

Fließwiderstand eines belüfteten Freispiegelabflusses im Gleichgewichtszustand

Monograph

Author(s):

Zünd, Benno

Publication date:

2008

Permanent link:

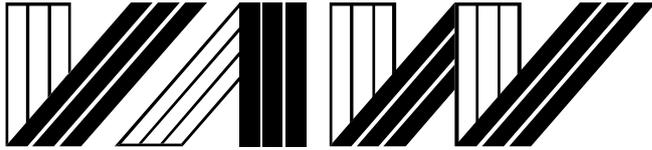
<https://doi.org/10.3929/ethz-b-000542198>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Originally published in:

VAW-Mitteilungen 209



Versuchsanstalt für Wasserbau
Hydrologie und Glaziologie
der Eidgenössischen
Technischen Hochschule Zürich

Mitteilungen

209

**Fließwiderstand eines belüfteten Freispiegel-
abflusses im Gleichgewichtszustand**

Benno Zünd

Zürich, 2008

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. H.-E. Minor

Zitiervorschlag für VAW-Mitteilungen:

Zünd, B. (2008). Fließwiderstand eines belüfteten Freispiegelabflusses
im Gleichgewichtszustand.
Mitteilungen 209, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie (VAW),
H.-E. Minor, Hrsg. ETH Zürich.

Im Eigenverlag der
Versuchsanstalt für Wasserbau,
Hydrologie und Glaziologie
ETH Zürich
CH-8092 Zürich

Tel.: +41 - 44 - 632 4091
Fax: +41 - 44 - 632 1192
e-mail: info@vaw.baug.ethz.ch

Zürich, 2008

ISSN 0374-0056

Vorwort

Schussrinnen von Hochwasserentlastungsanlagen und Unterwasserkanäle von Grundablässen sind bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten von über 30 m/s dem Kavitationsrisiko ausgesetzt. Solche Strömungsgeschwindigkeiten treten bei Stauanlagen von mehr als 100 m Höhe schon bei mässiger spezifischer Belastung auf.

Seit Anfang der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts hat sich als Abhilfemassnahme gegen mögliche Kavitationsschäden die Sohlbelüftung durchgesetzt. Mit speziellen Einrichtungen wird der Abfluss in Schussrinnen an der Sohle belüftet. In Grundablässen belüftet man wegen der grösseren Belastung auch die Seitenwände. Diese Massnahme ist sehr wirksam, technisch relativ einfach zu realisieren und preisgünstig zu erstellen.

Schon kurz nach Realisierung der ersten Schussrinnen mit Belüftung zeigte sich, dass die Strömungsgeschwindigkeiten am Ende der Schussrinne wesentlich höher waren als vorausberechnet. Die Ermittlung der Endgeschwindigkeit der Schussrinne war mit der klassischen Methode (Darcy-Weisbach) und unter Klarwasserbedingungen, wie üblich, erfolgt.

Eine Unterschätzung der Endgeschwindigkeit hat aber schwerwiegende Folgen. Die Dimensionierung der Energieumwandlung, die zu erfolgen hat, bevor das Wasser dem Vorfluter zurückgegeben werden kann, ist nicht korrekt. Bei Skisprüngen mit nachfolgendem Kolksee wird die Sprungweite unterschätzt; dies führt zu Erosionen an ungünstigen Stellen, z.B. am Gegenufer. Tosbecken werden bei unterschätzten Eintrittsgeschwindigkeiten zu klein ausgelegt. Die Folge sind starke Erosionen flussabwärts.

Dieser wichtigen Fragestellung geht Herr Zünd in seiner Dissertation nach: Wie gross ist der Strömungswiderstand eines belüfteten Freispiegelabflusses? Um wie viel wird die Endgeschwindigkeit auf Schussrinnen grösser? Wichtig war Herrn Zünd dabei, die relevanten physikalischen Prozesse zu verstehen. Er kann den dominanten physikalischen Prozess definieren und mathematisch beschreiben. Es gelingt ihm auch, einen Vorschlag für die Berechnung der Grösse des Effektes vorzulegen.

Wenn die Luftkonzentrationsverteilung über dem Abfluss bekannt ist, kann er die Zunahme der Strömungsgeschwindigkeiten für ein Wasser-Luft-Gemisch gegenüber Reinwasser berechnen. Dies wird eindrucksvoll durch Vergleiche mit den Messungen von Straub und Anderson belegt.

Für den Leser aus der Praxis wird der Anhang sehr hilfreich sein. Dort wird auch der für die Berechnung verwendete Code gegeben.

Ich möchte mich bei Professor Dr.-Ing. Jürgen Köngeter, emeritierter Ordinarius, Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH Aachen, und Professor Dr. Thomas Rösgen, Institut für Fluidodynamik der ETH Zürich, für die Übernahme der Korreferate herzlich bedanken.

Zürich, im Dezember 2008

Prof. em. Dr.-Ing. H.-E. Minor

Danksagung

Meinem Referenten, Prof. Dr. Hans-Erwin Minor, Emeritus und ehemaliger Vorsteher der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie an der ETH Zürich, gebührt mein erster Dank. Er hat, wie ich selber, die vorliegende Fragestellung aus der Praxis mitgenommen und mich ermuntert, darüber zu dissertieren. Er hat mich in der nicht immer leichten Zeit stets unterstützt.

Prof. Dr. Jürgen Köngeter, Emeritus, aus Aachen und Prof. Dr. Thomas Rösgen von der ETH Zürich möchte ich herzlich danken für die Übernahme des Korreferats und für die wohlwollende und interessierte Aufnahme der Arbeit. Prof. Dr. Jan van Mier danke ich für die Übernahme des Vorsitzes meiner Doktorprüfung.

Drei Herren haben mir mittels Gesprächen und Literaturhinweisen entscheidend geholfen, einen Einblick in die turbulenztheoretischen Aspekte der hier behandelten Fragestellung zu gewinnen: Dr. Andreas Müller, Dr. Klaus Hoyer und Dr. Beat Lüthi. Wenngleich diese Aspekte in der vorliegenden Arbeit nur verkürzt behandelt sind, waren sie für die Orientierung in der Thematik doch unerlässlich. – In diesem Zusammenhang möchte ich auch festhalten, dass die Dissertation von Dr. G.R. Bezzola – obwohl flussbaulich ausgerichtet – mir einen hervorragenden Einstieg in die Arbeit bot.

Frau Simona Tamagni, Herr Mattia Pinotti, Herr Prof. Dr. Martin Funk und Herr Ian Clarke haben die Übersetzungen in die italienische, französische und englische Sprache besorgt bzw. meine Entwürfe dazu überarbeitet. Dafür möchte ich ihnen herzlich danken.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir die universitäre Ausbildung zu diesem spannenden Beruf ermöglicht haben.

Und an dieser Stelle möchte ich meiner lieben Freundin Anja gedenken, die im Januar 2008 verstarb. Aufgrund ihrer schweren Behinderung musste sie in ihren letzten Jahren auf vieles verzichten. Und doch hat sie mir mehr geschenkt, als ich ihr je geben konnte.

Inhalt

Vorwort	i
Danksagung	iii
Inhalt	v
Zusammenfassung	x
Summary	xii
Résumé	xiv
Sommario	xvi
1 Einleitung.....	1
1.1 Anlass	1
1.2 Allgemeine Problemstellung	2
1.3 Einschränkungen	4
1.4 Vorgehen	4
1.5 Wichtige Bemerkungen zur Notation	5
2 Wasser-Luft-Gemische: Eigenschaften, Definitionen	7
2.1 Physikalische Eigenschaften der beiden Phasen	7
2.2 Physikalische Eigenschaften des Gemischs	8
2.2.1 Schallgeschwindigkeit	8
2.2.2 Grösse der Luftblasen in turbulenter Strömung	9
2.2.3 Steiggeschwindigkeit von Luftblasen in ruhendem Wasser	13
2.2.4 Viskosität von Flüssigkeit-Gas-Gemischen	16
2.3 Abflussgrössen der Wasser-Luft-Zweiphasenströmung	22
2.3.1 Voraussetzung betreffend die Dichte der Luft	22
2.3.2 Koordinatensystem	22
2.3.3 Geschwindigkeiten	22
2.3.4 Lokale Luftkonzentration, Abflusstiefe	22
2.3.5 Tiefengemittelte Luftkonzentration	23
2.3.6 Reinwassertiefe	24
2.3.7 Spezifischer Abfluss, tiefengemittelte Geschwindigkeit	24
2.3.8 Energiehöhe	25
2.3.9 Allgemeine Bemerkung zu den Definitionen der Abflussgrössen	26

3	Geschwindigkeitsprofil und Widerstand	27
3.1	Einführung.....	27
3.2	Totale Schubspannung	27
3.3	Reynolds-Gleichungen und -Spannungen	29
3.3.1	Navier-Stokes-Gleichungen	29
3.3.2	Reynolds-Gleichungen und Reynolds-Spannungen.....	29
3.3.3	Normierung auf innere Variable	30
3.4	Aufbau der turbulenten Strömung	31
3.5	Schliessungshypothesen.....	34
3.5.1	Wirbelviskosität nach Boussinesq	34
3.5.2	Mischungsweg nach Prandtl (1925) in allgemeiner Form	34
3.5.3	Vergleich mit der Wirbelviskosität nach Boussinesq	36
3.5.4	Weitergehende Vereinfachungen von Prandtl	37
3.5.5	Differenziertere Mischungswegansätze	38
3.6	Geschwindigkeitsprofil im hydraulisch glatten Abfluss	40
3.6.1	Viskoser Ast	40
3.6.2	Turbulenter Ast mit Prandtls Vereinfachungen.....	40
3.6.3	Turbulenter Ast in allgemeiner Form	41
3.6.4	Übergang vom viskosen zum turbulenten Ast	41
3.6.5	Mittlere Geschwindigkeit.....	42
3.7	Geschwindigkeitsprofil im hydraulisch rauen Abfluss	42
3.7.1	Änderungen gegenüber dem hydraulisch glatten Abfluss	42
3.7.2	Roughness sublayer.....	43
3.7.3	Sandrauheiten, technische Rauheiten, äquivalente Sandrauheiten	45
3.7.4	Geschwindigkeitsprofil	46
3.7.5	Mittlere Geschwindigkeit.....	48
3.7.6	Lage des Bezugshorizonts bei rauen Verhältnissen	48
3.8	Übergang von glatt zu rau	50
3.9	Fliessgesetz nach Darcy-Weisbach	53
3.10	Die Formel nach Colebrook-White	53
3.11	Der Wake-Parameter.....	55
3.12	Turbulenztheoretische Aspekte.....	55
3.12.1	Kaskadenmodell.....	55
3.12.2	Kolmogoroff-Skala	56
3.12.3	Rückschlüsse auf die Wandschicht im hydraulisch glatten Abfluss	57
3.12.4	Kohärente Strukturen, Ablösungen	59
3.13	Diskussion.....	61

4	Arbeitshypothese für den sohnahen Bereich	63
4.1	Hydraulisch glatter Abfluss	63
4.1.1	Reichardt (1951)	63
4.1.2	Spalding (1968)	64
4.1.3	Van Driest (1956)	64
4.2	Hydraulisch rauher Abfluss	65
4.2.1	Van Driest (1956)	65
4.2.2	Bezzola (2002)	66
4.2.3	Arbeitshypothese für den Bereich der Rauheiten – MR-Ansatz	71
4.2.4	Zusammenfassung	78
5	Literatur zur Widerstandsminderung.....	81
5.1	Einleitung.....	81
5.2	Beobachtungen der Turbulenzforschung.....	83
5.2.1	Beobachtungen an Polymerlösungen.....	83
5.2.2	Beobachtungen in Wasser-Luft-Gemischen.....	85
5.3	Wasserbauliche Untersuchungen und empirische Auswertungen	90
5.3.1	Konventionelle Schussrinnen	90
5.3.2	Treppenschussrinnen	102
5.3.3	Raugerinne	106
5.3.4	Geschlossene Kreisrohre im Freilauf	107
5.4	Ursächliche Mechanismen in der Literatur.....	108
5.4.1	Allgemeine Ursachen	108
5.4.2	Widerstandsminderung durch Luft	109
5.4.3	Zusammenfassung	117
5.5	Folgerungen	118
6	Veränderte Fluideigenschaften als Ursache	121
6.1	Einleitung.....	121
6.2	Dichte-Effekt	121
6.2.1	Rohrströmung.....	121
6.2.2	Ebener Freilauf – Spezialfall gleichmässiger Luftverteilung	122
6.2.3	Freispiegelabfluss im Rohr bei gleichmässiger Luftverteilung	131
6.2.4	Einfluss auf den Widerstandsbeiwert	135
6.2.5	Freispiegelabfluss – allgemeiner Fall	137
6.2.6	Zusammenfassung	137

6.3	Viskoser Effekt	138
6.3.1	Wo ändert sich die Viskosität?	139
6.3.2	Rechnung auf der Basis von Marié (1987)	140
6.3.3	Wechsel zu hydraulisch glatten Verhältnissen auf Schussrinnen	151
6.3.4	Zusammenfassung	153
6.4	Schlussfolgerung	153
7	Das Rechenmodell und sein Verhalten	155
7.1	Mitwirkung der Luftblasen	155
7.2	Formelsatz zur Integration des Geschwindigkeitsprofils	155
7.2.1	Berücksichtigung der Blasen	156
7.2.2	Abhängigkeit der Blasendurchmesser von den lokalen Bedingungen . . .	157
7.3	Das Verhalten	158
7.3.1	Parameter für die Beispielrechnungen	158
7.3.2	Berechnung für ausgewählte Fälle	159
7.3.3	Einfluss des Kriteriums ξ	161
7.3.4	Einfluss der Rauheit	162
7.4	Schlussfolgerungen	162
7.4.1	Grundsätze	162
7.4.2	Rechenschema für den MR-Ansatz	163
8	Zur Verteilung der Luftkonzentration im Sohlbereich	173
8.1	Diffusionsgleichung	173
8.2	Wirbelviskosität und Steiggeschwindigkeit konstant	173
8.3	Realer Verlauf von Wirbelviskosität und Steiggeschwindigkeit	175
8.4	Schlussfolgerung	176
9	Vergleich mit Straub & Anderson (1958)	177
9.1	Einleitung	177
9.2	Wandeinfluss	177
9.3	Totale Schubspannung	178
9.4	Der unbelüftete Vergleichszustand	178
9.4.1	Der Chézy-Ansatz von Straub & Anderson (1958)	178
9.4.2	Asymptotischer Ansatz von Wood (1985)	179
9.4.3	Eichung der Rauheit	180
9.5	Resultate	180
9.6	Schlussfolgerungen	183

10	Folgerungen und Ausblick.....	185
10.1	Ergebnisse.....	185
10.2	Folgerungen im Hinblick auf die praktische Anwendung.....	186
10.3	Ausblick.....	187
10.3.1	Abschätzung der Konzentrationsverteilung.....	187
10.3.2	Vereinfachte Ansätze für die Senkkurvenrechnung.....	188
10.3.3	Vergleich mit Messdaten an Treppenschussrinnen.....	188
	Referenzen.....	191
	Symbole.....	199
A1	Ausführungen zum MR-Ansatz.....	203
A1.1	Integration des Geschwindigkeitsprofils.....	203
A1.2	Integration der Konstanten B	204
A1.3	Illustration anhand von Anwendungen.....	210
A2	Verwendeter Code.....	215
A2.1	Deklarationen.....	215
A2.2	Basisfunktionen.....	216
A2.3	Input/Output sowie Unterteilung der y -, c -, u -Ranges.....	220
A2.4	Reinwassertiefe, Abfluss, Energiehöhe, Luftverteilung.....	225
A2.5	Berechnung der Konstanten B aus der Rauheit.....	227
A2.6	Berechnungen in Wandnähe: B , λk , κk	228
A2.7	Integration des Geschwindigkeitsprofils.....	231

Zusammenfassung

Im Wasserbau wie auch in der Turbulenzforschung wird beobachtet, dass Luftblasen den Fließwiderstand beträchtlich senken können. Für die Bemessung wasserbaulicher Entlastungsanlagen – Hochwasserentlastungen, Grundablässe – heisst das, dass die Geschwindigkeiten in vielen Fällen nur ungenau vorausgesagt werden können.

Physikalische Modelle bilden keinen hinreichenden Ersatz, weil der Luftertrag zu Massstabeffekten führt. Die vorliegende Arbeit hat daher zum Ziel, die ursächlichen Mechanismen dieser Widerstandsminderung zu klären. Mehrere Ursachen kommen in Frage und werden in der Literatur auch diskutiert.

- Der *Dichte-Effekt* beruht darauf, dass die Luft eine Fluideigenschaft, eben die Dichte, verringert und auf diese Weise den Impulsaustausch reduziert. Dieser findet seine einfachste Formulierung im bewährten Mischungswegansatz nach Prandtl. Als Folge des Effekts würde der *Gradient* des logarithmischen Geschwindigkeitsprofils grösser.
- Auch der *viskose Effekt* beruht auf der Veränderung einer Fluideigenschaft: Theoretische Überlegungen wie auch Experimente zeigen, dass Luftblasen die Zähigkeit des Gemischs erhöhen. Die Viskosität könnte dann die Turbulenz über einen grösseren Bereich dominieren, die viskose Unterschicht würde "dicker". Makroskopisch würde das logarithmische Profil *verschoben*.
- Am schwersten zu erfassen sind Effekte, welche in irgendeiner Form direkt auf die Turbulenz einwirken.

Grundsätzlich ist mit all diesen Effekten zu rechnen. Die Frage ist, welche davon *in wasserbaulichen Hochgeschwindigkeitsabflüssen* relevant sind. Im Fall des viskosen Effekts ist dies allenfalls bei sehr kleinen, im Modellmassstab gefahrene Abflüsse zu erwarten; in Prototypen reicht die hypothetische Verdickung der viskosen Zone nicht aus, um die Rauheitsspitzen zu überdecken.

Die direkt auf die Turbulenz einwirkenden Mechanismen wurden nicht genauer analysiert; viele davon wirken aber wie der viskose Effekt in einer viskosen Unterschicht und scheiden deshalb ebenfalls aus.

Es gibt starke Anzeichen, dass in wasserbaulichen Entlastungsanlagen der *Dichte-Effekt* der dominante Mechanismus ist. Eingesetzt in ein Mischungswegmodell beschreibt er das Phänomen ausreichend genau, wie ein Vergleich mit den oft zitierten Messdaten von Straub & Anderson (1958) zeigt. Er bietet auch eine Erklärung für die Beobachtung von Ebadian (2003), dass die Widerstandsminderung mit höherer Rauheit sogar zunimmt.

Voraussetzung ist aber eine detailliertere Betrachtung in zweierlei Hinsicht. Erstens muss, jedenfalls für sehr raue Verhältnisse, der Mischungsansatz im Kornbereich verfeinert werden: Die Weglänge skaliert dort nicht mehr mit dem Wandabstand, sondern mit der Rauheit. Zweitens wird der Effekt den Geschwindigkeitsgradienten nur dort beeinflussen, wo die Blasen kleiner sind als die massgebenden Austauschbewegungen, repräsentiert durch den Mischungsweg.

Für die wasserbauliche Bemessung reichen die vorliegenden Resultate aber noch nicht aus. Denn der Gemischabfluss ist eine *Interaktion* zweier Vorgänge: der hier behandelten *Widerstandsminderung* durch die Luft einerseits und des *Lufteintrags* und der Bildung des Konzentrationsprofils durch Turbulenz und Gravitation andererseits. – Der zweite Punkt war nicht Gegenstand dieser Arbeit. Es wurden aber ein paar einführende Überlegungen angestellt. Demnach trifft die in der Literatur teilweise getroffene Annahme, das Konzentrationsprofil hänge im Gleichgewichtszustand nur vom Gefälle ab, nicht zu.

Da der Dichte-Effekt die Widerstandsminderung für wasserbauliche Anlagen ausreichend erklärt, hat – aus Sicht des Ingenieurs – die Forschung nach weiteren Ursachen vielleicht etwas an Gewicht verloren. Hingegen wäre eine physikalisch fundierte Analyse des Luftkonzentrationsprofils äusserst wünschenswert.

Summary

Hydraulic engineers as well as turbulence researchers have observed that air bubbles, when mixed into flowing water, can considerably reduce drag. For the design of chutes, for example dam spillways and low-level outlets, this means that, in many cases, flow velocities cannot be predicted with satisfactory accuracy.

Physical model tests at usual scales cannot make good this limitation since air bubbles cause scale effects. The present work therefore aims to clarify the underlying mechanisms, of which there are several, and these are also discussed in the literature:

- The density effect arises from the fact that the air reduces a fluid property, namely the density, and this results in a decrease of momentum exchange. This has its simplest manifestation in Prandtl's well-known mixing length theory. As a consequence of this effect, the gradient of the logarithmic velocity profile is increased.
- The viscosity effect is also a result of fluid property changes. Both theory as well as experiments show that bubbles increase the mixture viscosity and this, in turn, can then dominate the turbulence over a larger area, thus "thickening" the viscous sublayer. From a macroscopic viewpoint, the logarithmic profile will be shifted.
- The most difficult effects to model are those that in any way act directly upon the turbulence.

Basically, all these effects have to be reckoned with. The question is which of them are relevant for the high velocity flows, such as occur in spillways or low-level outlets. In the case of viscous effects this need be expected only for very low discharges, such as those used in physical models. In prototypes, the hypothetical thickening of the viscous sub-layer would not be sufficient to cover the roughness peaks.

Mechanisms that directly influence the turbulence have not been analysed in detail. However, as many of them act, like the viscosity effect, in a viscous sub-layer, they do not need to be considered.

There is strong evidence that for spillways and outlets etc. the density effect is predominant. Applied in the mixing length model it describes the phenomenon with sufficient accuracy, as can be shown by a comparison with the often quoted data of Straub & Anderson (1958). The density effect also explains Ebadian's (2003) observation that the drag reduction even increases the greater the roughness.

However, the problem has to be considered closely in two respects. Firstly, the mixing length relationship must be refined with regard to the roughness elements, at least for very rough surfaces. Here, the mixing length is no longer in linear proportion to the invert distance but rather to the roughness. Secondly, the density effect will only affect

the velocity gradient where the bubbles are smaller than the governing exchange movement, as represented by the mixing length.

For hydraulic design practice, however, the results presented here are not yet sufficient, because a mixture flow is an interaction of two processes. These are, on one hand, the drag reduction by the air, as discussed here, and, on the other hand, the air entrainment and build up of the concentration profile by turbulence and gravitation. This latter subject is not part of the present work, although some preliminary comments on it are made; for instance, that the often-cited assumption, that the equilibrium concentration profile only depends on the slope, is not believed to be the case.

Since the density effect sufficiently explains the air bubble drag reduction for hydraulic structures, research into other causes may have become - at least from the engineer's point of view - somewhat less important. On the other hand, however, a physically-based analysis of the air concentration profile would be very welcome indeed.

Résumé

Dans des constructions hydrauliques ainsi que dans des expériences sur la turbulence, on a observé que la présence de bulles d'air peut considérablement diminuer la résistance hydraulique. Il en résulte un calcul des vitesses inexactes lors du dimensionnement d'ouvrages hydrauliques (évacuateurs de crues ou vidange de fond).

Les modèles physiques sont aussi problématiques à cause des effets d'échelle dus aux inclusions d'air. Ce travail vise à clarifier les mécanismes de cette réduction de résistance hydraulique. Plusieurs possibilités entrent en ligne de compte et sont discutés dans la littérature:

- *L'effet de densité*, amené par la réduction de densité due à la présence d'air, amoindrit les échanges dus à la quantité de mouvement. Celui-ci est modélisé le plus simplement par la longueur de mélange d'après Prandtl. Cet effet conduit à un accroissement du gradient du profil logarithmique de la vitesse.
- *L'effet visqueux* est également basé sur la modification d'une propriété de fluide: Des considérations théoriques ainsi que des expériences montrent que des bulles d'air incluent dans le fluide augmentent sa viscosité. Celle-ci peut réduire la turbulence et ainsi augmenter l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. D'un point de vue macroscopique, cela signifie que le profil logarithmique serait ainsi déplacé.
- Les effets les plus difficiles à comprendre sont ceux qui influencent directement la *turbulence*.

En principe il faut prendre en considération tous ces effets. Mais lesquels sont significatifs *dans des aménagements hydrauliques* où l'eau circule rapidement? Concernant l'effet visqueux, une influence n'est probable que pour des cas à échelle réduite utilisés dans les laboratoires hydrauliques. Dans le cas de prototypes, la sous-couche visqueuse n'atteint pas l'épaisseur nécessaire pour envelopper la rugosité.

Les mécanismes qui influencent directement la turbulence ne sont pas analysés en détail. Il est cependant à noter que tous ces mécanismes exigent l'existence d'une sous-couche visqueuse, ce qui les rend tout aussi improbables que l'effet visqueux lui-même.

Il semble que dans le cas des aménagements hydroélectriques, *l'effet de densité* soit le mécanisme prédominant. Appliqué au modèle de la longueur de mélange, celui-ci décrit le phénomène de manière satisfaisante. Ceci est confirmé par une comparaison avec les données de Straub & Anderson (1958), souvent citées dans la littérature. De plus l'effet de densité offre une explication de l'observation d'Ebadian (2003), selon laquelle la réduction de la résistance hydraulique augmente avec la rugosité.

Une considération plus détaillée est néanmoins nécessaire. D'une part pour des parois très rugueuses il faut affiner le modèle des longueurs de mélange dans la proximité immédiate de la paroi: l'échelle décisive n'est plus la distance à la paroi, mais la rugosité elle-même. D'autre part l'effet de densité va influencer le gradient des vitesses seulement dans des régions où les bulles sont plus petites que les mouvements d'échange représentés par la longueur de mélange.

Toutefois ces résultats ne sont pas suffisants pour un dimensionnement d'ouvrage hydraulique. Ceci est principalement du au fait que l'écoulement d'eau mélangée avec de l'air est une *interaction* entre deux processus: la *réduction de la résistance hydraulique* d'une part, et *l'entraînement d'air* sous l'influence de la turbulence et de la gravité d'autre part. Ce deuxième aspect n'est pas traité dans ce travail. Toutefois quelques considérations préliminaires ont été effectuées. Il en ressort que l'hypothèse souvent faite dans la littérature, selon laquelle le profil de concentration ne dépend que de la pente dans l'état stationnaire, n'est pas juste.

Comme l'effet de densité explique suffisamment la réduction de la résistance hydraulique pour les besoins de la pratique, les autres causes ont moins d'intérêt pour l'ingénieur. Cependant une analyse physique du profil de concentration serait souhaitable.

Sommario

Nell'ambito delle costruzioni idrauliche come pure in quello della ricerca sulle turbolenze si osserva che le bolle d'aria possono ridurre notevolmente la resistenza fluidodinamica. Nel dimensionamento di organi di scarico – sfioratori, scarichi di fondo – significa che in molti casi le velocità possono essere assunte solamente in maniera imprecisa.

I modelli fisici non rappresentano una soluzione soddisfacente, in quanto l'apporto d'aria causa effetti scala. Il presente lavoro ha lo scopo di spiegare i meccanismi che causano la riduzione della resistenza. Diverse cause entrano in considerazione e vengono pure discusse nella letteratura.

- *L'effetto della densità* si basa sul fatto che l'aria riduce una proprietà dei fluidi, la densità appunto, e di conseguenza riduce lo scambio d'impulso. Ciò trova la sua formulazione più semplice nell'affermato principio del percorso di mescolamento (Mischungsweg) secondo Prandtl. Come conseguenza di tale effetto, il gradiente del profilo di velocità logaritmico è maggiore.
- Anche per quanto riguarda *gli effetti della viscosità* viene modificata una proprietà dei fluidi: analisi teoriche ed esperimenti mostrano che le bolle d'aria aumentano la tenacità della miscela. La viscosità potrebbe inoltre dominare sulla turbolenza in una regione più grande; il substrato viscoso diventerebbe quindi più "spesso". Macroscopicamente il profilo logaritmico verrebbe spostato.
- Gli effetti più complicati da comprendere sono quelli che in qualche modo influiscono direttamente sulla *turbolenza*.

Fondamentalmente tutti questi effetti sono da tenere in considerazione. Tuttavia occorre chiedersi quale tra questi sia rilevante nei deflussi ad alta velocità nell'ambito delle costruzioni idrauliche. L'effetto della viscosità è sicuramente presente nel modello in scala per deflussi minori; nei prototipi non basta l'ipotetico ispessimento della zona viscosa per coprire i picchi di scabrezza.

I meccanismi che influiscono direttamente sulla turbolenza non sono stati analizzati nel dettaglio; molti di essi influiscono tuttavia in modo simile agli effetti della viscosità sul substrato viscoso e vengono di conseguenza pure esclusi.

Chiari indizi indicano che negli organi di scarico idraulici l'effetto della densità è dominante. Inserito in un modello di percorso di mescolamento, esso descrive il fenomeno in maniera sufficientemente corretta, come mostra un confronto con i dati misurati di Straub & Anderson (1958) spesso citati. Esso offre anche una spiegazione alle osservazioni di Ebadian (2003), in cui la riduzione della resistenza aumenta addirittura con una scabrezza più elevata.

Requisito fondamentale è però una considerazione dettagliata sotto due punti di vista. Per prima cosa l'approccio del mescolamento deve essere comunque raffinato nel campo granulare per relazioni molto scabre. La lunghezza del percorso non viene in questo caso scalata con la distanza dalle pareti, bensì con la scabrezza. In secondo luogo l'effetto del gradiente della velocità viene influenzato unicamente laddove le bolle d'aria sono più piccole dei movimenti di scambio determinanti, rappresentati dal percorso di mescolamento.

Per il dimensionamento idraulico non bastano tuttavia i presenti risultati. Ciò è dovuto al fatto che il deflusso della miscela è un'interazione di due processi: da un lato la riduzione della resistenza causata dall'aria trattata in questo lavoro e dall'altro l'apporto d'aria e la formazione del profilo della concentrazione attraverso la turbolenza e la gravità. Il secondo punto non è stato oggetto di questo lavoro. Sono state però avanzate alcune riflessioni introduttive. Di conseguenza, l'ipotesi che talvolta viene assunta nella letteratura - secondo la quale il profilo della concentrazione dipenda, in caso di situazione di equilibrio, unicamente dalla pendenza - non è corretta.

Siccome l'effetto della densità spiega sufficientemente la riduzione della resistenza negli impianti idraulici, la ricerca di altre cause perde forse importanza dal punto di vista dell'ingegnere idraulico. Al contrario, un'analisi fondata sui processi fisici del profilo della concentrazione dell'aria sarebbe oltremodo auspicabile.

1 Einleitung

1.1 Anlass

Gelöste oder suspendierte Stoffe, sogenannte *Additive*, können den Widerstand von Fluiden mindern. Das Phänomen wurde zuerst in der Turbulenzforschung und den damit traditionell verbundenen industriellen und maschinenbaulichen Anwendungen entdeckt und wird seither kontinuierlich untersucht, wobei der Fokus sich auf verschiedene Additive richtet, beispielsweise Polymere oder Gasblasen in Flüssigkeiten oder Staub in Gasen. Hierbei locken nicht nur praktische Nutzbar-machungen; man erhofft sich darüber hinaus auch generelle, vertiefte Einblicke in das Wesen der Turbulenz selbst.

Im Wasserbau trifft man auf ähnliche Effekte: Bei den hohen Geschwindigkeiten, wie sie in den Schussrinnen von Hochwasserentlastungen oder Grundablässen auftreten, bildet sich eine Zweiphasenströmung in Form eines Wasser-Luft-Gemisches. Auch hier beobachtet man eine Widerstandsreduktion. Straub & Anderson (1958) bestätigten diesen Sachverhalt in den ersten gross angelegten Untersuchungen am physikalischen Modell. Seither wurden mehrere Arbeiten zum Thema publiziert.

In den Achtzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts akzentuierte sich die Fragestellung durch Erfolge bei der Bekämpfung der Kavitation, also der Zerstörung zunächst der Betonoberfläche und schliesslich ganzer Bauwerke durch kollabierende Dampfblasen. Nachdem Kavitation lange Zeit ein Hauptproblem bei der Bemessung, der konstruktiven Ausbildung und der Bauausführung von Schussrinnen war, hat man sie heute durch den Einbau von Sohlbelüftern besser im Griff. Dies aber um den Preis eines Lufteintrags in Sohlhöhe, also dort, wo die Luft den stärksten Einfluss auf den Widerstand nehmen kann.

Die mit dem Luftgehalt einhergehende Vergrösserung der Geschwindigkeiten ist, insbesondere bei niedrigen spezifischen Abflüssen, nicht mehr vernachlässigbar. Sie hat erhebliche Unsicherheiten im Entwurf einer Hochwasserentlastung zur Folge, denn die mittlere Geschwindigkeit am Ende der Schussrinne ist eine massgebende Dimensionierungsgrösse: Sie bestimmt die Auslegung des Tosbeckens bzw. der Kolkzone und – rückwirkend über die topographischen Gegebenheiten – oft auch der Schussrinne selbst.

Das Fallbeispiel einer Schussrinne der Wasserkraftanlage Restitucion in Peru (Bild 1-1) illustriert, wie mangelhaft die gegenwärtigen Bemessungsmethoden sind: Sowohl die Berechnung als auch das physikalische Modell unterschätzten die Sprungweite des Wasserstrahls derart, dass am gegenüberliegenden Ufer beträchtliche Erosions-schäden auftraten.

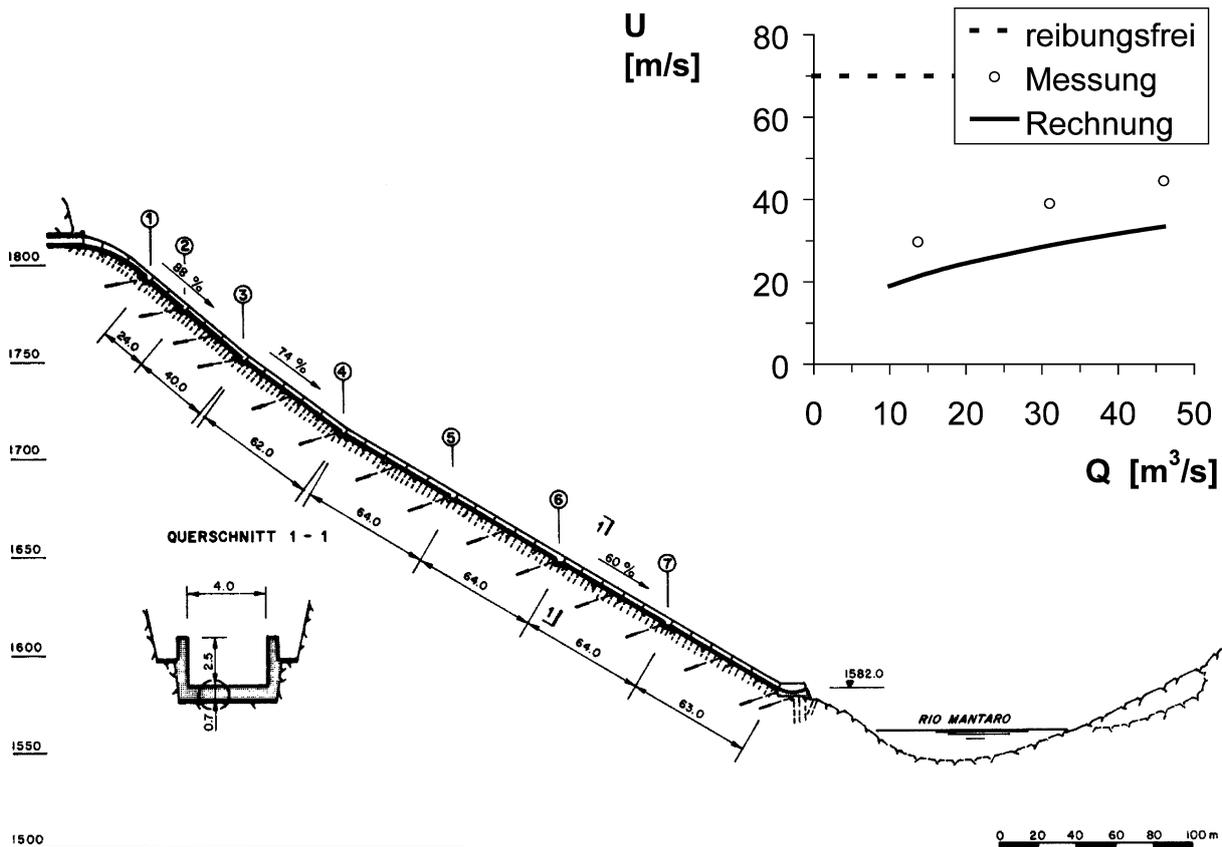


Bild 1-1: Minor (1987): Schussrinne Restitucion, Peru, mit Erosionsschaden am gegenüber liegenden Ufer. – Das Diagramm rechts oben vergleicht die aus den Sprungweiten ermittelten Geschwindigkeiten am Skisprung mit den Resultaten der Rechnung und mit dem hypothetischen Fall ohne Reibung.

1.2 Allgemeine Problemstellung

Eine verlässliche Abschätzung des Problems setzt die Kenntnis der physikalischen Zusammenhänge voraus. Im Wasserbau gibt es bislang keine gültige Erklärung zur Wirkungsweise des Lufteintrags und damit auch keine Berechnungsmethode, welche Allgemeingültigkeit beanspruchen könnte. Physikalische Modelle bieten keinen Ersatz, da bei einer wirtschaftlich vertretbaren Modellgröße die Massstabeffekte in der Regel zu groß sind.

Ein Rechenmodell für den Gemischabfluss muss zwei Wirkungen abbilden: zum einen den Einfluss der Luft auf das Geschwindigkeitsprofil und damit auf den Widerstand, zum anderen die Entstehung der Luftkonzentrationsverteilung aufgrund des Geschwindigkeitsprofils und dessen Eigenschaften bezüglich der Turbulenz. Diese beiden Wirkungen interagieren.



Bild 1-2: Schussrinne Restitucion, Peru; Erosionsschaden am gegenüber liegenden Ufer (Photo Mouvet, Stucky SA).

Ziel dieser Arbeit ist die Klärung *einer* der beiden Wirkungen, nämlich der Widerstandsminderung als Folge des Luftgehaltes. Die ursächlichen Mechanismen sollen identifiziert und hinsichtlich ihrer Bedeutung quantifiziert werden.

1.3 Einschränkungen

Die Arbeit hat zwei wesentliche thematische Einschränkungen:

- Sie konzentriert sich auf den *ebenen* Abfluss in *konventionellen Schussrinnen* von Hochwasserentlastungen. Der Ausdruck "konventionell" impliziert insbesondere eine glatt betonierte Sohle, dies im Gegensatz zu sehr rau gestalteten Gerinnen wie Treppenschussrinnen, Raugerinnen oder Ähnlichem. In der Literatur findet sich für solche konventionelle Schussrinnen auch der Ausdruck "glatt" oder "smooth". Diese Bezeichnung wird hier gemieden, weil sie schon durch den entsprechenden hydraulischen Begriff besetzt ist. – Überlegungen zu *nicht-ebenen* Abflüssen werden dort angestellt, wo die Auswertung von Messungen dies erfordert, aber nicht systematisch.
- Untersucht wird nur der *stationär gleichförmige* Abfluss. Im vorliegenden Kontext schliesst dieser Begriff neben dem gleichförmigen Geschwindigkeitsprofil auch ein gleichförmiges Luftkonzentrationsprofil mit ein. Dies ist der Fall, wenn sich die auf die Luftblasen wirkenden Kräfte, der Auftrieb und die turbulenten Druckschwankungen, im *Gleichgewicht* befinden. Der Autor verfügt über keine eigenen Erfahrungen auf dem Gebiet der *Messtechnik*. Auf diese Aspekte wird deshalb in der vorliegenden Arbeit nicht systematisch eingegangen. Der Autor ist sich bewusst, dass dies eine zusätzliche, nämlich methodische Einschränkung der Arbeit darstellt. Denn gerade Versuchsarbeiten im Gebiet der Wasser-Luft-Zweiphasenströmungen sind immer wieder mit Fragen zur Verlässlichkeit der Resultate konfrontiert.

1.4 Vorgehen

Zunächst werden in Kapitel 2 einige grundsätzliche Eigenschaften von Wasser-Luft-Gemischen besprochen. Die Kapitel 3 und 4 widmen sich dann den Mechanismen, welche den turbulenten Abfluss nach den klassischen Modellen bestimmen. Kapitel 3 befasst sich mit den bekannten Ansätzen zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils, Kapitel 4 konzentriert sich auf den sehr wandnahen Bereich. Erst danach wird in Kapitel 5 die vorhandene Literatur zum eigentlichen Thema aufgearbeitet.

Aufbauend auf die Kapitel 3 und 4 untersucht Kapitel 6 den Einfluss einer *Änderung* der relevanten Parameter (Dichte, Viskosität) auf vorgängig erörterten Mechanismen; es handelt sich also hauptsächlich um eine Weiterführung der klassischen Modellvorstellungen.

1.5 Wichtige Bemerkungen zur Notation

Die verwendeten Symbole sind im Symbolverzeichnis definiert. Drei Besonderheiten werden hier aber explizit aufgeführt, weil sie Anlass zu Unklarheiten geben könnten:

- Aus Gründen der Anschaulichkeit werden Graphiken von Geschwindigkeitsprofilen in den meisten ingenieurwissenschaftlichen Publikationen "liegend" gezeichnet: Auf der Ordinate wird der Wandabstand aufgetragen, also das Argument statt wie sonst üblich die Funktion. Letztere, z.B. die Konzentrationsverteilung oder die Geschwindigkeit, erscheint auf der Abszisse.

Diese Darstellung, bei der die Achsen gegenüber der allgemein üblichen Darstellung von Funktionen *vertauscht* sind, wird hier übernommen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in diesem Fall der Geschwindigkeitsgradient – die Ableitung der Geschwindigkeit vom Wandabstand – als "steiler" bezeichnet werden muss, wenn er in der Graphik *flacher* erscheint.

- Werden wandnahe Vorgänge in *inneren Variablen* ausgedrückt (s. Abschnitt 3.3.3), so bezieht sich das hierfür übliche Symbol, ein hochgestelltes Plus (z.B. y^+ , u^+), im Prinzip auf die Dichte und die Viskosität des *jeweiligen* Fluids. Wo aber ein *Vergleich* zwischen einem Wasser-Luft-Gemisch und einem Reinwasserabfluss gezogen wird, wird die Normierung auf die *Reinwasserwerte* bezogen. Muss doch einmal auf die Gemischeigenschaften normiert werden, so werden die entsprechenden Normierungsfaktoren ausgeschrieben (z.B. in Abschnitt 6.3.2).

Dementsprechend wird auch die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ auf die *Reinwasserdichte* bezogen, d.h. $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho_w}$.

- In einigen Integrationsberechnungen fungiert der Wandabstand y gleichzeitig als Integrationsvariable und -grenze. Wo dies der Fall ist, wird zur besseren Unterscheidung die Variable mit y' , die Grenze mit y bezeichnet. An den entsprechenden Stellen wird noch einmal darauf hingewiesen.

2 Wasser-Luft-Gemische: Eigenschaften, Definitionen

Wasser-Luft-Gemische sind keine echten Gemische. Sie unterscheiden sich von diesen in zweierlei Hinsicht: Erstens werden die beiden Phasen im Gravitationsfeld nur durch die *Turbulenz* in Mischung gehalten. Zweitens ist die Luftphase *kompribibel*.

Die Konsequenzen dieser beiden Besonderheiten halten sich aber in Grenzen. Dass sich die beiden Phasen ohne die Turbulenz wieder entmischen würden, spielt für die vorliegende Arbeit wegen der Beschränkung auf den Gleichgewichtszustand keine Rolle. Auch die Kompressibilität hat in diesem Zusammenhang einen untergeordneten Einfluss (vgl. Abschnitt 2.2.4d).

2.1 Physikalische Eigenschaften der beiden Phasen

Die vorliegende Arbeit verwendet die folgenden Fluideigenschaften:

a) für *Wasser*:

- die Dichte: $\rho_w = 1'000 \text{ kg/m}^3$ (bei 4°C und 101.3 kPa).

- die kinematische Viskosität: $\nu_w = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (bei 10°C)

Ihre Temperaturabhängigkeit kann im Bereich zwischen 0 und 25°C mit der Polynom-Relation empirisch erfasst werden (Bild 2-1):

$$\nu_w = 1.79 - 0.055 T + 0.0008 T^2, \quad T \text{ in } [^\circ\text{C}], \quad \nu_w \text{ in } [\text{m}^2/\text{s}]$$

bzw.

$$\nu_w = 76.50 - 0.492 T + 0.0008 T^2, \quad T \text{ in } [\text{K}], \quad \nu_w \text{ in } [\text{m}^2/\text{s}].$$

- die dynamische Viskosität: $\mu_w = \rho_w \cdot \nu_w$ in [kg/ms] oder [Pa·s].

b) für *Luft*:

- die Dichte: $\rho_a = 1.293 \text{ kg/m}^3$ (bei 0°C und 101.3 kPa).

- Gaskonstante: $R_a = 287.05 \text{ J/kg/K}$ (für trockene Luft).

c) für die *Interaktion* zwischen Wasser und Luft:

- die Oberflächenspannung: $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$ (reines Wasser bei 20°C).

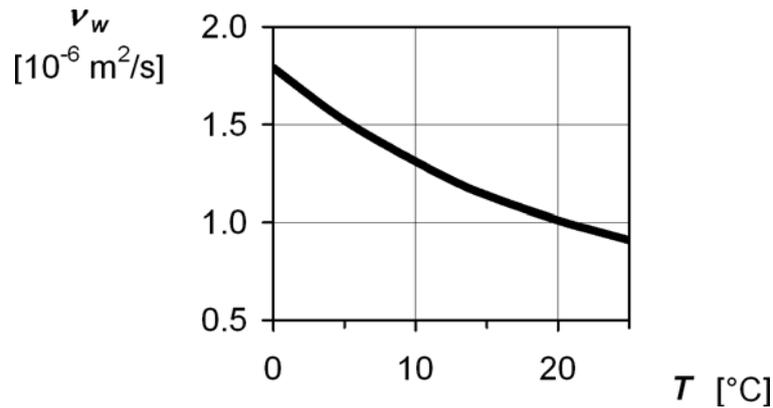


Bild 2-1: Verlauf der Viskosität von Wasser mit der Temperatur.

2.2 Physikalische Eigenschaften des Gemischs

2.2.1 Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit a beträgt in der Luft etwa 300 m/s, im Wasser rund 1'400 m/s. Im Gemisch hingegen ist sie viel tiefer. Eddington (1970) erhält für eine Luftkonzentration c und einen Druck P :

$$a = \sqrt{\frac{Pg}{c(1-c)}} \quad (P \text{ in m Wassersäule}) . \quad (2-1)$$

Der Herleitung liegen diverse vereinfachende Annahmen zugrunde, was den Gültigkeitsbereich reduziert. Fasst man Eddingtons Einschränkungen zusammen, so ist sein Ausdruck für Luftkonzentrationen zwischen etwa 1% und 80% anwendbar.

Bild 2-2 wertet Gleichung (2-1) aus. Demnach kann die Schallgeschwindigkeit in einem Wasser-Luft-Gemisch bei Atmosphärendruck bis auf etwa 20 m/s sinken.

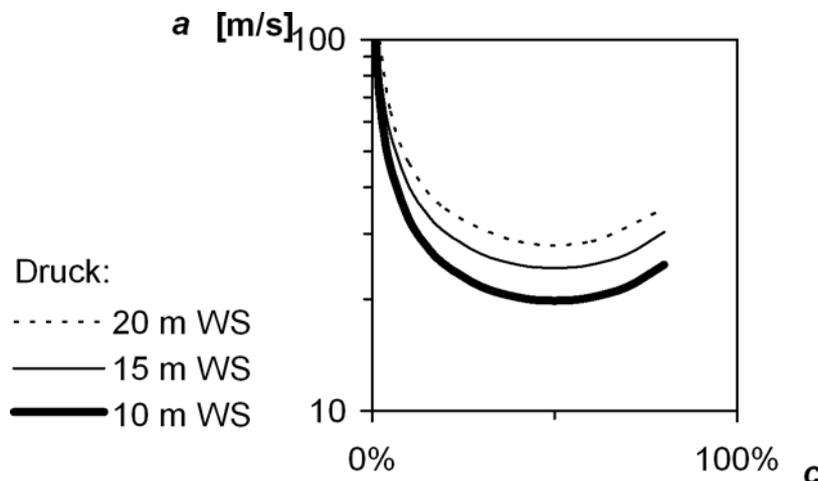


Bild 2-2: Schallgeschwindigkeit a nach Eddington (1970);
10 m WS = Atmosphärendruck.

2.2.2 Grösse der Luftblasen in turbulenter Strömung

a) Breakup nach Hinze (1955)

Hinze beschäftigt sich mit den hydrodynamischen Prozessen, welche in einem Gemisch für das Aufbrechen eines Tropfens der dispersen Phase verantwortlich sind. Dieser unterliegt drei massgebenden Kräften: der Trägheit der geschlossenen Phase, welche die Blase deformiert, sowie der Oberflächenspannung und der Viskosität der dispersen Phase, welche beide die Blase zu erhalten suchen. Als Resultat, so die Vorstellung, ergibt sich ein maximaler Durchmesser D , den eine Blase unter gegebenen Bedingungen nicht überschreiten kann ohne aufzubrechen.

Betrachtet man zunächst die beiden wichtigeren Kräfte, die Trägheit und die Oberflächenspannung, so drückt sich deren Verhältnis durch die Weber-Zahl We aus. Dementsprechend wird ein kritischer Wert We_{cr} das Aufbrechen und damit den Maximaldurchmesser D markieren. We_{cr} wäre im allgemeinen Fall auch eine Funktion der Tropfenzähigkeit. In Wasser-Luft-Gemischen verschwindet aber deren Bedeutung gegenüber den anderen Kräften, und We_{cr} ist eine Konstante.

Hinze geht zunächst aus von der allgemeinen Definition der Weber-Zahl:

$$We = \frac{\rho U^2}{\sigma/D} .$$

Hierin ist der Term ρU^2 problembezogen zu definieren. Im Fall eines hohturbulenten Abflusses sind nach Hinze die dynamischen Drücke in der geschlossenen Phase massgebend für das Aufbrechen der Blase. Als Mass dient ihm zunächst der Wert $\rho \overline{v^2}$, wobei v hier die Differenz der turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten über die Distanz D ist. Diese Grösse korreliert ihrerseits mit der Turbulenzproduktion P pro Massen- und Zeiteinheit: Hinze schreibt unter Verweis auf Batchelor (1951):

$$\overline{v^2} \approx 2(PD)^{2/3} ,$$

und erhält den Zusammenhang

$$We_{cr} = 2 \frac{\rho_w P^{2/3} D^{5/3}}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad D^5 = \frac{1}{P^2} \cdot \left(\frac{We_{cr}}{2} \cdot \frac{\sigma}{\rho_w} \right)^3 .$$

Zur Bestimmung von We_{cr} verwendet Hinze *experimentelle Daten* von Clay (1940, zitiert in Hinze). Deren Auswertung ergibt

$$We_{cr} = 1.18 ,$$

so dass

$$D = \frac{0.725}{P^{2/5}} \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho_w}\right)^{3/5} . \quad (2-2)$$

[Anmerkung: Genau genommen bezieht sich Hinzes Ansatz auf $D = D_{0.95}$, d.h. auf diejenige Durchmesser-Obergrenze, welche 95% des Luftvolumens beinhaltet. Das Gleiche gilt für den nachfolgenden Ansatz nach Falvey (1980).]

Hinze nimmt an, dass diese Beziehung z.B. auch für einen turbulenten Rohrabfluss gilt. Demnach könnte man ihn wohl auch für einen Freispiegelabfluss ansetzen, jedenfalls im Sohlbereich. Allerdings ist die experimentelle Grundlage beschränkt auf Fälle, wo die Blasen nicht koaleszieren, d.h. auf niedrige Konzentrationen.

b) Breakup im Querschnittsmittel nach Falvey (1980)

Falvey (1980), S. 12, sucht für die Grösse P in (2-2) einen Bezug zu allgemein bekannten Abflussgrössen. Er stützt sich dazu auf Rouse (1950), der einen "integralen" Ansatz für die Turbulenzproduktion präsentiert: Er berechnet sie für das Volumen eines ganzen Gerinneabschnitts aus dem auftretenden Reibungsverlust und dividiert sie durch ebendieses Volumen. Rouse erhält mit dem Energieliniengefälle S_e :

$$\rho_w P = \rho_w g S_e U \quad (\text{Rouse 1950, S. 81}) .$$

(Mit $\tau_0 = \rho_w g S_e d_0$ könnte man auch schreiben:

$$\rho_w P = \tau_0 U / d_0 .)$$

Falvey führt also Hinzes Gleichung (2-2) über in die Form:

$$D = 0.725 \left(\frac{\sigma}{\rho_w}\right)^{3/5} \left(\frac{1}{g S_e U}\right)^{2/5} ,$$

welche auch spätere Autoren zitieren (z.B. Kramer 2004).

c) Lokaler Breakup

In der vorliegenden Problemstellung stellt sich aber die Frage nach dem *lokalen* Maximaldurchmesser der Blasen, z.B. in Sohlennähe. Für P ist dann ein über den Abflussquerschnitt gemittelter Wert nicht mehr massgebend. Geht man stattdessen vom vollständigen Ausdruck für die *lokale* Turbulenzproduktion aus (z.B. Schlichting & Gersten 1997, S. 543) und reduziert ihn auf den ebenen, stationär gleichförmigen Fall, so erhält man für P :

$$\rho_w P = \tau_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} , \quad (2-3)$$

was der Definition der Arbeit als Produkt von Kraft mal Weg entspricht; integral betrachtet entspricht (2-3) wieder Falveys Ansatz.

Damit schreibt sich (2-2):

$$D = \frac{0.725}{\left(\frac{\tau_t \partial \bar{u}}{\rho_w \partial y}\right)^{2/5}} \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho_w}\right)^{3/5} = 0.725 \cdot \left(\frac{u_\tau \sqrt{1-\eta}}{\partial \bar{u} / \partial y}\right)^{2/5} \left(\frac{\sigma}{\tau_0(1-\eta)}\right)^{3/5} . \quad (2-4)$$

Führt man die Überlegungen weiter und drückt den Geschwindigkeitsgradienten – im Vorgriff auf Kapitel 6 – über den Mischungswegansatz (6-3) aus mit:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{l} \sqrt{\frac{1-\eta}{r_\rho}} ,$$

so erhält man für die Turbulenzproduktion

$$P = \frac{\tau_t \partial \bar{u}}{\rho_w \partial y} = \frac{(\tau_t / \rho_w)^{3/2}}{l \cdot r_\rho^{1/2}} = \frac{u_\tau^3}{l} \sqrt{\frac{(1-\eta)^3}{r_\rho}} \quad (2-5)$$

und für den Blasendurchmesser nach (2-2):

$$\frac{D}{l} = \frac{0.725}{r_\rho^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma / l}{\tau_0(1-\eta)}\right)^{3/5} . \quad (2-6)$$

Setzt man für den Mischungsweg l den Prandtl'schen Ansatz κy mit $\kappa = 0.41$ ein, so erhält man Größenordnungen, wie sie in Tab. 2-1 aufgeführt sind. Demnach wäre für Blasen unter Laborbedingungen eine Größenordnung von 1 mm oder weniger typisch, auf einem Prototypen indes könnten die Durchmesser in unmittelbarer Sohl-nähe, also für kleine Wandabstände y , weit unter einem Zehntelmillimeter liegen.

Kobus (1973), S. 23, oder Bogdevich et al. (1977) stellen ähnliche Überlegungen an zu einem verwandten Problem, der Ablösung von Blasen an Düsen. Sie führen zu analogen (natürlich nicht gleichen) Formelaustrücken. Bogdevich et al. berichten auch über eine gute Übereinstimmung mit entsprechenden Messdaten.

Thomas (1990) bestätigt die Gültigkeit von Hinzes These unter Verweis auf zahlreiche Publikationen.

Tab. 2-1: Grössenordnungen von Luftblasen nach Gleichung (2-6), hier gerechnet für eine Luftkonzentration von 5%, was aber kaum Einfluss hat.

d_0 [m]	S [m]	τ_t [N/m ²]	y [mm]	D [mm]
0.10 m	30%	294	100	1.4
			10	0.6
			1	0.2
1.00 m	100%	9'810	100	0.17
			10	0.07
			1	0.03

d Koaleszenz

Blasen können, wenn die Bedingungen dazu gegeben sind, wieder koaleszieren. Hierzu hat Thomas (1981) eine Überlegung gemacht, welche auf der Stabilität des Wasserfilms zwischen zwei aufeinander stossenden Blasen beruht. Er vergleicht die Zeit, die zur Drainage – und damit zum Platzen – des Films erforderlich ist, mit einer charakterischen Dauer eines Aufeinandertreffens. Letztere muss ausreichend lang sein, um die Drainage des Films zu ermöglichen. Dieses Kriterium führt Thomas zu einer Proportionalität für den *minimal erforderlichen Durchmesser*:

$$D \sim 2.4 \left(\frac{\sigma^2 h^2}{\mu_w \rho_w \varepsilon} \right)^{1/4} . \quad (2-7)$$

Hierbei sind ε die Dissipation und h die Dicke des Films. Für diesen werden Werte in der Grössenordnung von 10 bis 100 nm beobachtet. Das Proportionalitätszeichen steht bei Thomas für eine Gleichheit innerhalb *1 Grössenordnung*. Es sei angemerkt, dass das Kriterium eigentlich nur für rigide Blasen gilt. In den folgenden Abschnitten wird dargelegt, dass diese Annahme für sehr kleine Blasen in natürlichem Wasser in erster Näherung gelten kann.

Allerdings ist das Kriterium nur eine *Mindestanforderung*. Um wirklich zu koaleszieren, müssen die Blasen zuerst kollidieren, was bei kleinen Konzentrationen nicht selbstverständlich ist.

2.2.3 Steiggeschwindigkeit von Luftblasen in ruhendem Wasser

a) Steiggeschwindigkeit und Widerstandsbeiwert

Bild 2-3 aus Comolet (1979) gibt einen Überblick über die Steiggeschwindigkeit einer Luftblase in ruhendem Wasser. Es zeigt bei $We \sim 1$ einen markanten Unterschied zwischen dem viskosen und dem kapillaren Bereich: Im viskosen Bereich hat die Blase im Wesentlichen eine Kugelform. Im kapillaren Bereich weicht sie immer stärker davon ab. Hier wird davon ausgegangen, dass im hochturbulenten Abfluss einer Schussrinne dieser zweite Fall höchstens in Anfangsstadien eintreten kann, weil die Blase sonst in kleinere Teilblasen aufbrechen würde, die dann wieder eine Kugelform annehmen würden (vgl. die Überlegungen von Hinze in Abschnitt 2.2.2a).

Betrachtet man also eine kugelförmige Blase mit Volumen V und Querschnittsfläche A , so beträgt ihr Auftrieb F_a in Wasser der Dichte ρ_w bei vernachlässigbarer Luftdichte:

$$F_a = \rho_w g V \quad \text{mit} \quad V = \pi/6 \cdot D^3 .$$

Bei einer Steiggeschwindigkeit v_b wirkt ihr dann ein Widerstand F_d entgegen:

$$F_d = C_d A \rho_w v_b^2 / 2 \quad \text{mit} \quad A = \pi/4 \cdot D^2 .$$

C_d ist der Widerstandsbeiwert. Bei konstantem v_b sind beide Kräfte gleich gross, so dass schliesslich

$$C_d = \frac{2D}{3} \frac{v_b^2}{2g} \quad \text{bzw.} \quad v_b = \frac{4}{3} \frac{gD^2}{C_d Re_b v_w} \quad \text{mit} \quad Re_b = \frac{v_b D}{v_w} . \quad (2-8)$$

b) Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit von den Kontaktbedingungen

Es sind grundsätzlich zwei Verhaltensweisen denkbar, je nachdem, ob der Kontakt zwischen den beiden Phasen an der Blasenoberfläche als starr oder als beweglich betrachtet wird. Im ersten Fall verhält sich die Blase als starres Korn (*rigid sphere*), im zweiten Fall sind die Strömungen innerhalb der Blase zu berücksichtigen. Im Prinzip muss in beiden Fällen an der Phasengrenze die Haftbedingung gelten; für eine Luftblase in Wasser wird sie aber im zweiten Fall irrelevant, weil sowohl die Viskosität als auch die Dichte von Luft etwa drei Grössenordnungen kleiner sind; C_d wird dann niedriger.

Für die Berechnung schlägt Comolet (1979) – in Abhängigkeit von den Kontakteigenschaften und von der Reynoldszahl $Re_b = v_b D / v_w$ – die Ansätze gemäss Tab. 2-2 vor (hier vereinfacht auf den Fall eines Wasser-Luft-Gemischs).

Nach Comolet sind sich die meisten Forscher einig, dass sich sehr kleine Blasen starr verhalten. Für grössere ist dann die *Wasserqualität* das entscheidende Kriterium: In filtriertem oder destilliertem Wasser wird der Kontakt ab einem gewissen Durchmesser mobil, während er in Leitungswasser auch bei hohen Reynoldszahlen noch starr bleibt. Bild 2-4 aus den Untersuchungen von Haberman & Morton (1956) bringt dies deutlich zum Ausdruck.

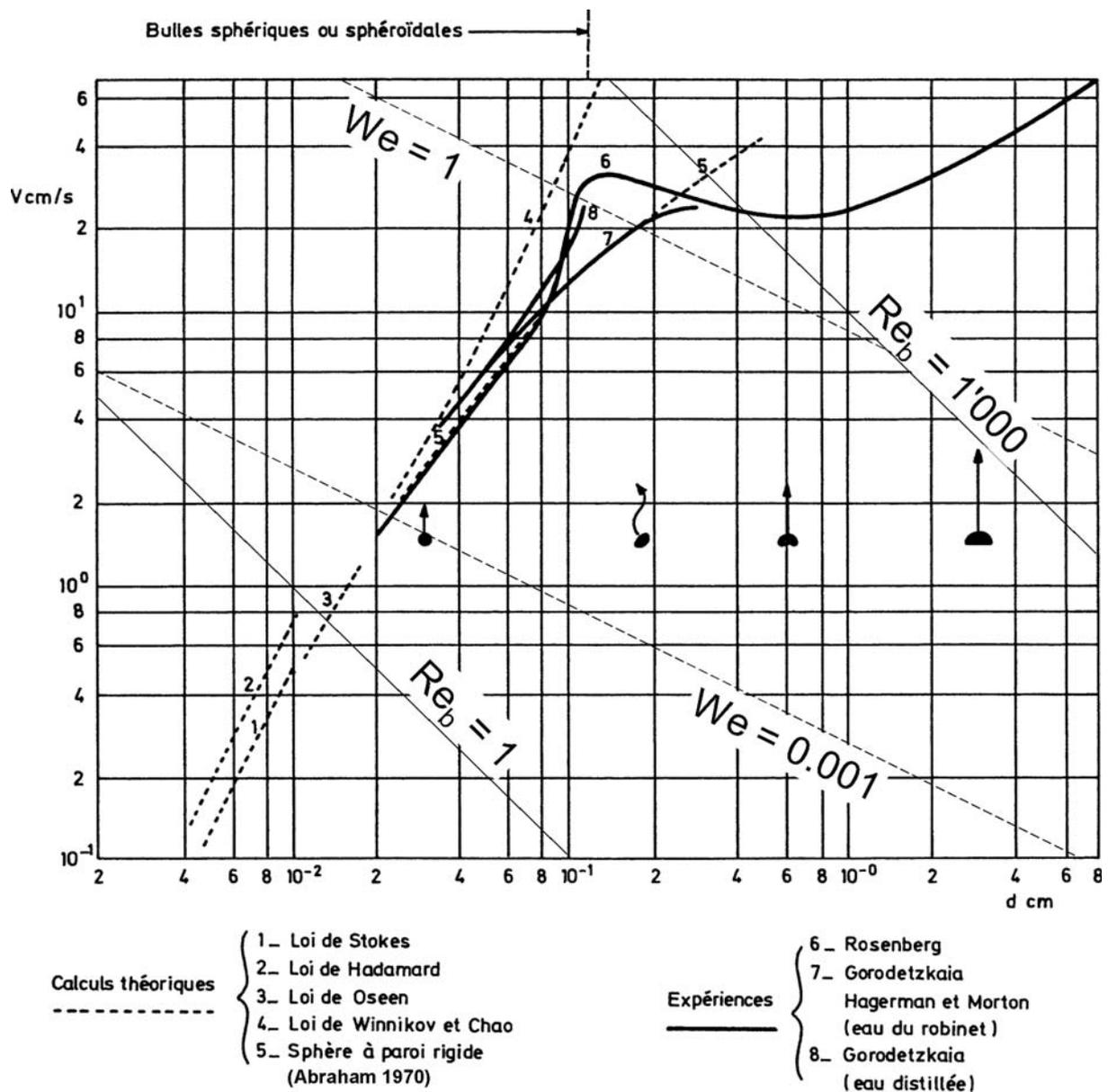


Bild 2-3: Comolet (1979): Steiggeschwindigkeiten von Luftblasen in ruhendem Wasser; die eingetragenen Reynoldszahlen Re_b gelten für eine kinematische Viskosität des Wassers von $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (20°C).

Tab. 2-2: Widerstandsbeiwert C_d und Steiggeschwindigkeit v_b einer Luftblase in Wasser im viskosen Bereich nach Comolet (1979); vgl. auch Bild 2-3.

starrer Kontakt	Re_b	beweglicher Kontakt
Stokes: $C_d = \frac{24}{Re_b}$ => mit (2-8): $v_b = \frac{1}{18} \frac{gD^2}{\nu_w}$	1	Hadamard (1911/12): $C_d = \frac{16}{Re_b}$
Abraham (1970): $C_d = \frac{24}{Re_b} \left(1 + \sqrt{\frac{Re_b}{82}}\right)^2$	1'000	Winnikov & Chao (1966): $C_d = \frac{32}{Re_b} \left(1 + \frac{0.814}{\sqrt{Re_b}}\right)$
	5'000	

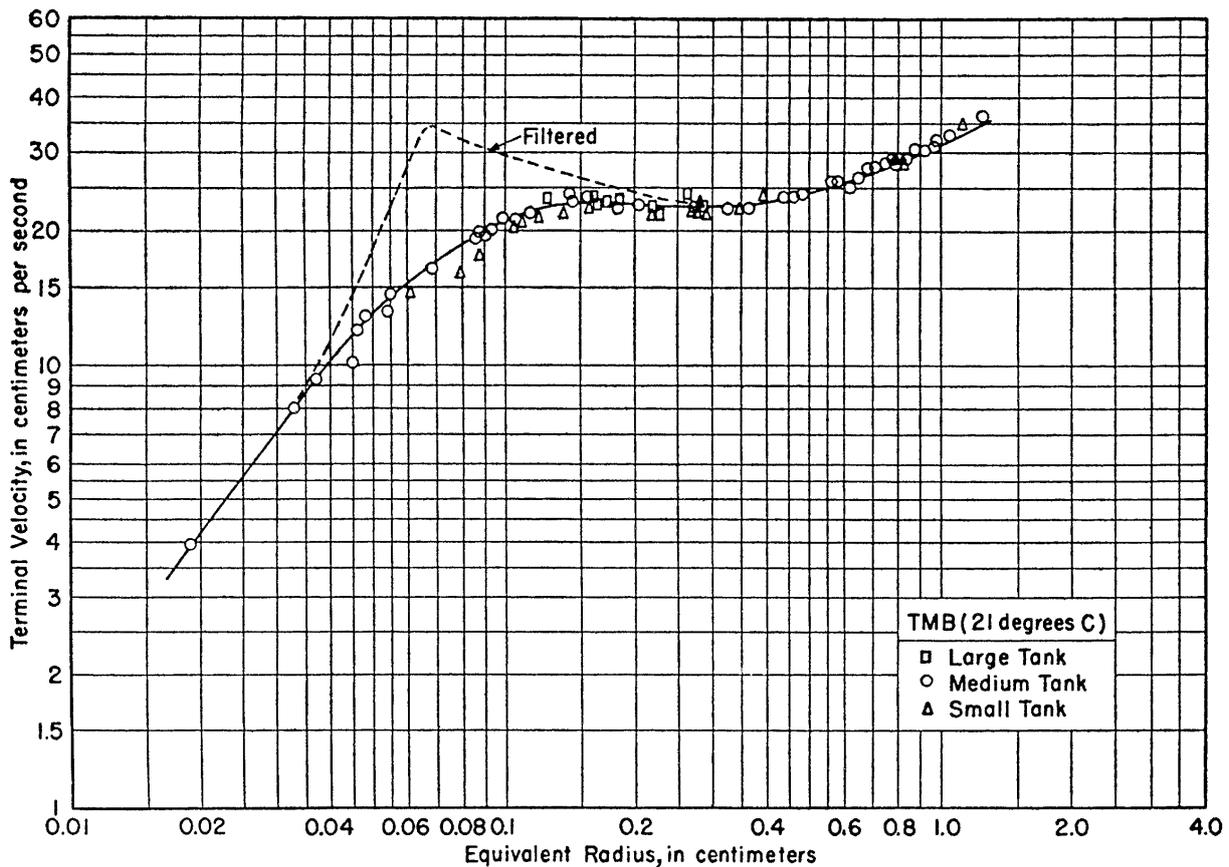


Bild 2-4: Haberman & Morton (1956): Steiggeschwindigkeit von Luftblasen in Leitungswasser und in filtriertem Wasser (gestrichelt).

c) **Fazit**

Bei "natürlicher" Wasserqualität, wie man sie auf Schussrinnen antrifft, ist mit einem starren Verhalten der Blase zu rechnen. Im allgemeinen Fall gilt dann – nach Tab. 2-2 – der Beiwert nach Abraham (1970). Die Steiggeschwindigkeit ist dann iterativ zu bestimmen aus:

$$v_b = \frac{4}{3} \frac{gD^2}{C_d Re_b v_w} \quad \text{mit} \quad C_d = \frac{24}{Re_b} \left(1 + \sqrt{\frac{Re_b}{82}} \right)^2 .$$

Für sehr kleine Blasen mit $Re_b < 1$ kommt dies dem Stokes'schen Gesetz gleich, und die Steiggeschwindigkeit ergibt sich explizit zu:

$$v_b = \frac{1}{18} \frac{gD^2}{\nu_w} . \quad (2-9)$$

2.2.4 Viskosität von Flüssigkeit-Gas-Gemischen

a) **Kleine Konzentrationen**

Einstein (1906/11) betrachtet eine Flüssigkeit mit dynamischer Viskosität μ_w , in welcher starre Kugeln suspendiert sind. Diesem System auferlegt er eine Scherverformung, berechnet das Geschwindigkeitsfeld zunächst für eine einzige Kugel und integriert die dabei dissipierte Energie über die Umgebung. Das Resultat summiert er über eine Suspension mit vielen Kugeln. Aus dem Vergleich mit dem analogen Ergebnis für die reine Flüssigkeit findet er, dass die dynamische Zähigkeit μ der Suspension um das 2.5-fache der Volumenkonzentration c der Kugeln wächst. Die dynamischen Zähigkeiten mit und ohne Luft stünden also in folgendem Verhältnis:

$$r_\mu = \frac{\mu}{\mu_w} = 1 + 2.5c . \quad (2-10)$$

Der analoge Ausdruck für die kinematischen Zähigkeiten lautet:

$$r_\nu = \frac{1 + 2.5c}{1 - c} .$$

Der Ansatz wurde mehrfach, zum Beispiel von Madavan et al. (1985), auch für Luftblasen übernommen.

Trean (1918) untersuchte die Viskosität von Blut, wo also die roten Blutkörperchen die Rolle der dispersen Phase spielen. Er erhielt für Konzentrationen bis etwa 50%:

$$r_\mu = 1 + 6.3c .$$

Allerdings sind in diesem Fall die Abmessungen der Blutkörperchen grösser als die dazwischen liegenden Flüssigkeitslamellen. Auch scheinen die Blutkörperchen – nach Trevans Graphiken zu schliessen – kaum rotieren zu können.

Taylor (1932) verallgemeinert Einsteins Überlegungen. Er geht aus von Fluidblasen mit einer Zähigkeit μ_d ("d" für "dispers"), welche in einem Fluid mit Zähigkeit μ_0 suspendiert sind. Deren Verhältnis sei $r_{\mu d}$. Seine Berechnung berücksichtigt auch die Strömungsvorgänge innerhalb der Blase. Im Spezialfall eines Wasser-Luft-Gemischs kennt also die Wasserphase an der Blasenoberfläche keine Haftbedingung mehr. Die Erhaltung der Kugelform bleibt aber auch bei Taylor eine Voraussetzung, d.h. die Blasen müssen so klein sein, dass die Oberflächenspannung eine merkliche Deformation verhindert. Taylor erhält für die Viskosität der Dispersion:

$$r_{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + c \cdot \frac{2.5 r_{\mu d} + 1}{r_{\mu d} + 1} . \quad (2-11)$$

(In der Literatur wird für diese Gleichung z.T. auch Batchelor (1967), S. 246 ff., zitiert.)

Der Grenzfall der starren Kugel ($r_{\mu d} \gg 1$) führt wie erwartet zu Einsteins Ausdruck (2-10), der also bei Taylor als Spezialfall inbegriffen ist.¹

Für den Fall eines Wasser-Luft-Gemisches ist $r_{\mu d} \ll 1$, und (2-11) vereinfacht sich zu:

$$r_{\mu} = 1 + c . \quad (2-12)$$

Der Anstieg von μ mit c wäre also viel moderater als bei Einstein. Kraynik (1988) zitiert aber Flumerfeldt (1980), wonach $r_{\mu d}$ in (2-11) eine Summe *mehrerer* Einflüsse ist. Zu den eigentlichen Viskositäten kämen eine Scher- und eine Dilatationsviskosität an der Grenzfläche. Es steht also nicht von vornherein im Widerspruch zur Theorie, wenn Madavan et al. (1985b) oder Marié (1987) für ihre Berechnungen von Einsteins Gleichung ausgehen.

b) Höhere Konzentrationen

Mit Ausnahme von Trevan ist diesen Modellen gemein, dass sie – implizit oder explizit – einen grossen Blasenabstand voraussetzen. Geht man von uniformen Blasen aus, so erhält man je nach Anordnung der Blasen den folgenden Zusammenhang zwischen

1. Der hypothetische Fall einer Flüssigkeit, welche in der gleichen Flüssigkeit suspendiert ist ($r_{\mu d} = 1$), führt zu $r_{\mu} = 1 + 1.75c$ statt zu $r_{\mu} = 1$. Dies ist aber keine Unstimmigkeit, denn die vorausgesetzte Kugelform stellt sich hier wegen der fehlenden Oberflächenspannung nicht ein.

dem relativen Blasenabstand (= Blasenabstand / Blasendurchmesser) und der Luftkonzentrationen c :

relativer Blasenabstand:	1	1.5	2	5	10
Anordnung kubisch:	52%	16%	7%	0.4%	0.1%
Anordnung tetraedrisch:	74%	22%	9%	0.6%	0.1%

Damit lässt sich die Anwendbarkeit dieser Ansätze etwas eingrenzen: Soll z.B. der relative Abstand wenigstens 1.5 betragen – der freie Raum zwischen den Blasen entspräche dann nur gerade einem halben Blasendurchmesser –, so können sie nur für Konzentrationen bis etwa 20% gültig sein. Sonst wären die Scherbewegungen und die dabei geleistete Arbeit sicher grösser als in den Modellen angenommen. Man muss also damit rechnen, dass diese Ansätze die Gemisch-Viskosität mit zunehmender Luftkonzentration unterschätzen.

Marié (1987) verwendet deshalb eine Erweiterung von Batchelor & Green (1972) der Form

$$r_{\mu} = 1 + 2.5c + 5.2c^2, \quad (2-13)$$

welche der Interaktion zwischen den Blasen Rechnung tragen soll. Allerdings begrenzen auch Batchelor & Green den Anwendungsbereich auf $c \ll 1$.

c) Schäume

Hatschek (1910/11) berechnet die Zähigkeit von Schäumen anhand der Arbeit, die bei der Scherung der dünnen Horizontallamellen geleistet wird. Er gelangt zu:

$$c = \left(1 - \frac{1}{r_{\mu}}\right)^3 \quad \text{bzw.} \quad r_{\mu} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{c}}.$$

Dieser Ansatz – er wird heute als ungültig betrachtet (Kraynik 1988) – findet Eingang bei Sibree (1934), der Schäume im Viskosimeter untersucht. Er stellt zunächst fest, dass sich die Zähigkeit mit wachsender Schergeschwindigkeit einer Asymptote annähert, also newtonisch wird (für kleine Schergeschwindigkeiten nicht!). Für die Messpunkte in diesen newtonischen Bereich (Bild 2-6) sucht er dann eine empirische Relation auf der Basis von Hatschek. Er schlägt folgende Modifikation vor :

$$1.3c = \left(1 - \frac{1}{r_{\mu}}\right)^3 \quad \text{bzw.} \quad r_{\mu} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1.3c}}.$$

Spätere Untersuchungen bestätigen Sibrees Messungen (Kraynik 1988). Demnach kann, wie man aus Bild 2-6 ersieht, die Viskosität eines Schaums diejenige der Flüssigkeit um Größenordnungen übertreffen. Es fragt sich jedoch, bis zu welcher Luftkonzentration ein Wasser-Luft-Gemisch ohne Tenside noch eine Schaumstruktur

aufzuweisen vermag. Diese Voraussetzung ist nicht mehr gegeben, wenn das Gemisch in einen Spray übergeht.

d) Einfluss der Kompressibilität

Gemäss Bradshaw (1971), S. 17 ff., hat die Kompressibilität bei Machzahlen unter 5 keine Bedeutung für Abflussvorgänge. Auch Eddington (1970), vgl. Abschnitt 5.2.2a, findet eine Beziehung zwischen der Schubspannung und der Luftkonzentration, die keine Hinweise auf einen Einfluss der Kompressibilität liefert.

Hingegen ist bei Abflusstiefen, wie sie auf Schussrinnen vorkommen, damit zu rechnen, dass die Luft in Sohlnähe aufgrund der hydrostatischen Drucks komprimiert und ihr Volumen entsprechend reduziert wird. Die meisten Autoren, z.B. Eddington (1970), rechnen aufgrund der Kleinheit der Blasen mit isothermen Verhältnissen, so dass das Volumen bei einer Reinwassertiefe von beispielsweise 1 m um ca. 10% verringert würde. Bezogen auf den Durchmesser wären es dann nur noch 3%. – Mit einem nennenswerten Einfluss ist auch hier nicht zu rechnen: Die *Änderung* der Blasen-grösse geht in die späteren Überlegungen letztendlich nur schwach ein (Kapitel 8).

