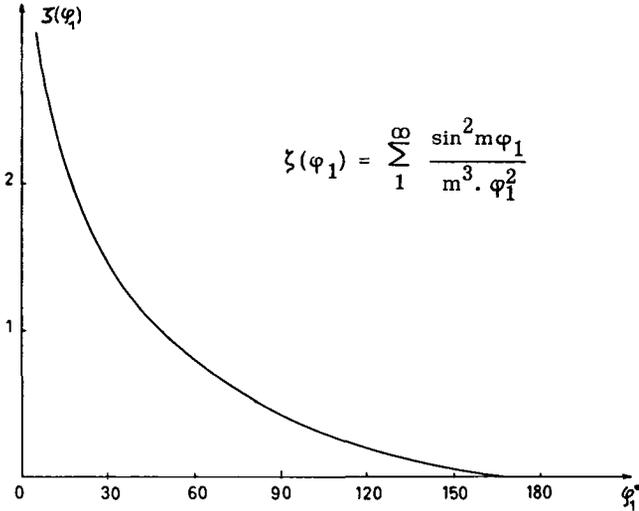


Fig. 10 Encoche circulaire (cas du courant continu)

II. Cas où le conducteur est parcouru par un courant alternatif

L'hypothèse énoncée dans le paragraphe I de ce chapitre reste valable. On considère de plus que les champs électriques, magnétiques, ainsi que la densité de courant i , sont des fonctions sinusoïdales du temps.

La densité de courant i n'est plus ici constante dans toute la section d'encoche, mais elle est variable en fonction des coordonnées polaires ρ et φ .

Loi de Maxwell:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{H} &= \vec{i} = \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{E} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (38)$$

γ et μ_0 sont respectivement la conductibilité électrique du conducteur et le coefficient de perméabilité absolue dans l'air.

Dérivant par rapport au temps l'équation (38) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}\mathbf{H} = \gamma \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{E} = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (39)$$

D'autre part on a :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{E}$$

Prenant ensuite le rotationnel de cette équation :

$$- \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ou :

$$\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ou encore en remplaçant $\vec{E} = \frac{\vec{i}}{\gamma}$, par sa valeur :

$$\Delta \vec{i} = \mu_0 \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} = j \omega \mu_0 \vec{i}$$

D'où :

$$\Delta \vec{i} - j \omega \mu_0 \vec{i} = 0 \tag{40}$$

Posant $\alpha^2 = -j \omega \mu_0 \gamma$, ou $\alpha = \sqrt{-j} \cdot \sqrt{\mu_0 \omega \gamma}$, on a :

$$\Delta \vec{i} + \alpha^2 \vec{i} = 0 \tag{40)bis}$$

Le développement de cette équation différentielle en coordonnées polaires donne :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 i}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 i = 0 \tag{41}$$

Telle est l'équation différentielle dont la solution générale fournit l'image de la distribution du courant dans la section d'encoche.

Pour résoudre l'équation (41), il faut d'abord la séparer en deux autres équations différentielles de la manière suivante :

Soit les deux fonctions $R(\rho)$ et $\psi(\varphi)$ dépendant respectivement de ρ seulement et de φ seulement, puis on pose :

$$i(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \psi(\varphi) \tag{42}$$

Après deux dérivations et substitution dans l'équation (41), on obtient :

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \psi}{\psi d\varphi^2} + \alpha^2 = 0 \tag{43}$$

m étant un nombre entier positif, on sépare cette équation en deux autres :

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \alpha^2 = \frac{m^2}{\rho^2} \quad (43)\text{bis}$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} + m^2 \psi = 0 \quad (43)\text{bis}^+$$

Par le changement de variable $z = \alpha\rho$, l'équation (43)bis s'écrit:

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} + R\left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) = 0 \quad (44)$$

C'est l'équation canonique de Bessel d'ordre m . Sa solution générale devant être finie au point $\rho = 0$, est:

$$R(\rho) = J_m(\rho)$$

J_m s'appelle fonction de Bessel d'ordre m .

La solution de l'équation (43)bis⁺ est:

$$\psi = \sum_0^{\infty} \left[A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi \right]$$

En remplaçant dans l'équation (42), on a:

$$i(\rho, \varphi) = \sum_0^{\infty} \left[(A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi) \cdot J_m(z) \right] \quad (45)$$

Avant de commencer à déterminer les constantes A_m et B_m , il est nécessaire de rappeler les formules du rotationnel en coordonnées polaires.

$$(46) \quad \text{rot}_{\rho}(\vec{H}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \vec{H}_{\varphi}}{\partial z}, \quad \text{proj. du rot. sur le rayon vecteur } \rho$$

$$(47) \quad \text{rot}_{\varphi}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{H}_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \rho}, \quad \text{proj. du rot. suivant la direction } \varphi$$

$$(48) \quad \text{rot}_z(\vec{H}) = \frac{\vec{H}_{\varphi}}{\rho} + \frac{\partial \vec{H}_{\rho}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{H}_{\rho}}{\partial \varphi}, \quad \text{proj. du rot. sur l'axe des } z.$$

La coordonnée z a la direction axiale de l'encoche. H_z , H_{φ} , H_{ρ} sont les projections du champ magnétique sur les directions (z, φ, ρ) .

On peut écrire des relations analogues pour le champ électrique. En effet:

$$\text{rot}_{\rho}(\vec{E}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \vec{E}_{\varphi}}{\partial z}$$

$$\text{rot}_{\varphi}(\vec{E}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial \rho}$$

$$\text{rot}_z \vec{E} = \frac{\vec{E}_\varphi}{\rho} + \frac{\partial \vec{E}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{E}_\rho}{\partial \varphi}$$

Dans le cas présent $H_z = 0$ car le champ H est fonction seulement de ρ et de φ . Comme on étudie le courant dans une section $z = \text{const.}$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, alors les équations (46), (47), (48) deviennent:

$$\begin{aligned} \text{rot}_\rho \vec{H} &= 0 \\ \text{rot}_\varphi \vec{H} &= 0 \\ \text{rot}_z \vec{H} &= \frac{\vec{H}_\varphi}{\rho} + \frac{\partial \vec{H}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{H}_\rho}{\partial \varphi} = i_z = \vec{i} \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} \text{rot}_\rho \vec{E} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial \varphi} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_0 \vec{H}_\varphi \\ \text{rot}_\varphi \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial \rho} = -j\omega\mu_0 \vec{H}_\rho \end{aligned}$$

Et d'après la loi d'Ohm, on a:

$$\frac{\partial i}{\partial \rho} = j\omega\mu_0 \gamma \cdot H_\varphi$$

D'où:

$$H_\varphi = -\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{i}{d\rho} \right] \quad (49)$$

On avait supposé au chapitre III, paragraphe I, que la composante du champ H_φ était nulle sur toute la périphérie de l'encoche, sauf dans l'entrefer où elle a une valeur finie égale à $H_{\varphi 1}$. Cette hypothèse reste valable dans le cas où le courant est alternatif. On avait de même, par un développement de Fourier, calculé H_φ pour $\rho = a$ (égalité (29)bis, page 29).

On a donc:

$$\begin{aligned} H_{\varphi 1} &= \frac{I_{\text{eff}}}{2a\varphi_1}, \text{ pour } \varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1 \\ H_\varphi &= \frac{I_{\text{eff}}}{2\pi a} + \frac{I_{\text{eff}}}{\pi\varphi_1 a} \sum_1^{\infty} \frac{\sin m\varphi_1}{m} \cos m\varphi \end{aligned} \quad (50)$$

Tel est le développement en série de Fourier de la composante tangentielle H_φ et cela pour $\rho = a$ et $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$.

De l'équation (49) on voit que la dérivée de i par rapport à ρ doit être, comme H_φ une fonction paire, cela amènerait à supprimer de l'équation (45) le terme en sinus.

Alors on a:

$$i(\rho, \varphi) = \sum_0^{\infty} B_m \cos m\varphi \cdot J_m(z) \quad (51)$$

On dérive $i(\rho, \varphi)$ par rapport à ρ et on remplace dans l'équation (49) on a:

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial i}{\partial \varphi} = -\left[\sum_0^{\infty} B_m \cos m\varphi \cdot J'_m(z) \cdot \alpha \right] \frac{1}{\alpha^2}$$

Ou:

$$H_{\varphi} = -\frac{B_0}{\alpha} \cdot J'(\alpha a) - \frac{1}{\alpha} \sum_1^{\infty} B_m \cos m\varphi \cdot J'(\alpha a)$$

et cela pour $\rho = a$, $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$ c. à. d. H_{φ} ainsi calculé n'est autre que la valeur de la composante tangentielle du champ dans l'entrefer.

Pour déterminer donc les constantes B_0 et B_m , il suffit de comparer l'égalité précédente avec l'égalité (50).

On obtient:

$$B_m = -\frac{\alpha I_{\text{eff}}}{\pi a \varphi_1} \frac{\sin m\varphi_1}{m} \cdot \frac{1}{J'_m(\alpha a)}$$

$$B_0 = -\frac{\alpha I_{\text{eff}}}{2\pi a} \frac{1}{J'_m(\alpha a)}$$

Alors en remplaçant B_0 et B_m par leurs valeurs dans l'équation (51), on a finalement comme expression de la densité de courant:

$$i(\rho, \varphi) = -\frac{\alpha I_{\text{eff}}}{\pi a} \left[\frac{1}{2} \frac{J_0(\rho \alpha)}{J'_0(\alpha \rho)} + \sum_1^{\infty} \frac{\sin m\varphi_1}{m\varphi_1} \cos m\varphi \frac{J_m(\alpha \rho)}{J'_m(\alpha \rho)} \right] \quad (52)$$

C'est la valeur de la densité de courant en un point quelconque de la section, de coordonnées ρ et φ . Ainsi $i(\rho, \varphi)$ s'exprime par des fonctions de Bessel d'ordre zéro et d'ordre m , ainsi que par leurs dérivées respectives.

Dans les différentes transformations des formules ultérieures et celles déjà calculées, on a employé la relation de récurrence suivante:

$$J'_m(z) = -\frac{m}{z} J_m(z) + J_{m-1}(z)$$

Pour $m = 1$, on a:

$$J'_1(z) = -\frac{J_1(z)}{z} + J_0(z)$$

Il faut maintenant montrer que la somme $\sum_1^{\infty} \frac{\sin m\varphi_1}{m\varphi_1}$ est convergente, en effet elle est de même forme que l'intégrale de Dirichlet. P. G.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(nt) dt}{nt}$$

qui est elle-même convergente, ainsi la somme mentionnée ci-dessus l'est aussi.

On avait précédemment posé:

$$\alpha = \sqrt{-j} \sqrt{\mu_0 \omega \gamma} \quad , \quad \text{où } \alpha = |\alpha| j^{3/2}$$

$|\alpha| = \sqrt{\mu_0 \omega \gamma}$ est la valeur absolue de la quantité imaginaire α .

On pose dorénavant $x = |\alpha| a$.

Impédance Z du conducteur par unité de longueur

$$Z = R_{\sim} + j\omega L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \quad , \quad \text{pour } \underline{\varphi = a \text{ et } \varphi = 0}$$

Or:
$$U_{\text{eff}} = \frac{i(\varphi, \varphi)}{\gamma} \quad \text{pour } \varphi = a \text{ et } \varphi = 0$$

R_{\sim} et L sont respectivement la résistance au courant alternatif et l'inductivité du conducteur par unité de longueur.

Pour $\varphi = a$ et $\varphi = 0$, l'équation (52) s'écrit:

$$i(\varphi, \varphi)_{\substack{\varphi=a \\ \varphi=0}} = - \frac{\alpha I_{\text{eff}}}{\pi a} \left[\frac{1}{2} \frac{J_0(xj^{3/2})}{J'_0(xj^{3/2})} + \sum_1^{\infty} \frac{\sin m \varphi_1}{m \varphi_1} \frac{J_m(xj^{3/2})}{J'_m(xj^{3/2})} \right] \quad (53)$$

Désignant par R_0 la résistance au courant continu, on a:

$$R_0 = \frac{1}{\gamma \pi a^2}$$

On calcule le rapport: $\frac{Z}{R_0}$:

$$\frac{Z}{R_0} = j^{3/2} \cdot x \left[\frac{1}{2} \frac{J_0(xj^{3/2})}{J_1(xj^{3/2})} - \sum_1^{\infty} \frac{\sin m \varphi_1}{m \varphi_1} \frac{J_m(xj^{3/2})}{J'_m(xj^{3/2})} \right]$$

1. Cas où l'encoche est fermée, $\varphi_1 = 0$

On fait le calcul pour $m = 1$.

En remarquant que pour $\varphi_1 = 0$, $\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1} = 1$, on a:

$$\frac{Z}{R_0} = j^{3/2} \cdot \frac{x}{2} \left[\frac{J_0(xj^{3/2})}{J_1(xj^{3/2})} - 2 \frac{J_1(xj^{3/2})}{J'_1(xj^{3/2})} \right] \quad (54)$$

En employant les relations de récurrence page 37, on a finalement:

$$\frac{Z}{R_0} = j^{3/2} \cdot x \left[\frac{J_0(xj^{3/2})}{2J_1(xj^{3/2})} - (-j) \cdot \frac{x^2 J_1(xj^{3/2})}{xj^{3/2} \cdot J_0(xj^{3/2}) - j^{3/2} J_1(xj^{3/2})} \right] \quad (55)$$

En désignant respectivement par M et N le premier et le deuxième terme du deuxième membre de la formule (55):

$$M = -\frac{jx}{2} \cdot \frac{J_0(xj^{3/2})}{\sqrt{-j} J_1(xj^{3/2})}$$

Soit M* la quantité conjuguée de M, on a:

$$M^* = \frac{jx}{2} \cdot \frac{J_0(x\sqrt{j})}{\sqrt{j} J_1(x\sqrt{j})} = s + jr$$

On pose de même:

$$J_0 = u_0 + jv_0$$

$$J_1 = u_1 + jv_1$$

La substitution de J_0 et J_1 par leur valeur dans M^* donne:

$$s = \frac{x}{2} \cdot \frac{v_0 u_1 - u_0 v_1}{u_1^2 + v_1^2}, \quad r = -\frac{x}{2} \cdot \frac{v_0 v_1 + u_0 u_1}{u_1^2 + v_1^2}$$

De même N^* étant la quantité conjuguée de N, on a:

$$N^* = u + jv = jx^2 \frac{J_1(xj^{3/2})}{xj^{3/2} J_0(xj^{3/2}) - j^{3/2} J_1(xj^{3/2})}$$

Où:

$$u = -x^3 \frac{u_1 u_0 + v_1 v_0}{(xv_0 + u_1)^2 + (xv_0 - v_1)^2}$$

$$v = -x^2 \frac{(u_1 v_0 - v_1 u_0)x + u_1^2 + v_1^2}{(xv_0 + u_1)^2 + (xv_0 - v_1)^2}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire:

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{R_{\sim}}{R_0} + j \frac{L\omega}{R_0} = s + u + j(r + v)$$

D'où: $\frac{R_{\sim}}{R_0} = s + u, \quad \frac{L\omega}{R_0} = r + v$

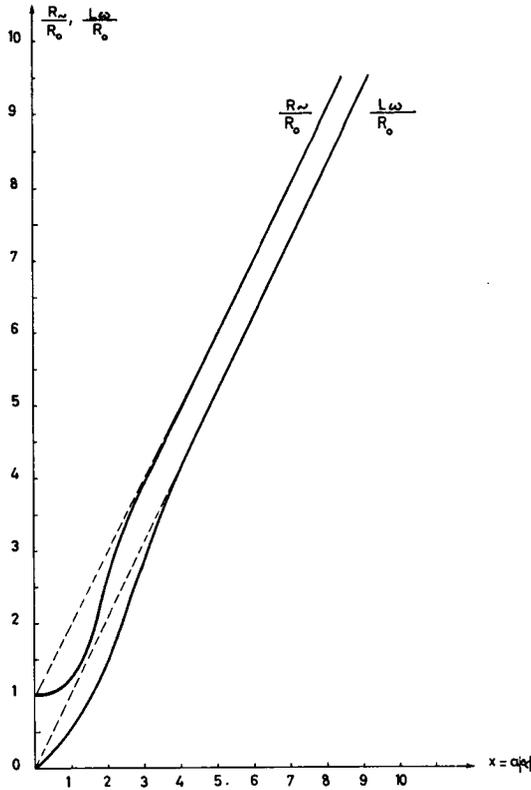


Fig. 11 Encoche circulaire, ouverture d'isthme $40^\circ = 2\varphi_1$

Les valeurs de $\frac{R_{\sim}}{R_0}$ et $\frac{L_{\sim}}{R_0}$ sont données en fonction de x sur la figure 11, pour une ouverture d'isthme égale à 40° (cette encoche est celle de la machine synchrone en question dans ce travail), et sur la figure 12 pour une encoche circulaire fermée quelconque.

Le calcul a été fait pour les ouvertures d'isthme suivantes:
 $\varphi_1 = 10^\circ, 15^\circ$ et 20° et cela en partant de la formule relative à l'encoche fermée, en multipliant la partie réelle et la partie imaginaire de N^* par $\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1}$. Il est commode de se servir pour cela des tables spéciales donnant $\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1}$ avec 3 décimales exactes.

