

This publication is an edited version of:

---

Diss. ETH No. 17136

## **Least Squares 3D Surface Matching**

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

**DEVIRIM AKCA**  
M.Sc., Karadeniz Technical University

born 27<sup>th</sup> of May, 1975  
citizen of Turkey

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Armin Grün, examiner  
ETH Zurich, Switzerland

Prof. Dr. Orhan Altan, co-examiner  
Istanbul Technical University, Turkey

Zurich 2007

---

IGP Mitteilung Nr. 92

Least Squares 3D Surface Matching  
Devrim Akca  
March 2007

Copyright © 2007, Devrim Akca  
All rights reserved

Published by  
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
ETH Hönggerberg  
CH-8093 Zürich

ISSN 0252-9335  
ISBN 3-906467-63-5

# ABSTRACT

Laser scanners can measure directly 3D coordinates of huge amounts of points in a short time period. Most of them also provide an intensity value for every point. This abundant data can be efficiently used to model the scene. In many cases, the object has to be scanned from different viewpoints in order to completely reconstruct it. Because each scan has its own local coordinate system, all the different pointclouds must be transformed into a common system. This procedure is usually referred to as co-registration. Actually, the co-registration is not a problem specific to the laser scanner domain. Also in photogrammetry, we face many similar problems.

The automatic co-registration of pointclouds, representing 3D surfaces, is a relevant problem in 3D modeling. This multiple registration problem can be defined as a surface matching task. In photogrammetry, surface matching was first touched by Gruen (1985a) as a straight extension of the Least Squares image matching. This thesis work gives a generalization of this 2D technique to the 3D surface matching problem. The proposed method estimates the transformation parameters of one or more fully 3D search surfaces with respect to a template one, using the Generalized Gauss-Markoff model, minimizing the sum of squares of the Euclidean distances between the surfaces. It fully considers 3D geometry.

An observation equation is written for each surface element on the template surface patch, i.e. for each sampled point. Each equation functionally relates the observations of the template to the parameters of search surface. The constant term of the adjustment is given by the observation vector whose elements are the Euclidean distances between the template and search surface elements. The matching is achieved by Least Squares minimization of a goal function, which measures the Euclidean distances between the surfaces. The final location of the search surface is estimated with respect to an initial state. The geometric relationship between the conjugate surface patches is defined as a 7-parameter 3D similarity transformation. This parameter space can be extended or reduced, as the situation demands it. Since the functional model is non-linear, the system is linearized by Taylor expansion. The numerical derivative terms are defined as surface normals. The unknown transformation parameters are treated as stochastic quantities using proper a priori weights. This extension of the mathematical model gives control over the estimation parameters. The solution is iterative. After the joint system is solved, the search surface is transformed to a new state using the updated set of transformation parameters, and the design matrix and the discrepancies vector are re-evaluated. The iteration stops if each element of the alteration vector falls below a certain limit.

Besides the mathematical model of the procedure, a comprehensive discussion is given about the implementation details, precision and reliability issues, and convergence behavior. Special attention is paid to the computational aspects. Two strategies in order to decrease the computation time were implemented. The main portion of the computational complexity is to search the correspondent elements between the surfaces, whereas the adjustment part is a small system, and is quickly solved using Cholesky decomposition followed by back-substitution. A rapid space partitioning method is given for searching the correspondences. It is a 3D boxing structure combined with a hierarchical local and adaptive nearest neighborhood search. The local neighborhood is hierarchically updated during the iteration.

The second acceleration strategy is simultaneous matching of sub-surface patches, which are selected in cooperative surface areas. They are joined to the system by the same 3D transformation parameters. The individual patches may not include sufficient information for the matching of whole surfaces, but together they provide a computationally effective solution, since they consist of only relevant information rather than using the full data set.

