

Diss. ETH No. 22116

UTILITY MAXIMIZATION IN AN ILLIQUID MARKET

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
MIRJANA VUKELJA
MSc ETH Mathematics
born October 29, 1981
citizen of Birr (AG), Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Halil Mete Soner	examiner
Prof. Dr. Johannes Muhle-Karbe	co-examiner
Prof. Dr. Alexander Schied	co-examiner

2014

Abstract

This thesis is concerned with the study of maximizing the expected utility from final wealth in an illiquid market. We adopt the liquidity risk modeling approach introduced by Roch and Soner [46].

The first part of this thesis is dedicated to the utility maximization from final wealth in discrete time. Especially in models with random impact, no-arbitrage is not immediately implied by the existence of a risk neutral measure for the price process with no-impact. We show under which conditions the value function associated to the optimal stochastic control problem in the illiquid market is smaller than the value function in the Black-Scholes model. Furthermore, we prove that the value function is continuous and that the dynamic programming principle holds true. We then develop an efficient algorithm to compute the optimal trading strategy and the value function backwards in time. This gives us numerical results.

In part two we study the same optimal stochastic control problem but in continuous time. We construct a smooth supersolution to the associated Hamilton-Jacobi-Bellman equation. In particular, this supersolution is an upper bound of the value function. We then show that the weak dynamic programming principle holds true and that the value function is a viscosity solution of the dynamic programming equation. Furthermore, we prove the comparison principle which gives us the uniqueness of the viscosity solution.

In the final chapter, we focus on the convergence of the discrete-time approximation. Numerical computations exhibit this convergence.

Kurzfassung

Diese Doktorarbeit befasst sich mit der Studie der Nutzenmaximierung des Vermögens zum Endzeitpunkt in einem illiquiden Markt. Wir übernehmen das Model für das Liquiditätsrisiko von Roch und Soner [46].

Der erste Teil dieser Doktorarbeit handelt von der Nutzenmaximierung des Vermögens zum Endzeitpunkt in diskreter Zeit. Insbesondere in Modellen mit stochastischer Auswirkung auf die Preise, ist die Arbitragefreiheit nicht nur durch die Existenz des risikoneutralen Masses gegeben. Wir zeigen, unter welchen Bedingungen die Wertfunktion des dazugehörigen optimalen stochastischen Problems im illiquiden Model kleiner ist als die Wertfunktion im Black-Scholes Model. Darüber hinaus beweisen wir, dass die Wertfunktion stetig ist und dass das dynamische Programmierungsprinzip gilt. Mit diesem dynamischen Programmierungsprinzip entwickeln wir einen effizienten Algorithmus um die optimale Strategie und die Wertfunktion rückwärts in der Zeit zu berechnen. Damit erhalten wir numerisch Resultate.

Im zweiten Teil untersuchen wir das gleiche optimale stochastische Problem in stetiger Zeit. Wir konstruieren eine glatte Oberlösung (supersolution) der dazugehörigen Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung. Insbesondere ist diese Oberlösung eine obere Schranke der Wertfunktion. Anschliessend zeigen wir, dass das schwache dynamische Programmierungsprinzip gilt und dass die Wertfunktion eine Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung ist. Zuletzt beweisen wir das Vergleichsprinzip. Daraus folgt dann die Eindeutigkeit der Viskositätslösung.

Im letzten Teil dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf die Konvergenz der Approximation in diskreter Zeit und beweisen, dass die Wertfunktion in diskreter Zeit gegen die Wertfunktion in stetiger Zeit konvergiert. Numerische Berechnungen belegen diese Konvergenz.