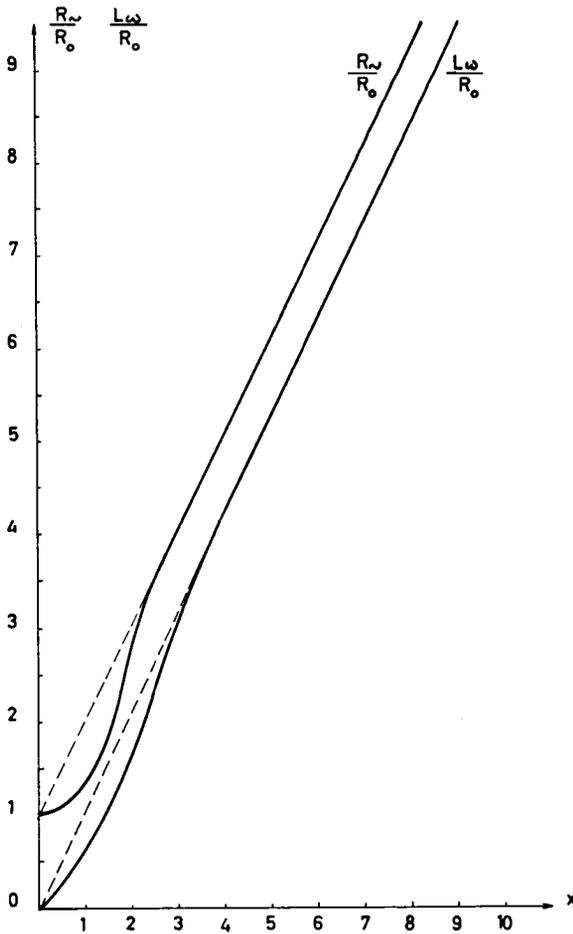


Fig. 12 Encoche fermée circulaire

R_ω = résistance au courant alternatif

R_0 = résistance au courant continu

L = inductance de l'encoche

$x = a|\alpha| = a\sqrt{\mu_0\omega\gamma}$

Les calculs numériques ont été fait à l'aide d'une machine à calculer donnant 4 décimales exactes.

Encoche fermée $\varphi_1 = 0$

Tableau II

x	u_0	v_0	u_1	v_1	u	v	s	r	s + u	r + v
1	0,9844	-0,2496	0,0624	0,4974	0,2304	0,932	1,0208	0,0125	1,2512	0,9445
2	0,7517	-0,9723	0,04931	0,9170	1,6904	2,0336	1,0781	0,4805	2,7685	2,5241
3	-0,2214	-1,9376	1,570	0,8805	2,7197	+2,3401	1,3180	0,6186	4,0377	2,9587
4	-2,563	-2,2927	3,135	-0,491	3,3573	2,8809	1,6775	1,379	5,0348	4,2599
5	-6,230	-0,1160	3,845	-4,354	4,022	3,573	2,0488	1,7374	6,0648	5,3104
6	-8,858	7,335	0,293	-10,846	4,7306	4,2757	2,3985	2,0935	7,1241	6,3692
7	-3,633	21,239	-12,765	-16,0415	5,422	4,9754	2,7430	2,4511	8,125	7,4265
8	20,974	35,02	-38,31	-7,660	6,146	5,678	3,0948	2,8087	9,2408	8,4867
9	73,94	24,71	-65,60	36,30	6,850	6,384	3,4464	3,1650	10,2964	9,549

Encoche circulaire $\varphi_1 = 20^\circ$

Tableau III

x	u_0	v_0	u_1	v_1	u	v	s	r	s + u	r + v
1	0,9844	-0,2496	0,0624	0,4974	0,2257	0,9130	1,0208	0,0125	1,2465	0,9255
2	0,7517	-0,9723	0,0493	0,9170	1,6560	1,9923	1,0781	0,4805	2,7341	2,4728
3	-0,2214	-1,9376	1,576	0,8805	2,6644	2,2925	1,318	0,6186	3,9824	2,9111
4	-2,563	-2,2927	3,135	-0,491	3,2891	2,8224	1,6775	1,379	4,9666	4,2014
5	-6,230	-0,1160	3,845	-4,354	3,9403	3,5004	2,0428	1,7374	3,9831	5,2378
6	-8,858	7,335	0,293	-10,846	4,6345	4,1889	2,3935	2,0935	7,0280	6,2816
7	-3,633	21,239	-12,715	-16,041	5,3119	4,8743	2,7430	2,4511	8,0549	7,3254
8	20,974	35,02	-38,31	-7,660	6,0212	5,5627	3,0948	2,8087	9,1160	8,3714
9	73,94	24,71	-65,60	36,30	6,7109	6,1956	3,4464	3,1650	10,1573	9,3616

Encoche ronde avec isthme

Tableau IV

x	$\varphi_1 = 10^\circ$		$\varphi_1 = 15^\circ$	
	u	v	u	v
1	0,2299	0,9272	0,2278	0,9215
2	1,6822	2,0238	1,6714	2,0108
3	2,7066	2,3288	2,6892	2,3138
4	3,3411	2,8670	3,3196	2,8486
5	4,0020	3,5550	3,9769	3,5329
6	4,7078	4,2551	4,6776	4,2278
7	5,3959	4,9515	5,3612	4,9196
8	6,1164	5,6507	6,0771	5,6144
9	6,8171	6,2936	6,7732	6,2531

III. Inductance d'une encoche ronde, avec isthme, parcourue par un courant alternatif, les lignes du champ magnétique sont rectilignes et perpendiculaires à l'axe de l'encoche

Loi de Maxwell:

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{i} \quad (56)$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (57)$$

Si on projette l'équation (57) sur les axes de coordonnées, on obtient après avoir remarqué que seule la composante E_z est différente de zéro:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = -j\omega\mu_0 H_x$$

Dorénavant on écrira E, H et i sans indice. Le champ H est seulement fonction de y.

On a donc en tenant compte de la loi d'Ohm:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial i}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H \quad (58)$$

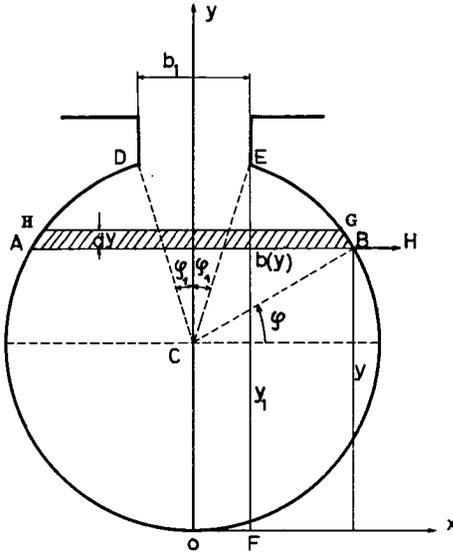


Fig. 13 Encoche circulaire

(les lignes magnétiques du champ sont parallèles à l'axe des x)

ABGH = élément de surface de l'encoche

$b(y)$ = largeur de l'élément de surface

On pose comme précédemment $\alpha^2 = -j\omega\mu_0\sigma$, et $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma^2}{2}}$ partie réelle de α .

En intégrant suivant l'élément de surface AB, d'épaisseur dy , figure 13, on a:

$$\frac{db(y)}{dy} \cdot H + \frac{dH}{dy} b(y) = -ib(y)$$

La substitution de H par sa valeur tirée de l'équation (58), donne l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 i}{dy^2} + \frac{1}{b(y)} \frac{db(y)}{dy} \frac{di}{dy} + \alpha^2 i = 0 \quad (59)$$

D'après la figure 13, on a:

$$b(y) = 2 \sqrt{2ya - y^2}, \quad \frac{b'(y)}{b(y)} = \frac{a-y}{2ya-y^2}$$

On remplace dans l'équation différentielle qui devient:

$$\frac{d^2 i}{dy^2} + \frac{a-y}{2ay-y^2} \frac{di}{dy} + \alpha^2 i = 0 \quad (60)$$

Cette équation différentielle présente une singularité au point $y = 0$, pour faciliter son intégration, on la transforme en polaire.

En effet:

$$y = a(\sin\varphi + 1)$$

Conditions aux limites:

Pour $y = 0$, on a $H = 0$, cela donne $\sin\varphi = -1$, ou $\varphi = -\pi/2$

Pour $y = y_1 = a(\cos\varphi_1 + 1)$, on a:

$$H = \frac{I_{\text{eff}}}{b_1}$$

L'équation différentielle devient:

$$\frac{d^2 i}{d\varphi^2} - \text{tg}\varphi \frac{di}{d\varphi} + a^2 \alpha^2 \cos^2 \varphi \cdot i = 0 \quad (61)$$

Pour intégrer cette équation, on effectue le changement de variable suivant:

$$\frac{di}{d\varphi} = \frac{di}{dz} \frac{dz}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2 i}{d\varphi^2} = \frac{d^2 i}{dz^2} \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \frac{di}{dz} \frac{d^2 z}{d\varphi^2}$$

La substitution dans l'équation différentielle (61), et l'annulation du coefficient de $\frac{di}{dz}$ donne:

$$1. \quad \frac{d^2 i}{d\varphi^2} = \text{tg}\varphi \frac{dz}{d\varphi}$$

$$2. \quad \frac{d^2 i}{dz^2} + a^2 \alpha^2 i = 0$$

Après intégration de (1), on a:

$$z = \int e^{\int \text{tg}\varphi d\varphi} \cdot d\varphi = \int e^{\log(\cos\varphi)} d\varphi = \sin\varphi$$

Donc la variable intermédiaire qui a permis l'intégration est $z = \sin\varphi$.

L'intégration de (2) donne comme solution générale:

$$i = A_1 \cos(\alpha z) + A_2 \sin(\alpha z)$$

$$= A_1 \cos(\alpha a \sin \varphi) + A_2 \sin(\alpha a \sin \varphi)$$

Pour déterminer les constantes A_1 et A_2 , on se sert de la relation suivante:

$$H = \frac{1}{\alpha^2} \frac{di}{dy} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{di}{d\varphi} \frac{1}{a \cos \varphi}$$

Or:
$$\frac{di}{dz} = \frac{di}{\cos \varphi d\varphi} = H a \alpha^2$$

D'autre part on a:

$$\frac{di}{dz} = -A_1 a \alpha \cdot \sin(a \alpha \sin \varphi) + A_2 a \alpha \cos(a \alpha \sin \varphi)$$

D'où:
$$H = \frac{1}{\alpha} \left[A_2 \cos(a \alpha \sin \varphi) - A_1 \sin(a \alpha \sin \varphi) \right]$$

On a vu que pour $H = 0$, $\sin \varphi = -1 = z$

D'où:
$$A_2 = -A_1 \operatorname{tg}(a \alpha)$$

Et pour $\varphi = \pi/2 - \varphi_1$,
$$H = \frac{I_{\text{eff}}}{b_1}$$

D'où:
$$H = \frac{1}{\alpha} \left[A_2 \cos(a \alpha \cos \varphi_1) - A_1 \sin(a \alpha \cos \varphi_1) \right]$$

Après avoir remplacé A_2 par sa valeur, on a:

$$A_1 = - \frac{\alpha I_{\text{eff}}}{b_1} \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha a) \cos(\alpha a \cos \varphi_1) + \sin(\alpha a \cos \varphi_1)}$$

$$A_2 = \frac{\alpha I_{\text{eff}}}{b_1} \frac{\operatorname{tg}(\alpha a)}{\operatorname{tg}(\alpha a) \cos(\alpha a \cos \varphi_1) + \sin(\alpha a \cos \varphi_1)}$$

La substitution de ces constantes dans l'équation de i donne après transformation:

$$i = - \frac{\alpha I_{\text{eff}}}{b_1} \frac{\cos[\alpha a(1 + \sin \varphi)]}{\sin[\alpha a(1 + \cos \varphi_1)]} = - \frac{\alpha I_{\text{eff}}}{b_1} \frac{\cos(\alpha y)}{\cos(\alpha y_1)}$$

On remplace $\alpha = (1-j)\beta$, par sa valeur, on a:

$$i = - \frac{(1-j)\beta}{b_1} I_{\text{eff}} \frac{\cos (1-j)\beta y}{\sin (1-j)\beta y_1}$$

En multipliant i par sa conjuguée, on a en remarquant que:

$$\operatorname{ch}x = \cos jx \quad , \quad \sin jx = j \cdot \operatorname{sh}x$$

$$i^2 = \frac{2I_{\text{eff}}^2}{b_1^2} \frac{\cos [(1-j)\beta y] \cdot \cos [(1+j)\beta y]}{\sin [(1-j)\beta y_1] \cdot \sin [(1+j)\beta y_1]}$$

ou en prenant la racine carrée des deux membres:

$$|i| = \beta \sqrt{2} \frac{I_{\text{eff}}}{b_1} \sqrt{\frac{\text{ch}2\beta y + \cos 2\beta y}{\text{ch}2\beta y_1 - \cos 2\beta y_1}}$$

On voit que la densité de courant i est donnée par la même formule que pour l'encoche rectangulaire qui a pour hauteur et pour entrefer, respectivement égales au diamètre et à l'entrefer de l'encoche ronde. Cela n'est vrai que dans l'hypothèse où les lignes du champ magnétique sont considérées comme rectilignes et perpendiculaires à l'axe de l'encoche.

CHAPITRE IV

Réactances d'une machine synchrone à pôles saillants

I. Réactances transitoires et subtransitoires

Pour simplifier le calcul on considère, une machine synchrone triphasée dont le rotor est bipolaire. On est en présence de quatre circuits électriques, figure 14.

1. L'enroulement du stator
2. L'enroulement d'excitation
3. L'enroulement amortisseur
4. Un entroulement fictif représenté par les circuits des courants de Foucault créés dans les épanouissements polaires.

On ne tient pas compte de ces courants dans le présent calcul.

Quand la machine possède une charge asymétrique, ou qu'elle est en état de court-circuit brusque, des courants sont engendrés dans l'entroulement amortisseur.

On se propose par la suite de calculer ces courants, ainsi que les réactances de la machine dans le cas de court-circuit brusque, tandis que l'amortisseur sera calculé pour des charges asymétriques de la machine.

On écrira tout d'abord les équations des flux des phases a, b, c, figure 14.

$$\psi_a = L_{aa}i_a + L_{ab}i_b + L_{ac}i_c + L_{ae}i_e + L_{aDd}i_{Dd} \quad (62)$$

$$\psi_b = L_{ab}i_a + L_{bb}i_b + L_{bc}i_c + L_{be}i_e + L_{bDd}i_{Dd} \quad (63)$$

$$\psi_c = L_{ca}i_a + L_{cb}i_b + L_{cc}i_c + L_{ce}i_e + L_{cDd}i_{Dd} \quad (64)$$

Flux d'excitation

$$\psi_e = L_{ea}i_a + L_{eb}i_b + L_{ec}i_c + L_{ee}i_e + L_{eDd}i_{Dd} \quad (65)$$

Flux de l'amortisseur direct

$$\psi_{Dd} = L_{aDd}i_a + L_{bDd}i_b + L_{cDd}i_c + L_{De}i_e + L_{DDd}i_{Dd} \quad (66)$$

L_{aa} = inductance propre de la phase a

L_{ab} = inductance mutuelle des phases a et b

L_{ee} = inductance propre de l'enroulement d'excitation

L_{DDd} = inductance directe de l'amortisseur direct

L_{De} = inductance mutuelle entre enroulement d'excitation et amortisseur direct.

En général la désignation par deux indices identiques indique une inductance propre, et par deux indices différents une inductance mutuelle.

Soit δ l'angle que fait l'axe de la roue polaire (rotor) avec l'axe de la phase a par exemple:

$$L_{aa} = L_{\sigma} + L_m \cos(\delta) , \quad L_{\sigma} > L_m \quad (67)$$

L_{σ} = inductance de fuite entre deux phases.

Pour obtenir L_{bb} il suffit de remplacer dans l'équation précédente δ par $\delta - 120^\circ$, on a:

$$L_{bb} = L_{\sigma} + L_m \cos(\delta - 120^\circ) \quad (68)$$

$$L_{cc} = L_{\sigma} + L_m \cos(\delta - 240^\circ) \quad (69)$$

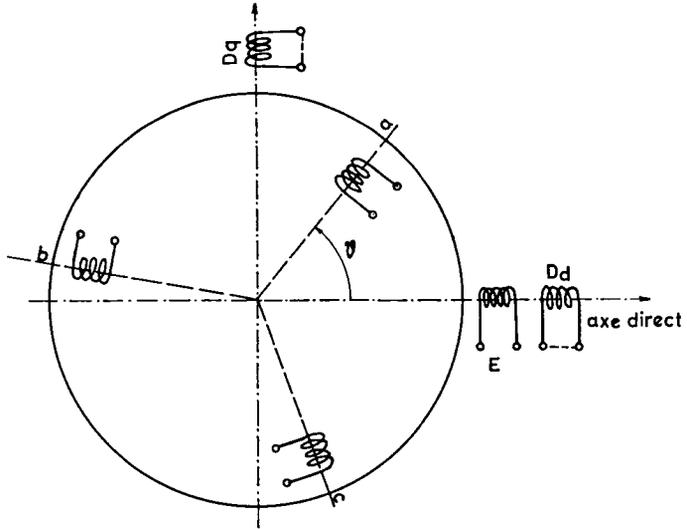


Fig. 14

- (abc) = phases du stator
- Dd, Dq = enroulement d'amortisseur direct et transverse
- E = enroulement d'excitation
- δ = angle entre la phase a et l'axe direct

Pour les inductances mutuelles entre deux phases on a :

$$L_{ab} = -M_{\sigma} + L_m \cos(2\vartheta - 120^0) \quad (70)$$

$$L_{bc} = -M_{\sigma} + L_m \cos 2\vartheta \quad (71)$$

$$L_{ca} = -M_{\sigma} + L_m \cos(2\vartheta + 120^0) \quad (72)$$

Pour la démonstration de ces égalités, consulter l'ouvrage (Synchronous Machines) de Charles Concordia.