Die Kompressibilität wird im Folgenden nicht weiter berücksichtigt.

e) Die Volumenviskosität

Legner (1984), s. Abschnitt 5.4.2, verweist auf die Volumenviskosität. Denn die Navier-Stokes-Gleichungen (3-4) erfassen die viskose Beziehung zwischen den Spannungen und den Deformationen nicht in der allgemeinsten Form. Für die Hauptrichtungen i würde diese lauten (Rosenhead 1954):

$$\sigma_i = -p + \mu'(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2-14)$$

Es tritt also der *zweite Viskositätskoeffizient* μ' hinzu. Für inkompressible Fluide, wo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, verschwindet dessen Einfluss. Sonst kann oft die Hypothese von Stokes angesetzt werden, wonach p der "mittlere" Druck sei:

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad .$$

Summiert über die drei Raumrichtungen ergibt Gleichung (2-14) dann

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu \quad .$$

Exakt ist das Stokes-Theorem aber nur für ideale Gase. Für ein Flüssigkeit-Gas-Gemisch gilt es sicher nicht: Akustische Experimente wie auch Berechnungen zeigen, dass μ' um Größenordnungen über μ liegen kann (Rosenhead 1954). Taylor

(1954) beispielsweise gibt für Wasser und Luft (unter Berücksichtigung der Kompressibilität des Wassers) die Beziehung

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{4}{3} \cdot \gamma F \quad \text{mit} \quad F = \frac{\gamma c}{(1 + \gamma c)^2} .$$

an. Hierbei ist γ das Verhältnis der Kompressibilität des Wassers zu derjenigen der Luft (ca. 20'000). Taylor hat sein Resultat in Bild 2-5 ausgewertet. Demnach kann μ'/μ ein Maximum von gegen 7'000 erreichen.

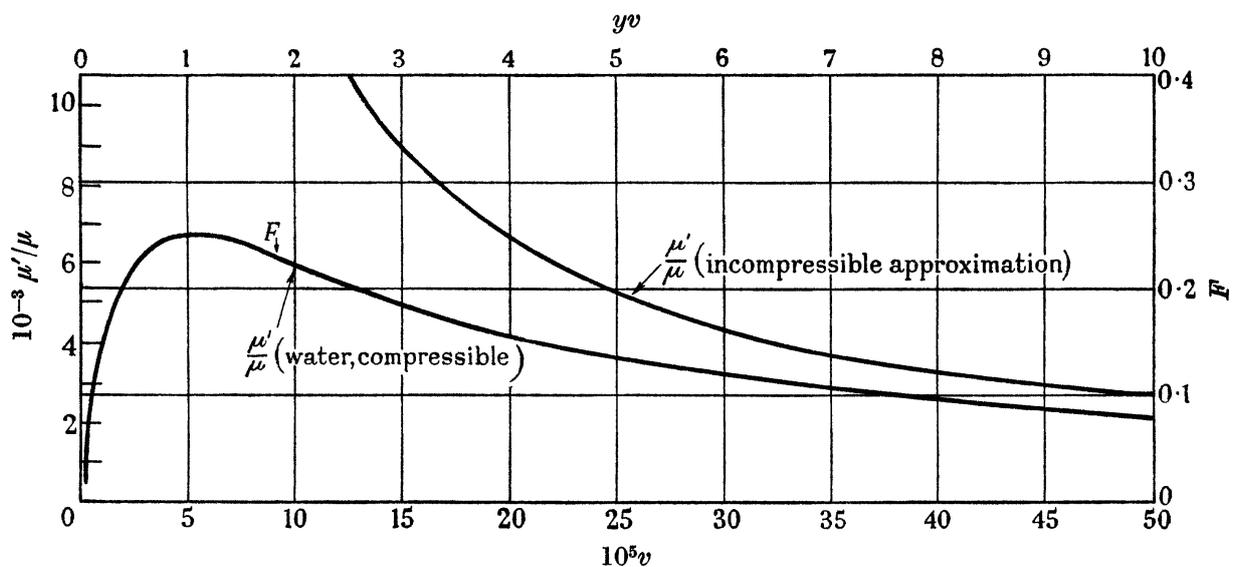


Bild 2-5: Taylor (1954): Zweiter Viskositätskoeffizient für belüftetes Wasser bei Atmosphärendruck. v (void fraction) ist die Luftkonzentration c .

In der Literatur wird der zweite Viskositätskoeffizient, wie oben angedeutet, vor allem im Zusammenhang mit akustischen Fragestellungen genannt.

f) Fazit

Für kleine Luftkonzentrationen stehen die Ansätze von Einstein (1906/11), Taylor (1932) und Batchelor & Green (1972) im Vordergrund, die man zusammenfassen kann mit

$$r_{\mu} = 1 + a_1 c + a_2 c^2 ,$$

mit den Koeffizienten

nach:	Einstein	Taylor	Batchelor & Green
$a_1 =$	2.5	1.0	2.5
$a_2 =$	0	0	5.2

Aufgrund der Ausführungen von Comolet (1979) zur Steiggeschwindigkeit, vgl. Abschnitt 2.2.3, erwartet man für die realen Verhältnisse einer Schussrinne eher einen immobilen Kontakt an der Blasenoberfläche. Die Ansätze von Einstein (2-10) bzw. Batchelor & Green (2-13) wären zu favorisieren.

Für grosse Luftkonzentrationen, d.h. für Schäume, hat Sibree (1934) sehr hohe Viskositäten gemessen (Bild 2-6). Als Obergrenze für r_μ wird im Rahmen dieser Arbeit ein Fit verwendet, welcher für niedrige Konzentrationen den Gesetzen Einsteins bzw. Taylors folgt, für hohe Konzentrationen aber einen empirischen Übergang zu den Daten Sibrees liefert. Auf diesen Fit wird im Folgenden mit den Bezeichnungen "ES-Fit" bzw. "TS-Fit" Bezug genommen, wobei ersterer von Einsteins Ansatz ausgeht, letzterer von Taylor:

$$r_\mu = \text{Exp}(a_3 c^2 + a_1 c) \quad , \quad \text{wobei} \quad a_1 = a_3 = 2.5 \quad (\text{ES-Fit}) \quad (2-15)$$

$$\text{bzw.} \quad a_1 = 1, \quad a_3 = 5 \quad (\text{TS-Fit})$$

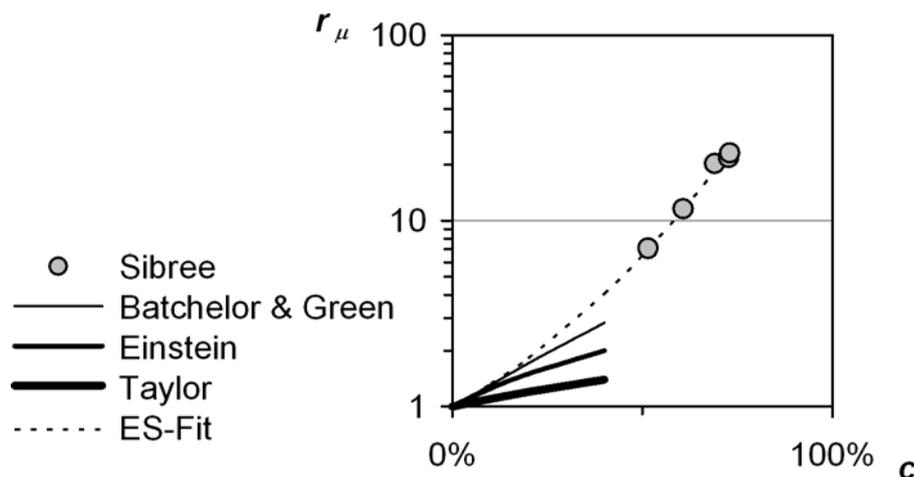


Bild 2-6: Viskosität in Abhängigkeit von der Luftkonzentration. Sibrees Messpunkte gelten für den newtonischen Bereich. Gestrichelt ist der ES-Fit (2-15) eingetragen.

Wie oben gesagt ist es allerdings fraglich, ob ein Wasser-Luft-Gemisch ohne Tenside bei sehr hohen Luftkonzentrationen noch eine Schaumstruktur aufrecht zu erhalten vermag. Die Extrapolation nach Sibree wird im Folgenden nicht als der Regelfall betrachtet.

2.3 Abflussgrößen der Wasser-Luft-Zweiphasenströmung

2.3.1 Voraussetzung betreffend die Dichte der Luft

Eddingtons (1970) Untersuchungen zum Verhalten von Flüssigkeit-Gas-Gemischen – auch im Überschallbereich – bestätigen, dass die Dichte der Luft bis zu Luftkonzentrationen von 99.5% vernachlässigt werden kann. Die in Hochwasserentlastungen relevanten Luftkonzentrationen sind weit tiefer.

Deshalb basieren die folgenden Definitionen auf der Annahme, dass die Luftdichte gegenüber der Wasserdichte ρ_w vernachlässigbar ist ($\rho_a = 0$). Sie enthalten also nur die Massenbeiträge des Wassers.

2.3.2 Koordinatensystem

In der Regel wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z verwendet, dessen x -Achse die Fließrichtung angibt und dessen y -Achse senkrecht zur Sohle steht. Die z -Achse spannt zusammen mit der x -Achse die Sohle auf.

Die Schussrinne ist mit einem Winkel θ geneigt. Dieser sei, mit Blick auf die Einschränkungen in Abschnitt 1.3, konstant und für alle Stromfäden gleich. Das *auf den Fließweg Δx bezogene* Gefälle S beträgt dann bei einer überwundenen Fallhöhe Δh :

$$S = \Delta h / \Delta x = \sin(\theta) \quad .$$

Analog wird im Folgenden auch das *Energieliniengefälle* zu $S_e = \Delta h_e / \Delta x$ definiert.

Die entsprechenden, auf die *Horizontale* bezogenen Gefälle sind J und J_e .

2.3.3 Geschwindigkeiten

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ist nach den Achsen x, y und z des lokalen Koordinatensystems ausgerichtet. Es wird unterschieden zwischen den örtlichen Geschwindigkeiten $\mathbf{u}(y)$, ihrem zeitlichen Mittel $\bar{\mathbf{u}}(y)$ sowie ihren Schwankungen $\mathbf{u}'(y)$. Die über die Zeit und die Abflusstiefe gemittelte Geschwindigkeit in Fließrichtung ist $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$.

2.3.4 Lokale Luftkonzentration, Abflusstiefe

Der *Gleichgewichtszustand* ist erreicht, wenn sich das Konzentrationsprofil entlang des Fließwegs nicht mehr ändert. Der Luftaustrag durch Auftrieb und der Luft eintrag durch die Turbulenz halten sich dann die Waage, und zwar an jeder Stelle y . Diese *lokale Luftkonzentration* $c = c(y)$ wird definiert als der Anteil des lokalen Luftvolumens V_a am lokalen Gesamtvolumen V :

$$c = V_a / V \quad , \quad V = V_a + V_w \quad , \quad \text{mit } V_w = \text{lokales Wasservolumen.}$$

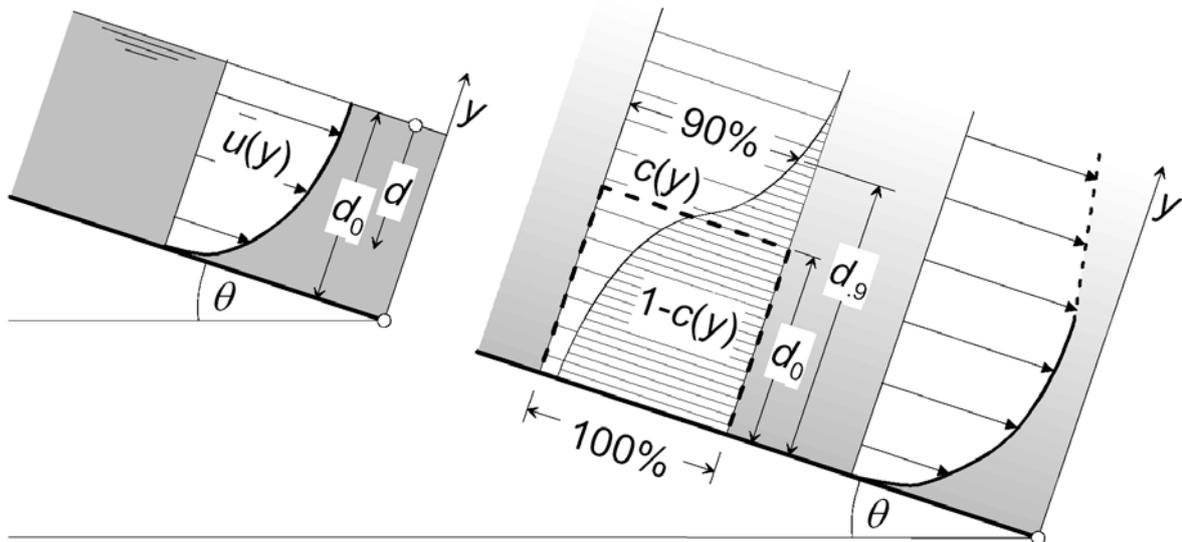


Bild 2-7: Definitionsskizze, links für unbelüfteten Abfluss mit eindeutigem Wasserspiegel, rechts für belüfteten Abfluss mit kontinuierlichem Übergang von Wasser zu Luft. Mit Pfeilen die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{u}(y)$, leicht schraffiert die Luftkonzentration $c(y)$ und dicht schraffiert die dazu komplementäre Wasserkonzentration $1 - c(y)$.

(Viele Autoren drücken die Konzentration nicht als Volumen- sondern als Abflussanteil aus: $c = q_a/q$ mit $q = q_a + q_w$. Dies geschieht meist aus versuchstechnischen Gründen: Die Luftzufuhr q_a ist reguliert und damit gut bekannt).

Das Komplement zu c ist die lokale Wasserkonzentration $1 - c(y)$.

Die Abflusstiefe ergibt sich prinzipiell aus der Spiegellage. Diese ist aber im Wasser-Luft-Gemisch wegen der Spray-Bildung nicht klar festzustellen. Üblicherweise definiert man stattdessen eine Abflussobergrenze an derjenigen Stelle y , wo eine bestimmte Grenz-Luftkonzentration überschritten wird. Dieser Abflussobergrenze entspricht eine Gemisch-Abflusstiefe d_m . Beispielsweise ist $d_m = d_{,9}$ diejenige Wassertiefe, bei der die lokale Luftkonzentration c einen Wert von 90% überschreitet (vgl. Bild 2-7).

2.3.5 Tiefengemittelte Luftkonzentration

Ein oft verwendeter Parameter ist die *mittlere*, genauer die *tiefengemittelte Luftkonzentration* C . Sie beträgt:

$$C = \frac{1}{d_u} \int_0^{d_u} c \, dy \quad .$$

Für die Widerstandsminderung hat die mittlere Luftkonzentration wenig Bedeutung: Zum einen ist sie, wie aus obiger Gleichung hervorgeht, abhängig von der Festlegung der Abflussobergrenze und somit eine recht willkürliche Grösse. Vor allem aber sagt

sie als Mittelwert nichts aus über die Verteilung und insbesondere nichts über die – für die Widerstandsminderung wichtigen – sohlennahen Werte. Nachfolgend wird die mittlere Luftkonzentration hauptsächlich bei Vergleichen mit früheren Arbeiten, bei welchen C als Parameter oft Eingang fand, mit einbezogen.

2.3.6 Reinwassertiefe

Im Gegensatz zu d_m und C ist die *Reinwassertiefe* d_0 eine Grösse, die *nicht* von der Festlegung einer Abflussobergrenze abhängt. Sie wird bestimmt, indem die Wasseranteile $(1 - c)dy$ aufintegriert werden:

$$d_0 = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_w} dy = \int_0^{\infty} (1 - c) dy \quad . \quad (2-16)$$

In Bild 2-7 ergibt sich d_0 , indem die Gesamtfläche der Wasserkonzentration $1 - c$ auf ein Rechteck mit der Basisbreite 100% umgelegt wird (fett gestrichelt). – Im Falle einer *hydraulisch rauen* Sohle wird die Reinwassertiefe in der vorliegenden Arbeit ab dem Bezugshorizont des logarithmischen Profils gerechnet (vgl. Abschnitt 3.7.6).

Im Folgenden wird auch die *Reinwasser-Überdeckung* $d(y)$ an einer Stelle y benötigt:

$$d = d(y) = \int_y^{\infty} (1 - c(y')) dy' \quad . \quad (2-17)$$

Bemerkung zur Schreibweise: y fungiert in obiger Gleichung gleichzeitig als Integrationsvariable wie auch als untere Integrationsgrenze. Zur Unterscheidung wurde erstere mit y' bezeichnet.

Im Weiteren wird $d = d(y)$ oft in Bezug gesetzt zu d_0 , und ein dimensionsloser Parameter η erweist sich dann als nützlich:

$$\eta = 1 - d(y)/d_0 \quad . \quad (2-18)$$

Man kann η als dimensionslosen "luftbereinigten" Wandabstand verstehen.

2.3.7 Spezifischer Abfluss, tiefengemittelte Geschwindigkeit

Der *spezifische Abfluss* q wird hier so definiert, dass er *nur den Wasseranteil* umfasst. Zu seiner Bestimmung wird der lokale Wassergehalt $1 - c$ mit der lokalen mittleren Geschwindigkeit $\bar{u} = \bar{u}(y)$ multipliziert und ebenfalls aufintegriert:

$$q = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_w} \bar{u} dy = \int_0^{\infty} (1 - c) \bar{u} dy \quad .$$

Wie schon die Reinwassertiefe d_0 wird auch der spezifische Abfluss im Falle einer *rauen* Sohle vom Bezugshorizont des logarithmischen Profils aus gerechnet (vgl. Abschnitt 3.7.6).

Damit hat auch die *tiefengemittelte Geschwindigkeit* U eine eindeutige Definition:

$$U = \frac{q}{d_0} .$$

2.3.8 Energiehöhe

Zur allgemeinen Bestimmung der *Energiehöhe* h_e muss zunächst die Energiehöhe $H(y)$ einer horizontalen Volumenlamelle an der Stelle y bestimmt werden (vgl. Wood 1985). Sie wird dann mit dem spezifischen Gewicht und der Geschwindigkeit, beides ebenfalls an der Stelle y , multipliziert. Die Integration des so erhaltenen lokalen Energieflusses über die ganze Abflusstiefe ergibt den spezifischen Energiefluss (pro Laufmeter Breite). Man erhält schliesslich die gesuchte Energiehöhe h_e , indem man den spezifischen Energiefluss durch den spezifischen Massenfluss m dividiert. Dieses allgemeine Vorgehen führt zu folgendem Rechengang:

Die Energiehöhe $H = H(y)$ einer *Volumenlamelle* an der Stelle y ist die Summe aus der Lageenergie des Elements über der Sohle, dem Überlagerungsdruck und der Geschwindigkeitshöhe des Elements, jeweils an dieser Stelle:

$$H(y) = y \cos \theta + \frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{u}^2}{2g} = y \cos \theta + \frac{p}{\rho_w g \cdot (1-c)} + \frac{\bar{u}^2}{2g} .$$

Der Druckanteil $p = p(y)$ beträgt:

$$p(y) = \int_y^\infty \rho(y) g \cdot \cos \theta dy = \rho_w g \cdot \cos \theta \cdot \int_y^\infty (1-c(y)) dy ,$$

oder mit $d = d(y)$ nach (2-17):

$$\frac{p}{\rho_w g} = \cos \theta \cdot d .$$

Der Energiefluss an der Stelle y kann jetzt bestimmt werden, indem man $H = H(y)$ mit dem spezifischen Gewicht $\rho g = \rho(y)g$ und der Geschwindigkeit $\bar{u} = \bar{u}(y)$ multipliziert. Dieses Produkt integriert man über die Wassertiefe auf und erhält den spezifischen Energiefluss E pro Laufmeter Breite:

$$E = \int_0^\infty \rho g \cdot H \cdot \bar{u} dy = \rho_w g \cdot \int_0^\infty (1-c) H \bar{u} dy .$$

Die Division von E durch den spez. Massenfluss $\rho_w q$ und die Erdbeschleunigung ergibt schliesslich die Energiehöhe h_e im Querschnitt:

$$h_e = \frac{E}{\rho_w g \cdot q} .$$

In Schussrinnen kann h_e meistens vereinfacht bestimmt werden, weil die Geschwindigkeitshöhe viel grösser ist als die Abflusstiefe (Straub & Anderson 1958, ähnlich auch Wood 1985). Die Summe der Anteile aus Lage und Druck kann dann angenähert werden mit:

$$\frac{1}{\rho_w g \cdot q} \int_0^\infty \rho g \left(y \cos \theta + \frac{p}{\rho_w g \cdot (1-c)} \right) \bar{u} dy \approx d_0 \cos \theta . \quad (2-19)$$

Der Anteil der Geschwindigkeitshöhe kann mit dem Faktor α in Bezug gesetzt werden zur Geschwindigkeitshöhe aus der Mittelwerthydraulik:

$$h_v = \alpha \cdot \frac{U^2}{2g} , \quad \text{wo} \quad \alpha = \frac{1}{d_0} \int_0^\infty (1-c) \left(\frac{\bar{u}}{U} \right)^3 dy . \quad (2-20)$$

Mit (2-19) und (2-20) wird h_e :

$$h_e = d_0 \cos \theta + \alpha \frac{U^2}{2g} .$$

2.3.9 Allgemeine Bemerkung zu den Definitionen der Abflussgrössen

In der Praxis werden d_0 , q und h_E nur bis zur Gemisch-Wassertiefe d_m aufintegriert (vgl. Abschnitt 2.3.4). Die Resultate hängen aber, im Unterschied zur mittleren Luftkonzentration C , nur geringfügig von der Grenz-Luftkonzentration ab, jedenfalls wenn diese genügend hoch angesetzt wird (zum Beispiel $c > 90\%$).

3 Geschwindigkeitsprofil und Widerstand

3.1 Einführung

Dieses Kapitel rekapituliert die *klassischen* Grundlagen für den Fließwiderstand im Freispiegelabfluss. Der Fokus richtet sich auf die *physikalischen Mechanismen*, denn später soll die Wirkung der Luft auf den Widerstand soweit als möglich auf die Grundgesetze zurückgeführt werden. Im Kern folgen die Ausführungen dem allgemeinen Weg zur Bestimmung des Widerstands:

1. Herleitung des Geschwindigkeitsgradienten,
2. erste Integration dieses Gradienten zum Geschwindigkeitsprofil,
3. zweite Integration des erhaltenen Profils zur tiefengemittelten Geschwindigkeit,
4. daraus die Bestimmung des Widerstands.

Der Geschwindigkeitsgradient kann heute elegant über die Dimensionsanalyse gewonnen werden (z.B. Schlichting & Gersten 1997). Die physikalische Herleitung – insbesondere das Mischungswegmodell nach Prandtl – gilt als überholt (z.B. Laufer 1951, S. 1248). Für die vorliegende Arbeit bietet sie aber aufgrund ihrer Anschaulichkeit eine viel bessere Handhabe und ist deshalb Gegenstand dieses Kapitels.

3.2 Totale Schubspannung

Betrachtet man einen *ebenen Normalabfluss* mit Reinwassertiefe d_0 über eine Strecke Δx und hierin das Kräftegleichgewicht *in Fließrichtung*, so heben sich die hydrostatischen Drücke gegenseitig auf. Bild 3-1 illustriert diesen Sachverhalt für den Reinwasserabfluss, er gilt aber ebenso für einen Gemischabfluss. Es verbleiben nur die sohlenparallele Gewichtskomponente G_p und die Sohlereibung F_R :

$$G_p = G \sin \theta = G S = \rho_w g \cdot \Delta x \cdot d_0 \cdot 1 m' \cdot S \quad ,$$

$$F_R = \tau_0 \cdot \Delta x \cdot 1 m' \quad .$$

Das Gleichgewicht der beiden Kräfte bedingt eine *totale Sohlenschubspannung* τ_0 . Diese berechnet sich *unabhängig von der Luftkonzentrationsverteilung* zu

$$\tau_0 = \rho_w g d_0 S = \rho_w u_\tau^2 \quad . \quad (3-1)$$

$u_\tau = \sqrt{\tau_0 / \rho_w} = \sqrt{g d_0 S}$ ist die *Schubspannungsgeschwindigkeit*.

Analoges gilt auch für eine Ebene, welche parallel in einem Abstand y über der Sohle liegt. Mit der *Reinwasser-Überdeckung* $d = d(y)$ – s. Bild 2-7 – beträgt die totale Schubspannung $\tau = \tau(y)$ auf dieser Höhe²:

$$\begin{aligned}\tau &= \rho_w g d S \\ &= \tau_0 d/d_0\end{aligned}\quad (3-2)$$

oder mit der *dimensionslosen, "luftbereinigten" Koordinate* η nach (2-18):

$$\tau = \tau_0(1 - \eta) \quad , \quad \text{wo} \quad \eta = 1 - d/d_0 \quad . \quad (3-3)$$

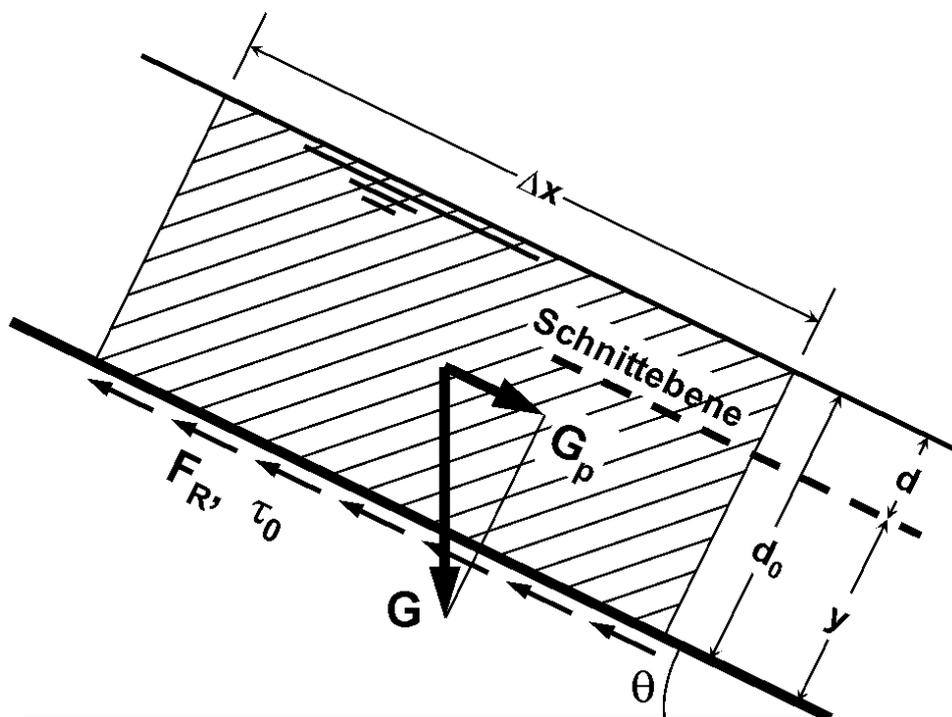


Bild 3-1: Kräftegleichgewicht am ebenen, stationär gleichförmigen Reinwasserabfluss.

Unter der Voraussetzung, dass die Schubspannung gleichmäßig über die Berandung verteilt sei, sind die analogen Ausdrücke an der Sohle für ein *nicht ebenes* Gerinne mit der Querschnittsfläche A und dem benetzten Umfang P :

$$G_p = G S = \rho g \cdot \Delta x \cdot A \cdot S \quad ,$$

$$F_R = \tau_0 \cdot \Delta x \cdot P \quad ,$$

$$\tau_0 = \rho g \frac{A}{P} S \quad .$$

2. für Reinwasserabfluss: $\tau = \tau_0(1 - y/d_0)$.

3.3 Reynolds-Gleichungen und -Spannungen

3.3.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Die oben angeschriebenen totalen Schubspannungen können als Belastung aufgefasst werden. Auf welche Weise diese vom Fluid aufgenommen werden, beschreibt die Bewegungsgleichung. Sie wird hier verkürzt und nur im Hinblick auf die vorliegende Fragestellung wiedergegeben (für eine vollständigere Übersicht s. z.B. Schlichting & Gersten 1997, Nezu & Nakagawa 1993, Favre 1965).

Die Navier-Stokes-Gleichung lautet für konstante Dichte ρ und konstante dynamische Zähigkeit μ (z.B. Tritton 1988, S. 55, 58):

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{Vektorschreibweise})$$

oder im stationären Fall in nur zwei Dimensionen und mit x als Fließrichtung

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \nabla^2 u \quad (x\text{-Richtung}), \quad (3-4)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta + \mu \nabla^2 v \quad (y\text{-Richtung}).$$

3.3.2 Reynolds-Gleichungen und Reynolds-Spannungen

Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} und der Druck p sind Momentanwerte. Sie unterliegen Schwankungen, welche durch die Turbulenz verursacht sind. Möchte man sie durch zeitliche Mittelwerte ersetzen, so sind statt ihrer die Größen $\bar{u} + u'$, $\bar{v} + v'$ und $\bar{p} + p'$ in die Gleichungen einzusetzen, also die jeweilige Summe aus dem Mittelwert und dem Schwankungsterm. Nach der Ausmittelung erhält man die statistischen Bewegungsgleichungen oder *Reynolds-Gleichungen*. Die hier interessierende Gleichung (3-4), also in Fließrichtung, nimmt dann mit $S = \sin \theta$ folgende Form an:

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho g S + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \quad (3-5)$$

Vergleicht man dies mit (3-4), so haben sich für ein inkompressibles Fluid alle Schwankungsterme wieder aus den Gleichungen herausgemittelt mit Ausnahme des letzten Terms $-\rho \overline{u'v'}/\partial y$. Vereinfacht man (3-5) weiter auf den gleichförmigen Fall, so fallen die ganze linke Seite sowie die Ableitungen der Geschwindigkeit nach x und y weg, und man erhält:

$$-\rho g S = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}.$$

Man könnte nun den Gefällsterm und den Druckgradienten in ein Energieliniengefälle zusammenfassen. Im einfacheren Fall eines Freispiegel-Normalabflusses entfällt letzterer aber ohnehin, und die Integration nach y ergibt mit der Integrationskonstanten C_1 :

$$C_1 - gS \int_0^y \rho dy = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} .$$

Für $y = 0$ muss C_1 gerade die Sohlschubspannung sein. Die linke Seite ist dann die Schubspannung τ an der Stelle y , so dass:

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \tau_v + \tau_t . \quad (3-6)$$

Beim ersten Term handelt es sich um die viskosen Schubspannungen τ_v . Er unterscheidet sich nicht von der Form in der Navier-Stokes-Gleichung. Den zweiten Term bezeichnet man als die *turbulenten Schubspannungen* oder *Reynoldsspannungen*

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} . \quad (3-7)$$

Hierbei zeigt das Minuszeichen nur scheinbar eine den Verlust abmindernde Wirkung an; tatsächlich werden für die Schwankungen u' und v' mehrheitlich entgegengesetzte Vorzeichen gemessen. Ihr Produktmittel $\overline{u'v'}$ wird negativ und der Gesamtterm positiv. Auch die Reynoldsspannungen hemmen also den Abfluss.

Wie kommen sie zustande? Prandtl (1925) stellt sich einen Fluidballen vor, der in Fliessrichtung eine Schwankungsgeschwindigkeit u' aufweist. Er wird nun durch die Turbulenz in y -Richtung ausgelenkt und zwar mit einer Schwankungsgeschwindigkeit v' . Dann können die Reynolds-Spannungen aufgefasst werden als der gemittelte Fluss eines volumenbezogenen Impulses $\rho u'$, der mit der Geschwindigkeit v' quer zur Fliessrichtung transportiert wird. Es findet also ein Impulsaustausch statt, der die schnelleren Schichten bremst, die langsamen beschleunigt. Die Strömung ist durch die Querbewegungen "verzahnt". Diese anschauliche Betrachtung ist in vorliegendem Zusammenhang wichtig: Sie macht deutlich, dass ρ die Dichte *des transportierten Fluidballens* ist.

3.3.3 Normierung auf innere Variable

Dividiert man Gleichung (3-6) durch $\tau_0 = \rho u_\tau^2$, so erhält man:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\nu}{u_\tau^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\overline{u'v'}}{u_\tau^2} .$$

Diese dimensionslose Form enthält eine Normierung der Geschwindigkeiten auf die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ und eine Normierung der Längen auf den *viskosen Längenmassstab* $l_v = \nu/u_\tau$. Man führt die *inneren oder Wandvariablen*

$$u^+ = u/u_\tau, \quad v^+ = v/u_\tau, \quad U^+ = U/u_\tau, \dots \text{ für Geschwindigkeiten}$$

$$y^+ = y \cdot u_\tau/\nu, \quad k^+ = k \cdot u_\tau/\nu, \quad d^+ = d \cdot u_\tau/\nu, \dots \text{ für Längen und}$$

$$\tau^+ = \tau/\tau_0 \quad \text{für Spannungen}$$

ein und schreibt Gleichung (3-6) zu:

$$\tau^+ = \tau_v^+ + \tau_t^+ = \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} - \frac{\overline{u'v'}}{u_\tau^2} \quad (\text{vgl. Schlichting \& Gersten 1997}). \quad (3-8)$$

Diese Normierung ist adäquat für sohnnahe Vorgänge, in denen die Viskosität eine Rolle spielt.

Alle wichtigen Grössen können auf diese Weise normiert werden, auch in konventionellen Betonschussrinnen. Hier liegen die äquivalenten Sandrauheiten k' üblicherweise zwischen 0.3 und 1.0 mm, das Gefälle S erreicht maximal etwa 80% (auf den Fliessweg bezogen!), und die Geschwindigkeiten überschreiten 50 m/s kaum. Für spezifische Abflüsse q zwischen 10 und 200 m³/s erhält man die folgenden Grössenordnungen für u_τ , l_v und die wichtigsten Abflusskennwerte:

$$u_\tau = 1-2 \text{ m/s}, \quad l_v = \text{ca. } 1 \mu\text{m}.$$

$$d_0^+ = (0.5 \div 5) \cdot 10^6, \quad d_0/k' = 500 \div 10'000, \quad k^+ = 300 \div 1'500,$$

$$U^+ = 20 \div 30, \quad q^+ = U^+ d_0^+ = \frac{U}{u_\tau} \cdot \frac{d_0 u_\tau}{\nu} = Re = 10^7 \div 10^8.$$

Die normierte querschnittsgemittelte Geschwindigkeit U^+ ist gleichzeitig der dimensionslose Chézy-Beiwert c_{Chezy} , wenn man Chézys Gesetz schreibt mit (vgl. z.B. Bezzola 2002):

$$U = c_{Chezy} \cdot u_\tau \quad (3-9)$$

3.4 Aufbau der turbulenten Strömung

Das *Zweischichtmodell* für die *universelle Geschwindigkeitsverteilung* unterteilt hydraulisch glatte Strömungen nach Bild 3-2 in die extrem dünne *Wandschicht* oder *viskose Unterschicht (wall layer, viscous sublayer)*, in welcher die viskosen Kräfte dominieren, und die *logarithmische Schicht*, wo die Trägheitskräfte die ordnende

Wirkung der Viskosität zu überwinden vermögen (vgl. Gyr & Bewersdorff 1995). Letztere wird im Englischen auch als *inertial sublayer* bezeichnet.

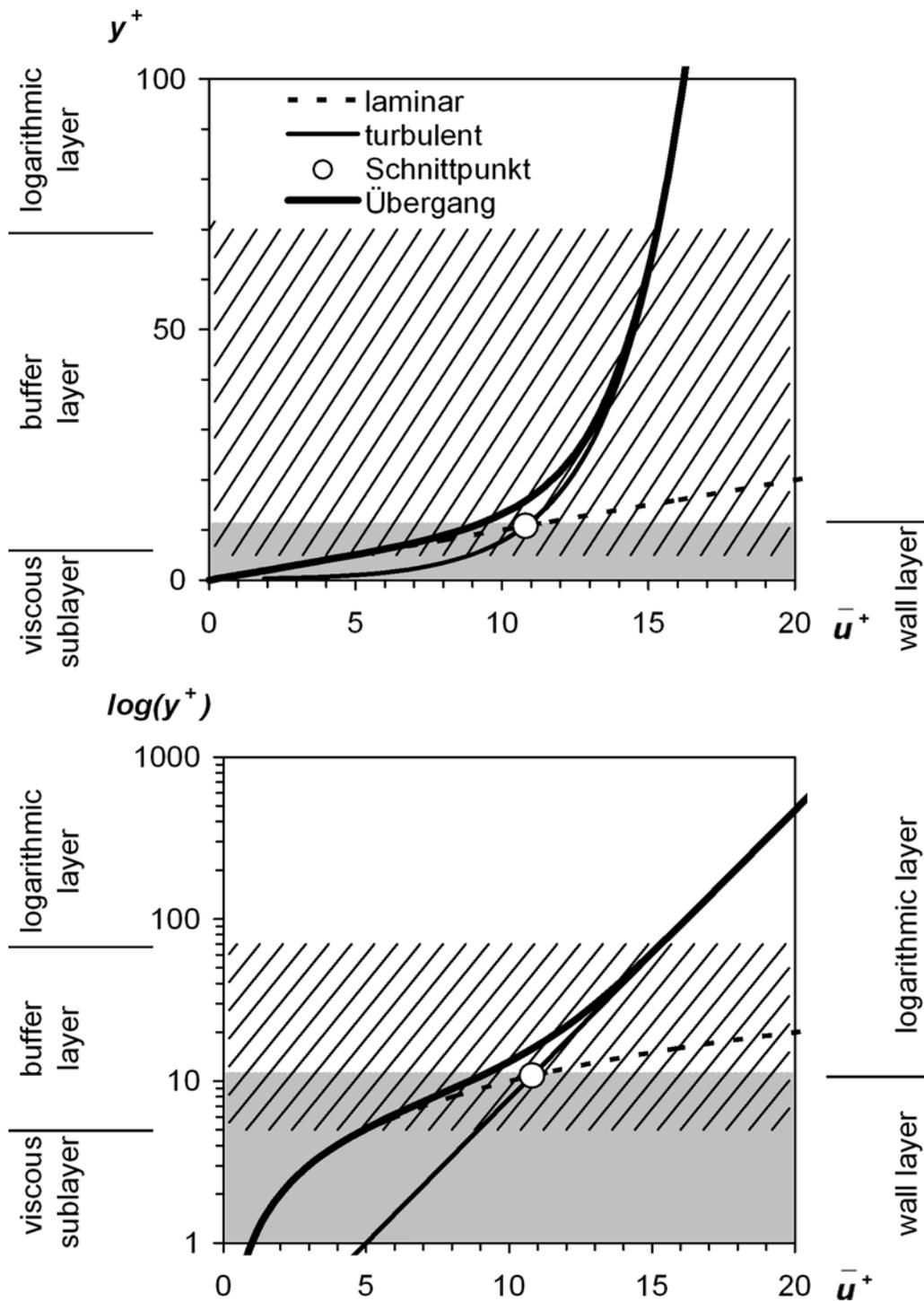


Bild 3-2: Universelles Geschwindigkeitsprofil im Wandbereich für hydraulisch glatten Abfluss. Oben linear, unten semilogarithmisch. Wandschicht schattiert, buffer layer schraffiert. Übergangskurve in diesem Bild nach Schlichting & Gersten (1997), S. 564.

Die Wandschicht ist im Normalfall extrem dünn. Trotzdem ist sie für den Gesamtwiderstand bedeutend, weil der Geschwindigkeitsgradient hier um Grössenordnungen steiler ist als im logarithmischen Bereich.

Zwischen den beiden Schichten findet ein fließender Übergang statt, welcher im *Dreischichtmodell* als eigene Schicht betrachtet wird, der *buffer layer*. Gegenüber dem Zweischichtmodell sind sowohl die Wandschicht als auch der logarithmische Bereich auf die Zonen reduziert, in welchen ihre jeweiligen Gesetze *eindeutig* dominieren.

Zusammen bilden die Wandschicht und der logarithmische Bereich den *Wandbereich* (*inner region*). Dieser skaliert mit dem viskosen Längenmassstab bzw. mit der Rauheit (vgl. Abschnitt 3.3.3).

Dem Wandbereich steht der *Mittbereich* gegenüber. Er skaliert mit den Querschnittsabmessungen des Gesamtabflusses (Wassertiefe, Rohrdurchmesser) und ist deshalb in Bild 3-2 nicht mehr universell darstellbar. Der Mittbereich nimmt den grössten Teil des Abflussquerschnitts ein. Für den Widerstand hat er wenig Bedeutung, weil die Geschwindigkeitsgradienten hier am kleinsten sind.

In der *Wandschicht* wirkt nur die Viskosität den totalen Schubspannungen entgegen:

$$\tau_v^+ = \tau^+ = \tau_0^+ = 1 \quad .$$

Dann wird aus Gleichung (3-8)

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = 1 \quad . \quad (3-10)$$

Die Integration ergibt mit der Haftbedingung $\bar{u}(y=0) = 0$ den *viskosen, linearen Ast* des Geschwindigkeitsprofils:

$$\bar{u}^+ = y^+ \quad . \quad (3-11)$$

Dieser Ausdruck erweckt den Eindruck, die Strömung in diesem Bereich sei laminar. Das ist aber nicht ganz richtig: Tatsächlich beobachtet man auch hier starke Auslenkungen (Schmid 1985, Müller 2006). Der Gradient schwankt also. Nur im *Zeitmittel* resultiert $\partial \bar{u}^+ / \partial y^+ = 1$.

Im *logarithmischen, vollturbulenten Bereich* hingegen überwindet die Trägheit die Viskosität und übernimmt die totalen Schubspannungen vollständig. Da man sich von der Wand entfernt, sind diese jetzt variabel. Mit Gleichung (3-3) wird dann im Freispiegelabfluss

$$\tau_t^+ = \tau^+ = 1 - \eta \quad \text{bzw.} \quad \tau_0(1 - \eta) = -\rho \overline{u'v'} \quad . \quad (3-12)$$

3.5 Schliessungshypothesen

Die turbulenten Schubspannungen $-\rho \overline{u'v'}$ in Gleichung (3-12) sind eine zusätzliche Unbekannte in den Reynolds-Gleichungen. Der turbulente Profilast kann deshalb – im Gegensatz zum viskosen – nicht direkt ermittelt werden.

Man behebt dieses Problem mit *Schliessungshypothesen*. Sie stellen einen Zusammenhang her zwischen den turbulenten Schubspannungen $-\rho \overline{u'v'}$ und dem Geschwindigkeitsgradienten. Die bekanntesten Konzepte sind die *Wirbelviskosität* nach Boussinesq und der *Mischungsweg* nach Prandtl.

3.5.1 Wirbelviskosität nach Boussinesq

Die Wirbelviskosität μ_t nach Boussinesq ist die einfachst mögliche Schliessungshypothese. Sie ist definiert mit:

$$\tau_t = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (3-13)$$

Sie lehnt sich also formal an die dynamische Viskosität μ an, ist aber keine Konstante. Der Ansatz liefert für sich genommen keine zusätzliche Information und daher auch keinen eigentlichen Beitrag zur Lösung des Problems.

3.5.2 Mischungsweg nach Prandtl (1925) in allgemeiner Form

Prandtls Mischungswegkonzept ist eine zentrale Grundlage für alle nachfolgenden Überlegungen. Es wird daher anhand von Bild 3-3 näher erläutert. Man geht aus von der Beobachtung, dass der Geschwindigkeitsgradient gegen die Wand hin zunimmt, zuerst langsam, dann immer rasanter. Wie steht dies in Zusammenhang mit den Schwankungsbewegungen? Prandtl verwendet das folgende anschauliche Bild: Infolge der Turbulenz werden immer wieder einzelne Fluidballen *quer* zur Strömung ausgelenkt. Sie gelangen so aus einer wandferneren und daher schnelleren Schicht in eine wandnähere und daher langsamere (oder umgekehrt). Dementsprechend bringen sie eine Geschwindigkeit in die neue Schicht mit, welche höher (bzw. tiefer) ist als die dort übliche. Nach Prandtl sind es die so entstandenen *Geschwindigkeitsdifferenzen*, welche in der neuen Schicht als *Schwankungen* registriert werden.

Der Geschwindigkeitsgradient $\partial\bar{u}/\partial y$ und die mittleren Schwankungen \bar{u}' seien gemessen. Es interessiert die Querdistanz l , welche ein Fluidballen im Mittel zurücklegt, bis er in einer neuen Schicht wieder vollständig eingemischt ist. Betrachtet man den geschilderten Transportvorgang anhand von Bild 3-3, so kann l geschätzt werden. Er ergibt sich nämlich aus der Beziehung:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{\bar{u}'}{l} \quad \text{bzw.} \quad \bar{u}' = l \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \quad (3-14)$$

Prandtl bezeichnet diese Querdistanz als *Mischungsweg*. Es ist die Distanz in y -Richtung, welche ein Fluidballen zurücklegt, bis er auf einer neuen Höhe y wieder eingemischt ist.

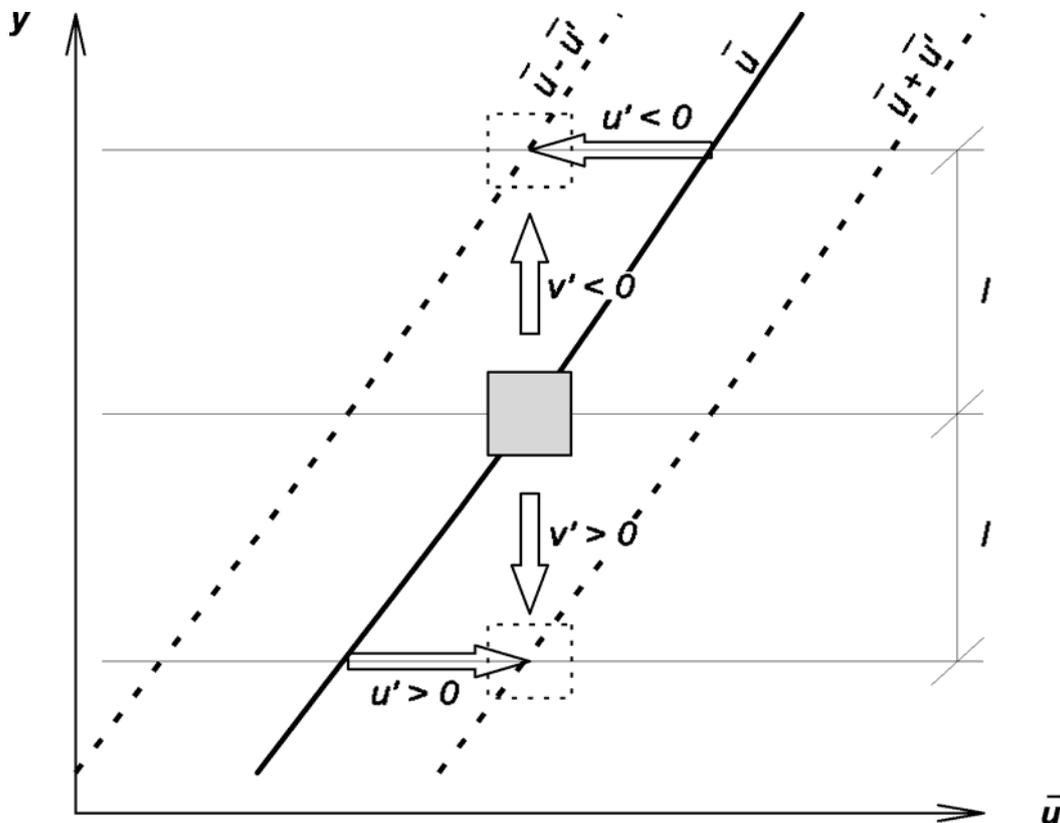


Bild 3-3: Der Mischungsweg nach Prandtl: Wird ein Fluidballen um eine Distanz l quer zur Fließrichtung verschoben, so wird die Differenz seiner Geschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit am neuen Ort dort als Schwankung wahrgenommen.

Mit Hilfe dieses Ansatzes gibt Prandtl den Reynoldsspannungen $-\rho \overline{u'v'}$ eine neue Form. Zunächst trifft er die Annahme:

$$\overline{u'} \approx -\overline{v'}$$

Diese Näherung ist gerechtfertigt: Schon in Abschnitt 3.3 wurde erwähnt, dass die Schwankungen in der Regel entgegen gesetzte Vorzeichen aufweisen. Messungen zeigen im Weiteren, dass auch die Beträge in der gleichen Größenordnung liegen (vgl. auch Abschnitt 3.7.2).

Ausserdem setzt man

$$|\overline{u'v'}| \approx |\overline{u'}\overline{v'}|$$

Anmerkung: Bei Prandtl (1925) geht diese Annahme nur implizit ein, weil er eigentlich von der Wirbelviskosität nach Boussinesq (3-13) ausgeht.

Beide Näherungen sind nicht exakt, wichtig sind aber die darin ausgedrückten Proportionalitäten und Grössenordnungen. Ungenauigkeiten wirft Prandtl explizit in den Mischungsweg l , welcher also nur ungefähr als reale Grösse aufzufassen ist.

Zusammengefasst können die Reynolds-Spannungen umgeformt werden zu:

$$-\rho \overline{u'v'} \approx \rho (\overline{u'})^2 = \rho \left(l \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 .$$

Setzt man dies in Gleichung (3-12) ein, so gelangt man zum Prandtl'schen Mischungswegansatz für den Freispiegelabfluss:

$$\tau_t^+ = \left(l^+ \frac{\partial \overline{u}^+}{\partial y^+} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \tau_t^+ = 1 - \eta$$

bzw.

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \tau_t = (1 - \eta) \tau_0 . \quad (3-15)$$

(Eigentlich wäre

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} ,$$

wobei das Betragszeichen sicher stellt, dass die Schubspannung das gleiche Vorzeichen hat wie der Geschwindigkeitsgradient. Im Freispiegelabfluss ist dieser aber im massgebenden, sohnahen Bereich immer positiv, so dass die Vereinfachung (3-15) zulässig ist.)

Diese Herleitung illustriert den *direkten Zusammenhang zwischen den Reynolds-Spannungen und dem Mischungswegansatz*. Sie zeigt auch, dass sich die Dichte ρ nach wie vor auf den *transportierten* Fluidballen bezieht.

3.5.3 Vergleich mit der Wirbelviskosität nach Boussinesq

Vergleicht man die Wirbelviskosität nach (3-13) mit dem Mischungswegansatz (3-15), so ist

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad \nu_t = l^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} . \quad (3-16)$$

Man kann aber auch auf Prandtl's Basisansatz (3-14) zurückgehen und gelangt zu

$$v_t = l \bar{u} \quad . \quad (3-17)$$

Einige Autoren, wie z.B. Legner (1984), vgl. Abschnitt 5.4.2a, verallgemeinern diesen Ausdruck, indem sie statt \bar{u} die Turbulenzenergie q^2

$$q^2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{(u^2 + v^2 + w^2)}$$

einsetzen (in Legners Notation ist q^2 bereits das zeitliche Mittel). Der dazugehörige Mischungsweg entspricht dann nicht genau der Länge l aus (3-17), weshalb ein neues Symbol eingeführt wird, bei Legner z.B. Λ . Damit wird:

$$v_t = \Lambda q \quad .$$

3.5.4 Weitergehende Vereinfachungen von Prandtl

Prandtl trifft weitere vereinfachende Annahmen zur Schubspannung und zum Mischungsweg:

- Er beachtet die – im Reinwasser lineare – Abnahme der totalen Schubspannung

$$\tau(y) = \tau_0(1 - \eta) \quad (3-2)$$

nicht, sondern weist ihr über die ganze Abflusstiefe den Wert an der Sohle zu, d.h.:

$$\tau(y) \equiv \tau_0 \quad (= \text{konstant}).$$

- Der Abstand zur Sohle bestimmt die Bewegungsfreiheit eines Fluidballens. Für den *Mischungsweg* geht Prandtl daher von einem linearen Zusammenhang mit y aus:

$$l = \kappa y \quad .$$

Die Konstante κ wird nach *von Kármán* benannt. Ihr Betrag ist ungefähr 0.4.

Mit diesen beiden vereinfachenden Annahmen zur Schubspannung und zum Mischungsweg wird der allgemeine Ausdruck (3-15) zu:

$$1 = (\kappa y^+)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \tau_0 = \rho (\kappa y)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad . \quad (3-18)$$

Der Gradient $\partial \bar{u} / \partial y$ ist also reziprok zu y . Sein Integral, das Geschwindigkeitsprofil, nimmt dann einen logarithmischen Verlauf an, und zwar – wegen Prandtls Vereinfachungen – über den gesamten Abflussquerschnitt ausser in der viskosen Unterschicht. Das Modell unterscheidet also nicht zwischen dem logarithmischen und dem Mittenbereich.

3.5.5 Differenziertere Mischungswegansätze

Spätere, ausgefeiltere Ansätze nehmen eine solche Unterscheidung vor. Die Änderungen betreffen hauptsächlich den Mittenbereich, während sie im logarithmischen Bereich von Prandtl nur wenig abweichen.

Schlichting und Gersten (1997) vergleichen einige dieser differenzierteren Ansätze. Ihnen ist gemein, dass sie Prandtls Vereinfachung $\tau_t(y) \equiv \tau(y) \equiv \tau_0$ aufgeben und durch den linearen Verlauf (3-2) ersetzen, den das Gleichgewicht erfordert. Sie gehen also zurück zur allgemeinen Form (3-15):

$$(1 - \eta)\tau_0 = \rho f^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2$$

Im Gegenzug begrenzen sie den Mischungsweg l im Mittenbereich der Strömung.

Das einfache Modell nach *Escudier* (1966), zitiert in Schlichting & Gersten (1997), S. 602, übernimmt im Wandbereich den linear wachsenden Mischungsweg nach Prandtl. Im Mittenbereich setzt es ihm aber eine feste Obergrenze, welche in Relation zur Abflusstiefe steht (vgl. auch Tab. 3-1). Der Verlauf über die gesamte Abflusstiefe lässt sich dann ausdrücken mit:

$$l = \text{Min}(\kappa y; \lambda_d d_0) \quad . \quad (3-19)$$

Damit wird in grober Form berücksichtigt, dass die Querbewegungen aus kinematischen Gründen nicht beliebig ansteigen können. An der Oberfläche eines Freispiegelabflusses müssten sie bei glattem Wasserspiegel sogar wieder Null sein. *Escudier* gibt λ_d mit 0.09 an, ebenso *Rodi* (1980). Spätere Autoren bevorzugen höhere Werte bis etwa 0.12 (vgl. *Bezzola* 2002, S. 120).

Michel et al. (1968), ebenfalls zitiert in Schlichting & Gersten (1997), wählen eine Tangenshyperbolicus-Funktion, um die Unstetigkeit nach *Escudier* auszurunden:

$$\frac{l}{d_0} = \lambda_d \tanh \frac{\kappa y}{\lambda_d d_0} \quad (3-20)$$

wobei sie λ_d zu 0.85 ansetzen, also etwas niedriger an als *Escudier*.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich im Weiteren auf die Ansätze nach Prandtl und *Escudier*, welche in Tab. 3-1 und in Bild 3-4 zusammengefasst sind. Bild 3-4 zeigt, weshalb der Ansatz von Prandtl trotz seiner groben Vereinfachungen zu guten Resultaten führt: Im massgebenden Wandbereich weichen die beiden Annahmen ohnehin nur wenig von einander ab. Aber auch im Mittenbereich bleiben die Folgen von Prandtls Vereinfachungen beschränkt: Zwar überschätzen sie sowohl die totale Schubspannung τ_t als auch den Mischungsweg l massiv. In Gleichung (3-15)

kompensieren sich die beiden Grössen die Fehler aber zu einem beträchtlichen Teil (vgl. Bild 3-11).

Im Übrigen zeigt Yalin (1977), S. 32, wie sich auch Prandtls Ansatz auf die tatsächliche Verteilung der Schubspannungen $\tau(y) = \tau_0(1 - \eta)$ umrechnen lässt: Erweitert man nämlich die linke Seite seines Ansatzes (3-18) mit $\tau = \tau(y)$, so gelangt man zu

$$\tau = \rho \left(\kappa y \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 .$$

Der Vergleich mit der allgemeineren Form (3-15) liefert für die Mischungsweglänge l

$$l = \kappa y \sqrt{\tau/\tau_0} = \kappa y \sqrt{1 - \eta} . \quad (3-21)$$

Tab. 3-1: Mischungswegansätze nach Prandtl und nach Escudier (Schlichting & Gersten 1997)

Ansatz	turbulente Schubspannung τ_t	Mischungsweg l
Prandtl	$\tau_t = \tau_0$	$l = \kappa y$
Escudier	$\tau_t = \tau_0(1 - \eta)$	$y/d_0 \leq \lambda_d/\kappa : l = \kappa y$ $y/d_0 \geq \lambda_d/\kappa : l = \lambda_d d_0$

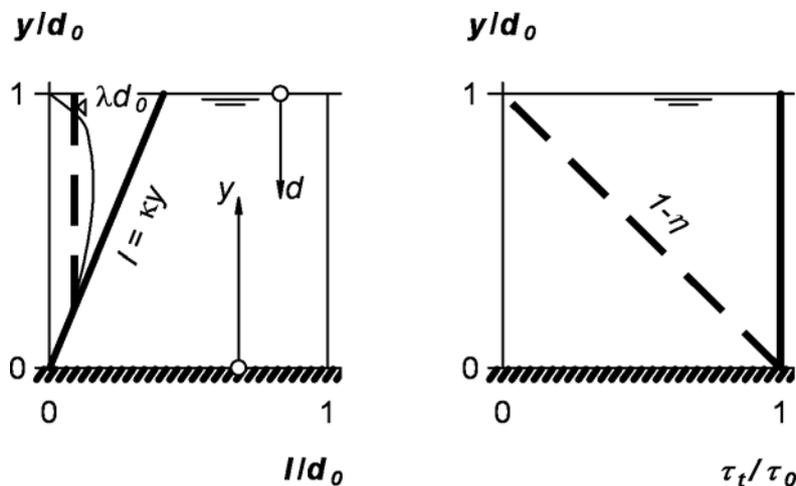


Bild 3-4: Verlauf des Mischungswegs (links) und der Schubspannung (rechts) nach Prandtl (fett ausgezogen) und Escudier (gestrichelt) im Reinwasserabfluss. In feinem Strich ist die Umrechnung (3-21) des Prandtl'schen Mischungswegs nach Yalin (1977) eingetragen.

3.6 Geschwindigkeitsprofil im hydraulisch glatten Abfluss

3.6.1 Viskoser Ast

Der viskose Ast des hydraulisch glatten Geschwindigkeitsprofils wurde bereits in Abschnitt 3.4 angegeben:

$$\bar{u}^+ = y^+ \quad \text{bzw.} \quad \bar{u} = \frac{\tau_0}{\mu} y = \frac{u_\tau^2}{\nu} y = u_\tau \frac{y u_\tau}{\nu} \quad . \quad (3-11)$$

3.6.2 Turbulenter Ast mit Prandtls Vereinfachungen

Der Gradient des turbulenten Astes ergibt sich aus Gleichung (3-18), also mit Prandtls Vereinfachungen, zu

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad . \quad (3-22)$$

Sein Integral ist das logarithmische Profil für volle Turbulenz:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B_g \quad \text{bzw.} \quad \bar{u} = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + u_\tau B_g \quad . \quad (3-23)$$

Die *Kármán-Konstante* κ und die *Rauheitsfunktion* B_g lassen sich graphisch ermitteln, indem man die gemessenen Geschwindigkeitspunkte in ein semilogarithmisches Gitter entsprechend Bild 3-2 (unten) einträgt. Der logarithmische Ast erscheint dann als Gerade. κ ergibt sich, indem man zwei Profilmunkte $(\bar{u}_1^+; y_1^+)$ und $(\bar{u}_2^+; y_2^+)$ in den Ansatz (3-23) einsetzt und die erhaltenen Gleichungen subtrahiert

$$\kappa = \frac{\ln(y_1^+/y_2^+)}{\bar{u}_1^+ - \bar{u}_2^+} = \ln 10 \cdot \frac{\log(y_1^+/y_2^+)}{\bar{u}_1^+ - \bar{u}_2^+} \quad .$$

Verlängert man im Weiteren die Gerade fiktiv nach unten bis auf die Höhe $y^+ = 1$, so ist ihr dortiger Wert gleich der Konstanten B_g .

Nikuradse (1932) ermittelte die Werte für κ und B_g zu 0.40 und 5.5. Die Angaben späterer Autoren liegen für κ meist zwischen 0.400 und 0.435, für B_g zwischen 5.0 und 5.5.

Die unterschiedlichen Ergebnisse kommentieren beispielsweise Bezzola (2002), S. 42, oder Nezu & Nakagawa (1993), S. 48 ff.: Zu den Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ kommt die Mehrparametrigkeit des logarithmischen Ansatzes: Schon im Fall des einfachen Ansatzes (3-24) – also ohne die zusätzliche Parameter etwa einer Wake-Funktion für den Mittenbereich – ist die Wahl der Gerade bis zu einem gewissen Grad Ermessenssache. Der

logarithmische Bereich nimmt nämlich nur einen beschränkten Raum ein (vgl. Bild 3-2), und die Übergänge sowohl in den Übergangsbereich als auch in den Mittenbereich sind fließend.

Die absoluten Beträge der Konstanten für homogenen Abfluss spielen aber im vorliegenden Problem eine nicht allzu grosse Rolle, weil dieses in erster Linie *vergleichend* betrachtet werden soll. Schlichting & Gersten (1997) beziehen sich auf Coles (1968) bzw. Huffman & Bradshaw (1972) und schlagen die folgende Definition des hydraulisch glattes Profils vor:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B_g \quad \text{mit } \kappa = 0.41 \quad , \quad B_g = 5.0 \quad . \quad (3-24)$$

Diese Werte werden in dieser Arbeit verwendet.

3.6.3 Turbulenter Ast in allgemeiner Form

Rückt man von Prandtls Vereinfachungen ab und wählt einen anderen Mischungswegansatz (vgl. Abschnitt 3.5.5), so muss der Ansatz (3-22) für den Gradienten des turbulenten Astes durch eine allgemeinere Form ersetzt werden. Diese ergibt sich aus (3-15) zu:

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{\sqrt{1-\eta}}{l^+} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{l} \sqrt{1-\eta} \quad . \quad (3-25)$$

l ist eine Funktion von y . Eine explizite Integration des Geschwindigkeitsprofils ist nicht mehr in jedem Fall möglich. Da *im Mittenbereich* der Mischungsweg mehr oder weniger konstant ist, führt die Integration von (3-25) hier nicht mehr zu einem logarithmischen, sondern eher zu einem Potenzprofil.

Verlängert man den logarithmischen Ast entsprechend Bild 3-2 hypothetisch nach unten, so verläuft er durch die beiden charakteristischen Punkte:

$$(y^+; \bar{u}^+) = (1; B_g) = (1; 5) \quad ,$$

$$(y^+; \bar{u}^+) = (e^{-B_g \kappa}; 0) = (0.13; 0) \quad (\text{Schnittpunkt mit der } y^+ \text{-Achse, } \bar{u}^+ = 0) \quad .$$

3.6.4 Übergang vom viskosen zum turbulenten Ast

Der *theoretische* Schnittpunkt des viskosen und des turbulenten Astes ergibt sich, wenn man die beiden Profile (3-11) und (3-22) gleichsetzt, d.h.

$$y_V^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_V^+ + B_g \quad . \quad (3-26)$$

Für die oben festgelegten Werte $\kappa = 0.41$ und $B_g = 5$ ergibt er sich zu:

$$(y_V^+; \bar{u}_V^+) = (10.8; 10.8) . \quad (3-27)$$

Dies entspricht der theoretischen Grenze zwischen den beiden Profilästen nach Bild 3-2. Tatsächlich ist der Übergang fließend: Die Übergangskurve im buffer layer – vgl. Abschnitt 3.4 – löst sich etwa bei $y^+ \approx 5$ vom viskosen Ast und geht bei ca. $y^+ \approx 50 \div 70$ in den logarithmischen Ast über.

Wichtig ist aber, dass der Schnittpunkt $(y_V^+; \bar{u}_V^+)$ eine *physikalisch begründete* Anknüpfung des logarithmischen Astes liefert.

3.6.5 Mittlere Geschwindigkeit

Integriert man den logarithmischen Ast *über die gesamte Reinwassertiefe* d_0 , d.h. ohne Berücksichtigung der anders verlaufenden Wandschicht, so ergibt sich der spezifische Abfluss für Prandtls Vereinfachungen nach Abschnitt 3.5.4 zu:

$$\begin{aligned} q^+ &= U^+ d_0^+ = \int_0^{d_0^+} \left(\frac{u_\tau}{\kappa} \ln y^+ + B_g \right) dy^+ = B_g d_0^+ + \frac{y^+}{\kappa} (\ln y^+ - 1) \Big|_0^{d_0^+} \\ &= B_g + \frac{d_0^+}{\kappa} (\ln d_0^+ - 1) \end{aligned}$$

(Denn $\lim_{y \rightarrow 0} (y \ln y) = 0$.)

Das normierte Geschwindigkeitsmittel über die Abflusstiefe wird somit:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} (\ln d_0^+ - 1) + B_g , \quad B_g = 5 .$$

Die analoge Integration über das Kreisprofil führt zum gleichen Resultat mit dem einzigen Unterschied, dass der konstante Wert in der Klammer zu 1.5 statt 1 resultiert. Etwas allgemeiner lässt sich also formulieren:

$$\begin{aligned} U^+ &= \frac{1}{\kappa} (\ln d_0^+ - i) + B_g , \quad B_g = 5 , \\ & \quad i = 1 \text{ (eben) bzw. } i = 1.5 \text{ (Rohr)}. \end{aligned} \quad (3-28)$$

3.7 Geschwindigkeitsprofil im hydraulisch rauen Abfluss

3.7.1 Änderungen gegenüber dem hydraulisch glatten Abfluss

Denkt man sich eine sukzessive Vergrößerung der Rauheit, so ragen deren Spitzen ab einem bestimmten Punkt in den Grenzbereich der viskosen Unterschicht oder darüber hinaus. An den Rauheitsspitzen lösen sich dann Wirbel ab.

Es sind jetzt diese Wirbel, und nicht mehr Instabilitäten an der Obergrenze der viskosen Unterschicht, welche die Turbulenz in der Strömung initiieren. Dementsprechend findet das logarithmische Profil seine Anknüpfung an der Berandung nicht mehr am Aussenrand der viskosen Unterschicht. Die Rauheit k löst den viskosen Längenmassstab l_v als massgebende Skala ab.

3.7.2 Roughness sublayer

Die von Bezzola zitierten Untersuchungen basieren auf Korrelationsmessungen, zum Beispiel den Root-Mean-Square-Werten (RMS) der Geschwindigkeitsschwankung in Fliessrichtung. Bild 3-6 zeigt – im Vorgriff auf Abschnitt 3.12 – ein typisches Messresultat für eben diese Korrelation bei vollständig rauem Abfluss, hier für natürliche Körner einheitlicher Grösse auf planem Untergrund: Gegen die Sohle hin nimmt der RMS-Wert zu und weicht zunächst kaum ab von den Verhältnissen über glatter Sohle (im Fall von Bild 3-6 weist Bezzola die Abweichungen dem Einfluss der Seitenwände zu). Dies ändert sich auf einer Höhe von ca. 1 Korndurchmesser über den Kornscheiteln bzw. über dem für diesen Rauheitstyp nur wenig tiefer liegenden Bezugshorizont (vgl. Abschnitt 3.7.6): Die Schwankungen steigen nicht mehr weiter an, sondern erreichen ein Maximum, halten dieses bis etwa auf die Höhe der Kornscheitel und fallen unterhalb derselben schnell ab.

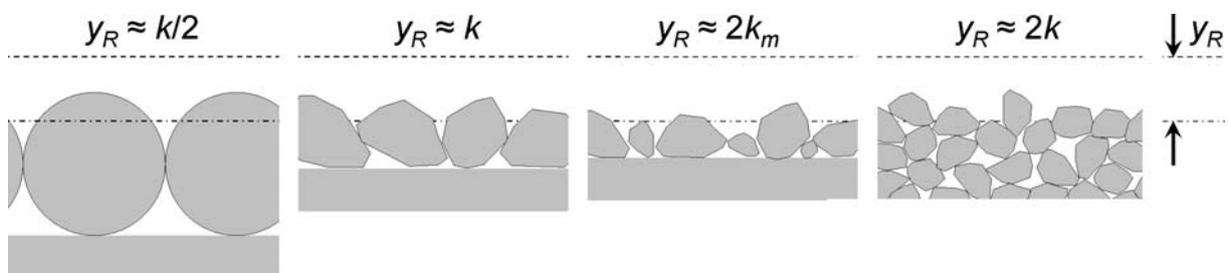


Bild 3-5: Ungefähre Mächtigkeit y_R des roughness sublayer bezogen auf den massgebenden Korndurchmesser k für verschiedene Oberflächen (nach den Ausführungen von Bezzola (2002), S. 78):

1. Kugeln auf planem Untergrund;
2. Körner gleichen Durchmessers auf planem Untergrund;
3. Kornverteilung mit mittl. Durchmesser k_m auf planem Untergrund;
4. Körner gleichen Durchmessers mehrlagig.

Der Bereich des Maximums wird als eigene Schicht betrachtet und als *roughness sublayer* bezeichnet. Für eine differenziertere Betrachtung ihrer Eigenschaften, etwa in Bezug auf die gewählte Korrelation oder für unterschiedlich grosse Rauheitselemente, sei auf Bezzola (2002) verwiesen. In diesem Rahmen reicht eine vergrößernde Charakterisierung aus. Vier Punkte seien hervorgehoben:

- Die Mächtigkeit des roughness sublayers hängt nicht von der Abflusstiefe ab, sondern von Durchmesser, Form und Anordnung der Körner. Sie liegt auch *in der Größenordnung* der Korndurchmesser (vgl. Bild 3-5).
- Auf einer bestimmten Höhe y im turbulenten Bereich liegen die Beträge der Korrelationen $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u'v'}$ etc. alle in der gleichen Größenordnung. Fast noch wichtiger: Sie stehen in mehr oder weniger *festen Relationen* zu einander.

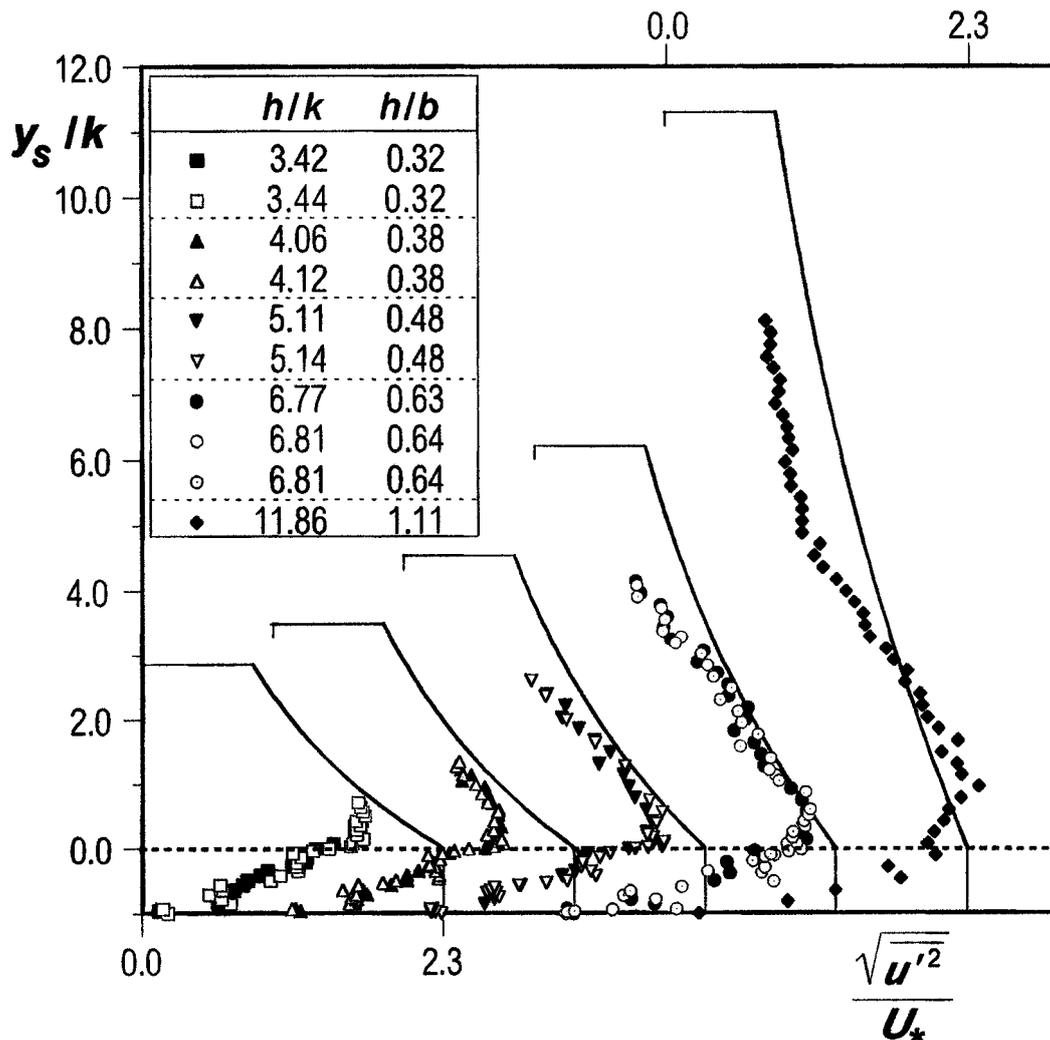


Bild 3-6: Bezzola (2002): Gemessene Turbulenzintensitäten nach Dittrich & Koll (1997) für unterschiedliche relative Überdeckungen d_0/k , für natürliche Körner einheitlicher Grösse auf planem Untergrund. Die Graphik vergleicht die Messpunkte mit der jeweiligen empirischen Beziehung für glatte Abflüsse (ausgezogene Kurven).

Bemerkungen zur Darstellung: Der Sohlenabstand y ist ab der Tangentialebene durch die Kornscheitel gemessen. Das Symbol U_* steht für die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ . Zur besseren Übersicht sind die Profile horizontal gegeneinander verschoben dargestellt, und zwar jeweils um 1 Einheit.

- Im roughness sublayer behalten sie diese Relationen weitgehend bei. Dies gilt auch für die Beziehung zwischen den häufig gemessenen und daher gut bekannten RMS-Werten in x -Richtung einerseits und der hier besonders interessierenden Korrelation $\overline{u'v'}$, der turbulenten Schubspannung also, andererseits.
- Bei vollständig rauem Abfluss sind noch bis in die Vertiefungen der Rauheit hinein Querbewegungen möglich (Bezzola 2002, S. 100). Diese Tatsache wird hier so interpretiert, dass die Strömungsvorgänge *bis tief in die Rauheiten hinein turbulent* bleiben.

Wichtig ist die Erklärung, welche Bezzola für die Begrenzung der turbulenten Schwankungsbewegungen im roughness sublayer gibt: Demnach rufen die Rauheitselemente *räumlich fixierte kleinskalige Sekundärbewegungen* hervor. Man kann sich diese als Hufeisen-Wirbel vorstellen, welche sich an den Rauheitsspitzen ablösen und deren Enden mit der Strömung mitgerissen werden (vgl. auch Abschnitt 3.12). Diese Sekundärbewegungen übernehmen einen Teil der totalen Schubspannungen. Die turbulenten Schubspannungen und damit die Schwankungsbewegungen werden um diesen Betrag reduziert.

3.7.3 Sandrauheiten, technische Rauheiten, äquivalente Sandrauheiten

Die ersten systematischen Arbeiten zum Geschwindigkeitsprofil rauher Abflüsse stammen wiederum von Nikuradse (1933). Er untersuchte Rohre, deren Innenfläche er mit dicht gepackten Sandkörnern auskleidete. Man spricht in diesem Fall von einer *Sandrauheit* k_S . Die erreichten Oberflächen sind relativ homogen; Form und Anordnung der Körner variieren nicht allzu stark und haben deshalb einen geringeren Einfluss. Eine Sandrauheit ist deshalb durch einen einzigen Parameter charakterisiert, den Korndurchmesser.

Rauheiten, wie sie in technischen Anwendungen vorkommen, sind demgegenüber schwieriger zu charakterisieren und weniger homogen. Sie zeigen im Übergang von glatt zu rau markante Abweichungen vom Verhalten der Sandrauheit. Man bezeichnet sie als *technische Rauheiten*.

Auch für diese lässt sich ein *geometrisches Rauheitsmass* k bestimmen. Damit sind aber Form und Anordnung der Rauheit nicht ausreichend erfasst. Man behilft sich, indem man zuerst den Widerstand einer technischen Rauheit misst und dann diejenige Sandrauheit bestimmt, welche den gleichen Widerstand ergäbe. Man spricht dann von einer *äquivalenten Sandrauheit* k' (vgl. auch Bezzola 2002, S. 45). Für Sandrauheiten ist also $k_S \approx k'$.

Dittrich & Koll (1997) stellen für verschiedenartige Rauheiten einen Bezug zwischen k' und k her (Bild 3-7). Sie beziehen dabei nur einen weiteren Parameter ein, nämlich die Rauheitsdichte c_k . Sie ist definiert als das Verhältnis der auf die Strömungs-

richtung projizierten Querschnittsfläche eines Rauheitselements zur Wandfläche, welche diesem Rauheitselement zugeordnet wird. c_k kann für Würfelemente zwischen 0 und 1 variieren, für Kugulelemente in quadratischer Anordnung zwischen 0 und 0.79 und für Kugulelemente in hexagonaler Anordnung zwischen 0 und 0.91. – Wie erwartet strebt k/k für verschwindende Rauheitsdichten gegen 0, d.h. man nähert sich der hydraulisch glatten Oberfläche. Gleiches gilt für maximale Rauheitsdichten, wo eine sehr dichte Packung zu einer quasi-glaten Oberfläche führt (v.a. bei kubischen Rauheitselementen, welche oben plan sind). Dazwischen tritt ein Maximum auf. Dieses erreicht bei den von Dittrich & Koll betrachteten Anordnungen Werte von über 4 und tritt bei relativ kleinen Rauheitsdichten von 0.15 bis 0.3 auf.

