Diss. ETH No. 17296

Approximation Schemes for Geometric Problems

A dissertation submitted to the
ETH Zürich

for the degree of
Doktor der Wissenschaften

presented by

Jan Magnus Remy
Diplom-Informatiker, Technische Universität München
born 01.12.1977
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Angelika Steger, *ETH Zürich* (examiner)
Prof. Satish Rao, *UC Berkeley* (co-examiner)
Prof. Subhash Suri, *UC Santa Barbara* (co-examiner)

2007

Abstract

This thesis is devoted to geometric optimization problems of the following kind: given a set of points $P \subset \mathscr{R}^d$, we wish to compute a certain straight-line graph on P with minimum length, such as a shortest Steiner tree, a salesman tour or a triangulation. As most of these problems are $\mathcal{NP}$-hard and many of them even in the strong sense, approximation algorithms have attracted considerable attention. One important breakthrough was made in 1996 when Arora [**10, 11**] and Mitchell [**93, 94**] independently introduced a polynomial time approximation scheme (PTAS) for several $\mathcal{NP}$-hard geometric problems, including the traveling salesman problem and the Steiner tree problem.

Arora's technique applies to a wide class of problems for which the so-called Patching Lemma holds. This lemma essentially states that one can reduce the number of crossings of some solution with a given line segment without increasing the cost of the solution much. However, there is a number of popular geometric problems, where it seems unclear whether a result similar to the Patching Lemma is true. For example, this is the case for k-MEDIAN, MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION, MINIMUM WEIGHT STEINER TRIANGULATION or BOUNDED-DEGREE MINIMUM SPANNING TREE. Nevertheless, for some of these problems approximation schemes were recently obtained using different methods. For instance, it is known that a PTAS for k-MEDIAN [**14, 82**] and a quasi-polynomial time approximation scheme (QPTAS) for BOUNDED-DEGREE MINIMUM SPANNING TREE [**13**] exists. In this thesis we study the problems listed below. They also seem to resist Arora's technique.

Minimum Weight Triangulation. The MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION problem is to find a triangulation of minimum length for a given set of points in the Euclidean plane. It was one of the few longstanding open challenges from the famous list of twelve problems with unknown complexity status, published by Garey and Johnson [**56**] in 1979. Very recently the problem was shown to be $\mathcal{NP}$-hard by Mulzer and Rote [**99**]. In this thesis we present a QPTAS for MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION.

Node-weighted Steiner Trees. Let P denote a set of points in $\mathscr{R}^d$, and consider the following variant of the geometric Steiner tree problem: we pay a penalty of c_S units for every Steiner point we use and we are charged $\pi(u)$ units if the point $u \in P$ is not included in the tree. The goal is to minimize the total length of the tree including the penalties. In dimension 2 we introduce a PTAS for the problem. Moreover, for arbitrary fixed dimension our techniques still yield a QPTAS.

Vehicle Routing with Allocation. The VEHICLE-ROUTING WITH ALLOCATION problem is a generalization of TSP. We do not require that all points lie on the salesman tour. However, points that lie not on the tour are allocated, i.e., they are directly connected to the nearest tour point paying a higher (per-unit) cost. More formally, the input is a set of points P in $\mathscr{R}^d$ along with functions $\alpha : P \rightarrow [0, \infty)$ and $\beta : P \rightarrow [1, \infty)$. A solution is a subset $T \subseteq P$ and a salesman tour π through T, and we wish to minimize the total length of the tour including all allocation costs. The allocation cost for a single point $p \in P \setminus T$ is $\alpha(p) + \beta(p) \cdot d(p, q)$, where $q \in T$ is the nearest point on the tour. We give a PTAS with complexity $\mathcal{O}\left(n \log^{d+3} n\right)$ for this problem. For the Steiner variant of VEHICLE-ROUTING WITH ALLOCATION we introduce a PTAS with complexity $\mathcal{O}(n \log^{\xi(d,\varepsilon)} n)$, where $\xi(d, \varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{d}/\varepsilon)^{d-1}$.