Inductance mutuelle entre l'entroulement d'excitation et les phases a, b, c

$$L_{ae} = M_{ae} \cos(\vartheta) \quad (73)$$

$$L_{be} = M_{be} \cos(\vartheta - 120^0) \quad (74)$$

$$L_{ce} = M_{ce} \cos(\vartheta + 120^0) \quad (75)$$

De même pour l'amortisseur

$$L_{aD} = M_{aD} \cos(\vartheta) \quad (76)$$

$$L_{bD} = M_{bD} \cos(\vartheta - 120^0) \quad (77)$$

$$L_{cD} = M_{cD} \cos(\vartheta + 120^0) \quad (78)$$

Equation de Park

$$i_a = i_d \cos(\vartheta) - i_q \sin(\vartheta - 120^0) \quad (79)$$

$$i_b = i_d \cos(\vartheta - 120^0) - i_q \cos(\vartheta - 120^0) \quad (80)$$

$$i_c = i_d (\cos(\vartheta + 120^0) - i_q \sin(\vartheta + 120^0)) \quad (81)$$

i_d et i_q étant des courants fictifs instantanés, suivant l'axe direct et transverse.

D'autre part:

$$i_d = 2/3 [i_a \cos(\vartheta) + i_b \cos(\vartheta - 120^0) + i_c \cos(\vartheta + 120^0)] \quad (82)$$

$$i_q = -2/3 [i_a \sin(\vartheta) + i_b \sin(\vartheta - 120^0) + i_c \sin(\vartheta + 120^0)] \quad (83)$$

et deux équations identiques pour les flux:

$$\psi_d = 2/3 [\psi_a \cos(\vartheta) + \psi_b \cos(\vartheta - 120^0) + \psi_c \cos(\vartheta + 120^0)] \quad (84)$$

$$\psi_q = -2/3 [\psi_a \sin(\vartheta) + \psi_b \sin(\vartheta - 120^0) + \psi_c \sin(\vartheta + 120^0)] \quad (85)$$

On va calculer ψ_d et ψ_q en fonction de i_d et i_q , pour cela il faut remplacer dans les équations (84) et (85) les flux ψ_a , ψ_b et ψ_c par leurs valeurs tirées des équations (62), (63), (64) après avoir remplacé les courants i_a , i_b et i_c par leurs

valeurs tirées des équations (79), (80) et (81).

Après tout calcul on obtient:

$$\psi_d = (L_{\sigma} + M_{\sigma} + 3/2 L_m) i_d + M_{ae} i_e + M_{aDd} i_{Dd} \quad (86)$$

$$\psi_e = 3/2 M_{ae} i_d + L_{ee} i_e + M_{eDd} i_{Dd} \quad (87)$$

$$\psi_{Dd} = 3/2 M_{aDd} i_d + L_{DDd} i_{Dd} + M_{Ded} i_e \quad (88)$$

M_{Ded} est une constante égale à l'inductance mutuelle entre l'enroulement d'excitation et l'amortisseur direct.

Comme $L_d = L_{\sigma} + M_{\sigma} + 3/2 L_m =$ inductance synchrone directe.

Alors:

$$\psi_d = L_d i_d + M_{ae} i_e + M_{aDd} i_{Dd} \quad (89)$$

De même: $L_q = L_{\sigma} + M_{\sigma} - 3/2 L_m$, on a:

$$\psi_q = L_q i_q + M_{aDq} i_{Dq} \quad (90)$$

Flux de l'amortisseur transversal

$$\psi_{Dq} = 3/2 M_{aDq} i_q + L_{DDq} i_{Dq} \quad (91)$$

i_{Dd} et i_{Dq} sont les courants instantanés dans l'amortisseur direct et transversal.

Hypothèse qui a été introduite, conformément au principe des deux axes direct et transversal, qui régit la théorie de la machine synchrone à poles saillants et qui consiste à concevoir l'amortisseur partagé en deux enroulements ou bobines, indépendants, dont chacun est considéré comme une bobine en soi, court-circuitée, et dont les axes coïncident avec les axes direct et transverse comme le montre la figure 14.

Etablissant maintenant un court-circuit brusque aux bornes de la machine en supposant qu'à ce moment l'enroulement d'excitation est ouvert, ce qui permet d'écrire:

$$\psi_e = 0 \quad , \quad \psi_D = 0$$

Où:

$$3/2 M_{ae} i_d + L_{ee} i_e + M_{eDd} i_{Dd} = 0$$

$$3/2 M_{aDd} i_d + L_{DDd} i_{Dd} + M_{eDd} i_e = 0$$

De ces deux équations on tire:

$$i_e = 3/2 \cdot \frac{M_{aDd} M_{eDd} - M_{ae} L_{dDD}}{L_{DDd} L_{ee} - M_{eDd}^2} i_d \quad (92)$$

$$i_{Dd} = -3/2 \frac{M_{aDd}L_{ee} - M_{ae}M_{eDd}}{L_{DDd}L_{ee} - M_{eDd}^2} i_d \quad (93)$$

On remplace dans l'équation (89) i_e et i_{Dd} par leurs valeurs, on a:

$$\psi_d = \left[L_d - 3/2 \frac{M_{ae}^2 L_{DDd} - 2M_{aDd}M_{ae}M_{eDd} + M_{aDd}^2 L_{ee}}{L_{DDd}L_{ee} - M_{eDd}^2} \right] i_d$$

D'où la réactance subtransitoire:

$$x''_d = x_d - 3/2 \frac{X_{ae}^2 X_{DDd} - 2X_{aDd}X_{ae}X_{eDd} + M_{aDd}^2 L_{ee}}{X_{DDd}X_{ee} - X_{eDd}^2} \quad (94)$$

On voit d'après l'expression précédente de x''_d , que pour calculer la réactance subtransitoire, il suffit de calculer les différentes réactances propres et mutuelles figurant dans son second membre.

Réactance subtransitoire transverse

On a:

$$\psi_q = L_q i_q + M_{aDq} i_{Dq} \quad (95)$$

$$\psi_{Dq} = 3/2 M_{aDq} i_q + L_{DDq} i_{Dq} = 0 \quad (96)$$

D'où:

$$i_{Dq} = -3/2 \frac{M_{aDq}}{L_{DDq}} i_q$$

Remplaçant dans l'équation (95) i_{Dq} par sa valeur, on a:

$$\psi_q = (L_q - 3/2 \frac{M_{aDq}^2}{L_{DDq}}) i_q$$

D'où la réactance subtransitoire transverse:

$$x''_q = x_q - 3/2 \frac{X_{aDq}^2}{X_{DDq}} \quad (97)$$

II. Calcul de l'amortisseur

1. Amortisseur direct. Soit φ_n l'angle formé par les barres n-n, en degrés électriques, figure 15.

$$\varphi_n = \frac{\tau_n}{\tau_p} \pi, \quad \varphi_1 = \frac{\tau_1}{\tau_p} \pi$$

φ_1 est l'angle en degrés électriques entre les barres 1-1

Courant dans les barres 1-1

Il s'agit du courant instantané I_{1d} et de sa valeur maximum I_{Dd} qui sont exprimés ici, seulement en fonction de φ_1 .

$$I_{1d} = I_{Dd} \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

Par un développement en série de Fourier, l'amplitude de l'onde fondamentale des ampère-tours dans les barres 1-1 et pour un pôle est:

$$A_{1\max} = \frac{4}{\pi} I_{1d} \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

D'où l'amplitude fondamentale des ampère-tours de toutes les paires de barres par pôle:

$$A_{Dd} = \frac{4}{\pi} \left[I_{1d} \sin \frac{\varphi_1}{2} + I_{2d} \sin \frac{\varphi_2}{2} + \dots + I_{NDd} \sin \frac{\varphi_{NDd}}{2} \right]$$

Remplaçant les courants instantanés par leurs valeurs, on a:

$$A_{Dd} = \frac{4}{\pi} I_{Dd} \left[\sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} + \dots + \sin^2 \frac{\varphi_{NDd}}{2} \right]$$

Or: $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$

D'où: $A_{Dd} = \frac{4}{\pi} \left[1 - \cos \varphi_1 + 1 - \cos \varphi_2 + \dots + 1 - \cos \varphi_{NDd} \right] \frac{I_{Dd}}{2}$

Soit n_b le nombre de barres d'amortisseur par pôle. Deux cas sont à distinguer:

1. n_b est pair, ou $n_b = 2N_{Dd}$

N_{Dd} est le numéro d'ordre de la barre n par exemple.

Soit ξ l'angle entre deux barres consécutives, on a:

$$\varphi_1 = \xi, \quad \varphi_2 = 3\xi, \quad \dots \quad \varphi_n = (2n-1)\xi$$

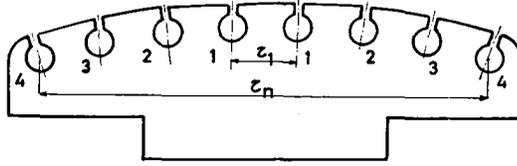


Fig. 15

1, 1 , 2, 2 , ... n, n = numérotation des encoches

τ_1 = pas d'encoche 1, 1

τ_n = pas d'encoche n, n

2. n_b est impair, alors $n_b = 2N_{Dd} + 1$

$$\varphi_1 = 2\xi \quad , \quad \varphi_2 = 4\xi \quad \dots \quad \varphi_n = 2n\xi$$

En remplaçant les φ par leurs valeurs, on obtient pour les ampère-tours la relation suivante valable pour n_b pair ou impair:

$$A_{Dd} = \frac{n_b}{\pi} I_{Dd} \left(1 - \frac{\sin(n_b \xi)}{n_b \sin \xi} \right)$$

On désigne par k le rapport:

$$k = \frac{\sin(n_b \xi)}{n_b \sin \xi}$$

D'où l'induction correspondant aux ampère-tours A_{Dd} :

$$B_{Dd} = \frac{n_b I_{Dd}}{\pi} (1-k) \frac{\mu_0}{\delta_1} k_1$$

$\delta_1 = \delta k_c$, k_c étant le facteur de Carter, δ est l'entrefer de la machine, k_1 est la constante d'équivalence des ampère-tours.

2. Amortisseur transversal. Les ampère-tours transversaux par pôle, sont donnés par la relation suivante:

$$A_{Dq} = \frac{4}{\pi} \left[I_{1q} \cos \frac{\varphi_1}{2} + I_{2q} \cos \frac{\varphi_2}{2} + \dots + I_{NDq} \cos \frac{\varphi_{NDq}}{2} \right]$$

Ou:

$$A_{Dq} = \frac{2}{\pi} I_{Dq} \left[N_{Dq} + \frac{N_{Dq}}{N_{Dq}} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \dots + \cos N_{Dq}) \right]$$

$$= \frac{n_b I_{Dq}}{\pi} (1+k) \quad , \quad k = \frac{\sin n_b \xi}{n_b \sin \xi}$$

Cette formule est valable pour n_b pair ou impair.

3. Inductance mutuelle entre une phase du stator et l'amortisseur direct

Amplitude fondamentale des ampères-tours de la phase a:

$$A(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} I_{\text{eff}} w k_w \frac{1}{p} \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau_p}\right)$$

p = nombre de paires de pôles

w = nombre de spires par phase du stator

k_w = facteur d'enroulement du stator

A l'aide de: $\sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{\tau_p}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau_p}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\pi x}{\tau_p}\right) \right]$ l'amplitude

$A(x)$ peut être décomposée en deux amplitudes, l'une directe, l'autre inverse.

On pose:

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

Avec:

$$A_1(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_{\text{eff}} \frac{w k_w}{2p} \sin\left(\omega t + \frac{\pi x}{\tau_p}\right)$$

$$A_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_{\text{eff}} \frac{w k_w}{2p} \sin\left(\omega t - \frac{\pi x}{\tau_p}\right)$$

Si B_1 et B_2 sont les inductions correspondantes, on a:

$$B_1(x) = A_1(x) \frac{\mu_0}{\delta_1} \quad , \quad B_2(x) = A_2(x) \frac{\mu_0}{\delta_1}$$

Si φ_1 et φ_2 sont les flux correspondant à B_1 et B_2 on a:

$$d\varphi_1 = B_1 df = B_1 l_a dx \quad , \quad d\varphi_2 = B_2 l_a dx$$

l_a longueur axiale du stator.

En intégrant de $-\tau_{p/2}$ à $\tau_{p/2}$, figure 16, on obtient:

$$\varphi_{1\max} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} I_{\text{eff}} \frac{\tau_p \mu_0^1 w k_w}{\pi \delta_1 P} = \varphi_{2\max}$$

Flux total:

$$\varphi_{\max} = \varphi_{1\max} + \varphi_{2\max} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} I_{\text{eff}} 2 \cdot \frac{(\tau_p \mu_0^1 w k_w)}{\pi \delta_1 P}$$

$P = 2p$, nombre de pôles.

Comme il s'agit de machines synchrones à pôles saillants, le circuit magnétique n'est pas le même suivant les deux axes transversal et longitudinal, et pour cela il faut tenir compte des constantes d'équivalence directe et transverse, k_1 et k_q .

Lorsque l'axe polaire coïncide avec l'axe de la phase a, soit φ_{ad} le flux direct ou longitudinal:

$$\varphi_{ad} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} I_{\text{eff}} \frac{w k_w \lambda k_1^1 a}{P} \quad (98)$$

Où:

$$\lambda = \frac{2\mu_0 D}{\delta_1 P}$$

D = diamètre d'alésage

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-9} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}}$$

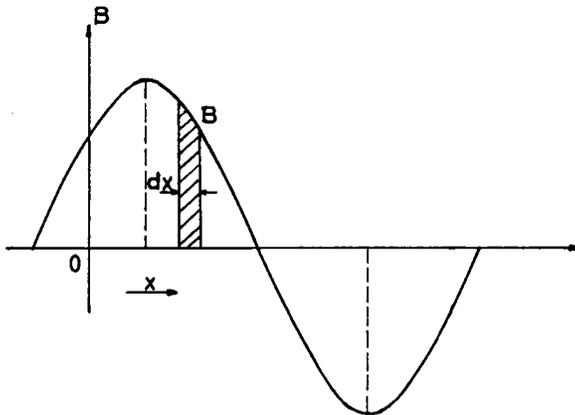


Fig. 16

Courbe représentative de l'induction B dans l'entrefer en fonction de l'abscisse périphérique x

Le flux ψ_{ad} est couplé avec $P N_{Dd}$ barres d'amortisseur sur l'axe direct, d'où le flux utile:

$$\psi_{aDd} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} w k_w N_{Dd} k_{Dd} \lambda k_1 l_a$$

k_{Dd} = facteur d'enroulement de l'amortisseur direct

k_{Dq} = facteur d'enroulement de l'amortisseur transverse

$$k_{Dd} = \frac{\sin^2(N_{Dd} \frac{\xi}{2})}{N_{Dd} \sin(\xi/2)} \quad \text{pour } \xi \text{ pair}$$

$$k_{Dd} = \frac{\sin(N_{Dd} 3/2) \cdot \sin(N_{Dd} + 1) 3/2}{N_{Dd} \sin(\frac{3}{2})} \quad \text{pour } \xi \text{ impair}$$

$$k_{Dq} = \frac{\sin(n_b \xi/2)}{2n_b \sin 3/2} \quad \text{pour } \xi \text{ pair ou impair}$$

L'inductance mutuelle est:

$$M_{aDd} = \frac{\psi_{aDd}}{\sqrt{2} I_{eff} 10^8} = \frac{4}{\pi 10^8} (w k_w N_{Dd} k_{Dd} k_1 \lambda l_a) \quad (99)$$

D'après l'équation (98) on peut écrire:

$$B_{ad} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} I_{eff} \frac{w k_w}{P} \frac{\mu_o k_1}{\delta_1} \quad (100)$$

Au moment où l'axe de l'amortisseur direct coïncidait avec l'axe magnétique de la phase a, le courant qui circulait dans cette phase était $I_{ad} = \sqrt{2} I_{eff}$.

D'après le principe de la conservation de l'énergie, ou, si l'onde fondamentale du stator et de l'amortisseur équivalent, contribuent à donner la même intensité d'induction dans l'entrefer, on a:

$$B_{ad} = B_{Dd} ,$$

ce qui donne comme rapport de transformation des courants:

$$\frac{I_{Dd}}{I_{ad}} = \frac{4w k_w}{P n_v (1-k)} \quad (101)$$

D'après le même principe, on peut trouver le rapport de transformation des tensions:

$$\frac{E_{ad}}{E_{Dd}} = \frac{wk_w}{PN_{Dd}^k Dd} \quad (102)$$

Rapport de transformation d'une impédance ou d'une réactance par rapport au stator

Soit en effet:

$$Z_{ad} = \frac{E_{ad}}{I_{ad}}, \quad Z_{Dd} = \frac{E_{Dd}}{I_{Dd}}$$

les impédances respectivement de la phase a et de l'amortisseur direct et cela au moment où leurs axes coïncident.