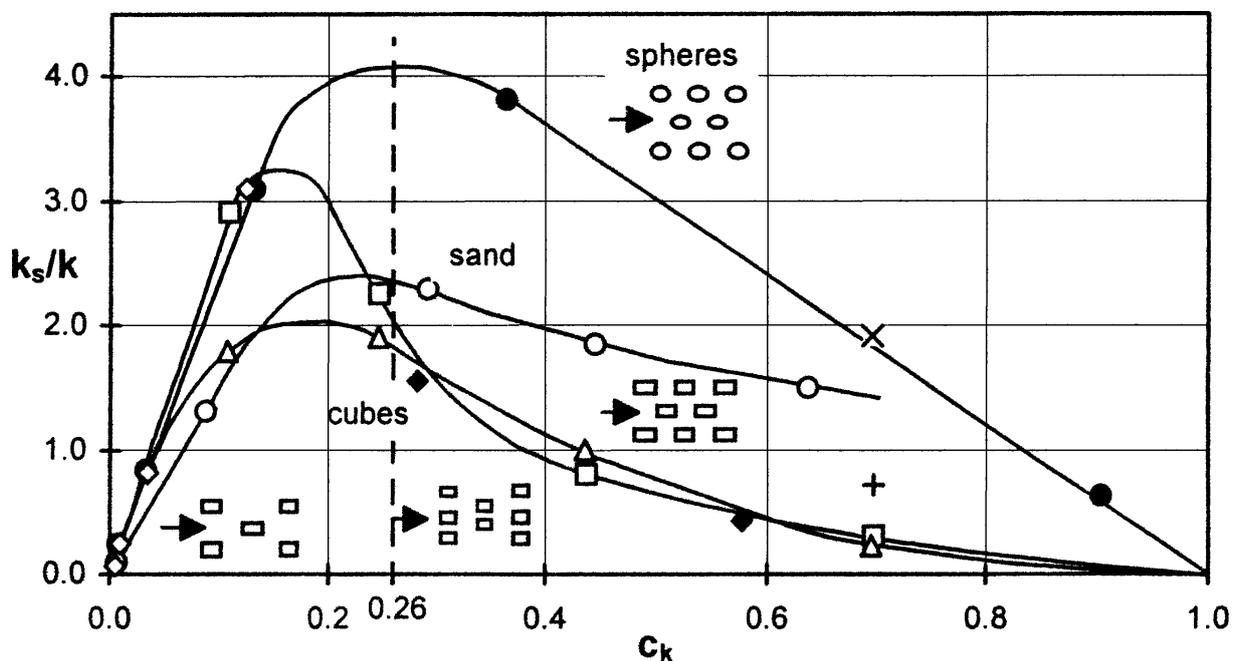


Bild 3-7: Dittrich & Koll (1997), Zusammenstellung von aus verschiedenen Quellen: Verhältnis k/k (im Bild mit k_s/k beschriftet) der äquivalenten Sandrauheit zum geometrischen Rauheitsmass, und zwar als Funktion von c_k für verschiedene Rauheitselemente.

Es bedeuten:

—○— Sand;

—●— Kugeln; × Kugeln in Linie; + Kugeln gestaffelt;

—△— Würfel in Linie; ◆, —□— Würfel gestaffelt.

3.7.4 Geschwindigkeitsprofil

Nach den Ausführungen in Abschnitt 3.7.2 kann man postulieren, dass der Mischungswegansatz bis ganz nahe an die Rauheitselemente gilt. Voraussetzung ist, dass deren relative Überdeckung d_0/k gross bleibt, was aber bei konventionellen

Schussrinnen gegeben ist. Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils geht man daher wieder von der Integration des Geschwindigkeitsgradienten entsprechend (3-24) aus. Der richtige Massstab für y ist jetzt aber nicht mehr der viskose Längensmassstab l_ν , sondern die Rauheit k , so dass

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{d_0}{k} + B \quad .$$

Es ist also zu erwarten, dass raue Profile mit gleichem d_0/k zusammenfallen, wenn sie entsprechend dieser Gleichung semilogarithmisch aufgetragen werden. Genau dies verifizierte Nikuradse (1933). Eine anschauliche Erklärung liefert das Modell, das in Abschnitt 4.2.3 vorgestellt wird.

Nikuradses Versuche ergaben für die Rauheitsfunktion B von *Sandrauheiten* k_S einen Wert von $B = 8.48$. Auch hier streuen die Resultate späterer Untersuchungen. κ – dies ist wichtig – ändert sich gegenüber dem glatten Abfluss nicht. Hier werden für *Sandrauheiten* – und also auch für äquivalente *Sandrauheiten* k' – wieder die Werte nach Schlichting & Gersten (1997) verwendet. Damit ergibt sich das Geschwindigkeitsprofil nach dem Mischungswegansatz von Prandtl explizit zu:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k'} + B \quad \text{mit} \quad \kappa = 0.41 \quad , \quad B = 8.0 \quad . \quad (3-29)$$

Die explizite Berechnung für den Mischungsweg-Ansatz nach Escudier findet sich in Bezzola (2002), S 126.

Für andere Rauheiten kann entweder die Rauheitsfunktion B angepasst werden oder aber eine äquivalente *Sandrauheit* k' ermittelt werden (z.B. Gessner 1960 für Riffel).

Analog zu Abschnitt 3.6.4 verläuft auch hier die Verlängerung des logarithmischen Asts durch zwei charakteristische Punkte:

$$(y^+; \bar{u}^+) = (1; B) = (k^+; 8) \quad ,$$

$$(y^+; \bar{u}^+) = (e^{-B/\kappa}; 0) = (0.038 k^+; 0) \quad (\text{Schnittpunkt mit der } y^+ \text{-Achse, } \bar{u}^+ = 0).$$

Diese Anknüpfung des logarithmischen Profils hat aber – im Gegensatz zum hydraulisch glatten Regime – *keinen physikalisch fassbaren Hintergrund*. Im Hinblick auf eine Anwendung unter veränderten Voraussetzungen, zum Beispiel in Wasser-Luft-Gemischen, ist dies ein Mangel.

3.7.5 Mittlere Geschwindigkeit

Das normierte Geschwindigkeitsmittel errechnet sich analog zu Abschnitt 3.6.5 zu:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_0}{k'} - i \right) + B, \quad B = 8. \quad (3-30)$$

i bleibt 1 bzw. 1.5 für ebenen bzw. Rohrabfluss, ändert sich also nicht gegenüber (3-28) für hydraulisch glatten Abfluss.

3.7.6 Lage des Bezugshorizonts bei rauen Verhältnissen

Der *Bezugshorizont* definiert den Nullpunkt der y -Achse in Bezug auf die raue Wand und damit auch für den Prandtl'schen Mischungsweg κy . Nach Einstein & El Samni (1949) oder Raemy (1978) wird er bestimmt, indem man die gemessenen Geschwindigkeiten halblogarithmisch aufträgt. Die Punkte kommen auf eine Gerade zu liegen, in Wandnähe aber eben nur, wenn der Bezugshorizont stimmt. Dieser wird variiert, bis die richtige Lage gefunden ist.

Dies sei in Bild 3-8 anhand eines hypothetischen gemessenen Geschwindigkeitsprofils illustriert. Es handle sich um eine Sandrauheit $k = k_S$. Der Bezugshorizont ist in Bild a) zunächst über die Rauheitsspitzen gezogen. Für diese erste Variante ist auch die y -Achse angeschrieben.

Nun wird der Bezugshorizont in zwei weiteren Varianten um den Betrag $s \cdot k$ abgesenkt. Im *gleichen linearen* Diagramm dargestellt (Bild b) werden die Rauheitselemente und die Geschwindigkeitspunkte dann um diesen Betrag *angehoben*. s erweist sich als die *Exposition* der Rauheitselemente über dem Bezugshorizont.

Neben der Ursprungsvariante $s = 0$ werden $s = 0.2$ und $s = 1.0$ gewählt. Die letzte Variante verläuft entlang der Basis der Rauheiten. – Wie in diesem linearen Diagramm nicht anders zu erwarten wird das Profil zwar vertikal verschoben, seine Form bleibt aber immer gleich.

Überträgt man hingegen die gleiche Konfiguration in ein *halblogarithmisches* Netz (Bild c), so wird das Profil je nach Bezugshorizont in verschiedene Richtungen gekrümmt. Nur für *eine* Exposition wird es zur Gerade. An diesem Ort ist der Bezugshorizont sinnvoll festgelegt (im Beispiel bei $s = 0.2$).

Die *Bedeutung* des Bezugshorizonts kann überschlagen werden auf der Basis des Widerstandsbeiwerts nach Darcy (vgl. Abschnitt 3.9):

$$f = 8 \cdot \left(\frac{u_\tau}{U} \right)^2 = \frac{8gRS}{U^2}.$$

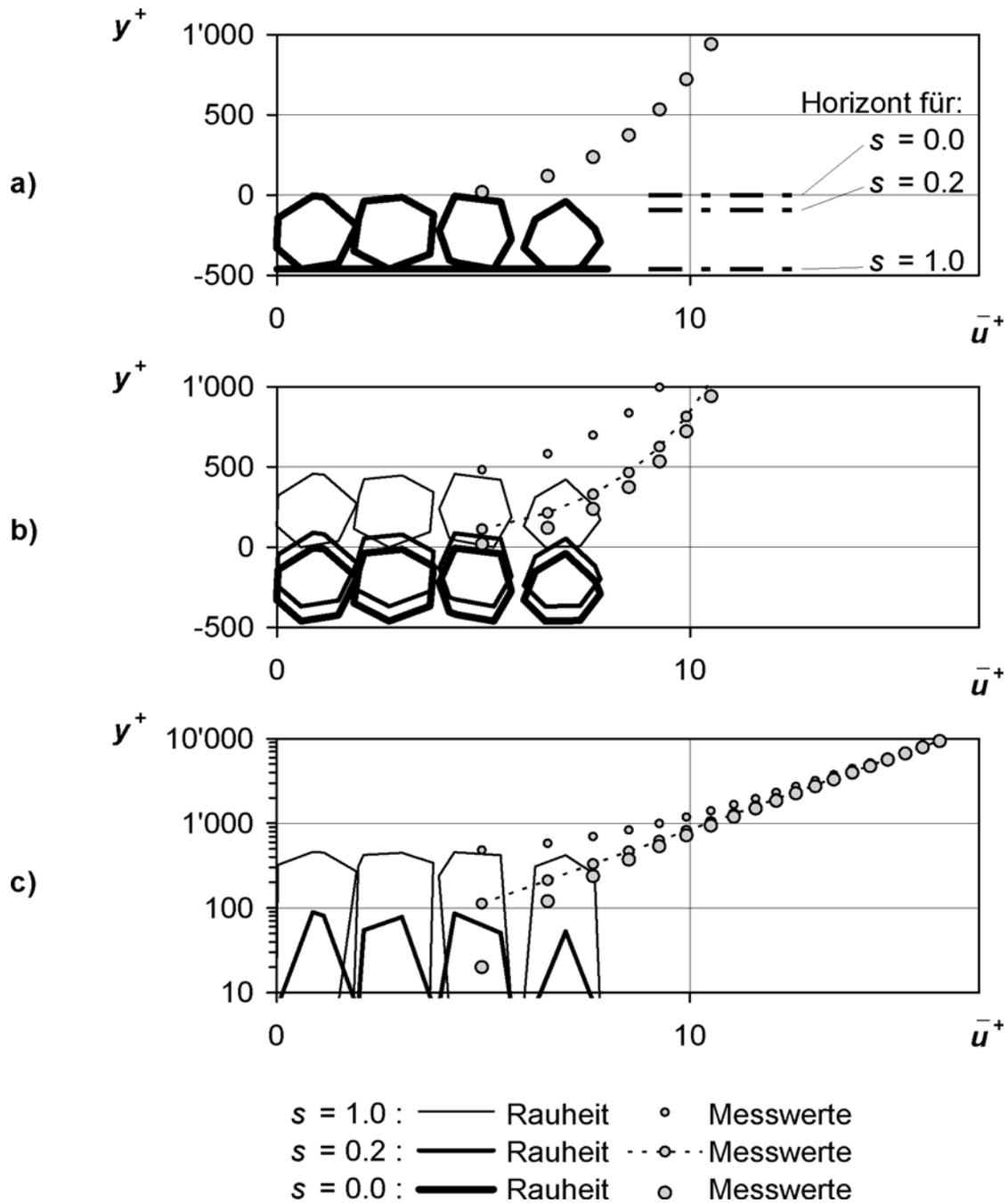


Bild 3-8: Verschiedene Bezugshorizonte für ein Geschwindigkeitsprofil.

a) Lage dreier gewählter Bezugshorizonte in linearem Massstab

$s = 0.0$: bei den Rauheitsspitzen (aktuelle y -Achse)

$s = 0.2$: 0.2 Korndurchmesser unter den Rauheitsspitzen

$s = 1.0$: an der Basis der Rauheiten

b) Anwendung der gewählten Horizonte, ebenfalls linear.

c) gleiche Darstellung wie b), aber halblogarithmisch.

Die Graphik bezieht sich auf ein Beispiel mit $u_\tau = 1.0 \text{ m/s}$ und mit kugelförmigen Rauheitselementen vom Durchmesser $k = 0.6 \text{ mm}$.

Darstellung in Wandvariablen nach Abschnitt 3.3.3: $y^+ = y \cdot u_\tau / \nu$,
 $\bar{u}^+ = \bar{u} / u_\tau$.

Es seien nach Bild 3-9 R_1 und R_2 die hydraulischen Radien des gleichen ebenen Abflusses, aber definiert für zwei verschiedene Expositionen s , d.h. $R_1 - s_1 = R_2 - s_2$, und sie stehen im Verhältnis $r_R = R_2/R_1$. Für die Geschwindigkeit gilt dann $U_2 = U_1/r_R$, und man erhält:

$$f_2 = \frac{8gR_2S}{U_2^2} = \frac{8gR_1S r_R^3}{U_1^2} = f_1 r_R^3 .$$

Der errechnete Widerstandskoeffizient wächst also mit der dritten Potenz der Minderung des hydraulischen Radius', wie sie aus einem veränderten Bezugshorizont resultiert. Bei Rohren wäre es sogar die *fünfte* Potenz, da $U_2 = U_1/r_R^2$. Die richtige Wahl des Bezugshorizonts ist also bedeutsam in allen Fällen mit grossen relativen Rauheiten, was z.B. in hydraulischen Modellversuchen oft der Fall ist.

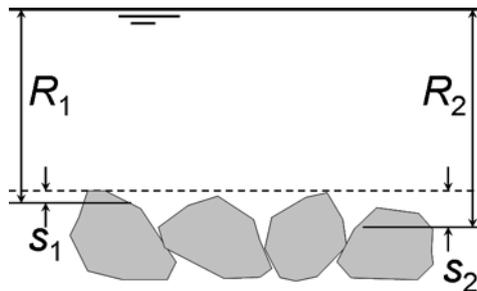


Bild 3-9: Erläuterung zur Bedeutung der Exposition.

Im Folgenden wird bei Sandrauheiten von s -Werten im Bereich von 0.2 ausgegangen.

3.8 Übergang von glatt zu rau

Das logarithmische Geschwindigkeitsprofil für den *glatten* Abfluss nach Gleichung (3-24) lässt sich in eine "raue Form" überführen:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5 = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k^+} + 5 + \frac{1}{\kappa} \ln k^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + 5 + \frac{1}{\kappa} \ln k^+$$

$$(y^+ = y \cdot u_\tau / \nu, \quad k^+ = k \cdot u_\tau / \nu),$$

und man erhält

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + B, \quad \text{mit} \quad B = 5 + \frac{1}{\kappa} \ln k^+ .$$

Man kann das Profil nun so formulieren, dass es sowohl den glatten als auch den rauen Bereich – den *Übergang* also – abdeckt:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} + B, \quad B = \text{Min} \left(5 + \frac{1}{\kappa} \ln k^+; 8 \right). \quad (3-31)$$

In Wirklichkeit ist der Übergang der Konstante B von glatt zu rau stetig und kann aus Bild 3-10 ersehen werden: Demnach zeigt B für Sandrauheiten ein Maximum bei $k^+ = 10$, welches bei technischen Rauheiten aber nicht auftritt.

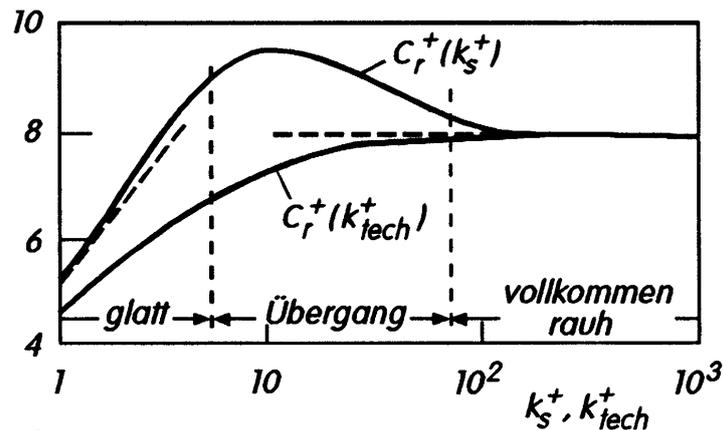


Bild 3-10: Schlichting & Gersten (1997), S. 569: Verlauf der Konstanten B (hier mit C_r^+ bezeichnet) in Abhängigkeit von k^+ .

Bild 3-11 illustriert, wie in diesem Modell der Übergang vom glatten zum rauhen Geschwindigkeitsprofil zustande kommt: Mit wachsender Rauheit wandert der Anknüpfungspunkt des logarithmischen Asts der B -Linie entlang nach oben.

Würde man diese Linie durch die entsprechende Kurve einer *technischen* Rauheit nach Bild 3-10 ersetzen, so beträfe dies im dargestellten Beispiel die Rauheit $k^+ = 20$: Ihr Anknüpfungspunkt und damit das ganze Geschwindigkeitsprofil würde nach links rutschen.

Im Hinblick auf rechnerische Auswertungen sind *FormelAusdrücke* für den stetigen Verlauf von B nützlich. In dieser Arbeit werden folgende Ausdrücke verwendet:

- Für *technische Rauheiten* zitieren Schlichting & Gersten (1997), S. 570, eine Formel von Colebrook (1939), welche sich umrechnen lässt zu

$$B = 8 - \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{e^{\kappa(8-5)}}{k^+} + 1 \right) = 8 - 2.44 \ln \left(\frac{3.42}{k^+} + 1 \right).$$

- Für *Sandrauheiten* wird B genähert mit:

$$B = \frac{1-W}{2} \left(5 + \frac{\ln k^+}{\kappa} \right) + \frac{1+W}{2} 8, \quad \text{wo} \quad W = \tanh \left(\frac{\ln k^+}{\kappa(8-5)} - 2 \right).$$

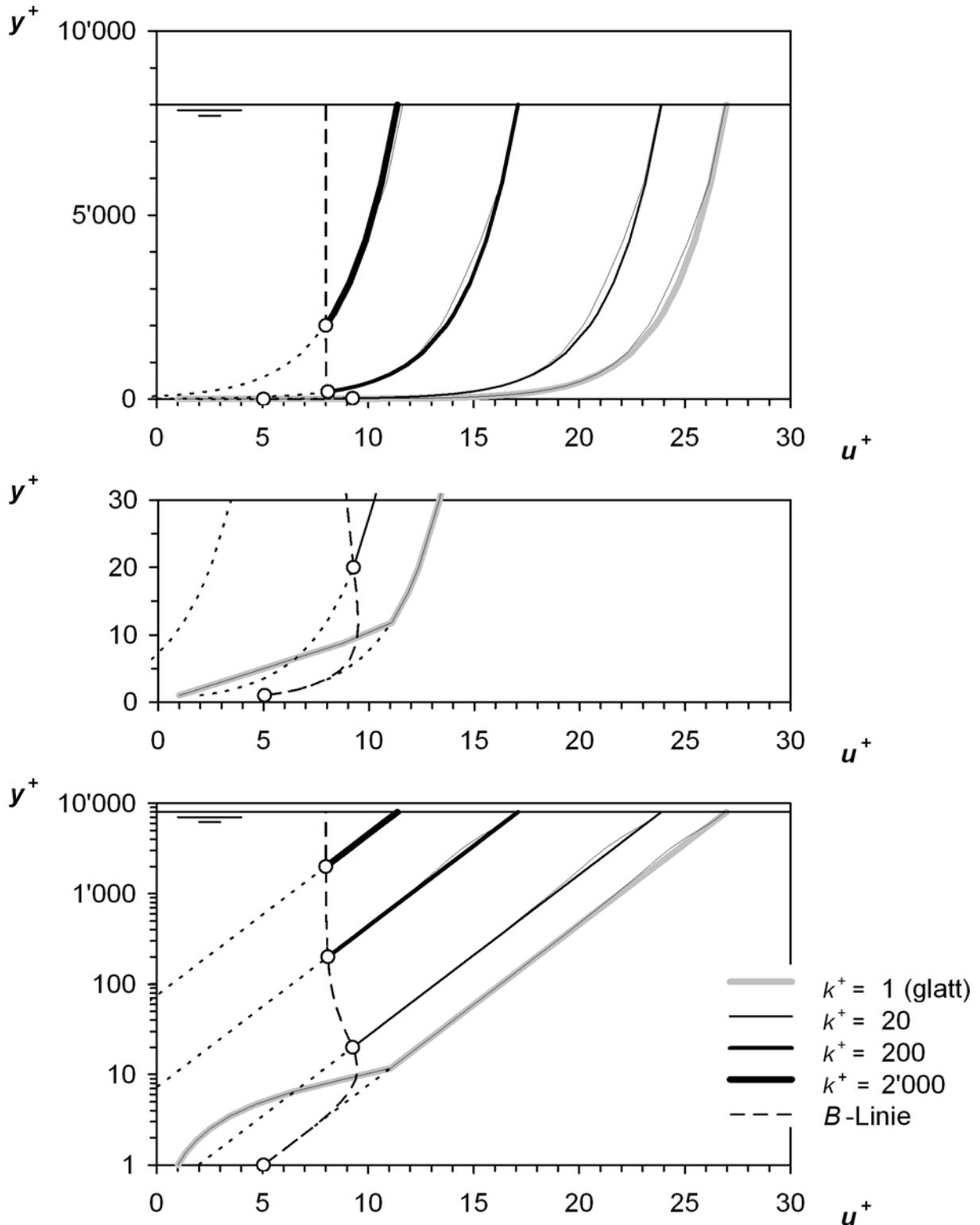


Bild 3-11: Geschwindigkeitsprofile gerechnet nach Prandtl bzw. Escudier (letzte in feinem Strich) für Sandrauheit und $d_0^+ = 8000$. Oben linear, Mitte Sohlbereich, unten semilogarithmisch. Die Kreise bezeichnen die rechnerischen Anknüpfungspunkte ($B; k^+$). Gestrichelt eingetragen sind die Extrapolationen des logarithmischen Asts unterhalb von B (nach Prandtl).

3.9 Fliessgesetz nach Darcy-Weisbach

Das *Fliessgesetz nach Darcy-Weisbach* setzt das Reibungsgefälle S_e – bezogen auf Fließstrecke – in Relation zur Geschwindigkeitshöhe $U^2/(2g)$ und zum hydraulischen Durchmesser $D = 4R$. Es lautet:

$$\frac{\Delta z_e}{L} = S_e = \frac{f}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} . \quad (3-32)$$

f ist der *Widerstandsbeiwert nach Darcy*. Mit der Sohlenschubspannung bzw. der Schubspannungsgeschwindigkeit nach Gleichung (3-1) lässt sich das Gesetz umschreiben zu

$$\tau_0 = \frac{f}{8} \rho U^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{U}{u_t} = U^+ . \quad (3-33)$$

In der Literatur wird oft der Widerstandsbeiwert C_f nach *Fanning* verwendet. Er ist definiert mit:

$$\frac{\Delta z_e}{L} = S_e = \frac{C_f}{R} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{U}{u_t} ,$$

so dass

$$f = 4C_f .$$

Vergleicht man die Version des Fliessgesetzes auf der linken Seite von (3-33) mit den Reynolds-Spannungen

$$\tau = \tau_t = -\rho \overline{u'v'} \quad (3-7)$$

bzw. mit dem daraus gemäss Abschnitt 3.5 abgeleiteten Mischungsweg-Ansatz

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} , \quad (3-15)$$

so kann das Darcy-Weisbach-Gesetz als *integrierte Form der obigen Grundgesetze* aufgefasst werden: Die Integration ist im Widerstandsbeiwert "verpackt". Vorgreifend auf die später behandelten Wasser-Luft-Gemische stellt sich dann die Frage, welche Dichte ρ einzusetzen ist!

3.10 Die Formel nach Colebrook-White

Die Ausdrücke (3-28) und (3-30) für die mittlere Geschwindigkeit bei glattem resp. rauem Abfluss können geschrieben werden zu:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} (\ln r^+ - i) + B_G \quad \text{resp.} \quad U^+ = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{r}{k} - i \right) + B_R ,$$

wobei r der Integrationsweg ist, bei einem Kreis also der Radius, bei einer Kanalströmung die halbe Kanalbreite und bei einem Oberflächenabfluss die Wassertiefe. Mit der Definition $a = R/r$ und $D = 4R$ können sie umgeschrieben werden zu:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{e_G D^+}{4a} \quad \text{resp.} \quad U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{e_R D/k}{4a} ,$$

$$\text{wobei} \quad e_G = e^{B_G \kappa - i} \quad \text{resp.} \quad e_R = e^{B_R \kappa - i} .$$

Mit der Umformung $D^+ = Re\sqrt{f/8}$, dem Wechsel auf Zehnerlogarithmen und dem Darcy-Gesetz (3-33) erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{4a\sqrt{8}}{e_G Re\sqrt{f}} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{4ak/D}{e_R} .$$

Der Faktor 2 vor dem Logarithmus ergibt sich exakt, wenn man $\kappa = 0.407$ setzt. Dies liegt sehr nahe beim Wert $\kappa = 0.41$, wie er im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird.

Für ein Rohr ergibt die Integration $a = 0.5$ und $i = 1.5$. Setzt man ferner $B_G = 5.5$ und $B_R = 8.5$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{2.70}{Re\sqrt{f}} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \frac{k/D}{3.55} .$$

Schon eine schwache Korrektur der gerechneten Integrationskonstanten i von 1.5 auf etwa 1.44 führt zu den bekannten Werten nach Nikuradse, also 2.51 statt 2.70 und 3.71 statt 3.55.

Den *Übergang* zwischen glatt und rau fand C.M. White mit der Colebrook-White-Formel (Colebrook 1939):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left(\frac{2.51}{Re \cdot f_F \cdot \sqrt{f}} + \frac{k/D}{3.71 \cdot f_F} \right) .$$

f_F ist ein Formfaktor, der die Wirkung von a und i zusammenfasst. Er beträgt 1 für die Rohrströmung und 0.9 für eine Kanalströmung. – Die Colebrook-White-Formel erfordert eine Iteration für den Widerstandsbeiwert f . Mit $Re\sqrt{f} = UD/\nu \cdot \sqrt{8} \cdot u_\tau/U = D^+ \sqrt{8}$ gelangt man auch zu einer *expliziten* Form für praktische Anwendungen:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2.51/\sqrt{8}}{D^+ \cdot f_F} + \frac{k/D}{3.71 \cdot f_F}\right) = 2 \cdot \log\left(\frac{D^+ \cdot f_F}{0.887 + k^+/3.71}\right) .$$

3.11 Der Wake-Parameter

Gemessene Geschwindigkeitsprofile zeigen im Mittenbereich eine Abweichung gegenüber dem Profil Gl. (3-31), wie es aus der Integration des Prandtl'schen Mischungswegs resultiert. Coles (1956), zitiert in Bezzola (2002) S. 43 ff., korrigiert den Fehler mit der so genannten Nachlauf- oder Wake-Funktion, welche den Ansatz nach Nikuradse (3-31) in Form eines dritten Terms erweitert:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k'} + B + \frac{2\Pi}{\kappa} \left(\sin\left(\frac{\pi y}{2d_0}\right) \right)^2 . \quad (3-34)$$

Der *Wake-Parameter* Π ist auf experimentellem Weg zu bestimmen (Bezzola 2002, S. 135 ff.).

Dieser erweiterte Nikuradse-Ansatz beschreibt ein Phänomen, das Wasser-Luft-Gemische vielleicht sogar verstärkt betrifft. Denn die Luft bläst den Mittenbereich gewissermassen auf, so dass die dortigen Geschwindigkeiten selbst bei gleichbleibendem Gradienten höher werden. Der Mittenbereich gewinnt also an Bedeutung. Der Ansatz ist aber empirisch und eignet sich deshalb im vorliegenden Kontext nicht, denn er eröffnet keinen Zugang zur physikalischen Natur der beschriebenen Abweichungen. Ausserdem kann das Phänomen mit einem angepassten Mischungsansatz ebenfalls beschrieben werden, und zwar physikalisch begründet.

3.12 Turbulenztheoretische Aspekte

3.12.1 Kaskadenmodell

Der traditionelle Begriff zur Beschreibung der Bewegungen und Strukturen, wie sie bei turbulenten Vorgängen beobachtet werden, lautet *eddy* (Wirbel, Strudel). Sie sind in alle drei Raumrichtungen mit Geschwindigkeitsschwankungen verbunden. Deren statistische Erfassung ist ein wichtiges Instrument zur Erforschung der Turbulenz.

Eines der Resultate sind Frequenzspektren, die oft in Wellenzahlen k (wave numbers) umgerechnet werden. Die Dimension von k ist m^{-1} . Der Kehrwert ist ein Mass für die Grössenordnung der entsprechenden eddies (vgl. Lumley 1969, S. 377). Das Spektrum dieser *Skalen* hat eine Spannweite, welche mit der Reynoldzahl wächst.

Das *Kaskadenmodell* interpretiert den Prozess so, dass zunächst die grössten eddies – sie sind vergleichbar mit den charakteristischen Abmessungen des Abflusses, also z.B. der Wassertiefe – aus instabilen Scherschichten der Hauptströmung Energie aufnehmen (*energy containing eddies*; s. auch *burst*-Prozess in Abschnitt 3.12.4). Diesen Vorgang bezeichnet man als *Turbulenzproduktion*, denn hier wird Energie in die Turbulenz eingetragen.

Die grossen eddies geben ihre Energie dann schrittweise an immer kleinere weiter. Dieser Zerfallsprozess wird damit in Zusammenhang gebracht, dass die Wirbel durch die turbulente Umgebung verwunden und gestreckt werden (*vortex twisting* und *vortex stretching*). Diese *Wirbelstreckung* geht einher mit einer Reduktion der Querabmessungen und einer Steigerung der Rotationsgeschwindigkeit.

Schliesslich werden die eddies so klein, dass die viskosen Kräfte wieder überhand nehmen. Erst jetzt wird die Energie dissipiert.

Ist das Spektrum breit genug, so existiert ein Zwischenbereich von eddies, welche gleich viel Energie an kleinere Wirbel weitergeben, wie sie von den grösseren übernehmen. Diesen Bereich bezeichnet man als *inertial subrange*.

Drei Aspekte des Kaskadenmodells spielen in der Diskussion um die Widerstandsminderung eine zentrale Rolle:

- Die Energie wird zwar erst in den kleinsten Strukturen dissipiert. Massgebend für die *Menge* dieser Energie ist aber der Eintrag zu Beginn des Prozesses, also die Turbulenzproduktion. Sie wäre also der Engpass, den eine Berechnung des Widerstands erfassen muss. Damit bildet das Kaskadenmodell eigentlich den Hintergrund aller Vorstellungen, welche auf dem Impulsaustausch aufbauen.
- Die grösseren Strukturen sind durch die Hauptströmung bedingt und unterliegen dementsprechend einer strömungsbedingten Ausrichtung. Für die dissipierenden Wirbel gilt dies – bei genügend hohen Reynoldszahlen Re – nicht mehr. Ihre Ausrichtung ist stochastisch, die Turbulenz ist hier *lokalisotrop*.
- Die Wirbelstreckung erfordert zwingend die dritte Raumrichtung (Tsinober 1989).

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das Kaskadenmodell nicht (mehr) generell anerkannt ist (Hoyer 2006). Die Einwände reichen von Modifikationswünschen bis zu grundsätzlicher Kritik.

3.12.2 Kolmogoroff-Skala

Die Annahme, dass die kleinsten, dissipierenden Wirbel isotrop seien, erlaubte es Kolmogoroff, deren Skalen zu bestimmen. In isotropen Verhältnissen vereinfacht sich nämlich die Dissipation

$$\varepsilon = \nu \cdot \left(\frac{du_i}{dy_j} + \frac{du_j}{dy_i} \right) \cdot \frac{du_i}{dy_i}$$

zu

$$\varepsilon = 15\nu \left(\frac{du_i}{dy_i} \right)^2$$

Die Geschwindigkeitsgradienten $(du_i/dy_i)^2$ hängen also nur noch von ε und ν ab. Die Dimensionsanalyse ergibt dann die folgenden Skalen: η für die Länge, u_η für die Geschwindigkeit und t_η für die Zeit der kleinsten Wirbel:

$$\eta = \sqrt[4]{\nu^3/\varepsilon} \quad , \quad u_\eta = \sqrt[4]{\nu\varepsilon} \quad , \quad t_\eta = \sqrt{\nu/\varepsilon} \quad . \quad (3-35)$$

3.12.3 Rückschlüsse auf die Wandschicht im hydraulisch glatten Abfluss

Von den oben erwähnten Skalen sind im vorliegenden Zusammenhang zwei von besonderem Interesse:

- Für die *energy containing eddies* gelten analoge Überlegungen wie für den Mischungsweg nach Prandtl: Ihre Skala muss in der gleichen Größenordnung liegen wie der Wandabstand ihrer Achsen; eine grössere Ausdehnung lässt die Kinematik nicht zu. Für die entsprechende Wellenzahl gilt also (Lumley 1969, S. 377):

$$ky = 1$$

bzw. mit der Normierung $k^+ = kl_\nu = k \cdot \nu / u_\tau$

$$k^+ y^+ = 1 \quad . \quad (3-36)$$

- In der logarithmischen Zone und in grober Näherung auch in Wandnähe ist die Dissipation ε von ähnlicher Größenordnung wie die Turbulenzproduktion. Diese kann – analog zu Abschnitt 2.2.2c – ermittelt werden zu:

$$\rho\varepsilon = \tau \frac{\partial u}{\partial y} = \rho u_\tau^2 \cdot \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{u_\tau^4}{\kappa \nu y^+} \quad .$$

Eingesetzt in Kolmogoroffs Ausdruck (3-35) für η erhält man die Skala für die *dissipativen eddies*:

$$\eta^+ = (\kappa y^+)^{1/4} \quad .$$

Nach Lumley (1969) zeigen die Beobachtungen, dass das Maximum des Dissipationsspektrums bei

$$k^+ \eta^+ = 0.2$$

liegt, also bei

$$k^+ (\kappa y^+)^{1/4} = 0.2 \quad . \quad (3-37)$$

Diese beiden Abmessungen bzw. die entsprechenden Wellenzahlen vereinigt Lumley (1969) in einem Diagramm (Bild 3-12). Demnach liegt die Obergrenze der viskosen Unterschicht an dem Punkt, wo die viskosen Kräfte die destabilisierenden Trägheitskräfte nicht mehr zu kontrollieren vermögen. Dieser Übergang y_V^+ liegt im Schnittpunkt der Gleichungen (3-36) und (3-37). Setzt man k^+ aus (3-36) in (3-37) ein, so erhält man

$$\left(\frac{1}{y_V^+}\right)^3 \kappa = 0.2^4 \quad ,$$

d.h. für y_V^+

$$y_V^+ = \sqrt[3]{\kappa/0.2^4} = 6.35 \quad (3-38)$$

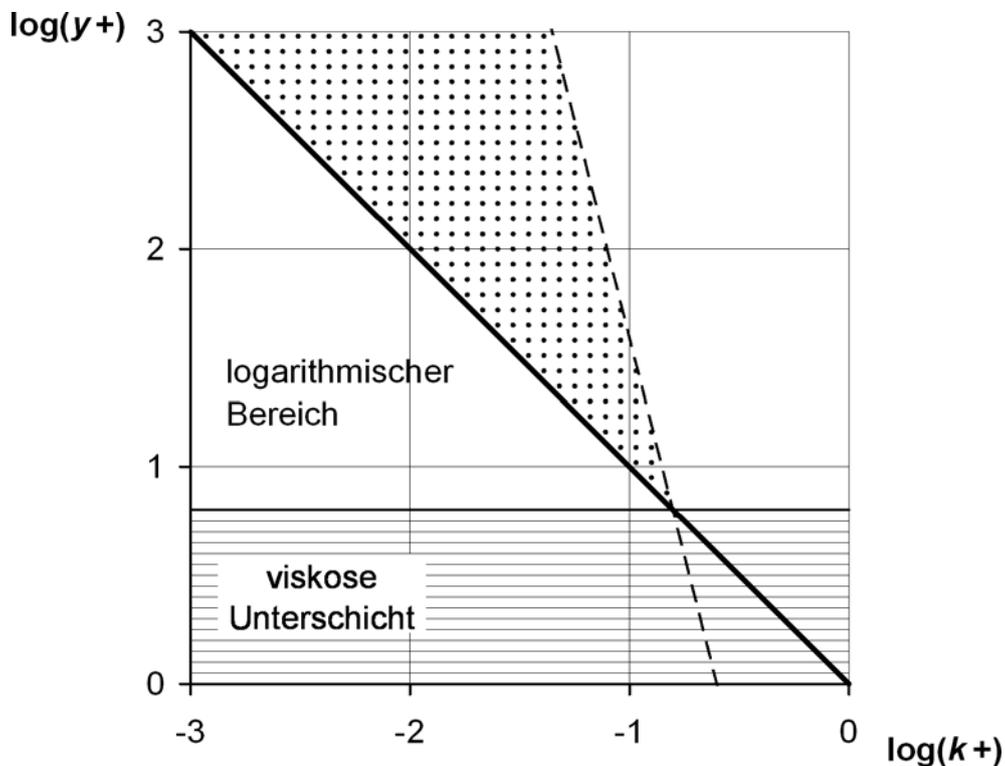


Bild 3-12: Diagramm nach Lumley (1969);

fett: Maximum der Turbulenzproduktion, Gleichung (3-36)

gestrichelt: Maximum des Dissipationsspektrums, Gl. (3-37)

Dieses Resultat liegt in der gleichen Grössenordnung wie die empirisch ermittelte Wandschichtdicke $y_V^+ \approx 11$ nach (3-27). Der Gedankengang stellt also einen plausiblen Zusammenhang her zwischen der Dicke der viskosen Unterschicht und dem Maximum des Dissipationsspektrums nach (3-37). – Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit wichtiger ist der Umkehrschluss: Die ungefähre Übereinstimmung ist eine Bestätigung von Lumleys Überlegung. Es sollte also möglich sein, sein Modell auch auf geänderte Bedingungen anzuwenden.

Lumleys Rechengang verdeutlicht zwei weitere Aspekte:

- Der logarithmische Ast wird *physikalisch gesehen* im Bereich seines Schnittpunktes mit dem viskosen Ast angeknüpft und nicht im rechnerisch verwendeten Punkt $(y^+; u^+) = (1; B)$ mit $B = 5$. Dieser Punkt ergibt sich nur, weil man den logarithmischen Ast hypothetisch abwärts extrapoliert bis zur Höhe $y^+ = 1$. Er ist also *vom Gradienten des logarithmischen Astes mit abhängig*. Für den Normalfall homogener Fluide hat dieser Aspekt keine Auswirkungen, weil der Gradient des logarithmischen Astes mit der Konstanten κ fest gegeben ist. Bei Wasser-Luft-Gemischen kann dies ändern.
- Für die Lage des Übergangs vom viskosen zum turbulenten Regime ist gerade diejenige Viskosität massgebend, welche *im Bereich dieses Übergangs* herrscht.

3.12.4 Kohärente Strukturen, Ablösungen

Viele Forscher betrachten die Turbulenz heute nicht mehr als rein stochastisches Phänomen. Sie postulieren die Existenz von *kohärenten Strukturen*. Diese Vorstellung ist auch verbesserten Methoden hinsichtlich Messung, Auswertung und Visualisierung der Strömungsvorgänge zu verdanken.

Schmid (1985), S. 2-34, beschreibt die Natur dieser Strukturen so: "Als räumlich-zeitliche Strukturen werden [...] physikalisch zusammenhängende, wohldefinierte und wiederholt auftretende Bewegungsabläufe in der Strömung bezeichnet. Derartige 'kohärente' Strukturen können durch Abmessungen, Konvektionsgeschwindigkeit und Lebensdauer charakterisiert werden. Diese Parameter weisen aber häufig schlecht definierte Mittelwerte und grosse Streuungen auf. Der Verdacht liegt nahe, dass dem deterministischen Prozess stets ein stochastischer Vorgang überlagert ist."

Nach Nezu & Nakagawa (1993) durchlaufen diese Strukturen einen so genannten *burst*-Vorgang, welcher – stark vereinfacht – die folgenden Stadien umfasst: Lokal verlangsamte Zonen (*low speed streaks*) der viskosen Unterschicht wachsen aufgrund der Kontinuität in die Höhe. Diese Aufwärtsbewegungen werden als *ejections* bezeichnet. Die Scherschicht zur darüber fliessenden, schnelleren Hauptströmung rollt sich zu einem Wirbel auf. Dessen Frontpartie wird in die freie Strömung hinausgetragen, währenddem die beiden Enden mit der Sohle verbunden bleiben (*hair*

pin vortex, Bild 3-13). Charakteristisch ist ein gegenläufiges Wirbelpaar, welches in einem Winkel von ungefähr 45° zur Sohle steht. Die Struktur verursacht auch Flüssigkeitsbewegungen zurück zur Wand, wo diese so genannten *sweeps* zu lokal höheren Geschwindigkeiten führen (*high speed streaks*). Zwischen diesen bilden sich wieder *low speed streaks*, welche neue *bursts* initiieren (vgl. auch Bild 5-26). – Eine Zusammenfassung des Vorgangs findet sich bei Bezzola (2002).

Im vorliegenden Zusammenhang ist auch von Bedeutung, dass die Streckung der Wirbel Energie erfordert, was den Widerstand beeinflusst (vgl. Bradshaw 1976, S. 7-13, oder Tritton 1988, S. 87).

Bezzola (2002) vermutet, dass sich an rauen Oberflächen ähnliche Strukturen bilden. Er greift zurück auf Acarlar & Smith (1987) und Taneda (1978), welche *Strömungsablösungen* an Kugeln untersuchen. Sie beobachten Ablösungswirbel, welche im Nachlauf – wie die *hair pin vortices* – ein Wirbelpaar aufweisen (Bild 3-14). Bezzola postuliert, dass sich solch räumlich fixierte Strukturen auch an Rauheitselementen bilden können und einen Teil der totalen Schubspannungen übernehmen. Die Konsequenzen werden in Abschnitt 4.2.2 näher diskutiert.

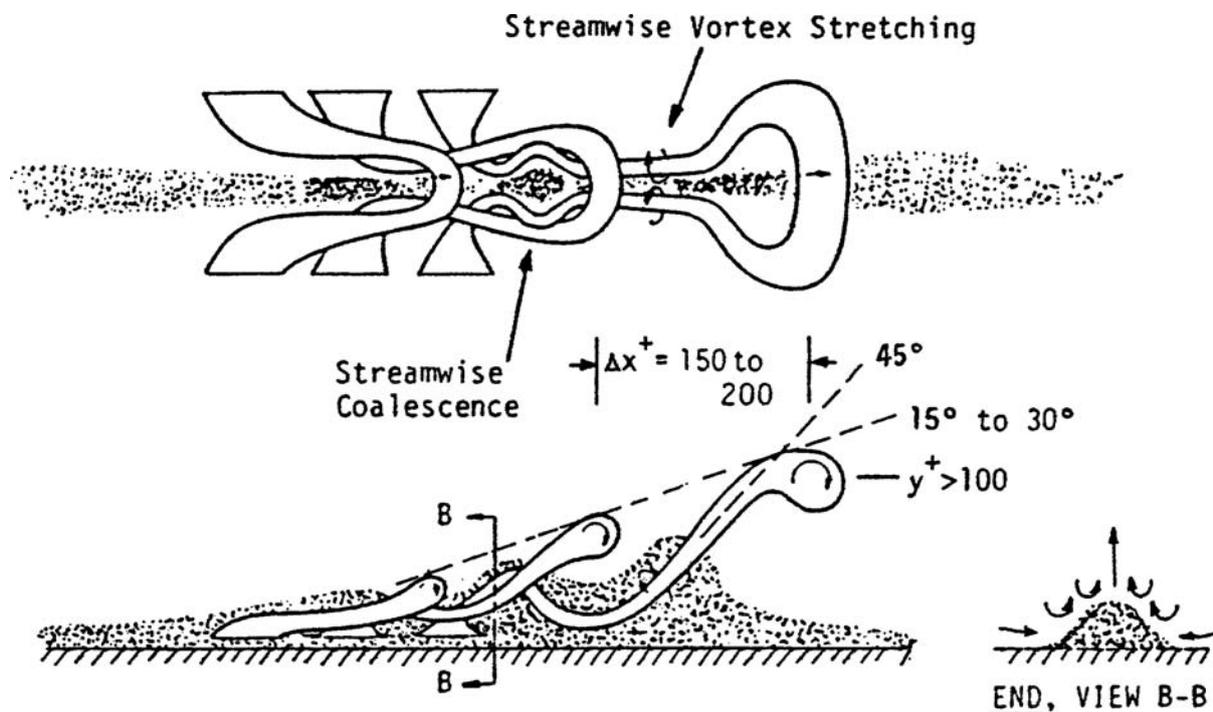


Bild 3-13: Nezu & Nakagawa (1993): Hair pin vortex.

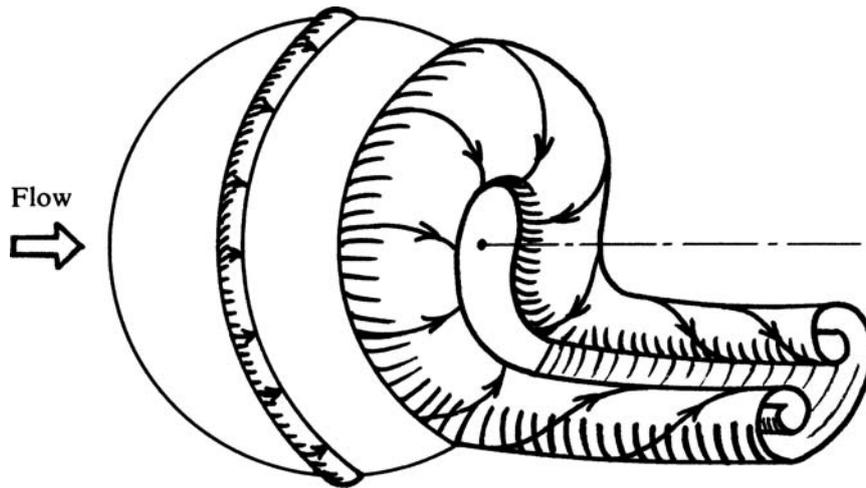


Bild 3-14: Taneda (1978): Ablösung an Rauheitselementen.

3.13 Diskussion

In Wirklichkeit ist zu erwarten, dass das Profil der mittleren Geschwindigkeiten allmählich auf Null zurückgeht, wobei es sich zwischen die Rauheitselemente hinein fortsetzen dürfte. Die logarithmische Extrapolation des Profils in den Sohlbereich schneidet aber die y -Achse – d.h. den Nullpunkt der Geschwindigkeit – *über* dem Bezugshorizont. Dieser Extrapolationsfehler ist verbunden mit einem lokal viel zu hohen Geschwindigkeitsgradienten.

Dies ist für die vorliegende Untersuchung nicht akzeptabel: Gerade hier sind die Gradienten ohnehin am grössten und haben auch am meisten Wirkung auf den Gesamtabfluss; und gerade im Sohlbereich findet auch die Widerstandminderung hauptsächlich statt. Für den vorliegenden Zweck genügen die oben besprochenen Mischungswegansätze und das daraus hergeleitete logarithmische Fließgesetz also nicht, jedenfalls nicht in dieser Form.

Der Grund liegt darin, dass der Nikuradse-Ansatz das Geschehen in unmittelbarer Wandnähe rein empirisch erfasst, nämlich in der Konstanten B . Eine physikalische Interpretation für diesen Bereich liefert er nicht, was aber im Hinblick auf die Einflussnahme der Luft gefordert wäre. Im nächsten Abschnitt wird deshalb ein Weg gesucht, um das physikalische Modell zu verfeinern.

4 Arbeitshypothese für den sohnahen Bereich

Aufgrund der Schlussfolgerungen in Abschnitt 3.13 soll eine ergänzende Arbeitshypothese bereitgestellt werden, welche eine Abschätzung des Geschwindigkeitsprofils in Sohnähe für den Fall rauher Oberflächen in groben Zügen und auf möglichst einfache Art und Weise erlaubt.

Vorgängig werden einige Modellvorstellungen für hydraulisch glatte Oberflächen erörtert.

4.1 Hydraulisch glatter Abfluss

Zur Modellierung des Übergangs von der viskosen Unterschicht in den logarithmischen Bereich (vgl. Bild 3-2) muss Gleichung (3-8) nun *vollständig* berücksichtigt werden; die Vernachlässigung eines der beiden Schubspannungsanteile ist nicht mehr zulässig. Dafür kann so nahe der Wand die totale Schubspannung der Sohlenschubspannung gleichgesetzt werden: $\tau = \tau_0$. Man erhält aus den Gleichungen (3-6) und (3-13):

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4-1)$$

Die Wirbelviskosität μ_t kann nach (3-16) auch geschrieben werden

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3-16)$$

wo l der Mischungsweg nach Prandtl ist. Damit wird (4-1)

$$\tau_0 = \tau_v + \tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (4-1)a$$

oder normiert mit $\tau_0 = \rho u_\tau^2$

$$1 = \tau_v^+ + \tau_t^+ = \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} - \frac{\overline{u'v'}}{u_\tau^2} = \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} + \left(l^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \right)^2 \quad (4-1)b$$

4.1.1 Reichardt (1951)

Wie entwickeln sich die Wirbelviskosität bzw. die turbulenten Schubspannungen in der Wandschicht, wo die Verhältnisse ja noch ganz durch die Viskosität dominiert sind? Der Gradient ist hier im Wesentlichen $\partial \bar{u}^+ / \partial y^+ = 1$ (vgl. Abschnitt 3.4 und 3.6.1), also konstant. Berücksichtigt man dies in der Beziehung (3-16) und setzt man den Mischungsweg nach Prandtl zu $l = \kappa y$ an, so müssten die Wirbelviskosität μ_t und damit auch die turbulenten Schubspannungen $\tau_t = \mu_t \cdot \partial \bar{u} / \partial y$ mit y^2 zunehmen.

Nun ist aber auch in der viskosen Unterschicht die Strömung nicht stationär (vgl. Abschnitt 3.4, Schluss). Damit ergeben sich Probleme mit der Kontinuität. Sie führen Reichardt (1951) zum Schluss, dass μ_t bzw. τ_t mindestens mit der *dritten* Potenz von y zunehmen müssen. Dementsprechend geht auch der Mischungsweg erst in einem gewissen Abstand zur Wand in die lineare Beziehung $l = \kappa y$ über. Reichardt entwickelt daraus:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(1 + \kappa y^+) + (5 + \ln 10) \cdot \left(1 - e^{-\frac{y^+}{10.8}} - \frac{y^+}{10.8} \cdot e^{-0.33y^+} \right) .$$

Reichardts Modell ist auf raue Verhältnisse nicht übertragbar.

4.1.2 Spalding (1968)

Spalding (1968) – zitiert in White (1974), S. 474-477, wo übrigens noch weitere Ansätze zusammengestellt werden – ging ebenfalls von Reichardts Überlegung aus. Er gelangte zur Beziehung:

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \cdot \left(e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right) .$$

Auch dieses Modell gibt für raue Verhältnisse keine Lösung.

4.1.3 Van Driest (1956)

Ein populäres Modell ist dasjenige von van Driest (1956). Auch er basiert auf (4-1), führt dann aber für den Mischungsweg eine *empirische* Dämpfungsfunktion f_{Dg} ein und erhält:

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho (f_{Dg} \kappa y)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad 1 = \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} + (f_{Dg} \kappa y^+)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \right)^2 . \quad (4-2)$$

Die Dämpfungsfunktion $f_{Dg} = f_{Dg}(y^+)$ definiert er zu

$$f_{Dg} = 1 - e^{y^+/A} . \quad (4-3)$$

Die Konstante A muss so gewählt werden, dass der resultierende logarithmische Ast in seiner fiktiven Verlängerung nach unten die Höhe $y^+ = 1$ in der empirisch bekannten Konstanten B kreuzt. Für die hier verwendeten Werte $\kappa = 0.41$ und $B = 5$ wird $A = 24.2$ (leicht abweichend von den Werten 26 bzw. 27, wie sie van Driest angibt). – Die quadratische Gleichung (4-2) für den Geschwindigkeitsgradienten $\partial \bar{u}^+ / \partial y^+$ löst sich auf zu:

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2f_{Dg} \kappa y^+)^2}} \quad (4-4)$$

Für grosse y führt dies wieder zum Ausdruck $\partial \bar{u}^+ / \partial y^+ = 1 / (\kappa y^+)$, also zum Gradienten für das logarithmische Profil. Die fett ausgezogenen Linien für $k^+ = 1$ in Bild 4-1 stellen links den Verlauf der Dämpfungsfunktion und rechts das resultierende Geschwindigkeitsprofil dar. Letzteres stimmt mit Messresultaten gut überein, wie van Driest in seiner Publikation darlegt.

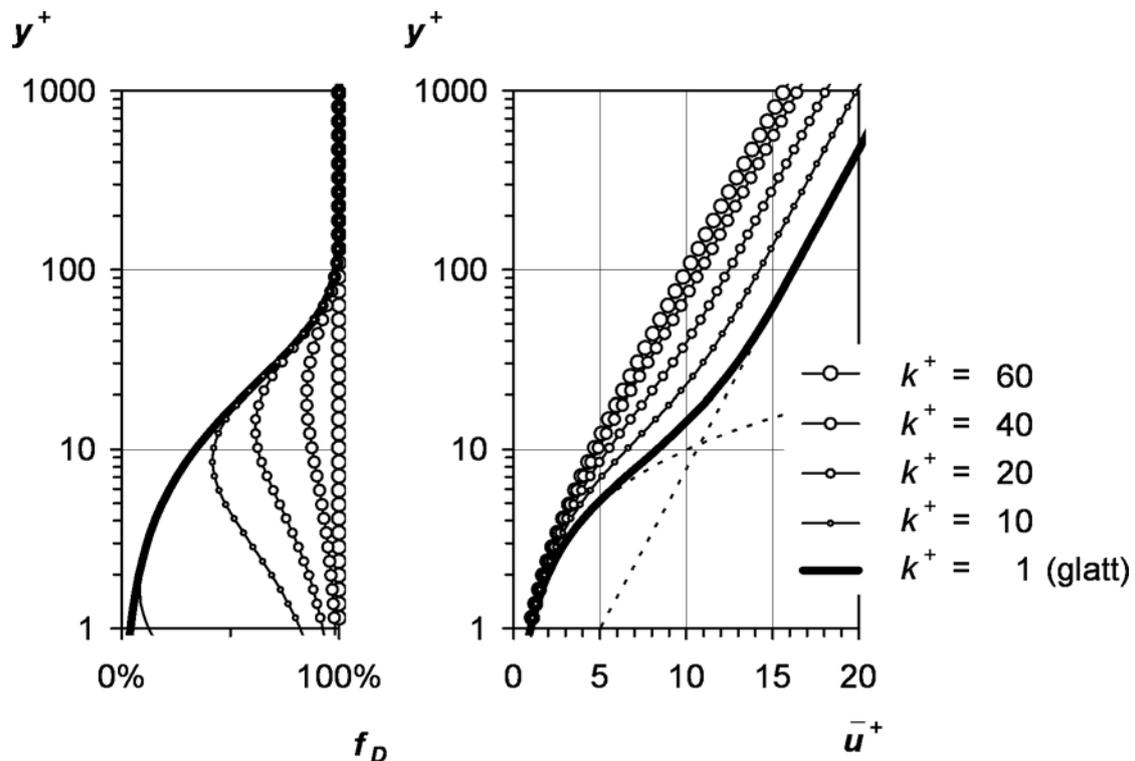


Bild 4-1: Das Modell von van Driest für verschiedene Rauheiten. Links der Dämpfungsfaktor nach (4-3) bzw. (4-5). Rechts die Geschwindigkeitsprofile, wie sie aus der Integration des Gradienten (4-4) resultieren. Gestrichelt das Profil der viskosen Unterschicht, fett der logarithmische Ast für einen hydraulisch glatten Abfluss.

4.2 Hydraulisch rauher Abfluss

4.2.1 Van Driest (1956)

Van Driest modelliert in einem zweiten Schritt den Übergang zum vollrauen Profil, d.h. für Rauheiten bis $k_{Gr}^+ = 60$. Hierzu ergänzt er die Dämpfungsfunktion um einen Term, welcher die Dämpfung mit wachsender Rauheit wieder schwächt und für $k^+ = k_{Gr}^+$ schliesslich ganz eliminiert. Die neue Dämpfungsfunktion lautet:

$$f_D = 1 - e^{y/A} + e^{y/A \cdot k/k_{Gr}} \quad (4-5)$$

Alles übrige bleibt sich gleich wie im hydraulisch glatten Abfluss. Die Resultate sind wieder in Bild 4-1 dargestellt.

Für die vorliegende Fragestellung bietet van Driests Ansatz wenig Handhabe, denn es handelt sich nicht um eine physikalische Begründung, sondern um eine empirische Beschreibung des kontinuierlichen Übergangs von glatt zu rau. – Physikalisch gesehen findet dieser Übergang in dem Moment statt, wo sich an den Rauheitsspitzen Wirbelstrukturen ablösen. Dass er makroskopisch *kontinuierlich* ausfällt, ist also weniger physikalisch als statistisch begründet: Die Rauheiten sind unterschiedlich gross und unregelmässig angeordnet, weshalb der Übergang nicht auf der ganzen Oberfläche gleichzeitig erfolgt. Erst in der Mittelung wird er kontinuierlich, und zwar ausgeprägter bei den technischen Rauheiten, die eben weniger homogen sind als die Sandrauheit.

4.2.2 Bezzola (2002)

Wie in Abschnitt 3.7.2 gesehen, geht Bezzola (2002) davon aus, dass an den Rauheitselementen *räumlich fixierte kleinskalige Sekundärbewegungen* auftreten, welche einen Teil der totalen Schubspannungen übernehmen. Die turbulenten Schubspannungen werden dann um diesen Teil reduziert, welcher also für die turbulenten Schwankungsbewegungen nicht mehr zur Verfügung steht.

Im Kern von Bezzolas These steht nun das Postulat, “dass die Geschwindigkeitsverteilung über einer rauhen Sohle durch die turbulenten Schwankungsbewegungen bestimmt wird” (Bezzola 2002, S. 234), und zwar *allein* durch diese. Die kleinskaligen Sekundärbewegungen haben natürlich auch einen Einfluss, aber eben nur *indirekt*, indem sie die turbulenten Schwankungsbewegungen und damit die turbulenten Schubspannungen im roughness sublayer beschränken.

Die praktische Konsequenz dieses Postulats ist die, dass der Geschwindigkeitsgradient auch in unmittelbarer Nähe der Rauheiten mit dem verallgemeinerten Mischungswegansatz (3-25):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\tau_t}{\rho_w}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \sqrt{\tau_t^+ / l^+}$$

bestimmt werden kann.

In Bezzolas Modell ist der roughness sublayer ein zentraler Begriff (vgl. Abschnitt 3.7.2). Seine Dicke y_R steht in Beziehung zur gängigen äquivalenten Sandrauheit k , hat aber den Vorteil, ein *physikalisch fassbare* Grösse zu sein (Bezzola 2002, S. 116). Bezzola ersetzt daher k durch y_R .

a) Grosse relative Überdeckungen

Wie in Abschnitt 3.7.2 gesehen, erreichen die turbulenten Schwankungsbewegungen in x -Richtung am oberen Rand des roughness sublayer noch das gleiche Niveau wie im hydraulisch glatten Abfluss, wachsen gegen die Sohle hin aber nicht mehr weiter an. Da die Korrelationen der Schwankungen in die diversen Richtungen bis weit in die Rauheiten hinein etwa in den gleichen Verhältnissen zueinander stehen (vgl. Abschnitt 3.7.2), setzt Bezzola einen analogen Verlauf auch für die turbulenten Schubspannungen $-\rho \overline{u'v'}$ an. Er linearisiert diesen Verlauf mit zwei Geraden entsprechend Bild 4-2 und beschreibt ihn – hier auf Wasser-Luft-Gemische verallgemeinert – mit

$$\frac{\tau_t(y)}{\tau_0} = \text{Min}(1 - \eta, c_R^2) \quad , \quad (4-6)$$

wo $\eta = 1 - d(y)/d_0$ nach Gleichung (3-3). c_R^2 ist Bezzolas *Dämpfungsfaktor*. Dieser berechnet sich für grosse relative Überdeckungen zu

$$c_R^2 = d(y_R)/d_0$$

und kann mit $\eta_R = 1 - d(y_R)/d_0$ geschrieben werden als

$$c_R^2 = 1 - \eta_R \quad (= 1 - y_R/d_0 \text{ im Reinwasserfall}). \quad (4-7)$$

Die Mischungsweglänge l setzt Bezzola nach Escudier mit

$$l = \text{Min}(\kappa y; \lambda_d d_0) \quad (3-19)$$

an, wobei er λ_d – in Anlehnung an andere Autoren – etwas grösser wählt, nämlich zu 0.12. Gleichung (3-19) kombiniert zwei Geradenstücke, deren Schnittpunkt bei

$$y_W = \frac{\lambda_d}{\kappa} d_0$$

liegt. Betrachtet man diesen Punkt als Trennlinie zwischen Wand- und Mittenbereich, so ist y_W die Dicke des Wandbereichs. Der Mischungsweg schreibt sich dann auch:

$$l = \kappa \cdot \text{Min}(y; y_W) \quad . \quad (4-8)$$

Man könnte sich vorstellen, auch λ_d auf Wasser-Luft-Gemische anzupassen. Darauf wird verzichtet, dies in Anbetracht der beschränkten Bedeutung des Mittenbereichs auf den Widerstand.

Bild 4-2 gibt eine zusammenfassende Darstellung von Bezzolas Ansatz für grosse relative Überdeckungen.

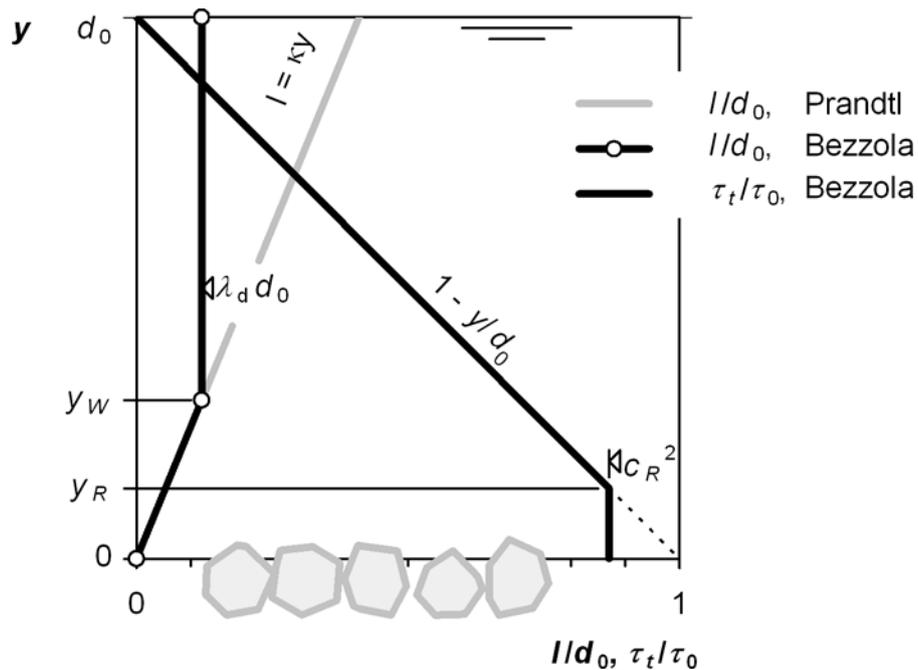


Bild 4-2: Mischungswegansatz nach Bezzola (2002) für grosse relative Überdeckungen (Reinwasser). Der Ansatz besteht aus dem Mischungsweg nach Escudier und dem Schubspannungsverlauf nach Bezzola. Für die Graphik wurde eine Sandrauheit mit einer Exposition von $s = 0.2$ gewählt (vgl. Abschnitt 3.7.6).

b) Kleine relative Überdeckungen

Bei kleinen relativen Überdeckungen, also grossen relativen Rauheiten η_R stellen sich zwei Probleme: Erstens werden c_R^2 und damit die turbulenten Schubspannungen unrealistisch klein; im Extremfall $y_R = d_0$ würde gar $\tau_t(y) \equiv 0$, was keinen Sinn macht. Bezzolas Korrektur hierfür – wieder verallgemeinert auf Wasser-Luft-Gemische – lautet (vgl. Bild 4-3):

$$c_R^2 = \text{Max}\left(1 - \eta_R; \frac{1}{4\eta_R}\right). \quad (4-9)$$

Zweitens könnte y_R den Wandbereich y_W überschreiten. Nach Bezzola wächst aber in diesem Fall y_W zusammen mit y_R bis maximal d_0 (vgl. Bild 4-4). Bezzola begründet diese These mittels einer Betrachtung der Wirbelgrössen im roughness sublayer und im Mittenbereich und bestätigt sie anhand von Vergleichen mit Messresultaten (Bezzola 2002, S. 123 resp. S. 171).

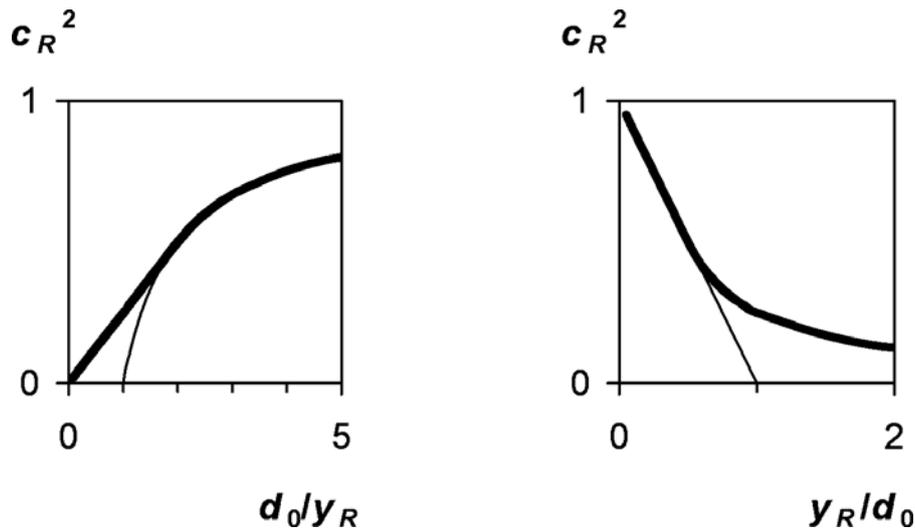


Bild 4-3: Dämpfungsfaktor c_R^2 nach Bezzola (2002). Links als Funktion der relativen Überdeckung $1/\eta_R$, rechts als Funktion der relativen Dicke des roughness sublayer η_R . In feinem Strich die Beziehung (4-7) für grosse relative Überdeckungen, fett die Modifikation (4-9) für kleine relative Überdeckungen.

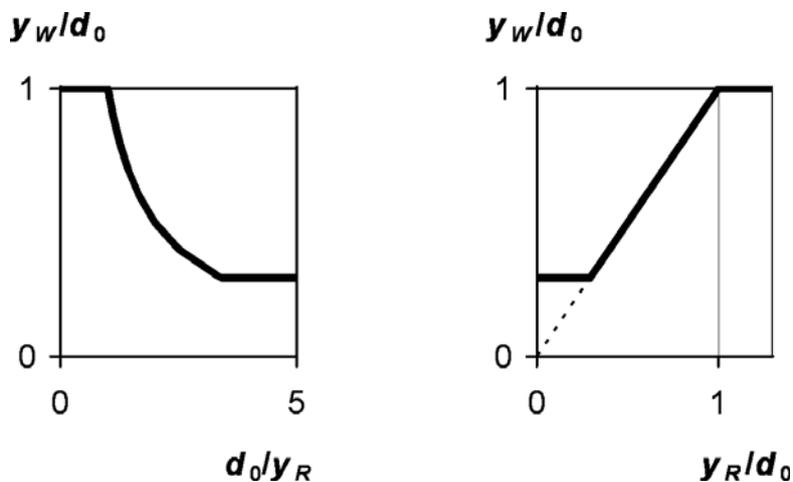


Bild 4-4: Verlauf des Wandbereichs y_w mit der Dicke y_R des roughness sublayer. Links in der Darstellung nach Bezzola (2002) als Funktion der relativen Überdeckung; rechts als Funktion von deren Kehrwert, der relativen Dicke des roughness sublayer η_R .

c) Integration des Geschwindigkeitsprofils

Man erhält das Geschwindigkeitsprofil, indem man Gleichung (3-25) mit den Ansätzen (4-6) und (4-8) für die turbulenten Schubspannungen bzw. für den Mischungsweg integriert. Dies geschieht entsprechend Bild 4-2 schrittweise von unten nach oben mit den Gradienten gemäss Anhang (Tab. A1-5).

Wie in Abschnitt 3.7.2 gesehen, reichen die turbulenten Schwankungsbewegungen bis zwischen die Rauheitselemente hinein. Man kann also davon ausgehen, dass der Impulsaustausch mindestens im Bereich der Kornscheitel der massgebende Prozess bleibt. Folgerichtig knüpft Bezzola (2002) in der einleitenden Bemerkung zu seiner Gleichung (8.20) das turbulente Geschwindigkeitsprofil im Punkt $(y_0; \bar{u}_0) = (\gamma k; 0)$ an, und nicht zum Beispiel im Punkt $(y_R; B)$.

Die Integration der Gradienten aus Tab. A1-5 des Anhangs führt dann zu Bezzolas Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung in den verschiedenen Abschnitten bzw. Abschnittsgrenzen (s. Bezzola 2002, S. 126; Formeln z.T. umgeformt):

$$y = y_0: \quad \bar{u}_0^+ = 0$$

$$y_0 < y < y_R: \quad \bar{u}^+ = c_R \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{y_R} \right) + B \right)$$

$$y = y_R: \quad \bar{u}_R^+ = c_R B$$

$$y_R \leq y \leq y_W: \quad \bar{u}^+ = \bar{u}_R^+ + \frac{1}{\kappa} \left[2\sqrt{1-\eta} - \ln \left(\frac{(\sqrt{1-\eta} + 1)^2}{\eta} \right) \right] \Big|_{y_R}^y$$

$$y = y_W: \quad \bar{u}_W^+ = \bar{u}_R^+ + \frac{1}{\kappa} \left[2\sqrt{1-\eta} - \ln \left(\frac{(\sqrt{1-\eta} + 1)^2}{\eta} \right) \right] \Big|_{y_R}^{y_W}$$

$$(\text{falls } y_R = y_W: \quad \bar{u}_W^+ = \bar{u}_R^+)$$

$$y > y_W: \quad \bar{u}^+ = \bar{u}_W^+ - \frac{2/3}{\kappa y_W / d_0} \left[\eta^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{y_W}^y$$

mit $\eta = \eta(y) = 1 - d(y)/d_0$. Der Bereich $y_R \leq y \leq y_W$ entfällt, falls $y_R = y_W$.

d) Diskussion

Bezzola vergleicht seinen Ansatz anhand verschiedener Modell- und Naturmessungen mit dem erweiterten Ansatz nach Nikuradse. Er findet eine mindestens gleich gute, zum Teil verbesserte Übereinstimmung. Dies kann so gelesen werden, dass er die bisherigen empirischen Ansätze im roughness sublayer – z.B. die reduzierte Kármán-Konstante nach Dittich & Koll (1997) – und im Mittenbereich – Stichwort Wake – durch ein *physikalisch begründetes* Modell mindestens *gleichwertig* ersetzt. Vielleicht noch wichtiger als die qualitative Übereinstimmung sind die Vorteile, die solche Modelle in Bezug auf Transparenz und Gültigkeitsbereich aufweisen. Im vorliegenden Zusammenhang ist dieser Aspekt zentral, weil Bezzolas Modell einen Ansatzpunkt

bietet, den Einfluss der Luft auf diese verfeinerten Mechanismen genauer zu untersuchen.

Hingegen gibt auch Bezzola keine physikalische Basis für Anknüpfung des logarithmischen Profils im Punkt $(y^+; \bar{u}^+) = (\gamma k^+; 0)$. Die Frage nach einem physikalischen Modell im Bereich der grössten Gradienten ist also noch nicht beantwortet.

In seinen Schlussfolgerungen reduziert Bezzola das Modell übrigens wieder auf eine einfachere, dem Nikuradse-Ansatz nähere Form. Dies aber nicht wegen schlechterer Resultate seines Ansatzes, sondern weil Teile davon mit den vorhandenen Messresultaten schlecht überprüfbar sind. Die Prandtl-basierten Ansätze sind auch einfacher in der Handhabung.

4.2.3 Arbeitshypothese für den Bereich der Rauheiten – MR-Ansatz

a) Basisüberlegung

Den Abschnitten 3.7.2 und 4.2.2 lag die Vorstellung zu Grunde, dass der Impulsaustausch bis in den Bereich der Rauheitselemente derjenige Prozess bleibt, welcher den Geschwindigkeitsgradienten bestimmt. Führt man diese Überlegung noch ein Stück weiter, so sollte es zulässig sein, die Vorgänge auch in diesem sehr wandnahen Bereich näherungsweise über das Mischungswegkonzept abzubilden. Dies würde es ermöglichen, die Randbedingung für das turbulente Geschwindigkeitsprofil tiefer zu legen, und der Einfluss der Luft auf die Turbulenzmechanismen könnte näher an die Bewandung verfolgt werden. – Prüfstein einer solchen *Arbeitshypothese* sei die Frage, ob sie es erlaubt, die normierte Geschwindigkeit \bar{u}^+ auf der Höhe $y^+ = 1$ – also die Konstante B – auf *plausible Weise* zu bestimmen.

Als Grundlage dient wieder der allgemeine Mischungswegansatz (3-15):

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 . \quad (3-15)$$

Der Unterschied zum vollturbulenten, logarithmischen Bereich liegt im Verlauf der turbulenten Schubspannung τ_t und des Mischungswegs l . Hiefür sind einfache Annahmen zu treffen.

Auf dieses Modell wird im Folgenden mit der Bezeichnung “*MR-Ansatz*“ referenziert, weil es den **M**ischungswegansatz in den Bereich der **R**auheiten ausdehnt.

b) Annahmen zur turbulenten Schubspannung

Wie schon in Abschnitt 3.7.2 erläutert bildet sich nach Bezzola (2002) über einer rauen Sohle eine Schicht, in der die turbulenten Schwankungsbewegungen ein Maximum nicht mehr überschreiten. Sie sind also gegenüber einem entsprechenden hydraulisch glatten Abfluss reduziert. Diese Schicht wird als roughness sublayer bezeichnet. Ihre

Dicke y_R liegt in der Größenordnung der Rauheitselemente und ihre Obergrenze bei $y = y_R$.

Unterhalb des roughness sublayer, dies zeigen z.B. die Messungen von Dittrich & Koll (1997) in Bild 3-6, fallen die turbulenten Schwankungsbewegungen stark ab und verschwinden bis zur Kornbasis ganz. Für die turbulenten Schubspannungen ist ein analoger Rückgang zu erwarten, da die diversen Korrelationen in mehr oder weniger festen Verhältnissen zueinander stehen (vgl. Abschnitt 3.7.2).

Bezzola (2002) geht von einem linearisierten Maximum $\tau_{t,max} = C_R^2 \tau_0$ aus und setzt dessen *Untergrenze* im Bereich der Kornscheitel an. Um eine gewisse Flexibilität zu erhalten – gerade bei *kleinen* Rauheitsdichten könnten die Maximalwerte vielleicht tiefer reichen – wird die Untergrenze hier allgemeiner mit $y_T = tk$ angesetzt. Im Falle $t = s$ läge sie wieder bei den Kornscheiteln. Auch der Punkt, an dem der Wert 0 erreicht wird, wird allgemeiner auf einer Höhe y_0 angesetzt, welche auch über der Kornbasis liegen kann.

Unterhalb dieser Grenze geht die Schubspannung wieder auf Null zurück, denn sie wird sukzessive auf die Bewandung, d.h. auf die Körner übertragen. Nimmt man an, dass der Wert Null bei der Kornbasis, also bei y_0 , erreicht wird, so lässt sich der Rückgang zum Beispiel mit dem Potenzansatz

$$\tau_t / \tau_0 = C_R^2 \left(\frac{y - y_0}{tk - y_0} \right)^{e_\tau} \quad (4-10)$$

beschreiben. Dieser Ansatz ist in Bild 4-5 für verschiedene e_τ ausgewertet.

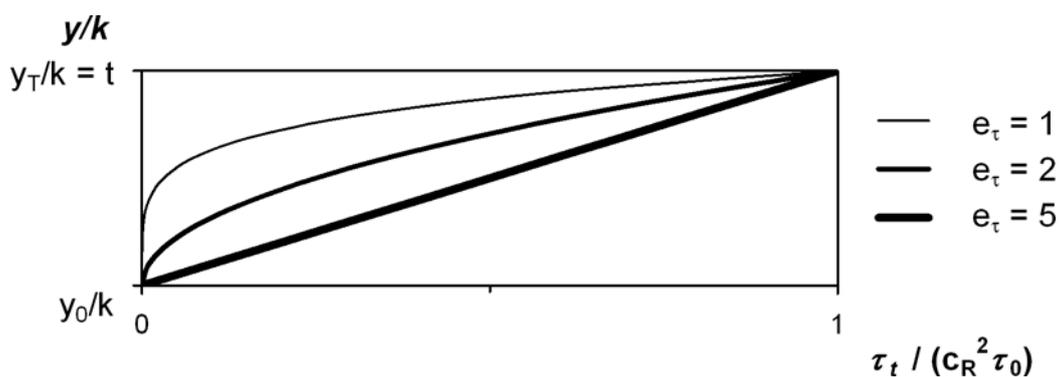


Bild 4-5: Ansatz für den Rückgang der turbulenten Schubspannungen im Kornbereich.

Es stellt sich dann die Frage nach dem Exponenten e_τ . Dittrich & Koll (1997) äussern sich zwar nicht explizit zum Verlauf. In ihrer Fig. 3 tragen sie ihn aber linear ein.

Berücksichtigt man jedoch die erwähnten festen Beziehungen zwischen den verschiedenen Korrelationen der Schwankungsbewegungen, so müsste man von der Proportionalität

$$\sqrt{\frac{\tau_t}{\tau_0}} = \frac{\sqrt{u'v'}}{u_\tau} \sim \frac{\sqrt{u'^2}}{u_\tau} \quad (4-11)$$

ausgehen (vgl. auch Bezzola 2002, S. 54), d.h. die turbulente Schubspannung sollte ähnlich verlaufen wie die Schwankungsbewegung in x -Richtung. Nach Bild 3-6 zu schliessen, scheint nun – jedenfalls für die dort untersuchten *natürlichen Körner auf planer Fläche* – ein linearer Verlauf eher auf die *Wurzelterme* in Gleichung (4-11) zuzutreffen, was im Ansatz (4-10) einen Exponenten $e_\tau = 2$ bedingt. Die turbulenten Schubspannungen würden dann in den oberen Bereichen der Kornschicht stärker abnehmen als in der Nähe der Kornbasis, was auch plausibel ist.

