

Diss. ETH No. 20745

# Natural Computation

A dissertation submitted to the  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences (Dr. sc. ETH Zürich)

presented by  
MARTIN SCHÜLE  
Master of Science,  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich  
born 25.12.1977  
citizen of Zurich, ZH and Geneva, GE

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. M. Hampe, examiner  
Prof. Dr. R. Stoop, co-examiner  
Prof. Dr. G. Freudenthal, co-examiner  
Prof. Dr. J. Kari, co-examiner

2012

## Abstract

This doctoral thesis presents a study of “natural computation”. “Natural computation” refers to processes in nature that are in the natural sciences described in computational or informational terms. The thesis follows a threefold, interdisciplinary strategy to gain a thorough and comprehensive understanding of the notion of “natural computation”. First, the main notions of computation and information used in the natural sciences are surveyed. Second, the notions are placed in a philosophical-historical context that illuminates their genesis and philosophical import. Third, original research is contributed in the field of cellular automata, which constitute a specific, “natural” computational model. Because, in the case of “natural computation”, computation is often understood in the wider sense of “information-processing” and information is usually stored, transmitted or communicated by symbols or signs, this study seeks to address the question of “natural computation” in the triadic field spanned by the notions of computation, information and sign.

In the historical-philosophical part of the thesis, the etymological and philosophical roots of the notions under discussion are localised in antique and late antique philosophy. In particular, Aristotle’s and Stoic logic and the notion of sign with Aristotle, the Stoics and Augustine are discussed. Then, a historical case study on the early modern thought on “computation” is presented on the basis of the scientific and philosophical works of Descartes, Hobbes and Leibniz. It is shown that Descartes developed a theory of computation in the following sense. Provoked by the success of algebraic methods in geometrical problem solving, certain methods that go beyond the pure Euclidean means had to be legitimised within a novel mathematical framework. Descartes’ theory basically declares geometrical problems “computable” by a class of algorithms that conform to certain epistemological criteria which are related to his general views on scientific method and intuition and his metaphysical doctrines. Hobbes mechanical-computational scheme of nature and mind is discussed and criticised as probably the first “computational theory of mind” and thus as a conceptual role model of a naturalistic account of “natural computation”. Leibniz’ scientific and philosophical work is studied in regard to the idea of “symbolic reasoning”, which may be regarded as the philosophical underpinning of the modern formal understanding of computation. A special emphasis is placed on Leibniz’ theory of sign, logic and proof theory. Leibniz metaphysical system then serves, besides Descartes’ and Hobbes’ metaphysical systems, as a third possibility for a universal framework for the kind of notion of “computation” or “natural computation” found in early modern philosophy.

In a second historical case study, the genesis of the presently dominant concept of computation, the Turing notion of computation, is studied. The developments in mathematics in the 18th and 19th century led to a questioning of the foundations of mathematics, which ultimately culminated in the “foundational crisis of mathematics”. The three main foundational schools, logicism, intuitionism and formalism, are discussed on the basis of Frege’s, Brouwer’s and Hilbert’s foundational work. Against this background, it is shown that Hilbert’s formalist programme for a foundation of mathematics combined certain aspects of logicism and intuitionism, that ultimately brought out, through the work of Gödel, Turing and others, the modern conception of computation in the form of the Turing notion of computation.

In the scientific-philosophical part of the thesis, the current discussions on “natural computation” are surveyed. First, alternative models or notions of computation, such as analog machines, neural networks, etc. are surveyed and the Church-Turing thesis, which basically denies any relevance to these models, is discussed. The survey and

discussion, together with the historical case studies, allows us to elucidate the essential characteristics of the notion of computation in philosophical terms. Computation is distinguished as an epistemologically motivated scheme to legitimise algorithms, i.e. syntactic processes that have, through the use of signs, a representational power, which is characterised by its degree of universality. The representational aspects of “natural computation” are then further investigated with the help of the notion of “information”. The question of what constitutes “information” is approached through a survey of “information measures”. In particular, the Shannon information, the entropy notion in physics and the Kolmogorov and Stoop notion of “complexity” are investigated in regard to their theoretical roles and philosophical implications. From this study, a philosophical characterisation of the nature of “information measures” is attempted that spills over, in connection to the theories of sign already discussed in the thesis, to a general discussion and characterisation of the notions of information and sign. Information, and with it signs as the elementary informational units, are characterised through informational measures, which involve a potential reductive act that evaluates a given structure. The epistemological or ontological nature of the structures and measures thereby assumed is to a certain degree left open; a “metaphysical commitment”, as for example purported in the systems advanced by Descartes, Hobbes or Leibniz, is required to decide on the ultimate foundation of “natural computation”.