On forme le rapport:

$$\frac{Z_{ad}}{Z_{Dd}} = \frac{I_{aD} E_{ad}}{I_{ad} E_{Dd}} = \frac{4(wk_w)^2}{P^2 N_{Dd}^k Dd^k n_b (1-k)} \quad (103)$$

Dorénavant, pour transformer une réactance rapportée au stator, il suffit de la multiplier par le rapport (103). Tandis que pour transformer une réactance par rapport au stator, on la multiplie par le rapport (102).

Ainsi la réactance mutuelle, rapportée au stator, entre la phase a et l'amortisseur direct est:

$$X_{aDd} = \frac{2\pi f}{10^8} M_{aDd} \cdot \frac{wk_w}{PN_{Dd}^k Dd} = 8f l_a \frac{(wk_w)^2}{P 10^8} \lambda k_1 \quad (104)$$

Remarque: Toutes les réactances désignées par la lettre X sont relatives au champ monophasé, tandis que les réactances désignées par x, sont des réactances triphasées.

4. Réactance de fuite de l'amortisseur direct.

Le flux utile total de cet amortisseur est:

$$\begin{aligned} \psi_{Dd} &= 2P\lambda_{bd} l_a (I_{1d} + I_{2d} + \dots + I_{NDd}) \\ &= PN_{Dd}^k Dd^k 2\lambda_{bd} l_a I_{Dd} \end{aligned}$$

λ_{bd} est la perméance en Henry/cm équivalente directe d'une barre d'amortisseur par unité de longueur y compris le segment d'anneau correspondant.

D'où la réactance de fuite rapportée au stator:

$$X_{Dd\sigma} = 2\pi f \frac{\psi_{Dd}}{I_{Dd}} \cdot \frac{1}{10^8} \cdot \frac{4(wk_w)^2}{P^2 N_{Dd}^k k_{Dd} n_b (1-k)}$$

$$X_{Dd\sigma} = \frac{8f(wk_w)^2 2\pi \lambda_{bd} l_a}{10^8 P n_b (1-k)} \text{ Ohms} \quad (105)$$

5. Réactance propre de l'amortisseur direct.

Par un raisonnement analogue au précédent, on part de l'induction B_{Dd}

$$B_{Dd} = \frac{1}{\pi} I_{Dd} n_b (1-k) \frac{\mu_0 k_1}{\delta_1}$$

La section d'entrefer étant: $Q = \frac{2}{\pi} \tau_p l_a$, on a:

$$\varphi_{DDd} = B_{Dd} Q = \frac{n_b}{\pi} (1-k) \lambda k_1 l_a$$

Ce flux est couplé avec $PN_{Dd}^k k_{Dd}$ barres d'amortisseur par pôle:

$$\psi_{DDd} = \frac{n_b}{\pi} (1-k) I_{Dd} PN_{Dd}^k k_{Dd} \lambda k_1 l_a$$

L'inductance propre de l'amortisseur est:

$$L_{DDd}^* = \frac{n_b}{\pi} (1-k) PN_{Dd}^k k_{Dd} \lambda k_1 l_a$$

La réactance totale de l'amortisseur direct, y compris la réactance de fuite:

$$X_{DDd} = X_{Dd\sigma} + X_{DDd}^+$$

$$X_{DDd} = \frac{8f l_a (wk_w)^2}{P 10^8} \left[\frac{2\pi \lambda_{bd}}{n_b (1-k)} + \lambda k_1 \right] \text{ Ohms} \quad (106)$$

6. Pertes dans l'amortisseur.

La perte totale dans l'amortisseur est engendrée par des courants actifs qui existent d'après ce calcul suivant l'axe direct. On peut donc dire que les pertes totales de l'amortisseur doivent être pratiquement cherchées dans l'amortisseur direct conformément à la théorie des deux axes direct et transverse.

Soit P_{Dd} la puissance en watt de l'amortisseur:

$$P_{Dd} = 2r_{bd} I_{Dd}^2 \left(\sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} + \dots + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) N D d$$

r_{bd} = résistance équivalente directe d'une barre y compris le segment d'anneau correspondant.

$$P_{Dd} = \frac{1}{2} r_{bd} I_{Dd}^2 P(1-k)n_b \text{ Watt}$$

Or d'après l'égalité (101), on a:

$$I_{Dd}^2 = I_{ad}^2 \frac{(4wk_w)^2}{P^2 n_b^2 (1-k)^2}$$

Remplaçant dans l'expression de P_{Dd} ; I_{Dd}^2 par sa valeur, on a:

$$P_{Dd} = \frac{1}{2} r_{bd} I_{ad}^2 \frac{(4wk_w)^2}{P^2 n_b^2 (1-k)^2} (1-k)n_b P$$

D'où la résistance de l'amortisseur rapportée au stator:

$$R_{Dd} = 8r_{bd} \frac{(wk_w)^2}{P n_b (1-k)}$$

Par un calcul analogue, on obtient la résistance transverse

$$R_{Dq} = 8r_{bq} \frac{(wk_w)^2}{P n_b (1+k)}$$

r_{bd} et r_{bq} sont les résistances équivalentes directe et transverse d'une barre unique y compris le segment d'anneau correspondant.

7. Réactance mutuelle entre l'enroulement d'excitation et une phase du stator.

Soit I_e le courant d'excitation au moment où l'axe de la phase a par exemple coïncide avec l'axe de la roue polaire. A cet instant l'amplitude fondamentale du flux induit statorique est:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\pi} \tau_p B_1 I_a$$

B_1 est l'amplitude fondamentale de l'induction. On connaît la relation de dépendance suivante:

$$B_1 = \frac{B_1}{\beta}$$

B_1 = induction dans l'entrefer:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\pi} \tau_p B_1 \beta I_a$$

N_e étant le nombre de spires par pôle de l'enroulement d'excitation, les ampères-tours d'excitation sont: $A_e = N_e I_e$, et comme $B_1 = A_e \frac{\mu_0}{\delta_1}$, on a:

$$\varphi_1 = I_e N_e \frac{2\mu_0 D \beta l_a}{P \delta_1} = N_e I_e \beta \lambda l_a$$

Le flux φ_1 est couplé avec w spires de la phase a :

$$\psi_1 = w k_w N_e I_e \beta l_a$$

Au moment où l'axe magnétique de la phase a coïncide avec celui de la roue polaire, on a :

$$B_1 = B_{ad}, \text{ et comme } B_1 = A_e \frac{\mu_0 \beta}{\delta_1} = N_e I_e \frac{\mu_0 \beta}{\delta_1}$$

Donc :

$$\frac{I_e}{I_{ad}} = \frac{4}{\pi} \frac{w k_w k_1}{P N_e \beta} \quad (107)$$

C'est le rapport de transformation des courants.

D'autre part on a pour le rapport de transformation des tensions :

$$\frac{E_{ad}}{E_e} = \frac{w k_w}{P N_e k_e} \quad (108)$$

k_e est le facteur d'enroulement équivalent de l'excitation. E_e est la tension aux bornes de l'enroulement d'excitation concentré sur l'axe direct.

D'où le rapport de transformation des impédances au stator :

$$\frac{I_e}{I_{ad}} \frac{E_{ad}}{E_e} = \frac{(w k_w)^2 k_1}{P^2 N_e^2 k_e \beta} \frac{4}{\pi} \quad (109)$$

Alors on a pour la réactance mutuelle entre la phase a et l'excitation, rapportée au stator la valeur :

$$X_{aed} = 2\pi f \frac{\psi_1}{I_{ad} \cdot 10^8}$$

Ou en remplaçant I_e par sa valeur contenue dans ψ_1 et tirée du rapport (109) :

$$X_{aed} = \frac{8f l_a (w k_w)^2}{P 10^8} \lambda k_1 \quad (110)$$

8. Réactance propre de l'enroulement d'excitation.

Le flux correspondant à $N_e I_e$ ampère-tours par pôle est:

$$\varphi_e = \alpha \tau_p B_l l_a, \quad \alpha = \frac{b_i}{\tau_p}$$

Or $B_l = N_e I_e \frac{\mu_0}{\delta_1}$

Donc:

$$\varphi_e = N_e I_e \alpha \tau_p l_a \frac{\mu_0}{\delta_1} = N_e I_e \frac{\pi}{2} \alpha l_a \lambda$$

Ce flux est couplé avec PN_e spires de l'enroulement d'excitation:

$$\psi_e = PN_e^2 I_e \frac{\pi}{2} \alpha l_a \lambda$$

La réactance propre rapportée au stator est:

$$X_{eed}^* = \frac{\psi_e}{I_e 10^8} \cdot \frac{(wk_w)^2 k_l}{P^2 N_e^2 k_e \beta} \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$X_{eed}^* = \frac{8fl_a (wk_w)^2}{P10^8} k_l \lambda \frac{\alpha \pi}{2\beta k_e} \quad (111)$$

9. Réactance de fuite de l'excitation.

$$X_{ed\sigma} = 2\pi fl_a PN_e^2 \lambda_e$$

λ_e est la perméance de l'excitation par pôle et par unité de longueur. La réactance totale est donc:

$$X_{eed} = X_{eed}^+ + X_{ed\sigma}$$

$$X_{eed} = \frac{8fl_a (wk_w)^2}{P10^8} \cdot \frac{k_l}{\beta k_e} \left(\frac{\pi}{2} + \lambda_e \right) \quad (112)$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on déduit le flux de couplage produit par l'enroulement d'excitation avec l'amortisseur direct.

$$\psi_{Ded} = PN_e N_{Dd} k_{Dd} I_e \beta \lambda l_a$$

10. Réactance mutuelle rapportée au stator entre l'enroulement d'excitation et l'amortisseur direct.

$$X_{Ded} = \frac{8f l_a (w k_w)^2}{P \cdot 10^8} k_1 \lambda \quad (113)$$

11. Pertes dans l'enroulement d'excitation.

$$P_e = I_e^2 r_e = \left[\frac{4}{\pi} \frac{k_1}{\beta} \cdot \frac{w k_w}{P N_e} \right]^2 \cdot I_{ad}^2 r_e$$

r_e = résistance équivalente de l'excitation.

Soit:

$$R_e = \left[\frac{4}{\pi} \frac{k_1}{\beta} \frac{w k_w}{P N_e} \right]^2 r_e$$

la résistance de l'enroulement d'excitation rapportée au stator.

On forme le rapport:

$$\frac{R_e}{r_e} = \left[\frac{4k_1 w k_w}{\pi \beta P N_e} \right]^2$$

La comparaison de ce rapport avec le rapport (109) donne:

$$k_e = \frac{\pi \beta}{4k_1}$$

On obtient facilement par un raisonnement analogue au précédent les grandeurs suivantes:

12. Réactance de fuite transverse de l'amortisseur.

$$X_{Dq\sigma} = \frac{8f l_a (w k_w)^2}{P \cdot 10^8} \cdot \frac{2\pi \lambda_{bq}}{n_b(1+k)} \quad (114)$$

λ_{bq} = coefficient de perméance d'une barre unique d'amortisseur par unité de longueur.

13. Réactance mutuelle entre la phase a et l'amortisseur transverse.

$$X_{aDq} = \frac{8f l_a (w k_w)^2}{P \cdot 10^8} \lambda k_q \quad (115)$$

14. Réactance propre de l'amortisseur transverse.

$$X_{DDq} = X_{Dq\sigma} + X_{aDq}$$

$$X_{DDq} = \frac{8f l_a (wk_w)^2}{P \cdot 10^8} \left[\lambda k_q + \frac{2\pi \lambda_{bdq}}{n_b(1+k)} \right] \quad (116)$$

15. Réactances transitoires.

Les formules déjà connues pour les réactances transitoires directe et transverse sont calculées à l'aide des résultats précédents et cela en fonction des dimensions de la machine.

$$x'_d = x_d - 3/2 \frac{X_{aed}^2}{X_{eed}} \quad (117)$$

$$x'_q = x_q - 3/2 \frac{X_{aDq}^2}{X_{DDq}} \quad (118)$$

Remplaçant dans les équations (94), (117), (118), toutes les réactances par leurs valeurs et posant:

$$c = \frac{8f l_a (wk_w)^2}{P \cdot 10^8}$$

$$x''_d = x_d - 3/2 c \lambda k_1 \frac{\frac{2\pi \lambda_{bd}}{\lambda k_1 n_b (1-k)} + \frac{1}{\lambda k_1} \left[\frac{k_1}{\beta} \right]^2 \cdot (2\alpha\lambda + \frac{4}{\pi} \lambda_e) - 1}{\frac{1}{k_1 \lambda} \left[\frac{k_1}{\beta} \right]^2 (2\alpha\lambda + \frac{4}{\pi} \lambda_e) + \frac{2\pi \lambda_{bd}}{k_1^2 \lambda^2 n_b (1-k)} \left[\frac{k_1}{\beta} \right]^2 (2\alpha\lambda + \frac{4}{\pi} \lambda_e) - 1} \quad (119)$$

On pose:

$$K = \frac{2\pi \lambda_{bd}}{n_b(1-k) \lambda k_1}$$

$$R = \left[\frac{k_1}{\beta} \right]^2 \frac{1}{\lambda k_1} (2\alpha\lambda + \frac{4}{\pi} \lambda_e)$$

$$x'_d = x_d - x_{ad} \frac{1}{\frac{1}{k_1 \lambda} \left[\frac{k_1}{\beta} \right]^2 \cdot (2\alpha\lambda + \frac{4}{\pi} \lambda_e)}$$

$$x'_q = x_q - \frac{3}{2} c \lambda k_q \frac{1}{1 + \frac{1}{k_q \lambda} \cdot \frac{2\pi \lambda b_q}{n_b(1+k)}}$$

On pose:

$$K^* = \frac{2\pi \lambda b_q}{n_b(1+k) \lambda k_q}$$

Maintenant, on remplace dans les expressions des réactances transitoires et subtransitoires les constantes K, R, c, et K* par leurs valeurs, on obtient:

Sachant que la réactance de réaction d'induit est égale à:

$$x_{ad} = 3/2 \cdot c \cdot \lambda \cdot k_l$$

$$x_{aq} = 3/2 \cdot c \cdot \lambda \cdot k_q$$

on a:

$$x''_d = x_d - x_{ad} \frac{K + R - 1}{KR + R - 1} = x_{\sigma} + x_{ad} [1 - f(K, R)]$$

$$x''_d = x_{\sigma} + x_{ad} [1 - f(K, R)] \quad (120)$$

$$x'_d = x_{\sigma} + x_{ad} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \quad (121)$$

$$x'_q = x''_q = x_{\sigma} + x_{aq} \left(1 - \frac{1}{1 + K^*}\right) \quad (122)$$

avec:

$$f(K, R) = \frac{K + R - 1}{K \cdot R + R - 1}$$

CHAPITRE V

Calcul de la variation du couple

On suppose ici comme précédemment, que l'amortisseur est symbolisé par un autre équivalent, l'amortisseur direct et transverse.

Soit:

R_{Dd} = résistance de l'amortisseur direct.

R_{Dq} = résistance de l'amortisseur transverse.

$L_{\sigma d}$ = inductance de fuite de l'amortisseur direct.

$L_{\sigma q}$ = inductance de fuite de l'amortisseur transverse.