Trägt man die Ansätze (4-6), (4-7) und (4-10) zusammen und berücksichtigt statt des Ausdrucks $1 - y/d_0$ die allgemeinere Form $1 - \eta$, so ergibt sich folgende Gesamtbeschreibung für den Verlauf der turbulenten Schubspannungen

$$\sqrt{\frac{\tau_t}{\tau_0}} = \text{Min}\left(\sqrt{1-\eta}; \sqrt{1-\eta_R}; \sqrt{1-\eta_R} \frac{y/k - y_0/k}{t - y_0/k}\right) \quad (4-12)$$

mit $\eta_R = 1 - d(y_R)/d_0$. Dieser Verlauf ist in Bild 4-6 dargestellt.

c) Annahmen zum Mischungsweg

Der Mischungsweg kann als kinematischer Freiheitsgrad der Schwankungsbewegung aufgefasst werden, nach Prandtl identisch mit dem Wandabstand. Übertragen auf die Zone zwischen den Rauheitselementen könnte also auch hier der freie Raum zwischen den Elementen als Mass für den Mischungsweg dienen. Aber auch die schon erwähnten räumlich fixierten Bewegungen (Abschnitt 3.7.2) werden einen Einfluss haben. Eine exakte Bestimmung auf der Basis der Geometrie der Rauheit ist kaum möglich und – im Hinblick auf die einleitend erwähnten einfachen Zielsetzungen sowie die etwas gewagten Postulate – auch nicht nötig.

Bild 4-7 (links) zeigt den linearen Ansatz, der im Folgenden verwendet wird: Er ist definiert durch den Wert $l_0 = \lambda_k k$ auf der Höhe des Bezugshorizonts und eine reduzierte Kármán-Konstante κ_k :

$$l = \lambda_k k + \kappa_k y$$

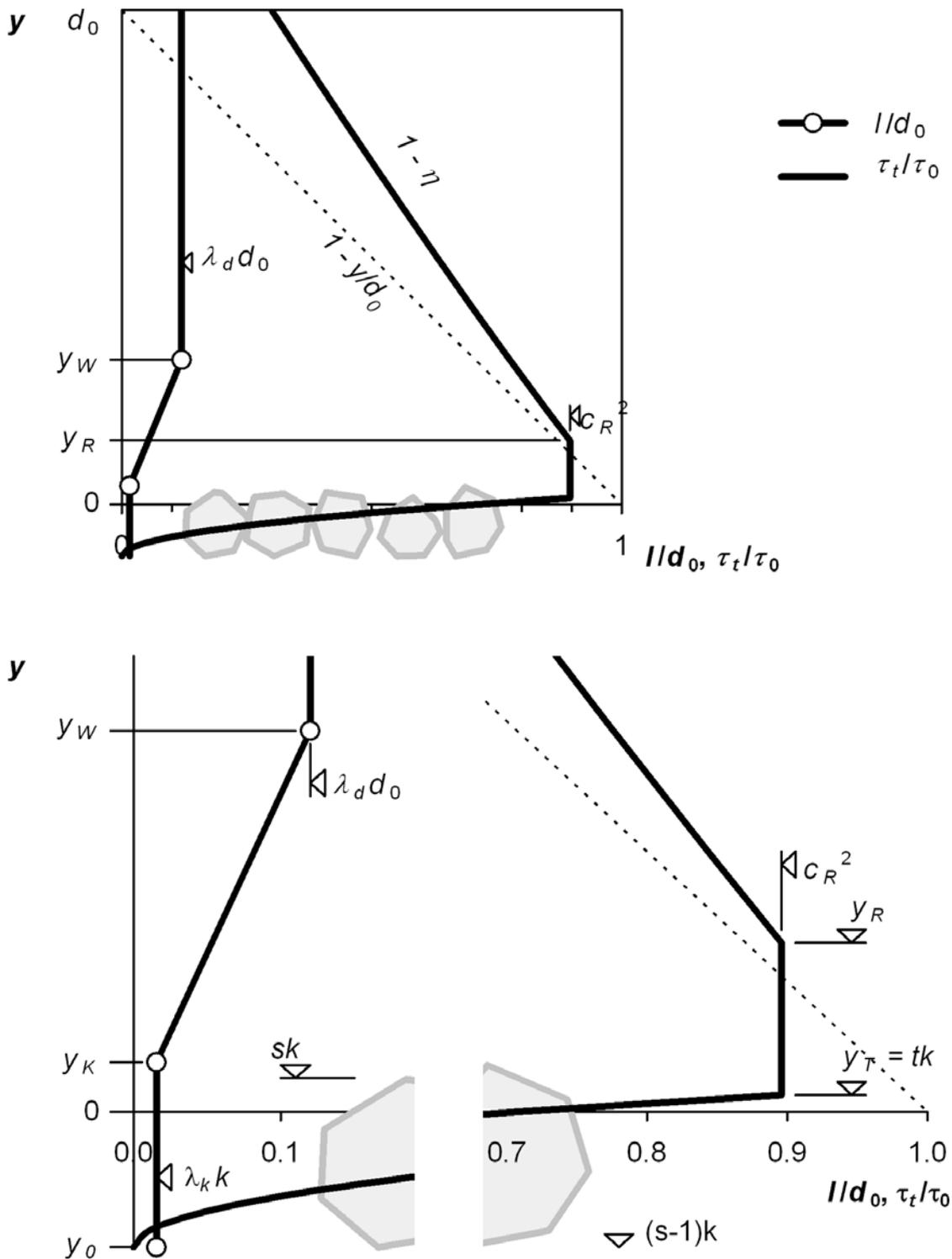


Bild 4-6: Parametrisierung des MR-Ansatzes (in diesem Fall mit $\kappa_k = 0$). Oben eine Gesamtübersicht, unten je eine Ausschnittsvergrößerung der linken und der rechten unteren Ecke. – Die Darstellung berücksichtigt einen Luftgehalt, weshalb die Kurve $1-\eta$ von der Reinwassergeraden $1-y/d_0$ nach oben abweicht.

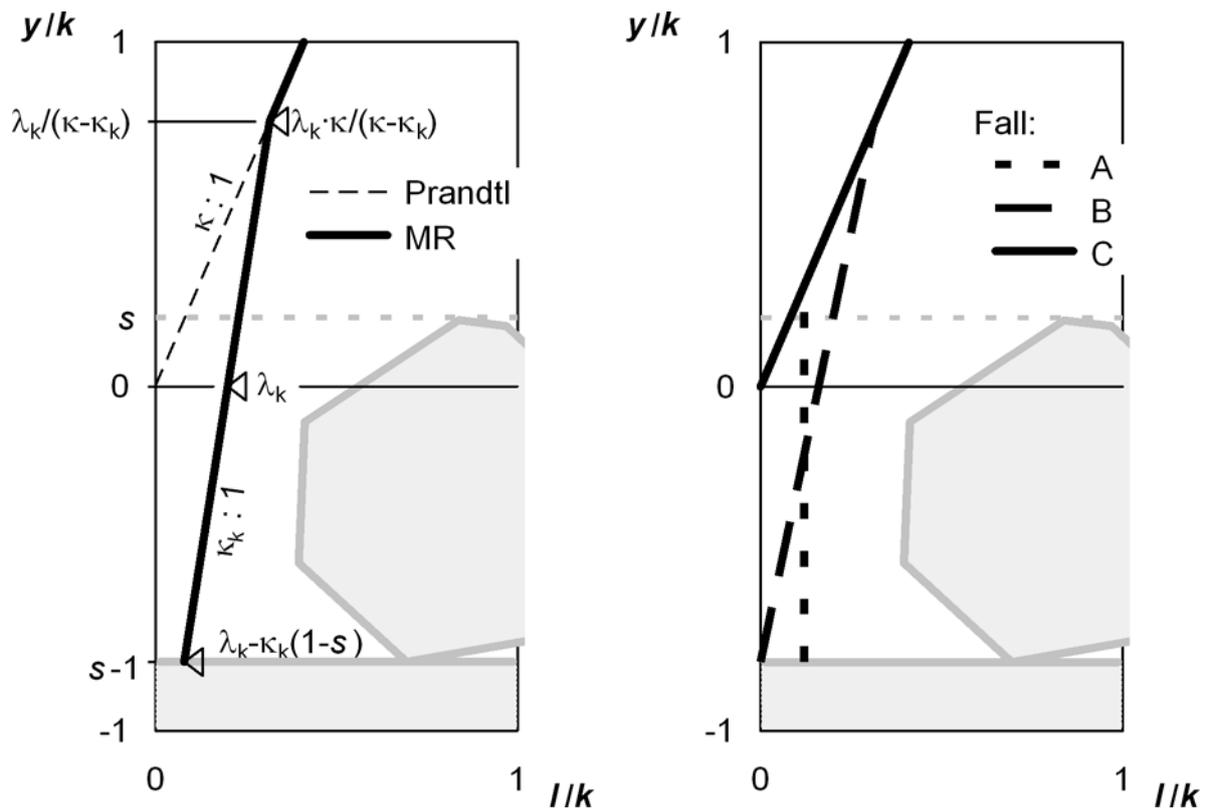


Bild 4-7: Linearer Ansatz für einen modifizierten Mischungsweg im MR-Ansatz.

Links: Parameter

Rechts: Grenzfälle A, B, C

Es können drei Grenzfälle unterschieden werden (Bild 4-7, rechts): Fall A mit $\kappa_k = 0$ bedeutet, dass der Mischungsweg im Kornbereich konstant ist und nur mit der Rauheit skaliert. Im Fall B hat der Mischungsweg seinen Nullpunkt gerade an der Kornbasis und die beiden Parameter κ_k und λ_k sind durch die Beziehung $\kappa_k = \lambda_k / (1 - s)$ gekoppelt. Fall C mit $\lambda_k = 0$ schliesslich ist identisch mit dem Prandtl-Ansatz ohne Veränderung im Kornbereich.

Über den Kornscheiteln wird der Mischungsweg weiterhin nach Escudier angenommen. Der vollständige Ansatz lautet dann (vgl. Bild 4-6):

$$\frac{l}{k} = \text{Min} \left(\text{Max} \left(\kappa \frac{y}{k}; \lambda_k + \kappa_k \frac{y}{k} \right); \lambda_d \frac{d_0}{k} \right) . \quad (4-13)$$

d) Integration zum Geschwindigkeitsprofil

Der Gradient (3-25) kann mit obigen Ansätzen entweder numerisch oder explizit zum Geschwindigkeitsprofil aufintegriert werden (für letzteres s. Anhang A1). Man erhält dann Profile, wie sie in Bild 4-8 gerechnet wurden.

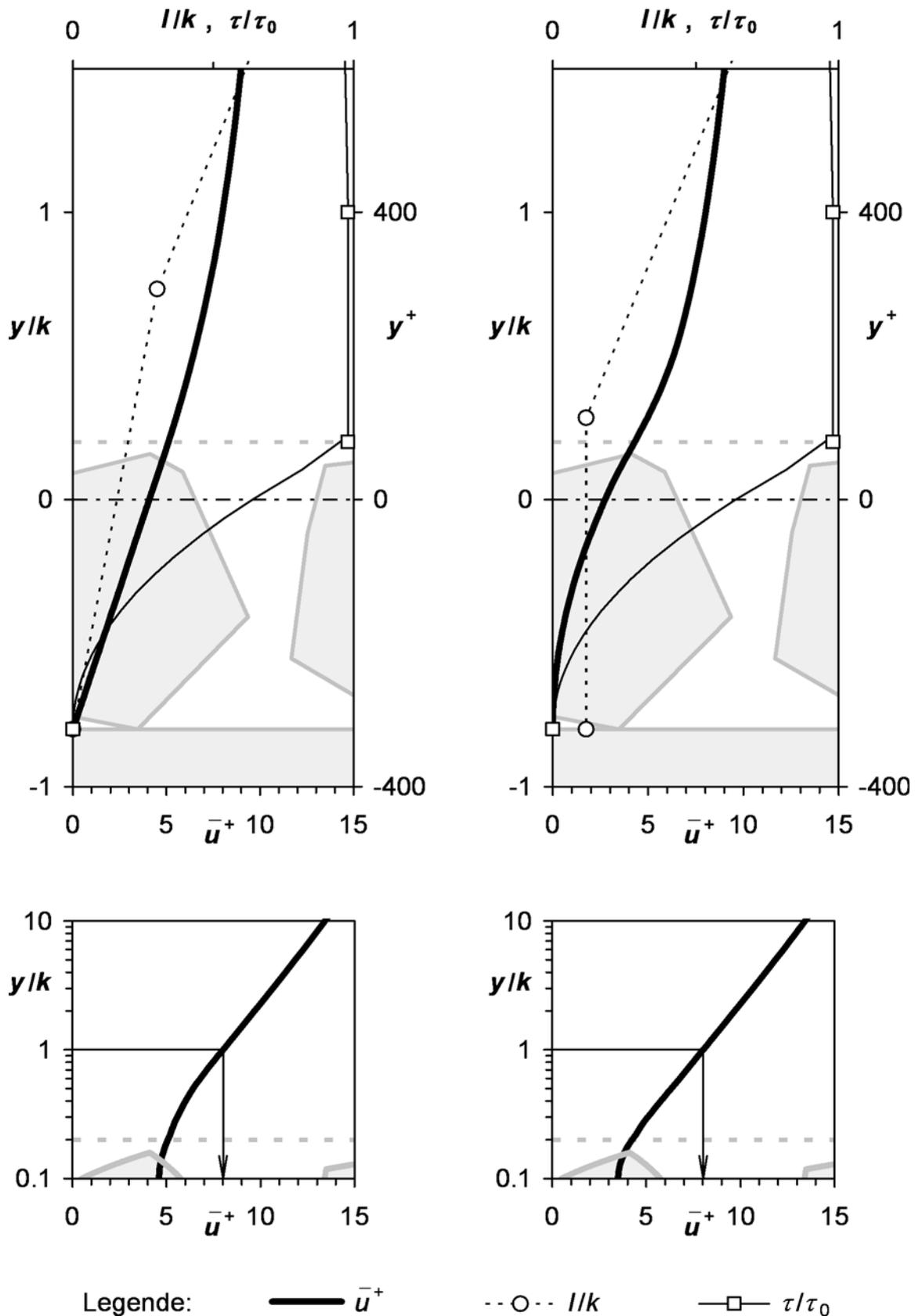


Bild 4-8: Integriertes Geschwindigkeitsprofil für eine Sandrauheit mit $s = 0.2$.

Links: $\lambda_k = 0$, $\kappa_k = 0.20$ (Fall b aus Bild 4-7).

Rechts: $\lambda_k = 0.12$, $\kappa_k = 0$ (Fall a aus Bild 4-7).

Oben linear, unten semilogarithmisch mit Ablesung von B .

e) Allgemeiner MR-Ansatz: Ersatz der Konstanten B durch λ_k und κ_k

Für gegebenes s und t kann man die gegenseitige Beziehung der Parameter κ_k bzw. λ_k so bestimmen, dass für die Geschwindigkeit \bar{u}^+ auf der Höhe $y = k$ der bekannte Wert $B = 8$ resultiert. Für $s = 0.2$ und $t = s$ erhält man zum Beispiel folgende Wertepaare für die Grenzfälle A und B aus Bild 4-7 (für beliebige Wertepaare s. Bild 4-9):

Fall A für $s = 0.2$ und $t = s$: $\kappa_k = 0$ und $\lambda_k = 0.12$;

Fall B für $s = 0.2$ und $t = s$: $\kappa_k = 0.20$ und $\lambda_k = 0.16$.

Fall A lässt sich so interpretieren, dass der Mischungsweg zwischen den Rauheiten – hier gegeben durch $\lambda_k k = \text{konstant}$ – etwa eine Größenordnung kleiner ist als die Rauheiten selbst. Das erscheint plausibel, womit die in Abschnitt 4.2.3a geforderte Bedingung erfüllt wäre. Fall B fände eine Entsprechung in den Schlussfolgerungen von Dittrich & Koll (1997), wonach eine auf ca. 0.18 reduzierte Kármán-Konstante die gemessenen Geschwindigkeitsprofile im Bereich der Rauheiten gut wiedergibt.

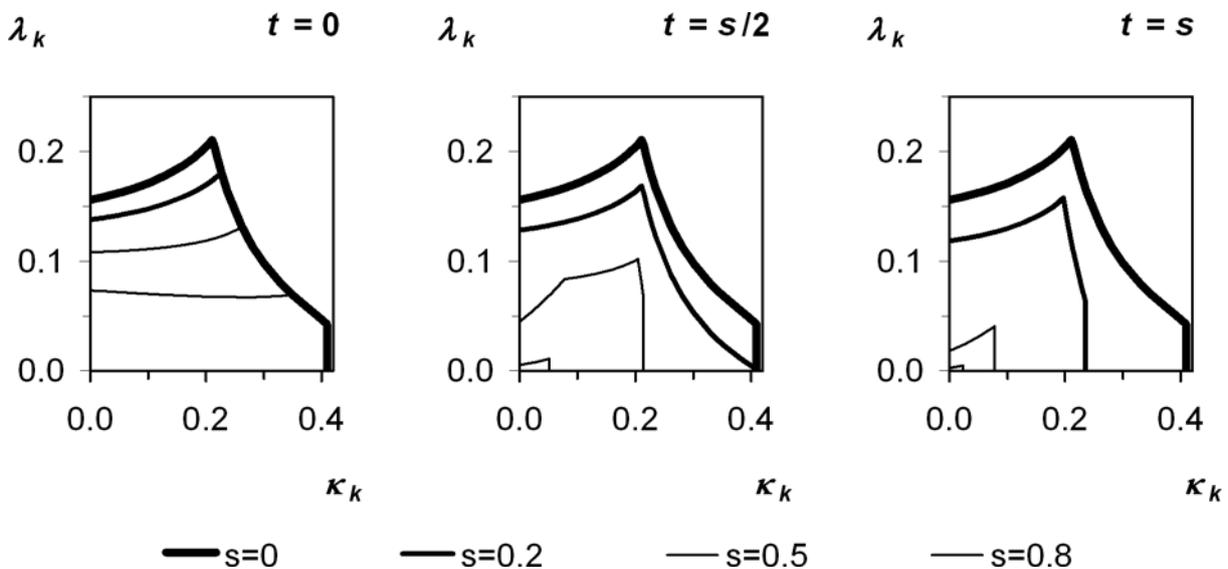


Bild 4-9: Wertepaare für κ_k und λ_k , welche die Bedingung $B = 8$ erfüllen. Rechnung für $c_R = \beta_R = 1$ mit s und t als Parametern. Die markante Unstetigkeit gibt den jeweiligen Grenzfall B wieder.

Natürlich wird die Anwendung des Mischungswegansatzes, je weiter man in die Körner eindringt, immer fragwürdiger. Das spielt aber, wie Bild 4-8 zeigt, eine sekundäre Rolle: Vor allem bei einem konstant angesetzten Mischungsweg $l = \lambda_k k$ trägt der untere Bereich der Körnung wenig zum Integralwert der Geschwindigkeit bei.

f) Vereinfachter MR-Ansatz: Ersatz der Konstanten B durch λ_k (ohne κ_k)

Die Beschränkung auf einen Parameter, nämlich λ_k , entspricht dem Fall A aus Bild 4-7, bzw. dem Beispiel aus Bild 4-8 rechts: Der Mischungsweg wird im Kornbereich *konstant* angesetzt. Der Parameter κ_k , der eine Steigung vorgeben würde, wird nicht benötigt. B kann in diesem Fall mit den Gleichungen (A1-1) und (A1-2) aus Anhang A1.2 und der Definition $a = \lambda_k/\kappa$ berechnet werden zu³:

$$B = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{1-s-t}{2a} + 1 + \ln \frac{\beta_R}{a} \right), \quad \text{falls } t < a,$$

und zu

$$B = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{(a-s+1)^2}{2a(t-s+1)} + \frac{t-a-(s-1)\ln(t/a)}{t-s+1} + \ln \frac{\beta_R}{t} \right), \quad \text{falls } t > a.$$

Sind c_R , β_R , s und t gegeben, so kann nun λ_k iterativ so bestimmt werden, dass der richtige Wert für B resultiert, im Falle einer Sandrauheit also $B = 8$. Bild 4-10 ist eine Auswertung der beiden obigen Gleichungen für den Fall $c_R = \beta_R = 1$.

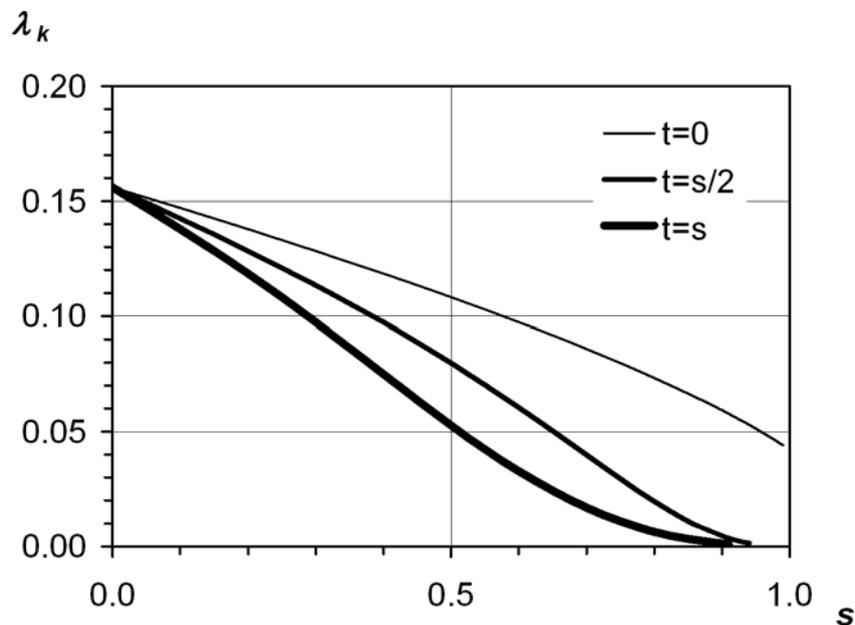


Bild 4-10: Werte für λ_k , welche die Bedingung $B = 8$ erfüllen, in Funktion von s ($\kappa_k = 0$). Rechnung für $c_R = \beta_R = 1$, mit t als Parameter.

4.2.4 Zusammenfassung

Bezzola (2002) präsentiert ein Impulsaustauschmodell, das die Strömung ebenso gut abbildet wie Vorgängermodelle, physikalisch aber besser fundiert ist. Danach über-

3. $a = \lambda_k/\kappa$ ist in diesem Fall gerade y_K/k .

nehmen kleinskalige Sekundärbewegungen einen Teil der totalen Schubspannungen und entlasten so die turbulenten Schubspannungen. Die Geschwindigkeitsverteilung als solche bleibt aber weiterhin durch den turbulenten Impulsaustausch bestimmt.

Auf der Basis von Bezzola und etwas darüber hinausgehend wurde eine Arbeitshypothese aufgestellt: Der turbulente Impulsaustausch soll im vollrauen Abfluss auch unterhalb der Rauheitsscheitel derjenige Prozess bleiben, der für den Geschwindigkeitsgradienten massgebend ist. Um den entsprechenden Mischungswegansatz formulieren zu können, waren *Annahmen* zu treffen für einen parametrisierten Verlauf der turbulenten Schubspannungen und des Mischungswegs.

Nach der Integration des Gradienten zum Profil kann die Geschwindigkeit bei $y = k$ mit dem empirisch bekannten Wert für B verglichen werden, was eine *Eichung* der Parameter erlaubt. Es zeigt sich, dass diese in plausible Grössenordnungen zu liegen kommen. Aufgrund dieses Indizes wird im Folgenden davon ausgegangen, dass im Rahmen einer Arbeitshypothese das Geschwindigkeitsprofil auch unterhalb der Rauheitsscheitel über den Mischungswegansatz modelliert werden kann. Ein allfälliger Luftgehalt würde dann *auf ähnliche Art und Weise* auf B einwirken, wie er das auf das logarithmische Geschwindigkeitsprofil oberhalb von $y = k$ tut.

5 Literatur zur Widerstandsminderung

5.1 Einleitung

Zum Einfluss der Luft auf den hydraulischen Widerstand existiert eine Reihe *wasserbaulicher Untersuchungen*. Deren Umfang ist aber – verglichen mit anderen wasserbaulichen Themen – beschränkt. Es handelt sich vor allem um Resultate von Messkampagnen, zum physikalischen Verständnis gibt es nur wenige Ansätze.

Demgegenüber hat die Widerstandsminderung, und zwar ganz allgemein gefasst, in der *Turbulenzforschung* grosse Resonanz gefunden. Man erhofft sich von dem Phänomen nicht nur technische Anwendungen, sondern auch grundlegende Einblicke in das Wesen der Turbulenz. Gegenstand der Untersuchungen sind sowohl *aktive* als auch *passive* Mittel (*active / passive means*) der Widerstandsminderung (*drag reduction*). Auf die *passiven* Mittel – feste Einbauten in der Bewandung – wird hier nicht eingegangen.

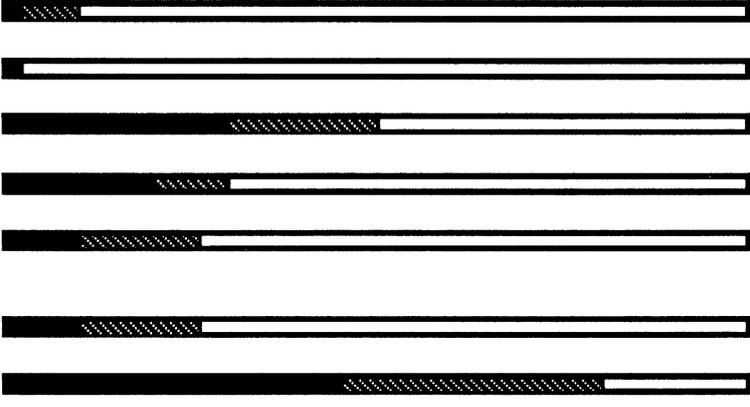
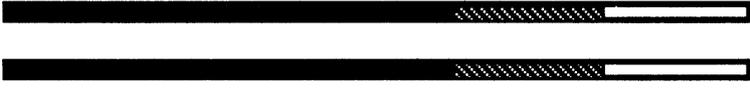
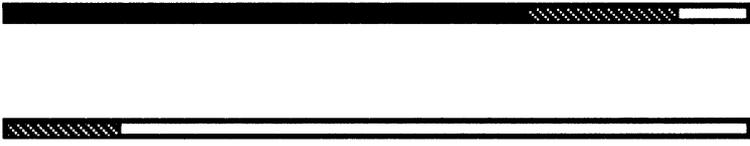
Aktive Mittel sind gelöste oder suspendierte Stoffe, welche dem Fluid zugegeben werden, so genannte *Additive*. Die ersten intensiv untersuchten Additive waren gelöste *Polymere*. Deren prominente Stellung gründete zum einen in den damit verbundenen technischen und wirtschaftlichen Perspektiven. Das prominenteste Beispiel ist die Trans-Alaska-Pipeline, wo durch Einsatz von Polymeren entweder der Durchfluss erhöht oder aber Pumpstationen abgeschaltet werden können (White & Mungal 2008).

Zum andern waren Polymerlösungen auch Ausgangspunkt für die Entwicklung theoretischer Modellvorstellungen zur Widerstandsminderung, welche später teilweise auf andere Additive adaptiert wurden. In den folgenden Abschnitten werden davon nur die wichtigsten Punkte herausgegriffen. Für eine nähere Einführung s. Gyr & Bewersdorff (1995). – Neben Polymeren wurden weitere *Lösungen* untersucht, zum Beispiel mit Tensiden, aber auch *Suspensionen* und *Dispersionen* wie Fasern oder Staub in Fluiden oder eben Gase in Flüssigkeiten. Tab. 5-1 aus Gyr & Bewersdorff gibt eine Übersicht über verschiedene Effekte und die jeweils erreichte Grössenordnung der Widerstandsminderung.

Im Wasserbau sind die Resultate der Turbulenzforschung bisher wenig rezipiert worden, obwohl das Feld samt der zugehörigen Terminologie dort systematischer und ausgreifender bearbeitet wurde. Aus diesem Grund werden zuerst in Abschnitt 5.2 die Beobachtungen der Turbulenzforschung vorgestellt, danach in Abschnitt 5.3 jene aus wasserbaulichen Untersuchungen. Abschnitt 5.4 kommt auf die wichtigsten Erklärungsansätze zu sprechen.

Tab. 5-1: Gyr & Bewersdorff (1995): Übersicht über verschiedene Effekte mit aktiver Widerstandsminderung.

Table 1.1: Diverse drag reducing effects

Active Drag Reduction	Magnitude of drag reduction by additives or by body forces
Dust in gas Sand suspensions Clay suspensions Injection of gas (bubbles) Flakes, flocks, algae and biological molecules Paper pulp, and similar material Fibres (asbestos)	
Surfactants anionic cationic nonionic	
Dilute polymer solutions stiff molecules elastic molecules Heterogeneous DR continued thread breaking into pieces	depending on concentration, length and kind  depending on concentration, relative velocity and kind 
Combinations of polymers, surfactants and fibres Intelligent manipulation by injections	
MHD parallel field transverse field	

5.2 Beobachtungen der Turbulenzforschung

5.2.1 Beobachtungen an Polymerlösungen

a) Geschwindigkeitsprofil

Bei Zugabe von Polymeren beobachtet man entscheidende Veränderungen des Geschwindigkeitsprofils in Wandnähe. Bild 5-1 zeigt zunächst das entsprechende Profil ohne Widerstandsminderung ("P-K p"). Es setzt sich wie in Bild 3-2 aus dem viskosen und dem logarithmischen Ast zusammen.

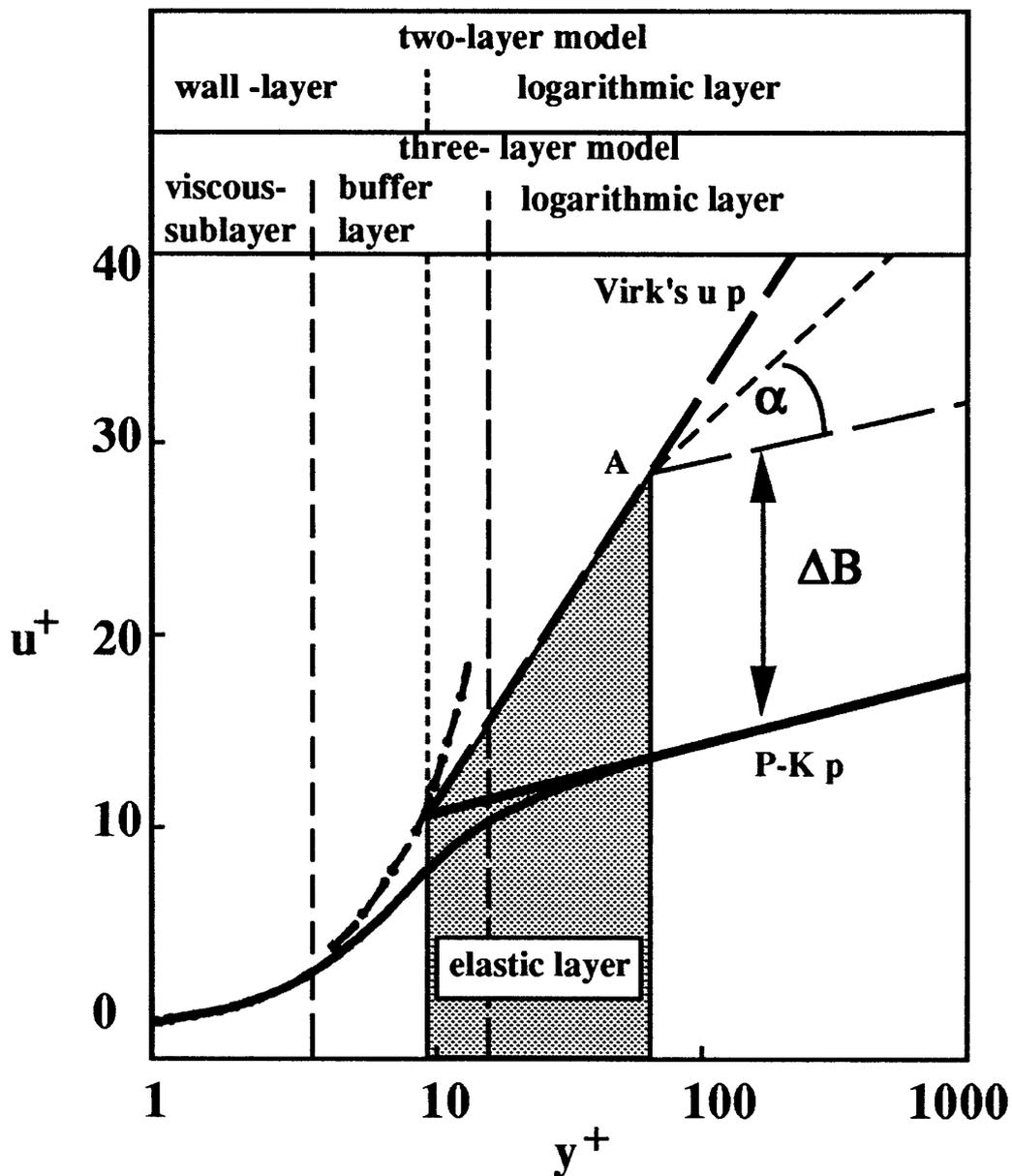


Bild 5-1: Gyr & Bewersdorff (1995): Veränderung des Geschwindigkeitsprofils im allgemeinen Fall.

Gibt man jetzt Polymere zu, so zeigt die viskose Unterschicht, jedenfalls in ihrem Kernbereich, keine Veränderung. Hingegen entsteht ein neuer Übergangsbereich von der Wandschicht zum turbulenten Bereich, der *elastic layer*. Hier ist der Gradient nun viel steiler und folgt einem *ultimativen* Profil ("Virk's up"), das Virk (1971) empirisch bestimmt hat zu:

$$\bar{u}^+ = 11.7 \ln y^+ - 17 \quad .$$

Im *allgemeinen* Fall schneidet das neue logarithmische Profil (in Bild 5-1 fein gestrichelt) das ultimative in einem Punkt A, und zwar unter einem Winkel α gegenüber dem hydraulisch glatten Profil. Oft verschwindet aber α , und die Widerstandsminderung ist nur durch eine Verschiebung ΔB bedingt.

Nach Hoyer (2006) gilt dieser letztere Fall, das ΔB -Konzept (Virk's effective slip velocity), streng genommen nur für eine *dilute solution*, d.h. für eine Wechselwirkung der Turbulenz mit einzelnen Molekülen. Das α -Konzept, bei welchem die Kármán-Konstante ändert, tritt eher bei *non dilute solutions* auf. Diese sind nämlich in der Lage, auch die grösseren Turbulenzstrukturen auf einem langsameren Zeitmassstab zu beeinflussen.

Bild 5-1 zeigt aber auch, dass das ultimative Profil doch *flacher* ist als der viskose Ast (die gekrümmte, gestrichelte Linie in der linken Bildhälfte). Der minimal mögliche Widerstand liegt also über dem viskosen. Er ist dann erreicht, wenn der neue logarithmische Ast vollständig auf Virks Profil zu liegen kommt.

Ausserdem verläuft das ultimative Profil im Gegensatz zum viskosen *logarithmisch*, nicht linear. Dies kann als Hinweis gelesen werden, dass es sich nicht eigentlich um ein viskoses Profil handelt, sondern eher um einen modifiziert turbulentes.

b) Widerstand

Der Widerstandsbeiwert verhält sich analog. Bild 5-2 zeigt seinen Verlauf in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re . Als Orientierung dienen die Linien "1" und "2", welche den viskosen resp. den hydraulisch glatten Widerstand wiedergeben. Die Linien "4", "5" und "6" bezeichnen drei typische Beispiele, wie sich der Widerstand bei Zugabe von Polymeren verändern kann: Bei einer bestimmten Reynoldszahl, dem *onset*, löst er sich von der hydraulisch glatten Kurve "2" nach unten ab. Steigert man die Reynoldszahl, so erreicht die Reduktion ein Maximum, die *Sättigung*, um sich bei weiterer Steigerung wieder zu verlieren.

Wiederum kommen die Minima auf eine Kurve zu liegen (Linie "3"), für welche Virk (1971) folgende empirische Relation gibt:

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 19.0 \log(Re \sqrt{C_f}) - 32.4$$

Virks Kurve liegt also weit unter dem hydraulisch glatten Widerstand, erreicht aber den viskosen Widerstand (Linie "1") nicht. – Virks Experimente zeigen auch, dass die Widerstandsminderung nicht auf hydraulisch glatte Gerinne beschränkt ist. Seine Messungen in rauen Rohren erreichen die gleiche Größenordnung.

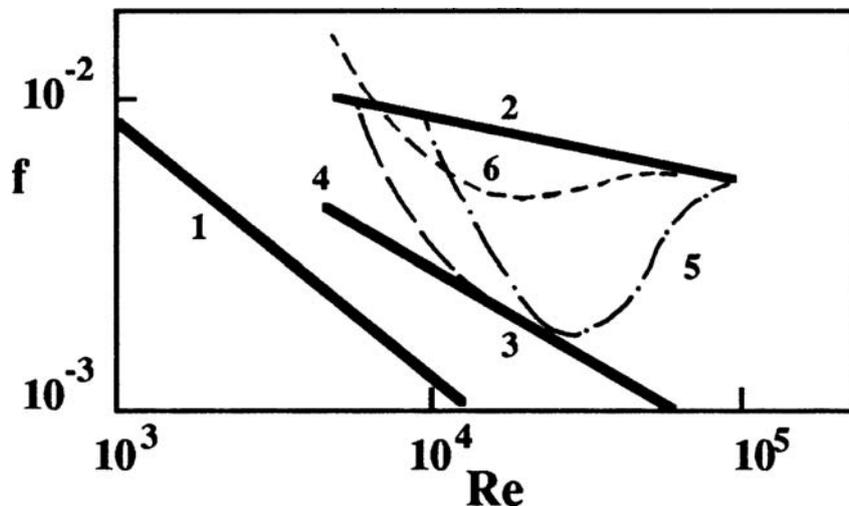


Bild 5-2: Gyr & Bewersdorff (1995): Verlauf der Widerstandsminderung mit veränderlicher Reynoldszahl; "f" bezeichnet den Fanning-Widerstandsbeiwert, welcher in der vorliegenden Arbeit sonst mit C_f bezeichnet wird.

5.2.2 Beobachtungen in Wasser-Luft-Gemischen

a) Eddington (1970)

Eddington (1970) untersucht Überschallphänomene in einer Flüssigkeit-Gas-Zweiphasenströmung. Er präsentiert eine Graphik (Bild 5-3), welche das Verhältnis der Wandschubspannungen des Gemisches und der reinen Flüssigkeit (Index \underline{w}) in Beziehung setzt zur Gaskonzentration (bzw. zum Flüssigkeitsanteil).

Eddington stellt anhand dieser Darstellung eine lineare Beziehung auf:

$$\tau_0 = \tau_{0\underline{w}}(1 - c) \quad .$$

und hält fest, dies sei "equivalent to using the mixture density [...] of the two-phase flow and calculating the shear stress as though the mixture were a single-phase medium."

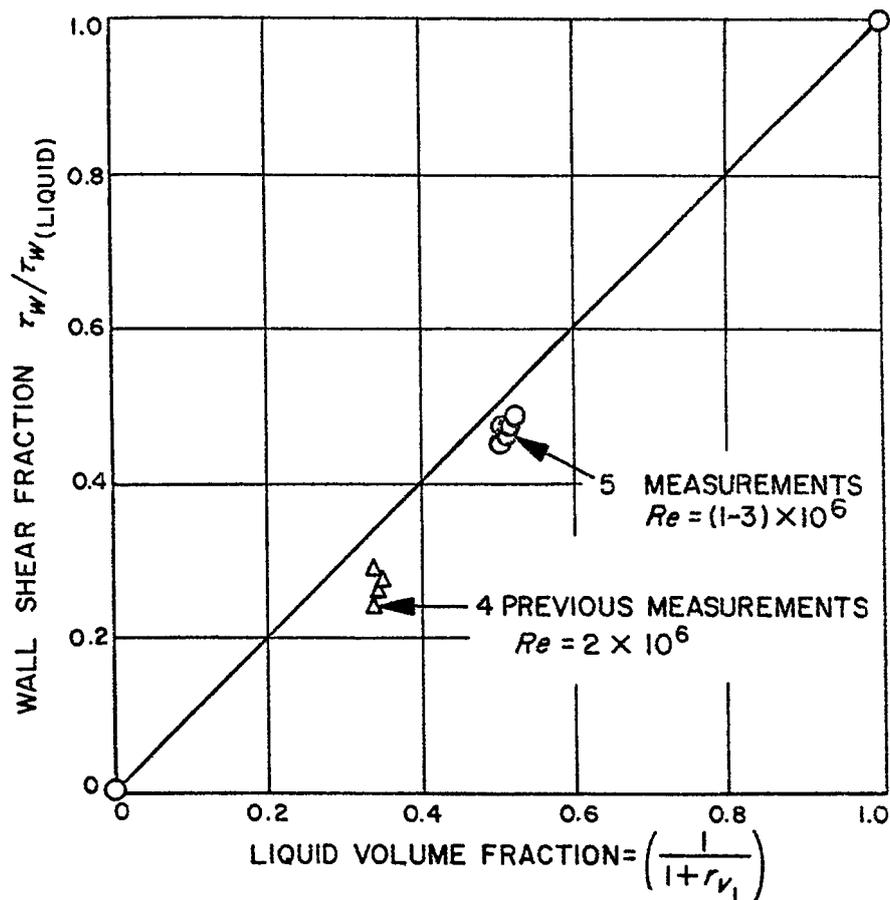


Bild 5-3: Eddington (1970): Änderung der Wandschubspannung in Funktion des Flüssigkeitsanteils; sein Ausdruck $1/(1+r_{v1})$ entspricht $1-c$, τ_w ist die Wandschubspannung τ_0 .

b) Untersuchungen am Institut für Thermophysik, Novosibirsk: Bogdevich et al. (1977)

In Novosibirsk wurden in den Siebzigerjahren Zweiphasenströmungen und deren Einfluss auf die wandnahe Turbulenz untersucht. Bogdevich et al. (1977) berichten über Experimente an einer Platte ($L \times B \times H = 995 \text{ mm} \times 244 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$) in einem Rechtecktunnel. Die Plattenoberfläche war hydraulisch glatt, besaß aber in der Nähe des Kopfes einen porösen Abschnitt, durch welchen Luft in die Strömung eingepresst werden konnte. Im hinteren Teil der Platte waren dann neben anderen Instrumenten Schubspannungswaagen installiert, um die Auswirkungen der Luft auf den Widerstand zu messen.

Die Autoren stellen zunächst – auch mit Verweis auf ihre vorhergehenden Untersuchungen – fest, dass in all ihren Versuchen *in unmittelbarer Wandnähe keine Luft* gefunden wurde. Diese luftfreie Schicht beträgt *ein Mehrfaches der viskosen Unterschicht*.

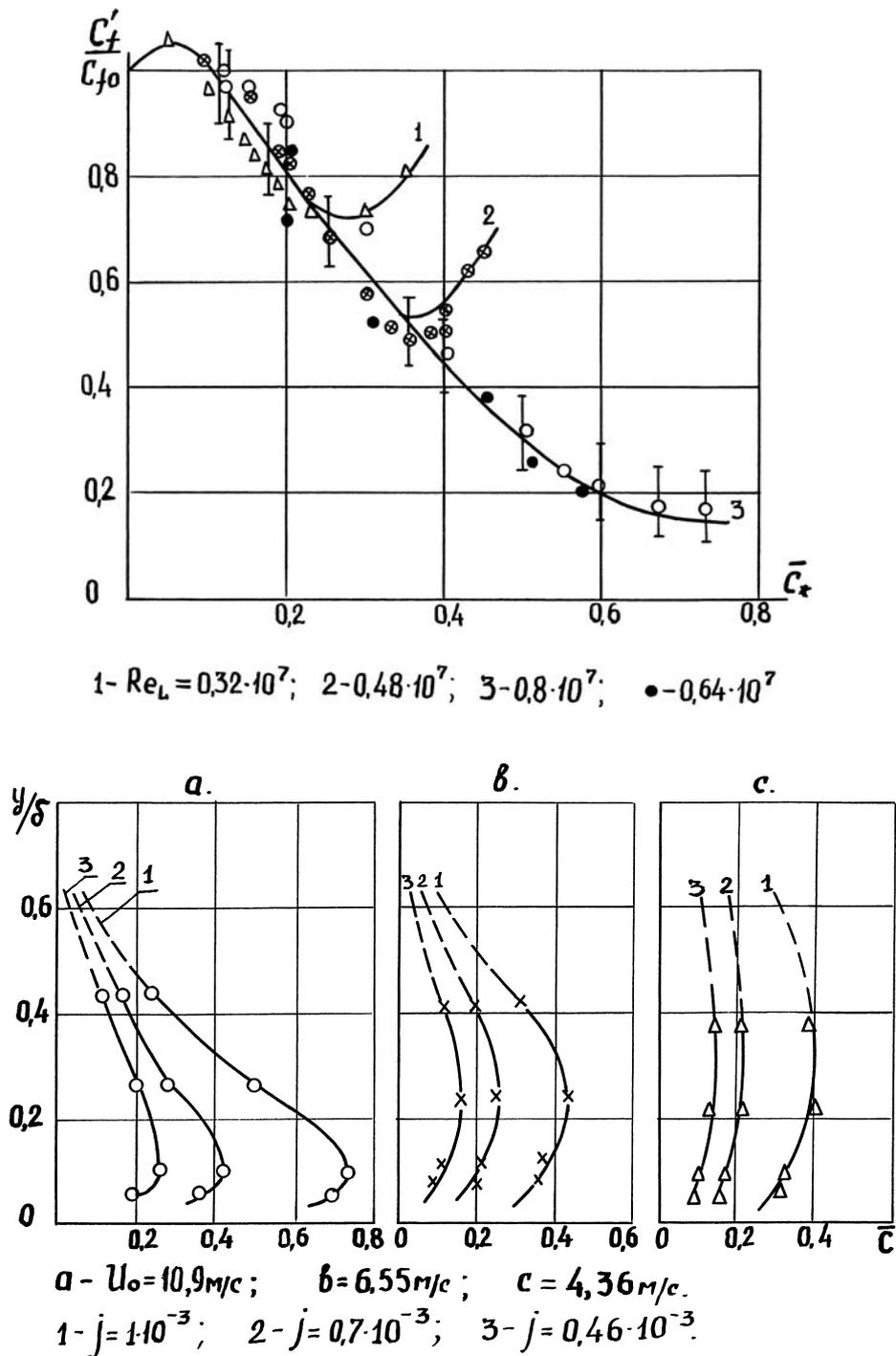


Bild 5-4: Bogdevich et al. (1977).

Oben: Änderung des Fanning-Beiwerts C_f (hier mit C_f' bezeichnet) gegenüber dem unbeeinflussten Wert C_{f0} , und zwar in Funktion der Reynoldszahl Re_L und der maximalen Luftkonzentration \bar{C}_* . δ ist die Grenzschichtdicke.

Unten: Verteilung der Gaskonzentration in der Grenzschicht für verschiedene Fließgeschwindigkeiten U_∞ (hier mit U_0 bezeichnet) und variable Luftzufuhr. Letztere ist charakterisiert durch den Injektionsparameter j .

Weitere Beschreibung im Text. Definitionen s. Bild 5-5.

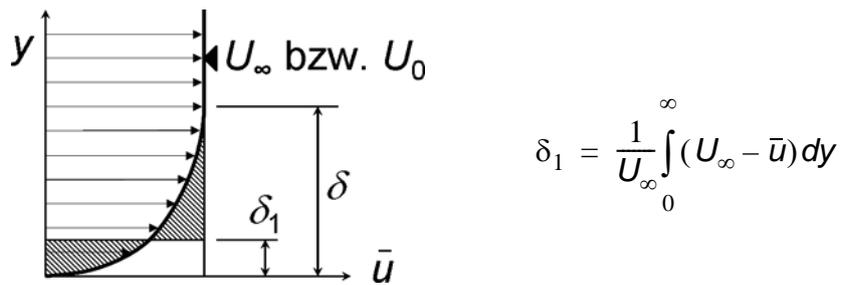


Bild 5-5: Definitionsskizze zu den im Text erwähnten Grenzschichtgrößen. Die nebenstehende Definition der Verdrängungsdicke δ_1 entspricht einem Ausgleich der schraffierten Flächen.

Den Verlauf des Widerstands zeigt Bild 5-4 oben: Dargestellt ist das Verhältnis C_f'/C_{f0} des Fanning-Widerstandsbeiwertes mit Luft zum Reinwasserwiderstand, und zwar in Funktion der maximalen Luftkonzentration \bar{C}_* und der Reynoldszahl Re_L (auf die Plattenlänge bezogen). Bild 5-4 unten zeigt die Verteilung der Gaskonzentration \bar{C} in der Grenzschicht für verschiedene Fließgeschwindigkeiten U_∞ und variable Luftzufuhr, repräsentiert durch den "Injektionsparameter" j , den Quotienten aus dem "normalized gas injection flow" und U_∞). Die Reynoldszahlen $Re_L = 0.32 \cdot 10^7$, $0.48 \cdot 10^7$ und $0.8 \cdot 10^7$ entsprechen den Geschwindigkeiten 4.36, 6.55 und 10.9 m/s. Die Kurven "1", "2" und "3" des oberen Bildes gelten also für die Konzentrationsverteilungen von c), b) und a) des unteren, und zwar in dieser Reihenfolge.

Wie schon bei Eddington (1970) fällt der Widerstand auch hier drastisch ab. Im Detail ergeben sich aber Abweichungen: Zum einen messen die Autoren für kleine Luftkonzentrationen sogar eine leichte Erhöhung. Zum andern besteht offenbar eine Abhängigkeit von der Reynoldszahl: Für festgehaltene Reynoldszahlen sinkt der Widerstand mit wachsendem Luftgehalt nämlich auf ein Minimum, um danach wieder anzusteigen.

c) Untersuchungen an der Pennsylvania State University

In den USA nehmen Madavan et al. (1984, 1985a) – nach einem ersten Anlauf von McCormick & Bhattacharya (1973) – die Forschung zur Widerstandsminderung durch Gasblasen wieder auf. Die Versuche wurden in einem 762 mm langen, 500 mm breiten und 114 mm hohen Tunnel durchgeführt. Die gemessene Verdrängungsdicke δ_1 (vgl. Bild 5-5) betrug auch bei der letzten Messstelle maximal 1 bis 2 mm. Die Grenzschicht, deren Bildung etwa beim Tunneleingang einsetzte, blieb also mindestens um eine Größenordnung unter der Tunnelhöhe.

Die Versuchsanordnung war ähnlich wie bei den Experimenten aus Novosibirsk. Im Tunnelboden befand sich eine poröse Metallplatte, durch welche Luft eingepresst werden konnte. Der Tunnel war um seine Achse drehbar, so dass die Luft auch an der Seitenwand oder an der Decke statt am Boden zugeführt werden konnte. Die

Porengrösse betrug üblicherweise $0.5 \mu\text{m}$, zu Vergleichszwecken wurden aber auch Versuche mit $100 \mu\text{m}$ gefahren.

Im Gegensatz zu den Arbeiten aus Novosibirsk wurden hier keine Konzentrationsverteilungen gemessen. Die Beobachtung von Bogdevich et al. (1977), wonach in unmittelbarer Wandnähe keine Luftblasen vorkommen, wird aber bestätigt.

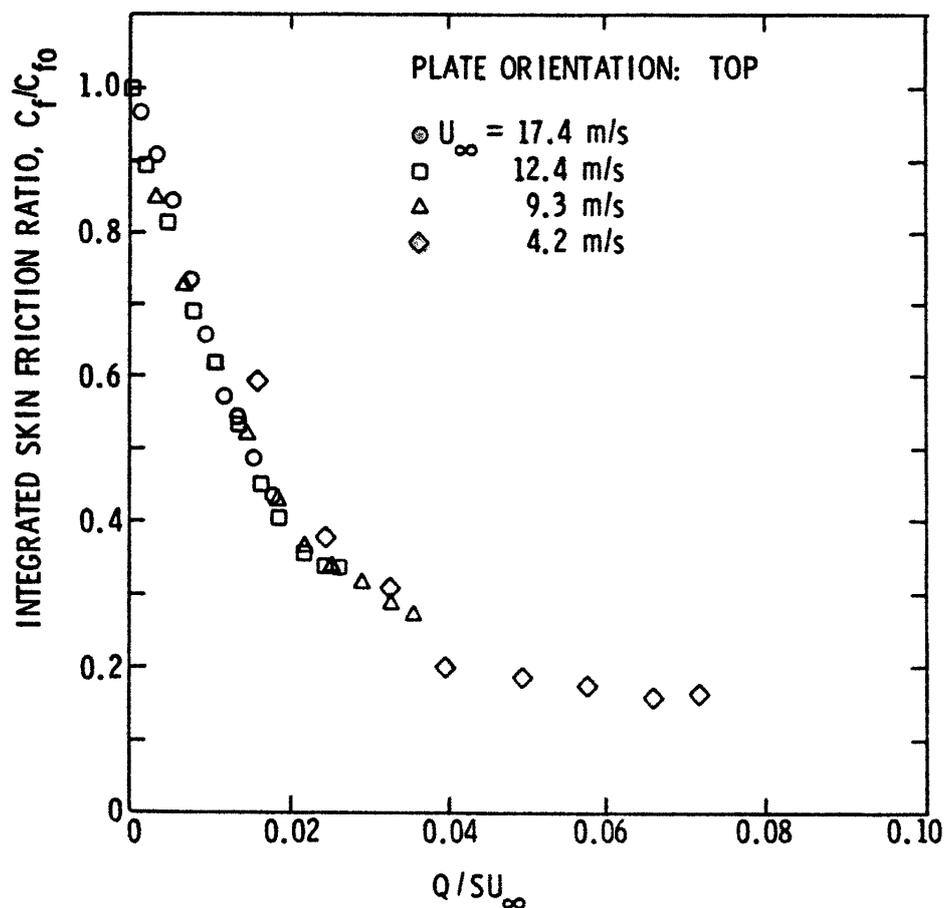


Bild 5-6: Madavan et al. (1984): C_f/C_{f0} in Funktion der Lufteintragsrate. Q bezeichnet den Lufteintrag, S die Fläche der porösen Platte, durch welche die Luft eingepresst wird. Q/S ist also die gemittelte Vertikalkomponente der Geschwindigkeit der Luft beim Eintritt in den Tunnel. Die Abszisse ist der Quotient dieser Vertikalkomponente mit U_∞ und kann als Eintrittswinkel aufgefasst werden. Dieser dient hier als grobes Mass für die Konzentration.

Auch den starken Widerstandsabfall, teilweise auf unter 20% des Reinwasserwerts, können Madavan et al. (1984) in ihren Experimenten reproduzieren (Bild 5-6). Der Abfall ist in der Regel grösser, wenn die Luft an der Decke statt am Boden eingepresst wird; er hängt also vom Auftrieb und damit von der Konzentrationsverteilung ab. Hingegen spielt die Fliessgeschwindigkeit keine Rolle: Wird die Konzentration konstant

gehalten, so fallen die C_f -Kurven für eine bestimmte Versuchsanordnung weitgehend zusammen.

Es werden auch Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht mit und ohne Luft verglichen (Bild 5-7). Sie zeigen im belüfteten Fall ganz leicht reduzierte Werte, welche die Autoren als "nicht dramatisch" werten. Immerhin suggeriert das Bild aber doch eine Veränderung des Gradienten, welche wenig auffällt, weil das Querschnittsmittel der Geschwindigkeit in beiden Fällen gleich ist. Zudem konnte der interessanteste Bereich unmittelbar an der Wand offenbar nicht gemessen werden.

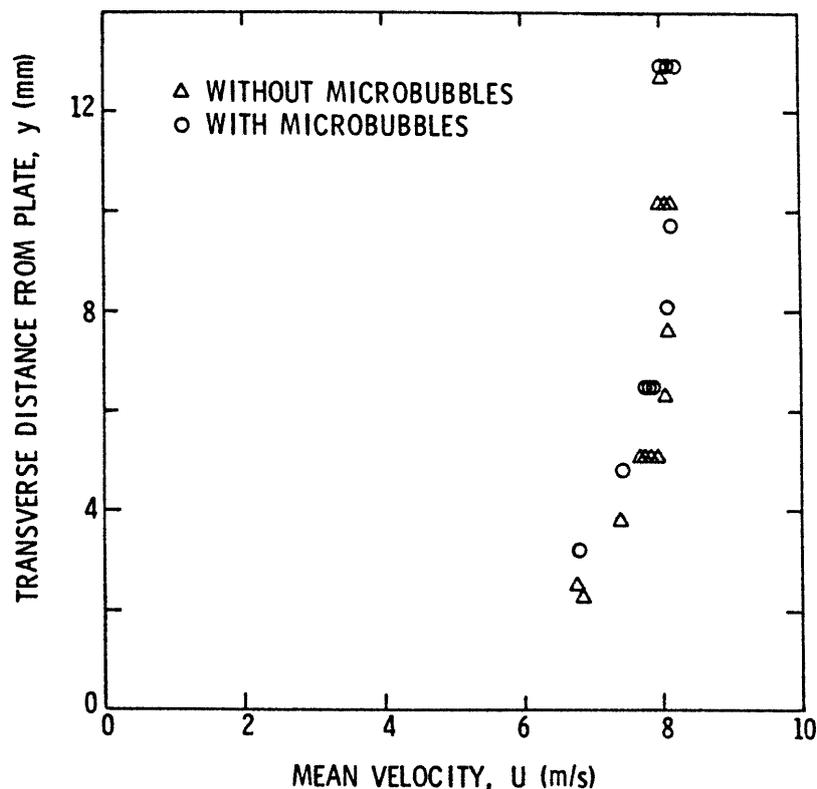


Bild 5-7: Madavan et al. (1984): Gemessene Geschwindigkeitsprofile mit und ohne Luft.

5.3 Wasserbauliche Untersuchungen und empirische Auswertungen

5.3.1 Konventionelle Schussrinnen

a) Versuche in St. Anthony Falls

In den Fünfzigerjahren des letzten Jahrhunderts führte das Labor von St. Anthony Falls an der University of Minnesota ein Versuchsprogramm zu Wasser-Luft-Zweiphasenströmungen durch. Es waren die ersten umfassend angelegten wasserbaulichen Versuche zu diesem Thema, und sie werden entsprechend oft zitiert. Untersucht

wurden *selbstbelüftete* Abflüsse, und zwar in einer 15.2 m langen und 46 cm breiten Stahlrinne. Die Rinnenneigung variierte zwischen 7.5° und 75° , der spezifische Abfluss zwischen 0.14 und $0.93 \text{ m}^2/\text{s}$. Die Rinne war gestrichen, um möglichst hydraulisch glatte Verhältnisse erreichen zu können. Straub & Lamb (1956) präsentieren Isotachenauswertungen und schliessen auf einen im Wesentlichen *ebenen* Abflussbereich in Rinnenmitte (Bild 5-9).

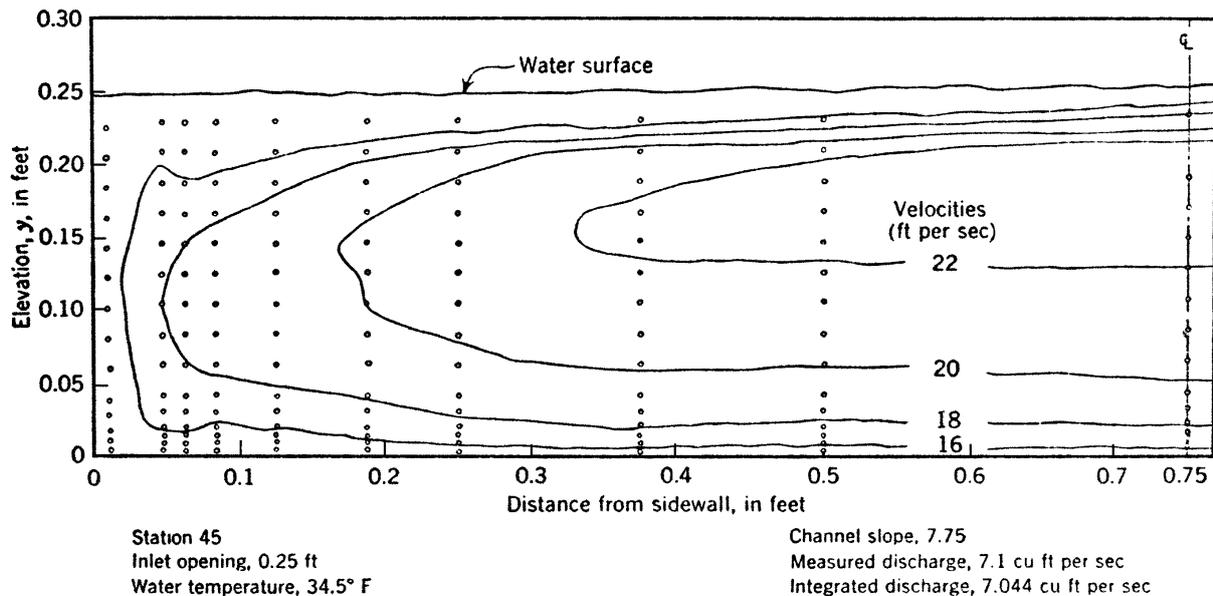


Bild 5-8: Straub & Lamb (1956): Isotachen für eine Neigung von 7.75° und einen Abfluss von 7.1 cfs.

Ziel der Versuche war es, am Ende der Rinne einen *Gleichgewichtszustand* zu erreichen, also ein gleichförmiges Profil sowohl der Geschwindigkeiten als auch der Luftkonzentration. Zu diesem Zweck wurde das Wasser unter Druck zugeführt und mit Hilfe eines Schiebers am Rinnenzulauf reguliert. Gemessen wurde das Luftkonzentrationsprofil am Ende der Rinne. Drei Meter oberhalb wurde ein zweites Konzentrationsprofil aufgenommen, um die Gleichförmigkeit zu kontrollieren. Die Schieberstellung wurde variiert, bis die beiden Profile übereinstimmten.

Da nur selbstbelüftete Abflüsse untersucht wurden, war die lange Rinne primär nötig, um ein gleichförmiges Konzentrationsprofil zu erzeugen, weniger der konstanten Geschwindigkeit wegen. Es wurden Versuche mit und ohne Sohlrauheit gefahren. Währenddem die Länge von 15 m für die raue Oberfläche meistens ausreichte, um den Gleichgewichtszustand zu erreichen, war dies für hydraulisch glatte Verhältnisse nur teilweise der Fall. Die Publikation von Straub & Anderson (1958) zu rauher Sohle ist denn auch umfassender und bekannter.

Raue Sohle

Straub & Anderson (1958) geben die Korngrösse der von ihnen applizierten Sohlrauheit mit 0.028 in. (= 0.71 mm) an, den Kornabstand mit 0.039 in (0.99 mm). Die Seitenwände blieben gestrichen. Das Verhältnis Reinwassertiefe zu Breite lag bei maximal 22%, in den meisten Fällen aber unter 15%. Die Autoren verneinen einen nennenswerten Einfluss der Seitenwände.

Tab. 5-2 gibt eine Übersicht über die Versuche und die erreichten mittleren Luftkonzentrationen C . C ist bei Straub & Anderson über $d_m = d_{.99}$ gemittelt, d.h über denjenigen Wandabstand y , bei dem die lokale Luftkonzentration 99% betrug (bei Straub & Lamb 1956 noch über $d_{.95}$).

Tab. 5-2: Übersicht über die von Straub & Anderson (1958) gefahrenen Versuche mit den untersuchten Rinnenneigungen θ und Abflüssen Q sowie den gemessenen mittleren Luftkonzentrationen C [%].

θ [°]	Q [cfs] =											
	2.2	3.2	4.2	5.2	6.4	7.2	8.2	9.6	11.2	12.1	12.8	15.0
7.5°	29%	26%	26%	24%	24%	23%	23%	23%				
15.0°	35%	35%	35%	34%	36%	36%	33%	32%				
22.5°	44%	41%	44%	41%	43%	42%	40%	39%			35%	
30.0°	54%	54%	53%	52%	50%	49%	49%	47%	47%	43%	47%	
37.5°	70%	68%	68%	67%	64%	62%	60%	57%	56%		56%	50%
45.0°	72%	74%	75%	74%	72%	70%	68%	65%	61%		58%	49%
60.0°	79%	79%	78%	77%	77%	76%	76%	74%				
75.0°	82%	84%	81%	83%	82%	80%	80%	78%				

Straub & Anderson stellen auch Überlegungen zu den Reibungsverlusten an. Ein *Direktvergleich* mit gleichen Neigungen und gleich grossen, aber unbelüfteten Abflüssen war nicht möglich, weil die Selbstbelüftung ja nicht zu verhindern war. Sie führen deshalb den Vergleich über Versuche mit viel geringeren Neigungen von 1° bis 6.5°, bei welchen noch keine Selbstbelüftung stattfand. Daraus schliessen sie auf einen Chézy-Beiwert von 90.5 ft^{1/2}/s. Sie extrapolieren das entsprechende Gesetz

$$U_w = 90.5 \frac{\sqrt{ft}}{s} \sqrt{d_0 S}$$

auf die effektiv untersuchten Neigungen von 7.5° bis 75° und erhalten so ihre – hypothetischen – Reinwasser-Referenzgeschwindigkeiten U_w . Der Vergleich mit den gemessenen Geschwindigkeiten des belüfteten Abflusses liefert das Diagramm in Bild 5-9: Es belegt eine markante Zunahme der Geschwindigkeiten mit zunehmender Luftkonzentration.

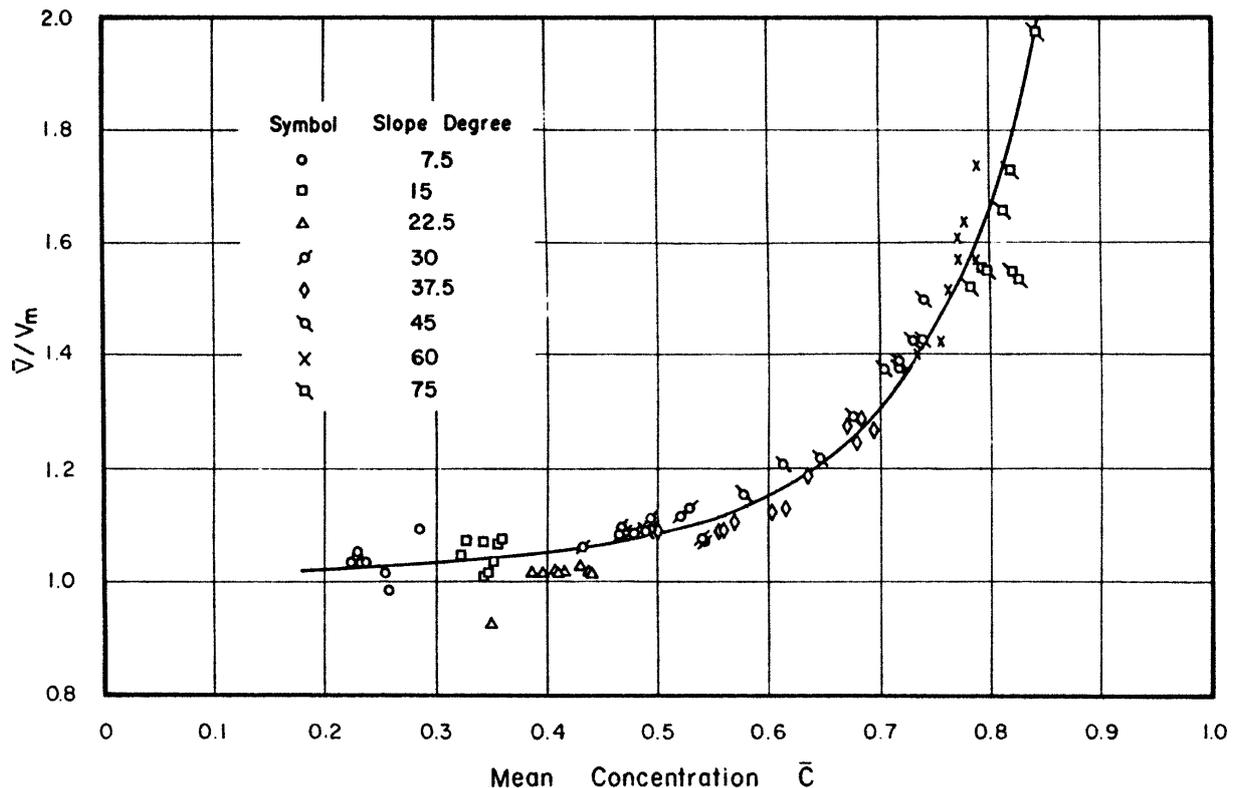


Bild 5-9: Straub & Anderson (1958): Einfluss der mittleren Luftkonzentration – hier mit \bar{C} bezeichnet – auf die Geschwindigkeit des belüfteten Abflusses. Achtung: V_m und \bar{V} bezeichnen hier die mittleren Geschwindigkeiten ohne bzw. mit Lufteintrag. V_m wurde aus Messungen an kleineren Gefällen extrapoliert.

Glatte Sohle

Die Versuche auf glatter Sohle sind viel weniger ausführlich und ohne tabellierte Messresultate publiziert (Straub & Lamb 1956, Anderson 1965). Sie wären für eine genauere Auswertung in diesem Rahmen ohnehin wenig geeignet, weil der Gleichgewichtszustand nur für die kleineren Abflüsse erreicht wurde.

Bemerkenswert sind immerhin die Beispiele zum Lufteintrag in Bild 5-10: Währenddem die beiden Konzentrationsprofile im linken Beispiel mit schwacher Rinnenneigung praktisch gleich sind – der Höhenversatz dürfte einfach von der unterschiedlichen Geschwindigkeit bzw. Reinwassertiefe herrühren –, zeigt das rechte Beispiel mit einer Neigung von 45° einen eklatanten Unterschied: Die Luft wird auf rauher Sohle viel schneller eingetragen als auf der glatten. Da es sich im letzteren Fall kaum um einen Gleichgewichtszustand handelt, ist es denkbar, dass sich die Profile nach längerer Laufstrecke wieder angleichen würden.

Insgesamt sind die Aussagen von Straub & Lamb (1956) sowie Anderson (1965) zu glatter Sohle zu einem guten Teil qualitativer Art.

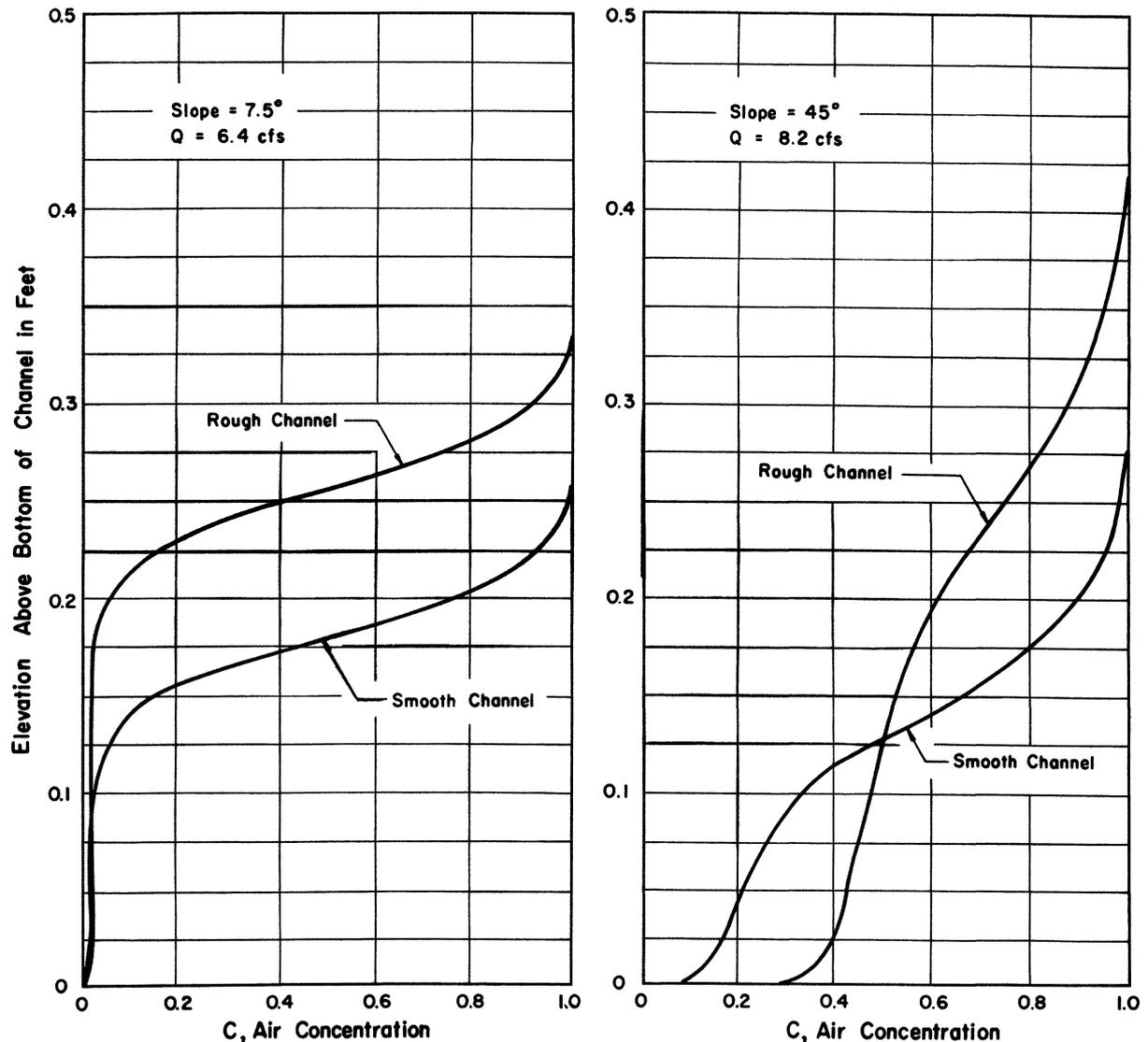


Bild 5-10: Anderson (1965): Konzentrationsprofile für rauhen und glatten Abfluss.
 Links: Neigung 7.5° , $Q = 6.4$ cfs; mutmasslich im Gleichgewicht.
 Rechts: Neigung 45° , $Q = 8.2$ cfs; der glatte Abfluss mutmasslich nicht im Gleichgewicht.

b) Auswertungen von Wood (1983, 1985, 1991)

Frage der Gleichförmigkeit

Wood (1983) analysiert die Daten von Straub & Anderson (1958) neu. Er geht davon aus, dass die mittlere Luftkonzentration wie auch die Konzentrationsprofile – auf die Abflusstiefe normiert – nur vom Gefälle abhängen sollten. Wood (1991) begründet diese Annahme mit einer Dimensionsanalyse, in welcher allerdings die *Oberflächenspannung nicht vorkommt*.

Zur Überprüfung seiner These berechnet er die Tiefenmittel der Luftkonzentration, für welche dies dann ebenfalls gelten müsste, neu und trägt sie gegen den Abfluss auf (Bild 5-11, links). Er stellt fest, dass in einem geschlossenen Bereich im rechten Teil

des Diagramms doch eine Abhängigkeit vom Abfluss besteht, und postuliert, dass die betreffenden Versuchsläufe keinen Gleichgewichtszustand repräsentieren. Woods Test zeigt übrigens ein noch deutlicheres Resultat, wenn man statt des Mittels C den Sohlwert c_0 auswertet (Bild 5-12, links).

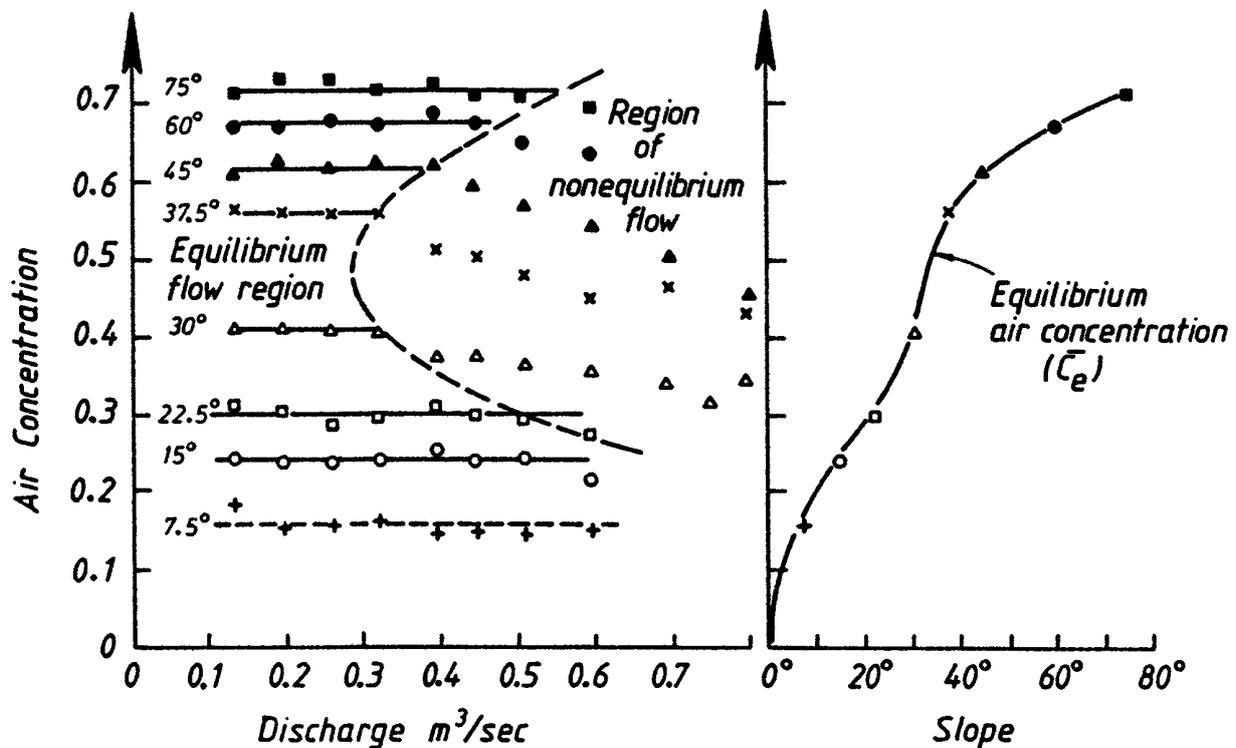


Bild 5-11: Wood (1985): Die mittleren Luftkonzentrationen C (hier mit \bar{C}_e bezeichnet) aus den Versuchen von Straub & Anderson (1958), aufgetragen gegen die gefahrenen Abflüsse. Rechts die Gleichgewichtskonzentration nach Wood in Abhängigkeit vom Neigungswinkel. (Die Ordinate ist für beide Graphiken die mittlere Luftkonzentration C bzw. \bar{C}_e).

Dementsprechend teilt Wood die Messresultate ein in solche, welche einen Gleichgewichtszustand repräsentieren und solche, bei denen dies nicht der Fall sei. Diese Unterscheidung trifft er übrigens nur im Hinblick auf die Konzentrationsverteilung, nicht auf die Analyse des Widerstandsverhaltens.