In the scientific part of the thesis, a specific “connectionist” model of natural computation that shows the self-emerging properties thought to be characteristic of natural computing systems, the cellular automaton, is investigated. The main research focus is on giving a precise classification of the dynamical behaviour of the simplest class of cellular automata that still show complex behaviour, the elementary cellular automata. To this end, an algebraic characterisation of the local interaction rules of elementary cellular automata are derived and a topological dynamics characterisation of the dynamical behaviour of the elementary cellular automata, both in the infinite and finite case, in terms of fundamental dynamical systems notions, such as sensitivity and chaoticity, is presented. Based on these results, it is conjectured that elementary cellular automata capable of carrying out “complex” computational tasks, e.g. by being Turing-universal, are at the “edge of chaos”, i.e. in a regime between eventually regular and chaotic behaviour. In a further study, a basic computational problem, the density classification problem, is analysed. This problem is not solvable using (deterministic) two-state cellular automata, but solvable, in a certain sense, by probabilistic two-state cellular automata. It is observed that the problem is solved most efficiently in the vicinity of the critical point indicating a phase transition of the system, which may support the hypothesis of self-organised criticality in “natural computing” systems.

## Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation präsentiert eine Studie von “natürlichen Rechenprozessen” (“natural computation”), d.h. von Prozessen in der Natur, die in den Naturwissenschaften mit Hilfe von Begriffen wie “computation” oder “Informationsverarbeitung” beschrieben werden. Die Arbeit verfolgt eine interdisziplinäre Strategie, die zu einer umfassenden, präzisen Analyse dieser Begriffe führen soll: Erstens sollen die wichtigsten Begriffe von “computation” und Information, wie sie in den Naturwissenschaften verwendet werden, untersucht werden, zweitens sollen diese in einen historisch-philosophischen Kontext gestellt werden, der ihre Entstehung und philosophische Tragweite erklären soll und drittens soll im Gebiet der zellulären Automaten ein eigener Beitrag zur aktuellen Forschung geleistet werden. Weil, im Falle von “natürlichen Rechenprozessen”, oft Prozesse im Sinne von “Informationsverarbeitung” gemeint ist und Information üblicherweise mithilfe von Symbolen oder Zeichen gespeichert, übermittelt oder kommuniziert wird, geht die Arbeit der Frage von “natürlichen Rechenprozessen” im begrifflichen Feld, das durch die Rechen-, Informations- und Zeichenbegriffe aufgespannt wird, nach.

Im historisch-philosophischen Teil der Arbeit werden zunächst die etymologischen und philosophiegeschichtlichen Wurzeln der zu untersuchenden Begriffe in der antiken und spätantiken Philosophie geortet. Insbesondere werden Aristoteles’ und die stoische Logik und der Zeichenbegriff bei Aristoteles, den Stoikern und Augustinus behandelt. Dann werden in einer historischen Fallstudie die frühneuzeitlichen Ideen zu “computation” anhand der wissenschaftlichen und philosophischen Arbeiten von Descartes, Hobbes und Leibniz untersucht. Es wird gezeigt, dass Descartes eine Theorie von “computation” im folgenden Sinne entwickelt hatte: Ausgelöst durch den Erfolg algebraischer Methoden zur Lösung von geometrischen Problemen mussten gewisse Methoden, die über die reinen Euklidischen Methoden hinausgehen, im Rahmen einer neuen Theorie legitimiert werden. Descartes’ Theorie deklariert im Wesentlichen gewisse Probleme als “berechenbar”, falls diese durch eine Klasse von Algorithmen lösbar sind, die gewissen erkenntnistheoretischen Kriterien genügen, die in Bezug zu seinen allgemeinen Auffassungen in wissenschaftsmethodischen Fragen und des Begriffs der Anschauung oder Intuition und zu seinen metaphysischen Lehren stehen. Weiter wird Hobbes’ mechanisch-rechnerische Theorie von Geist und Natur, die in der Philosophie des Geistes wahrscheinlich erste Theorie, die mit Rechenbegriffen operiert und daher als konzeptionelles Modell naturalistischer Bemühungen, Geist und Gehirn mit “natürlichen Rechenprozessen” zu beschreiben gelten kann, behandelt und kritisiert. Leibniz’ Werke werden im Hinblick auf die Idee der “symbolischen Erkenntnis”, die als die philosophische Grundidee moderner, formaler Kalküle bezeichnet werden kann, studiert. Im Speziellen werden seine Zeichentheorie, die Ansätze zu einer mathematischen Logik und seine Beweistheorie untersucht. Leibniz’ metaphysisches System dient dann, neben Descartes’ und Hobbes’ metaphysischen Systemen, als eine dritte Möglichkeit einer universellen, grundlegenden Theorie der Begriffe von “computation” oder “natürlichen Rechenprozessen”, die in der philosophischen Literatur der Frühen Neuzeit zu finden sind. In einer weiteren historischen Fallstudie wird die Entstehung der heutzutage dominierenden Begriffs von “computation”, die sogenannte Turingmaschine, untersucht. Die Entwicklungen innerhalb der Mathematik des 18. und 19. Jahrhunderts führten zu einer vertieften Auseinandersetzung mit den Grundlagen der Mathematik, die schliesslich in der sogenannten “Grundlagenkrise der Mathematik” gipfelte. Die drei wichtigsten Schulen in der Philosophie der Mathematik, der Logizismus, Intuitionismus und der Formalismus, werden anhand der Schriften von Frege,