Si δ est l'angle de charge, on a:

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta$$

On considère que la variation de l'angle δ obéit à une loi sinusoïdale du temps de vitesse angulaire d'oscillation Ω .

$$\Delta\delta = (\widehat{\Delta\delta}) \sin(\Omega t); (\widehat{\Delta\delta}) = \text{maximum de } (\Delta\delta)$$

Si ψ_r est le flux résultant des courants statoriques, du courant d'excitation et des courants de l'amortisseur, on peut écrire:

$$\psi_d = \psi_r \cos\delta$$

$$\psi_q = - \psi_r \sin\delta$$

i_{Dd} et i_{Dq} étant respectivement les courants induits dans l'amortisseur direct et transverse, les équations différentielles des tensions induites dans l'amortisseur sont:

$$R_{Dd}i_{Dd} + L_{\sigma d} \frac{di_{Dd}}{dt} + \frac{d\psi_d}{dt} = 0$$

$$R_{Dq}i_{Dq} + L_{\sigma q} \frac{di_{Dq}}{dt} + \frac{d\psi_q}{dt} = 0$$

Ou en remplaçant ψ_d et ψ_q par leurs valeurs, on a:

$$R_{Dd}i_{Dd} + L_{\sigma d} \frac{di_{Dd}}{dt} = \psi_r \sin\delta \frac{d\delta}{dt} \quad (123)$$

$$R_{Dq} i_{Dq} + L_{\sigma q} \frac{di_{Dq}}{dt} = \psi_r \cos \delta \frac{d\delta}{dt} \quad (124)$$

Comme $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$ et $\Delta\delta = (\hat{\Delta\delta}) \sin(\Omega t)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Delta\delta) &= \frac{d\delta}{dt} = \Omega \cdot (\Delta\delta) \cos(\Omega t) \\ \sin \delta &= \sin(\delta_0 + \Delta\delta) = \sin \delta_0 + \cos \delta_0 \sin(\Delta\delta) \\ \cos \delta &= \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \sin(\Delta\delta) \end{aligned}$$

Dans le cas des petites oscillations on a :

$$\begin{aligned} \sin(\Delta\delta) &\cong \Delta\delta \\ \cos(\Delta\delta) &\cong 1 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \delta_0 + \cos \delta_0 \cdot (\hat{\Delta\delta}) \sin(\Omega t) \\ \cos \delta &= \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \cdot (\hat{\Delta\delta}) \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

En remplaçant $\sin \delta$ et $\cos \delta$ par leurs valeurs dans les équations (123) et (124), on a :

$$R_{Dd} i_{Dd} + L_{\sigma d} \frac{di_{Dd}}{dt} = \psi_r \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta\delta}) \sin \delta_0 \cos(\Omega t) + \frac{(\hat{\Delta\delta})}{2} \cdot \cos(\delta_0) \sin(2\Omega t) \quad (125)$$

$$R_{Dq} i_{Dq} + L_{\sigma q} \frac{di_{Dq}}{dt} = \psi_r \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta\delta}) \cos \delta_0 \cos(\Omega t) - \frac{(\hat{\Delta\delta})}{2} \sin \delta_0 \sin(2\Omega t) \quad (126)$$

On voit que dans les amortisseurs sont induits des courants de fréquence $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ et de fréquence double $2f = \frac{2\Omega}{2\pi}$.

comme il ne s'agit que de petites oscillations, il est permis de négliger les termes concernant le courant de fréquence double, qui est très inférieur au premier et, d'ailleurs proportionnel au terme négligeable $(\Delta\delta)_m^2$.

$$R_{Dd} i_{Dd} + L_{\sigma d} \frac{di_{Dd}}{dt} = \psi_r \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta\delta}) \cos(\Omega t) \sin \delta_0 \quad (127)$$

$$R_{Dq} i_{Dq} + L_{\sigma q} \frac{di_{Dq}}{dt} = \psi_r \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta\delta}) \cos(\Omega t) \cos \delta_0 \quad (128)$$

Ces équations ne sont autres que celles d'un circuit électrique de résistance R et de self-induction L, fermé sur une tension alternative égale à :

$$E_{\max} = \psi_r \sin \delta_o \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta \delta})$$

On résout les équations différentielles (127) et (128), pour le régime permanent. Les courants dans les amortisseurs direct et transverse sont:

$$i_{Dd} = \psi_r \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta \delta}) \cdot \sin \delta_o \left[\frac{R_{Dd}}{Z_{\sigma d}^2} \cos(\Omega t) + \frac{\Omega L_{\sigma d}}{Z_{\sigma d}^2} \sin(\Omega t) \right]$$

$$i_{Dq} = - \psi_r \cdot \Omega \cdot (\hat{\Delta \delta}) \cdot \cos \delta_o \left[\frac{R_{Dq}}{Z_{\sigma q}^2} \cos(\Omega t) + \frac{\Omega L_{\sigma q}}{Z_{\sigma q}^2} \sin(\Omega t) \right]$$

Avec: $Z^2 = R^2 + \Omega^2 L^2$

Donc les courants effectifs suivant l'axe direct et transverse sont respectivement:

$$I_{Dd\text{eff}} = \frac{\Omega \cdot (\hat{\Delta \delta}) \cdot \sin \delta_o \cdot U_r}{\sqrt{2} Z_{\sigma d} \cdot \omega} \quad (129)$$

$$I_{Dq\text{eff}} = \frac{\Omega \cdot (\hat{\Delta \delta}) \cdot \cos \delta_o \cdot U_r}{\sqrt{2} Z_{\sigma q} \cdot \omega}$$

Avec: $\psi_r = \frac{U_r}{\omega}$

Pour calculer ces courants, il est nécessaire de connaître $(\hat{\Delta \delta})$, pour cela on écrit l'équation oscillatoire de la machine et on la résout par la méthode des imaginaires.

Equation du mouvement oscillatoire forcé

$$\frac{\theta}{p} \frac{d^2}{dt^2} (\Delta \delta) + D \cdot \frac{d}{dt} (\Delta \delta) + \sigma \cdot (\Delta \delta) = M \cdot \sin(\Omega t + \varphi) \quad (130)$$

θ = moment d'inertie de la machine

D = coefficient d'amortissement

σ = coefficient de synchronisation

$M \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$ = couple d'entraînement

Sur la figure 17, on voit que δ_o est la position initiale de la roue polaire par rapport à son axe à vide.

On suppose d'autre part que:

$$\Omega = \frac{2\omega}{p} \quad \text{et} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

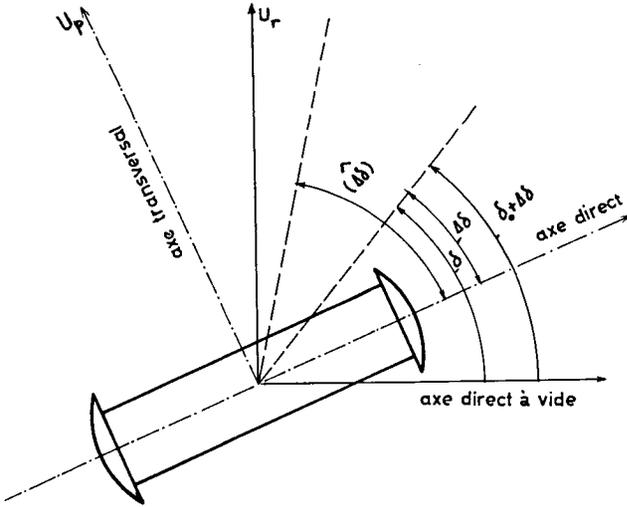


Fig. 17

- U_p = tension de phase de la roue polaire
- δ_p = angle de charge de la machine
- $\widehat{\Delta\delta}$ = maximum de l'angle de charge
- U_r = tension de phase statorique

On pose:

$$(\Delta\delta) = J_m(\Delta\delta)^* \quad , \quad \text{où: } (\Delta\delta)^* = (\widehat{\Delta\delta}) e^{j\Omega t}$$

$$M \cdot \sin(\Omega t + \varphi) = J_m(M^*) \quad , \quad \text{ou, } M^* = M \cdot e^{j(\Omega t + \varphi)}$$

J_m signifie dans ce chapitre partie imaginaire.

Avec ces notations, l'équation (130) s'écrit:

$$-\frac{\theta}{p} \Omega^2 \cdot J_m(\Delta\delta)^* + jD\Omega J_m(\Delta\delta)^* + \sigma \cdot J_m(\Delta\delta)^* = J_m(M^*)$$

D'où la solution:

$$(\widehat{\Delta\delta})^* = \frac{M \cdot e^{j(\Omega t + \varphi)}}{\sigma - \frac{\theta}{p} \cdot \Omega^2 + jD\Omega} \quad (131)$$

Posant:

$$A = \sigma - \frac{\theta}{p} \cdot \Omega^2, \quad B = D \cdot \Omega$$

le dénominateur de l'égalité (131) devient $A + jB$, où:

$$A + jB = \varphi e^{j\psi}, \quad \varphi = \sqrt{A^2 + B^2}$$

D'où:

$$(\hat{\Delta\delta})^* = \frac{M \cdot e^{j(\Omega t + \varphi - \psi)}}{p}$$

Comme $(\Delta\delta)$ est la partie imaginaire de $(\hat{\Delta\delta})^*$, on a:

$$(\Delta\delta) = \frac{M}{p} \sin(\Omega t + \varphi - \psi)$$

M = couple nominal de la machine.

On peut calculer $(\Delta\delta)$ en fonction de la constante d'inertie H , du coefficient d'amortissement D et du coefficient de synchronisation σ .

En effet:

$$H = \frac{GD^2 \left(\frac{n}{1000000} \right)^2}{S^{MVA}} \quad 2,74 \text{ sec}$$

$$GD^2 = m^2 t$$

$$n = \frac{T}{\text{min}}$$

S = la puissance apparente en méga-volt-ampères.

$$\text{D'autre part on sait: } H = \frac{\theta \cdot \omega}{M}$$

Alors:

$$A = \sigma - \frac{H \cdot M \cdot \Omega^2}{\omega \cdot p}$$

$$B = \Omega \cdot D$$

D'où:

$$\Delta\delta = \frac{M}{\sqrt{\left(\sigma - \frac{H \cdot M \cdot \Omega^2}{\omega \cdot p} \right)^2 + \Omega^2 \cdot D^2}} \sin(\Omega t + \varphi - \psi)$$

Où:

$$(\hat{\Delta\delta}) = \frac{M}{\sqrt{\left(\sigma - \frac{H \cdot M \cdot \Omega^2}{\omega \cdot p} \right)^2 + \Omega^2 \cdot D^2}} \quad (132)$$

Le calcul de ($\widehat{\Delta\delta}$) est nécessaire pour la détermination des courants dans l'amortisseur.

Remarque: La variation d'angle $\Delta\delta$ est en radians dans le présent calcul.

Couple monophasé d'une machine synchrone

$$m = \psi_d^i q - \psi_q^i d$$

Soit m la variation de ce couple, pour une variation $\Delta\delta$ de l'angle de charge autour de sa position d'équilibre $\delta = \delta_0$:

$$m = i_{q0} \cdot \Delta\psi_d + \psi_{d0} \Delta i_q - i_{d0} \Delta\psi_q - \psi_{q0} \Delta i_d \tag{133}$$

D'autre part, les flux suivant l'axe direct et transverse sont donnés par les formules déjà écrites à la page .

$$\psi_d = L_d i_d + M_{ae} i_e + M_{aDd} i_{Dd}$$

$$\psi_q = L_q i_q + M_{aDq} i_{Dq}$$

Or: $\psi_d = \psi_r \cos \delta$

$$\psi_q = - \psi_r \sin \delta$$

et comme $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$, on prend le cosinus et le sinus des deux membres, on a, en remplaçant:

$$\psi_d = \psi_r \cos \delta_0 - \psi_r \sin \delta_0 \cdot \Delta\delta$$

$$\psi_q = - \psi_r \sin \delta_0 - \psi_r \cos \delta_0 \cdot \Delta\delta$$

On pose:

$$\psi_{d0} = \psi_r \cos \delta_0 = \frac{U_r}{\omega} \cos \delta_0$$

$$\psi_{q0} = - \psi_r \sin \delta_0 = - \frac{U_r}{\omega} \sin \delta_0$$

ψ_{d0} et ψ_{q0} sont les flux dans la marche normale de la machine.

Variation des flux durant l'oscillation

$$(\Delta\psi_d)_{\delta = \delta_0} = - \psi_r \sin \delta_0 \cdot \Delta\delta$$

$$(\Delta\psi_q)_{\delta = \delta_0} = - \psi_r \cos \delta_0 \cdot \Delta\delta$$

Les formules de ψ_d et ψ_q de la page 43 deviennent:

$$L_d \Delta i_d + M_{ae} \Delta i_e + M_{aDd} \Delta i_{Dd} = - \psi_r \sin \delta_o \cdot \Delta \delta \quad (134)$$

$$L_q \Delta i_q + M_{aDq} \Delta i_{Dq} = - \psi_r \cos \delta_o \cdot \Delta \delta \quad (135)$$

Durant la période oscillatoire de la machine on a:

$$\Delta i_{Dd} = i_{Dd} \quad , \quad \Delta i_{Dq} = i_{Dq}$$

Pendant la marche normale de la machine c. à. d. pendant l'état stationnaire, il n'existe pas de courants dans l'amortisseur. Mais durant la période d'oscillation on a:

$$i_d = i_{do} + \Delta i_d$$

$$i_q = i_{qo} + \Delta i_q$$

$$i_{Dq} = i_{Dqo} + \Delta i_{Dq} \quad , \quad i_{Dqo} = 0$$

L'indice zéro se rapporte au travail normal de la machine.

Des équations (134) et (135), on tire i_d et i_q , on les remplace par leurs valeurs dans l'équation (133), ainsi que pour ψ_d , ψ_q , ψ_{qo} et ψ_{do} et les courants i_{Dd} et i_{Dq} déjà calculés à la page 68.

On remarque que:

$$i_{do} = \frac{U_r \cos \delta_o - U_p}{x_d}$$

$$i_{qo} = - \frac{U_r \sin \delta_o}{x_q}$$

U_r et U_p , tension du réseau et tension de la roue polaire, sont monophasées effectives.

Pour la variation du moment on a:

$$\begin{aligned} \Delta m = & - i_{qo} \psi_r \sin \delta_o \cdot \Delta \delta - \frac{\psi_{do}}{L_q} (\psi_r \cos \delta_o \cdot \Delta \delta + M_{aDq} \Delta i_{Dq}) + \\ & + \frac{\psi_{qo}}{L_d} (\psi_r \sin \delta_o \cdot \Delta \delta + M_{ae} \Delta i_e + M_{aDd} \Delta i_{Dd}) \end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\Delta\delta = (\hat{\Delta\delta}) \cdot \sin(\Omega t) , \quad \frac{d}{dt}(\Delta\delta) = \Omega \cdot (\hat{\Delta\delta}) \cos \Omega t$$

Après remplacement on a:

$$\begin{aligned} \Delta m = & - \frac{U_r M_{ae}}{x_d} \sin \delta_o \cdot \Delta i_e - \frac{1}{\omega} \left[\frac{U_r U_p \cos \delta_o}{x_d} + U_r^2 \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \right] \cos 2 \delta_o (\Delta\delta) - \\ & - \frac{U_r^2 \cdot \Omega^2}{\omega^2} \left(\frac{X_{aDq} L_{\sigma q}}{x_q Z_{\sigma q}^2} \cos^2 \delta_o + \frac{X_{aDd} L_{\sigma d}}{x_d Z_{\sigma d}^2} \sin^2 \delta_o \right) \cdot (\Delta\delta) - \\ & - \frac{U_r^2}{\omega^2} \left(\frac{X_{aDq} R_{Dq}}{x_q Z_{\sigma q}^2} \cos^2 \delta_o + \frac{X_{aDd} R_{Dd}}{x_d Z_{\sigma d}^2} \sin^2 \delta_o \right) \frac{d}{dt} (\Delta\delta) \end{aligned} \quad (136)$$

La première quantité au second membre de l'équation (136) provient de la variation de l'excitation, la deuxième est le moment de synchronisation, la troisième quantité apparaît du fait qu'il s'agit d'une machine synchrone à pôles saillants, et la quatrième grâce à la présence d'amortisseur.

Le coefficient de $\frac{d}{dt}(\Delta\delta)$, qu'on appelle coefficient d'amortissement est le plus important résultat de ce calcul de la variation du couple. En effet:

$$D = \frac{U_r^2}{\omega^2} \left(\frac{X_{aDq} R_{Dq}}{x_q Z_{\sigma q}^2} \cos^2 \delta_o + \frac{X_{aDd} R_{Dd}}{x_d Z_{\sigma d}^2} \sin^2 \delta_o \right) \quad (137)$$

peut être considéré comme la somme des deux coefficients D_d coefficient d'amortissement direct et D_q coefficient d'amortissement transverse.

$$D_d = \frac{U_r^2}{\omega^2} \frac{X_{aDd} R_{Dd}}{x_d Z_{\sigma d}^2} \sin^2 \delta_o$$

$$D_q = \frac{U_r^2}{\omega^2} \frac{X_{aDq} R_{Dq}}{x_q Z_{\sigma q}^2} \cos^2 \delta_o$$

Comme la machine est triphasée, il faut multiplier les deux membres de l'équation (137) par 3/2 pour obtenir le couple triphasé. On sait de plus que $x_{ad} = 3/2 X_{ad}$ et $x_{aq} = 3/2 X_{aq}$.

Alors on a:

Coefficient d'amortissement (couple triphasé):

$$D_d = \frac{U_r^2}{\omega^2} \frac{x_{ad}}{x_d} \frac{R_{Dd}}{Z_{\sigma d}^2} \sin^2 \delta_o \quad (138)$$

$$D_q = \frac{U_r^2}{\omega^2} \frac{x_{aq}}{x_q} \frac{R_{Dq}}{Z_{\sigma q}^2} \cos^2 \delta_o \quad (139)$$

Conditions d'amortissement maximum

Il est clair que le coefficient D est maximum quand:

$$\Omega \cdot L_{\sigma d} = R_{Dd} \quad \text{et} \quad \Omega \cdot L_{\sigma q} = R_{Dq}$$

Ces conditions étant remplies, les équations (129) deviennent:

$$I_{Dd_{\text{eff}}} = \frac{\Omega \cdot U_r (\hat{\Delta\delta}) \sin \delta_o}{\omega \cdot 2R_{Dd}} \quad (140a)$$

$$I_{Dq_{\text{eff}}} = \frac{\Omega \cdot U_r (\hat{\Delta\delta}) \cos \delta_o}{\omega \cdot 2 \cdot R_{Dq}} \quad (140b)$$

Il est possible maintenant de calculer les courants effectifs dans l'amortisseur connaissant R_{Dd} , R_{Dq} , $(\hat{\Delta\delta})$ et δ_o . On montrera dans un chapitre spécial, par un exemple numérique que l'amortisseur transverse l'emporte sur l'amortisseur direct c. à. d. que le coefficient d'amortissement transverse est sensiblement supérieur au coefficient d'amortissement direct ce qui conduit à négliger ce dernier.