Nun traf man aber in St. Anthony Falls – und Wood hält dies auch fest – durchaus Vorkehrungen, um einen gleichförmigen Abflusses sicherzustellen (s. oben). Als alternative Ursache für die von Wood festgestellte Abhängigkeit käme der Einfluss der Seitenwände in Frage. Zwar zeigt das Isotachenbild von Straub & Lamb (1956) einen ebenen Abfluss in Rinnenmitte. Rechnet man aber das Verhältnis U_{Wand}/U der Geschwindigkeiten mit und ohne Wandeinfluss, so erhält man Bild 5-12 (rechts). Hierbei liegt jedem der fiktiven Teilquerschnitte das logarithmische Widerstandsgesetz

und – dies ist die übliche Annahme bei der Berechnung zusammengesetzter Querschnitte – die gleiche mittlere Geschwindigkeit zugrunde. Selbst wenn diese Annahme nicht vollständig zutreffen mag, ist der zusätzliche benetzte Umfang an der Wand auch bei vollständig glatter Ausführung nicht ohne Einfluss auf den Gesamtwiderstand.

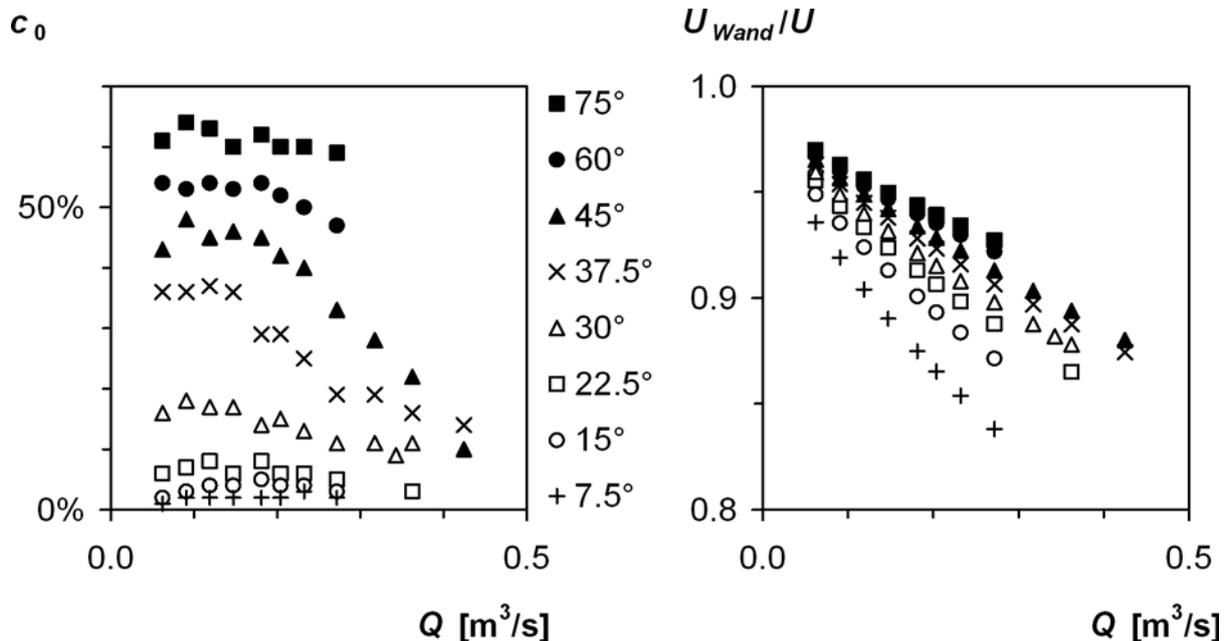


Bild 5-12: Links: Sohlluftkonzentrationen nach Straub & Anderson (1958).

Rechts: Geschätztes Verhältnis der Geschwindigkeiten mit und ohne Wandeinfluss (rechts) für die Messungen von Straub & Anderson in Abhängigkeit des Abflusses für eine Wandrauheit von 0.05 mm.

Verteilung der Luftkonzentration über den Querschnitt

Wie oben ausgeführt betrachtet Wood (1983) nur diejenigen Versuchsläufe von Straub & Anderson (1958) als gleichförmig, welche nach Bild 5-11 den Gleichgewichtszustand erreicht haben. Deren Konzentrationsprofile fallen jeweils auch ungefähr zusammen. Bild 5-13 gibt diese Gleichgewichts-Profile wieder.

Wie man aus Bild 5-13 und zusammengefasst aus Bild 5-18 ersehen kann, bleibt die Sohlluftkonzentration c_0 für Neigungswinkel θ unter etwa 20° im Bereich weniger Prozente. Danach nimmt sie stark zu und erreicht bei 40° schon über 40%. Bei noch steileren Rinnen verläuft die weitere Zunahme wieder flacher.

Widerstand

Was den Widerstand anbelangt, basiert Woods Analyse auf einem dimensionsanalytisch begründeten Ansatz für den Widerstandsbeiwert f_e des Gemischabflusses im Gleichgewichtszustand. Er definiert f_e ("equilibrium") wie folgt:

$$8g \cdot S \cdot \frac{d_0^3}{q^2} \quad (= 8g \cdot S \cdot \frac{d_0}{U^2}) = f_e = \Phi \left[\frac{d_0}{k}, Re, C \right] , \quad (5-1)$$

Hierbei sind d_0 die Reinwassertiefe, q der spezifische (Wasser-) Abfluss, U die (Wasser-) Geschwindigkeit und C die Luftkonzentration, welche er – im Gegensatz zu Straub & Anderson (1958) – über $d_{,90}$ mittelt. Ein wichtiger Aspekt von Ansatz (5-1) ist, wie sich später zeigen wird, die Einführung der Reinwassertiefe d_0 in der eingeklammerten Form des linken Terms.

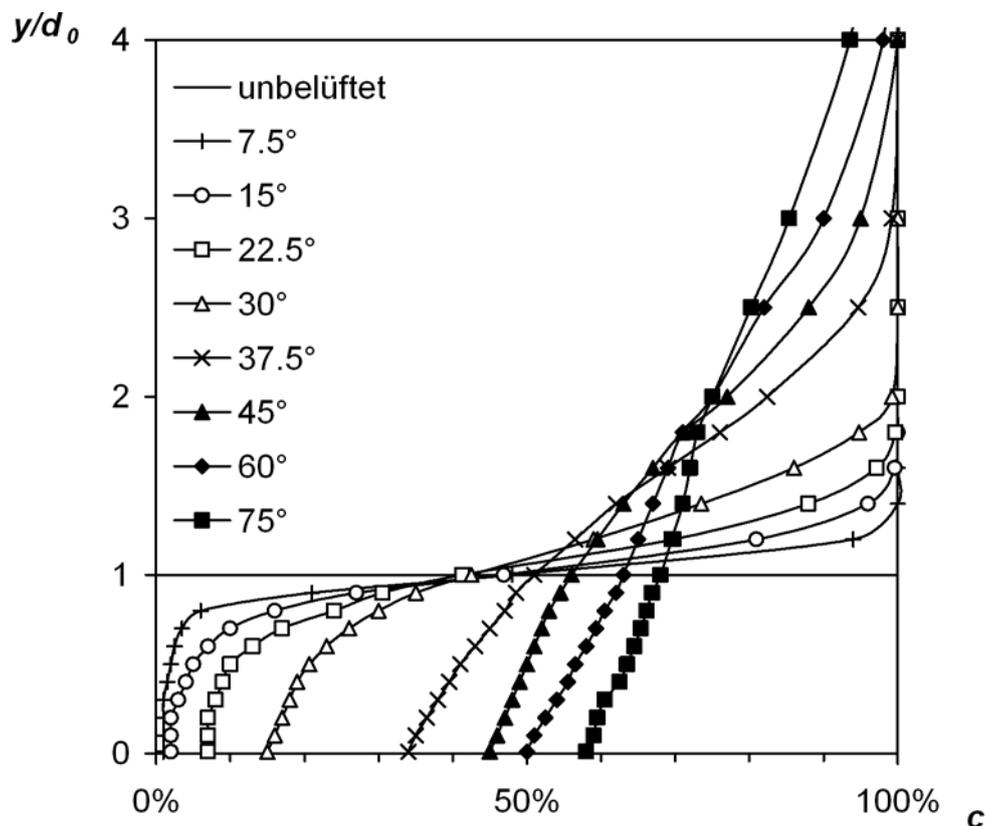


Bild 5-13: Ungefähre Verteilung der Luftkonzentration über den Querschnitt im Gleichgewichtszustand, ermittelt analog zu Wood (1983) auf der Basis der Daten von Straub & Anderson (1958).

Wood (1983) trifft nun die Hypothese, der Ansatz (5-1) lasse sich entkoppeln:

$$f_e = \Phi_1 \left[\frac{d_0}{k}, Re \right] \cdot \Phi_2 [C] = f \cdot \Phi_2 [C] . \quad (5-2)$$

Zuerst könnte also der Widerstandsbeiwert im Reinwasser f konventionell als Funktion der relativen Rauheit und der Reynolds-Zahl berechnet und dann mit dem Quotienten $f_e/f = \Phi_2 [C]$ modifiziert werden. Dieser wäre einzig eine Funktion der mittleren Luftkonzentration. – Dieser entkoppelte Ansatz ist bestechend einfach und

wurde in ähnlicher Art auch von späteren Autoren verwendet, zum Beispiel von Chanson (1994b, 1996).

Die entsprechende Auswertung der Daten von Straub & Anderson führt Wood (1983) zu einem Diagramm für f_e , welches in Bild 5-14 wiedergegeben ist, zunächst allerdings noch ohne die beiden Zweitachsen. Die Punkte fallen weitgehend auf eine Linie, was als Bestätigung seiner Hypothese (5-2) gelesen werden kann. Was den Verlauf des Widerstands mit zunehmender mittlerer Luftkonzentration C anbelangt, zeigt das Diagramm für kleine C zunächst keinen Einfluss. Ab Werten von etwa 20% wird aber eine Wirkung erkennbar und ab 30% fällt der Widerstand dann drastisch ab. Für sehr hohe C beträgt er nur noch einen Bruchteil der Reinwasserwerte.

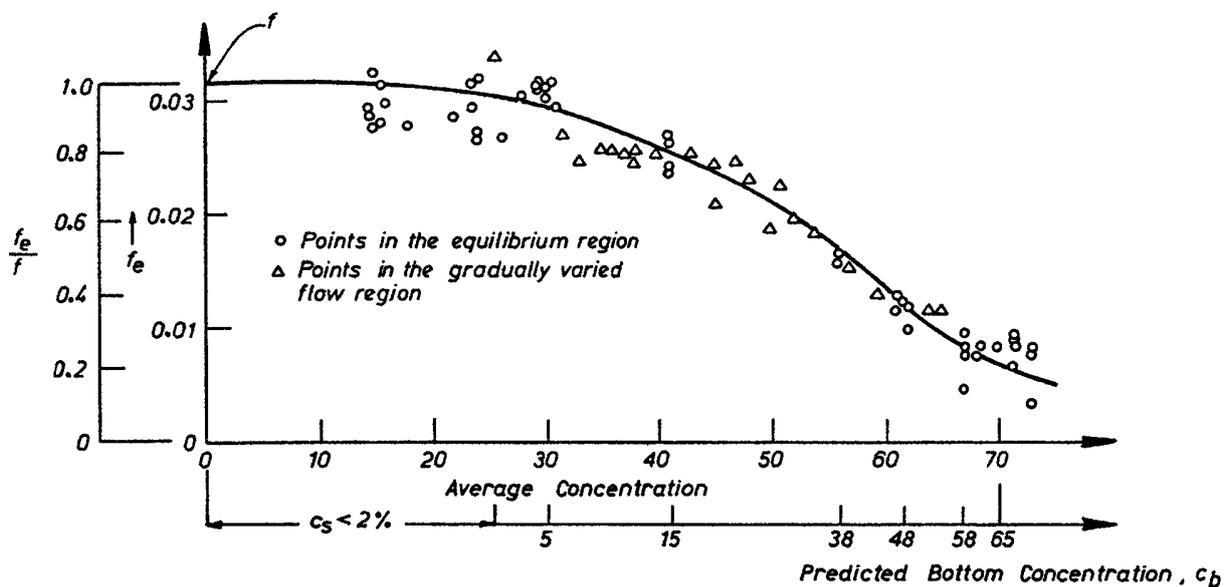


Bild 5-14: Wood (1991): Widerstandsminderung in Abhängigkeit der mittleren und der Sohl-Luftkonzentration. Bezeichnungen:

- f Widerstand ohne Luftaufnahme
- f_e Widerstand mit Luftaufnahme ("equilibrium", im Gleichgewicht)
- \bar{C}_e mittlere Luftkonzentration (über $y_{0,9}$ gemittelt)
- C_b Sohl-Luftkonzentration.

1985 stellt Wood eine zweite Ordinate für f_e/f bei, indem er davon ausgeht, dass dieser Faktor für kleine Luftkonzentrationen gegen 1 tendiert. Es ist zu beachten, dass er damit implizit den Widerstandsbeiwert des unbelüfteten Referenzabflusses für alle Neigungswinkel gleich ansetzt, nämlich beim Grenzwert für kleine Winkel ($f \approx 0,032$).

Die zweite Abszisse schliesslich ergänzt Wood erst 1991. Sie ordnet dem Tiefenmittel C den jeweils erreichten Sohlwert c_0 zu. Sie ist besonders interessant: Entzerrt man sie nämlich, so verlagert sich die von Wood gezeichnete Kurve aus Bild 5-14 entsprechend Bild 5-15 nach unten.

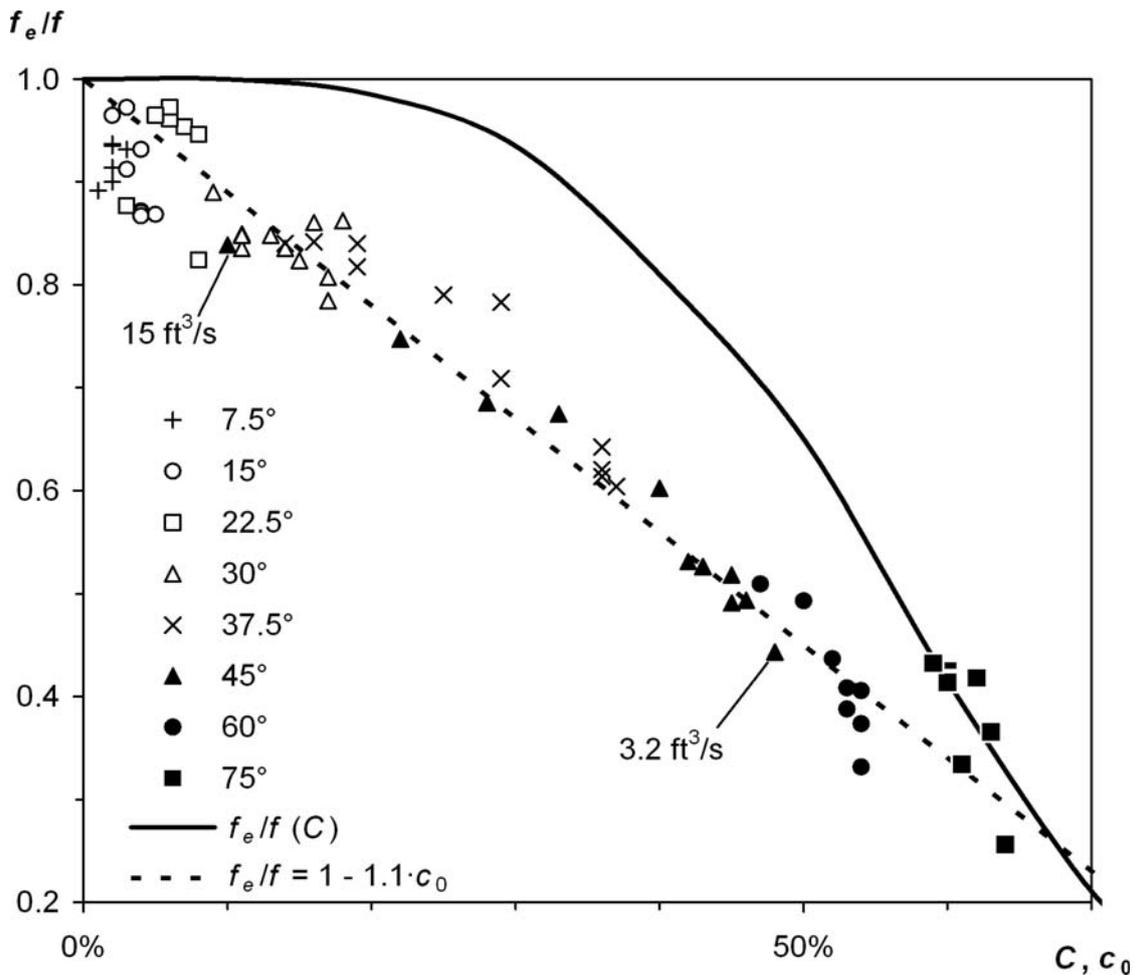


Bild 5-15: Entzerrung der c_0 -Achse im Diagramm nach Wood. Fett die Kurve nach Wood, also in Abhängigkeit von C . Gestrichelt die Näherung für die nach c_0 entzerrte Darstellung.

Die neue Kurve f_e/f in Funktion von c_0 kann mit einer Geraden angenähert werden:

$$\frac{f_e}{f} = 1 - 1,1 c_0 . \quad (5-3)$$

Betrachtet man die Reduktionen von Bogdevich et al. (1977) in Bild 5-4, so fällt auf, dass diese recht nahe bei den nach c_0 entzerrten Werten in Bild 5-15 liegen.

Allerdings bezweifelt Wood (1991) die Höhe der von Straub & Anderson (1958) angegebenen Sohlluftkonzentrationen.

Das wichtigste Resultat der Arbeiten von Wood für die vorliegende Fragestellung ist indes, dass der Einfluss der Luft nach (5-2) zu einem guten Teil *im Vergleich* mit dem Reinwasserabfluss quantifiziert wird. Die exakte Berechnung der *absoluten* Grössen verliert dann etwas an Bedeutung.

c) Auswertungen von Chanson (1994b, 1996)

Chanson stellt eine Fülle von Messungen an Modellen und an Prototypen konventioneller Schussrinnen zusammen. Analog zu Wood (Bild 5-14) trägt er die Widerstandsminderung in Abhängigkeit von C auf (Bild 5-16). Wenngleich die Streubreite beträchtlich ist, bestätigt das Bild den Widerstandsabfall eindrücklich. – Allerdings kommen die in die Graphik ebenfalls eingetragenen Messungen von Straub & Anderson (1958) tiefer zu liegen als bei Wood. Dies liegt nach Boes (2000), S. 40 und S. 183, daran, dass Chanson den unbelüfteten Referenzwert f anders bestimmt, nämlich auf der Basis der Formel von Hartung & Scheuerlein (vgl. Abschnitt 5.3.3).

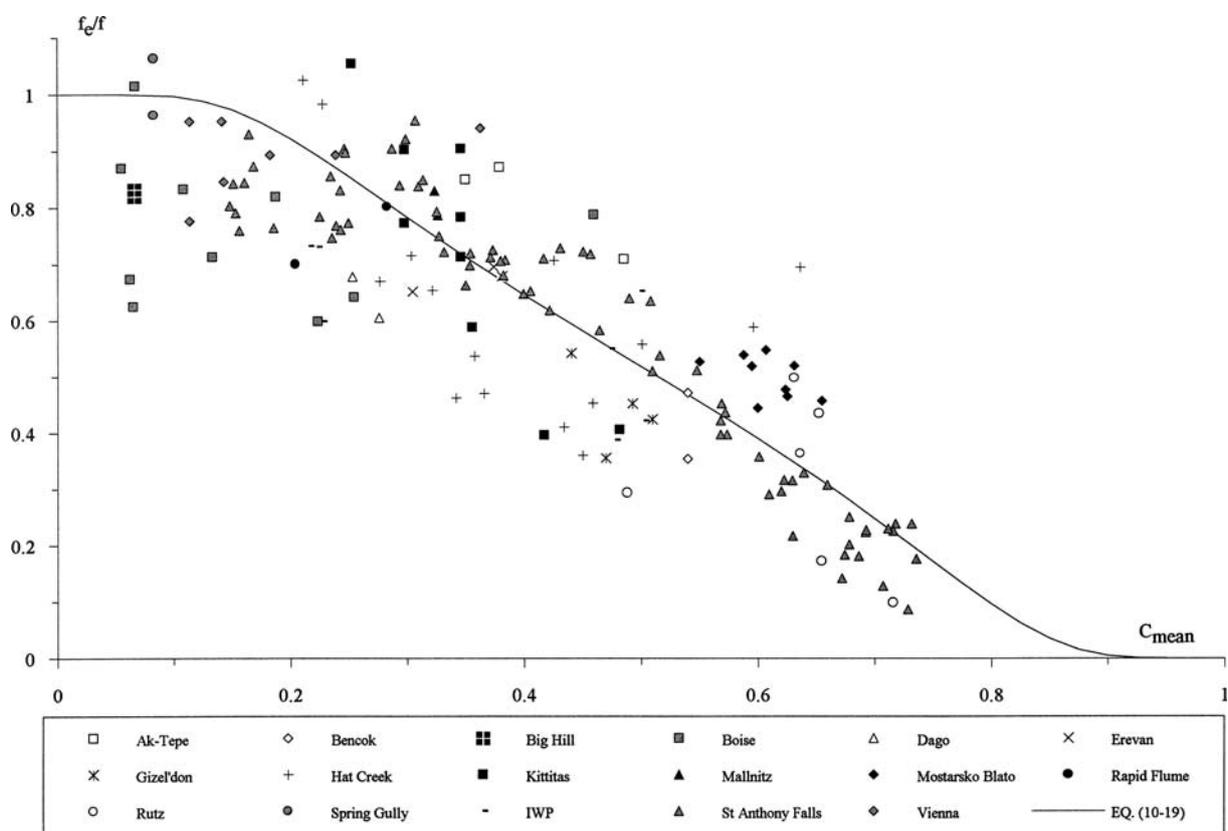


Bild 5-16: Chanson (1996): Relative Widerstandsminderung; "EQ. (10-19)" ist Gleichung (5-4). Bezeichnungen s. Bild 5-14.

Chanson analysiert die Daten und präsentiert für konventionelle Schussrinnen folgende empirische Gleichung:

$$\frac{f_e}{f} = 0.5 \left(1 + \tanh \left(0.628 \frac{0.514 - C}{C(1 - C)} \right) \right) \quad (5-4)$$

d) Verteilung der Luftkonzentration nach Hager (1991)

Hager führt die Auswertungen von Wood (1985) weiter. Er übernimmt Woods Annahme, dass Messpunkte, die gemäss Bild 5-11 den Gleichgewichtszustand nicht

erreicht haben, nicht repräsentativ sind. Faktisch orientiert er sich also weitgehend an den *kleineren* von Straub & Anderson (1958) gefahrenen Abflüssen.

Er präsentiert ein Formelset für die Verteilung der Luftkonzentration $c = c(y)$ im Gleichgewichtszustand. Dieses Formelset wurde z.T. auch für diese Arbeit verwendet, und zwar in der Form:

$$c = c_0 + p_c(90\% - c_0) ,$$

mit

$$p_c = 1.05 e^{-0.54(y^* + 0.3)^2} , \quad y^* = \left(1 - \frac{y}{y_{0.9}}\right) Y_0 , \quad Y_0 = \frac{2}{\sqrt{S}} ,$$

$$c_0 = \text{Min}(1.25 \theta^3; 0.65 S) \quad (\theta \text{ in rad!}, S = \sin \theta). \quad (5-5)$$

$y_{0.9}$ kann aus den Daten von Straub & Anderson (1958) herausgelesen werden. Der Verlauf ist in Bild 5-17 dargestellt.

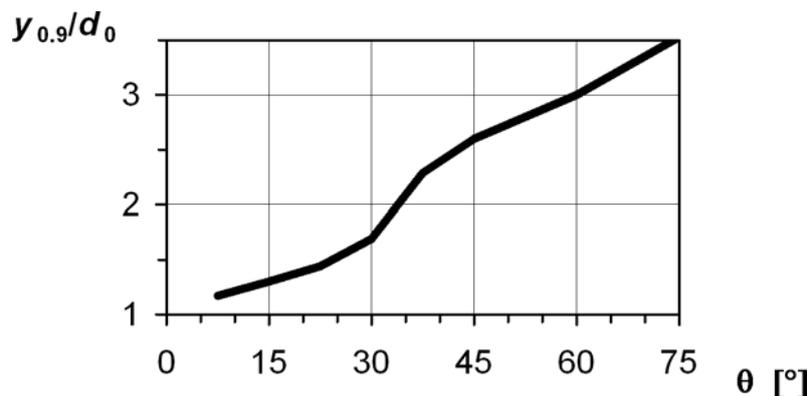


Bild 5-17: Verlauf von $y_{0.9}/d_0$ mit dem Neigungswinkel.

Hagers Fit (5-5) für c_0 bringt die sprunghafte Zunahme von zwischen 30° und 40°, wie sie aus den Bildern 5-12 (links) und 5-13 hervorgeht, deutlich zum Ausdruck.

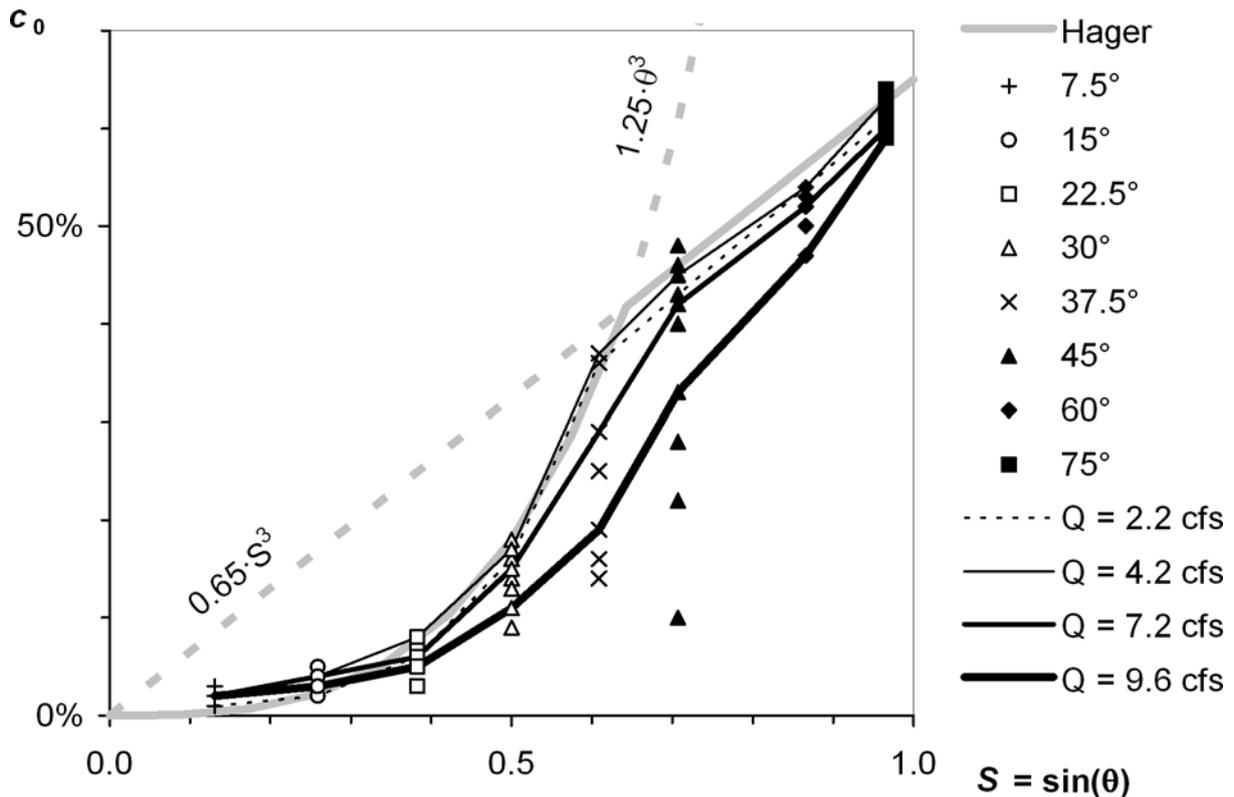


Bild 5-18: Sohlluftkonzentration c_0 : Messpunkte von Straub & Anderson (1958); Die Messpunkte für die Abflüsse 2.2, 4.2, 7.2 und 9.6 cfs sind zur besseren Übersicht jeweils mit Linien verbunden. Grau: Approximation (5-5) nach Hager (1991).

5.3.2 Treppenschussrinnen

a) Allgemeines

Seit den Achtzigerjahren des letzten Jahrhunderts finden Roller Compacted Concrete Dämme (RCC-Dämme) breite Anwendung. Statisch wirken sie in der Regel als Gewichtsmauern und haben auch den gleichen Querschnitt wie konventionelle Vollmauern. Der Unterschied liegt im Bauverfahren: Der Beton wird nicht gegossen und vibriert, sondern geschüttet und anschliessend gewalzt. Dies geschieht in Lagen von typischerweise 30 cm Stärke. Der lagenweise Aufbau ergibt auf der Luftseite eine abgetreppte Oberfläche.

Diese letztere Besonderheit legt einen Hochwasserentlastungstyp nahe, der früher nur sporadisch zum Einsatz kam: die Treppenschussrinne oder Kaskade. Sie wird – anschliessend an die Überfallsektion – so ausgebildet, dass jeweils drei bis vier Betonierlagen zu einer Stufe zusammengefasst werden; es entstehen Stufenhöhen im Bereich von 1 m. Die Neigung ist in der Regel gleich der Neigung der Mauerluftseite und liegt also weit über 100%. Der entstehende Abfluss über die Stufen weist als Vorteil eine hohe Energievernichtung schon im Schussrinnenbereich auf. Ausserdem belüftet er sich selbsttätig sehr früh, was der Kavitationsgefahr entgegenwirkt. Die

spezifischen Abflüsse waren zunächst auf ca. 10 bis 15 m^2/s beschränkt, können heute aber auch 25 m^2/s betragen.

Im Zusammenhang mit diesem Schussrinnentypus tauchten neue Fragen auf, welche die wasserbauliche Forschung in den letzten Jahren stark beschäftigt haben; so auch die Frage nach der Energievernichtung und damit nach dem Fließwiderstand an den Stufen. Da der Abfluss wie erwähnt stark belüftet ist, ergeben sich Parallelen zur vorliegenden Fragestellung nach der Widerstandsminderung in konventionellen Schussrinnen.

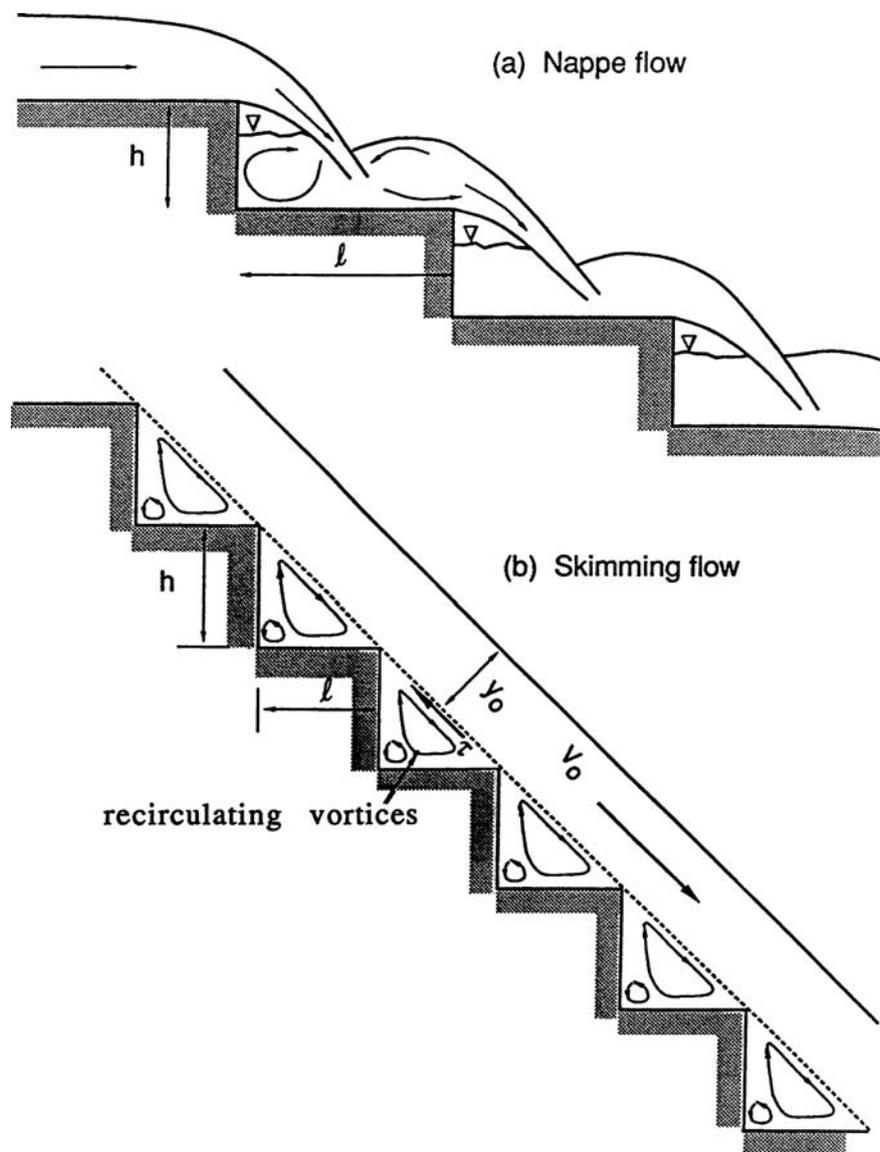


Bild 5-19: Rajaratnam (1990): Kaskadenabfluss (nappe flow) und Gerinneabfluss (skimming flow).

Auf den ersten Blick mag eine Vergleichsbetrachtung mit Treppenschussrinnen nicht unbedingt einleuchten. Treppenschussrinnen weisen aber zwei verschiedene Fließregime auf (Bild 5-19): den Kaskadenabfluss oder *nappe flow* bei niedrigen

spezifischen Abflüssen und den Gerinneabfluss oder *skimming flow* bei höheren. Im zweiten Fall verhält sich eine Treppenschusrrinne, wie Chanson (1994b), festhält, wie eine konventionelle Schusrrinne, so dass für dieses zweite Regime durchaus ein Vergleich zwischen den beiden Schusrrinentypen angestellt werden kann.

b) Boes (2000)

In diesem Zusammenhang wird nur auf die Arbeit von Boes (2000) näher eingegangen, weil er einige Aspekte genauer beleuchtet hat, die im vorliegenden Zusammenhang interessieren.

Boes befasst sich präziser mit der Ermittlung der Widerstandsbeiwerte früherer Autoren. Er stellt fest, dass die Widerstandsbeiwerte im Wesentlichen auf drei verschiedene Arten definiert wurden. Übertragen auf den ebenen Abfluss lauten diese:

$$f_w(U) = \frac{8gd_0^3S}{q^2} = \frac{8gd_0S}{U^2}, \quad (5-6)$$

$$f_w(U_m) = \frac{8gd_0S}{U_m^2}, \quad (5-7)$$

$$f_m = \frac{8gd_m^3S}{q^2} = \frac{8gd_0S}{(1-c)^3U^2} = \frac{f_w(U)}{(1-c)^3}. \quad (5-8)$$

U_m ist die tiefengemittelte Gemischgeschwindigkeit. Bei ihrer Berechnung werden, anders als bei U , die Luft- und Wasseranteile gleich gewichtet:

$$U_m = \frac{1}{d_m} \int_0^{d_m} \bar{u} dy \quad (\text{gegenüber } U = \frac{q}{d_0} = \frac{1}{d_0} \int_0^\infty \bar{u}(1-c) dy).$$

U ist kleiner als U_m , weil der Wasseranteil $1-c$ nach oben hin, wo die Geschwindigkeiten \bar{u} höher werden, abnimmt.

Boes unterscheidet also zwischen dem Widerstandsbeiwert für Gemischabfluss f_m , der "ohne Berücksichtigung der Belüftung" ermittelt wurde, und einem Widerstandsbeiwert f_w "für einen äquivalenten Reinwasserabfluss". Dieser Ausdruck ist missverständlich: Es handelt sich nicht um den unbelüfteten Referenzabfluss nach Abschnitt 6.2.2, sondern um den Widerstandsbeiwert für den belüfteten Abfluss, aber nach (5-6) bzw. (5-7) mit der Reinwassertiefe gerechnet.– Eine zweite Unterscheidung ergibt sich, je nachdem ob zur Berechnung von f_w die mittlere Fließgeschwindigkeit des Wassers U oder aber obige Gemischgeschwindigkeit U_m herangezogen wird, was Boes mit den Symbolen $f_w(U)$ bzw. $f_w(U_m)$ bezeichnet.

Die beiden Ausdrücke für f_w unterscheiden sich nur, weil die Luftkonzentration über den Querschnitt in der Natur variabel ist; für den hypothetischen Fall eines überall

gleichen Luftgehalts ergeben sie dasselbe Resultat. f_m hingegen unterscheidet sich grundsätzlicher. Mit diesem Wert, so Boes, läuft man Gefahr, den Widerstand zu überschätzen. Dies zeigt der Vergleich von (5-6) mit der letzten Form von (5-8). Im Hinblick auf die Dimensionierung der Energiedissipation, welche an die Schussrinne anschliesst, läge man dann auf der unsicheren Seite.

Boes untersucht auch die in Bild 5-16 zusammengestellten Daten von Chanson (1996), welche die Basis für Chansons Näherung (5-4) waren. Boes (2000) S. 183, stellt fest, dass Chanson als unbelüfteten Referenzwert eigentlich den Widerstandsbeiwert für Gemischabfluss verwendet hat und jener also – in Boes' Terminologie – mit f_m zu bezeichnen ist.

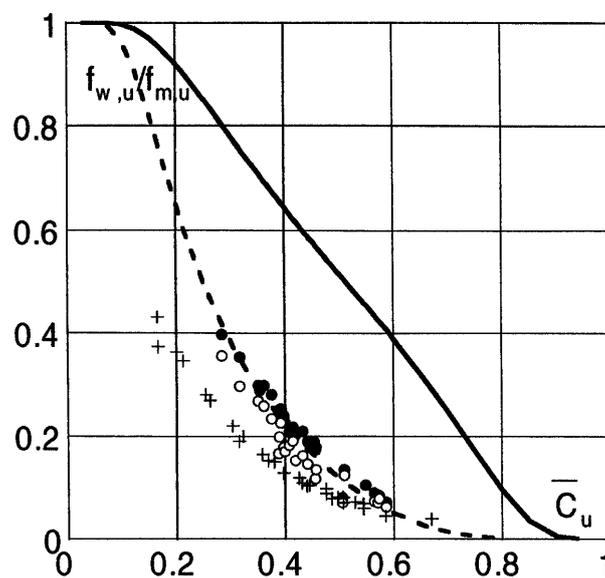


Bild 5-20: Boes (2000): Widerstandsminderung auf Treppenschussrinnen, Darstellung analog zu Bild 5-16. Die ausgezogene Linie entspricht der Näherung (5-4) von Chanson für konventionelle Schussrinnen, gestrichelt ist die Approximation (5-9) von Boes. $f_{w,u}$, $f_{m,u}$ und \bar{C}_u entsprechen den im Text verwendeten Bezeichnungen f_w , f_m und C unter gleichförmigen Bedingungen (Index "u" für "uniform").

Für seine eigenen Betrachtungen berechnet Boes die Widerstandsminderung analog, um die ihm zur Verfügung stehenden Daten für Kaskaden mit Chansons Kurve (5-4) für konventionelle Schussrinnen vergleichen zu können: Bild 5-20 zeigt die Widerstandsabminderungen in Funktion der mittleren Luftkonzentration. Ohne die Graphik im Detail zu kommentieren, bestätigt sich auch bei Kaskaden eine starke Widerstandsabminderung mit zunehmendem Luftgehalt.

Boes gelangt zu einer Approximation der Form:

$$\frac{f_w}{f_m} = 0.5 \cdot \left(1 + \tanh \frac{0.25 - C}{C(1 - C)} \right) \quad (5-9)$$

5.3.3 Raugerinne

Hartung & Scheuerlein (1970) erarbeiten Dimensionierungsgrundlagen für überström-
bare Dämme und untersuchen zu diesem Zweck den Abfluss über steile Raugerinne.
Sie geben für den Widerstandsbeiwert eine Gleichung an, die in folgende Form
umgeschrieben werden kann:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = -3.2 \cdot \log \left(c_1 (1 - C) \frac{k}{4R} \right) \quad (5-10)$$

Der Faktor c_1 hängt vom Gefälle und der Struktur der Rauheit ab und interessiert im
vorliegenden Zusammenhang nicht.

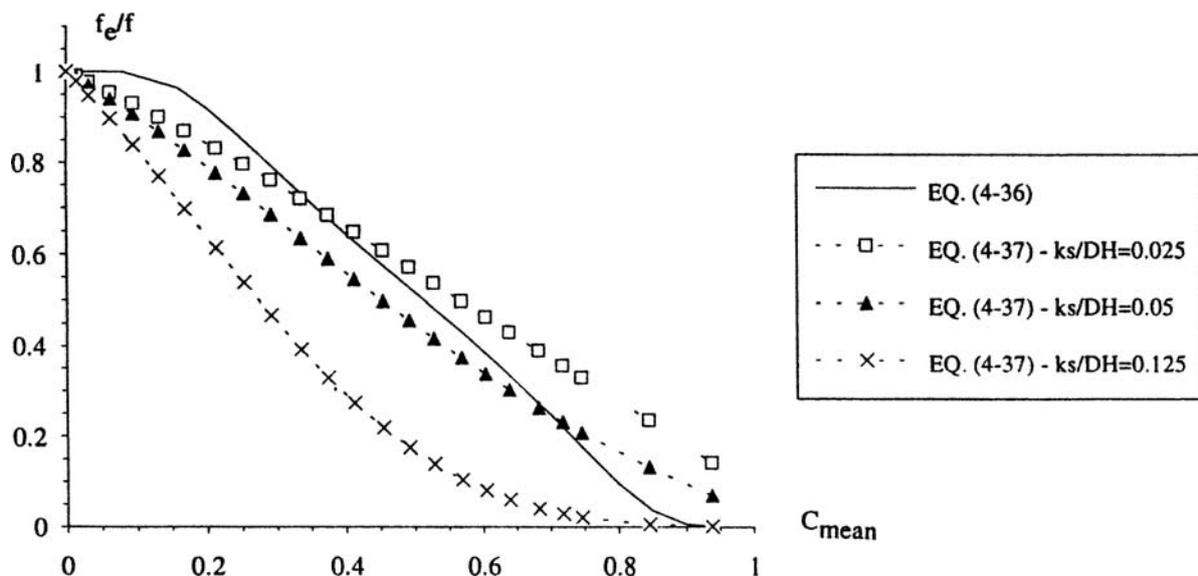


Bild 5-21: Chanson (1994b): Widerstandsabminderung für die Versuche von
Hartung & Scheuerlein (1970); die Gleichungsnummern (4-36) und
(4-37) beziehen sich auf die Gleichungen (5-4) und (5-10), der
Ausdruck k_s/DH ist gleichbedeutend mit $k/(4R)$.

Auch diese Formel zeigt eine Abnahme des Widerstandsbeiwertes mit zunehmender
Luftkonzentration an. Chanson (1994) rechnet sie um und stellt die Resultate wieder in
einem f_e/f -Diagramm dar (Bild 5-21). Die Widerstandsminderungen erreichen dem-
nach ähnliche Größenordnungen wie für Treppenschussrinnen, ja sie übertreffen sie
zum Teil sogar.

Genauer können die Resultate von Hartung & Scheuerlein nicht analysiert werden, weil
die Verteilung der Luftkonzentration nicht bekannt ist.

5.3.4 Geschlossene Kreisrohre im Freilauf

Die Untersuchung von Volkart (1978) zu Abflüssen in steilen Rohren befasst sich u.a. auch mit dem Einfluss des Luftgehalts auf die Fließgeschwindigkeit. Hierzu vergleicht er die aus den Messungen gewonnenen Werte mit den Resultaten einer Senkkurvenberechnung. Der Quotient U/U_w der beiden Geschwindigkeiten ist in Bild 5-22 dargestellt.

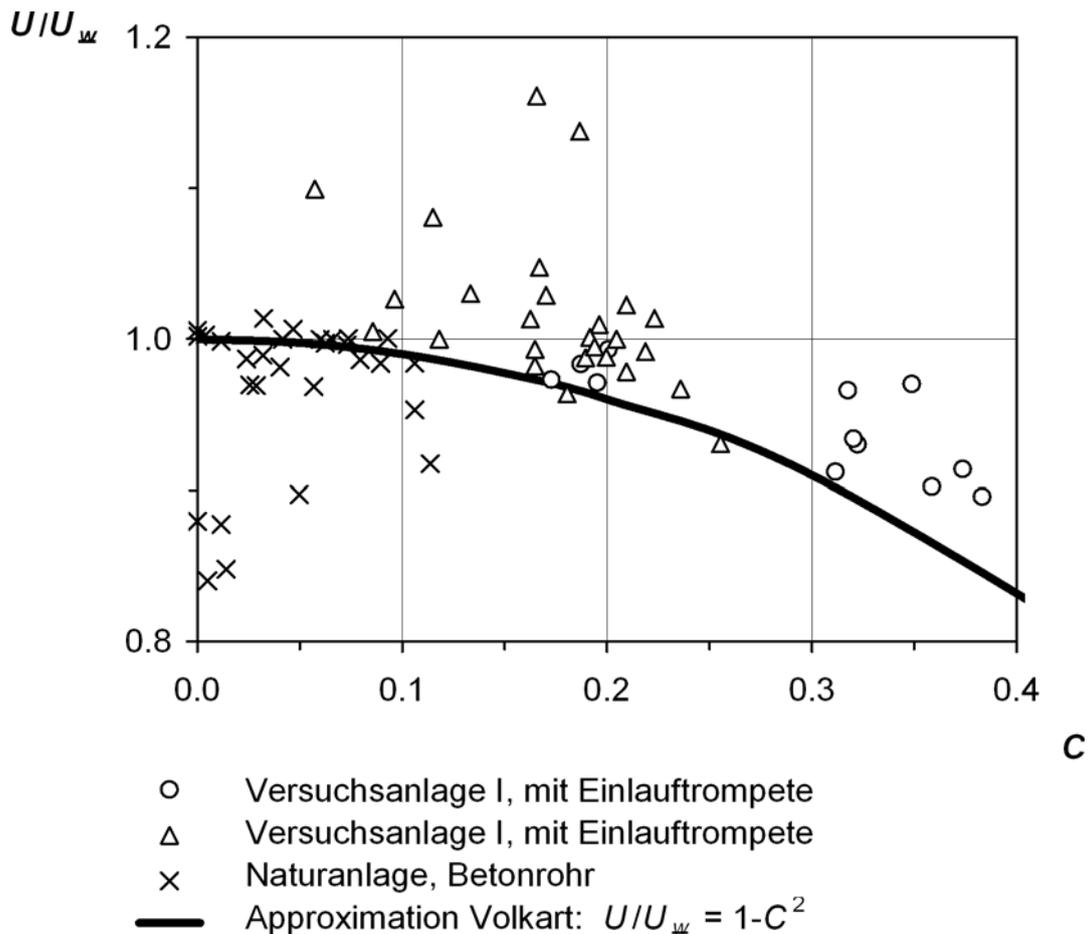


Bild 5-22: Quotient der gemessenen Gemischgeschwindigkeit U zur Reinwassergeschwindigkeit U_w für die Messwerte von Volkart (1978); als Linie eingetragen Volkarts Näherung $U/U_w = 1 - C^2$.

Volkart stellt im Gegensatz zu den meisten anderen Autoren eine *Reduktion* der Geschwindigkeiten fest, welche er mit der Näherung:

$$U/U_w = 1 - C^2$$

beschreibt. Abschnitt 6.2.2 befasst sich noch einmal mit Volkarts Arbeit.

5.4 Ursächliche Mechanismen in der Literatur

5.4.1 Allgemeine Ursachen

In der *Turbulenzforschung* ist man sich über die Ursachen der beobachteten Veränderungen im wandnahen Bereich nicht einig. Es stehen sich zwei Pole gegenüber: Eine Richtung favorisiert eine *Unterdrückung* der Turbulenz als Folge einer erhöhten Zähigkeit, die andere eher eine *Anisotropie* der Turbulenz.

a) Unterdrückung der Turbulenz – viskoser Effekt

Eine turbulenztheoretische Richtung, vertreten z.B. durch Lumley (1969, 1977), geht davon aus, dass Additive die *Zähigkeit* des Fluids erhöhen können. Dadurch würde die Turbulenz über die Wandschicht hinaus *unterdrückt*, was die Bildung des *elastic layer* erklären würde (Bild 5-1). Der Vorgang wird auch als *Verdickung* der viskosen Unterschicht angesprochen. Damit verbunden wäre eine Ausdehnung des Wirkungsbereiches des viskosen, widerstandsärmeren Gesetzes. Dieser Effekt überträte die an sich bremsende Wirkung der höheren Zähigkeit, so dass per Saldo eine Verlustminderung resultieren würde.

Warum betrifft diese Erhöhung nur den *elastic layer*, nicht aber die ursprüngliche viskose Unterschicht (vgl. Abschnitt 5.2.1)? Lumley (1969) beantwortet diese Frage damit, dass eine gewisse Turbulenz nötig ist, um den Effekt zu produzieren: Nur sie bringt Strömungsmuster hervor, welche in der Lage sind, die Polymermoleküle zu dehnen. In einem *reinen* Rotationsfeld – die viskose Unterschicht ist eines – wäre dies nicht möglich.

Lumley (1969) kann auch die charakteristischen Phänomene des *onsets* und der *Sättigung* (vgl. Abschnitt 5.2.1) in sein Modell einordnen. Eine eigentliche Quantifizierung des Effekts nimmt er aber nicht vor.

Auch Gyr & Bewersdorff (1995) beziehen sich auf Lumleys Modell. Es ist von Bedeutung, weil es von Lumley und von weiteren Autoren – z.T. in modifizierten Varianten – auf andere Additive übertragen wird. Es wird in Abschnitt 6.3 wieder aufgenommen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf diesen Mechanismus mit der Bezeichnung *viskoser Effekt* Bezug genommen.

b) Anisotropie

Andere Autoren, z.B. Tsinober (1989), sind der Ansicht, dass die Turbulenz weniger unterdrückt als vielmehr *verändert* wird, und zwar derart, dass *die Dissipation* der eingetragenen Energie *behindert* wird. Solche Strömungen gibt es: Eine zweidimensionale Strömung beispielsweise kann Turbulenz produzieren. Ihr fehlt aber die dritte Raumrichtung, so dass sich die entstandenen Wirbel nicht strecken können. Damit fehlt ein wesentliches Element des Kaskadenprozesses nach Abschnitt 3.12.3.

Gleiches gilt für die sogenannten Beltrami-Flows, in denen die Rotation gleich gerichtet ist wie die mittlere Geschwindigkeit, beispielsweise in Wirbelstürmen. – Die Verallgemeinerung dieser These lautet dann so, dass die Additive der Turbulenz eine *Anisotropie* aufprägen, welche zu einer Widerstandsminderung führen.

5.4.2 Widerstandsminderung durch Luft

Im Folgenden wird eine – nicht vollständige – Auswahl von Publikationen bzw. Modellen vorgestellt. Sie soll eine Übersicht über die verschiedenen zur Diskussion stehenden Mechanismen geben. Abschnitt 5.4.3 gibt eine Zusammenfassung.

a) Legner (1984)

Legner bezieht sich auf die Messungen aus Novosibirsk (vgl. Bogdevich et al. 1977) und entwirft auf der Basis des Boussinesq-Ansatzes (3-13) ein theoretisches Modell, welches drei Mechanismen in Rechnung stellt (s. auch Bild 5-23):

- a) Die geringere Dichte reduziert auch die Trägheit und damit den turbulenten Impulsaustausch, wie implizit schon von Eddington (1970) vermutet (Abschnitt 5.2.2a). Diesen Vorgang – nach Legner der *primäre* Mechanismus – wird im Folgenden als *Dichte-Effekt* bezeichnet.
- b) Der Luftgehalt kann die Viskosität erhöhen (vgl. Abschnitt 2.2.4). Legner bezieht sich hier auf die Resultate von Sibree (1934), welche für Schäume, also für sehr hohe Luftkonzentrationen, ermittelt wurden. Dort kann die Viskosität um Grössenordnung über dem Wert der reinen Flüssigkeit liegen. Legner weist diesem Einfluss eine *Erhöhung* (!) des Widerstands zu.
- c) Legner beruft sich auf Taylor (1954) und postuliert eine zusätzliche Veränderung der Turbulenz als Folge des zweiten Viskositätskoeffizienten μ' , welcher in Wasser-Luft-Gemischen die Viskosität μ – vgl. Abschnitt 2.2.4e – um Grössenordnungen übertreffen kann. Er nimmt an, dass dieser *bulk viscosity mechanism* die turbulenten Schubspannungen in den Navier-Stokes-Gleichungen konkurrenziert und die Wirbelviskosität Λq (s. Abschnitt 3.5.3) entsprechend dämpft. Diese Dämpfung rechnet er aber nicht aus, sondern er leitet nur her, dass sie wie schon Effekt a) proportional zur Dichte sei.

Zusammen würden die Effekte a) und c) die turbulente Schubspannung *im Quadrat* reduzieren, was natürlich dem Verlauf der Messpunkte aus Novosibirsk in Bild 5-4 besser entspricht. Legner kalibriert dann den bulk viscosity mechanism mit einem Proportionalitätsfaktor so, dass die Summe aller drei Einflüsse genau auf die Punkte fällt.

Er bietet auch eine Erklärung dafür, dass der Widerstand bei sehr grossen Konzentrationen, bei Schäumen also, wieder steigt: Deren enorm hohe Viskosität lässt

Effekt b) dominant werden. Die Turbulenz verschwindet, aber um den Preis eines sehr hohen viskosen Widerstands.

Hingegen erklärt das Modell nicht die Abhängigkeit von der Reynoldszahl, wie sie aus Bild 5-4 hervorgeht. Auch gelangt nur das Maximum der Luftkonzentration ins Modell, die Verteilung bliebe ohne Einfluss.

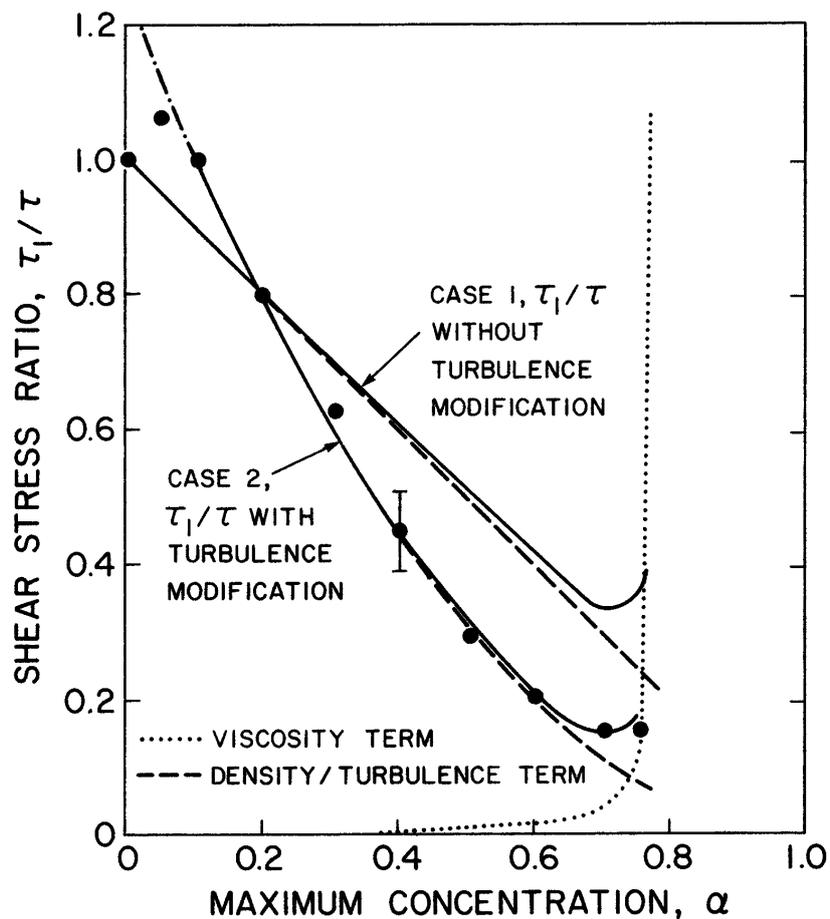


Bild 5-23: Legner (1984): Gerechnete Widerstandsminderung bei hohen Reynoldszahlen im Vergleich zu Daten des Instituts für Thermophysik, Novosibirsk. Die Ordinate gibt das Verhältnis τ_1/τ der Schubspannungen im Gemisch bzw. im Reinwasser ("l" für "liquid") wieder. "Case 1" berücksichtigt nur die Effekte a) und b), "Case 2" auch den Effekt c).

Zu diskutieren wäre sicher der Effekt c) mit dem Einbezug der Volumenviskosität. Ausserdem trifft er zu Beginn den Ansatz, dass das Geschwindigkeitsprofil für gegebenen Durchfluss, unabhängig vom Luftgehalt, immer gleich bleibt. Er ist sich auch dessen bewusst, dass dieses Postulat "critical" sei.

Es fanden sich in der Literatur allerdings keine weiteren Hinweise für eine massgebliche Rolle der Volumenviskosität in turbulenten Strömungen.

b) Untersuchungen der Pennsylvania State University

Die Forschergruppe an der Pennsylvania State University äussert sich Mitte der Achtzigerjahre mehrfach zur Frage nach den Ursachen des Widerstandsabfalls infolge Lufteintrags. Madavan et al. (1984, 1985a) stellen eine Änderung der Turbulenz als Folge der höheren Viskosität in den Vordergrund (vgl. Abschnitt 5.4.1). Sie untermauern diese These mit Bild 5-24, welches den gemessenen Verlauf der Wandschubspannungen wiedergibt: Sowohl das Mittel als auch die Schwankungen sinken mit zunehmendem Luftgehalt rapide ab. Das Signal behält aber einen "turbulentlike charakter", wird also nicht laminar.

In der turbulenten Zone können die Autoren hingegen keine signifikanten Veränderungen ausmachen. Ein verringerter Impulsaustausch als Folge der herabgesetzten Dichte wird noch nicht in Betracht gezogen.

Ihre eigenen Experimente umfassten keine Konzentrationsmessungen. Madavan et al. (1985b) greifen daher auf die Messungen aus Novosibirsk zurück, um realistische Annahmen für eine trapezförmig angesetzte Konzentrationsverteilung treffen zu können. Für den höchsten untersuchten Maximalwert – 50% – errechnen sie Widerstandsminderungen auf etwa die Hälfte des Reinwasserwertes, allerdings stark abhängig von der Formgebung der Verteilung, insbesondere in Wandnähe. Demgegenüber sinkt der Widerstand bei den Messungen der sowjetischen Forscher für dasselbe Konzentrationsmaximum um gegen 70% (Bild 5-4). Diese hohen Werte können Madavan et al. rechnerisch also nicht ganz nachvollziehen werden, was sie aber nicht näher kommentieren.

Sie führen auch Berechnungen durch, welche den Dichte-Effekt ausser Acht lassen. Die Widerstandsminderungen sind deutlich geringer. Den umgekehrten Fall, wo also *nur* der Dichte-Effekt berücksichtigt würde, behandeln sie nicht.

Nach Merkle & Deutsch (1990) – sie gehören zum gleichen Laboratorium – basiert das Modell auf ähnlichen Überlegungen wie jenes von Marié (1987), s. unten. Allerdings relativieren sie diese vereinfachte Berechnung in gewisser Weise und halten fest, dass die Vorgänge im Bereich der viskosen Unterschicht nicht gut verstanden sind. – Sie erwähnen weitere mögliche Prozesse, so auch den Einfluss der Volumenviskosität nach Legner (1984), s. oben, sowie einen Mechanismus nach Meng & Uhlman (1986): Danach würde das Aufbrechen der Luftblasen ausreichend Energie absorbieren, um die Dämpfung der Turbulenz in der beobachteten Grössenordnung zu erklären.

Erst in einer weiteren Publikation – Madavan et al. (1985b) – führen sie den Dichte-Effekt als zusätzliche Ursache explizit ein. Um den Einfluss der beiden Effekte auf den Widerstand zu berechnen, bauen sie diese in ein bestehendes, nicht näher beschriebenes Programm zur numerischen Grenzschichtberechnung ein. Für die viskosen Schubspannungen setzen sie wahlweise die Ansätze nach Einstein

(1906/11) und Sibree (1934) ein, die sich für hohe Konzentrationen um Größenordnungen unterscheiden, vgl. Abschnitt 2.2.4e. Der verwendete Mischungsansatz entspricht Michel et al. (1968), Gleichung (3-20), allerdings mit einem etwas höheren λ_d von 0.108.

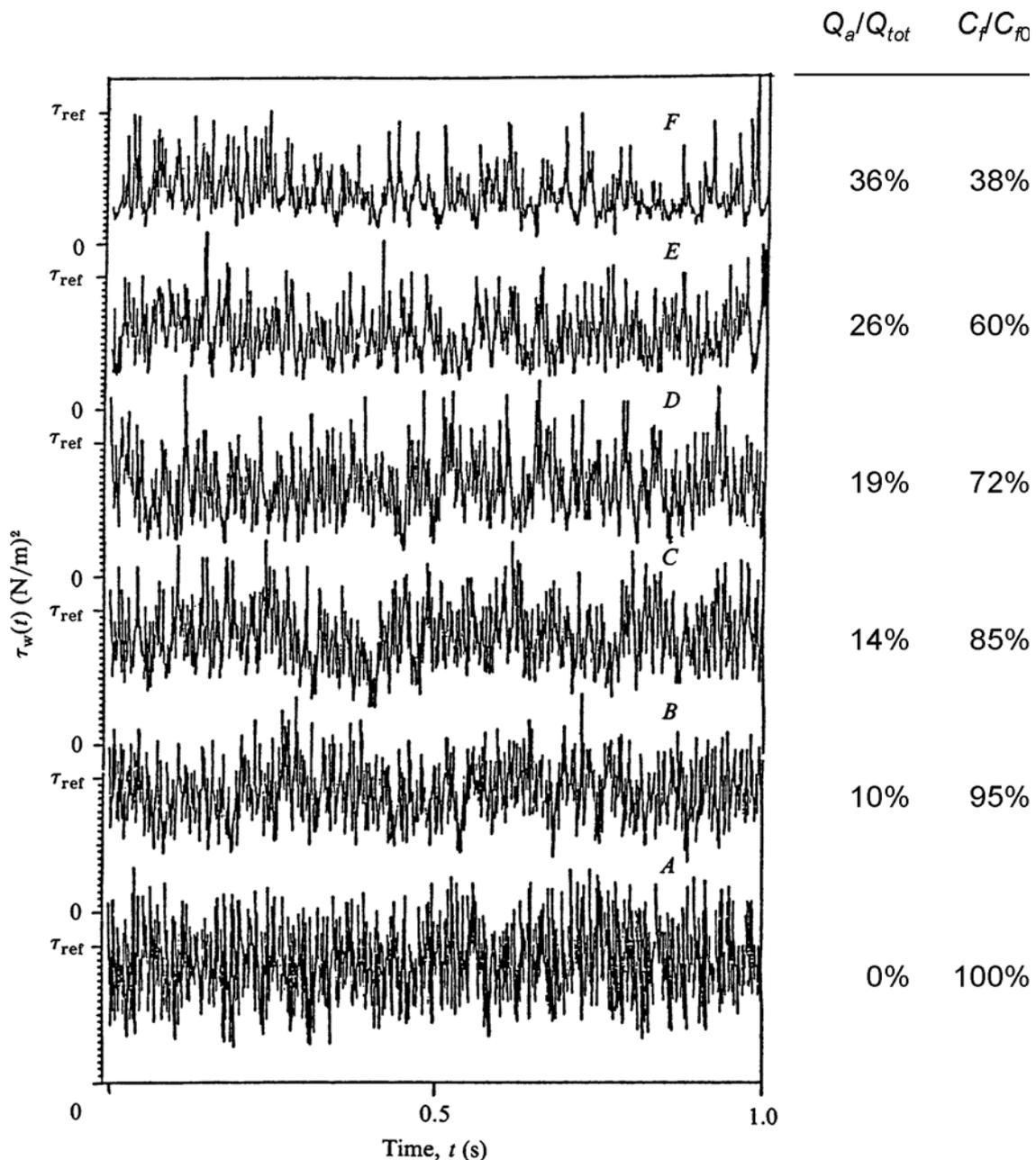


Bild 5-24: Madavan et al. (1985a): Zeitlicher Verlauf der Wandschubspannung für Luftkonzentrationen Q_a/Q_{tot} von 0% bis 36%. τ_{ref} ist der Mittelwert für $Q_a/Q_{tot} = 0\%$

c) Meng & Uhlman (1986)

Merkle & Deutsch (1990) ebenso wie Ebadian (2003) erwähnen einen Mechanismus, den Meng & Uhlman (1986) postulieren. Danach würde das Aufbrechen der Luftblasen

ausreichend Energie absorbieren, um die Dämpfung der Turbulenz in der beobachteten Größenordnung zu erklären.

Nach den Überlegungen des vorher gehenden Abschnitts wäre er das aber gerade nicht, denn er wirkt der Schwächung des Streckvorgangs entgegen. Per saldo ist aber zu anzunehmen, dass er die Anisotropie nicht aufzuheben vermag.

d) Marié (1987)

Gestützt auf die Publikationen von Lumley (vgl. Abschnitt 5.4.1) berechnet Marié (1987), wie stark sich die viskose Unterschicht als Folge einer erhöhten Viskosität verdickt und wie weit sich dadurch der logarithmische Ast verschiebt. Das Resultat ist eine Erhöhung der Rauheitsfunktion B . Die Erhöhung r_μ der Zähigkeit bestimmt er nach Batchelor & Green (1972), s. Abschnitt 2.2.4b.

Die Widerstandsänderung resultiert bei Marié aber eigentlich nur aus einer Änderung der Skala, verursacht durch eine Änderung der Zähigkeit, also einer Fluideigenschaft. Die Turbulenz als solche wird nicht tangiert. – Auf Mariés Modell wird in Abschnitt 6.3 näher eingegangen.

e) Chanson (1994a, 1996)

Wie schon Wood (1983, 1985, 1991) stellt auch Chanson fest, dass nennenswerte Widerstandsminderungen erst ab tiefengemittelten Luftkonzentrationen ab 20% auftreten. Die Tatsache, dass ab diesem Punkt auch die Sohlluftkonzentration signifikant von Null abweicht, ist für Chanson (1996), S. 124, ein Hinweis, dass die Ursache für die Widerstandsminderung in Sohlennähe zu suchen ist.

Dies führt Chanson (1994b) zu einem zweiten Ansatz, welcher sich auf Marié (1987) stützt. Implizit postuliert also auch Chanson eine Erhöhung der Zähigkeit und damit einhergehend eine Verdickung der viskosen Unterschicht als auslösendes Moment für die Widerstandsminderung, entsprechend den Ausführungen in den Abschnitten 5.4.1 und 6.3. Chanson gelangt zu folgender Formel für das Verhältnis f_e/f der Widerstandsbeiwerte mit und ohne Lufteintrag:

$$\frac{f_e}{f} = \left(1 + \sqrt{\frac{f_e}{f}} \cdot (10.5 (r_\mu - 1) - 2.44 \ln r_\mu) \right)^{-9/5} \quad (5-11)$$

Die Resultate für Ansatz (5-11) stellt Chanson in Bild 5-25 dar. Sie decken sich recht gut mit den Punkten in Bild 5-16 und liefern ihm auch eine mögliche Erklärung für deren Streuung.

Chanson nimmt aber keine Stellung zur Tatsache, dass der Mechanismus nach Marié eigentlich eine viskose Unterschicht erfordert.

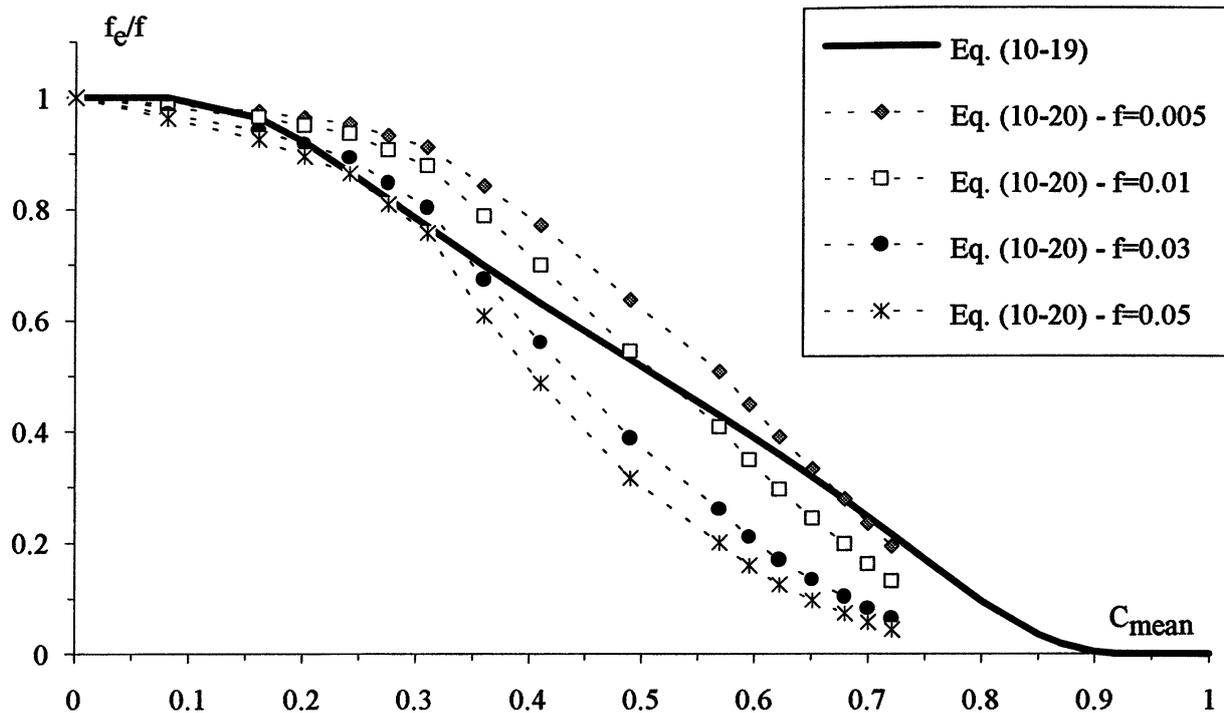


Bild 5-25: Chanson (1996): Rechnerische Widerstandsminderung auf der Basis von Marié (1987).

“Eq. (10-19)” ist Approximation (5-4).

“Eq. (10-20)” bezieht sich auf Gleichung (5-11).

f) Ebadian (2003)

Ebadian (2003) führt numerische Berechnungen durch. Er zitiert Messungen von Merkle & Deutsch (1992) und findet gute Übereinstimmung. Er schliesst auf einen dominanten Anteil des Dichte-Effekts.

Die Berechnung bestätigt überdies eine interessante experimentelle Beobachtung, wonach die Widerstandsminderung *mit der Rauheit wächst*. Er findet aber keine Erklärung.

g) Ferrante & Elghobashi (2004)

Ferrante & Elghobashi (2004) simulieren eine turbulente Grenzschicht mit Blasen numerisch. Sie errechnen bei nur 2% Luftgehalt Widerstandsminderungen in der Grössenordnung von weit über 20%. Auf der Suche nach den Ursachen finden sie, dass die bodennahen, hauptsächlich längsgerichteten Wirbelstrukturen unter dem Einfluss der Luftblasen sich etwas von der Wand entfernen. Sie schreiben diesem Prozess zwei widerstandsmindernde Wirkungen zu (vgl. Bild 5-26):

- Die high speed streaks (vgl. Abschnitt auch 3.12.4), die wegen ihrer hohen Geschwindigkeiten am Widerstand stark beteiligt sind, werden reduziert, und zwar sowohl was ihre Fläche als auch ihre Geschwindigkeit anbelangt. Bei einem

Luftgehalt von 2% reduziert dieser Effekt den Widerstand der viskosen Unterschicht um 20%.

- Die längsgerichteten Wirbel sind die Hauptquelle der Turbulenzproduktion. Ihre Energie beziehen sie aus dem Geschwindigkeitsgradienten der mittleren Strömung. Indem sie nun von der Wand wegrücken, kommen sie den Bereich kleinerer Gradienten, und die Turbulenzproduktion wird reduziert.

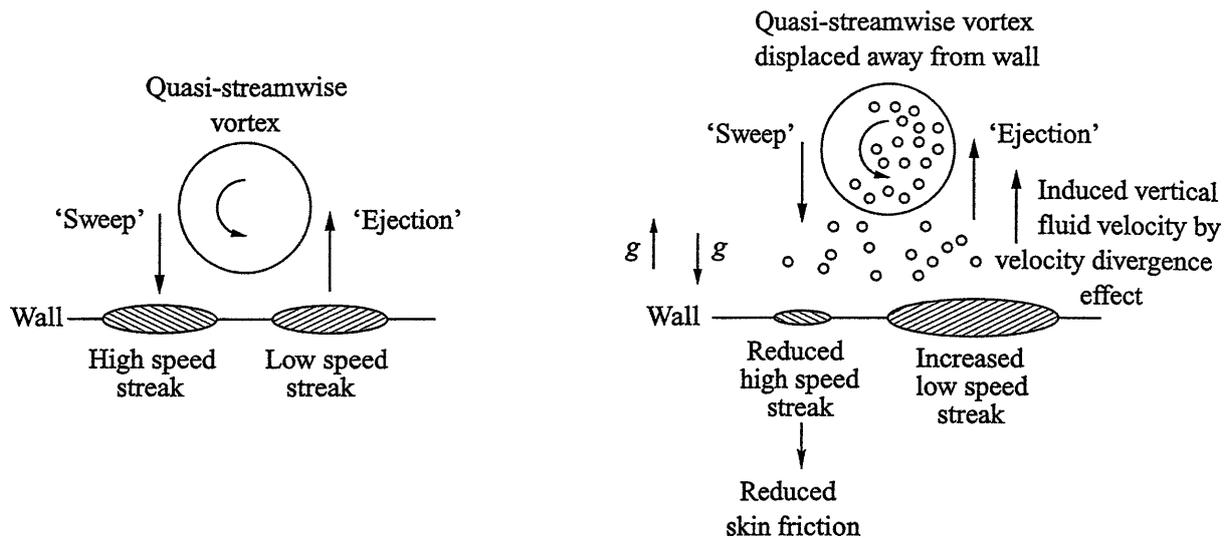


Bild 5-26: Ferrante & Elghobashi (2004): Schematische Darstellung des Widerstandsminderungs-Mechanismus.

Links: Einphasenströmung.

Rechts: Strömung mit Blasen.

h) Lu et al. (2005)

Lu et al. (2005) führen ebenfalls eine Simulation durch, und zwar eine sehr aufwändige. Ihre Blasen sind vergleichbar mit der Dicke des buffer layers, d.h. viel grösser als bei Ferrante & Elghobashi (2004), und auch numerisch sehr fein aufgelöst. Ihre Weberzahlen We wurden zu etwa 0.2 bzw. 0.4 gewählt. Die Blasen sind, wie auch die Flüssigkeit, inkompressibel.

Auch Lu et al. erhalten für eine vergleichsweise kleine Konzentration von ca. 5% beträchtliche Widerstandsminderungen im Bereich von gegen 20%, allerdings nur für die höhere Weberzahl von 0.4. Die Analyse ergibt, dass bei dieser Weberzahl die Blasen deformierbar werden, sich näher an die Oberfläche schmiegen, die dortigen Wirbelstrukturen quetschen und dazu bringen, sich gegenseitig zu annullieren. Sie "stören" also die Strukturen.

Van den Berg et al. (2005) schliessen daraus, dass die Blasen deformierbar sein, um den Effekt nach Lu et al. zu erzeugen. Dies erfordert $We \geq 1$. Für $We < 1$ wäre der Mechanismus nach Ferrante & Elghobashi (2004) ausschlaggebend.

i) Ortiz-Villafuerte & Yassin (2006)

Ortiz-Villafuerte & Yassin (2006) untersuchen Grenzschichten mit Blasen mittels Particle Tracking Velocimetry. Sie beobachten eine Verdickung der viskosen Zone und eine Verschiebung des logarithmischen Geschwindigkeitsprofils, ganz ähnlich wie es auch für Polymere oder Tenside dokumentiert ist (vgl Bild 5-1). Sie messen für kleine Luftkonzentrationen erstaunlich hohe Widerstandsminderungen: Diese liegen etwa um einen Faktor 6 bis 10 über der Konzentration (beides in Prozent), also in der Grössenordnung der numerischen Simulationen von Ferrante und Elghobashi (2004). Voraussetzung ist, dass die Luft im buffer layer platziert ist. Ortiz-Villafuerte & Yassin nennen einen idealen Bereich zwischen $y^+ = 15$ und $y^+ = 30$.

Ortiz-Villafuerte & Yassin schliessen daraus, dass es sich nicht um einen einfachen Dichte-Effekt handeln kann, sondern betonen einen Abfall der vorticity und eine Verdickung der viskosen Unterschicht als Ursache.

j) Behinderte Wirbelstreckung

Es ist anzunehmen, dass die Blasen, dem Druckgradienten folgend, in die Tiefdruckgebiete wandern, tendenziell also in die Kerne turbulenter Wirbelstrukturen. Wird einem solchen Wirbel durch die Kinematik der Umgebung eine Streckung aufgezungen, wie in Abschnitt 3.12 beschrieben, so fände diese zwar geometrisch statt, physikalisch gesehen aber nur noch teilweise (Müller 2006). Die Querabmessungen des Wirbels würden nur noch zögerlich verringert, die Rotationsgeschwindigkeiten nur langsam erhöht. Im Endeffekt wäre der Energietransfer durch die Kaskade behindert, was einer *Anisotropie* entspricht, wie sie auch für die Widerstandsminderung durch Polymere diskutiert wird.

Nach Bradshaw (1976), S. 7-13, oder Tritton (1988), S. 87, erfordert die Streckung eines Wirbels zusätzliche Energie, welche ebenfalls in die Turbulenz eingetragen wird. In diesem Fall wäre die Wirkung noch stärker: Es gelangt nicht nur weniger Energie in die Kaskade, sondern schon die Produktion von Turbulenz wird reduziert.

In der Strömung könnte eine reduzierte Wirbelstreckung z.B. auf zwei Arten in eine Widerstandsminderung münden:

- Wegen des behinderten Transfers durch die Kaskade müsste ein grösserer Teil der Energie *direkt* dissipiert werden, ein Vorgang, der normalerweise nicht ins Gewicht fällt und der eine viel geringere Effizienz aufweist. Der Impulsaustausch wäre nicht mehr zwingend der limitierende Faktor für die schlussendlich dissipierte Energie und

damit auch nicht mehr alleingültige Berechnungsgrundlage, jedenfalls nicht in der bisher verwendeten Form.