In case of lack of sufficient geometric information the procedure may fail, e.g. in case of matching of two planes or spherical objects. An object surface may have some attribute information attached to it. Temperature, intensity, and color are well known examples. Most of the laser scanners can supply intensity information in addition to Cartesian coordinates for each point. We propose an extension that

can simultaneously match intensity information and geometry under a combined estimation model. In this approach the intensity image of the pointcloud also contributes observation equations to the system, considering the intensities as supplementary information to the range image.

The mathematical model is flexible. Further conceptual extensions are given as the Least Squares matching of 3D curves and matching of 3D curves or 3D sparse points (e.g. ground control points) with a 3D surface. Additionally, a general framework for the simultaneous matching and georeferencing of multiple 3D surfaces with their intensity information is formulated.

The method derives its mathematical strength from the Least Squares matching concept and offers a high level of flexibility for many kinds of 3D surface correspondence problems. The experiments demonstrate the capabilities of the basic method and the extensions.

# ZUSAMMENFASSUNG

Laserscanning ermöglicht die direkte Bestimmung einer grossen Anzahl von 3D Koordinaten in kurzer Zeit, zusätzlich liefern viele dieser Systeme einen Intensitätswert zu jedem gemessenen Punkt. Die so erzeugte Fülle von Informationen wird genutzt, um den aufgenommenen Raum effizient zu modellieren. Für eine vollständige Rekonstruktion des erfassten Raums ist es notwendig, das zu erfassende Objekt von unterschiedlichen Standpunkten aus aufzunehmen. Da jeder Scan in einem eigenen Koordinatensystem vorliegt, ist es notwendig, alle erfassten Punktwolken in ein einheitliches System zu überführen. Dieser Vorgang wird als Co-Registrierung bezeichnet. Dies ist jedoch keine spezifisches Fall des Laserscannings, auch in der Photogrammetrie steht man diesem Problem in vielen Fällen gegenüber.

Die automatische Co-Registrierung von Punktwolken, welche 3D Flächen repräsentieren, ist eine wichtige Aufgabenstellung im Zuge der Modellierung. Dieses Problem der Mehrfachregistrierung kann als Surface-Matching Problem behandelt werden. Im Rahmen der Photogrammetrie wurde diese Aufgabe zum ersten Mal von Grün (1985a), als direkte Erweiterung des Least-Squares Image Matching erwähnt.

Die hier präsentierte Arbeit befasst sich mit der Erweiterung dieses zweidimensionalen Ansatzes, hin zu einem Matchingverfahren dreidimensionaler Flächen. Die hier vorgestellte Methode bestimmt die Transformationsparameter einer oder mehrerer dreidimensionaler Flächen bezüglich einer Referenzfläche (Template), unter Verwendung des allgemeinen Gauss-Markoff Modells, welchem die Minimierung der Summe der Quadrate, des euklidischen Abstandes zwischen den Flächen zugrunde legt. Hierbei wird vollumfänglich die dreidimensionale Information des Objektes berücksichtigt.

Für jedes Element der Referenzfläche, z.B. für jeden Punkt, ergibt sich eine Beobachtungsgleichung. Jede dieser Gleichungen beschreibt den Zusammenhang zwischen Beobachtungen der Referenzfläche und den Transformationsparametern der anzupassenden Fläche (Search-Surface). Das Absolutglied der Ausgleichung ist durch den Beobachtungsvektor gegeben, dessen Elemente den euklidischen Distanzen zwischen den Elementen der Referenzfläche und denen der anzupassenden Fläche entsprechen. Das Matching wird mittels Minimierung der Zielfunktion nach kleinsten Quadraten durchgeführt, welches die euklidischen Distanzen zwischen den Oberflächen beschreibt. Die Endposition der anzupassenden Fläche wird bezüglich eines Startwertes bestimmt. Der geometrische Zusammenhang zwischen konjugierten Flächen wird mittels einer 7-Parameter Ähnlichkeitstransformation beschrieben. Dieser Parameterraum kann je nach Anforderung erweitert oder reduziert werden. Das verwendete funktionale Modell ist nichtlinear, somit ist eine Linearisierung nach Taylor notwendig. Die numerisch abgeleiteten Terme sind als Flächennormale definiert. Die unbekannt Transformationsparameter werden als stochastische Grössen mit geeigneter Gewichtung beschrieben. Diese Erweiterung des mathematischen Modells ermöglicht eine bessere Kontrolle über die zu bestimmenden Parameter. Die Bestimmung der Parameter erfolgt iterativ. Nach jeder Lösung des Systems wird die anzupassende Fläche, mittels der bestimmten Parameter, in ihre neue Lage transformiert und die Designmatrix sowie der Vektor der Verbesserungen neu bestimmt. Dieser Iterationsvorgang wird beendet, wenn jedes Element des Unbekanntenvektors einen bestimmten Grenzwert unterschreitet.