Brouwer und Hilbert diskutiert. Vor diesem Hintergrund wird gezeigt, dass Hilbert's formalistisches Programm einer Grundlegung der Mathematik gewisse logizistische und intuitionistische Elemente kombinierte, welches durch die Arbeiten von Gödel, Turing und anderen schliesslich den modernen Begriff von "computation" hervorbrachte.

Im philosophisch-wissenschaftlichen Teil der Arbeit wird die gegenwärtige Diskussion "natürlicher Rechenprozesse" behandelt. Zunächst werden alternative Modelle oder Begriffe von "computation", wie etwa analoge Maschinen, neuronale Netzwerke, etc. und die Church-Turing These, die die Relevanz dieser Modelle bestreitet, diskutiert. Anhand dieser Studie wird, mit Einbezug der historischen Fallstudien, eine philosophische Charakterisierung von "computation" unternommen. "Computation" wird erklärt als eine erkenntnistheoretisch motivierte Theorie, die die Algorithmen legitimiert, welche als syntaktische Prozesse durch den Gebrauch von Zeichen eine repräsentative Kraft erhalten, die durch den Grad ihrer Universalität charakterisiert wird. Die Frage der Repräsentation in "natürlichen Rechenprozessen" wird in einer weiteren Studie mit Hilfe des Informationsbegriffes untersucht. Die Frage was Information ausmacht wird mit einer Untersuchung von "Informationsmassen" angegangen. Im Besonderen werden der Informationsbegriff von Shannon, der Entropiebegriff in der Physik und die Komplexitätsmasse von Kolmogorov und Stoop diskutiert. Aufgrund dieser Studie wird dann eine Charakterisierung der Eigenschaften von Informationsmassen versucht, die im Zusammenhang mit den schon behandelten Zeichenbegriffen auf eine allgemeine Diskussion und Charakterisierung des Informations- und Zeichenbegriffes hinausläuft: Information, und damit auch Zeichen als die elementaren Informationseinheiten, wird durch Informationsmasse charakterisiert, die einen potentiellen, reduktiven Akt beinhalten, der eine gegebene Struktur evaluiert. Die erkenntnistheoretische oder ontologische Wesenheit von Strukturen und Massen wird dabei zu einem gewissen Grade offen gehalten; es wird ein "metaphysisches Bekenntnis", wie es etwa in Descartes', Hobbes' oder Leibniz' System zu finden ist, gefordert, falls eine abschliessende Grundlegung einer Theorie "natürlicher Rechenprozesse" versucht wird.

Im mathematischen Teil der Arbeit werden zelluläre Automaten studiert, d.h. ein spezifisches, "konnektionistisches" Modell von "computation", welches die selbstemergenten Eigenschaften aufweist, von denen angenommen wird, dass sie für Systeme mit "natürlichen Rechenprozessen" charakteristisch sind. Der Fokus liegt dabei auf einer präzisen Klassifikation des dynamischen Verhaltens von elementaren zellulären Automaten. Dazu werden algebraische Ausdrücke für die lokalen Interaktionsregeln der elementaren zellulären Automaten hergeleitet und eine Charakterisierung der Dynamik dieser Systeme, sowohl im endlichen wie unendlichen Fall, gegeben, die mit den Standardbegriffen der Theorie dynamischer Systeme operiert. Aufgrund dieser Untersuchungen wird die Hypothese unterstützt, dass die zu komplexen Rechenaufgaben fähigen Automaten am "Rande des Chaos", d.h. in einem dynamischen Regime zwischen schliesslich periodischem und chaotischem Verhalten zu finden sind. In einer weiteren Studie wird ein elementares Problem, das sogenannte Dichte-Klassifizierungs-Problem, analysiert, das für einen deterministischen, binären zellulären Automaten unlösbar, mit einem probabilistischen, binären zellulären Automaten in einem gewissen Sinne aber lösbar ist. Das Problem wird dabei am effizientesten in der Nähe des kritischen Punktes gelöst, der einen Phasenübergang des Systems anzeigt, was als ein weiterer Hinweis auf selbstorganisierte Kritikalität in Systemen, die zu "natürlichen Rechenprozessen" fähig sind, interpretiert werden kann.