- Auf rauen Oberflächen würde die Streckung der von Bezzola (2002) postulierten räumlich fixierten Sekundärbewegungen – ebenfalls Wirbel – weniger Energie erfordern. Die Abminderung der turbulenten Schubspannungen nach Abschnitt 4.2.2 würde teilweise rückgängig gemacht, was v.a. bei grossen relativen Rauheiten zu höheren Geschwindigkeiten führen würde.

5.4.3 Zusammenfassung

Was die Suche nach den Ursachen anbelangt, stammen fast alle Beiträge aus der Turbulenzforschung. Dort werden verschiedene Mechanismen diskutiert, über welche die Luft Einfluss auf den Widerstand nehmen kann. Tab. 5-3 gibt eine vereinfachte Übersicht. Die Tabelle unterscheidet zwischen den auslösenden Faktoren und den daraus resultierenden Mechanismen.

Der *Dichte-Effekt* ist im Wesentlichen unbestritten. Die Diskussion dreht sich mehr um seinen Anteil an der Widerstandsminderung. Ebadian (2003) beispielsweise legt das Hauptgewicht auf den Dichte-Effekt. Die Beziehung (5-3) ist ein Hinweis, dass er auf wasserbaulichen Anlagen eine massgebliche Rolle spielen könnte.

Der *viskose Effekt*, wie ihn Marié (1987) vertritt, baut einzig auf eine erhöhte Viskosität. Zwar wird die viskose Zone bzw. der buffer layer ausgeweitet oder “verdickt”, dies aber einfach als Folge des geänderten viskosen Längenmassstabs. Die Struktur der Turbulenz als solche ist nicht betroffen.

Alle übrigen Effekte basieren auf einer Veränderung der Turbulenz. Sie werden besonders dann postuliert, wenn Messungen oder numerische Simulationen für kleine Luftkonzentration enorme Widerstandsminderungen erzielten. Der Prozess wird von einigen Autoren primär als *Dämpfung* der turbulenten Ausschläge verstanden (vgl. Abschnitt 5.4.1a). Er hat ebenfalls eine Ausweitung des buffer layers zur Folge und kommt damit dem viskosen Effekt nach Marié nahe. – Andere Autoren betonen dagegen eine *Veränderung* der Turbulenz in dem Sinne, dass entweder die Turbulenzproduktion verringert oder der Transfer durch die Wellenzahl-Kaskade geschwächt wird. Dies würde eher einer *Anisotropie* gemäss Abschnitt 5.4.1b entsprechen. – Die meisten dieser turbulenten Effekte setzen aber das Vorhandensein einer viskosen Unterschicht, wie man sie in Beton-Schussrinnen nicht a priori erwartet, voraus.

Insgesamt hat sich der Kenntnisstand bezüglich der Mechanismen seit den Achtzigerjahren verfeinert, ein Konsens wurde aber nicht erzielt. Auch die neuesten Publikationen zitieren nach wie vor Autoren wie Legner (1984), Madavan et al. (1984, 1985) oder

Marié (1987). Wahrscheinlich ist, dass verschiedene Effekte wirken, ihre Anteile aber je nach den Gegebenheiten variieren.

Tab. 5-3: Übersicht über mögliche Mechanismen zur Widerstandsminderung durch Luft; links die auslösenden Faktoren, in der Kopfzeile die Effekte, in den Feldern die Stichworte zu den jeweiligen Mechanismen.

	Dichte-Effekt	viskoser Effekt	Turbulenz
Reduzierte Dichte	reduzierter Impuls-Austausch (Eddington 1970, Legner 1984, Madavan et al. 1985b, Ebadian 2003)		Dämpfung der Turbulenz / der vorticity, Verdickung der viskosen Zone (Ferrante & Elghobashi 2004)
Erhöhte Viskosität		Lumley (1969) Skalenänderung (Madavan et al. 1985b, Marié 1987)	Dämpfung der Turbulenz / der vorticity, Verdickung der viskosen Zone (Ortiz-Villafuerte & Yassin 2006)
Volumenviskosität			Dämpfung der Turbulenz (Legner 1984)
Blasen als "Störkörper" im buffer layer			Dämpfung der Turbulenz / der vorticity (Lu et al. 2005)
Blasen in den Wirbelkernen			Gestörte Wirbelstreckung, Anisotropie (Müller 2006)

5.5 Folgerungen

Beobachtungen sowohl der wasserbaulichen als auch der Turbulenzforschung zeigen, dass ein Luftgehalt in einer Flüssigkeit - als eines unter vielen Additiven - den hydraulischen Widerstand ändern kann. Die meisten Autoren stellen eine *Reduktion* fest. Diese wird oft als Minderung des *Koeffizienten* nach Darcy-Weisbach interpretiert. Als Ursache kommen eine Veränderung der Fluideigenschaften – Dichte und/oder Viskosität – oder eine Veränderung der Turbulenz in Frage.

Es ist nicht davon auszugehen ist, dass die Luftblasen wesentlich andere Bewegungen ausführt als das umgebende Fluid. Die Luft wirkt dann als "verschmierte" Dichte-Reduktion, so dass der *Dichte-Effekt* sicher zu berücksichtigen ist. Die gefundene Beziehung (5-3) für den Widerstandsabfall deutet darauf hin, dass der Dichte-Effekt in wasserbaulichen Entlastungsanlagen auch die Grössenordnung des Phänomens treffen könnte.

Der *viskose Effekt* setzt die Existenz einer viskosen Unterschicht voraus, was in einer Betonschussrinne mit hydraulisch rauem Abfluss nicht zu erwarten ist. Er ist also nicht der vordringlich zu prüfende Mechanismus, kann aber nicht ganz ausgeschlossen werden, falls die verdickte viskose Zone die Rauheitsspitzen wieder zu überdecken vermag. – Der viskose Effekt ist im Übrigen der einzige Mechanismus, der in der wasserbaulichen Literatur schon aufgegriffen wurde (Chanson 1994a, 1996).

Die meisten *Turbulenzeffekte* basieren, wie der viskose Effekt, auf hydraulisch glattem Abfluss, d.h. auf einer viskosen Unterschicht.

Im Folgenden wird neben dem Dichte-Effekt, den man sicher einbeziehen muss, nur der viskose Effekt noch weiter bearbeitet, u.a. weil er in der wasserbaulichen Literatur schon genannt wurde. – Die turbulenten Effekte werden hingegen nicht mehr weiter behandelt, sind schwer in einer Weise zu modellieren, die später auch der Bemessungspraxis zugänglich werden könnte.

6 Veränderte Fluideigenschaften als Ursache

6.1 Einleitung

Auch Autoren der wasserbaulichen Literatur, z.B. Wood (1983 ff.), ermitteln einen starken Abfall des Widerstandsbeiwerts f bei zunehmendem Luftgehalt (vgl. Kapitel 5). Dies widerspricht den gängigen Auffassungen über den Widerstandsbeiwert: Dieser sollte nur im hydraulisch glatten Bereich vom Fluid abhängen, und auch da nur von dessen Zähigkeit. Über rauen Oberflächen gilt er bei gegebener Geometrie und Rauheit als konstant und ist mithin durch die Fluideigenschaften *gerade nicht* beeinflusst. Insbesondere die Dichte sollte selbst in glatten Verhältnissen keine Rolle spielen.

Es ist aber bekannt, dass Luftblasen die *mittleren Stoffeigenschaften* eines Gemischs verändern. Dies gilt nicht nur für die Dichte, sondern auch für die Viskosität. In diesem Kapitel werden diese beiden Einflüsse untersucht (Abschnitte 6.2 und 6.3).

6.2 Dichte-Effekt

Wie oben angesprochen, kommt die Dichte im Konzept des Widerstandsbeiwertes nicht vor. Wie kann sie trotzdem Einfluss auf die Verluste nehmen?

In Abschnitt 6.2.1 wird zunächst das leicht überschaubare Beispiel einer Rohrströmung mit gleichmässiger Luftverteilung erörtert. Die Abschnitte 6.2.2 und 6.2.3 gehen über auf die Freilaufströmung, wobei die Annahme gleichmässiger Luftverteilung zunächst noch beibehalten wird. Diese Einschränkung ist, wie sich zeigen wird, nicht allzu bedeutend, solange ein im Hinblick auf den Widerstand repräsentativer Konzentrationswert verwendet wird (Abschnitt 6.2.2h, Bild 6-2). Sie erlaubt aber eine explizite Berechnung und erleichtert das Verständnis. Abschnitt 6.2.4 behandelt den Einfluss auf den Widerstandsbeiwert. Für die Ausweitung auf den allgemeinen Fall mit variabler Luftkonzentration genügen dann einige Ergänzungen in Abschnitt 6.2.5.

6.2.1 Rohrströmung

Das Fliessgesetz nach Darcy-Weisbach wurde für *Rohre*, also für geschlossene Gerinne entwickelt. Deren Geometrie und damit auch der hydraulische Radius R sind unveränderlich. Wird der Strömung ein bestimmter Druckgradient dp/dx aufgeprägt, so ist die Wandschubspannung gegeben durch:

$$\tau_0 = R \frac{dp}{dx} .$$

Sie hängt von keiner weiteren Grösse mehr ab, insbesondere nicht von den Fluideigenschaften. Da auch f , wie einleitend bemerkt, nicht von der Dichte abhängen und also mit dem Widerstandsbeiwert für Reinwasser f_w identisch sein soll, ergibt sich dann aus dem Gesetz nach Darcy-Weisbach

$$\tau_0 = \frac{f}{8} \rho U^2 \quad , \quad (3-33)$$

dass U^2 reziprok zu ρ ist. Die Geschwindigkeit steigt also mit sinkender Dichte, ohne dass der Widerstandsbeiwert involviert wäre. Umgekehrt gilt ja auch ein Widerstandsbeiwert, wie er nach der bekannten Colebrook-White-Formel bzw. mit dem Moody-Diagramm bestimmt wird, unabhängig von der Dichte der untersuchten Flüssigkeit.

6.2.2 Ebener Freilauf – Spezialfall gleichmässiger Luftverteilung

a) Einfluss des Luftgehalts auf die Geschwindigkeitsgradienten

Auch im *Freispiegelabfluss* bleibt die totale Schubspannung τ_0 von der Dichte unabhängig. Sie rührt jetzt zwar von der Überlagerung und damit von der Dichte her. Da die Integration aber einfach über einen entsprechend längeren Weg führt, kürzt sich die *Änderung* der Dichte wieder heraus. τ_0 bleibt nach (3-1):

$$\tau_0 = \rho_w g d_0 S \quad . \quad (3-1)$$

Betrachtet man zunächst einen hypothetischen Abfluss, in dem die *Luft gleichmässig über den Abflussquerschnitt verteilt* sei, so beträgt die Dichte überall:

$$\rho = \rho_w(1 - C) \quad .$$

Die Überlegung bleibe auf den Prandtl'schen Mischungswegansatz beschränkt: die Schubspannung sei über die Abflusstiefe konstant und der Mischungsweg nehme proportional zum Wandabstand zu.

Will man untersuchen, wie die Luft den Widerstand ändert, so ist zuerst der *unbelüftete Referenzabfluss* festzulegen. Je nach Problemstellung kann dies ein Abfluss mit gleicher Wassertiefe, mit gleicher Reinwassertiefe oder aber ein gleich grosser Abfluss sein. Eine Gefällsänderung kann nicht a priori ausgeschlossen werden. – Zunächst soll der Referenzzustand ganz allgemein definiert werden. Dies geschieht über Verhältniszahlen r , mit denen die Ausgangsparameter – nämlich die Dichte, die Reinwassertiefe und das Gefälle – verändert werden:

$$r_\rho = \rho/\rho_w = 1 - C \quad ,$$

$$r_d = d_0/d_{0w} \quad ,$$

$$r_S = S/S_w \quad ,$$

Hierbei bezieht sich der Index w auf eine *Fluideigenschaft* des Reinwassers (ρ_w, ν_w, \dots), der Index w hingegen auf eine *Abflussgrösse* des Reinwasser-Referenzfalles (d_{0w}, S_w, \dots). Das Verhältnis der Gemisch-Abflusstiefen ist dann:

$$r_{dm} = \frac{d_m}{d_{mw}} = \frac{d_0/r_\rho}{d_{0w}} = \frac{r_d}{r_\rho} \quad , \quad \text{d.h.} \quad d_u = \frac{r_d}{r_\rho} d_{mw} = \frac{r_d}{r_\rho} d_{0w} \quad . \quad (6-1)$$

Auch die resultierenden Geschwindigkeiten und Abflüsse können dann über analoge Verhältniszahlen verglichen werden:

$$r_U = U/U_w \quad ,$$

$$r_q = q/q_w \quad .$$

Bezeichnet man die Schubspannung im unbelüfteten Referenzabfluss mit τ_{0w} , so wird mit (3-1) und (6-1) die Schubspannung τ_0 im belüfteten Abfluss zu:

$$\tau_0 = \rho g d_m S = r_\rho \rho_w \cdot g \cdot \frac{r_d}{r_\rho} d_{0w} \cdot r_S S = \tau_{0w} r_d r_S \quad . \quad (6-2)$$

Die Dichte-Änderung kürzt sich also wieder heraus, weil für die Schubspannung nur die *Summation* der Wasseranteile zählt. Deren Verteilung über y , d.h. die Dichte, spielt keine Rolle.

Was ändert sich nun im Mischungswegansatz nach Gleichung (3-15) bzw. (3-18)? Eine Änderung des Mischungswegs selber, beschrieben durch die Parameter κ und λ_d , kann nicht ausgeschlossen werden. Eine Veränderung von λ_d wäre denkbar, hätte aber, da sie nur den Mittenbereich mit seinen geringen Geschwindigkeitsgradienten betrifft, nur beschränkte Auswirkungen. Soll der Widerstand signifikant reduziert werden, so müsste die Kármán-Konstante κ verändert werden. Dies wäre aber kein Dichte-Effekt im eigentlichen Sinne mehr, sondern käme einer grundsätzlichen Änderung der Turbulenz gleich (s. Abschnitt 5.2.1a). – Für die vorliegende Behandlung des Dichte-Effekts wird der Mischungsweg also unverändert nach Abschnitt 3.5 berechnet.

Hingegen reduziert sich die Dichte der Fluidballen, deren Impuls zwischen den Schichten ausgetauscht wird, zu $r_\rho \rho_w$, was in Gleichung (3-18) auf der rechten Seite erscheint. Die Turbulenz ist also mit weniger Impulsaustausch verbunden. Der Mischungswegansatz (3-15) erweitert sich damit zu:

$$\tau_t = r_\rho \rho_w l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 .$$

Im logarithmischen Bereich ist die turbulente Schubspannung $\tau_t = \tau_t(y)$ gleich der totalen Schubspannung $\tau = \tau(y)$. Der Geschwindigkeitsgradient wird dann:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \sqrt{\frac{\tau}{r_\rho \rho_w l}} = \sqrt{\frac{1-\eta}{1-c}} \frac{u_\tau}{l} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \sqrt{\frac{1-\eta}{1-c}} \frac{1}{l^+} . \quad (6-3)$$

Hierbei bleibt die Definition der Schubspannungsgeschwindigkeit sowohl für den Reinwasser- als auch für den Gemisch-Abfluss auf die Reinwasserdichte bezogen, d.h.

$$u_{\tau w} = \sqrt{\tau_{0w}/\rho_w} , \quad u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho_w} \quad (\text{nicht: } u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}!) . \quad (6-4)$$

b) Integration zum Geschwindigkeitsprofil

Den Gradienten (6-3) kann man analog zu Abschnitt 3.6.2 bzw. 3.7.4 über die Abflusstiefe zum Geschwindigkeitsprofil aufintegrieren. Als Beispiel diene ein rauer Abfluss über eine Rauheit k . Da hier nur der Einfluss der Dichte auf den logarithmischen Profilast interessiert, sei von einer Modifikation in Wandnähe *vorerst* abgesehen. Der logarithmische Ast wird also wie beim Reinwasserabfluss an den Punkt $(Bu_\tau; k)$ bzw. $(B; k^+)$ angeknüpft. Die Integration ergibt:

$$\bar{u} = \frac{u_\tau}{\kappa \sqrt{r_\rho}} \ln \frac{y}{k} + Bu_\tau . \quad (6-5)$$

Anmerkung: Man kann den veränderten Gradienten des logarithmischen Astes auch als modifizierte Kármán-Konstante interpretieren:

$$\kappa' = \kappa \sqrt{r_\rho} .$$

Dieser Ansatz ist aber nicht physikalisch und wird im Folgenden – dort aus praktischen Gründen – nur in Abschnitt 6.3.2e verwendet.

c) Mittlere Geschwindigkeit

Die zweite Integration des Geschwindigkeitsprofils über die Gemisch-Abflusstiefe $d_m = d_0/r_\rho$ analog 3.6.5 bzw. 3.7.5 führt zur tiefengemittelten Geschwindigkeit U :

$$U = \frac{q}{d_0} = \frac{1}{d_0} \int_0^{d_0/r_\rho} r_\rho \bar{u} dy = \frac{u_\tau}{\kappa \sqrt{r_\rho}} \left(\ln \frac{d_0/r_\rho}{k} - 1 \right) + Bu_\tau$$

bzw.

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa\sqrt{r_\rho}} \left(\ln \frac{d_0}{r_\rho k} - 1 \right) + B \quad . \quad (6-6)$$

d) Vergleich mit dem Reinwasser-Referenzabfluss

Dieses Resultat kann man – das eigentliche Ziel dieser Arbeit – mit dem gewählten unbelüfteten Referenzabfluss vergleichen. Dessen Geschwindigkeitsmittel beträgt nach Gleichung (3-30):

$$\frac{U_w}{u_{\tau w}} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0w}}{k} - 1 \right) + B \quad \text{oder} \quad \frac{U_w}{u_\tau} = \frac{u_{\tau w}}{u_\tau} \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0w}}{k} - 1 \right) + B \right) \quad . \quad (6-7)$$

Hierbei bleibt $u_{\tau w}$, wie auch u_τ , auf ρ_w bezogen. Mit (6-2) wird dann

$$\frac{u_{\tau w}}{u_\tau} = \sqrt{\frac{\tau_{0w}}{\tau_0}} = \sqrt{\frac{1}{r_d r_s}}$$

und man erhält aus der Division von (6-7) durch (6-6):

$$\begin{aligned} r_U &= \frac{U}{U_w} = \frac{U/u_\tau}{U_w/u_\tau} = \frac{\frac{1}{\kappa\sqrt{r_\rho}} \left(\ln \frac{d_0}{r_\rho k} - 1 \right) + B}{\frac{u_{\tau w}}{u_\tau} \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0w}}{k} - 1 \right) + B \right)} \\ &= \sqrt{r_d r_s} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa\sqrt{r_\rho}} \left(\ln \frac{d_0}{r_\rho k} - 1 \right) + B}{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0w}}{k} - 1 \right) + B} = \sqrt{\frac{r_d r_s}{r_\rho}} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{r_d d_{0w}}{r_\rho k} - 1 \right) + B\sqrt{r_\rho}}{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0w}}{k} - 1 \right) + B} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
r_U &= \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0W}}{k} - 1 + \ln \frac{r_d}{r_\rho} \right) + B \sqrt{r_\rho} + B - B}{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0W}}{k} - 1 \right) + B} \\
&= \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0W}}{k} - 1 \right) + B + \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{r_d}{r_\rho} \right) + B \sqrt{r_\rho} - B}{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0W}}{k} - 1 \right) + B} \\
&= \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_d}{r_\rho} - B(1 - \sqrt{r_\rho})}{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{d_{0W}}{k} - 1 \right) + B} \right) \quad (6-8)
\end{aligned}$$

e) Vereinfachungen

Man kann berücksichtigen, dass B im praktischen Wasserbau zwar nicht vernachlässigbar, aber meist deutlich kleiner ist als der Geschwindigkeitsanteil, der aus dem logarithmischen Ast selber resultiert. Eine Vereinfachung des obigen Ausdrucks ist dann:

$$r_U \approx \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} \left(1 + \frac{\ln \frac{r_d}{r_\rho}}{\ln \frac{d_{0W}}{k} - 1} \right) \quad (1. \text{ Näherung}). \quad (6-9)$$

Demnach beeinflusst der Luftgehalt die Geschwindigkeit auf zweierlei Art: im Wurzelausdruck über eine Erhöhung der Schubspannung, im Klammersausdruck über die Ausdehnung des Integrationsbereichs, d.h. der Gesamtabflusstiefe $d_m = d_0 \cdot r_d / r_\rho$ nach Gleichung (6-1). Dieser zweite, *geometrische* Effekt geht aber nur als logarithmischer Summand in den Widerstand ein, denn er betrifft hauptsächlich die oberen Schichten, wo der Geschwindigkeitsgradienten viel kleiner ist. Der *geometrische* Effekt ist also wesentlich geringer und verschwindet für hydraulisch glatte Abflüsse fast ganz. Eine noch weiter gehende Vereinfachung lautet deshalb:

$$r_U \approx \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} \quad (2. \text{ Näherung}). \quad (6-10)$$

Welche Auswirkungen haben die beiden Vereinfachungen? Zunächst ergeben sie für den Fall $r_{dm} = r_d / r_\rho = 1$ – also für gleiche Gemisch-Abflusstiefe, s. Gl. (6-1) – und $r_S = 1$ (gleiches Gefälle) das gleiche Resultat wie die exakte Rechnung. Andere Werte von r_d / r_ρ und r_S führen zwar zu Abweichungen; die beiden Vereinfachungen

wirken einander aber entgegen, was den Fehler reduziert. Tatsächlich zeigen die Vergleichsrechnungen in Bild 6-1, dass die 2. Näherung über alles gesehen eher besser ist als die 1. Näherung.

f) Einfachere Herleitung auf der Basis von Darcy-Weisbach

Man kann das Problem auch einfacher, formaler, aber weniger anschaulich behandeln, indem man den Weg über das Fliessgesetz von Darcy-Weisbach wählt, also analog zur Rohrströmung in Abschnitt 6.2.1. Wie bei der Rohrströmung wird davon ausgegangen, dass der Widerstandsbeiwert einzig durch das Gerinne, nicht aber durch das Fluid beeinflusst werde, dass also er also für den Reinwasser- wie für den Gemischabfluss gleich gross sei:

$$f = f_w . \quad (6-11)$$

Das Gesetz für belüfteten Abfluss:

$$\tau_0 = \frac{f}{8} \rho U^2 \quad (6-12)$$

kann auch geschrieben werden als

$$\tau_{0w} r_d r_s = \frac{f}{8} r_\rho \rho_w (r_U U_w)^2 . \quad (6-13)$$

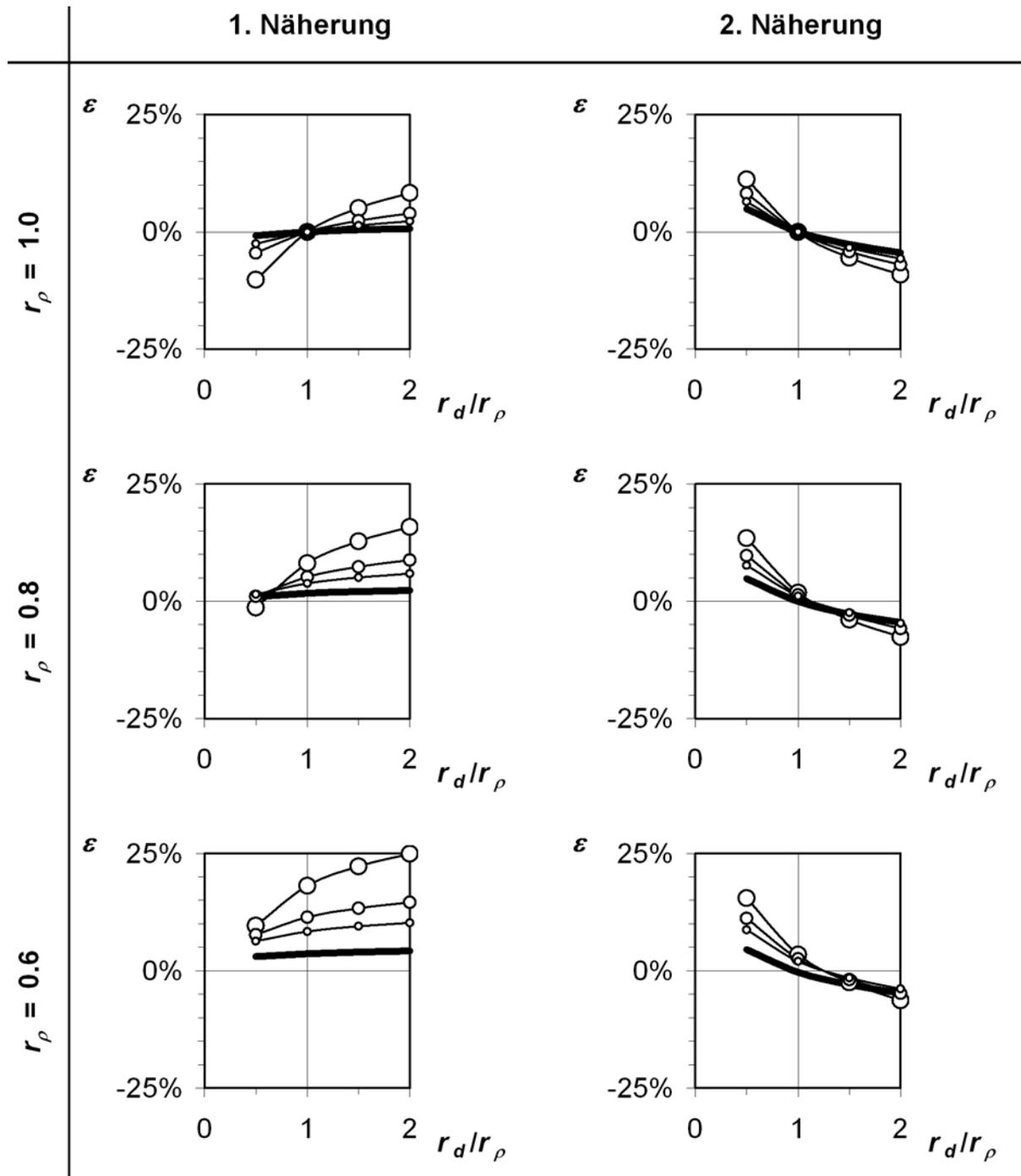
Es ist dem entsprechenden Gesetz für unbelüfteten Abfluss gegenüberzustellen:

$$\tau_{0w} = \frac{f}{8} \rho_w U_w^2 . \quad (6-14)$$

Die Division der beiden Gleichungen ergibt direkt die vereinfachte Form, wie sie aus der Betrachtung des Mischungswegansatzes resultierte:

$$r_U^2 = \frac{r_d r_s}{r_\rho} . \quad (6-15)$$

Die 2. Näherung (6-10) *entspricht also dem Resultat nach Darcy-Weisbach.*



—○— $d_{0w}/k = 10^2$ —□— $d_{0w}/k = 10^3$ —△— $d_{0w}/k = 10^4$ ——— $d_{0w}^+ = 10^6$

Bild 6-1: Vergleich der exakten Berechnung von r_U nach Gl. (6-8) mit der 1. und der 2. Näherung nach Gl. (6-9) bzw. (6-10). ε ist die prozentuale Abweichungen der jeweiligen Näherung gegenüber dem exakten Wert. ε wurde für drei verschiedene r_ρ bestimmt und in Funktion der relativen Gemisch-Abflusstiefe $d_m/d_{0w} = r_{dm} = r_d/r_\rho$ nach Gl. (6-1) aufgetragen. Berechnung für relative Rauheiten k/d_{0w} von 1/100, 1/1'000 und 1/10'000 sowie für einen hydraulisch glatten Fall mit einer dimensionslosen Reinwassertiefe d_{0w}^+ von 10^6 .

g) Bedeutung des Referenzabflusses

Wie in Abschnitt a) schon angesprochen, ist der *Reinwasser-Referenzabfluss*, auf den man sich bezieht, nicht automatisch gegeben. Er muss *gewählt* werden. Die Rolle dieses Entscheids wird hier kurz erläutert.

Eine typische Wahl ist sicher ein Referenzabfluss mit gleichem spez. Reinwasserabfluss und gleichem Gerinne, d.h. insbesondere mit gleichem Gefälle. Für diesen Fall ist das Verhältnis der spezifischen Abflüsse anzusetzen:

$$r_q = q/q_w = \frac{d_0 U}{d_{0w} U_w} = r_d r_U .$$

Mit (6-15) ergibt es sich zu:

$$r_q = r_d r_U = r_d \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} = r_d^{1.5} r_S^{0.5} r_\rho^{-0.5} . \quad (6-16)$$

Vergleicht man also zum Beispiel, um auf eine der einleitenden Fragen unter Abschnitt a) zurückzukommen, gleiche spezifische Abflüsse bei gleichbleibendem Gefälle, so sind $r_q = 1$ und $r_S = 1$, d.h. mit (6-16)

$$r_d = r_\rho^{1/3} .$$

Die Geschwindigkeiten erhöhen sich dann mit (6-15) um den Faktor

$$r_U = \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} = \sqrt{\frac{r_\rho^{1/3}}{r_\rho}} \cdot 1 = r_\rho^{-1/3} . \quad (6-17)$$

Analoge Überlegungen kann man für beliebige weitere Fälle anstellen. Eine Auswahl ist in Tab. 6-1 zusammengestellt. Welcher Referenzabfluss zu berücksichtigen ist, muss je nach Fall entschieden werden. Für die Normalabflussberechnung eines bestimmten Abflusses q bei gegebenem Gefälle S interessiert Fall C. Für einen Iterationsschritt einer Senkungskurvenrechnung hingegen wird man neben dem Abfluss zunächst eine bestimmte Reinwasserfüllung des Profils, also d_0 , annehmen, was Fall F entspricht. Wenn man einen unbelüfteten Referenzabfluss messen möchte, diesen aber wegen der automatisch eintretenden Selbstbelüftung nicht erreicht, etwa in Laborversuchen, so kann es auch interessant sein, auf ein anderes Gefälle auszuweichen.

Tab. 6-1: Einige Wahlmöglichkeiten für den unbelüfteten Referenzabfluss und ihre grob genäherten Auswirkungen. Vorgegeben sind jeweils die schattierten Parameter. Die beiden anderen Verhältniszahlen errechnen sich mit Hilfe der Gleichungen (6-15) und (6-16).

unbelüfteter Referenzabfluss:		r_d	r_S	r_U	r_q
A	gleiche Abflusstiefe bei gleichem Gefälle	r_p	1	1	r_p
B	gleiche Reinwassertiefe bei gleichem Gefälle	1	1	$r_p^{-1/2}$	$r_p^{-1/2}$
C	gleicher Abfluss bei gleichem Gefälle	$r_p^{1/3}$	1	$r_p^{-1/3}$	1
D	gleiche Schubspannung bei gl. Abflusstiefe	r_p	r_p^{-1}	$r_p^{-1/2}$	$r_p^{1/2}$
E	gleiche Abflusstiefe und gleiche Geschw.	r_p	1	1	r_p
F	gleicher Abfluss bei gleicher Abflusstiefe	r_p	r_p^{-2}	r_p^{-1}	1
G	gleicher Abfluss bei gleicher Reinwassertiefe	1	r_p	1	1

h) Erster Vergleich mit Messresultaten nach Straub & Anderson (1958)

Die meisten Forschungsarbeiten stellen tatsächlich erhöhte Geschwindigkeiten fest, so auch *Straub & Anderson (1958)* in Bild 5-9. Als unbelüfteten Referenzabfluss betrachten sie implizit einen gleich grossen Abfluss bei gleichem Gefälle, was Fall C in Tab. 6-1 bzw. der Gleichung (6-17) entspricht. Wählt man $r_p = 1 - C$, also die *mittlere* Dichtereduktion, so wird (6-17) zu

$$r_U = (1 - C)^{-1/3} . \quad (6-18)$$

Trägt man diese Gleichung in Bild 5-9 ein, so trifft die Rechnung die von *Straub & Anderson (1958)* angegebenen Geschwindigkeitserhöhungen bei *hohen* Luftkonzentrationen recht gut (s. Bild 6-2). Der Unterschied bei den *kleineren und mittleren* Konzentrationen beruht hauptsächlich darauf, dass dort die vereinfachte Annahme einer gleichmässigen Luftverteilung am meisten von der Realität abweicht. Tatsächlich ist die Luftkonzentration in Sohlnähe, wo sie den grössten Einfluss auf den Widerstand ausüben würde, am geringsten. Die vereinfachte Rechnung liegt also zwangsläufig über den Messwerten.

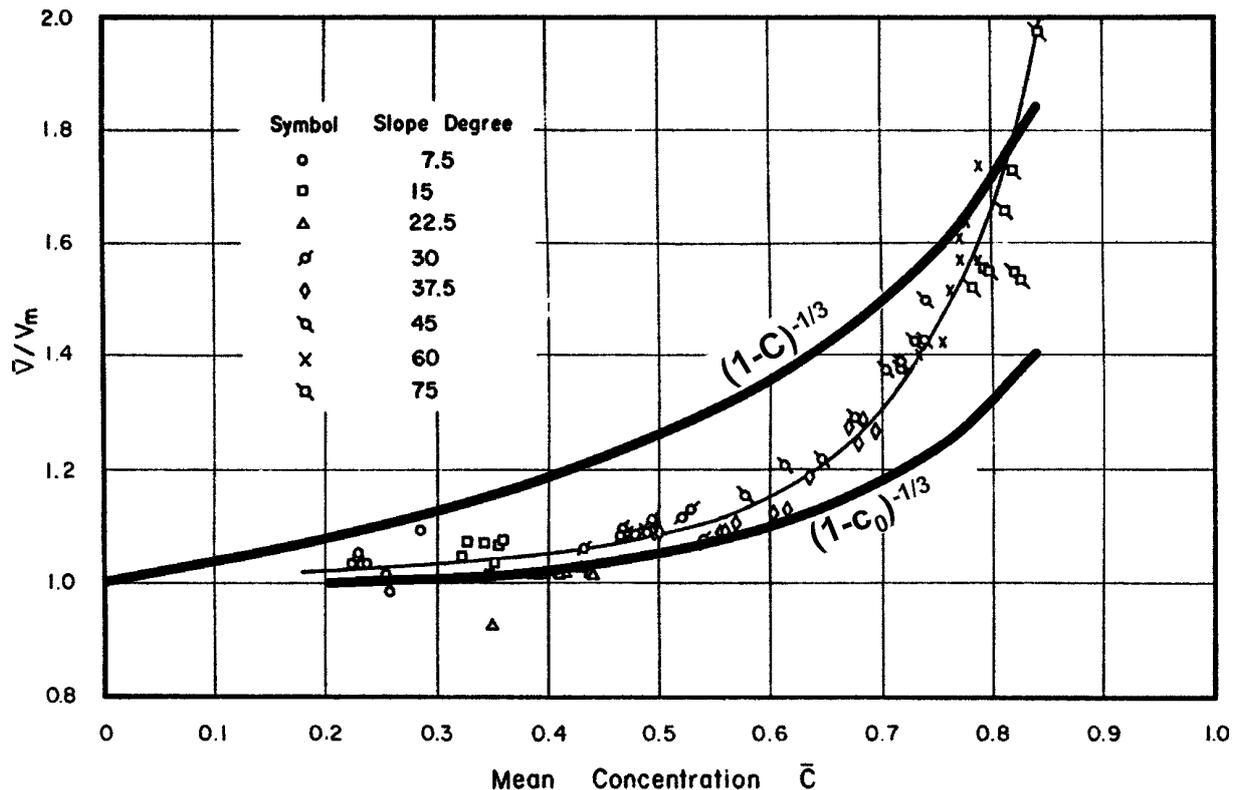


Bild 6-2: Vergleich der gemessenen Geschwindigkeitserhöhung infolge Luftaufnahme nach Straub & Anderson (1958) mit der überschlägigen Rechnung nach (6-18) und (6-19). Die Ordinate entspricht $r_U = U/U_w$.

Ersetzt man nun die mittlere Konzentration C durch den entsprechenden Sohlwert c_0 , wie er z.B. aus Bild 5-14 aus Wood (1991) abgelesen werden kann, so erhält man statt (6-18):

$$r_U = (1 - c_0)^{-1/3} \quad (6-19)$$

Diese Näherung ergibt in Bild 6-2 für kleine und mittlere Luftkonzentrationen eine weit bessere Übereinstimmung. Offenbar ist der Sohlwert im Hinblick auf den Widerstand repräsentativer als das Mittel.

6.2.3 Freispiegelabfluss im Rohr bei gleichmässiger Luftverteilung

a) Herleitung auf der Basis von Darcy-Weisbach

Wie in Abschnitt 5.3.4 gesehen, findet Volkart (1978) in seinen Untersuchungen zu steilen Kanalisationsrohren *reduzierte* Geschwindigkeiten infolge Luftaufnahme, was im Widerspruch zu den meisten übrigen Autoren und zu den obigen Überlegungen stünde.

Um einen Vergleich zu ermöglichen, muss die Rechnung auf nicht ebene Abflüsse ausgedehnt werden. Das Vorgehen ist aber analog zu Abschnitt 6.2.2. Die

Schubspannung τ_0 wird jetzt mit dem hydraulischen Radius R angesetzt an Stelle der Abflusstiefe d_0/r_ρ bzw. der Reinwassertiefe d_0 wie in den Gleichungen (6-12) und (6-14). Sie wird:

$$\tau_0 = \rho g \frac{A}{P} S = \rho g R S .$$

Bei der Fläche A , dem benetzten Umfang P und dem hydraulischen Radius R handelt es sich um Gemisch-, nicht um Reinwassergrößen. Für den belüfteten Abfluss gilt (6-12): $\tau_0 = f/8 \rho U^2$, bzw. mit $r_R = R/R_w$

$$\tau_{0w} r_\rho r_R r_S = \frac{f}{8} r_\rho \rho_w (r_U U_w)^2 .$$

Für den unbelüfteten Abfluss erhält man:

$$\tau_{0w} = \frac{f}{8} \rho_w U_w^2 .$$

Die Division der beiden Gleichungen ergibt:

$$r_U = \sqrt{r_R r_S} . \quad (6-20)$$

Im Vergleich mit (6-15) entfällt hier scheinbar die Reinwasserdichte. Sie ist aber in r_R enthalten, welches im Unterschied zu r_d ja keine Reinwassergröße ist.

Volkarts Reinwasser-Referenzfall ergibt sich aus seiner *gerechneten* Senkkurve im gleichen Rohr (mit gleichem Gefälle) und für gleichen Abfluss, d.h. $r_S = r_Q = 1$. Mit $r_Q = r_\rho r_A r_U$ und (6-20) erhält man dann:

$$r_\rho r_A \sqrt{r_R} = 1 \quad \text{oder} \quad r_\rho r_A^{1.5} r_P^{-0.5} = 1 . \quad (6-21)$$

b) Auswertung

Gleichung (6-21) ist etwas schwieriger aufzulösen als für den ebenen Abfluss in Abschnitt e. Erstens wachsen A und R nicht im gleichen Mass, sondern sind über den Winkel ϕ gekoppelt (vgl. Bild 6-3). Zweitens erhält wegen der Rohrgeometrie auch die *absolute* Spiegellage einen Einfluss. Es sind also zwei Parameter einzuführen, einmal wie bisher ein relativer, z.B. $r_\phi = \phi/\phi_w$, zum andern aber neu ein absoluter, z.B. ϕ . (6-21) schreibt sich dann:

$$r_\rho \cdot r_A^{1.5}(\phi, r_\phi) \cdot r_P^{-0.5}(\phi, r_\phi) = 1 . \quad (6-22)$$

Die Gleichung ist unbestimmt, d.h. einer der Parameter, vorzugsweise ϕ , muss vorausgesetzt werden, um für gegebenes $r_\rho = 1 - C$ den zweiten Parameter r_ϕ bestimmen zu können. Dies bedeutet, dass das Resultat *von ϕ abhängt*.

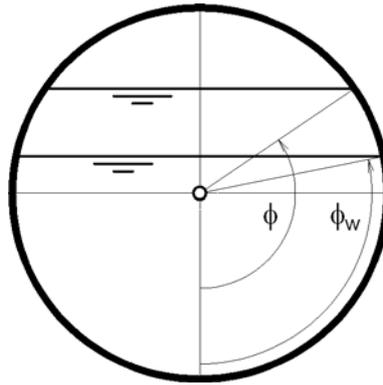


Bild 6-3: Parametrisierung der Spiegellagen über die Winkel ϕ und ϕ_w .

In Bild 6-4 wird Gleichung (6-22) ausgewertet und mit den effektiv gemessenen Geschwindigkeitserhöhungen verglichen. Man findet zweierlei:

- Die aus den *Messwerten* ermittelten Geschwindigkeitserhöhungen sind tatsächlich tiefer als im ebenen Abfluss; meist wird die Geschwindigkeit sogar, wie von Volkart festgestellt, verringert.
- Aber auch die *Rechnung* nach Gleichung (6-22) weist moderatere Geschwindigkeitserhöhungen aus als im ebenen Abfluss. Ist das Rohr zu weniger als der Hälfte mit Gemisch gefüllt, beträgt sie noch ziemlich einheitlich etwa 40% bis 60% des entsprechenden Werts für ebenen Abfluss. Für höhere Füllungen sinkt sie stark ab; für sehr grosse Füllungen resultiert gar eine *Senkung* der Geschwindigkeit (r_U -Werte < 1).

Absolut gesehen muss man also Volkart insofern bestätigen, dass die Geschwindigkeiten im Rohr geringer sind als bei Straub & Anderson im ebenen Abfluss. Bezieht man die beiden Datensätze aber auf eine *analoge Rechnung*, so verhalten sie sich dieser gegenüber ähnlich. Dies wird deutlicher, wenn man für jeden Datenpunkt den Quotienten aus dem Messwert und dem zugehörigen, d.h. für das entsprechende C und ϕ bestimmten Rechenwert bildet (Bild 6-5). Es zeigt sich, dass sich Volkarts Daten praktisch gleich gut in das einfach, aber physikalisch begründete Modell einfügen wie Straub & Anderson.

Eine detaillierte Diskussion der von Volkart ausführlich geschilderten Vorgänge im luftgefüllten Bereich des Rohrquerschnitts sprengt den Rahmen dieser Arbeit. Insgesamt kann aber festgehalten werden, dass *die Abweichung der Daten im Rohr von denen im ebenen Abfluss nicht fundamentaler Natur zu sein scheinen*.

Es sei ergänzt, dass die am meisten abweichende Punktegruppe in Bild 6-5 – wie übrigens schon in Bild 5-22 – nicht dargestellt ist. Sie geht aber auf eine Messserie ohne trompetenförmigen Einlauf zurück, ergab offenbar unzuverlässige Resultate und wurde auch von Volkart in seinen Auswertungen nicht berücksichtigt.

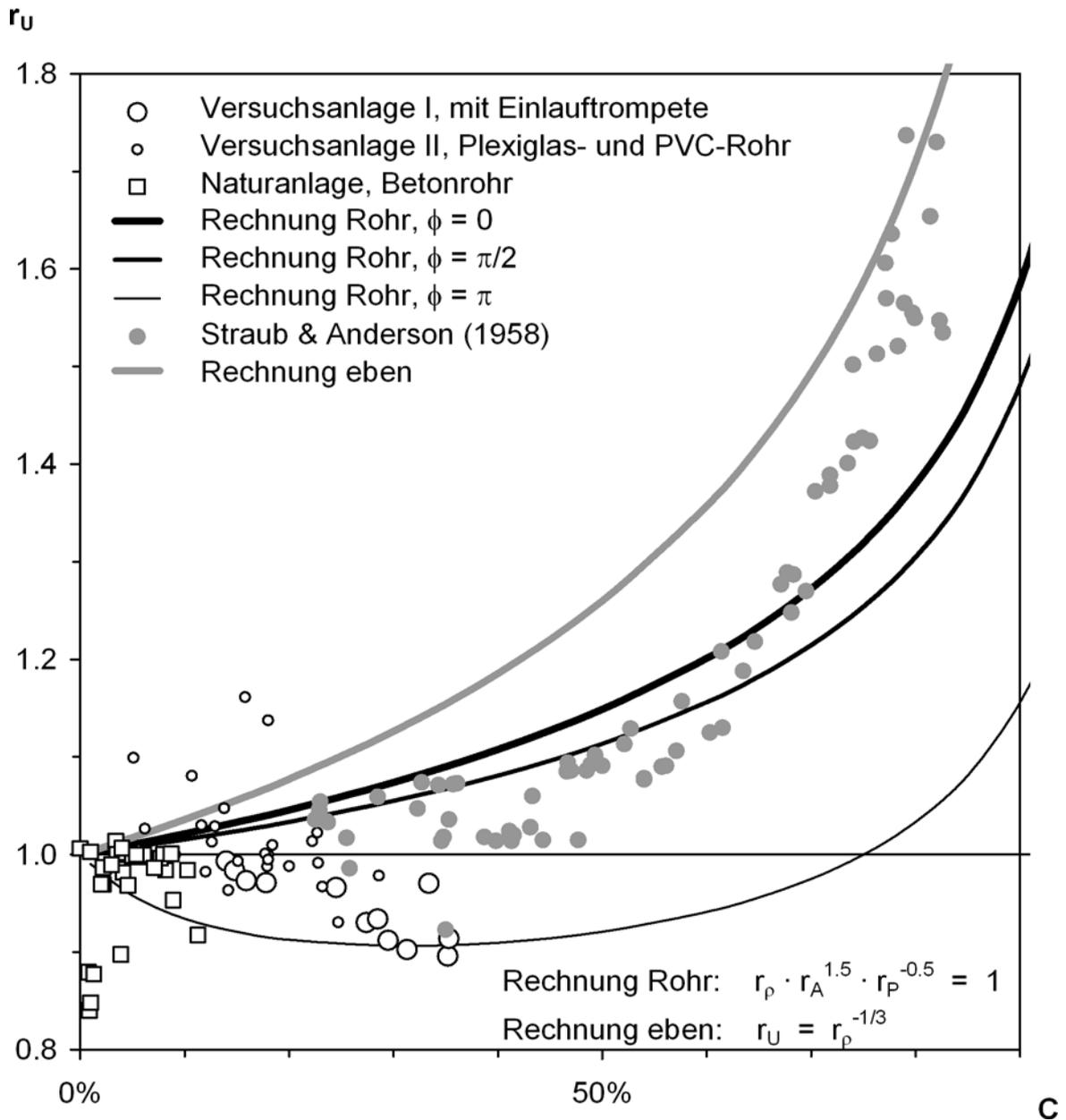
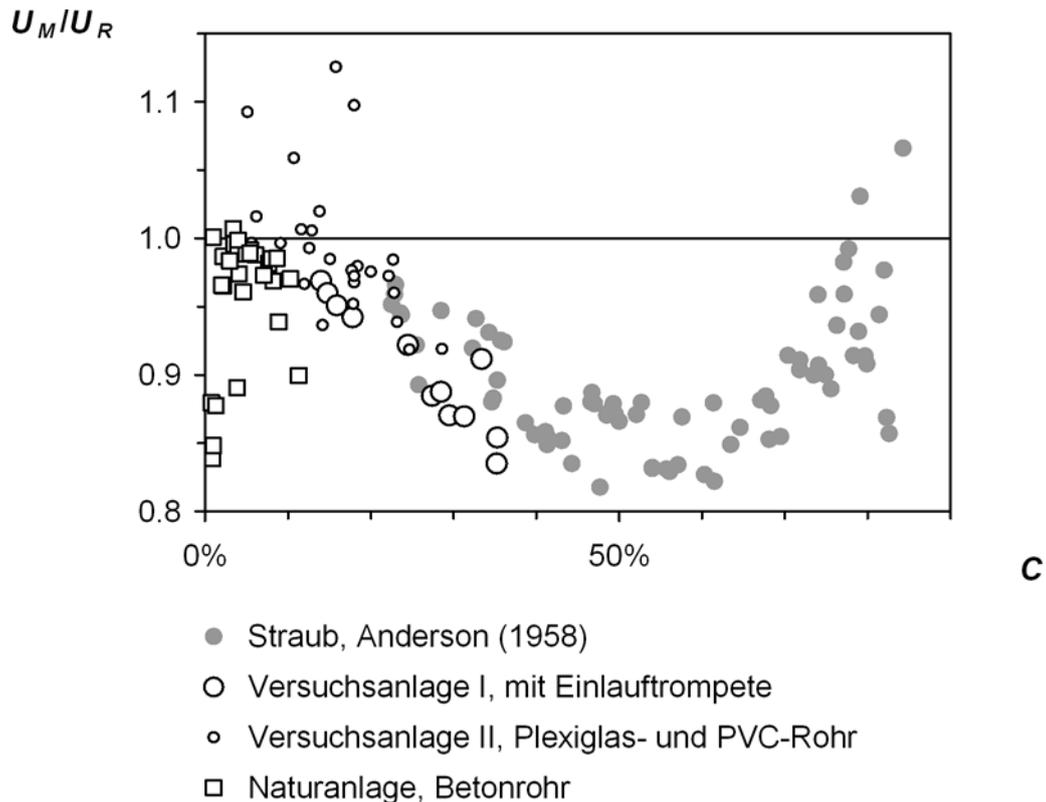


Bild 6-4: Geschwindigkeitserhöhungen r_U infolge Luftaufnahme im Rohr. Vergleich der Messungen von Volkart (1978) mit der Rechnung unter der Annahme einer gleichmässigen Luftverteilung. In grau der analoge Vergleich für die Daten von Straub & Anderson (1958).

- helle Symbole: Messungen von Volkart (1978);
- schwarze Linien: Auswertung der Gl. (6-22): $r_p r_A^{1.5} r_P^{-0.5} = 1$ für drei verschiedene Füllungen (immer Gemisch):
 leer: $\phi = 0$; halbvoll: $\phi = \pi/2$; voll: $\phi = \pi$.
- graue Symbole: Messungen von Straub & Anderson (1958);
- graue Linie: Auswertung der Gleichung (6-17): $r_U = r_p^{-1/3}$.



*Bild 6-5: Geschwindigkeiten infolge Luftaufnahme: Quotient aus Messwert und Rechnung nach Gleichung (6-18) (eben) bzw. (6-22) (Rohr).
 Grau: Messpunkte von Straub & Anderson (1958) für ebenen Abfluss.
 Helle Symbole: Messungen im Rohr nach Volkart (1978).*

6.2.4 Einfluss auf den Widerstandsbeiwert

a) Einfluss nach Wood (1983 ff.)

Wie gesehen postulieren Wood und nach ihm weitere Autoren stark abfallende Widerstandsbeiwerte, was der Bedingung (6-11) widerspricht. Es lohnt sich, den nach Wood definierten Widerstand, im Folgenden wie bei Wood mit f_e bezeichnet, genauer zu betrachten. Woods Ansatz (5-1) kann mit Hilfe der Kontinuität und einer Erweiterung um ρ_w umgeschrieben werden zu:

$$f_e = 8gS \frac{d_0}{U^2} = 8\rho_w gS \frac{d_0}{\rho_w U^2} = \frac{8\tau_0}{\rho_w U^2} \quad (6-23)$$

Der Vergleich mit dem Ausdruck (6-12) für den Gemischabfluss zeigt, dass Wood das Gesetz nach Darcy-Weisbach statt mit der Gemischdichte ρ mit der Reinwasserdichte ρ_w formuliert. Damit ist sein Widerstandsbeiwert f_e anders definiert. Aus den beiden Formulierungen (6-12) und (6-23) für den Gemischabfluss erhält man dann für das Verhältnis von f_e zu f :

$$\frac{f_e}{f} = \frac{\rho}{\rho_w} = r_\rho = 1 - C$$

oder, wenn man die Sohlkonzentration c_0 als massgebend betrachtet,

$$f_e/f = 1 - c_0 \quad . \quad (6-24)$$

Damit erklärt sich der drastische Abfall des Widerstands f_e nach Wood, wie er aus Bild 5-14 und Bild 5-15 ersehen werden kann, im Wesentlichen als *Resultat der von Wood getroffenen Definition* des Widerstandsbeiwerts. Auch dessen eigentlich unzulässige Abhängigkeit von der Dichte hat hierin ihre Ursache.

Allerdings unterschreitet die Approximation (5-3)

$$f_e/f = 1 - 1.1 c_0 \quad , \quad (5-3)$$

für die Messdaten den theoretischen Verlauf (6-24). Mit Bezug auf Abschnitt 6.2.2e könnte dieser Unterschied auf den geometrisch bedingten Anteil zurückzuführen sein. Aber auch dieser ist physikalisch gesehen nur insofern eine Widerstandsminderung, als eine grössere Abflusstiefe – eine veränderte Geometrie eben – den Widerstand *immer* senkt.

b) Grenzfall sehr hoher Luftkonzentrationen

Strebt die Luftkonzentration gegen 100%, so ergibt Gleichung (6-24) kein sinnvolles Resultat mehr, weil der Widerstand verschwände. Dies ist eine Folge der Voraussetzung aus Abschnitt 2.3.1, wonach die Luftdichte ρ_a zu Null gesetzt wurde. Dadurch vereinfachte sich die Gemischdichte ρ zu

$$\rho = (1 - C)\rho_w \quad \text{bzw.} \quad r_\rho = 1 - C \quad .$$

Der exakte Ausdruck wäre demgegenüber

$$\rho = (1 - C)\rho_w + C\rho_a \quad \text{bzw.} \quad r_\rho = 1 - C + C\frac{\rho_a}{\rho_w} \quad .$$

Die Widerstandsminderung wird dann

$$\frac{f_e}{f} = r_\rho = 1 - C + C\frac{\rho_a}{\rho_w}$$

und für den Grenzfall $C = 1$:

$$\frac{f_e}{f} = \frac{\rho_a}{\rho_w} \quad .$$

Als Sohlenschubspannung erhält man mit (6-23) für diesen Grenzfall

$$\tau_0 = \frac{f_e}{8} \rho_w U^2 = \frac{f}{8} \rho_a U^2 .$$

Man gelangt also zum gleichen Resultat wie mit dem ursprünglichen Konzept eines Fluid-unabhängigen Widerstandsbeiwerts f : Diesen hätte man nämlich direkt in Gleichung (6-12) statt (6-23) eingesetzt.

Dieser Grenzfall illustriert, wie sehr sich die Grösse f_e vom ursprünglichen Konzept eines Widerstandsbeiwerts entfernt, welcher nur die vom Gerinne herrührenden Einflüsse repräsentieren soll.

6.2.5 Freispiegelabfluss – allgemeiner Fall

a) Differentialgleichung

Der zentrale Mechanismus bleibt wie in 6.2.2 die Reduktion des Impulsaustausches infolge geringerer Dichte. Nur kann im allgemeinen Fall die Luftkonzentration über den Querschnitt variieren, d.h. $r_\rho = r_\rho(y) = 1 - c(y)$. Der Geschwindigkeitsgradient ist also in der allgemeinen Form (6-3) anzusetzen:

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \sqrt{\frac{1-\eta}{1-c}} \frac{1}{l^+} .$$

Die Integration dieses Gradienten führt dann zum Geschwindigkeitsprofil.

b) Randbedingung

Die Integration der obigen Differentialgleichung benötigt eine Randbedingung in Wandnähe in Form einer Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt. Sie wird in Kapitel 7 diskutiert.

Dabei wird eine Besonderheit zu berücksichtigen sein: Der Dichte-Effekt kann in der geschilderten Form nur wirksam sein, wenn sich die Blasen im Wesentlichen gleich bewegen wie das umgebende Wasser. Dies ist in unmittelbarer Wandnähe dann in Frage gestellt, wenn der Blasendurchmesser in die Grössenordnung der Mischungsweglänge l gelangt.

6.2.6 Zusammenfassung

Für einen *überall gleichen* Luftgehalt $C = 1 - r_\rho$ resultiert im ebenen Freispiegelabfluss eine Geschwindigkeitserhöhung r_U gegenüber dem unbelüfteten Referenzzustand, welche genähert werden kann mit:

$$r_U \approx \sqrt{\frac{r_d r_S}{r_\rho}} . \quad (6-10)$$

Die Verhältnisse r_d der Reinwassertiefen und r_s der Gefälle bringen zum Ausdruck, dass die Geschwindigkeitserhöhung auch davon abhängt, auf *welchen* unbelüfteten Referenzabfluss man sich bezieht. Bei gleichem Abfluss und gleichem Gefälle beispielsweise erhält man:

$$r_U \approx r_p^{-1/3} .$$

Auch der oft zitierte Abfall des Widerstandsbeiwerts f_e in der *Definition nach Wood* (1983 ff.), die vom Konzept eines konstanten Widerstandsbeiwerts abweicht, lässt sich gut nachvollziehen: Er ergibt sich zu

$$f_e/f = 1 - C .$$

Bei räumlich variablem Luftgehalt ändert sich nichts Grundlegendes. Man kommt den Messwerten aber näher, wenn man die Sohlenkonzentration c_0 statt des Mittelwerts C einsetzt, ein Hinweis auf die überproportionale Bedeutung der sohlennahen Vorgänge.

Eine wesentliche Aussage ist, dass eine Luftaufnahme höhere Geschwindigkeiten mit sich bringen kann, *ohne dass dafür eine Veränderung des Widerstandsbeiwerts f nötig ist!*

6.3 Viskoser Effekt

Wie in Abschnitt 5.2 erwähnt, sucht die Turbulenzforschung die Ursachen für die Widerstandsminderung vorwiegend im Bereich des *elastic layers*, also im Übergang von der viskosen Unterschicht zur turbulenten Hauptströmung. Der Prozess kann als eine *Verdickung* der viskosen Unterschicht gelesen werden. Ursache wäre eine erhöhte Viskosität, welche den Übergang zur Turbulenz weiter hinausschiebt. Der viskose Geschwindigkeitsgradient, der auch für eine grössere Zähigkeit immer noch viel höher ist als der turbulente, wäre dann über einen grösseren Bereich wirksam. Makroskopisch betrachtet führt dies zu einer Verschiebung des logarithmischen Profils, d.h. die Konstante B in Gleichung (3-31) wird grösser.

Dass die Turbulenzforschung dieser Zone soviel Aufmerksamkeit widmet, hängt auch damit zusammen, dass sie sich stark an Problemstellungen des Maschinenbaus oder der Verfahrenstechnik orientiert. Dort sind glatte Oberflächen, wo eine viskose Unterschicht tatsächlich auftritt, die Regel.

Demgegenüber geht man bei Schussrinnen von einem rauen Fließregime aus. Dennoch beruft sich Chanson (1994) auch für wasserbauliche Anlagen auf einen viskos begründeten Erklärungsansatz. Ausserdem hat Virk (1971) für

Polymerlösungen in nicht allzu rauen Rohren ähnliche Auswirkungen festgestellt wie in glatten. Der viskose Effekt muss also behandelt werden.

Die nachfolgenden Berechnungen berücksichtigen den unter Abschnitt 6.2 besprochenen Dichte-Effekt mit, denn auch er wirkt sich, wie man sehen wird, auf die Konstante B aus.

Bild 6-7 illustriert das Vorgehen und definiert die erforderlichen geometrischen Parameter. Die Resultate sind in Bild 6-9 zusammengefasst.

6.3.1 Wo ändert sich die Viskosität?

Das Modelle von Lumley (1969), welches von Polymerlösungen ausgeht, setzt voraus, dass der Geschwindigkeitsgradient im Bereich der viskosen Unterschicht unbeeinflusst bleibt, was die Beobachtungen ja auch bestätigen (Abschnitt 5.2.1). Für Polymerlösungen begründet Lumley diese Annahme so, dass die Polymere nur in einer gewissen Turbulenz Verhältnisse vorfinden können, die zu ihrer *Streckung* führen. Diese wiederum sei ein Bestandteil des Mechanismus, der die Viskosität überhaupt erst erhöht.

Man könnte eine analoge Annahme auch für Wasser-Luft-Gemische treffen: Verschiedene Autoren – vgl. Abschnitte 5.2.2b und c – haben ja beobachtet, dass die Luftkonzentration in der viskosen Unterschicht verschwindet. Eine Erklärung könnte sein, dass die Luft nicht in die viskose Unterschicht gelangen kann, weil sie durch Tiefdruckzonen angrenzender turbulenter Wirbelstrukturen zurückgehalten wird. Man könnte sich also vorstellen, dass die Luftblasen nur im verdickten Teil bzw. im elastic layer wirksam werden, während in der unteren, rein viskosen Schicht der sehr steile Reinwassergradient erhalten bliebe.

Liest man diese Autoren genauer, so ist die luftfreie Schicht freilich dicker, nämlich ein Mehrfaches der viskosen Unterschicht. In diesem Fall sagt Lumleys Modell nichts aus über den Zustand, der zwischen der ursprünglichen viskosen Unterschicht und der belüfteten Zone weiter ausserhalb herrschen würde. – Nach Hoyer (2006) und Müller (2006) interpretiert die Turbulenzforschung den Mechanismus gegenwärtig so, dass eine Turbulenzdämpfung durch Luftblasen, selbst wenn sie deutlich ausserhalb der viskosen Unterschicht stattfindet, die Ausschläge auch in den tiefer liegenden Schichten unterdrückt. Die viskose Strömung würde stabilisiert, die viskose Unterschicht tatsächlich "verdickt". Dies ist die Annahme, die im Folgenden verwendet werden soll.

6.3.2 Rechnung auf der Basis von Marié (1987)

a) Das Modell von Marié

Chanson (1994a, 1996) überträgt einen turbulenztheoretischen Ansatz in den Wasserbau. Er beruft sich auf Marié (1987), der wiederum Lumley (1969) zitiert. Die Änderung der Zähigkeit mit dem Luftgehalt berechnet Marié nach Batchelor & Green (1972), vgl. Abschnitt 2.2.4b.

Im Gegensatz zu Lumley nimmt Marié implizit an, die Zähigkeit sei über den gesamten viskosen Bereich, also auch in der *ursprünglichen* viskosen Unterschicht, erhöht. Diese Annahme ist diskutabel: Zunächst widerspricht sie sowohl Lumleys Ansatz als auch den in Abschnitt 6.3.1 zitierten Autoren, welche in unmittelbarer Wandnähe eben keine Luft beobachteten. Sie lässt auch keinen Vergleich zu mit all jenen Experimenten, welche einen wandnahen, nach oben und unten begrenzten Luftschleier zum Gegenstand haben (vgl. Abschnitt 6.3.1).

Zum andern verläuft Mariés Profil in diesem erweiterten viskosen Bereich *linear*. Dies steht im Widerspruch zu den Erkenntnissen, die in Abschnitt 5.2.1 vorgestellt wurden: Demnach wäre die maximal mögliche Widerstandsminderung durch das ultimative Profil von Virk begrenzt, und dieses ist *logarithmisch*. Sollte Virks Profil, das anhand von Polymerlösungen gefunden wurde, auch für Wasser-Luft-Gemische gelten, so müsste Marié die Widerstandsminderung überschätzen.

Trotzdem wird an dieser Stelle sein Weg weiter verfolgt: Zum einen ist es das Modell, das – s. oben – in der wasserbaulichen Literatur Eingang gefunden hat und deshalb diskutiert werden muss. Zum andern liegt man damit auf der sicheren Seite, was die maximal mögliche Auswirkung des Effekts anbelangt.

Die Berechnung wird nur bis zur Ausweitung der viskosen Unterschicht und zur Bestimmung der Konstanten B geführt. Die Mittelung der Geschwindigkeit und die Bestimmung des Widerstands wird nicht mehr vorgenommen, weil sich zeigen wird, dass der Effekt, jedenfalls in der von Marié vorgeschlagenen Form, auf wasserbaulichen Entlastungsanlagen nicht zu erwarten ist.

b) Lokalisierung des verschobenen Übergangs zur Turbulenz

Marié geht aus von den Gleichungen (3-36) und (3-37), welche auf die effektiv vorhandene Viskosität ν , also des Gemischabflusses, normiert sind, d.h.:

$$\left(k \frac{\nu}{u_\tau}\right) \cdot \left(y \frac{u_\tau}{\nu}\right) = 1 \quad \text{und} \quad (3-36)$$

$$\left(k \frac{\nu}{u_\tau}\right) \cdot 4 \sqrt{\kappa \left(y \frac{u_\tau}{\nu}\right)} = 0.2 \quad . \quad (3-37)$$

Marié setzt u_τ für den Reinwasser- und den Gemischabfluss gleich an, worauf am Ende dieses Abschnitts noch eingegangen wird. – Man kann die beiden obigen Gleichungen auf die Reinwasser-Normierung (“+“) wechseln, indem man die linke Seite von Gleichung (3-36) mit $1/r_v = v_w/v$ erweitert und Gleichung (3-37) durch $r_v^{3/4} = (v/v_w)^{3/4}$ dividiert:

$$k \frac{v_w}{u_\tau} \cdot y \frac{u_\tau}{v_w} = 1 \quad \text{bzw.} \quad k^+ \cdot y^+ = 1 \quad (3-36)a$$

$$k \frac{v_w}{u_\tau} \cdot 4 \sqrt[4]{\kappa y \frac{u_\tau}{v_w}} = \frac{0.2}{r_v^{3/4}} \quad \text{bzw.} \quad k^+ \cdot 4 \sqrt[4]{\kappa y^+} = \frac{0.2}{r_v^{3/4}} \quad (3-37)a$$

Der Übergang zur Turbulenz findet im Schnittpunkt dieser beiden Linien statt. Dessen Lage y_v^+ erhält man nach Elimination von k^+ :

$$\frac{y_v^+}{r_v} = \sqrt[3]{\frac{\kappa}{0.2^4}} \quad .$$

Die rechte Seite ist nach Gleichung (3-38) gerade die Dicke y_{vW}^+ der viskosen Unterschicht im Reinwasser, so dass also

$$\frac{y_v^+}{y_{vW}^+} = r_v = \frac{r_\mu}{r_\rho} \quad (\text{mit } y_{vW}^+ = 10.8) \quad (6-25)$$

Nach Marié wächst also der viskose Bereich im Gemisch linear mit der kinematischen Zähigkeit.

Man kommt auch anders auf (6-25): Die auf die *jeweilige* Viskosität normierte Dicke der viskosen Unterschicht muss sowohl für den Reinwasser- als auch für den Gemischabfluss den dimensionslosen, konstanten Wert y_{vW}^+ annehmen (also 6.35 bzw. 10.8, je nachdem ob man Lumleys Resultat (3-38) oder den empirischen Wert ansetzt). Dies unter der Voraussetzung, dass es eben die Viskosität *im Bereich des viskos-turbulenten Übergangs* ist, welche auch dessen Lage bestimmt (vgl. Abschnitt 3.12.3). Es gilt also:

$$\frac{u_\tau}{v} y_v = y_{vW}^+ \quad (= \frac{u_\tau}{v_w} y_{vW}^+). \quad (6-26)$$

Man kann die linke Seite auf die Reinwasserviskosität normieren, indem man sie mit v_w erweitert:

$$\frac{u_\tau}{v} y_v = \frac{v_w}{v_w} \cdot \frac{u_\tau}{v} y_v = \frac{v_w}{v} y_v^+ = \frac{1}{r_v} y_v^+ \quad .$$

Eingesetzt in Gl. (6-26) erhält man:

$$\frac{1}{r_v^+} y_v^+ = y_{vW}^+ ,$$

was wieder Mariés Resultat (6-25) entspricht.

Allerdings unterscheidet Marié, wie einleitend angesprochen, bei der Schubspannungsgeschwindigkeit nicht zwischen Reinwasser und Gemisch, womit der Einfluss der Dichte aus seiner Betrachtung entfällt. Dieser Einfluss entstammt, wie die Herleitung von Gl. (3-6) aus Gl. (3-8) zeigt, der *lokalen* dynamischen Viskosität μ und somit der *lokalen* kinematischen Viskosität ν und der *lokalen* Dichte ρ , also analog zum Dichte-Effekt in der turbulenten Zone (vgl. die Überlegungen in Abschnitt 6.2.2a).

Bezieht man den Dichte-Einfluss mit ein, so ist in Gl. (6-26) zu unterscheiden zwischen $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho_w}$ nach Definition (6-4) einerseits und $\sqrt{\tau/\rho}$ andererseits. In Gl. (6-26) geht diese Änderung in der linken Seite ein:

$$\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} y_v = y_{vW}^+ \quad \left(= \frac{u_\tau}{\nu_w} y_{vW}^+ \right). \quad (6-26)a$$

Um die linke Seite wieder auf Reinwasser zu normieren, muss sie diesmal mit $\nu_w \sqrt{\rho_w}$ erweitert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} y_v &= \frac{\nu_w \sqrt{\rho_w}}{\nu_w \sqrt{\rho_w}} \cdot \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} y_v = \frac{1}{\nu_w \sqrt{r_\rho}} \cdot \frac{1}{r_v \sqrt{\rho_w}} \sqrt{\tau} y_v = \frac{1}{r_v \sqrt{r_\rho}} \cdot \frac{u_\tau}{\nu_w} y_v \\ &= \frac{1}{r_v \sqrt{r_\rho}} \cdot y_v^+ . \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl. (6-26)a erhält man das zu (6-25) analoge Resultat:

$$\frac{y_v^+}{y_{vW}^+} = r_v \sqrt{r_\rho} = \frac{r_\mu}{\sqrt{r_\rho}} \quad \left(\text{mit } y_{vW}^+ = 10.8 \right) . \quad (6-27)$$

Bild 6-6 wertet Gleichung (6-27) für verschiedene Viskositätsansätze aus Abschnitt 2.2.4 aus. Die hierfür massgebende Sohlluftkonzentration c_0 wurde den Messungen von Straub & Anderson (1958) entnommen, und zwar unter der Annahme von Wood (1985), dass c_0 nur vom Gefälle abhängt.

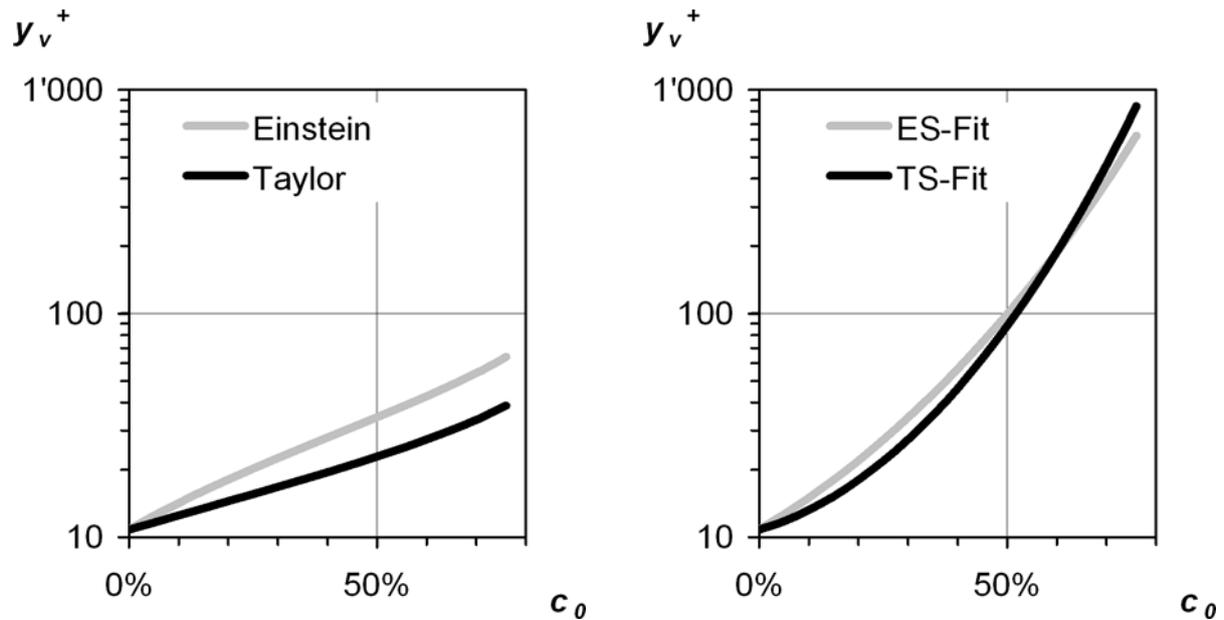


Bild 6-6: Theoretische Ausweitung der viskosen Zone unter Einfluss von Luftblasen nach dem Modell von Marié (1987).
 Links: Gemisch-Viskosität nach Einstein (2-10) bzw. Taylor (2-12).
 Rechts: Gemisch-Viskosität nach ES- bzw. TS-Fit (2-15).

c) Gradienten

In der *viskosen Unterschicht* beträgt der Gradient für *Reinwasser* nach Gl. (3-10):

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = 1 \quad .$$

Im *Gemisch* erhöht der Luftgehalt die Zähigkeit und reduziert den Gradienten im *viskosen* Bereich nach dem Newton'schen Gesetz auf:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau}{\mu} = \frac{\tau}{\rho \nu} = \frac{\tau}{r_p \rho_w \cdot r_v \nu_w} = \frac{u_\tau^2}{r_p r_v \nu_w} = \frac{u_\tau^2}{r_\mu \nu_w} \quad (6-28)$$

oder

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{1}{r_\mu} \quad .$$

Die Gradienten im *turbulenten* Bereich wurden schon in Kapitel 3 und in Abschnitt 6.2 besprochen. Sie betragen *ohne bzw. mit Luft*:

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\sqrt{r_p} \kappa y^+} \quad .$$

d) **Geschwindigkeitsprofil**

Grundsätzlich ergibt sich B wieder, wie schon in Abschnitt 3.6.3 geschildert, aus der Rückverlängerung des logarithmischen Astes auf die Höhe $y^+ = 1$. Diese Ermittlung gestaltet sich hier aber etwas schwieriger, denn der logarithmische Ast wird, wie unten detailliert aufgezeigt wird, infolge des Dichte-Effekts mitbeeinflusst. Es muss deshalb das *gesamte* Geschwindigkeitsprofil aufintegriert werden.

Betrachtet wird der allgemeine Fall eines wandnahen Luftschleiers, wie er beispielsweise in den Experimenten von Bogdevich et al. oder von Madavan et al. untersucht wurde (vgl. Abschnitt 6.3.1). Die Konzentrationsverteilung $c(y)$ dieses Luftschleiers sei – s. Bild 6-7 – rechteckverteilt mit einer Untergrenze y_{aU} und einer Obergrenze y_{aO} ; ihr Wert innerhalb dieses Bereichs betrage c^* . Der Übergang zur Turbulenz sei unter dem Einfluss der Luft von der Reinwasserlage y_{vW} auf die neue Lage y_v nach Gleichung (6-27) verschoben.

Ferner muss die Untergrenze y_{aU} unter dem in Abschnitt b ermittelten viskositurbulenten Übergang y_v liegen, weil an dessen Stelle sonst keine Luft vorhanden wäre. Andererseits muss die Obergrenze y_{aO} sicher im turbulenten Bereich liegen, weil nur die Turbulenz die Luft am Entweichen nach oben hindern kann. Also gilt:

$$y_{aU} \leq y_v \leq y_{aO} \quad .$$

Das idealisierte Geschwindigkeitsprofil mit Luftschleier wird jetzt durch drei Knicke in vier Zonen unterteilt, und zwar von oben nach unten aufgelistet (Bild 6-7):

- IV eine turbulente Reinwasser-Zone,
- III eine turbulente Gemisch-Zone,
- II eine viskose Gemisch-Zone,
- I eine viskose Reinwasser-Zone.

Für diese Zonen sind die Gradienten gemäss Abschnitt c einzusetzen. Deren Integration zum Geschwindigkeitsprofil erfolgt von unten nach oben. Die an einer Zonengrenze erreichte Geschwindigkeit \bar{u}^+ ist jeweils wieder Ausgangspunkt für die weitere Integration bis zur nächsten Grenze. Mit den Gradienten aus Abschnitt c erhält man dann folgende Geschwindigkeiten innerhalb der Zonen und an deren Obergrenzen (wieder von oben nach unten aufgeführt):

innerhalb der Zone:

Zonengrenze:

$$\text{IV} \quad \bar{u}^+ = \bar{u}_{aO}^+ + \frac{1}{\kappa} \int_{y_{aO}^+}^{y^+} \frac{1}{y^+} dy^+ = \bar{u}_{aO}^+ + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{y_{aO}^+}$$

$$\bar{u}_{Max}^+ = \bar{u}_{aO}^+ + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_{Max}^+}{y_{aO}^+}$$

$$\text{III} \quad \bar{u}^+ = \bar{u}_v^+ + \frac{1}{\kappa \sqrt{r_p}} \int_{y_v^+}^{y^+} \frac{1}{y^+} dy^+ = \bar{u}_v^+ + \frac{1}{\kappa \sqrt{r_p}} \ln \frac{y^+}{y_v^+}$$

$$\bar{u}_{aO}^+ = \bar{u}_v^+ + \frac{1}{\kappa \sqrt{r_p}} \ln \frac{y_{aO}^+}{y_v^+}$$

$$\text{II} \quad \bar{u}^+ = \bar{u}_{aU}^+ + \int_{y_{aU}^+}^{y^+} \frac{1}{r_\mu} dy^+ = \bar{u}_{aU}^+ + \frac{y^+ - y_{aU}^+}{r_\mu}$$

$$\bar{u}_v^+ = \bar{u}_{aU}^+ + \frac{y_v^+ - y_{aU}^+}{r_\mu}$$

$$\text{I} \quad \bar{u}^+ = y^+$$

$$\bar{u}_{aU}^+ = y_{aU}^+$$

In den Integralausdrücken figuriert y^+ sowohl als Obergrenze wie auch als Integrationsvariable. Letztere wurden daher mit y^+ gekennzeichnet.

Tab. 6-2 enthält ein Zahlenbeispiel, das in Bild 6-7 graphisch dargestellt ist. Das Beispiel benützt für die Abschätzung der Viskositätsänderung r_μ den Ansatz nach Einstein aus Abschnitt 2.2.4a, was für die im Beispiel angesetzte Konzentration c^* von 50% wenig realistisch ist. Diese Kombination ist aber für Demonstrationszwecke geeignet, weil die Resultate gut darstellbar sind.