Résumé

Cette thèse de doctorat étudie des problèmes d'optimisation géométrique de la façon suivante: etant donné un ensemble des points $P \subset \mathscr{R}^d$, nous voulons construire un arbre de Steiner, un cycle pour un voyageur de commerce, une triangulation ou une autre structure avec une longueur (ou un poids) minimal. La plupart de ces problèmes sont $\mathcal{NP}$-difficiles, et donc nous nous intéressons aux algorithmes d'approximation. En fait, il y a beaucoup de résultats sur des algorithmes d'approximation pour tels problèmes géométriques. Un progrès important a été fait en 1996 quand Arora [**10, 11**] et Mitchell [**93, 94**] ont présenté indépendamment un *polynomial time approximation scheme* (PTAS) pour les variantes géométriques du problème du voyageur de commerce, du problème de l'arbre de Steiner et d'autres problèmes qui sont $\mathcal{NP}$-difficiles.

La technique d'Arora est applicable à bien de problèmes, à condition que nous puissions prouver un lemme correspondant au *Patching Lemma*. Ce lemme affirme essentiellement qu'on peut réduire le nombre des points d'intersection d'une solution avec un segment d'une droite sans beaucoup hausser le coût de la solution. Mais il y a beaucoup de problèmes géométriques pour lesquels on ne peut pas certainement dire si un résultat correspondant au *Patching Lemma* soit vrai.

C'est le cas pour les problèmes k-MEDIAN, MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION, MINIMUM WEIGHT STEINER TRIANGULATION, BOUNDED-DEGREE MINIMUM SPANNING TREE et d'autres problèmes. Néanmoins, pour un petit nombre de ces problèmes il y a des *approximation schemes*, utilisant des méthodes différentes. Ainsi, nous avons un PTAS pour k-MEDIAN [**14, 82**] et un *quasi-polynomial time approximation scheme* (QPTAS) pour BOUNDED-DEGREE MINIMUM SPANNING TREE [**13**]. Cette thèse étudie les problèmes suivants qui semblent de s'opposer à la technique d'Arora.

Minimum Weight Triangulation. Le problème MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION, c'est de construire une triangulation avec un poids minimal d'un ensemble des points dans le plan. Ce problème est apparu sur la liste des douze problèmes avec une complexité incertaine publiée en

1979 par Garey et Johnson [**56**], et il restait irrésolu pour longtemps. Dernièrement Mulzer et Rote [**99**] ont prouvé que MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION est $\mathcal{NP}$-difficile. Ici, nous introduisons un QPTAS pour MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION.

Node-weighted Steiner Trees. Soit $P \subset \mathscr{R}^d$ un ensemble des points. Nous étudions la variante suivante du problème de l'arbre de Steiner: on doit payer une pénalisation de $\pi(u)$ unités si le point u n'est pas inclus dans l'arbre et chaque point Steiner de l'arbre coûte c_S unités. On souhaite de construire un arbre avec un poids et une pénalisation minimal. Cette thèse constitue un PTAS pour ce problème dans le plan. Dans la dimension fixée notre technique génère encore un QPTAS.

Vehicle Routing with Allocation. Le problème VEHICLE-ROUTING WITH ALLOCATION est une généralisation du problème du voyageur de commerce. Néanmoins nous n'exigeons pas que tous les points soient inclus dans le cycle. Au lieu de cela, nous devons joindre les points non-inclus au prochain point du cycle. Plus précisément, l'input est un ensemble des points $P \subset \mathscr{R}^d$ et des fonctions $\alpha : P \to [0, \infty)$ et $\beta : P \to [1, \infty)$. Une solution est un sous-ensemble $T \subseteq P$ avec un cycle π sur T, et on minimise le poids du cycle et le coût d'allocation totale. Le coût d'allocation pour un point $p \in P \setminus T$ est $\alpha(p) + \beta(p) \cdot d(p, q)$, étant $q \in T$ le point le plus proche du cycle. A la suite, nous allons décrire un PTAS avec la complexité $\mathcal{O}\left(n \log^{3+d} n\right)$ pour ce problème. De plus, cette thèse constitue un PTAS avec la complexité $\mathcal{O}(n \log^{\xi(d,\varepsilon)} n)$, étant $\xi(d, \varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{d}/\varepsilon)^{d-1}$, pour la variante du VEHICLE-ROUTING WITH ALLOCATION où la solution peut contenir des points Steiner.