CHAPITRE VI

Réactances et constantes de temps des machines synchrones

MESURES

Machine synchrone triphasée, montage étoile:

Puissance	35 KVA
Tension aux bornes	500 V
Vitesse	750 T/min
Courant nominal	34,5 Ampères
$\cos \varphi = 0,8$	
Nombre total d'encoches	96
Nombre d'encoches par pôle et par phase	$q = 4$
Nombre de pôles	$2p = 8$
Diamètre d'alésage	$D = 466 \text{ mm}$
Longueur axiale	$l_a = 160 \text{ mm}$

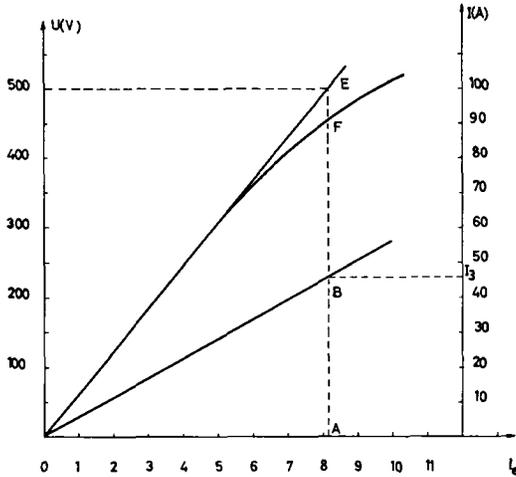


Fig. 18

OF = caractéristique à vide

OE = droite d'entrefer

OB = droite de court-circuit triphasé

I. A. Réactance synchrone directe

La machine est dotée d'un amortisseur en barres de cuivre cylindriques.

Cette réactance s'obtient à partir de la caractéristique à vide, et de la droite de court-circuit triphasé, en prenant le quotient de la tension étoilée par le courant de court-circuit permanent pour un courant d'excitation donné, figure 18.

$$x_d = \frac{U}{\sqrt{3} I_3} = \frac{500}{\sqrt{3} \cdot 45} = 6,4 \text{ ohms}$$

La réactance directe et transverse s'obtiennent également par l'essai dit de glissement. La machine synchrone entraînée par une machine à courant continu par exemple à une vitesse très voisine du synchronisme. Pour un glissement de 5 %, on relève à l'oscillographe la tension et le courant I du stator (figure 19).

L'enroulement d'excitation étant en court-circuit, le courant du stator oscille entre deux valeurs, la première I_d obtenue quand la tension aux bornes de l'excitation est nulle, la deuxième I_q correspond par contre à une tension maxima de l'excitation, on a :

$$x_d = \frac{U_d}{\sqrt{3} I_d} = \frac{113}{\sqrt{3} \cdot 10,5} = 6,4 \text{ ohms}$$

$$x_q = \frac{U_q}{\sqrt{3} I_q} = \frac{113}{\sqrt{3} \cdot 17} = 3,84 \text{ ohms}$$

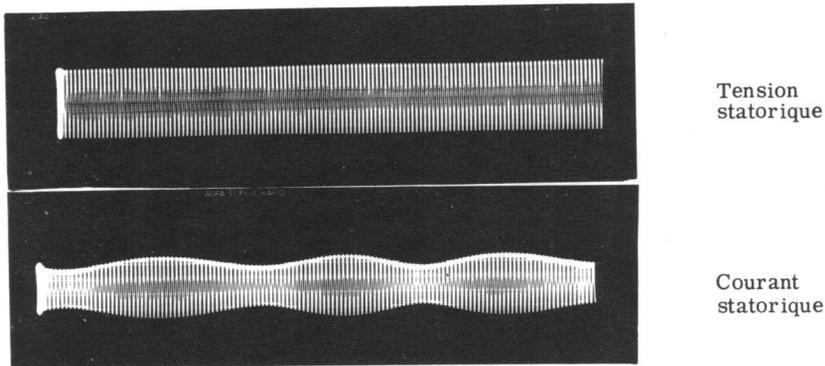


Fig. 19 Essai de glissement

B. Réactance de réaction d'induit directe

$$x_{ad} = \frac{3}{2} 8fl_a \frac{(wk_w)^2}{10^8 \cdot 2p} k_1$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$l_a = 16 \text{ cm}$$

$$w = 240 \text{ spires par pôle et par phase}$$

$$k_w = 0,42$$

$$\lambda = \frac{8\pi D \cdot 10^{-1}}{2p \delta \cdot k_c} \cdot \frac{V_s}{A \cdot \text{cm}} = 53,9$$

$$k_1 = 0,86$$

$$\tau_p = 18,3 \text{ cm}$$

$$b_i = 11,95 \text{ cm}$$

On trouve pour x_{ad} la valeur 5,66 ohms.

Quant à la réactance de fuite x_{σ} , elle a été déterminée par la méthode de Potier, on trouve $x_{\sigma} = 0,74$ ohms (figure 20).

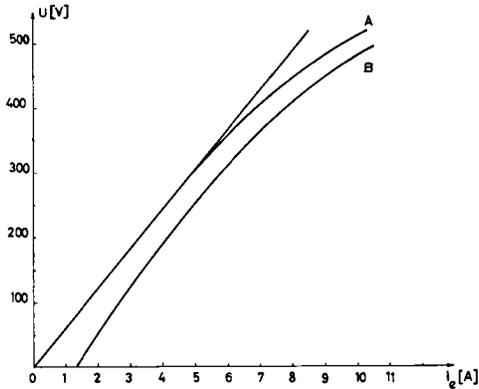


Fig. 20

A = caractéristique à vide

B = caractéristique, charge inductive

U = tension statorique

i_e = courant d'excitation en ampères

C. Réactance de réaction d'induit transverse

On a:

$$\frac{x_{ad}}{x_{aq}} = \frac{k_l}{k_q} = \frac{0,86}{0,44}$$

D'où:

$$x_{aq} = 2,9 \text{ ohms}$$

Or:

$$x_q = x_{\sigma} + x_{aq} = 0,74 + 2,9 = 3,64$$

On compare la valeur de x_q obtenue par la méthode de glissement.

On lit sur le diagramme de la machine synchrone (figure 21), les constantes suivantes en (per unit):

$$x_d = 0,765, \quad x_q = 0,44, \quad x_{aq} = 0,347, \quad x_{ad} = 0,6775$$

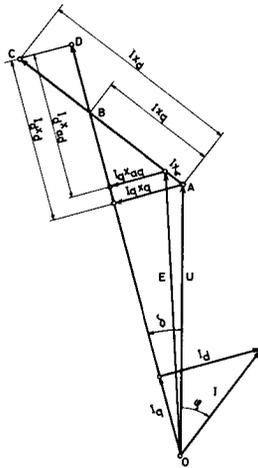


Fig. 21 Diagramme: Mach. synchrone

- φ = angle de phase entre tension et courant statorique
- δ = angle de charge
- x = réactance de fuite de la machine
- x_{ad} = réactance de réaction d'induit
- x_d = réactance synchrone

D. Réactance inverse x_2

Elle sera déterminée:

1. Par la droite d'entrefer, et les droites de court-circuit triphasé et diphasé (figure 22):

$$x_2 = x_d \frac{I_3 \sqrt{3} - I_2}{I_2} = 0,7 \text{ ohms}$$

2. A l'aide de l'essai de court-circuit diphasé:

$$x_2 = \frac{U}{\sqrt{3} I_2} = \frac{46,5}{\sqrt{3} \cdot 28,2} = 0,95 \text{ ohms}$$

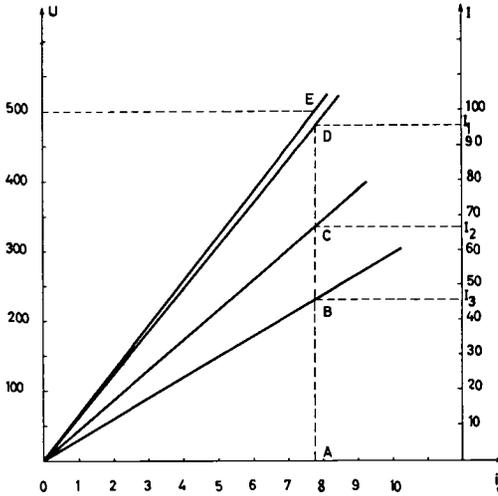


Fig. 22 Machine avec amortisseur (barre cuivre cylindrique)

- OE = droite d'entrefer
- OD = droite de court-circuit monophasé
- OC = droite de court-circuit diphasé
- OB = droite de court-circuit triphasé

E. Réactance homopolaire

Elle est déterminée:

1. A l'aide de la droite d'entrefer et des deux droites de court-circuit monophasé et diphasé (figure 23):

$$x_0 = (x_d + x_2) \frac{I_2 \sqrt{3} - I_1}{I_1} = 1,41 \text{ ohms}$$

2. Par l'essai à rotor calé et l'enroulement statorique en triangle ouvert. On alimente la machine avec une tension donnée, l'excitation étant en court-circuit, on obtient: (figure 23):

$$x_0 = \frac{U}{31} = 1,4, \quad 1,396, \quad 1,408 \quad (\Omega)$$

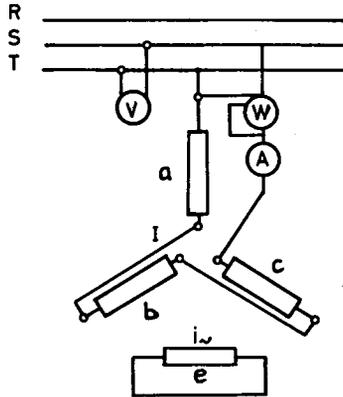


Fig. 23 Mesure de x_0

$$x_0 = \frac{U \cdot \sin \varphi}{31}$$

(abc) = phases du stator

e = enroulement d'excitation court-circuité

Tableau V

Type	Valeurs mesurées		Valeurs calculées	
	$x_i(\Omega)$	$x_o(\Omega)$	$x_i(\Omega)$	$x_o(\Omega)$
sans amortisseur	1,68	0,7	1,55	0,85
amort. complet barre cuivre ronde	0,96	0,7	0,74	0,705
amort. complet barre laiton ronde	1,03	1,075	1,06	1,08
amort. complet barre trapézoïdale en laiton	1,051	1,065	1,4	1,21

F. Réactances subtransitoires et transitoires

Elles sont déterminées:

1. Par l'essai où la machine est au repos et alimentée, en courant monophasé, deux phases en série, la 3ème restant libre (figure 24). On tourne lentement le rotor jusqu'à ce que le courant d'excitation atteigne sa valeur minima, on lit la tension d'alimentation et le courant statorique, on a:

$$x_d'' = \frac{U}{2I} = 0,55 \text{ ohms}$$

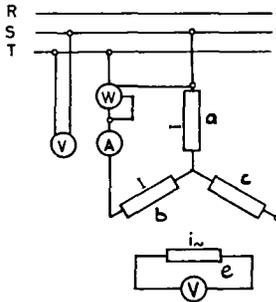


Fig. 24 Mesure de x_d' et x_d''

abc = phases du stator

e = enroulement d'excitation

On continue à tourner le rotor jusqu'à ce que le courant de court-circuit de l'excitation soit minimum:

$$x_q'' = \frac{U}{21} = 0,45$$

Ces valeurs de x_d'' et x_q'' sont non saturées.

2. Par l'essai de court-circuit brusque

Cet essai a été effectué pour chaque type d'amortisseur en question dans ce travail et cela aux tensions:

100 % 80 % 60 % 40 %

Des oscillogrammes ont été relevés pour chaque type d'amortisseur et aux différentes tensions. L'oscillogramme (figure 25) représente le courant de court-circuit brusque statorique pour un amortisseur en barres de cuivre trapézoïdales. L'enveloppe du courant a été dessinée.

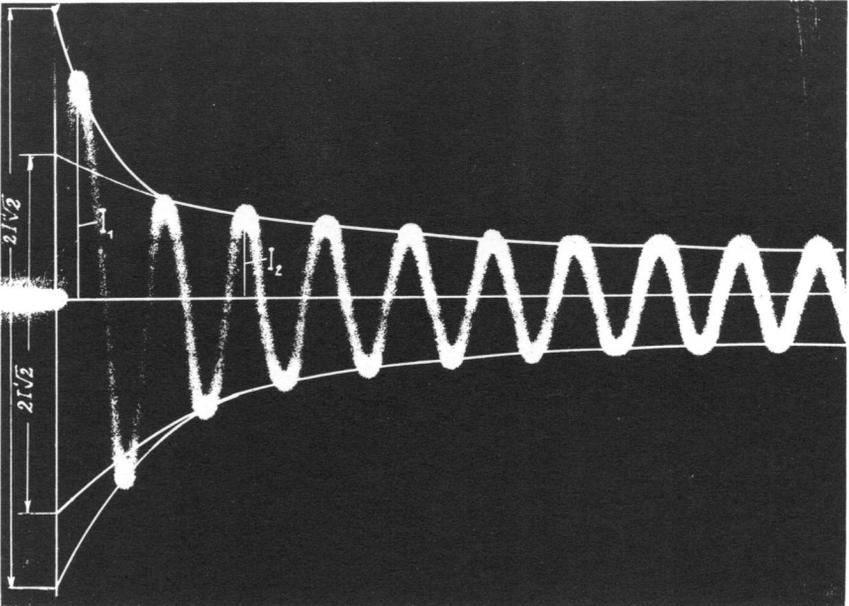


Fig. 25 Courant statorique au court-circuit brusque

Evaluation de x'_d , x''_d et des constantes de temps

Sur la figure 26 on peut lire les courants $I' + I''$, I' et I'' séparément, ainsi que les constantes de temps T'_d et T''_d . Le procédé de la détermination de ces courants est connu. I_k étant le courant de court-circuit maximum, I' le courant transitoire, et U la tension statorique avant la mise en court-circuit, on a :

$$x'_d = \frac{U}{\sqrt{2}(I' + I_k)\sqrt{3}}$$

$$x''_d = \frac{U}{\sqrt{3}\sqrt{2}(I_k + I' + I'')}$$

I'' est le courant subtransitoire.

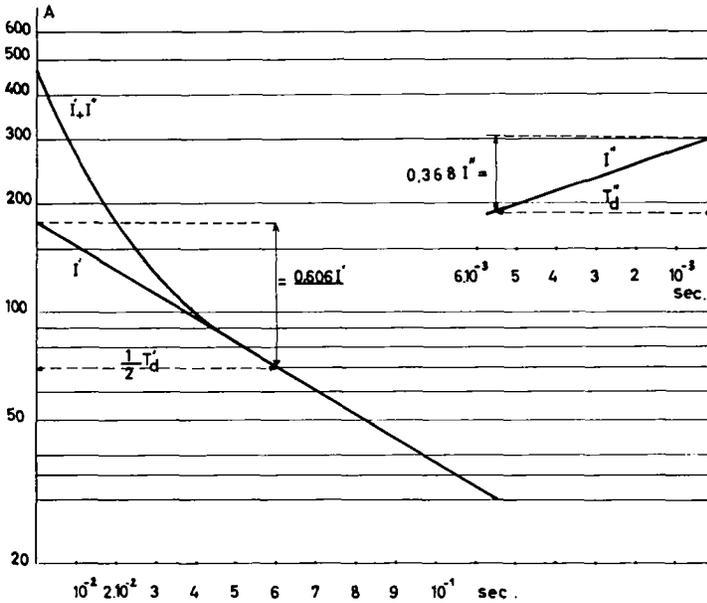


Fig. 26 Essai de court-circuit brusque

- I' = courant de court-circuit transitoire
- I'' = courant de court-circuit subtransitoire
- T'_d = constante de temps transitoire
- T''_d = constante de temps subtransitoire

Dans le tableau VI on trouve, suivant le type d'amortisseur, les valeurs des réactances transitoires et subtransitoires ainsi que les constantes de temps correspondantes.

Tableau VI

Type	valeurs mesurées machine au repos		valeurs mesurées mach. court-circuit			
	$x''_q (\Omega)$	$x''_d (\Omega)$	$x'_d (\Omega)$	x''_d	$T'_d(\text{sec})$	$T''_d(\text{sec})$
sans amortisseur	3,97	1,77	2,35	1,61	0,136	0,006
amort. complet barre cuivre cylindrique	0,49	0,525	1,62	0,822	0,12	0,0058
amort. complet barre laiton cylindrique	1,29	1,315	2,18	0,95	0,102	0,0057
amort. complet barre en cuivre trapézoïdale	0,448	0,55	1,83	0,818	0,12	0,0058
amort. complet barre en laiton trapézoïdale	1,6	1,56	1,74	0,985	0,12	0,0031
amort. incomplet barre en cuivre cylindrique			1,62	0,616	0,108	0,0047

On a calculé, pour chaque type d'amortisseur, les réactances transitoires et subtransitoires en fonction de la tension aux bornes de la machine, avant la mise en court-circuit brusque de la machine. Les figures 27, 28 et 29, sont relatives respectivement à l'amortisseur en barres de laiton cylindriques, en barres de cuivre cylindriques, en barres de cuivre trapézoïdales (l'amortisseur étant incomplet).

II. Calcul de x''_d à l'aide de la formule:

$$x''_d = x_d - x_{ad} \frac{K + R - 1}{KR + R - 1}$$

$$K = \frac{2\pi\lambda_{bd}}{n_b(1-k)\lambda k_1} = \frac{2\pi \cdot 1,23}{4,576 \cdot 53,9 \cdot 0,86} = 0,0358$$

$$R = \frac{k_1}{\lambda \beta^2} \left(2 \alpha \lambda + \frac{4 \lambda_e}{\pi} \right) = 1,231$$

$$k = 0,428$$

$$\alpha = 0,653$$

$$\beta = 0,96$$

Le coefficient de perméance λ_e de l'enroulement d'excitation est approximativement égal à celui d'une encoche ayant la même forme géométrique que l'espace entre deux pôles consécutifs. Dans le cas présent, c'est une encoche rectangulaire.