Tab. 6-2: Integration des Geschwindigkeitsprofils im Beispiel von Bild 6-7.

$$c^* = 50\% \text{ von } y_{aU}^+ = 20 \text{ bis } y_{aO}^+ = 90. \quad y_{Max}^+ = 1000.$$

$$r_\mu = 1 + 2.5 \cdot 50\% = 2.25 \text{ nach Einstein, Abschnitt 2.2.4a;}$$

$$r_v = r_\mu / r_p = 2.25 / (1 - 50\%) = 4.5;$$

$$\Rightarrow y_v^+ = r_v \sqrt{r_p} \cdot y_{vW}^+ = 4.5 \sqrt{1 - 50\%} \cdot 10.8 = 34 :$$

Höhe	Geschwindigkeit	im Beispiel (Bild 6-7):	
y_{Max}^+	$\bar{u}^+ = \bar{u}_{aO}^+ + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_{max}^+}{y_{aO}^+}$	$y_{Max}^+ = 1000$	$\bar{u}_{Max}^+ = 30 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1000}{90} = 36$
y_{aO}^+	$\bar{u}_{aO}^+ = \bar{u}_v^+ + \frac{1}{\kappa \sqrt{r_p}} \ln \frac{y_{aO}^+}{y_v^+}$	$y_{aO}^+ = 90$	$\bar{u}_{aO}^+ = 26 + \frac{1}{\kappa \sqrt{0.5}} \ln \frac{90}{34} = 30$
y_v^+	$\bar{u}_v^+ = \bar{u}_{aU}^+ + \frac{y_v^+ - y_{aU}^+}{r_\mu}$	$y_v^+ = 34$	$\bar{u}_v^+ = 20 + \frac{34 - 20}{2.25} = 26$
y_{aU}^+	$\bar{u}_{aU}^+ = y_{aU}^+$	$y_{aU}^+ = 20$	$\bar{u}_{aU}^+ = 20$

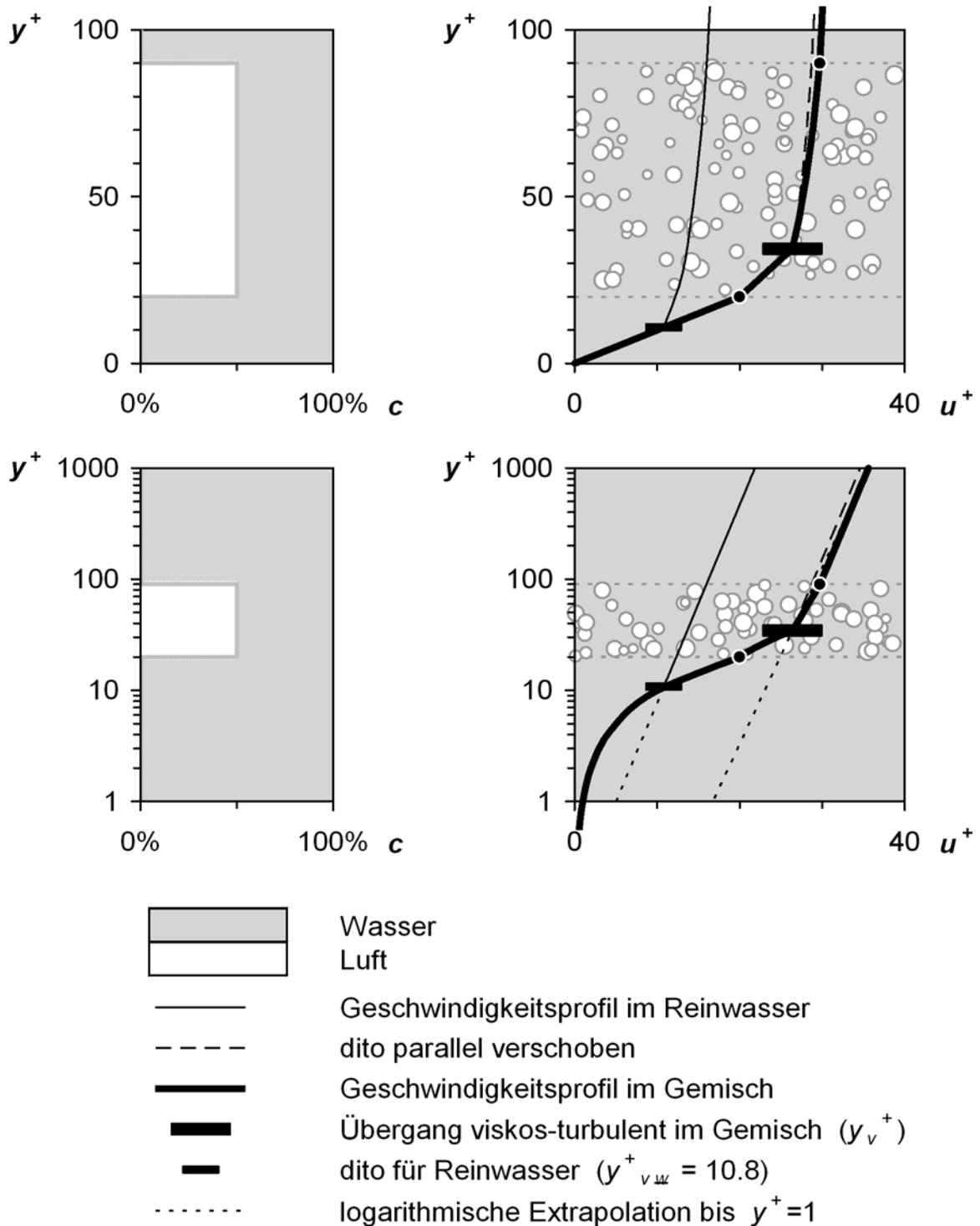


Bild 6-7: Veränderung des Geschwindigkeitsprofils als Folge einer erhöhten Viskosität und des Dichte-Effekts. Links die angenommene Luftverteilung, rechts die resultierenden Geschwindigkeitsprofile. Oben linear, unten semilogarithmisch aufgetragen. Ausgangswerte: $y_{aU}^+ = 20$, $y_{aO}^+ = 90$, $y_{Max}^+ = 1000$, $c^* = 50\%$. y_v^+ ergibt sich zu 34.

e) Einfluss auf die Konstante B

Das Reinwasserprofil nach Gleichung (3-24) – vgl. auch die dünn ausgezogene Kurve in Bild 6-7 – verläuft durch den Punkt $(y_{vW}^+; \bar{u}_{vW}^+ = y_{vW}^+)$, also durch den Schnittpunkt des logarithmischen und des viskosen Astes. Die Konstante B sei für den Reinwasserfall mit dem Index “ W ” markiert. κ und B_W stehen dann in folgendem Zusammenhang mit der entsprechenden Dicke y_{vW}^+ der viskosen Unterschicht:

$$B_W = y_{vW}^+ - \frac{1}{\kappa} \ln y_{vW}^+ . \quad (6-29)$$

κ und B_W sind aus der semilogarithmischen Darstellung von Bild 6-7 ablesbar: Die Steigung des logarithmischen Astes bestimmt κ , und seine Extrapolation hinab auf die Höhe $y^+ = 1$, in Bild 6-7 also auf die Abszisse, liefert den bekannten Wert $B_W = 5$.

Analog soll nun die Konstante B für den Fall mit Luftschleier abgelesen werden. Allerdings ist der turbulente Ast in der semilogarithmischen Darstellung auf der Höhe y_{a0}^+ geknickt und muss durch eine Gerade angenähert werden. Aus diesem Grund wird hier eine “Pseudo”-Kármán-Konstante κ' eingeführt, welche die Steigung dieser Gerade repräsentieren soll.

Eine mögliche Wahl dieser Gerade ist die Verbindung zwischen den beiden Randpunkten des turbulenten Bereichs, also zwischen dem Profilpunkt an der Oberfläche bei y_{Max}^+ und dem Punkt im viskos-turbulenten Übergang bei y_v^+ . Geht man für diese Gerade vom allgemeinen Ansatz:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa'} \ln y^+ + B \quad (6-30)$$

aus und setzt für die beiden genannten Punkte die in Tab. 6-2 berechneten Geschwindigkeiten ein, so erhält man für y_v^+

$$\bar{u}_v^+ = \frac{1}{\kappa'} \ln y_v^+ + B \quad (\text{mit } y_v^+ = \frac{y_{vW}^+}{r_v \sqrt{r_\rho}} = \frac{\sqrt{r_\rho}}{r_\mu} y_{vW}^+) , \quad (6-31)$$

und für y_{Max}^+

$$\bar{u}_v^+ + \frac{1}{\kappa \sqrt{r_\rho}} \ln \frac{y_{a0}^+}{y_v^+} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y_{Max}^+}{y_{a0}^+} = \frac{1}{\kappa'} \ln y_{Max}^+ + B .$$

Die Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \left(\ln \frac{y_{Max}^+}{y_v^+} \right) / \left(\frac{1}{\sqrt{r_\rho}} \ln \frac{y_{a0}^+}{y_v^+} + \ln \frac{y_{Max}^+}{y_{a0}^+} \right) . \quad (6-32)$$

Mit diesem Wert für κ' kann B aus Gleichung (6-31) bestimmt werden:

$$B = \bar{u}_v^+ - \frac{1}{\kappa'} \ln y_v^+ \quad (6-33)$$

Hierbei ist nach (6-27) $y_v^+ = r_v \sqrt{r_\rho} \cdot y_{v\bar{w}}^+$ einzusetzen, und \bar{u}_v^+ addiert sich aus Tab. 6-2 zu

$$\bar{u}_v^+ = y_{aU}^+ + \frac{y_v^+ - y_{aU}^+}{r_\mu} \quad (6-34)$$

f) Resultate für die Konstante B illustriert anhand von Grenzfällen

Am besten lassen sich die Resultate für B anhand von vier Grenzfällen aufzeigen, welche in der linken Hälfte der Tab. 6-3 beschrieben sind: Im Fall 2 umfasst der Luftschleier den gesamten Abfluss, im Fall 1 nur die viskose und im Fall 4 nur die turbulente Zone. Fall 3 ist ein sehr dünner Luftschleier exakt am Übergang zur Turbulenz. Seine Parameter beschreiben natürlich – dies ist ein Paradox! – gleichzeitig den Reinwasserfall.

Wendet man die Gleichungen (6-32) bis (6-34), den Ausdruck (6-27): $y_v^+ = y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho}$ sowie die Beziehung $r_\mu = r_\rho r_v$ auf diese vier Fälle an, so erhält man die in Tab. 6-3 zusammengestellten Ausdrücke für κ'/κ und B .

Tab. 6-3: Berechnung der Konstanten B für die Fälle 1 bis 4; Auswertung s. Bild 6-9.

Fall	$y_{aU}^+ =$	$y_{aO}^+ =$	$\bar{u}_v^+ =$	$\frac{\kappa'}{\kappa} =$	$B =$
1	0	y_v^+	y_v^+ / r_μ	1	$y_{v\bar{w}}^+ / \sqrt{r_\rho} - \frac{1}{\kappa} \ln(y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho})$
2	0	y_{Max}^+	y_v^+ / r_μ	$\sqrt{r_\rho}$	$y_{v\bar{w}}^+ / \sqrt{r_\rho} - \frac{1}{\kappa \sqrt{r_\rho}} \ln(y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho})$
3	y_v^+	y_v^+	y_v^+	1	$y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho} - \frac{1}{\kappa} \ln(y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho})$
4	y_v^+	y_{Max}^+	y_v^+	$\sqrt{r_\rho}$	$y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho} - \frac{1}{\kappa \sqrt{r_\rho}} \ln(y_{v\bar{w}}^+ r_v \sqrt{r_\rho})$

Bild 6-8 illustriert die Fälle 1, 2 und 3 analog zu Bild 6-7; Bild 6-9 liefert eine Gesamtübersicht über die Resultate.

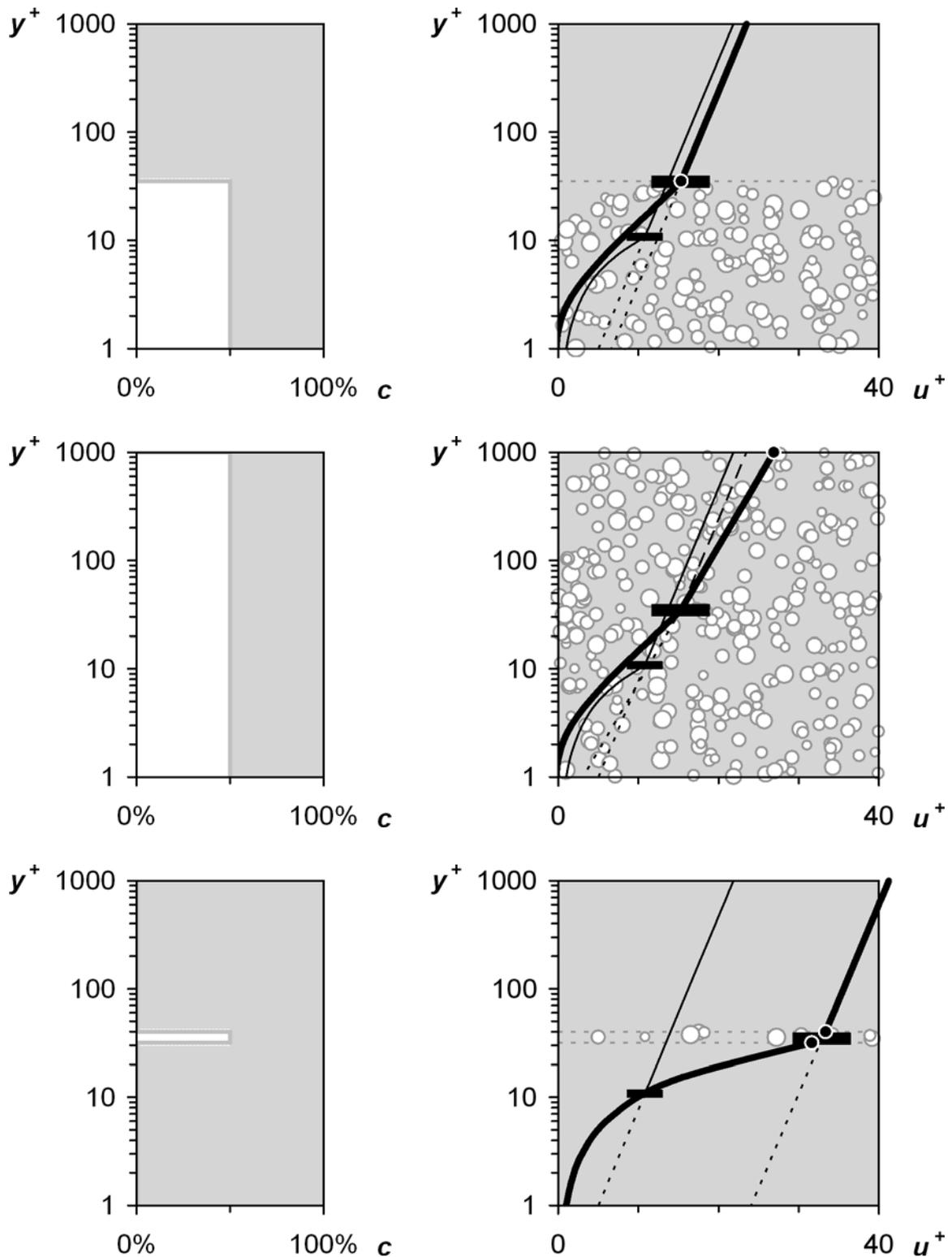


Bild 6-8: Von oben nach unten: Grenzfälle 1, 2 und 3 aus Abschnitt f bzw. Tab. 6-3, Darstellung analog Bild 6-7 unten.

Zahlenwerte: $c^* = 50\%$, $y_{max}^+ = 1000$, $y_v^+ = 34$ (wie Bild 6-7);

Lage des Luftschleiers:

Fall 1: $y_{aU}^+ = 0$, $y_{aO}^+ = y_v^+ = 34$;

Fall 2: $y_{aU}^+ = 0$, $y_{aO}^+ = 1000$;

Fall 3: $y_{aU}^+ \approx y_{aO}^+ \approx 34$.

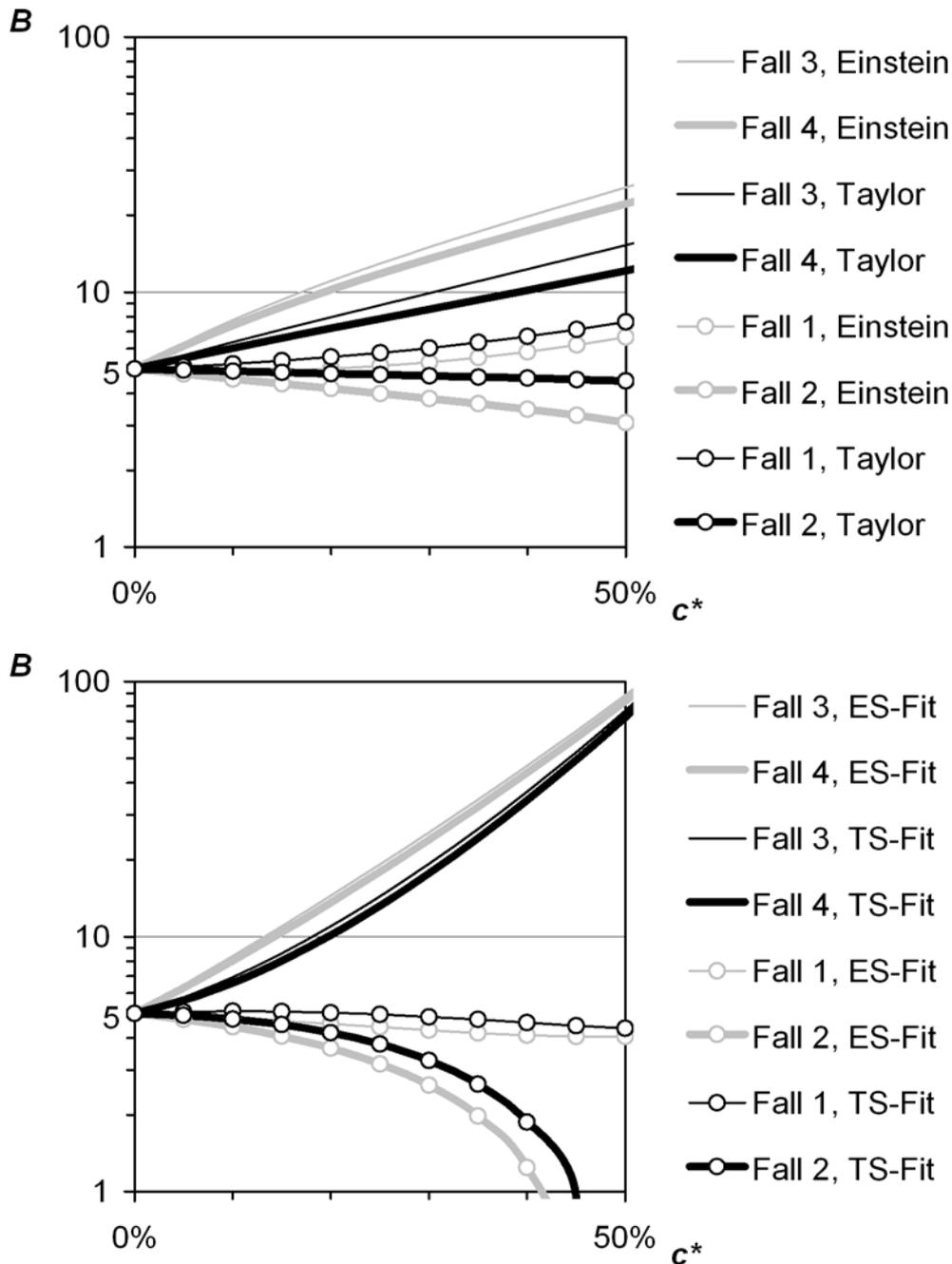


Bild 6-9: Verlauf von B in Abhängigkeit von Lage und Konzentration des Luftschleiers (Auswertung von Tab. 6-3). Der Einfluss der Luftblasen auf die Viskosität ist berechnet nach Einstein und Taylor (Abschnitt 2.2.4f). In der unteren Abbildung wurden die beiden Fits (2-15) verwendet, welche sich für hohe Luftkonzentrationen an den Messresultaten von Sibree orientieren.

Es zeigt sich, dass die Untergrenze des Luftschleiers den grössten Einfluss hat: Die Werte für B werden sehr hoch, wenn der viskose Bereich keine Luft enthält (Fall 4). Der Wert kann theoretisch noch leicht gesteigert werden, wenn auch in der turbulenten Zone ein möglichst grosser Teil luftfrei ist, weil dann die Rückverlängerung des

logarithmischen Asts auf $y^+ = 1$ gegenüber dem Reinwasserfall keine Reduktion von B zur Folge hat (Fall 3).

Fall 4 würde auf den Fall einer Schussrinne – so sich denn überhaupt eine viskose Unterschicht ausbilden kann – am ehesten zutreffen: Einerseits dürfte die Luft auch hier aus der viskosen in die turbulente Zone abwandern. Andererseits nimmt die Belüftung in der turbulenten Zone nach oben hin zu, der Luftschleier hat also keine Obergrenze.

Ganz unabhängig vom Resultat für B muss aber überprüft werden, ob der viskose Effekt nach Marié auf Schussrinnen überhaupt auftreten kann. Hierzu müsste er in der Lage sein, einen Wechsel zu hydraulisch glatten Verhältnissen herbeizuführen.

6.3.3 Wechsel zu hydraulisch glatten Verhältnissen auf Schussrinnen

Ein Übergang von hydraulisch rauhen zu hydraulisch glatten Verhältnissen wäre denkbar, falls die Viskosität und damit die Ausdehnung der viskosen Zone so vergrößert würden, dass mindestens die über den Bezugshorizont exponierten Teile der Rauheiten wieder in die viskose Zone “eingetaucht” würden. Diese Bedingung lässt sich ausdrücken als:

$$y_v^+ / k^+ > s \quad . \quad (6-35)$$

In Bild 6-6 ist y_v^+ nach Gleichung (6-27) und mit verschiedenen Ansätzen für die Viskositätsänderung aus Abschnitt 2.2.4 berechnet. Die hierfür massgebende Sohlluftkonzentration c_0 wurde den Messungen von Straub & Anderson (1958) entnommen, und zwar unter der Annahme von Wood (1985), dass c_0 nur vom Gefälle S abhängt.

Zusammen mit den normierten Rauheiten k^+ (Bild 6-10 links) lässt sich der Quotient k^+ / y_v^+ berechnen. Bild 6-10, Mitte und rechts, zeigt die Resultate, und zwar für den relevanten Neigungsbereich über etwa 30° ($S = 50\%$). Für die Gemisch-Viskosität wurden der Ansatz (2-10) nach Einstein sowie der ES-Fit (2-15) eingesetzt. Nach Bild 6-6 ergibt letzterer bei realistischen Sohlluftkonzentrationen die höchsten Werte für y_v^+ und damit für y_v^+ / k^+ .

Der unerwartet schwache Einfluss des Gefälles S erklärt sich, wenn man die linke Seite in der Bedingung (6-35) ausschreibt, und zwar unter Berücksichtigung der Abhängigkeit $r_\mu = r_\mu(c_0) = r_\mu(c_0(S, \dots))$:

$$\frac{y_v^+}{k^+} = \frac{y_{vw}^+ r_v \sqrt{r_\rho}}{k \sqrt{\tau/\rho}} = \frac{y_{vw}^+ r_v \sqrt{r_\rho}}{k \sqrt{\tau/\rho}} = \frac{y_{vw}^+ \cdot r_\mu(c_0(S, \dots)) \cdot v}{k \sqrt{g d_0 S} \cdot r_\rho}$$

$$\frac{y_v^+}{k^+} = \frac{y_{vw}^+ r_v \sqrt{r_\rho}}{k \sqrt{\tau/\rho}} = \frac{y_{vw}^+ r_v \sqrt{r_\rho}}{\frac{k}{v_w r_v \sqrt{r_\rho \rho_w}} \sqrt{\tau}} = \frac{y_{vw}^+ r_v^2 r_\rho}{k \sqrt{\tau/\rho_w}} = \frac{y_{vw}^+}{k \sqrt{g S d_0}} \cdot \frac{r_\mu^2(c_0(S, \dots))}{r_\rho}$$

S kommt also sowohl im Zähler wie im Nenner vor, was seinen Einfluss schwächt.

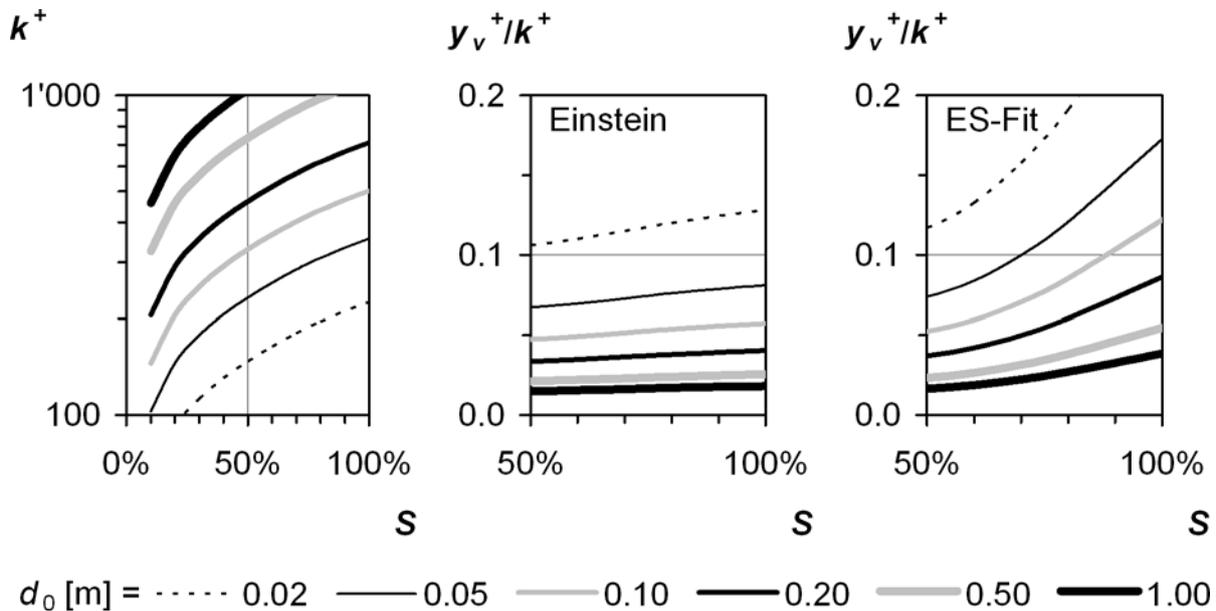


Bild 6-10: Links: Rauheit k^+ in Abhängigkeit vom Gefälle S mit der Reinwassertiefe d_0 als Parameter; Rauheit $k = 0.6$ mm.

Mitte und rechts: Das entsprechende Verhältnis der Dicke y_v^+ der viskosen Zone unter Lufteinfluss zu k^+ , einmal für den Ansatz (2-10) nach Einstein, einmal für den ES-Fit (2-15) gerechnet.

Es zeigt sich, dass für Reinwassertiefen über 5 bis 10 cm nicht mit einem Übergang in den glatten Bereich zu rechnen ist: Die resultierenden Werte für y_v^+/k^+ liegen deutlich unter den zu erwartenden Expositionen s , welche im Bereich von über 0.1 vermutet werden. Für Prototypen ist nicht einmal die Größenordnung erreicht. – Bei kleineren Abflusstiefen und bei Rauheiten, wie sie z.B. in den Versuchen von Straub & Anderson (1958) gefahren wurden, gelangt man allerdings in einen Grenzbereich: Selbst für die kleinere betrachtete Viskosität nach Einstein kann der viskose Effekt nicht mehr a priori ausgeschlossen werden.

6.3.4 Zusammenfassung

Luftblasen dürften in der Lage sein, die Viskosität gegenüber dem Reinwasser zu erhöhen, z.B. entsprechend den Ansätzen von Einstein (1906/11) bzw. Taylor (1954) oder entsprechend den Messresultaten von Sibree (1934), vgl. Abschnitt 2.2.4c.

Im hydraulisch glatten Regime ist es dann denkbar, dass eine derart erhöhte Viskosität den Bereich, in dem sie gegenüber der Turbulenz dominiert, ausdehnt. In der Literatur ist dieser Vorgang eine oft diskutierte Ursache für die Bildung eines elastic layer, wie er z.B. bei Gyr & Bewersdorff (1995) beschrieben wird.

Eine gewisse Schwächung dieser Hypothese ist die Beobachtung, dass in unmittelbarer Sohlennähe offenbar keine Luft auftritt. Dies erscheint plausibel, wenn man berücksichtigt, dass die Luft dem Druckgradienten folgt und damit tendenziell in die Wirbelkerne der Turbulenz abwandert. Andererseits basiert auch Lumleys Hypothese zur Widerstandsminderung in Polymerlösungen gerade darauf, dass eine gewisse Turbulenz nötig sei, um den widerstandsmindernden Effekt überhaupt auszulösen (vgl. Abschnitt 6.3.1).

Die Erhöhung der Geschwindigkeit wurde in dieser Arbeit nach dem Modell von Marié (1987) berechnet. Marié geht von einem voll viskosen Ast im Bereich der unterdrückten Turbulenz aus, was der eben zitierten Hypothese von Lumley, aber auch dem ultimativen Profil nach Virk – vgl. Abschnitt 5.2.1a – widerspricht. Die berechneten Geschwindigkeitserhöhungen dürften demnach die Realität eher überschätzen.

Die Dicke y_v^+ der ausgeweiteten viskosen Zone nach Gleichung (6-27) ist von dieser Relativierung aber nicht betroffen. Das ist wichtig: Denn ob der viskose Effekt in wasserbaulichen Anlagen überhaupt auftritt, entscheidet sich daran, ob diese Ausweitung ausreicht, um die Rauheitsspitzen wieder überdecken zu können. Es zeigt sich, dass dies für Prototypen von Betonschussrinnen nicht zu erwarten ist. Unter Bedingungen, wie sie bei den Modellversuchen von Straub & Anderson (1958) herrschten, kann ein Einfluss aber bei den kleineren gefahrenen Abflüssen nicht ganz ausgeschlossen werden.

6.4 Schlussfolgerung

Zwei Mechanismen wurden näher betrachtet, bei welchen Luftblasen den Widerstand über veränderte Fluideigenschaften beeinflussen:

- Der *Dichte-Effekt* bewirkt, dass die turbulenten Querbewegungen wegen der geringeren Dichte weniger Impuls austauschen. Gemäss dem Mischungswegansatz von Prandtl in der allgemeinen Form (3-15)

$$\tau_t = \rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

muss dann bei gleich bleibender turbulenter Schubspannung τ_t und gleich bleibendem Mischungsweg l der Geschwindigkeitsgradient steigen. Der Effekt vermag die beobachteten Geschwindigkeitserhöhungen zu erklären, auch in ihrer Grössenordnung. – Der Dichte-Effekt findet mit Sicherheit statt, da sich die Luftblasen den Austauschbewegungen quer zur Strömungsrichtung im Wesentlichen nicht entziehen können.

- Der *viskose Effekt* – hier nach der Vorstellung von Marié (1987) berechnet – hätte eine Ausdehnung der viskosen Zone und damit des Wirkungsbereichs des steilen viskosen Gradienten zur Folge. Makroskopisch führt dies zu einer höheren Konstanten B . – Dieser Effekt ist jedoch in Betonschussrinnen nicht zu erwarten, weil er zu schwach ist, um die Rauheitsspitzen wieder in die viskose Zone einzutauchen. Bei sehr kleinen Abflüssen, wie sie in Modellversuchen teilweise gefahren werden, kann er aber nicht ganz ausgeschlossen werden.

Für die nachfolgenden Berechnungen in den Kapiteln 7 und 9 wird nur noch der Dichte-Effekt berücksichtigt. Es sei aber festgehalten, dass der viskose oder auch andere, in Kapitel 5 angesprochene Effekte nur für die hydraulischen Verhältnisse wasserbaulicher Entlastungsanlagen als unwahrscheinlich erachtet werden. Sie werden *nicht grundsätzlich* bestritten. Arbeiten wie z.B. Ferrante & Elghobashi (2004) oder Lu et al. (2005) demonstrieren, dass auf hydraulisch glatten Oberflächen Widerstandsminderungen möglich sind, deren Grössenordnung durch den Dichte-Effekt allein nicht erklärbar ist.

7 Das Rechenmodell und sein Verhalten

7.1 Mitwirkung der Luftblasen

Nun können die Bestandteile zusammengestellt werden, welche zur Berechnung des Fließwiderstands eines Wasser-Luft-Gemischs auf Schussrinnen erforderlich sind. Als Mechanismus wird, dies das Ergebnis des vorigen Kapitels, nur der Dichte-Effekt berücksichtigt.

Es bleibt aber die schon in Abschnitt 5.5 angedeutete Frage, inwieweit die "verschmierte" Berücksichtigung der Luftblasen zulässig ist. Sie können den Impulsaustausch ja nur dann beeinflussen, wenn sie auch die Bewegungen des zugrunde liegenden Massenaustausches, also der energy containing eddies, mitgehen. Voraussetzung ist, dass die Blasen:

- keine signifikante *Schlupfbewegung* ins Zentrums der energy containing eddies ausführen, was wegen des Druckgefälles in diese Richtung ja möglich wäre,
- kleiner sind als die für den Impulsaustausch massgebende Bewegung, welche etwa dem *Mischungsweg* entspricht.

Mit folgender Hypothese sollen diese beiden Punkte auf einen reduziert werden: Gemäss dem Kaskadenmodell, wie es in Abschnitt 3.12.1 beschrieben ist, werden die einmal entstandenen Wirbelstrukturen in den Querabmessungen immer weiter reduziert und geraten in den Bereich nachfolgender, grösserer Strukturen. Die massgebenden grösseren Austauschbewegungen enthalten also stets kleinere und auch schneller rotierende Wirbelstrukturen unterschiedlichster Grössenordnungen.

Es ist dann anzunehmen, dass Luftblasen tendenziell in die Kernzonen kleinerer Wirbelstrukturen wandern, weil Druckgradienten lokal höher sind als die der energy containing eddies. Dort aber wäre eine Bewegung relativ zu den übergeordneten Bewegungen weitgehend blockiert, womit der erste der beiden obigen Punkte erfüllt wäre. Voraussetzung dazu ist aber wieder der zweite Punkt, dass nämlich die energy containing eddies bzw. der Mischungsweg grösser sind als die Blasen.

Im Folgenden ist also der zweite oben genannte Punkt, nämlich das Verhältnis der Blasengrösse zum Mischungsweg, zu beachten.

7.2 Formelsatz zur Integration des Geschwindigkeitsprofils

Das Modell fusst auf dem verallgemeinerten *Mischungswegansatz*:

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \quad (3-15)$$

oder aufgelöst nach dem Geschwindigkeitsgradienten:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\tau_t}{r_\rho \rho_w}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{1}{l^+} \cdot \sqrt{\frac{1-\eta}{1-c}} \quad (6-3)$$

Die Annahmen zur Luftverteilung $c(y)$ basieren auf Wood (1983/85/91), wie sie Abschnitt 5.3.1b beschrieben sind. Dazu gehört insbesondere die Annahme, dass die Konzentrationsverteilung im Gleichgewichtszustand einzig eine Funktion des Gefälles S sei.

Der Schubspannungsterm resultiert nach Abschnitt 4.2.3b aus der örtlichen Überlagerung $d = d(y)$, wobei aber nach Bezzola (2002) eine Reduktion im Sohlbereich in Rechnung gestellt wird:

$$\sqrt{\tau_t/\tau_0} = \text{Min}\left(\sqrt{1-\eta}; \sqrt{1-\eta_R}; \sqrt{1-\eta_R} \frac{Y-Y_0}{t-Y_0}\right) \quad (4-12)$$

$$\text{wo } 1-\eta = d/d_0 \quad , \quad Y = y/k \quad \text{und} \quad Y_0 = y_0/k \quad .$$

Für den Mischungsweg wird der MR-Ansatz nach Abschnitt 4.2.3c verwendet, wobei aber nur noch Ansätze mit $\kappa_k = 0$ berücksichtigt werden (Bild 4-7, Fall C, sowie Bild 4-8, rechts). Der Mischungsweg ist also im Kornbereich – wie ja auch im Mittenbereich (Escudier) – konstant. Nur im eigentlichen logarithmischen Bereich kommt der klassische Ansatz nach Prandtl zum Zuge. Man erhält:

$$l = \text{Min}(\text{Max}(\kappa y; \lambda_k k); \lambda_d d_0) \quad (4-13)$$

λ_k ist vorgängig so zu bestimmen, dass die Integration des Geschwindigkeitsprofils *ohne Luft* auf der Höhe $k = \beta_R k$ – und hier kommt die *äquivalente Sandrauheit* ins Spiel! – zum Wert $\bar{u}^+(k) = B = 8$ führt.

7.2.1 Berücksichtigung der Blasen

Bis zu diesem Punkt kann der Formelsatz dimensionslos gehalten werden. Das gilt nicht mehr für den Einfluss der Luftblasen, deren Durchmesser zu

$$D = l \cdot \frac{0.725}{r_\rho^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma/l}{\tau_t}\right)^{3/5} \quad (2-6)$$

berechnet wird. Dieser Ausdruck stellt der Oberflächenspannung einen Wert für die Schubspannung gegenüber; Reinwassertiefe und Gefälle sind also vorzugeben.

Der Blasendurchmesser wird dann verglichen mit dem Mischungsweg nach Gleichung (4-12). Wo letzterer nicht deutlich grösser ist, muss ein Dichte-Effekt bezweifelt werden. Kritisch sei ein minimaler Mischungsweg $l > \xi \cdot D$. Wird beispielsweise verlangt, dass l um eine Grössenordnung über D liegen muss, so beträgt das

Kriterium ξ etwa 10. Wo es nicht erfüllt ist, darf im Gradienten (6-3) die Konzentration c nicht mehr berücksichtigt werden.

Indes unterliegen in der Realität sowohl die Austauschbewegungen wie auch die Blasendurchmesser einer Streuung. l und D sind lediglich als repräsentative Werte der beiden Grössen aufzufassen. Es rechtfertigt sich daher, den Übergang fließend zu gestalten, was auch aus numerischen Gründen willkommen ist. Verwendet wird ein Tangens hyperbolicus für den *wirksamen Anteil* c_{eff} der örtlichen Konzentration c :

$$\frac{c_{eff}}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\tanh\left(2 \cdot \ln\left(\frac{l/D}{\xi}\right)\right) + 1 \right)$$

Die Funktion ist so gewählt, so dass der Übergang etwa eine Grössenordnung beansprucht (Bild 7-1).

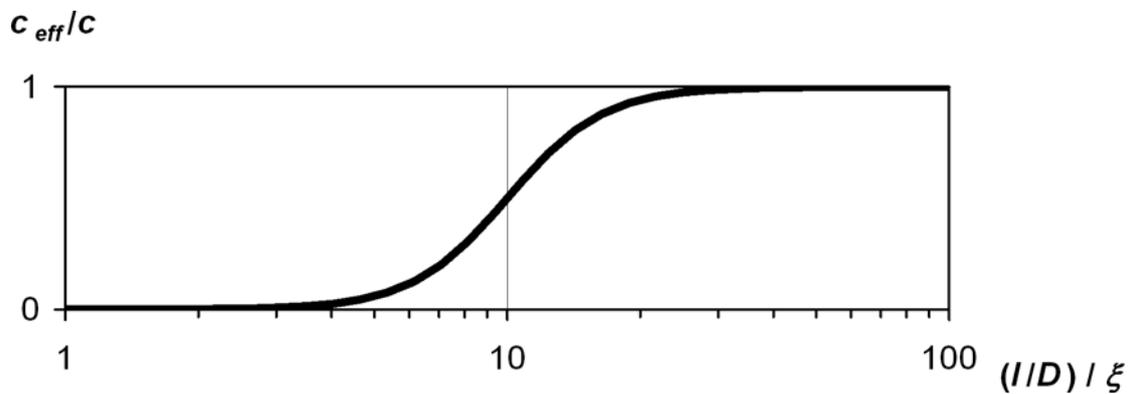


Bild 7-1: Übergangsfunktion c_{eff}/c in Funktion von $(l/D)/\xi$.

7.2.2 Abhängigkeit der Blasendurchmesser von den lokalen Bedingungen

Setzt man in Gleichung (2-6) konsequent die *lokalen* Werte für l , τ_t und r_p ein, so ergeben sich je nach Ort sehr verschiedene Blasendurchmesser: Ausgehend von sehr kleinen Durchmessern in Wandnähe erreicht er im Mittenbereich sehr grosse Werte. Ein solcher Verlauf ist im Gleichgewichtszustand unwahrscheinlich: Er käme nur zustande, wenn Blasen, die in Sohlhöhe geraten und dort zerkleinert werden, beim Rücktransport in höhere Schichten sofort wieder koaleszieren. Wahrscheinlicher ist, dass die Blasengrößen ausgehend von den Minimalgrößen im Sohlbereich nach oben hin weit weniger stark anwachsen.

Im Folgenden werden zwei Grenzfälle betrachtet: Die Berechnung mit lokalem Blasendurchmesser einerseits und mit dem minimalen Durchmesser, wie er sich an der Sohle ergibt, andererseits. Diese beiden Varianten können wiederum verglichen werden mit der Berechnung ganz ohne Einfluss der Blasengröße, d.h. mit $D = 0$.

7.3 Das Verhalten

7.3.1 Parameter für die Beispielrechnungen

Das Modell soll nun auf praxisrelevante Skalen, also auf die Grössenordnungen hydraulischer Modellversuche und realer Bauwerke, angewandt werden. Die wichtigsten Parameter sind:

- der spezifische Abfluss q ,
- der Neigungswinkel θ ,
- das Kriterium ξ ,
- die oben angesprochene Frage, ob eher der lokale oder der minimale Blasendurchmesser massgebend ist.

Die Diskussion wird anhand von vier Parameterkombinationen aus Abfluss und Gefälle geführt:

q :	θ :
0.3 m ² /s,	30°;
0.3 m ² /s,	60°;
30 m ² /s,	30°;
30 m ² /s,	60°.

Der kleinere spezifische Abfluss von 0.3 m²/s liegt im Bereich der Modellversuche von Straub & Anderson (1958), wohingegen der grössere Wert von 30 m²/s einem typischen Betriebsfall auf Prototypen entspricht. Die äquivalente Sandrauheit k' sei 0.6 mm, also eine übliche Betonrauheit; gleichzeitig liegt dieser Wert auch wieder im Bereich der Modellversuche von Straub & Anderson.

Wood (1991) geht davon aus dass die Konzentrationsverteilungen nur vom Gefälle abhängen (vgl. Abschnitt 5.3.1b). Für die vorliegende Abschätzung wird diese Annahme übernommen, so dass die Konzentrationsverteilungen für die beiden Gefälle aus Bild 5-13 entnommen werden können.

7.3.2 Berechnung für ausgewählte Fälle

a) Parameter bzgl. ξ , Blasendurchmesser und Mischungswegansatz

Die Bilder 7-3 bis 7-9 geben die Berechnung für die folgenden ausgewählten Fälle wieder:

Bild	q	θ	ξ	Blasendurchmesser	Mischungswegansatz
7-3	0.3 m ² /s	30°	10	lokal	MR
7-4	0.3 m ² /s	30°	10	minimal	MR
7-5	0.3 m ² /s	30°	0	0	MR
7-6	30.0 m ² /s	30°	10	lokal	MR
7-7	0.3 m ² /s	30°	1	minimal	MR
7-8	0.3 m ² /s	60°	1	minimal	MR
7-9	0.3 m ² /s	60°	1	minimal	Prandtl

b) Auswertung in den Bildern 7-3 bis 7-9

In der oberen, semilogarithmischen Graphik sind jeweils der Verlauf der Luftblasengrösse und des Mischungsweges dargestellt. Die Verhältnisse an der Sohle sind im Bereich $-1 < y/k < 2$ linear herausvergrössert. In diesem Ausschnitt ist auch das Geschwindigkeitsprofil und dessen Ablesung bei $y/k = 1$ eingetragen. – Die beiden unteren Graphiken zeigen links die verwendete Luftverteilung und rechts das schliesslich resultierende Geschwindigkeitsprofil samt dem Mittelwert (vertikaler Strich). Zum Vergleich ist in feinerem Strich das fiktive Reinwasserprofil, also ohne Berücksichtigung des Lufteintrags, beigefügt; Achtung: Um die Geschwindigkeitsprofile besser vergleichen zu können, wurde hier ein Reinwasser-Referenzfall mit gleich grossem Abfluss bei *gleicher Reinwassertiefe*, nicht bei gleichem Gefälle gewählt!

c) Resultate

Die Bilder 7-3 bis 7-7 für die kleinere Neigung von $\theta = 30^\circ$ zeigen Folgendes:

- Rechnet man mit dem *lokalen* Blasendurchmesser, so ist für das verwendete Kriterium $\xi = 10$ der Einfluss der Luft geringfügig, weil der Mischungsweg relativ zur Blasengrösse überall zu klein ist. In Bild 7-3 fällt das Geschwindigkeitsprofil sogar grösstenteils mit dem fiktiven Reinwasserprofil zusammen. Trotzdem resultiert ein etwas höheres Geschwindigkeitsmittel als im Reinwasserfall, aber nur, weil das Profil über eine grössere Abflusstiefe integriert wird. Dies entspricht dem geometrischen Effekt aus Abschnitt 6.2.2e. – Für den grossen Abfluss in Bild 7-6 hingegen klaffen D und l viel weiter auseinander, so dass der Dichte-Effekt zum Tragen kommt.

- Rechnet man hingegen mit dem *minimalen* Durchmesser, wirkt der Lufteinfluss auch bei kleineren Abflüssen (Bilder 7-4, 7-7). An der Sohle setzt die Änderung aber gerade erst ein und auch das nur, wenn ξ auf 1 reduziert wird (Bild 7-7).
- Bild 7-5 zeigt eine Rechnung *ohne Berücksichtigung der Blasengrösse*, d.h. $D = 0$, was die Widerstandminderung maximiert. In diesem Fall würde die Luft schon im Sohlbereich auf den Geschwindigkeitsgradienten einwirken, und die Geschwindigkeit bei $y = k$ ist leicht erhöht.

Die Bilder 7-8 und 7-9 für $\theta = 60^\circ$ stellen den MR-Ansatz dem Mischungswegansatz nach Prandtl gegenüber. Gewählt wurde ein Fall, wo die Unterschiede deutlich zu Tage treten: einerseits ein hohes Gefälle, andererseits minimale Blasengrösse mit $\xi = 1$. Es lassen sich zwei Dinge beobachten:

- Im Sohlbereich hat die Wahl des Ansatzes geringe Konsequenzen für die Lage des abgehenden logarithmischen Asts. Im Beispiel liest man für den MR-Ansatz (Bild 7-8) eine Rauheitsfunktion B von 8.4 ab, für den Ansatz nach Prandtl (Bild 7-9) eine solche von 9.3. Trotz dem niedrig angesetzten Kriterium ξ bleibt der Unterschied also begrenzt, dies weil der Dichte-Effekt nicht allzu tief reicht. Erst im Bereich der Rauheitsspitzen würde der Unterschied gegenüber dem Ansatz nach Prandtl eklatant, weil dort die extrem hohen Gradienten des nach unten verlängerten logarithmischen Profils betroffen wären. Würde eine höhere als die hier angenommene Betonrauheit eingesetzt (z.B. Raugerinne, Treppenschussrinnen), so würde der Dichte-Effekt tiefer wirken. Die Unterschiede im Sohlbereich wären dann nicht mehr vernachlässigbar.

Für Betonrauheiten dürfte aber der Ansatz nach Escudier, also ohne Detailmodellierung in der unmittelbaren Umgebung der Rauheiten, wohl ausreichen.

- Im logarithmischen und im Mittenbereich ist der Unterschied zwischen dem Ansatz nach Prandtl und dem MR-Ansatz, der in diesem Bereich dem Ansatz nach Escudier entspricht, aber enorm. Er ist so gross, dass er im Beispiel auch die mittlere Geschwindigkeit signifikant beeinflusst. Offenbar gilt die Aussage aus Abschnitt 3.5.5, wonach die beiden Ansätze weitgehend äquivalent seien, für Wasser-Luft-Gemische nicht mehr. – Die Ursache liegt in den beiden Vereinfachungen nach Prandtl: konstante Schubspannung ($\tau_t(y) \equiv \tau_0$) und unbegrenzt wachsender Mischungsweg $l = \kappa y$. Im Gegensatz zu Abschnitt 3.5.5 kompensieren sich die beiden Vereinfachungen bei extremen Gemischbedingungen offenbar nicht mehr. In solchen Fällen *muss* also der Mischungsweg für Wasser-Luft-Gemische begrenzt werden, z.B. mit der Obergrenze $l = \lambda_\kappa k$ nach Escudier, wie sie auch im MR-Ansatz verwendet wird.

7.3.3 Einfluss des Kriteriums ξ

Variiert man das Kriterium ξ für die vier eingangs erwähnten Beispielfälle, so resultiert Bild 7-2. Um eine Übersicht zu erhalten, wurde ξ sehr breit variiert. Zu erwarten wären aber Werte über 1, vielleicht im Bereich von 10. Allzu gross dürfte ξ aber auch nicht sein, weil sowohl l als auch D einer Streuung unterliegen. Zudem ist D nach Abschnitt 2.2.2a eher als *Obergrenze* zu betrachten.

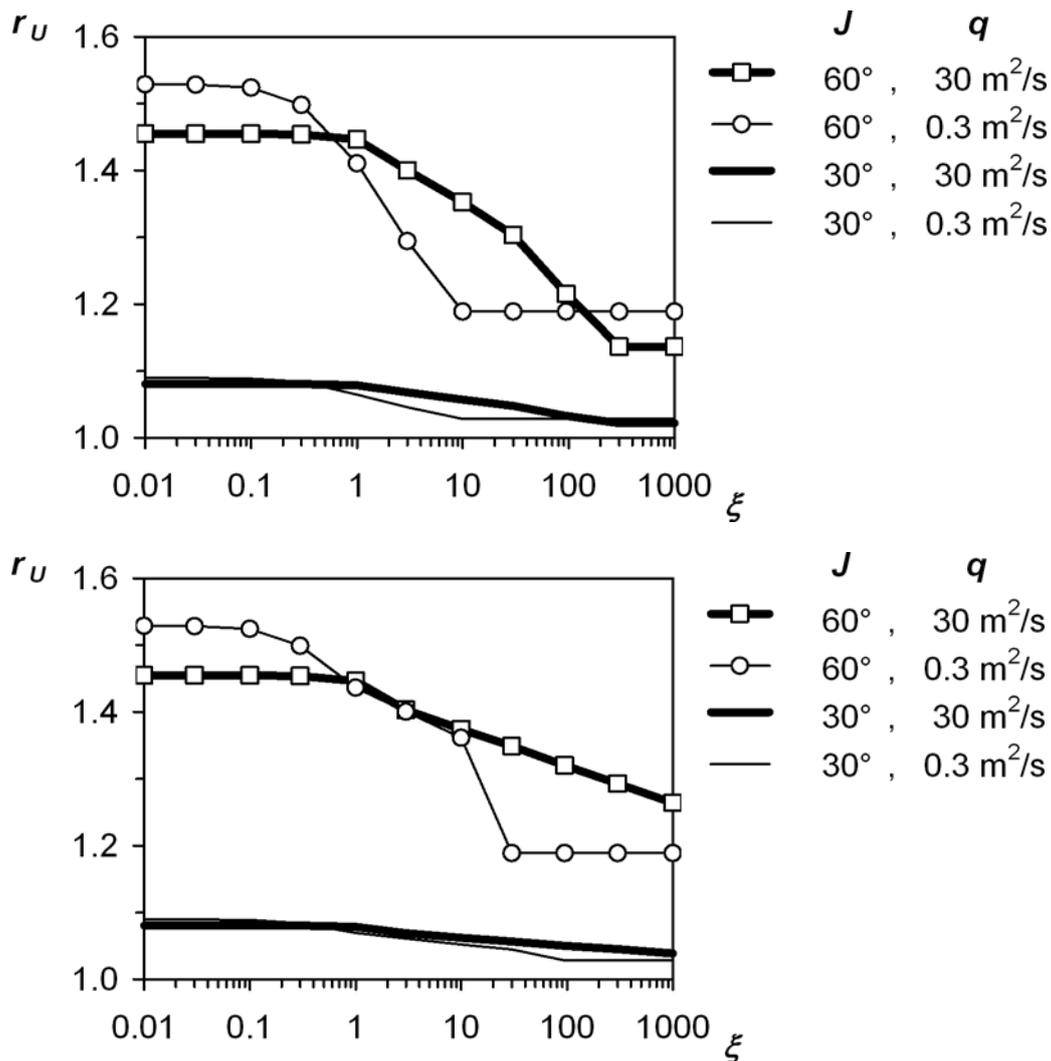


Bild 7-2: Geschwindigkeitserhöhung $r_U = U/U_w$ infolge Luftgehalts in Abhängigkeit vom Kriterium ξ . Oben mit dem lokalen, unten mit dem minimalen Blasendurchmesser gerechnet.

Das Gefälle scheint wenig Einfluss zu haben: Die Kurven für jeweils gleichen Abfluss verlaufen weitgehend proportional. Dieses Ergebnis ist aber auch den Annahmen zur Luftverteilung zuzuschreiben. Sollte diese, anders als von Wood (1983 ff.) postuliert, noch von weiteren Parametern als nur vom Gefälle abhängen (vgl. Kapitel 8), so könnte diese Proportionalität verloren gehen.

Hingegen zeigt der Einfluss des *spezifischen Abflusses* einen Massstabeffekt: Mit wachsender Reinwassertiefe d_0 verschiebt sich die Kurve nach rechts und wird flacher. Dies erklärt sich so, dass bei kleinen Abflüssen der im Mittenbereich konstant angesetzte Mischungsweg in einer ähnlichen Grössenordnung liegt wie der Blasendurchmesser. Die Entscheidung, ob die Luft über die ganze Abflusstiefe wirkt oder an gar keinem Ort, fällt dann über eine vergleichsweise kleine Variation von ξ . Sie fällt bei der Rechnung mit minimalem Durchmesser sogar schlagartig aus, weil dort auch der Blasendurchmesser konstant ist (Bild 7-2 unten, Fall 60° mit $0.3 \text{ m}^2/\text{s}$). – Bei den grösseren Abflüssen tritt das Phänomen erwartungsgemäss erst für grössere ξ und viel weniger ausgeprägt auf.

7.3.4 Einfluss der Rauheit

In Abschnitt 5.4.2f wurde schon erwähnt, dass Ebadian (2003) bei steigender Rauheit auch eine erhöhte Widerstandsminderung beobachtet.

Auch ohne Demonstrationsrechnung ist klar, dass der Dichte-Effekt, kombiniert mit dem MR-Ansatz und der Berücksichtigung der Blasen, zu diesem Ergebnis führen muss. Denn bei grosser Rauheit sind die Blasen viel kleiner als die Austauschbewegungen. Sie sind dann überall wirksam. Der Unterschied mit und ohne Belüftung muss also bei grossen Rauheiten am deutlichsten werden.

7.4 Schlussfolgerungen

7.4.1 Grundsätze

Man muss davon ausgehen, dass der Dichte-Effekt abgeschwächt oder verschwinden würde, wenn der Blasendurchmesser D gegenüber dem Mischungsweg l zu gross ist. Dieser Effekt hängt vom spezifischen Abfluss und damit vom *Massstab* ab.

Neben der Grössenordnung des spezifischen Abflusses sind ausschlaggebend:

- das kritische Verhältnis $\xi = l/D$, welches vorausgesetzt werden soll, um den Dichte-Effekt zu berücksichtigen,
- der Entscheid, ob für den Blasendurchmesser an einem bestimmten Ort die lokalen Bedingungen massgebend sind, oder ob eher mit dem minimalen Durchmesser gerechnet werden muss, wie er in Sohlhöhe entsteht.
- möglicherweise auch das Gefälle S , falls nämlich Woods Annahme einer nur von S abhängigen Konzentrationsverteilung nicht zutrifft.

Im wahrscheinlichen Bereich für ξ , der zwischen 1 und 10 vermutet wird, und für die untersuchten Abflüsse ist die Dämpfung indes nicht allzu stark. Die Ausnahme bildet die Berechnung mit lokalem Blasendurchmesser für kleine spezifische Abflüsse.

7.4.2 Rechenschema für den MR-Ansatz

Verwendet wird der vereinfachte MR-Ansatz nach Abschnitt 4.2.3f mit konstantem Mischungsweg im Kornbereich. κ_k wird dann nicht benötigt. Für eine Sandrauheit wird hier $s = t = 0.2$ angesetzt.

Das Schema zur Berechnung eines belüfteten Normalabflusses bei gegebenem Gefälle S und gegebener Konzentrationsverteilung $c = c(y)$ beinhaltet folgende Punkte:

1. Bestimmung der Basisparameter

- die Reinwassertiefe $d_0 = d(y=0) = \int_0^\infty (1-c) dy$ nach Gl. (2-16);
die totale Schubspannung an der Sohle beträgt $\tau_0 = \tau(y=0) = \rho g d_0 S$.
- der Dämpfungsfaktor nach Bezzola: $c_R = 1 - d(y_R)/d_0$.

2. Ersatz der Konstanten B durch den Parameter λ_k

Als zweites ist λ_k so zu bestimmen, dass für den *Reinwasserabfluss* der korrekte Wert für die Konstante B resultiert. $\lambda_k(B)$ kann nicht explizit angegeben werden, die Berechnung ist also iterativ. Ein Iterationsschritt umfasst folgende Teilschritte:

- Wahl von λ_k und Bestimmung des Zwischenparameters $a = \lambda_k/\kappa$.
- Berechnung von B nach den Gleichungen (A1-1) und (A1-2) aus Anhang A1.2:

$$B = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{1-s-t}{2a} + 1 + \ln \frac{\beta_R}{a} \right), \quad \text{falls } t < a,$$

$$B = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{(a-s+1)^2}{2a(t-s+1)} + \frac{t-a-(s-1)\ln(t/a)}{t-s+1} + \ln \frac{\beta_R}{t} \right), \quad \text{falls } t > a.$$

- Vergleich von B mit dem Sollwert ($B = 8$ für äquivalente Sandrauheiten);
=> neue Wahl von λ_k .

Diese Iteration ist nur einmal, nämlich zu Beginn der Rechnung durchzuführen. Sie kann z.B. über eine Bisektion gelöst werden, denn die Funktion $\lambda_k(B)$ fällt monoton (vgl. Bild 4-10 für den Fall $c_R = \beta_R = 1$).

3. Integration des Geschwindigkeitsprofils

Ausgehend von der Haftbedingung $\bar{u}(y_0) = \bar{u}(s-1) = 0$ wird der Gradient

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\tau_t}{r_{\rho, \text{eff}} \rho_w}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = \frac{1}{l^+} \cdot \sqrt{\frac{\tau_t/\tau_0}{1 - c_{\text{eff}}}}. \quad (6-3)$$

schrittweise zum Geschwindigkeitsprofil aufintegriert. Für die vorliegende Arbeit sind die Schritte Δy im Kornbereich linear gewählt, im logarithmischen und im Mitten-

bereich wachsen sie logarithmisch an. Für die Integration ergab das Verfahren nach Simpson eine ausreichende Genauigkeit.

Der Mischungsweg l wird angesetzt zu

$$l = \text{Min}(\text{Max}(\kappa y; \lambda_k k); \lambda_d d_0) \quad , \quad (4-13)$$

das Verhältnis τ_t/τ_0 zu

$$\sqrt{\tau_t/\tau_0} = \text{Min}\left(\sqrt{1-\eta}; \sqrt{1-\eta_R}; \sqrt{1-\eta_R} \frac{Y-Y_0}{t-Y_0}\right) \quad . \quad (4-12)$$

Hierbei sind

$$1-\eta = \frac{d(y)}{d_0} = \frac{1}{d_0} \cdot \int_y^{\infty} (1-c) dy \quad (\text{mit der Integrationsvariablen } y')$$

$$Y = y/k \quad ,$$

$$Y_0 = y_0/k = s-1 \quad .$$

Die Blasengröße limitiert die anrechenbare Luftkonzentration, was berücksichtigt wird mit:

$$\frac{c_{eff}}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\tanh\left(2 \cdot \ln\left(\frac{l/D}{\xi}\right)\right) + 1 \right) \quad ,$$

wo

$$D = l \cdot \frac{0.725}{r_\rho^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma/l}{\tau_t}\right)^{3/5} \quad . \quad (2-6)$$

Das Kriterium ξ wird im Bereich zwischen 1 und 10 angesetzt.

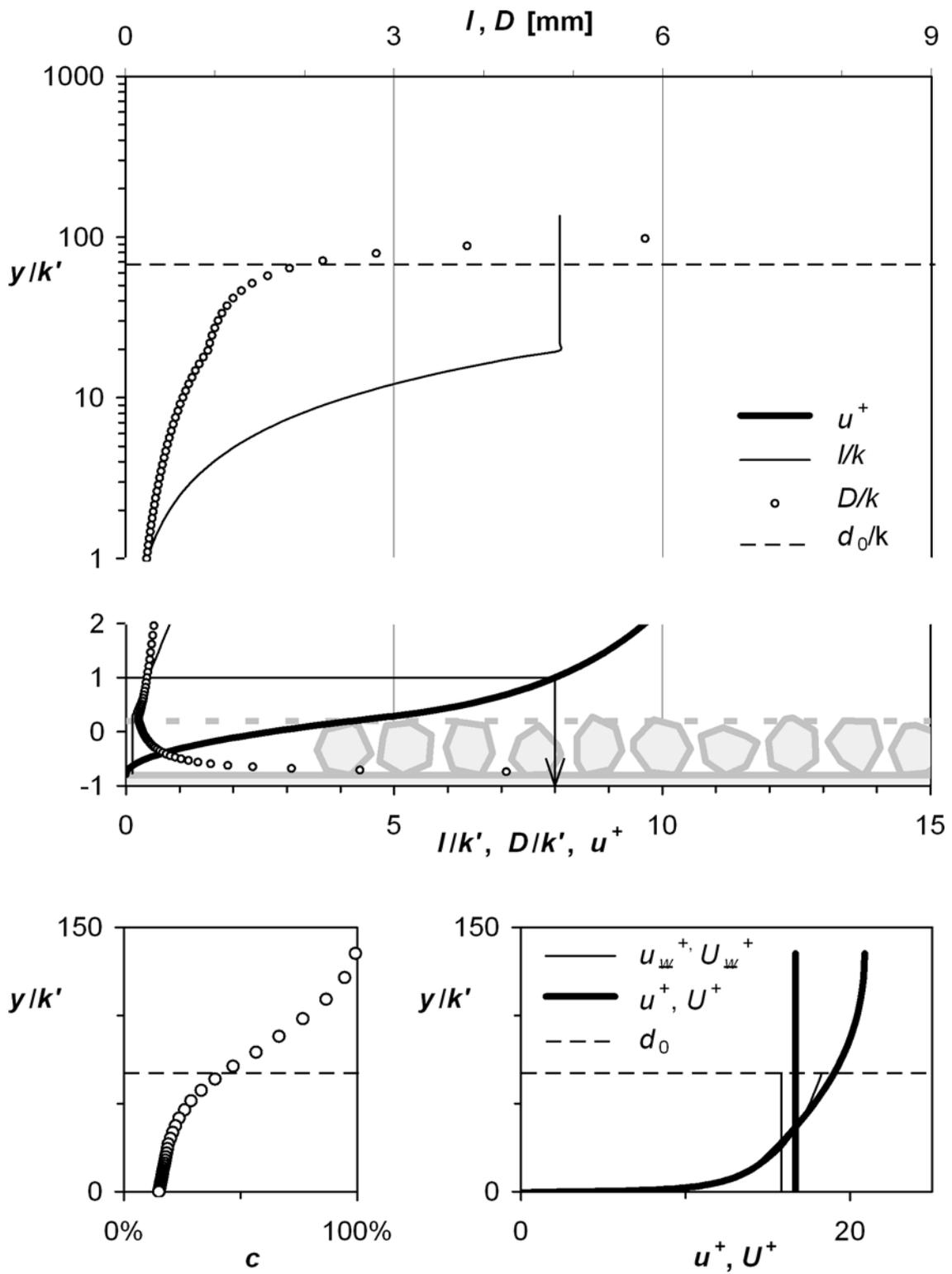


Bild 7-3: $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 30^\circ$, Blasendurchmesser lokal, $\xi = 10$.
 Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

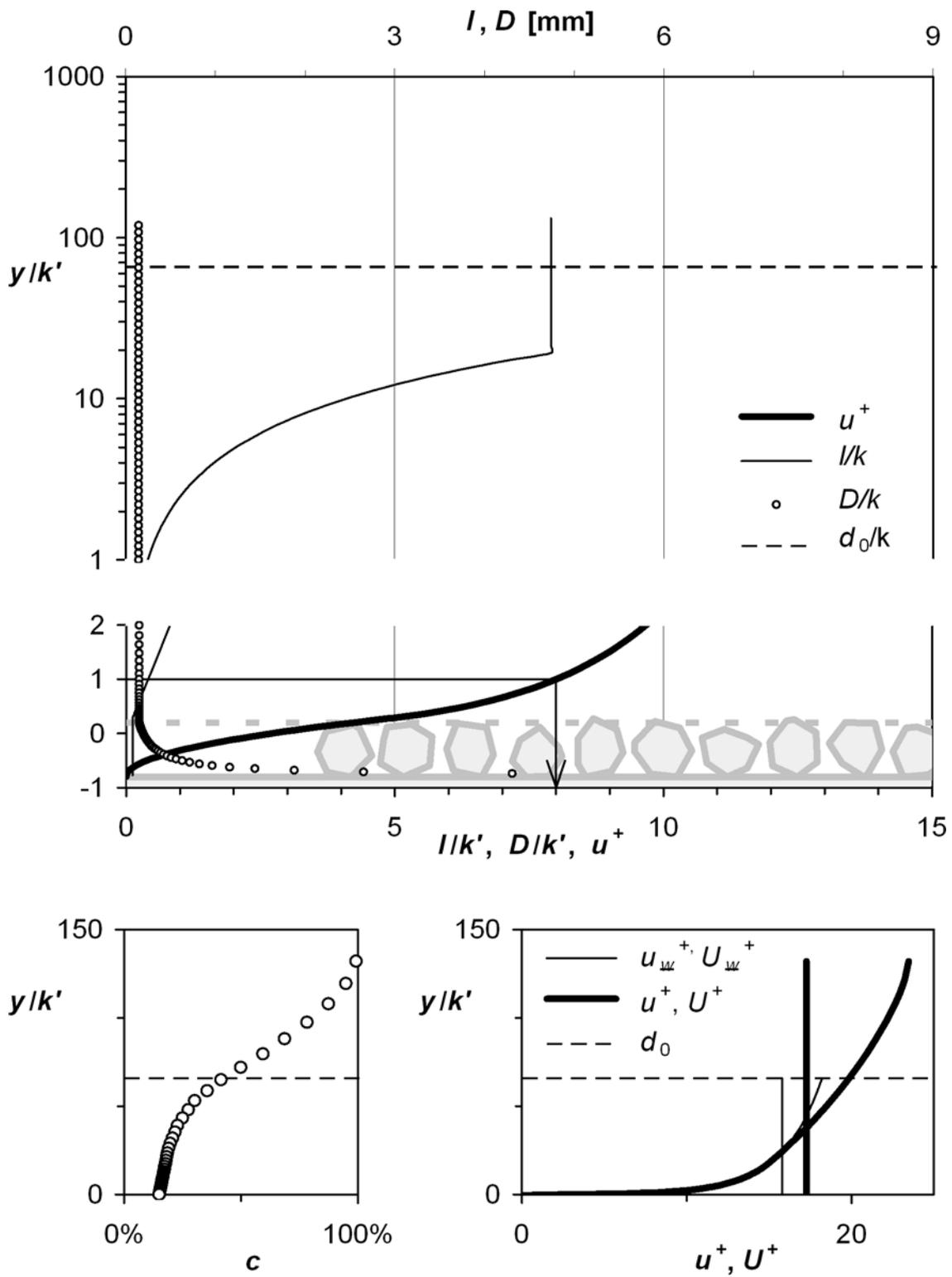


Bild 7-4: $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 30^\circ$, Blasendurchmesser minimal, $\xi = 10$.
 Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

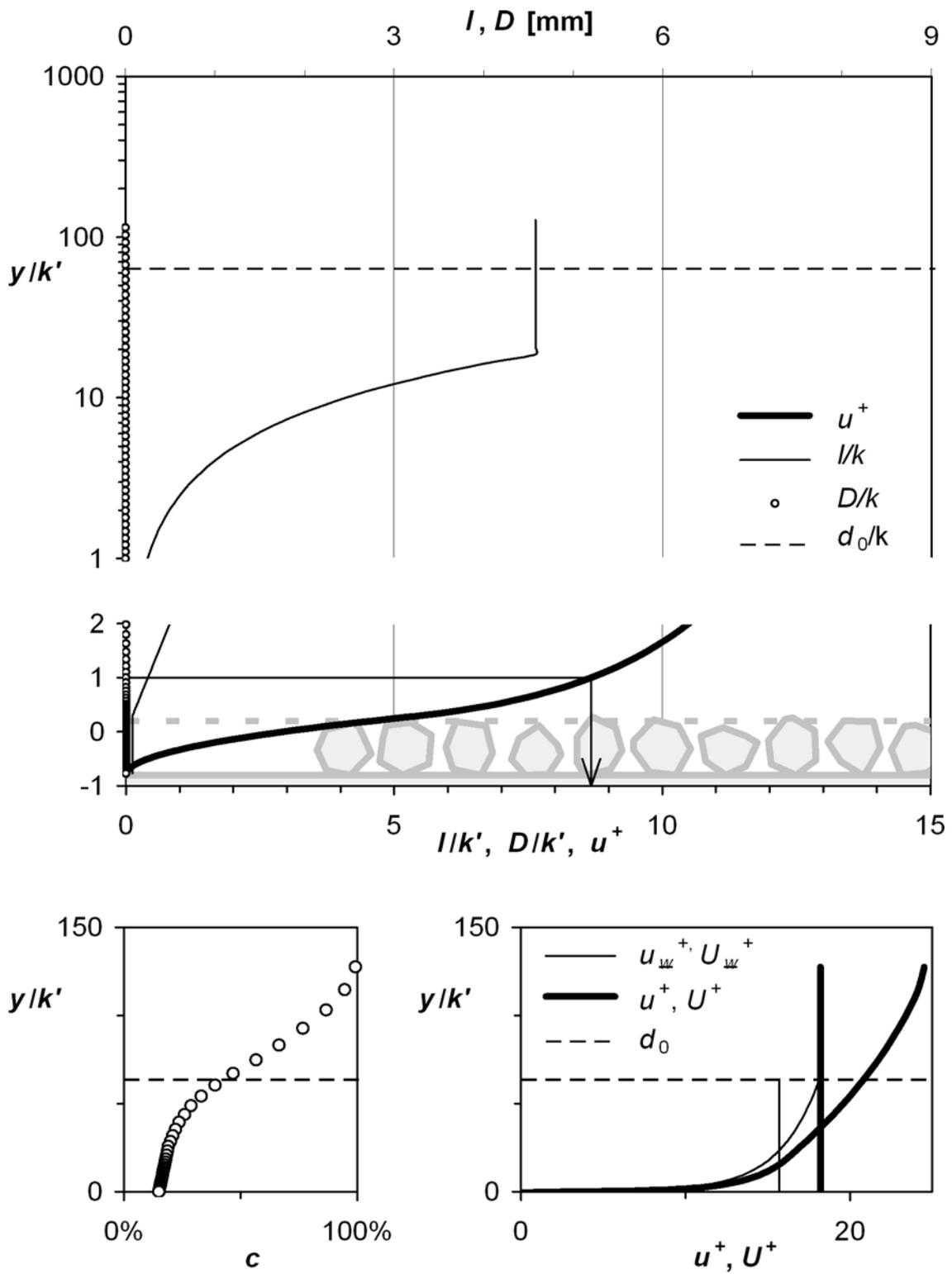


Bild 7-5: $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 30^\circ$, Blasendurchmesser = 0 (bzw. $\xi = 0$).
 Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

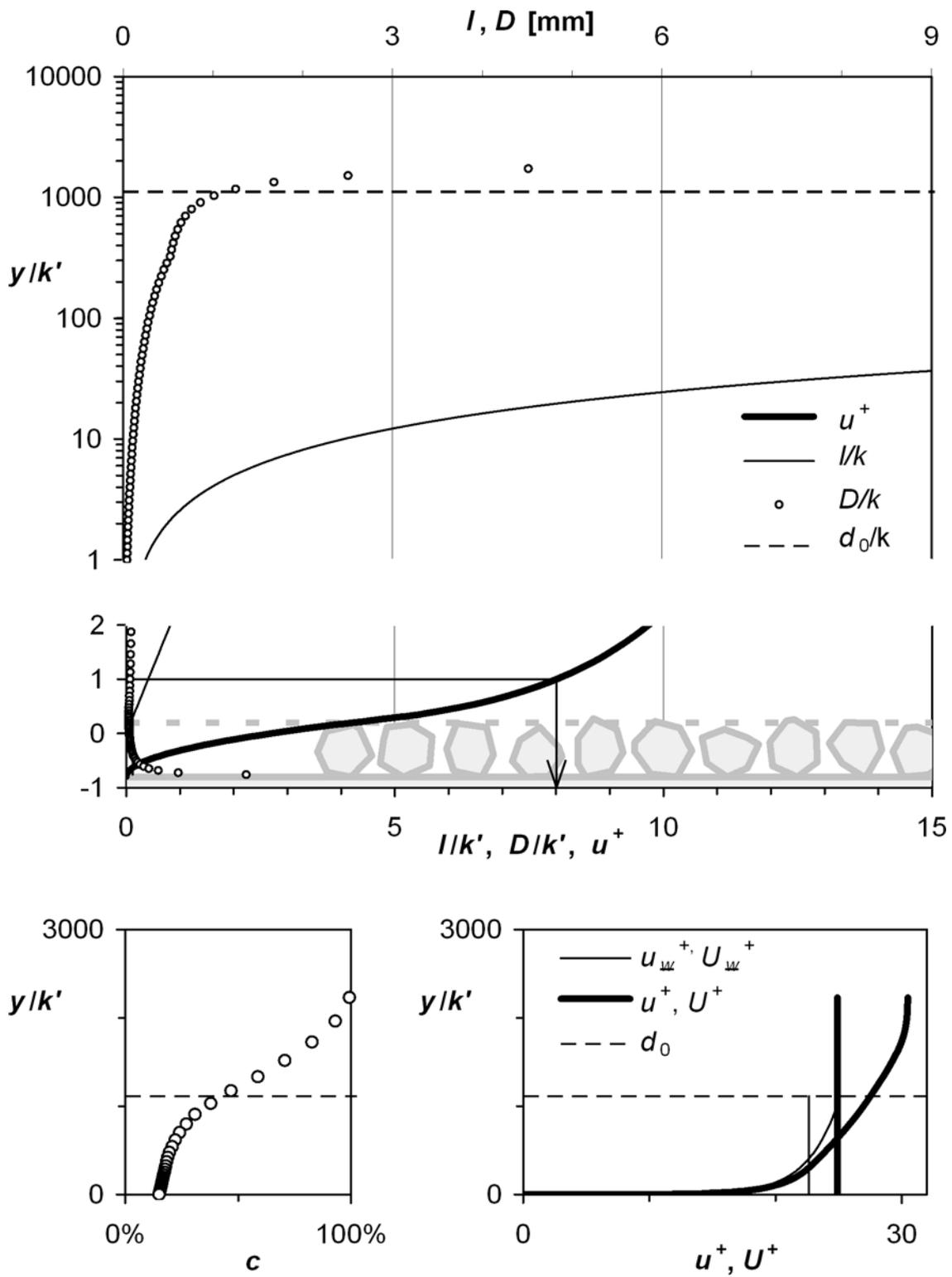


Bild 7-6: $q = 30 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 30^\circ$, Blasendurchmesser lokal, $\xi = 10$.
 Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

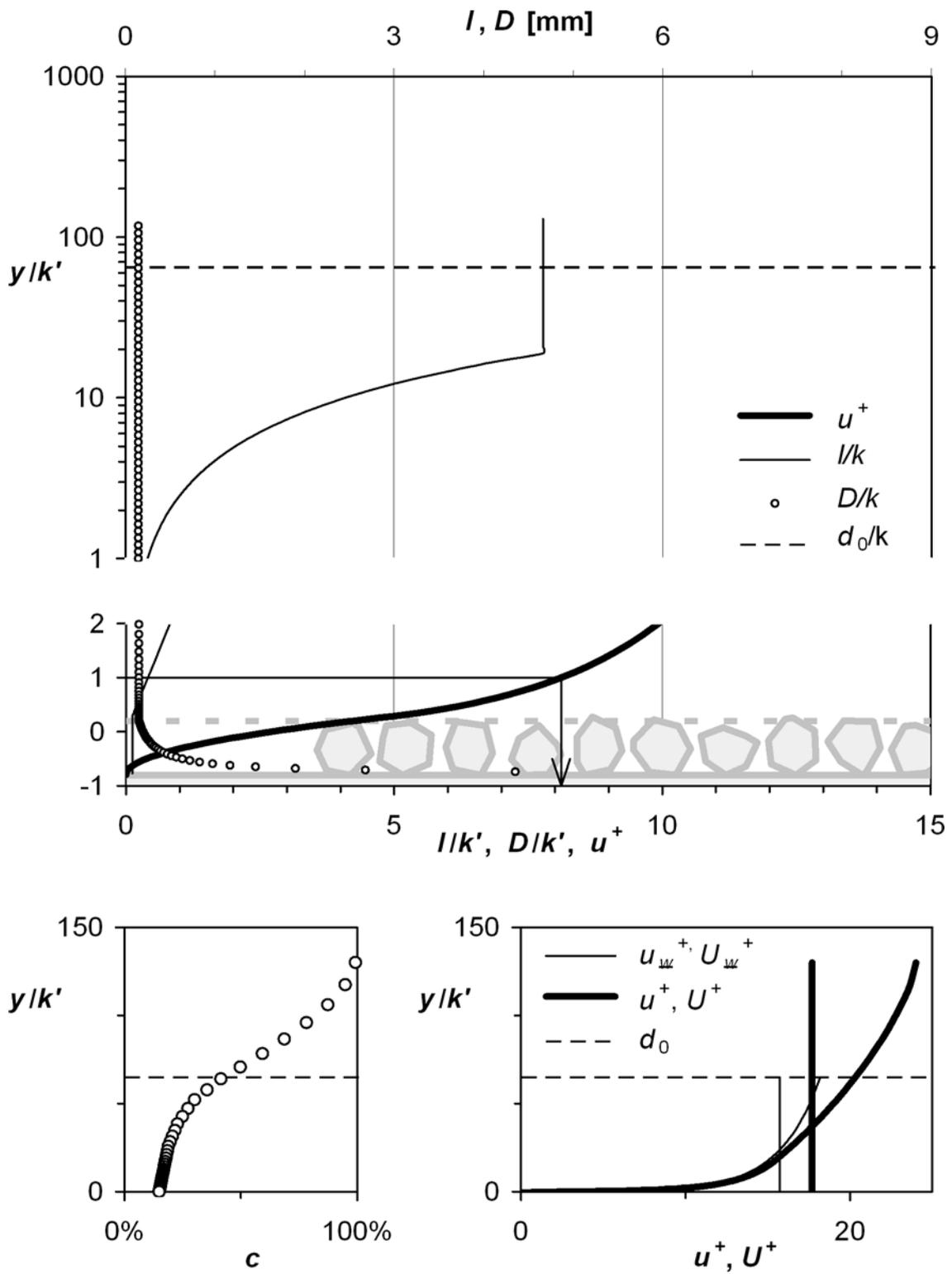


Bild 7-7: $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 30^\circ$, Blasendurchmesser minimal, $\xi = 1$.
 Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

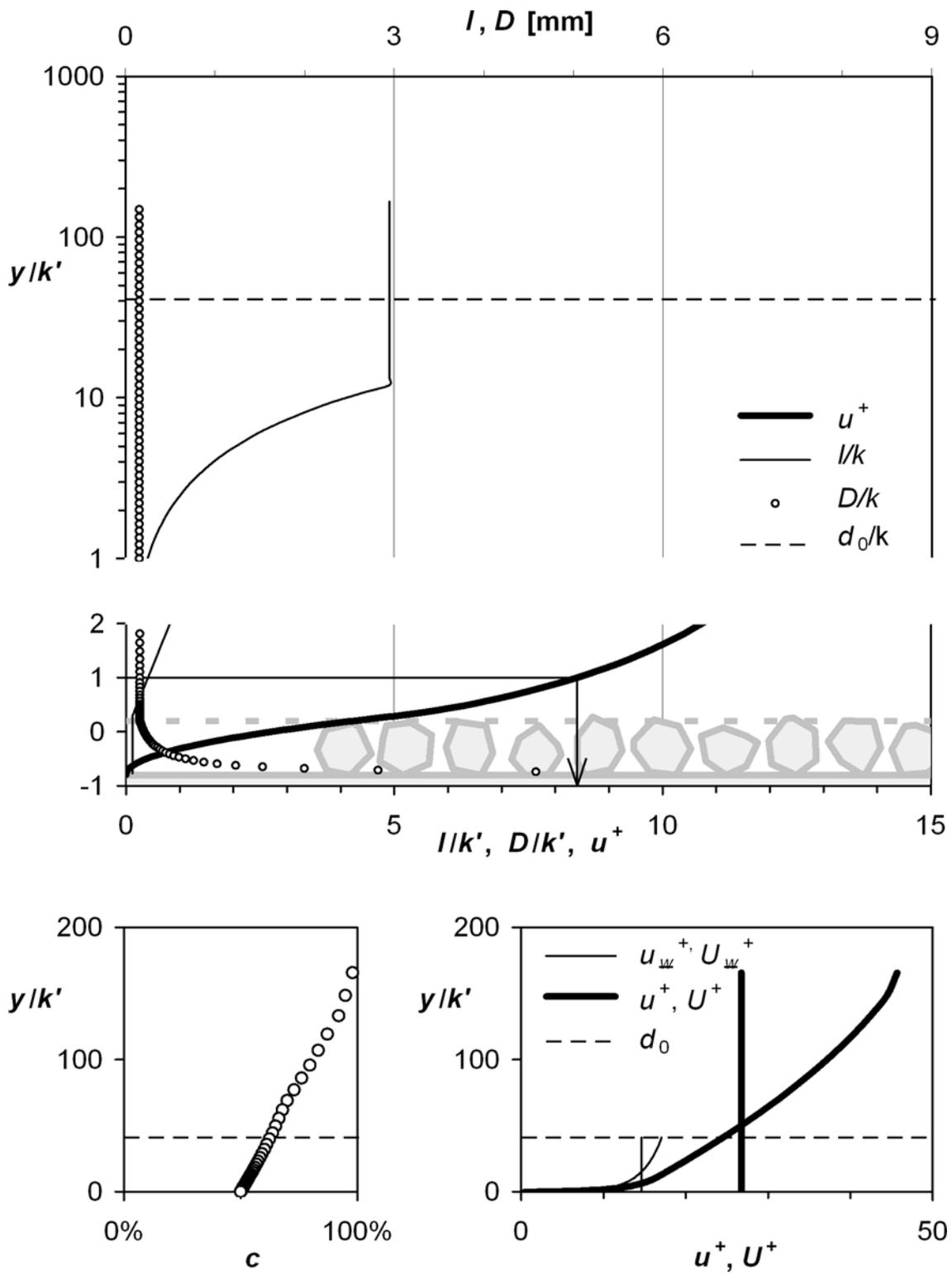


Bild 7-8: $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 60^\circ$, Blasendurchmesser minimal, $\xi = 1$.
 Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

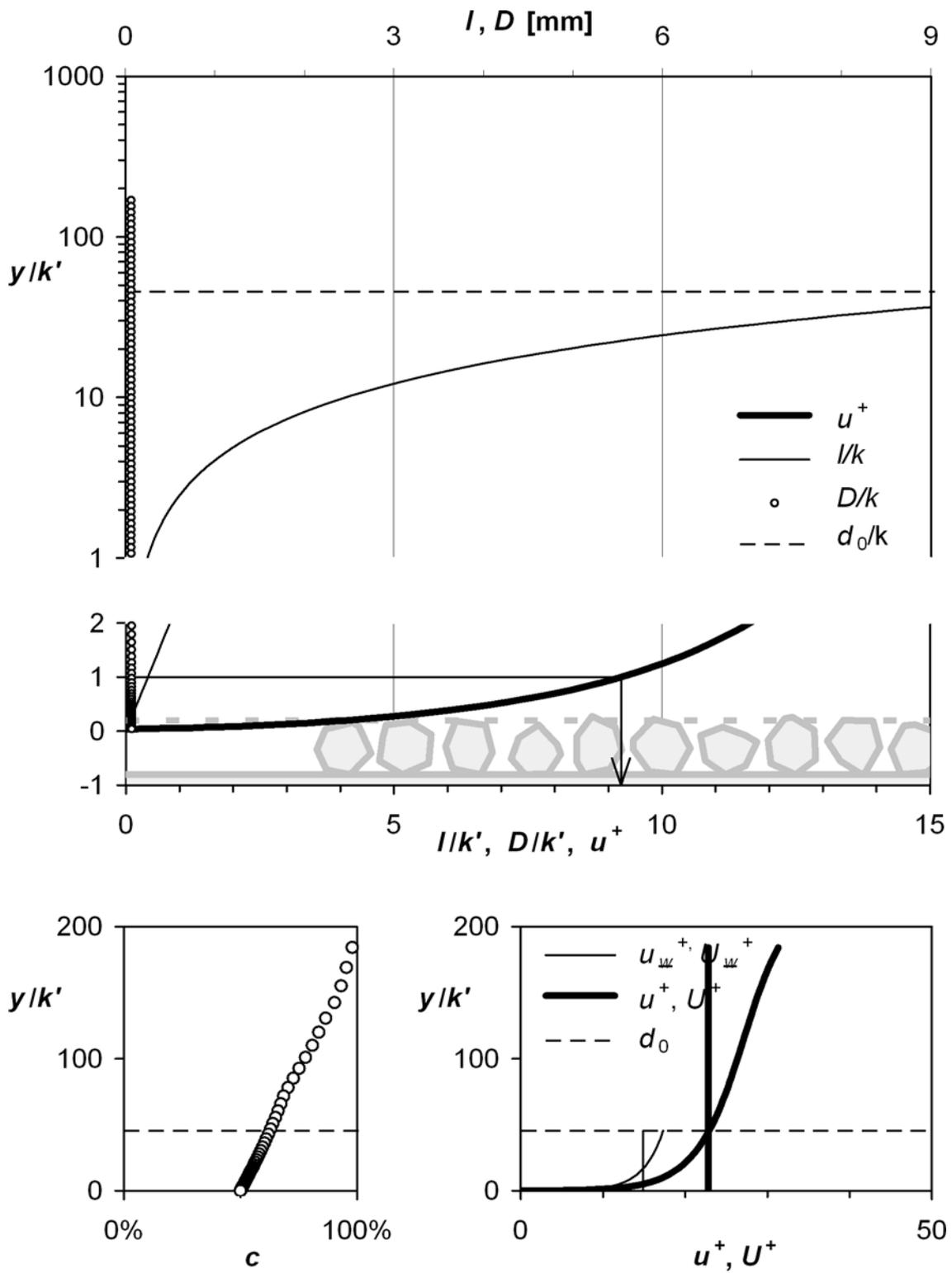


Bild 7-9: $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $\theta = 60^\circ$, Blasendurchmesser minimal, $\xi = 1$, Mischungswegansatz nach Prandtl.
Nähere Beschreibung s. Abschnitt 7.3.2b.