Neben dem mathematischen Modell werden Details der Implementation, Präzision, Zuverlässigkeit und des Konvergenzverhaltens ausführlich diskutiert. Besonderes Augenmerk wird hier auf rechentechnische Aspekte gelegt. Um eine Reduktion der Rechenzeit zu erzielen, wurden zwei verschiedene Berechnungsverfahren implementiert. Der grösste Teil des Rechenaufwandes wird für die Suche nach korrespondierenden Elementen zwischen den Oberflächen verwendet, wohingegen die Ausgleichung selbst nur den kleineren Teil einnimmt. Die Ausgleichung wurde mittels Cholesky Algorithmus sehr effizient gelöst. Zum Auffinden der korrespondierenden Oberflächenelemente wurde eine effiziente Unterteilung des Objektraumes durchgeführt. Diese basiert auf einer 3D-Box Struktur

mit hierarchischer lokalen und adaptiver Nearest Neighborhood Suche. Die lokalen Nachbarschaften werden während der Iteration hierarchisch aktualisiert.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, lediglich Teile des Überlappungsbereichs zu nutzen, wobei diese Teile aus kooperativen Teilen des Gesamtmodells stammen. Diese einzelnen Unterteile enthalten unter Umständen nicht genügend Informationen um die gesamten Flächen zu registrieren, jedoch ergibt sich aus der Kombination der einzelnen Lösungen eine korrekte und effektive Lösung des Problems, da die Teilflächen nur relevante Informationen im Gegensatz zur gesamten vorhandenen Fläche aufweisen.

Im Fall fehlender geometrischer Information ist jedoch ein Fehlschlagen des Algorithmus möglich, z.B. beim Matching zweier Ebenen oder Kugeln. Einer Oberfläche kann zusätzliche Informationen enthalten. Temperatur, Intensität und Farbe sind einige der bekanntesten. Die meisten Laserscanner können Intensitätsinformationen bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems für jeden gemessenen Punkt zur Verfügung stellen. Wir erweiterten unseren Ansatz, hin zu einer simultanen Auswertung von Intensitätsinformationen und Geometrie, in einem kombinierten mathematischen Modell. Bei diesem Ansatz tragen die Intensitätsbilder, als zusätzliche Information neben den eigentlichen Daten aus dem Laserscanning, weitere Beobachtungsgleichungen zur Ausgleichung bei.

Das vorgestellte mathematische Modell ist flexibel. Konzeptionelle Erweiterungen, wie das Least-Squares Matching von 3D Kurven, sowie das Matching von 3D Kurven oder 3D Punkten (z.B. Passpunkten) bezüglich einer 3D Oberfläche werden erläutert. Zusätzlich wurde das Grundgerüst für simultanes matching und georeferenzieren von mehreren 3D Oberflächen unter Nutzung von Intensitätsinformationen formuliert.

Die dargestellte Methodik erhält ihre mathematische Strenge durch die Ausgleichung nach kleinsten Quadraten und weist eine hohe Flexibilität zur Anwendung auf viele Arten von dreidimensionalen Flächenkorrespondenzproblemen auf. Die aufgezeigten Beispiele spiegeln die Möglichkeiten der grundlegenden Methode und der Erweiterungen wieder.