On trouve comme valeur non saturée de la réactance subtransitoire dans le cas de barres en cuivre trapézoïdales: $x''_d = 0,9$ ohms.

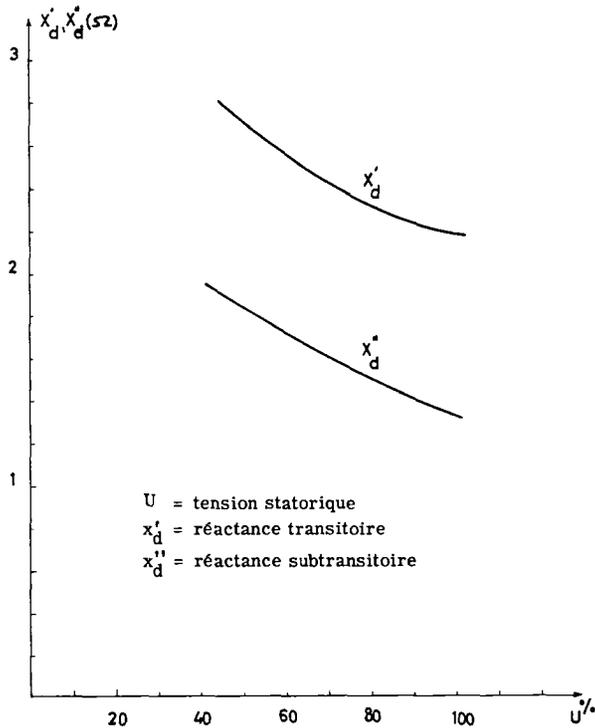


Fig. 27 Amortisseur (barre laiton cylindrique)

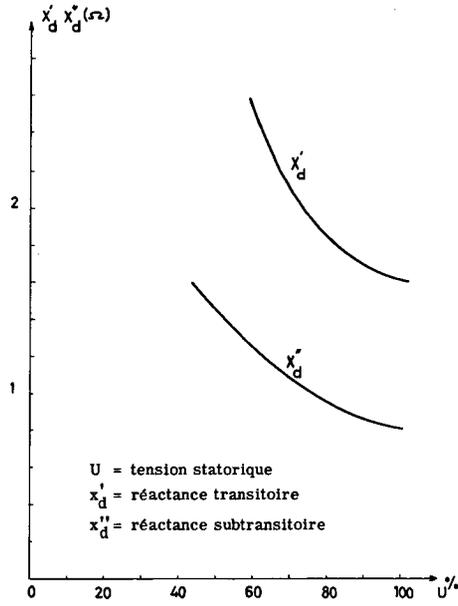


Fig. 28

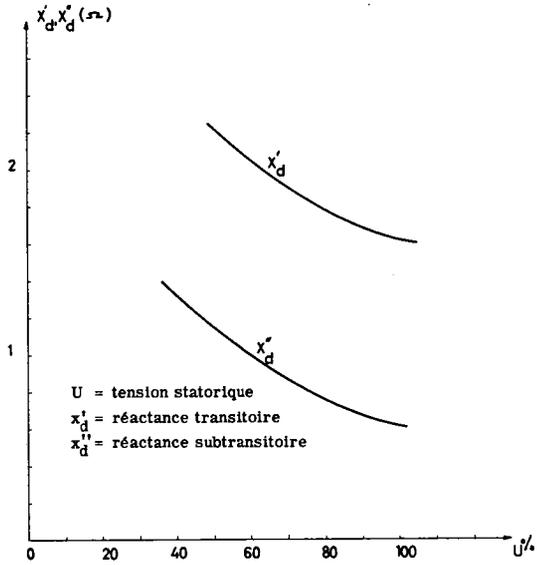


Fig. 29

III. Coefficient de perméance de chaque type de barre d'amortisseur

1. Coefficient de perméance de l'encoche cylindrique (barre en cuivre).

Soit l'encoche considérée (figure 30), la résistance par unité de longueur de la barre de cuivre est:

$$R_o = 5,18.10^{-6} \text{ ohms/cm}$$

Sur la courbe (figure 11), on a:

$$\frac{L\omega}{R_o} = \lambda_{bd} \cdot \frac{\omega \cdot u_o}{R_o}$$

D'où:
$$\lambda_{bd} = \frac{0,35 R_o}{4\pi \cdot \omega \cdot 10^{-9}} = 0,62$$

$$\lambda_{bd_{tot.}} = 0,62 + \frac{2}{2,5} = 1,42$$

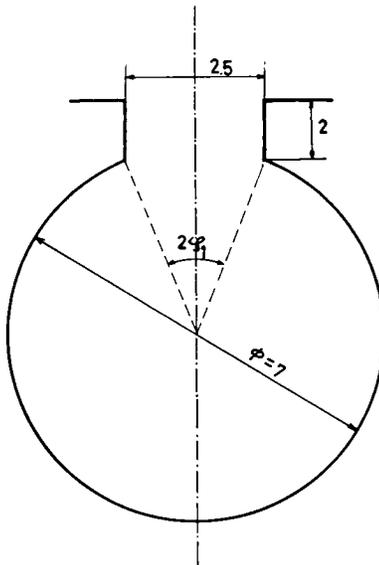


Fig. 30 Encoche circulaire d'amortisseur

ϕ = diamètre de l'encoche

$2\phi_1$ = ouverture d'isthme de l'encoche

2. Coefficient de perméance de l'encoche trapézoïdale (barre en cuivre, figure 31)

Résistance par unité de longueur:

$$R_0 = 4,87 \cdot 10^{-6} \text{ ohms/cm}$$

Pour $\beta = 0,3$ et $h' = h = 7,5$ mm, on lit sur la courbe (figure 6): $\frac{L\omega}{R_0} = 1$.
On trouve $\lambda_{bd} = 1,23$.

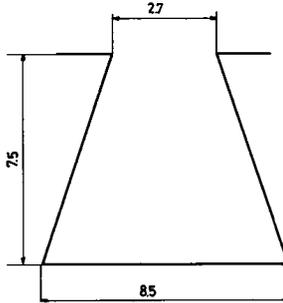


Fig. 31

3. Coefficient de perméance de l'encoche cylindrique (barre en laiton)

On a:

$$\begin{aligned} a. |\alpha| &= \frac{\pi}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{f \cdot \gamma}{50 \cdot 50}} \sqrt{2} a, \quad \text{avec } \gamma = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{ohm} \cdot \text{mm}^2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{50 \cdot 12,5}{50 \cdot 50}} 7,5 = 2,4 \end{aligned}$$

Résistance par unité de longueur:

$$R_0 = 2,08 \cdot 10^{-5} \text{ ohms/cm}$$

On trouve pour $\lambda_{bd\text{tot}} = 0,8 + \frac{2}{2,5} = 1,62$.

4. Coefficient de l'encoche trapézoïdale (barre en laiton)

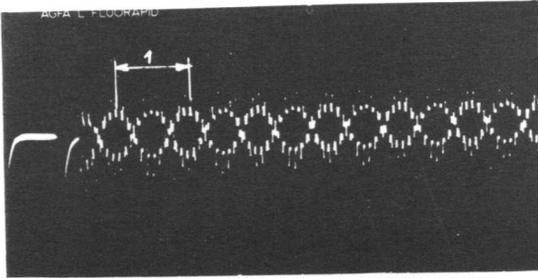
Pour $\beta = 0,3$ et $h' = h \sqrt{\frac{50 \cdot 12,5}{50 \cdot 50}} = 3,75$ mm

Résistance par unité de longueur:

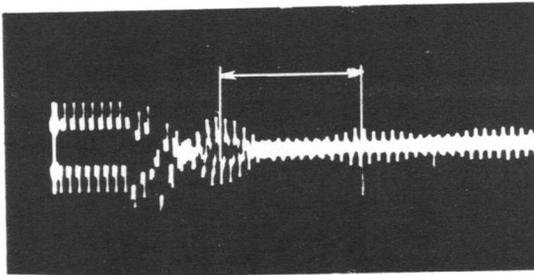
$$R_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ ohms/cm}$$

On trouve pour $\lambda_{bd} = 1,52$.

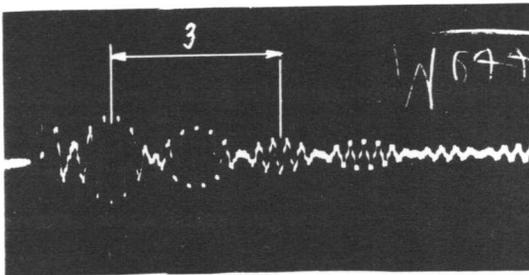
Le calcul de la réactance subtransitoire a été fait à l'aide de la formule (120) et cela pour tous les types d'amortisseurs en question dans ce travail (voir tableau VII).



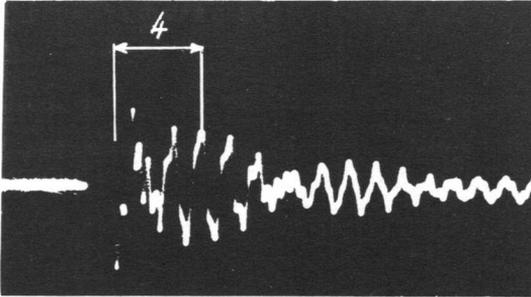
1. Sans amortisseur



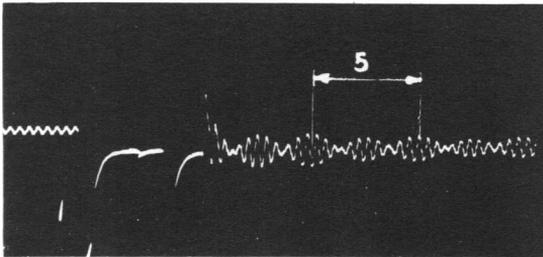
2. Amortisseur complet
(barre en cuivre
cylindrique)



3. Amortisseur complet
(barre en laiton
cylindrique)



4. Amortisseur complet
(barre en cuivre trapézoïdale)



5. Amortisseur incomplet
(barre en cuivre cylindrique)

Fig. 32 Oscillations propres

Tableau VII

Valeurs non saturées de x_d''			
Amortisseur laiton cylindrique	barre en cuivre cylindrique	barre en cuivre trapézoïdale	barre en laiton trapézoïdale
0,964 (Ω)	0,928 (Ω)	0,92 (Ω)	0,94 (Ω)

IV. Mesure du nombre d'oscillations par minute suivant le type d'amortisseur

1. Sur l'oscillogramme (fig. 32.4), relatif à l'amortisseur en barres de cuivre trapézoïdales, on voit que ces barres fournissent un nombre moindre d'oscillations que tous les autres types d'amortisseurs. Ce fait est explicable en raison de la faible résistance au courant alternatif de ces barres.

Sur le tableau VIII, on trouve le nombre d'oscillations par minute relatif à chaque type d'amortisseur.

Tableau VIII

	Oscillations/minute
1. Amortisseur incomplet barre en cuivre cylindrique (fig. 32.5)	252
2. Amortisseur complet barre en cuivre trapézoïdale (fig. 32.4)	174
3. Amortisseur complet barre en cuivre cylindrique (fig. 32.2)	192
4. Amortisseur complet barre laiton cylindrique (fig. 32.3)	252
5. Machine sans amortisseur (fig. 32.1)	270

2. Nombre d'oscillations par minute relatif à l'amortisseur avec barres en cuivre cylindriques, calculé à l'aide de la formule:

$$T_o = \frac{\pi}{p} \sqrt{\frac{GD^2}{mU_{ph} I_k \cos \delta_o}}$$

$$GD^2 = 16,6 \text{ kgm}^2$$

$$p = 4,$$

$$I_k = 51 \text{ ampères},$$

$$U_{ph} = 288,5 \text{ V}$$

On trouve $T_o = 0,302$ sec, ce qui correspond à 195 oscillations par minute, valeurs très proche de celle donnée par l'expérience. (Voir tableau VIII.)

Il ne s'agissait dans ce qui précède que d'oscillations propres, la machine synchrone étant soudain séparée du réseau et y est immédiatement après rétablie. Pen-

dant cet essai, la machine synchrone était séparée mécaniquement de la machine à courant continu, amis entraînée électriquement par une autre machine synchrone jusqu'au synchronisme et ensuite reliée au réseau.

V. Facteur d'amortissement en cas de court-circuit brusque

Facteur d'amortissement (figure 25):

$$\eta = \frac{1}{2} \log \frac{I_1 - I_k}{I_2 - I_k}$$

$\eta = 0,118$	barre en laiton trapézoïdale
$\eta = 0,0838$	sans amortisseur
$\eta = 0,13$	amortisseur complet, barre en laiton cylindrique
$\eta = 0,105$	amortisseur complet, barre en cuivre cylindrique
$\eta = 0,12$	amortisseur incomplet, barre en cuivre ronde
$\eta = 0,096$	amortisseur complet, barre en cuivre trapézoïdale

VI. Coefficient d'amortissement (période oscillatoire)

Calcul du rapport du coefficient d'amortissement transverse au coefficient d'amortissement direct.

Avant de faire ce calcul, il est nécessaire de déterminer les résistances directe et transverse R_{Dd} et R_{Dq} :

$$R_{Dd} = N \left(\frac{l_s}{q_r} + \frac{\tau_p}{3q_r} \right) \frac{1}{\tau}$$

$$R_{Dq} = N \left(\frac{l_s}{q_r} + \frac{2\tau_p}{3q_r} \right) \wp$$

N = nombre total de barres d'amortisseur

l_s = longueur d'une barre (en cuivre cylindrique)

q_r = section d'anneau

\wp = résistivité du cuivre

$l_s = 202 \text{ mm}$, $N = 64$, $\tau_p = 182 \text{ mm}$, $q_r = 187 \text{ mm}^2$

Le calcul numérique donne:

$$R_{Dd} = 7,15 \cdot 10^{-3} \text{ ohms}, \quad R_{Dq} = 7,55 \cdot 10^{-3} \text{ ohms}$$

On peut déduire donc que $R_{Dd} = R_{Dq}$, on suppose de plus que:

$$\Omega \cdot L_{\sigma Dd} = \Omega \cdot L_{\sigma Dq} = \Omega \cdot N \cdot L_{\sigma \text{ barre}}$$

Avec:

$$\Omega = \frac{2\omega}{p} = \frac{4\pi f}{4} = 157 \text{ sec}$$

$$NL_{\sigma \text{ barre}} = 8,34 \cdot 10^{-4}$$

On a vu (page 70), que pour un amortissement maximum:

$$\Omega \cdot L_{\sigma Dd} = R_{Dd} \quad \text{et} \quad \Omega \cdot L_{\sigma Dq} = R_{Dq}$$

de telle sorte que:

$$Z_{\sigma q} = \sqrt{2} R_{Dq}, \quad Z_{\sigma d} = \sqrt{2} R_{Dd}$$

et comme $R_{Dd} \cong R_{Dq}$, on a: $Z_{\sigma q} = Z_{\sigma d}$

On forme le rapport:

$$\frac{D_q}{D_d} = \frac{x_{aq}}{x_{ad}} \frac{x_d}{x_q} \cot^2 \delta_0$$

$$= \frac{0,44}{0,86} \cdot \frac{6,4}{3,68} \cdot 5,01 = 4,46$$

On voit de ce qui précède que l'amortissement sur l'axe transverse, est environ cinq fois supérieur à celui sur l'axe direct. Ce qui conduit à négliger le coefficient d'amortissement direct:

$$D_q = \frac{U_r^2}{\omega^2} \frac{x_{aq}}{x_q} \frac{1}{2R_{Dd}} \cos^2 \delta_0$$

Dans tout calcul relatif au coefficient d'amortissement, on peut, sans commettre une grande erreur, négliger le coefficient d'amortissement direct. La formule précédente montre, qu'il faut diminuer R_{Dd} c. à. d. augmenter la section de cuivre de l'amortisseur et cela jusqu'à une certaine limite imposée par l'échauffement de l'amortisseur, s'il on veut un coefficient d'amortissement optimum.

VII. Mesure de GD^2 et des pertes dans la machine

1. Mesure de GD^2 . La machine en marche synchrone, et l'excitation réglée de manière que $\cos\varphi = 1$, on mesure les pertes à vide P_0 . Puis on fait augmenter la vitesse de la machine de 10 % à 20 % et l'on sépare celle-ci immédiatement du réseau. On mesure le nombre de tours en fonction du temps, la courbe de la figure 33 et sa tangente au point N, donne la valeur du temps de ralentissement linéarisé.

On a :

$$GD^2 = \frac{365000 \cdot P_0 \cdot ab_{\text{sec}}}{n_{\text{ nominale}}^2} = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

2. Pertes-cuivre. La machine synchrone se comportant exactement comme pour la mesure de GD^2 , seulement les bornes du stator se trouvent court-circuitées après que la machine ait été séparée du réseau. On mesure le nombre de tours en fonction du temps, on obtient la courbe de la figure 34.

On a :

$$P_{\text{cu}} + P_{\text{supl.}} = \frac{GD^2 \cdot n_{\text{ nominale}}^2}{365000 \cdot ab_{\text{sec}}} - P_{\text{frottement}}$$

$$= 1,1 \text{ KW}$$

3. Pertes frottement. C'est le même essai que pour la détermination de GD^2 , mais l'enroulement d'excitation reste ouvert. La figure 35 permet l'obtention du temps de ralentissement linéarisé.

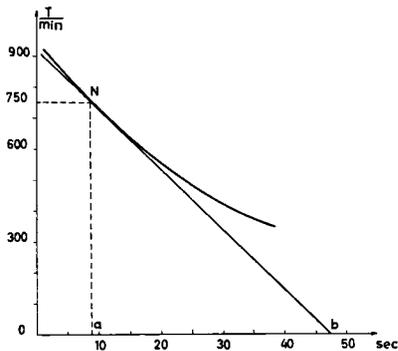


Fig. 33 Essai pour la mesure de GD^2

On a:

$$P_{\text{frott.}} = (P_{\text{fer}} + P_{\text{frott.}}) \cdot \frac{ab_{\text{sec}}(\text{avec excitation})}{ab_{\text{sec}}(\text{sans excitation})}$$
$$= 640 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{38,5}{86} = 0,2865 \text{ KW}$$

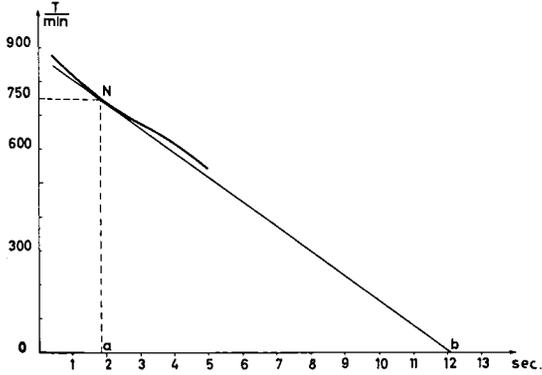


Fig. 34 Essai pour la mesure des pertes-cuivre

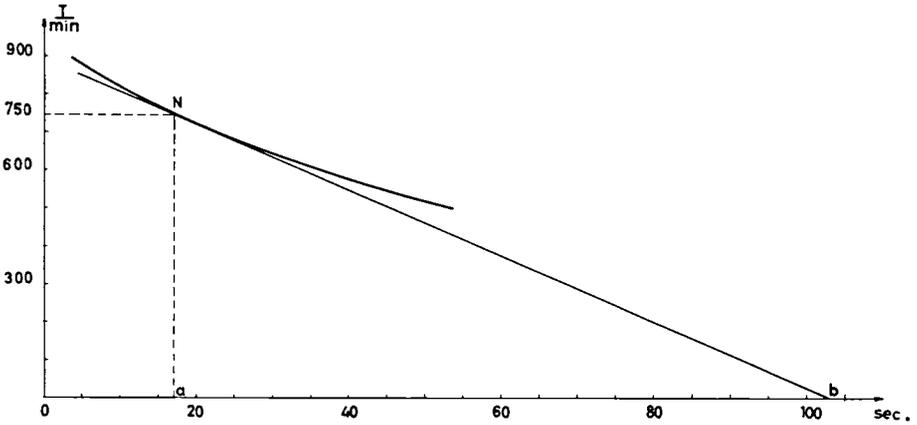


Fig. 35 $ab = t$, temps de ralentissement linéarisé

Résumé

Le but de cette thèse est d'apporter une contribution à l'étude des amortisseurs d'une machine synchrone à pôles saillants et de rechercher un moyen de choisir le type d'amortisseur le plus adéquat c. à d. suivant que les barres d'amortisseur sont cylindriques, trapézoïdales ou rectangulaires, de dimensionner cet amortisseur, soit pour un régime oscillatoire (faible résistance) soit pour la marche asynchrone ou en court-circuit brusque (grande résistance).

Cela fait l'objet des chapitres I, II, III et IV, où les résistances au courant continu et alternatif des trois types d'amortisseur mentionnés plus haut, ainsi que leurs perméances, furent calculées avec la précision nécessaire. L'évaluation des pertes supplémentaires dues aux courants de Foucault est dès lors possible.

Les formules (140a) et (140b), page 70, permettent de calculer le courant dans l'amortisseur en régime oscillatoire tandis que les formules (92) et (93), page 44, permettent de calculer l'augmentation des courants dans le circuit d'excitation et dans l'amortisseur en court-circuit brusque. Au chapitre IV ont été calculées les inductances propres et mutuelles d'une phase du stator, de l'enroulement d'excitation et de l'amortisseur, ainsi que les réactances subtransitoires et transitoires x_d'' , x_q'' , x_d' , x_q' , qui permettent en outre de calculer les constantes de temps T_{Ddo}'' de l'amortisseur et de l'enroulement d'excitation T_{do}' , ainsi que les constantes transitoires et subtransitoires T_d' et T_d'' .

Dans ce même chapitre on trouve le calcul de la réactance de réaction d'induit x_{ad} qui permet, connaissant la réactance de dispersion x_{σ} , de calculer la réactance synchrone $x_d = x_{ad} + x_{\sigma}$.

Au chapitre V, sont calculés la variation du couple de la machine en régime oscillatoire et les coefficients d'amortissement direct et transverse.

Au chapitre VI, sont exposés les résultats des essais qui consistent :

1. à calculer les valeurs saturées des réactances et des constantes de temps x_d' , x_d'' , T_d' et T_d'' , à l'aide de l'essai de court-circuit brusque en prenant les oscillogrammes des courants statoriques à des tensions égales à 40%, 60%, 80% et 100% de la tension nominale de la machine.
2. à déterminer les valeurs non saturées des réactances x_d' et x_d'' , la machine alimentée en monophasé est à l'arrêt.
3. à Calculer les réactances synchrones directe et transverse x_d et x_q par l'essai de glissement, ainsi que la réactance de dispersion x_{σ} (la machine ayant une charge inductive).
4. à étudier le comportement de la machine au moment de son déclenchement et son réenclenchement sur le réseau, et à déterminer pour quel type d'amortisseur en question dans ce travail, la machine synchronise plus efficacement.

Conclusion

La théorie de l'effet de peau ou effet pelliculaire, est connue de longue date. Nombre d'auteurs ont déjà traité le problème des conducteurs logés dans des encoches rectangulaires, trapézoïdales et cylindriques. Cette théorie a été reprise dans cette thèse et développée au moyen de méthodes mathématiques plus directes. Néanmoins, le cas du conducteur logé dans une encoche cylindrique avec isthme et parcouru par un courant alternatif est entièrement nouveau et est résolu dans toute sa généralité pour la première fois dans le présent travail.

Pour le calcul des réactances subtransitoires et transitoires, une formule de caractère nouveau a été calculée dans cette thèse surtout par l'introduction des constantes K , R et K^* page 58 et 59 qui permet de déterminer ces réactances avec précision, ainsi que les constantes de temps d'une machine synchrone.

D'après la théorie et l'essai effectué sur la machine synchrone en question dans ce travail, l'on peut conclure que l'amortisseur à barres trapézoïdales est plus favorable quant aux pertes supplémentaires et quant à la stabilité de la machine pendant la période oscillatoire.

L'application des formules (120), (121) et (122), page 59, concernant le calcul de ces réactances a été entreprise personnellement sur des machines de grande puissance de la Maison Brown Boveri à Baden (Suisse).

Les résultats obtenus étaient très satisfaisants et conformes à ceux donnés par les essais effectués sur ces machines pour la détermination des réactances transitoires et subtransitoires.

Il est nécessaire de souligner que ces valeurs des réactances données par les formules sus-mentionnées sont des valeurs non saturées et que pour obtenir leurs valeurs saturées, il faut en première approximation les multiplier par le coefficient de saturation qui, selon l'expérience, peut varier de 0,66 à 0,93.

Jusqu'à présent le coefficient de saturation n'a pu être calculé par l'analyse mathématique, les équations des flux et des tensions devenant non linéaires, sitôt qu'on est sur la partie curviligne de la caractéristique à vide de la machine synchrone. Cependant il est possible de le déterminer par des méthodes graphiques appropriées.

Malgré la précision des calculs et la bonne concordance observée avec les essais, des progrès restent ouverts concernant principalement la détermination du coefficient de saturation, de l'instant d'enclenchement du court-circuit (c. à. d. de l'état de la machine) et de sa température.

Liste des symboles employées dans cette étude

Les indices d et q se rapportent respectivement à l'axe direct et transverse de la machine.

Les indices Dd, Dq se rapportent à l'amortisseur direct et transverse.

L'indice e se rapporte à l'enroulement d'excitation.

Les indices doubles et permutés affectant les inductances et les réactances désignent successivement des inductances propres et mutuelles.

Toutes les grandeurs physiques affectées de l'indice σ sont relatives au flux de fuite ou de dispersion.

Réactances

Les réactances désignées par x sont triphasées, tandis que ceux désignées par X sont monophasées.

x_d	= réactance synchrone
x'_d	= réactance transitoire
x''_d	= réactance subtransitoire
x_σ	= réactance de dispersion
x_{ad}	= réactance de réaction d'induit
x_0	= réactance homopolaire
x_2	= réactance inverse
$X_{Dd\sigma}$	= réactance de fuite de l'amortisseur
X_{DDd}^*	= réactance propre de l'amortisseur
X_{DDd}	= réactance totale de l'amortisseur
X_{aed}	= réactance mutuelle entre la phase a et l'enroulement d'excitation
X_{eed}	= réactance propre de l'enroulement d'excitation
$X_{ed\sigma}$	= réactance de fuite de l'enroulement d'excitation
X_{eed}	= $X_{aed}^* + X_{ed\sigma}$ = réactance totale de l'enroulement d'excitation
X_{Ded}	= réactance mutuelle entre l'amortisseur et l'enroulement d'excitation

Grandeurs physiques

U_r	= tension de phase statorique
U_p	= tension de phase de la roue polaire
\vec{i}	= densité de courant
I_{eff}	= courant efficace
\vec{H}	= champ magnétique
\vec{E}	= champ électrique

- φ, ψ = flux magnétiques
 I_{Dd} = courant dans l'amortisseur direct
 B_1 = induction dans l'entrefer

Inductances et résistances

- Z = impédance
 M = inductance mutuelle
 L = self-inductance
 R = résistance
 r_{bd} = résistance équivalente d'une barre d'amortisseur

Couple

- M = maximum du couple d'entraînement
 m = couple monophasé
 GD^2 = moment de giration
 H = constante d'inertie (page 65)
 S = puissance apparente

Fonctions

- H_m = fonction de Hankel d'ordre m
 J_m = fonction de Bessel d'ordre m
 R = $R(\varphi)$, fonction de φ
 V = fonction potentielle
 N = fonction de Neumann

Constantes

- K = constante (page 59)
 K^* = constante (page 59)
 R = constante (page 58)
 J_m = partie imaginaire
 N_{Dd} = numéro d'ordre de la barre n
 k_w = facteur d'enroulement du stator
 k_{Dd} = facteur d'enroulement de l'amortisseur
 k_e = facteur d'enroulement de l'excitation
 k = facteur d'enroulement = $\frac{\sin(n_b \xi)}{n_b \sin \xi}$

$$c = \frac{8fl_a(wk_w)^2}{P \cdot 10^8}$$

k_1 = constante d'équivalence directe

k_q = constante d'équivalence transverse

k_c = facteur de Carter

w = nombre de spires par phase du stator

n_b = nombre de barres d'amortisseur par pôle

N = nombre total de barres de l'amortisseur

P = nombre total des pôles

p = nombre de paires de pôles

D = diamètre d'alésage en cm

l_a = longueur géométrique de la machine

b_1, b_0 = petite base et grande base de l'encoche trapézoïdale

N_e = nombre de spires par pôle de l'enroulement d'excitation

Lettres grecques

$$\beta = \frac{B_1}{B_1} \quad B_1 = \text{amplitude fondamentale de l'induction}$$

α = 0,66 constante du champ magnétique

λ_e = coefficient de perméance de l'excitation par pôle

λ_{bd} = coefficient de perméance d'une barre unique d'amortisseur par unité de longueur

δ = angle de charge

Ω = fréquence d'oscillation

θ = moment d'inertie de la machine

γ = conductibilité spécifique

ξ = βh

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma}{2} \cdot \frac{b}{b_n}}$$

$$\beta = \frac{b_1}{b_0}$$

$$\lambda_p = \frac{h}{3b} y(\beta)$$

$$\mu_0 = \text{perméabilité magnétique dans le vide} = 4\pi 10^{-9} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}}$$

λ = coefficient de perméance en général

ε_m = constante d'intégration

τ_p = pas polaire

$\xi(\varphi_1)$ = une fonction de φ_1

$$\alpha = \sqrt{-j} \sqrt{\mu_0 \omega \delta}$$

φ_1 = angle en degrés

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \delta^2}{2}}$$

δ = angle entre la phase a et l'axe direct

φ_n = $(2n-1)\xi$

ξ = angle entre deux barres consécutives de l'amortisseur

$$\lambda = \frac{2\mu_0 D}{P \delta_1}$$

$$\varphi_n = \frac{\tau_n}{\tau_p} \pi$$

ρ = coordonnée polaire

ρ = résistivité du cuivre

σ = coefficient de synchronisation

δ = entrefer

η = facteur d'amortissement

Table des matières

CHAPITRE PREMIER	9
I. Perméance d'une encoche rectangulaire	9
II. Calcul des pertes dans l'encoche	12
III. Perméance de l'encoche considérée	14
CHAPITRE II Impédance d'une encoche trapézoïdale	16
I. Cas où l'encoche est parcourue par un courant continu	16
II. Cas où l'encoche est parcourue par un courant alternatif	20
CHAPITRE III Inductance d'une encoche ronde avec isthme	28
I. Cas où le conducteur logé dans l'encoche est parcouru par un courant continu	28
II. Cas où le conducteur est parcouru par un courant alternatif	33
III. Cas où le conducteur est parcouru par un courant alternatif, les lignes magnétiques sont perpendiculaires à l'axe de l'encoche	43
CHAPITRE IV Réactances d'une machine synchrone à pôles saillants	48
I. Réactances transitoires et subtransitoires	48
II. Calcul de l'amortisseur	53
1. Amortisseur direct	53
2. Amortisseur transversal	54
CHAPITRE V Calcul de la variation du couple	66
CHAPITRE VI Réactances et constantes de temps des machines synchrones. Mesures	75
I. A. Réactance synchrone directe	76
B. Réactance de réaction d'induit	77
C. Réactance de réaction d'induit transversale	78
D. Réactance inverse	79

E. Réactance homopolaire	80
F. Réactances transitoires et subtransitoires	81
II. Calcul de x_d''	84
III. Coefficient de perméance de chaque type d'amortisseur	87
IV. Mesure du nombre d'oscillations	91
V. Facteur d'amortissement	92
VI. Coefficient d'amortissement	92
VII. Mesure de GD^2 et des pertes dans la machine	94

LITTERATURE

- L 1 G. Valiron, Théorie des Fonctions.
- L 2 A. Angot, Complément de Mathématiques.
- L 3 A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band VI.
- L 4 C. Concordia, Synchronous Machines (Theory and Performance).
- L 5 F. Ollendorff, Berechnung magnetischer Felder.
- L 6 G. Goudet, Les fonctions de Bessel.
- L 7 R. Richter, Elektrische Maschinen.
- L 8 E. Kimbark, Power System Stability, Volume III.
- L 9 R. Brüderlink, Die Stromverteilung in den Dämpferstäben von Synchronmaschinen. Siemens-Z. 16. Jg. (1936), S. 133.
- L 10 J. Walbeck, Stabströme im Dämpferkäfig von Synchronmaschinen... Diss. Aachen 1942.
- L 11 O. E. Pollot, Die Stromverteilung im Dämpferkäfig von Synchronmaschinen mit Einzelpolen bei asynchronem Anlauf. AfE. Bd. 36 (1942), S. 652.
- L 12 Electrical Engineering, Bd. 51 (1932).
- L 13 D. Harms, Ueber die Verteilung der Ströme in der Dämpferwicklung von Turbogeneratoren mit Massivläufern. ETZ. 73. Jg. (1952), S. 173.
- L 14 E. Jasse, Théorie des Dämpferkäfigs von Einzelpolmaschinen. AfE. Bd. 39 (1948), S. 233.

CURRICULUM VITAE

Nom et Prénom	ACHAB Moutawé
Lieu et Date de Naissance	El Krayé, Syrie, le 14 juillet, 1924
Nationalité	République Arabe Unie (Syrie)
Adresse actuelle	Rieterstrasse 91, Zürich 2

FORMATION

1945	Baccalauréat, série Mathématiques (Damas)
1945 - 1947	Instituteur à l'Enseignement Primaire en Syrie (ville de Kanawat)
1947 - 1949	Classes de Mathématiques Spéciales au Lycée Janson de Sailly, Paris
1949 - 1952	Licence ès Sciences, Faculté des Sciences de Paris
1952 - 1953	Professeur à l'Enseignement Secondaire en Syrie (ville de Soueida)
1953	Stage de six mois à MICAFIL S. A. Zurich
1953 - 1957	Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich, Section III B, Electrotechnique
1957 (fin)	Diplôme d'ingénieur électricien
1958 - 1961	Assistant et élève de doctorat chez Monsieur le Professeur A. Dutoit (Institut de Construction de Machines électriques) Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich
1961 (16 Janvier)	Ingénieur chez Brown, Boveri & Cie. S. A., Baden (Bureau d'Etudes)

Zurich, le 16 Janvier 1961

M. Achab