8 Zur Verteilung der Luftkonzentration im Sohlbereich

Die Bestimmung der Verteilung der Luftkonzentration ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Einige Überlegungen müssen aber angestellt werden im Hinblick auf Woods (1991) Dimensionsanalyse, wonach die Konzentrationsverteilung $c(y)$ nur vom Gefälle S abhängt (s. Abschnitt 5.3.1b).

8.1 Diffusionsgleichung

Schon Straub & Anderson (1958) schlagen vor, die Verteilung der Luftkonzentration im *unteren* Bereich mittels einer Diffusionsgleichung zu ermitteln, also analog zu einer Schwebstoffverteilung beispielsweise. Diese wird hier wie folgt angeschrieben:

$$\varepsilon_c \cdot \frac{dc}{dy} = \cos \theta \cdot v_b \cdot c \quad \text{bzw.} \quad \frac{dc}{d(y/d_0)} = \frac{d_0 \cos \theta v_b}{\varepsilon_c} \cdot c \quad (8-1)$$

Hierbei ist ε_c der Austauschkoeffizient und v_b die Steiggeschwindigkeit der Blasen. ε_c wird in der Regel in Relation zum Koeffizienten des Impulsaustausches, der Wirbelviskosität μ_t , gesetzt. Hier werden die beiden Größen näherungsweise gleich gesetzt.

ε_c und v_b stehen für die *entgegengesetzten Kräfte*, welche die Verteilung der Luft bestimmen: Die Turbulenz verteilt die Luft auch nach unten, der Auftrieb bzw. die Gravitation hingegen tragen sie nach oben. Das resultierende Gleichgewicht ist das Konzentrationsprofil.

Der Cosinus von θ kommt ins Spiel, weil in der geneigten Strecke der Druckgradient und damit auch die Steiggeschwindigkeit sinken; im Extremfall eines vertikalen Strahls würde die Luft nicht mehr ausgetragen. Eine Konsequenz im Hinblick auf ungleichförmige Abflüsse ist die, dass zwischen den Winkeln θ der Neigung und θ_e der Energielinie unterschieden werden muss. Gleiches gilt für den Tangens J und den Sinus S , also für das auf die Horizontale bzw. den Fließweg bezogenen Gefälle.

8.2 Wirbelviskosität und Steiggeschwindigkeit konstant

Mit $c' = dc/d(y/d_0)$ und der Definition $A = (d_0 \cos \theta v_b)/\varepsilon_c$ schreibt sich (8-1) zu

$$d_0 c' = A c \quad (8-2)$$

Wäre A eine *Konstante*, so ergäbe die DG (8-2) mit der Randbedingung

$$c(y=0) = c_0$$

ein exponentielles Profil der Form:

$$c = \exp\left(A\frac{y}{d_0} + \ln c_0\right) .$$

Wählt man die übliche "liegende" Darstellung mit dem Argument y als Ordinate und der Funktion $c(y)$ als Abszisse, so erhält man eine Logarithmusfunktion, was dem bekannten Bild der Verteilung im unteren Bereich recht gut entspricht (vgl. Bild 5-13). Normiert auf die Reinwassertiefe lautet diese Umkehrfunktion $y(c)$:

$$\frac{y}{d_0} = \frac{1}{A} \cdot \ln \frac{c}{c_0} . \quad (8-3)$$

Setzt man ein bestimmtes c_0 fest, so wachsen die Funktionswerte ab diesem Punkt mit zunehmendem $1/A$, d.h. mit ε_c , mit der Turbulenz und letztlich mit dem Gefälle. Gleichzeitig muss aber der Inhalt unter dieser normierten Kurve 1 bleiben. Dies ist nur möglich, wenn c_0 nach rechts verschoben wird. c_0 nimmt also mit wachsendem Gefälle zu. Auch in diesem Punkt verhält sich das einfache Modell erwartungsgemäss.

Bild 8-1 ist die Auswertung von Gleichung (8-3). Ein Vergleich mit Bild 5-13 illustriert, dass die Modellierung über die Diffusionsgleichung die Konzentrationsverteilungen im unteren Abflussbereich in den Grundzügen richtig abbildet.

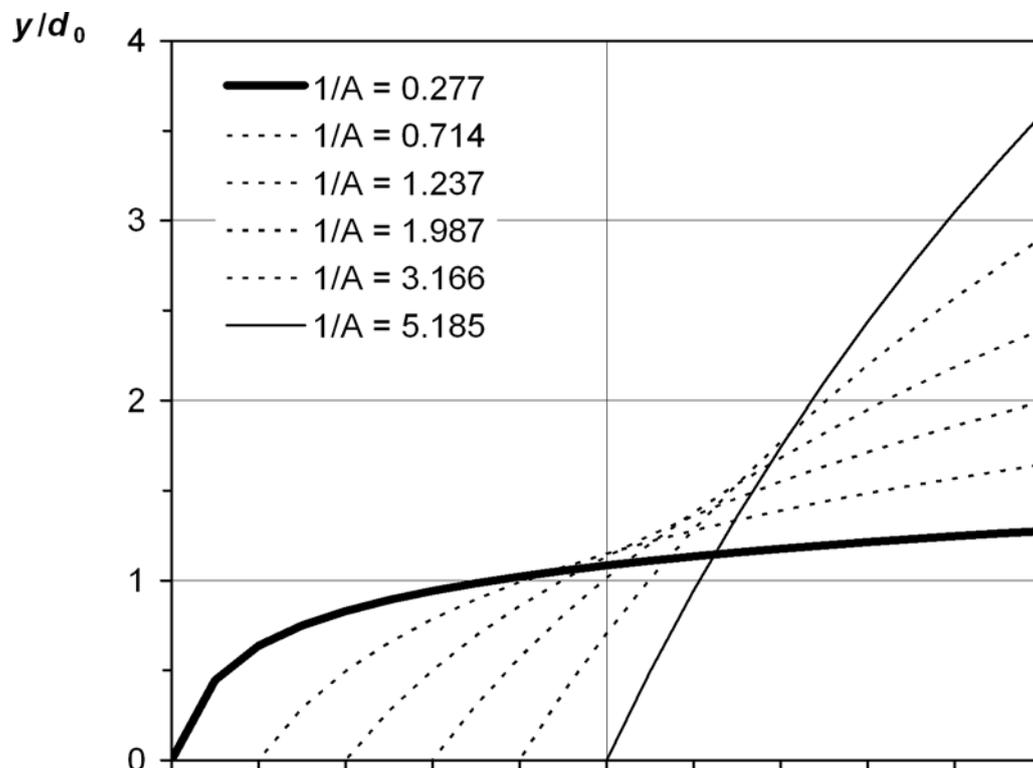


Bild 8-1: Auswertung der Konzentrationsverteilung nach Gleichung (8-3) für verschiedene Werte der Konstanten $1/A$.

8.3 Realer Verlauf von Wirbelviskosität und Steiggeschwindigkeit

Für eine genauere Betrachtung geht man zurück zur Differenzialgleichung (8-1). Der Austauschkoefizient wird in erster Näherung dem Koeffizienten für den Impulsaustausch, der Wirbelviskosität ν_t nämlich, proportional gesetzt. Mit der Wirbelviskosität (3-16) und dem Geschwindigkeitsgradienten (6-3) erhält man

$$\varepsilon_c = \beta \cdot \nu_t = \beta \cdot l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \beta \cdot l^2 \sqrt{\frac{1-\eta}{1-c}} \frac{u_\tau}{l} .$$

Der Proportionalitätsfaktor β wird in erster Näherung oft zu 1 angesetzt.

Die Steiggeschwindigkeit v_b wurde in Abschnitt 2.2.3 ermittelt zu⁴

$$v_b = \frac{1}{18} \frac{gD^2}{v_w} . \quad (2-9)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (8-1) ein, so ergibt sich der Gradient der Luftkonzentration zu

$$\begin{aligned} d_0 \frac{dc}{dy} &= d_0 c \cdot \frac{\cos \theta v_b}{\varepsilon_c} = c \cdot \left(d_0 \cos \theta \frac{1}{18} \frac{gD^2}{v_w} \right) / \left(\beta \cdot l^2 \sqrt{\frac{1-\eta}{1-c}} \frac{u_\tau}{l} \right) \\ &= c \sqrt{1-c} \cdot \frac{d_0 \cos \theta g D^2}{18 \beta \cdot v_w l \sqrt{1-\eta} u_\tau} \end{aligned} \quad (8-4)$$

Nach Abschnitt 2.2.2 ist der *lokale* Blasendurchmesser

$$D = l \cdot \frac{0.725}{r_p^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma/l}{\tau_t} \right)^{3/5} = l \cdot \frac{0.725}{(1-c)^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma/l}{\tau_0(1-\eta)} \right)^{3/5} . \quad (2-6)$$

Geht man stattdessen vom *minimalen* Durchmesser aus, wie er an der Sohle entsteht (vgl. Abschnitt 7.2), so sind die dort herrschenden Bedingungen einschliesslich des Mischungswegs $l = \lambda_k k$ einzusetzen, so dass

$$D = \lambda_k k \cdot \frac{0.725}{(1-c_0)^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma/(\lambda_k k)}{\tau_0} \right)^{3/5} = k \cdot \frac{0.725 \lambda_k^{0.4}}{(1-c_0)^{1/5}} \cdot \left(\frac{\sigma/k}{\tau_0} \right)^{3/5} .$$

4. Möglicherweise ist die Steiggeschwindigkeit in der Turbulenz nicht nur als Folge der turbulenten Diffusion reduziert, sondern auch durch das Strömungsfeld in der Nah-Umgebung der Blase, welches eine Relativbewegung zum umgebenden Fluid erschweren könnte (vgl. Abschnitt 7.1). Ein derartiger Effekt wäre durch die Diffusionsgleichung nicht erfasst, denn die dort berücksichtigten Austauschvorgänge skalieren im Wesentlichen mit den grossen, den energy containing eddies.

Führt man diese Ausdrücke für D in die Gleichung (8-4) ein und zerlegt das Resultat in die Grundgrößen, so erhält man für den lokalen Blasendurchmesser

$$d_0 \frac{dc}{dy} = c(1-c)^{0.1} \cdot \frac{\sigma^{1.2}}{34\beta v_w g^{0.7} \rho_w^{1.2}} \cdot l^{-0.2} d_0^{-0.7} \cos\theta S_e^{-1.7} (1-\eta)^{-1.7}$$

und für den minimalen

$$d_0 \frac{dc}{dy} = c \frac{(1-c)^{0.5}}{(1-c_0)^{0.4}} \cdot \frac{\lambda_k^{0.8} \sigma^{1.2}}{34\beta v_w g^{0.7} \rho_w^{1.2}} \cdot l^{-1} d_0^{-0.7} k^{0.8} \cos\theta S_e^{-1.7} (1-\eta)^{-0.5} .$$

Im *Normalabfluss*, wo Sohl- und Energieliniengefälle gleich sind, kann der Term $\cos\theta S_e^{-1.7}$ in beiden Ausdrücken ersetzt werden durch $J^{-1} S^{-0.7}$, was den starken Einfluss des Gefälles zur Geltung bringt.

Es zeigt sich, dass der auf die Reinwassertiefe normierte Gradient in beiden Fällen auch von d_0 abhängt. Diese Abhängigkeit wird im Mittenbereich noch verstärkt, weil dort auch der Mischungsweg l nach dem Ansatz von Escudier an d_0 gekoppelt ist.

8.4 Schlussfolgerung

Mit der Diffusionsgleichung lässt sich die Verteilung der Konzentration im unteren Teil des Abflusses in erster Näherung nachbilden. Diese Abschätzung legt nahe, dass der auf die Reinwassertiefe normierte Gradient auch von d_0 abhängt. Dies stimmt nicht überein mit dem Resultat der Dimensionsanalyse von Wood (1991), welche allerdings die Oberflächenspannung ausser Acht liess.

Dieses Ergebnis liefert aber schon Gleichung (8-1): Ein grösserer Abfluss geht einher mit höheren Schubspannungen und höherer Turbulenz. Dies hat einerseits kleinere Blasen zur Folge, was die Steiggeschwindigkeit v_b reduziert. Andererseits wird die Wirbelviskosität ε_c erhöht. Beides zieht eine Senkung des Quotienten v_b/ε_c nach sich.

Aufgrund dieser Überlegungen müsste der Sohlluftgehalt *in Prototypen eher höher* sein als im Massstab hydraulischer Modelle. Bezogen auf die Versuche von Straub & Anderson (1958) muss diese Aussage insofern relativiert werden, als dort bei den *kleineren* Abflüssen neben dem Dichte-Effekt möglicherweise noch weitere Mechanismen an der Widerstandsminderung beteiligt waren (vgl. Abschnitte 9.5 und 9.6). Die Geschwindigkeiten und damit auch der Lufteintrag wären dann entsprechend höher ausgefallen, als dies bei reinem Dichte-Effekt der Fall wäre.

9 Vergleich mit Straub & Anderson (1958)

9.1 Einleitung

Das in Kapitel 7 vorgestellte Modell soll mit den Messungen nach Straub & Anderson (1958) verglichen werden. Der Vergleich soll am ebenen Abfluss erfolgen. Hierzu müssen vorgängig einige Annahmen von Straub & Anderson und von Wood (1985) diskutiert werden. Diese betreffen den Wandeinfluss, die massgebende Schubspannung und den Reinwasser-Referenzabfluss.

9.2 Wandeinfluss

Entgegen den Schlussfolgerungen von Wood (1983 ff.) wird davon ausgegangen, dass in den Versuchen ein gleichförmiger Zustand mehr oder weniger erreicht wurde. Die von Wood beobachteten Abweichungen werden hier, wie in Abschnitt 5.3.1b ausgeführt, eher dem Wandeinfluss zugeschrieben.

Dieser wird im Folgenden mittels eines Quotienten U_{Wand}/U berücksichtigt, der die mittleren Geschwindigkeiten im Rechteckgerinne, also mit Wandeinfluss, denjenigen im ebenen Gerinne gegenüberstellt. Die mittleren Geschwindigkeiten für den Falle mit Wand werden mit der *Teilflächen-Methode* gerechnet. Diese teilt den Abflussquerschnitt, der durch einen benetzten Umfang P , hydraulischen Radius R und einen Widerstandsbeiwert f charakterisiert ist, fiktiv in n Teilquerschnitte ein. Diese sind den jeweiligen Bewandungen zugeordnet, jeder mit einem benetzten Teilumfang P_i , einem hydraulischen Radius R_i und einem Widerstandsbeiwert f_i .

Die wichtigste *Annahme* ist die, dass die Geschwindigkeit in allen Querschnitten gleich gross und damit gleich der mittleren Geschwindigkeit sei, d.h. $U_j = U$. Da ausserdem auch das Gefälle in allen Querschnitten gleich ist, ergibt sich dann mit Darcy-Weisbach

$$S = \frac{f_1 \cdot U^2}{8g \cdot R_1} = \frac{f_2 \cdot U^2}{8g \cdot R_2} = \dots = \frac{f \cdot U^2}{8g \cdot R} .$$

Ausserdem müssen die Teilflächen in der Summe die Gesamtfläche ergeben:

$$\sum P_i R_i = PR .$$

Im Fall des Widerstandsgesetzes nach Strickler ergibt das Gleichungssystem ein explizites Resultat (hier nicht verwendet). Es lässt sich aber auch für das Gesetz nach Colebrook-White lösen, allerdings nur rekursiv.

Um den Aufwand in Grenzen zu halten, werden die beiden Geschwindigkeiten nach Colebrook-White für *Reinwasser* gerechnet. Man übernimmt also für den Gemisch-Abfluss den Quotienten, wie er sich für Reinwasser ergibt. Dies ist insofern nicht korrekt, als der Wandeinfluss im belüfteten Abfluss wegen des geringeren Sohlwiderstands ein höheres Gewicht erhält. Andererseits überschätzt die Rechnung mit Teilquerschnitten den Wandeinfluss, weil sie für alle Teilquerschnitte von der gleichen mittleren Geschwindigkeit ausgeht, was in breiten Gerinnen so nicht vorausgesetzt werden kann.

Zudem ist im belüfteten Abfluss wegen der höheren Geschwindigkeit die Reinwassertiefe d_0 und damit die benetzte Wand kleiner. Zwar wäre die *Gemisch*-Wassertiefe wiederum grösser als d_0 . Damit geht aber nicht zwingend ein höherer Wandeinfluss einher, weil ja die Belüftung auch an der Wand den Impulsaustausch und damit die Übertragung der Schubspannungen behindert.

9.3 Totale Schubspannung

Die Rückrechnung der Daten von Straub & Anderson zeigt, dass sie die *Schubspannungsgeschwindigkeit* mit $u_\tau^2 = g S d_\tau$ einsetzen. Hierbei ist d_τ die *transition depth*, d.h. der visuell ermittelte Ort, wo der Grenzschichtabfluss in den Spray übergeht. Diesem Ansatz liegt vielleicht die Vorstellung zugrunde, dass das Gewicht der frei fliegenden Tropfen nicht auf den Wasserkörper wirkt. Dies wäre aber falsch, weil sie ihren Beitrag in Form eines Impulses beim Auswurf und beim Rückfallen leisten. Im zeitlichen Mittel ist doch die Reinwassertiefe d_0 einzusetzen, und die Schubspannungsgeschwindigkeit bleibt nach Gleichung (3-1) definiert mit:

$$u_\tau^2 = g S d_0$$

9.4 Der unbelüftete Vergleichszustand

9.4.1 Der Chézy-Ansatz von Straub & Anderson (1958)

Wie schon in Abschnitt 5.3.1a ausgeführt, konnten Straub & Anderson (1958) keinen unbelüfteten Referenzabfluss mit gleichen Neigungen messen, weil die Selbstbelüftung bei diesen hohen Gefällen nicht zu verhindern ist. Sie messen deshalb eine Serie von Abflüssen bei viel geringeren Neigungen von 1° bis 6.5° , bei welchen noch keine Luft eingetragen wurde, tragen die Resultate graphisch auf (Bild 9-1) und ermitteln den empirischen, dimensionsbehafteten Zusammenhang (in [ft], [s]):

$$U_w = 90.5 \frac{\sqrt{ft}}{s} \sqrt{d_0 S} \quad , \quad \text{wo } d_0 \text{ in [ft] einzusetzen ist.}$$

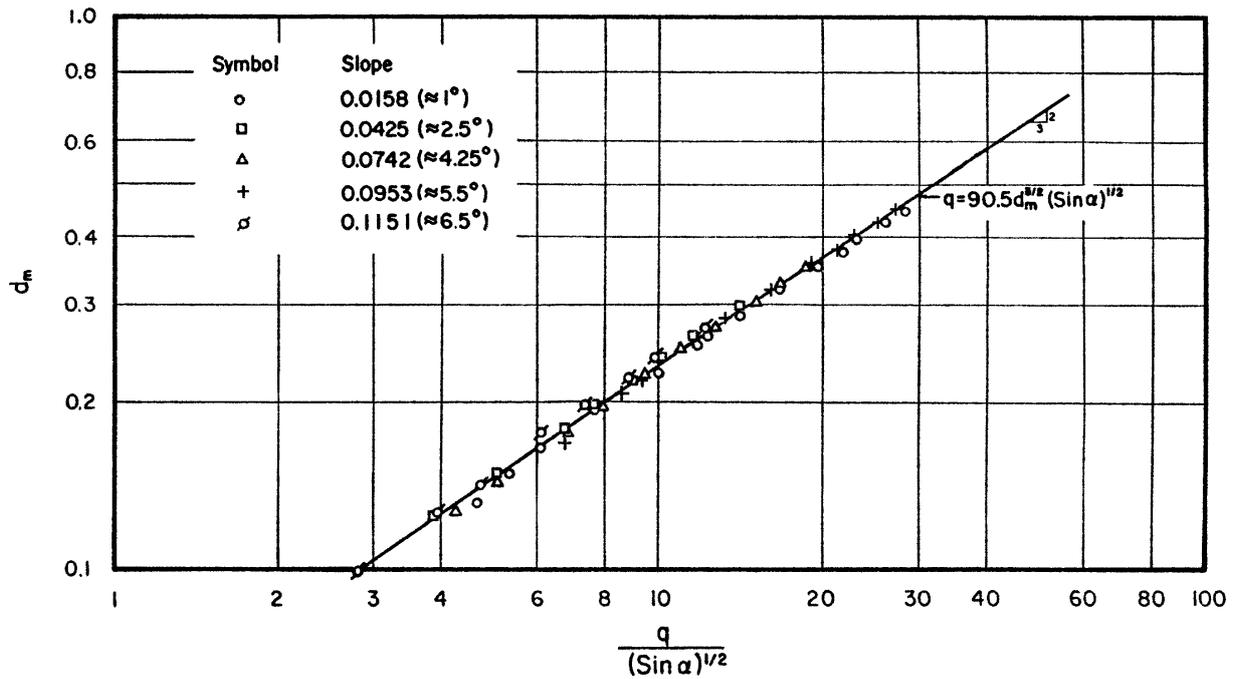


Bild 9-1: Wassertiefe $d_m = d_0$ in Funktion des Durchflusses und des Gefälles für Reinwasserabfluss; Fig. 14 aus Straub & Anderson (1958). Amerikanische Dimensionen: d_m [ft], q [ft²/s].

Nach dem Chézy-Gesetz (3-9) und mit $g = 32.2 \text{ ft}^{1/2}/\text{s}$ erhalten sie den – hier dimensionslos notierten – festen Chézy-Beiwert U^+ von $90.5 / 32.5^{1/2} = 16.0$ und verwenden diesen zur Berechnung der unbelüfteten Referenzabflüsse für die eigentlich untersuchten Neigungen von 7.5° bis 75° .

In Tat und Wahrheit bleibt U^+ aber nicht konstant, sondern wächst gemäss dem logarithmischen Fliessgesetz mit steigender relativer Überdeckung d_0/k . Dies gilt auch für den hypothetischen unbelüfteten Abfluss.

Eine genaue Betrachtung von Bild 9-1 zeigt denn auch, dass die Variation der Chézy-Beiwerte nicht zufällig ist, sondern vom Gefälle abhängt: Für den niedrigsten Neigungswinkel von 1° liest man ein Wert von etwa $85/32.5^{1/2} = 15.0$ ab, für den höchsten von 6.5° einen Wert um $97/32.5^{1/2} = 17.0$. Dies weil die Geschwindigkeiten mit dem Gefälle wachsen und die relativen Überdeckungen dementsprechend sinken.

Der Chézy-Ansatz nach Straub & Anderson ist also zur Bestimmung des unbelüfteten Referenzabflusses ungeeignet. Die von ihnen angegebenen Reinwasser-Referenzgeschwindigkeiten werden deshalb nicht verwendet.

9.4.2 Asymptotischer Ansatz von Wood (1985)

Wood geht zur Bestimmung der Reduktion f_e/f des Widerstandsbeiwertes anders vor: Er nimmt an, dass die horizontale Asymptote, welcher sich die Punkte in Bild 5-14

mit sinkendem Luftgehalt annähern, den Widerstandsbeiwert f für unbelüfteten Abfluss wiedergibt. f ist also invariabel.

Dies kommt aber auf das gleiche heraus wie bei Straub & Anderson (1958): f ist nämlich nach Gleichung (3-33) direkt an den Chézy-Beiwert U^+ gekoppelt. Dieser ist also auch bei Wood invariabel und somit nicht in geeigneter Weise bestimmt.

9.4.3 Eichung der Rauheit

Am besten gewinnt man den unbelüfteten Referenzabfluss über eine Eichung der äquivalenten Sandrauheit, bzw. ihr Verhältnis $\beta_R = k'/k$ zu geometrischen Rauheit, deren Siebdurchmesser Straub & Anderson mit 0.028 in. angeben. Eine Ähnlichkeit zu Wood (1985) besteht insofern, als für die Eichung die kleineren Gefälle prioritär sind.

Dieser Weg, also die Eichung der äquivalenten Sandrauheit, soll hier eingeschlagen werden. Es ist wichtig festzuhalten, dass der Reinwasser-Referenzabfluss in jedem Fall *nur über die Rechnung* gewonnen werden kann.

9.5 Resultate

Bild 9-2 vergleicht die Berechnungen mit den Messungen. Jedes der Teilbilder a) bis i) entspricht einem Set von Annahmen bzgl.:

- Mischungswegansatz (Prandtl oder MR-Ansatz),
- Blasendurchmesser (lokal oder minimal),
- ξ ,
- β_R .

Dargestellt ist das Verhältnis $U_{(R)}^+ / U_{(M)}^+$ der *gerechneten* zu den *gemessenen* mittleren Gemisch- Geschwindigkeiten. Als Abszisse wurde die Sohlluftkonzentration c_0 gewählt.

Zur besseren Orientierung sind die Punkte von vier der von Straub & Anderson gefahrenen Abflüssen – 2.2, 4.2, 7.2 und 9.6 cfs – mit Linien verbunden.

Die Bilder zeigen Folgendes:

- Die von Straub & Anderson angegebene Korngrösse von 0.71 mm, mit der in Bild a) gerechnet wurde, ergibt zu kleine Geschwindigkeiten. Die äquivalente Sandrauheit k' ist tiefer. Eine *Eichung* mit Hilfe eines Korrekturfaktors $\beta_R = k'/k = 0.6$, wie in Bild b) verwendet, führt für die kleinen Sohlluftkonzentrationen zu einer guten Übereinstimmung. – Diesen Wert bestätigen auch die nachfolgenden Bilder für grössere Konzentrationen: Eine grobe Regression durch die Punkte verläuft immer etwa durch den Punkt (0%;1).

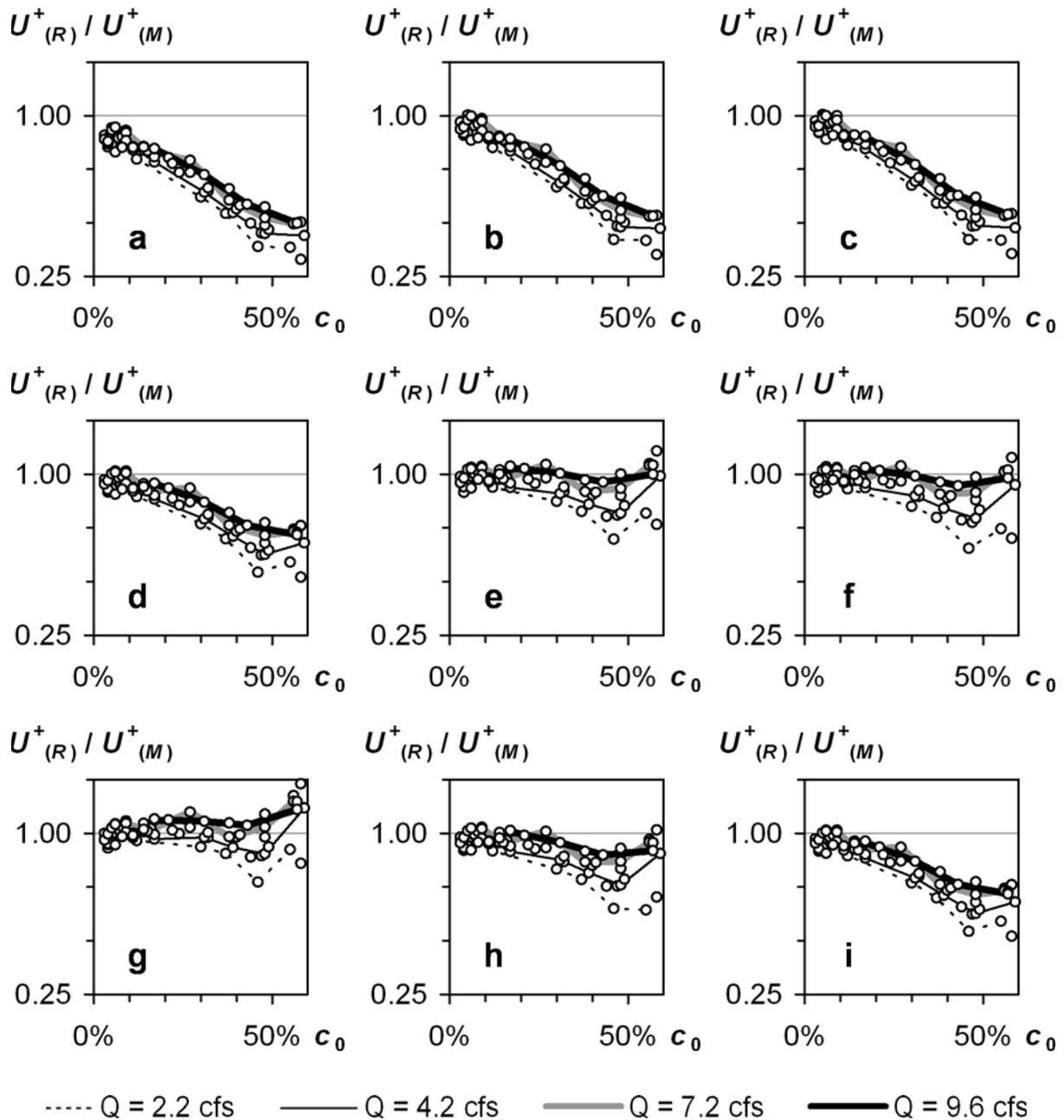


Bild 9-2: Vergleich der Berechnung mit den Messresultaten anhand des Quotienten der jeweiligen mittleren Geschwindigkeiten;

Fall:	I, τ_t nach:	Dichte-Effekt?	Blasendurchmesser:	ξ :	β_R :
a	MR-Ansatz	(Reinwasser)	-	-	1.0
b	MR-Ansatz	(Reinwasser)	-	-	0.6
c	Prandtl	(Reinwasser)	-	-	0.6
d	MR-Ansatz	nein	-	-	0.6
e	MR-Ansatz	ja	minimal	1	0.6
f	MR-Ansatz	ja	lokal	1	0.6
g	MR-Ansatz	ja	0	-	0.6
h	MR-Ansatz	ja	minimal	10	0.6
i	MR-Ansatz	ja	lokal	10	0.6

- Bild b) zeigt aber deutlich, dass die konventionelle Rechnung die Geschwindigkeiten für höhere Luftkonzentrationen stark unterschätzt. Die Wahl des Mischungswegeansatzes hat darauf keinen Einfluss: In Bild c) ist der MR-Ansatz durch die Annahmen nach Prandtl ersetzt, ohne dass eine signifikante Änderung einträte.
- Integriert man das Geschwindigkeitsprofil mit dem effektiv vorhandenen Luftgehalt, aber *ohne Berücksichtigung des Dichte-Effekts*, so ergibt schon dies eine leichte Verbesserung der Resultate (Bild d). Dieser Effekt, der nur im Freispiegelabfluss auftreten kann, ist auf die grössere Gesamtabflusstiefe und den entsprechend längeren Integrationsweg zurückzuführen. Es handelt sich um den in Abschnitt 6.2.2e angesprochenen geometrischen Effekt.
- Bild g) berücksichtigt den Dichte-Effekt *maximal*, d.h. ohne jede abschwächende Wirkung der Blasen, wie sie in Kapitel 7 besprochen wurde. Die Grössenordnung der Resultate stimmt nun sehr gut. Für die grösseren Abflüsse werden die Geschwindigkeiten sogar eher überschätzt.
- Der Einfluss der Blasen ist schliesslich in den vier Bildern unten rechts dokumentiert. Die Bilder e) und h) sind mit minimalem Blasendurchmesser gerechnet, die Bilder f) und i) mit lokalem. Für das Kriterium ξ wurden zwei Werte betrachtet, nämlich $\xi = 1$ in den Bildern e) und f) und $\xi = 10$ in den Bildern h) und i).
 $\xi = 1$ ergibt, fast unabhängig von der Annahme zum Blasendurchmesser, eine gute Übereinstimmung, vor allem für die grösseren Abflüsse. Für $\xi = 10$ werden die Resultate schlechter. Bei Annahme eines lokalen Blasendurchmessers (Bild i) verschwindet der eigentliche, auf dem Impulsaustausch basierende Dichte-Effekt sogar ganz: Es bleibt nur der geometrische Effekt, wie der Vergleich mit Bild d) zeigt.
- Schwierig zu interpretieren ist die mit der Sohlluftkonzentration zunehmende Streuung. Sie ist offenbar nicht zufällig, sondern hängt vom Abfluss ab.

Man könnte einen Zusammenhang mit den Ausführungen aus Abschnitt 5.3.1b vermuten, wonach Straub & Anderson bei den grösseren Abflüssen nicht immer einen ebenen Abfluss erreicht haben dürften. Die Korrektur des Wandeinflusses nach Abschnitt 9.2 ändert ja nichts an den gemessenen und auch in die Nachrechnung eingegangenen Luftkonzentrationen. Da ein wirklich ebener Abfluss schneller wäre, würde er auch mehr Luft eintragen, und sein Widerstand würde stärker reduziert. – Allerdings betrifft dieser Fehler sowohl die Messung als auch die Rechnung. Für den Quotienten $U_{(R)}^+ / U_{(M)}^+$ ist somit keine signifikante Änderung zu erwarten, die Streuung bliebe die gleiche.

Wahrscheinlicher ist die umgekehrte Interpretation: Der Dichte-Effekt kann für die *kleineren* Abflüsse die gemessenen Widerstandsminderungen nicht mehr vollständig erklären, weil weitere Einflüsse den Widerstand ebenfalls senken. In Frage käme beispielsweise der viskose Effekt nach Marié (1987). Dieser kann nämlich,

wie in Abschnitt 6.3.3 gesehen, genau für diese kleineren Abflüsse nicht mehr ausgeschlossen werden. Die Widerstandsminderung wäre in diesen Fällen also ein Zusammenspiel mehrerer Effekte, darunter der Dichte-Effekt.

9.6 Schlussfolgerungen

Ein Vergleich des Rechenmodells mit den Messdaten von Straub & Anderson (1958) ergibt als wichtigstes Resultat, dass der Dichte-Effekt die beobachteten höheren Geschwindigkeiten *gut zu erklären vermag*, die beobachtete Größenordnung eingeschlossen.

Es muss aber damit gerechnet werden, dass die Blasengrösse einen Einfluss auf das Widerstandsverhalten hat: Lässt man sie ausser Acht, ist eine Überschätzung der Geschwindigkeitserhöhung nicht auszuschliessen. Der Vergleich mit den Messungen legt aber nahe, dass die auf einer Höhe y einzusetzende Blasengrösse nicht durch die lokalen Bedingungen gegeben ist, sondern dass eher der minimale Blasendurchmesser, wie er in Sohlnähe entsteht, massgebend ist.

Der Vergleich der Rechnung mit dem Experiment ergibt allerdings, dass für die kleineren gefahrenen Abflüsse der Dichte-Effekt die gemessene Widerstandsminderung nicht vollständig zu erklären vermag. Mit Blick auf Abschnitt 6.3.3 ist dies allerdings genau der Bereich, wo der viskose Effekt nach Marié (1987), vielleicht aber auch weitere Einflüsse, nicht mehr ausgeschlossen werden können. Sie könnten in der Lage sein, den Fehlbetrag beizusteuern.

Dies würde bedeuten, dass auch hier mit einem Massstabseffekt zu rechnen wäre. Er hätte Mindestabflüsse zur Folge, welche für die reale Nachbildung des Widerstandsverhaltens auf Prototypen erforderlich sind. Die erforderlichen Mindest-Reinwassertiefen dürften nach den Überlegungen zu Bild 6-10 einen Bereich von 5 bis 10 cm nicht unterschreiten.

10 Folgerungen und Ausblick

10.1 Ergebnisse

Diese Arbeit führt zu folgenden Ergebnissen:

- Es gibt starke Anzeichen, dass in Verhältnissen, wie sie in wasserbaulichen Entlastungsanlagen herrschen, *ein* Mechanismus dominant ist: Die verringerte Dichte reduziert den turbulenten Impulsaustausch.

Dieser *Dichte-Effekt* trifft auch die richtige Größenordnung, wie ein Vergleich mit den Modellmessdaten von Straub & Anderson (1958) zeigt (Bild 10-1). Er bietet auch eine Erklärung für die Beobachtung von Ebadian (2003), dass die Widerstandsminderung mit höherer Rauheit sogar zunimmt. Einzig bei den kleineren, von Straub & Anderson gefahrenen Abflüsse kann die Beteiligung weiterer Effekte nicht ganz ausgeschlossen werden.

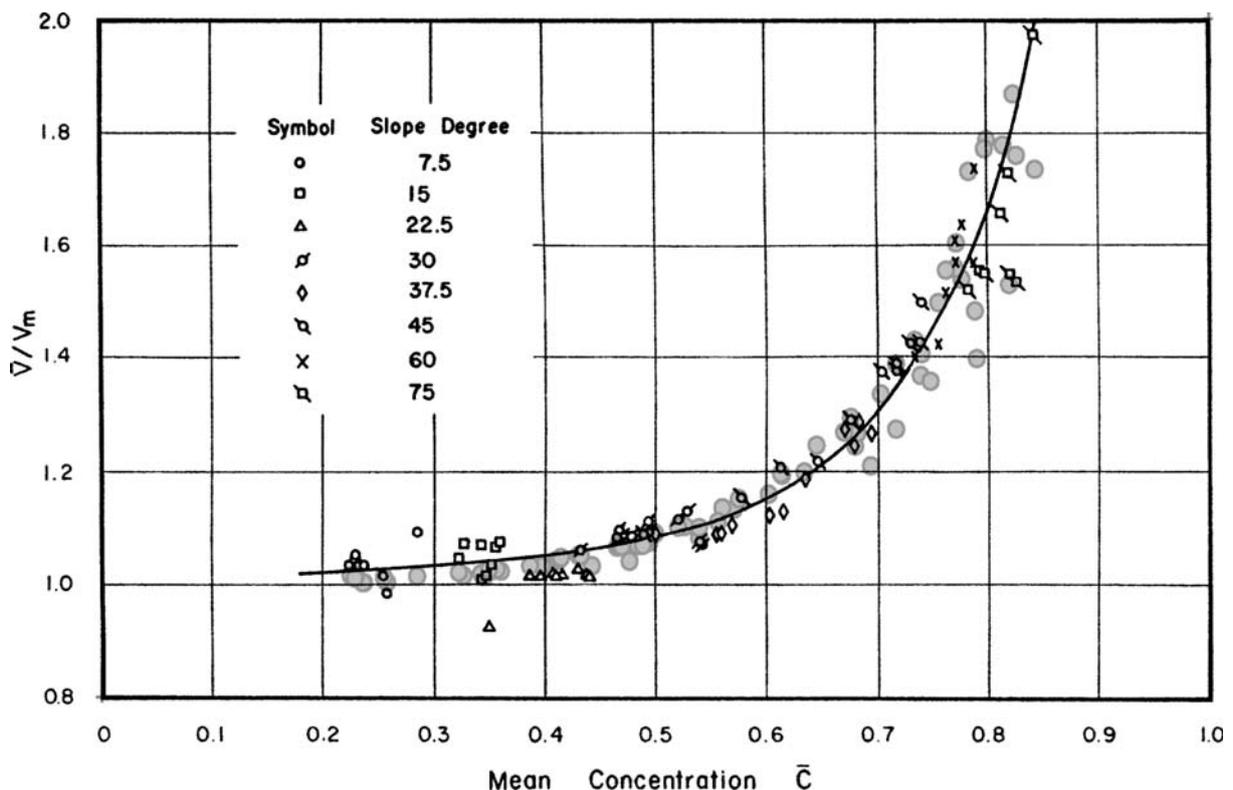


Bild 10-1: Vergleich mit den Versuchen nach Straub & Anderson (1958).

Grau: Nachrechnung unter Berücksichtigung des Dichte-Effekts.

Kriterium $\xi = 10$.

- Der Dichte-Effekt könnte dort abgeschwächt oder eliminiert werden, wo der *Blasendurchmesser* gegenüber dem Mischungsweg zu gross wird. Dieser Effekt fällt mit zunehmendem spezifischem Abfluss weniger ins Gewicht. Er hängt also vom

Massstab ab. – Ein Postulat dieser Arbeit ist, dass hierfür im Wesentlichen derjenige Blasendurchmesser massgebend ist, wie er im Bereich der grössten Beanspruchung, d.h. an der Sohle, entsteht.

- Das verwendete Rechenmodell enthält zwei Verfeinerungen, die auch mehr Rechenaufwand bedingen: die Berücksichtigung der Blasengrössen und der detailliertere MR-Ansatz für den Mischungsweg. Es stellt sich die Frage nach den zulässigen Vereinfachungen:

Die *Blasengrösse* dürfte auf Prototypen in erster Näherung vernachlässigbar sein – allerdings nur für die Widerstandsberechnung, nicht für die Konzentrationsverteilung. Im Modellmassstab ist noch mehr Vorsicht angebracht.

Ob das *Mischungswegmodell* im Kornbereich verfeinert werden muss, hängt in erster Linie von der relativen Rauheit ab. In den vorliegenden Berechnungen zu den Versuchen von Straub & Anderson – und erst recht in realen Schussrinnen – dürfte das Modell von Escudier ausreichen, in sehr rauen Verhältnissen hingegen nicht.

- Formuliert man eine Diffusionsgleichung für die Konzentrationsverteilung, so hängt diese auch von der Wassertiefe, damit vom spezifischen Abfluss und letztlich vom Massstab ab. Dies weil die damit verbundene höhere Turbulenz den Transport von Luft nach unten verstärkt. Zudem hat sie eine stärkere Fragmentierung der Blasen und damit eine verringerte Steiggeschwindigkeit zur Folge. Beides erhöht tendenziell die Sohlluftkonzentration.

Dies stimmt nicht überein mit der Annahme von Wood (1991), wonach das Konzentrationsprofil nur vom Gefälle abhängt (s. Abschnitt 5.3.1b).

10.2 Folgerungen im Hinblick auf die praktische Anwendung

Die Tatsache, dass der Gemisch-Abfluss schneller ist als ein entsprechender Reinwasserabfluss, ist schon länger bekannt. Sie kann aber bisher bei der Bemessung wasserbaulicher Entlastungsanlagen nicht ausreichend berücksichtigt werden. In der Praxis versucht man die Senkkurve einzugabeln, und zwar im Extremfall zwischen der Reinwasser-Senkkurve mit den üblichen Rauheitsannahmen einerseits und der Rechnung ohne Verluste andererseits.

Der Abfluss eines Wasser-Luft-Gemischs ist, wie einleitend in Abschnitt 1.2 ausgeführt, eine Interaktion zweier Vorgänge: Der Widerstandsminderung durch die Luft einerseits und der Ausbildung des Luftkonzentrationsprofils durch Gravitation und Turbulenz andererseits. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem ersten dieser beiden Vorgänge. Zum zweiten Teil existieren keine ausreichenden Grundlagen.

Eine genaue Berechnung ist nicht möglich, solange das Luftkonzentrationsprofil nicht ausreichend genau bestimmt werden kann. Einstweilen kann nur eine *Verengung* der erwähnten Eingabelung erreicht werden.

Hierbei dürften die Messwerte von Straub & Anderson (1958) eine *untere* Grenze für das Konzentrationsprofil liefern, weil bei Prototypen tendenziell höhere Konzentrationen zu erwarten sind (s. Abschnitt 8.4). Allerdings liegen die niedrigen von Straub & Anderson gefahrenen Abflüsse in einem Bereich, wo auch andere Mechanismen den Widerstand mindern könnten (s. Abschnitte 8.4, 9.5 und 9.6). Diese "zu schnellen" Abflüsse hätten dann auch "zu viel" Luft eingetragen, so dass ihre Konzentrationen unter diesem Gesichtspunkt keinen verlässlichen unteren Grenzwert darstellen. Es wäre also eher auf Konzentrationsprofile der *mittleren* von Straub & Anderson gefahrenen Abflüsse zurückzugreifen, z.B. im Bereich von 6 bis 8 cfs.

10.3 Ausblick

Im Hinblick auf die praktische Nutzung scheinen dem Autor drei Anliegen prioritär, was die weitere Forschung anbelangt:

- die Abschätzung der Konzentrationsverteilung,
- vereinfachte Berechnungsansätze für die eindimensionale Senkkurvenrechnung,
- der Vergleich mit Messdaten zu Kaskaden.

Wie die vorliegende Arbeit und vor allem Kapitel 8 zeigen, sollten entsprechende Forschungsarbeiten unbedingt durch eine sorgfältige Analyse der Prozesse begleitet werden. Das physikalische Verständnis ist unerlässlich, insbesondere wenn die Resultate von hydraulischen Modellversuchen auf andere Massstäbe übertragen werden sollen.

10.3.1 Abschätzung der Konzentrationsverteilung

Zum zweiten Vorgang, der Bildung des Konzentrationsprofils, wurden in Kapitel 8 erste Überlegungen angestellt. Dieses Vorgehen dürfte für den Sohlennahbereich eine erste Basis bilden, weil es sich hier um eine Dispersion von Luftblasen in Wasser handelt.

In den höher liegenden Schichten wird die Luftkonzentration irgendwann so gross, dass diese Struktur zusammenbricht. Es dürften zwar ähnliche Prozesse wirken, sie können aber nicht mehr auf die gleiche Weise abgebildet werden.

Diesen Prozess zu klären, wäre ein Hauptanliegen für die zukünftige Forschung auf dem Gebiet der schnellen Wasser-Luft-Zweiphasenströmungen. Eine *physikalisch begründete* Klärung käme nicht nur der vorliegenden Fragestellung zugute, sondern würde wohl auch wesentliche Beiträge liefern zum besseren Verständnis weiterer

Fragestellungen: etwa des Luftaustrags, der erforderlichen Höhe der Seitenmauern von Hochwasserentlastungen oder des Lufteintrags an Schussrinnenbelüftern, der Auflösung eines Sprungstrahls. – Die Literatur zu Jets und internen Grenzschichten, die den Wasserbauern weniger geläufig ist, dürfte Ansatzpunkte liefern.

10.3.2 Vereinfachte Ansätze für die Senkkurvenrechnung

Ist eine valable Möglichkeit zur Bestimmung der Konzentrationsverteilung verfügbar, so sollte es möglich sein, ein vereinfachtes Rechenverfahren vorzuschlagen. Denkbar wäre beispielsweise die Bestimmung einer "repräsentativen", für den Widerstand massgebenden Konzentration, welche eine tiefengemittelte Berechnung erlauben würde. Ausschlaggebende Parameter dürften das Sohl- und das Energieliniengefälle sein.

10.3.3 Vergleich mit Messdaten an Treppenschussrinnen

Der Vergleich mit den Daten von Straub & Anderson (1958) in Kapitel 9 erlaubte eine *Eichung* der Rauheit, weil ein grosses Spektrum von Gefällen gemessen wurde. Dies war für die Bestimmung des Reinwasser-Referenzabflusses *unerlässlich*.

Bei Treppenschussrinnen wurden zwar ebenfalls verschiedene Neigungen untersucht. Die Geometrie wurde aber in der Regel wie in Bild 5-19 gewählt: Die Stufen wurden nicht geneigt, sondern verlängert. Chanson (1994b) beispielsweise bezieht Daten von Noori (1984) für sehr flache Stufen in seine Betrachtung mit ein. Ein echter Vergleich müsste aber die Stufengeometrie beibehalten.

Entsprechende Messungen im Freilauf konnten nicht gefunden werden. Als Alternative kann man auf Messungen unter Druck zurückgreifen. Von Gessner (1960) existiert eine entsprechende Arbeit. Er untersucht fixierte Rechteckriffel einer Höhe k für verschiedene Anströmwinkel α (vgl. Bild 10-2). Für seinen eigentlichen Forschungsgegenstand – Riffelablagerungen in Rohrleitungen – leistet die Untersuchung einen bescheidenen Beitrag: Die Riffel organisieren sich selbst, und zwar, wie schon Gessner selbst vermutet, als Folge einer Rückkoppelung zwischen Turbulenz und Riffeln (vgl. Schmid 1985, Koch 2008).

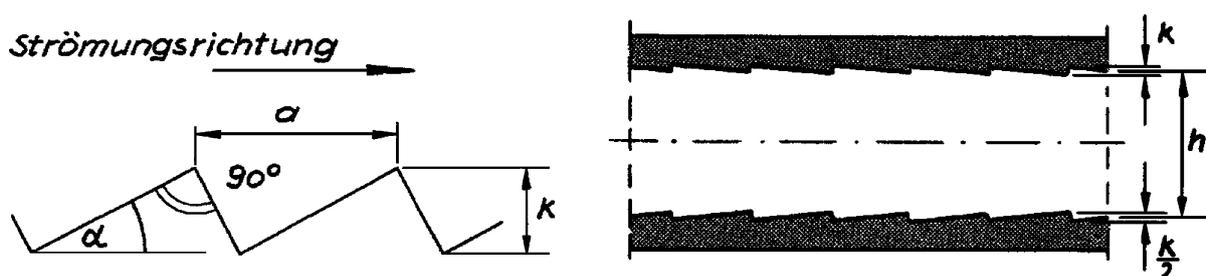


Bild 10-2: Gessner (1960a): Definitionsskizzen.

Über die Berechnung der äquivalenten Sandrauheit k' findet Gessner aber einen Effekt, der in unserem Zusammenhang sehr interessant ist: Steigert man nämlich α sukzessive von 0° gegen 90° , so springt das Verhältnis $\beta_R = k'/k$ in einem Bereich zwischen 45° und 70° auf sehr hohe Werte um 10 (Bild 10-3). Überdies lässt Gessner offen, ob dazwischen noch höhere Werte möglich wären; die von ihm eingetragene Interpolation ist willkürlich.

Leider liegen typische Kaskadenneigungen exakt in diesem Sprungbereich. Zwar lassen sich über eine Neuauswertung von Gessners Daten noch höhere Werte für k'/k weitgehend ausschliessen. Dies unter Einbezug des Bezugshorizontes (vgl. Abschnitt 3.7.6), den Gessner durch Auslitern (analog zu Nikuradse 1933) implizit auf der halben Stufenhöhe $k/2$ festgesetzt hatte.

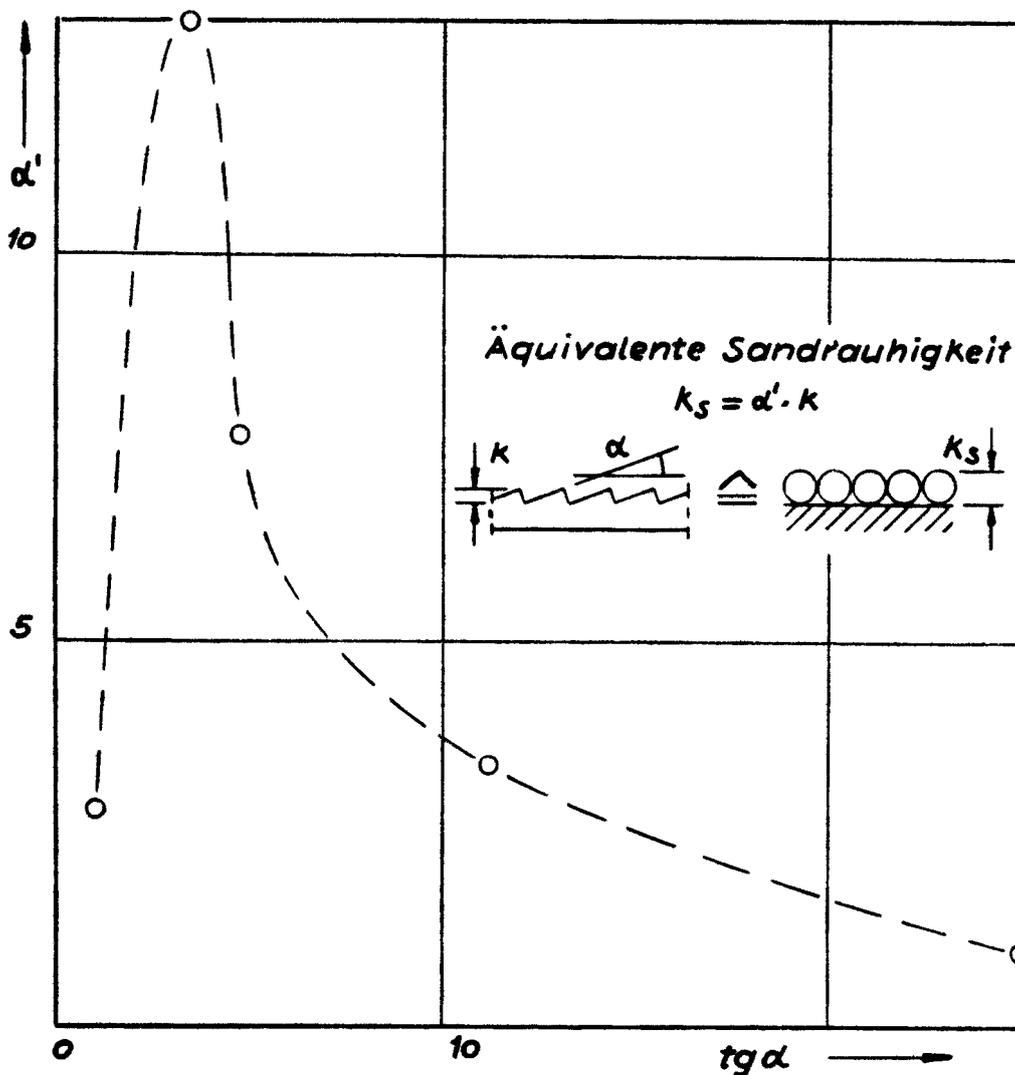


Bild 10-3: Gessner (1960a): Äquivalente Sandrauheiten (nur für Anström-
winkel α über 45°); α' bezeichnet hier $\beta_R = k'/k$. Gestrichelt die
mutmassliche Interpolation nach Gessner.

Die Variabilität der Rauheit ist aber immer noch zu gross. Ein Vergleich mit Messungen auf Kaskaden konnten deshalb in die vorliegende Arbeit nicht mit einbezogen werden. Es wäre wünschenswert, diesen Zwischenbereich näher zu untersuchen. Dies könnte vielleicht, gestützt auf Gessners Daten, auch numerisch geschehen. Ein entsprechendes Resultat würde nicht nur einen weiteren Vergleich mit der vorliegenden Theorie erlauben, sondern käme auch der Bemessungspraxis zugute.

Referenzen

- Abraham, F.S. (1970): "Functional dependence of drag coefficient of a sphere on Reynolds number". *Phys. Fluids* 13(2): 2194-2195.
- Acarlar, M.S., Smith, C.R. (1987): "A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer. Part 1 - Hairpin vortices generated by a hemisphere protuberance". *J. Fluid Mech.* 175 (1): 1-41.
- Anderson, A.G. (1965): "Influence of Channel Roughness on the Aeration of High-Velocity, Open-Channel Flow". 11th IAHR Congress, Leningrad, Soviet Union, Paper 1.37.
- Badalassi, V.E., Cenicerros, H.D. (2002): "Computation of Multiphase Systems with Phase Field Models". *J. Computational Physics* 190: 371–397.
- Batchelor, G.K. (1951): "Pressure fluctuations in isotropic turbulence". *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 47: 359-374.
- Batchelor, G.K. (1967): "An Introduction to Fluid Dynamics". Cambridge U.P..
- Batchelor, G.K., Green, J.T. (1972): "The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order C_2 ". *J. Fluid Mech.* 56(3): 401-427.
- Bezzola, G.R. (2002): "Fliesswiderstand und Sohlenstabilität natürlicher Gerinne - unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses der relativen Überdeckung". Dissertation, Mitt. Nr. 173, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich.
- Boes, R. (2000): "Zweiphasenströmung und Energieumsetzung an Grosskaskaden". Dissertation, Mitt. Nr. 183, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich.
- Bogdevich, V.G., Evseev, A.R., Malyuga, A.G., Migirenko, G.S. (1977): "Gas-Saturation Effect on Near-Wall Turbulence Characteristics". *Proc. 2nd Intl. Conf. on Drag Reduction, BHRA Fluid Eng., Cambridge, UK, D2: 25-37.*
- Bradshaw, P. (1971): "An Introduction to Turbulence and its Measurement". Pergamon, Oxford, UK.
- Cain, P. (1978): "Measurements within self-aerated flow on a large spillway". Doctoral Dissertation, Ref. 78-18. Univ. of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- Chanson, H. (1988): "Study of Air Entrainment and Aeration Devices on a Spillway Model". Doctoral Dissertation, Res. Rep. No.88-8, Univ. of Canterbury. Christchurch, New Zealand.

- Chanson, H. (1994a): "Drag reduction in open channel flow by aeration and suspended load". *J. Hydr. Res.* 32(1): 87-101.
- Chanson, H. (1994b): "Hydraulic Design of stepped cascades, channels, weirs and spillways". Pergamon, Oxford, UK.
- Chanson, H. (1996): "Air Bubble Entrainment In Free-Surface Turbulent Shear Flows". Academic Press, London, UK.
- Clay, P.H. (1940): "The mechanism of emulsion formation in turbulent flow". *Proc. Royal Acad. Sci. (Amsterdam)* 43: 852-865, 979-990.
- Colebrook, C.F. (1939): "Turbulent Flow in Pipes with Particular Reference to the Transition Region Between the Smooth and Rough Pipe Laws". *J. Inst. of Civil Engineers* 11: 133-156.
- Coles, D.E. (1968): "The Young Person's Guide to the Data". *Proc. AFOSR-IFP-Stanford Conference on Computation of Turbulent Boundary Layer*: 1-45.
- Comolet, R. (1979): "Sur le mouvement d'une bulle de gaz dans un liquide". *La Houille Blanche* 35(1): 31-42.
- Dittrich, A., Koll, K. (1997): "Velocity Field and Resistance of Flow over Rough Surfaces with Large and Small Relative Submergence". *Int. J. of Sediment Res.* 12(3): 21-33.
- Ebadian, M.A., Skudarnov, P.V., Lin, C.X., Philippidis, G.P. (2003): "Final Technical Report for Analytical Assessments Related to Microbubble Drag Reduction". Hemispheric Center for Environmental Technology, Florida International University.
- Eddington, R.B. (1970): "Investigation of Supersonic Phenomena in a Two-Phase (Liquid-Gas) Tunnel". *AIAA Journal* 8(1): 65-74.
- Einstein, A. (1906/11): "Eine Neue Bestimmung der Moleküldimensionen". *Ann. Phys.* 19: 289-306 und 34: 591-592.
- Einstein, H.A., El-Samni, E.-S. (1949): "Hydrodynamic Forces on a Rough Wall". *Reviews of Modern Physics* 21(3): 520-524.
- Escudier, M.P. (1966): "The distribution of mixing length in turbulent flows near walls". Imperial College, Heat Transfer Section. Rep. TWF/TN/1.
- Falvey, H.T. (1980): "Air-water flow in hydraulic structures". Engineering Monograph 41, USBR, Denver.
- Favre, A. (1965): "Équations des gaz turbulents compressibles - I.- Formes générales". *Journal de Mécanique* 4(3).

- Ferrante, A., Elghobashi, S. (2004): "On the physical mechanisms of drag reduction in a spatially developing turbulent boundary layer laden with microbubbles". *J. Fluid Mech.* 503: 345.
- Flumerfeldt, R.W. (1980): "Effects of dynamic interfacial properties on drop deformation and orientation in shear and extensional flow fields". *J. Colloid Interface Sci.* 76: 330-349.
- Gessner, W. (1960a): "Druckverluste in Rohrleitungen und geschlossenen Kanälen bei Riffelrauhigkeit". Dissertation, Techn. Hochschule Darmstadt, Fakultät Bauingenieurwesen.
- Gessner, W. (1960b): "Druckverluste in Rohrleitungen und geschlossenen Kanälen bei Riffelrauhigkeit". *Chemische Apparatur* 84(10,12,14): 329-334, 394-398, 463-470.
- Gyr, A., Bewersdorff, H.-W. (1995): "Drag Reduction of Turbulent Flows by Additives". Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-3485-X.
- Haberman, W.L., Morton, R.K. (1956): "An Experimental Study of Bubbles Moving in Liquids". *Transactions ASCE*, 121: 227-252 .
- Hadamard, J. (1911/12): "Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux". *C.R.Ac.Sc.* 152: 1735-1738; 154: 109.
- Hager, W.H. (1991): "Uniform Aerated Chute Flow". *J. Hydr. Eng.* 117(4): 528-533.
- Hartung, F., Scheuerlein, H. (1970): "Design of overflow". *ICOLD Congress, Montreal, Canada, Q.36(R.35): 587-598.*
- Hatschek, E. (1910/11): "Die Viskosität der Dispersoide". *Koll. Zeitschr.* 7: 301 sowie 8: 34.
- Hinze, J.O. (1955): "Fundamentals of the Hydrodynamic Mechanism of Splitting in Dispersion Processes". *AiChE* 1: 289–295.
- Hoyer, K. (2006): Private Korrespondenz.
- Huffman, G.D., Bradshaw, P. (1972): "A note on von Kármán's constant in low Reynolds number turbulent flows". *J. Fluid Mech.* 53: 45-60.
- Kawamura, T., Fujiwara, A., Takahashi, T., Kato, H., Matsumoto, Y., Kodama, Y. (2005): "The Effects of the Bubble Size on the Bubble Dispersion and Skin Friction Reduction". 6th Symposium on Smart Control of Turbulence, Tokyo.
- Kobus, H. (1973): "Bemessungsgrundlagen und Anwendungen für Luftschleier im Wasserbau". Habilitationsschrift an der Universität Karlsruhe. Erich Schmidt Verlag.

- Koch, T. (2008): "Widerstandsphänomene in Druckrohrleitungen". GWF Wasser Abwasser 149(5): 416-425.
- Kramer, K. (2004): "Development of Aerated Chute Flow". Dissertation, Mitt. Nr. 183, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich.
- Kraynik, A.M. (1988): "Foam Flows". Ann. Rev. Fluid Mech. 20: 325-357.
- Laufer, J. (1951): "Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel". 1053, Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, Pasadena, Calif.; NACA, Report 1053.
- Laufer, J. (1954): "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow". NACA, Report 1174.
- Legner, H.H. (1984): "A simple model for gas bubble drag reduction". Phys. Fluids 27(12): 2788-2790.
- Lu J., Fernández, A., Tryggvason, G. (2005): "The effect of bubbles on the wall drag in a turbulent channel flow". Phys. Fluids 17, 095102.
- Lumley, J.L. (1969): "Drag Reduction by Additives". Ann. Rev. Fluid Mech. 1: 367-384.
- Lumley, J.L. (1976): "Two-Phase and Non-Newtonian Fluids". Turbulence (P. Bradshaw, ed.), Springer-Verlag, ISBN 3-540-07705-7, ISBN 3-387-07705-7.
- Lumley, J.L. (1977): "Drag reduction in two phase and polymer flows". Phys. Fluids 20(10), Part II: 64-71.
- Madavan, N.K., Deutsch, S., Merkle, C.L. (1984): "Reduction of turbulent skin friction by microbubbles". Phys. Fluids 27(2): 356-363.
- Madavan, N.K., Deutsch, S., Merkle, C.L. (1985a): "Measurements of local skin friction in a microbubble-modified turbulent boundary layer". J. Fluid Mech. 156: 237-256.
- Madavan, N.K., Merkle, C.L., Deutsch, S. (1985b): "Numerical Investigations Into the Mechanisms of Microbubble Drag Reduction". Trans. ASME, J. Fluids Eng. 107(3): 370-377.
- Marié, J.L. (1987): "A Simple Analytical Formulation for Microbubble Drag Reduction". PhysicoChemical Hydrodynamics, 8(2): 213-220.
- McCormick, M.E., Bhattacharya, R. (1973): "Drag Reduction of a Submersible Hull by Electrolysis". Naval Eng. J. 85: 11-16.
- Meng, J.C.S., Uhlman, J.S. (1986): "Theoretical Analysis and Numerical Simulation of Bubble Formation Dynamics in a Turbulent Boundary Layer". Gould Ocean Systems Div. Rept. Newport, RI, OSD-771-HYDRO-CR-86-04.

- Merkle, C.L., Deutsch S. (1990): "Drag Reduction in Liquid Boundary Layers by Gas Injection". Progress in Astronautics and Aeronautics 123, Viscous Drag Reduction in Boundary Layers (D.M. Bushnell, J.N. Hefner, eds.).
- Michel, R., Quémard, C., Durant, R. (1968): "Hypotheses on the mixing length and application to the calculation of the turbulent boundary layers". Proc. Computation of Turbulent Boundary Layers (S.J. Kline et al., eds.) AFOSR-IFP-Stanford Conference, I: 195-207.
- Minor, H.-E. (1987): "Erfahrungen mit Schussrinnenbelüftung". Wasserwirtschaft 77(6): 292-295.
- Müller, A. (2006): Private Korrespondenz.
- Nezu, I., Nakagawa, H. (1993): "Turbulence in Open-Channel Flows". A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield.
- Nikuradse, J. (1932): "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömungen in glatten Rohren". Forschungsheft 356, (Beilage zu "Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens", Ausgabe B Band 3 September/Oktober 1933), VDI-Verlag GmbH, Berlin.
- Nikuradse, J. (1933): "Strömungsgesetze in rauhen Rohren". Forschungsheft 361 (Beilage zu "Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens", Ausgabe B Band 4 Juli/August 1933), VDI-Verlag GmbH, Berlin.
- Noori, B.M.A. (1984): "Form drag resistance of two dimensional stepped steep open channels". Proc. 1st Int. Conf. on Hydraulic Design in Water Resources Engineering; Channels and Channel Control Structures. Southampton, UK (K.V.H. Smith, ed.).Springer: Berlin. 1: 133-147.
- Ortiz-Villafuerte, J., Hassan, Y.A. (2006): "Investigation of Microbubble Boundary Layer Using Particle Tracking Velocimetry". J. Fluid Eng. 128: 507-519.
- Prandtl, L. (1925): "Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz". ZAMM 5(2): 136-139.
- Raemy, F. (1978): "Mesure de la turbulence dans un écoulement d'eau en conduite à paroi rugueuse". R14-78, Inst. für Hydromechanik und Wasserwirtschaft, ETH Zürich.
- Rajaratnam, N. (1990): "Skimming flow in stepped spillways". J. Hydr. Eng. 116(4): 587-591.
- Reichardt, H. (1951): "Vollständige Darstellung der Turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in Glatten Leitungen". ZAMM 31(7): 208-219.

- Rodi, W. (1984): "Turbulence models and their application in hydraulics - a state of the art review". Second revised edition, Institut für Hydromechanik, University of Karlsruhe.
- Rosenhead, L. (1954): "The Second Coefficient of Viscosity: a Brief Review of Fundamentals". Proc. Royal Soc. of London (A) 226: 1-6.
- Rouse, H. (1950): "Engineering Hydraulics". John Wiley & Sons, New York.
- Schlichting, H., Gersten, K. (1997): "Grenzschicht-Theorie". 9. Auflage, Springer, ISBN 3-540-55744-X.
- Schmid, A. (1985): "Wandnahe turbulente Bewegungsabläufe und ihre Bedeutung für die Riffelbildung". Diss. ETH Zürich, Nr. 7697.
- Sibree, J.O. (1934): "The Viscosity of Froth". Trans. Faraday Soc. 30: 325-331.
- Straub, L.G., Lamb, O.P. (1956): "Studies of Air Entrainment in Open-Channel Flows". Trans. ASCE 121: 30-44.
- Straub, L.G., Anderson, A.G. (1958): "Experiments on Self-Aerated Flow in Open Channels". Proc. ASCE, J. Hydr. Div. 84(HY7), 1890: 1-35.
- Sugiyama, K., Kawamura, T., Takagi, S., Matsumoto, Y. (2002): "Numerical Simulation of Transient Microbubble Flow". Proc. 4th Symp. on Smart Control of Turbulence, Tokyo.
- Sugiyama, K., Kawamura, T., Takagi, S., Matsumoto, Y. (2003): "The Reynolds Number Effect on the Microbubble Drag Reduction". Proc. 5th Symp. on Smart Control of Turbulence, Tokyo.
- Taneda, S. (1978): "Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between 10^4 and 10^6 ". J. Fluid Mech. 85(1): 187-192.
- Taylor, G. (1932): "The Viscosity of a Fluid Containing Small Drops of Another Fluid". Proc. Royal Soc. of London (A) 138: 41-48.
- Taylor, G. (1954): "The Two Coefficients of Viscosity for an Incompressible Fluid Containing Air Bubbles (with note by R.O. Davies)". Proc. Royal Soc. of London (A) 226: 34-37.
- Thomas, R.M. (1981): "Bubble Coalescence in Turbulent Flow". Int. J. of Multiphase Flow 7(6): 709-717.
- Trevan, J.W. (1918): "The Viscosity of Blood". Biochem. J. 12: 60-71.
- Tritton, D.J. (1988): "Physical Fluid Dynamics". Second Edition, Clarendon Press, Oxford, ISBN 0-19-854493-6.

- Tsinober, A. (1989): "Turbulent Drag Reduction versus Structure of Turbulence". Structure of Turbulence and Drag Reduction, IUTAM Symp. Zurich (A. Gyr, ed.), Springer-Verlag: 313-340.
- van Driest, E.R. (1956): "On turbulent flow near a wall". J. Aeron. Sci. 23: 1007-1011.
- Virk, P.S. (1971): "Drag Reduction in Rough Pipes". J. Fluid Mech. 45: 225-246.
- Volkart, P. (1978): "Hydraulische Bemessung steiler Kanalisationsleitungen unter Berücksichtigung der Luftaufnahme". Dissertation, Mitt. Nr. 30, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich.
- White, C.M., Mungal, M.G. (2008): "Mechanics and Prediction of Turbulent Drag Reduction with Polymer Additives". Ann. Rev. Fluid Mech. 40: 235–56.
- White, F.M. (1974): "Viscous Fluid Flow". McGraw-Hill, ISBN 0-07-069710-8.
- Winnikow, S., Chao, B.T. (1966): "Droplet motion in purified systems". Phys. Fluids 9: 50-61.
- Wood, I.R. (1983): "Uniform Region of Self-Aerated Flow". J. Hydr. Eng. 109(3): 447-461.
- Wood, I.R. (1985): "Air Water Flows". 21st IAHR Congress, Melbourne, Australia, 6: 18-29.
- Wood, I.R. (1991): "Free surface air entrainment on spillways". Air Entrainment in Free-Surface Flows, IAHR monograph (I.R. Wood ed.), A.A.Balkema.
- Yalin, M.S. (1977): "Mechanics of Sediment Transport". Pergamon Press, Oxford.

Symbole

Lateinische Buchstaben

A	[m ²]	Querschnittsfläche
a	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
B	[-]	Konstante der Geschwindigkeitsverteilung
C	[-]	über die Abflusstiefe gemittelte Luftkonzentration
C_d	[-]	Widerstandsbeiwert für einen Körper
$C_f = 4f$	[-]	Widerstandsbeiwert nach Fanning
$c = c(y)$	[-]	lokale Luftkonzentration
$c_0 = c(y = 0)$	[m]	Luftkonzentration an der Sohle
$c_{Chezy} = U^+$	[-]	Chézy-Beiwert
c_k	[-]	Rauheitsdichte
c_R^2	[-]	Dämpfungsfaktor der turbulenten Schubspannungen
$D = 4R$	[m]	hydraulischer Durchmesser
D	[m]	Blasendurchmesser
$d = d(y)$	[m]	Reinwasser-Überlagerung an der Stelle y
$d_0 = d(y = 0)$	[m]	gesamte Reinwassertiefe, senkrecht zur Fliessrichtung
d_m	[m]	Gemisch-Abflusstiefe, senkrecht zur Fliessrichtung; abhängig von der Festlegung der "Oberfläche"
$d_{,9}, d_{,99}$	[m]	Gemisch-Abflusstiefe, senkrecht zur Fliessrichtung ("Oberfläche" bei 90% bzw. 99% Luftkonzentration)
e_τ	[-]	Exponent der Schubspannungsverteilung im Kornbereich
f	[-]	Widerstandsbeiwert nach Darcy-Weisbach
f_e	[-]	Widerstandsbeiwert für Gemischabfluss nach Wood (1983)
f_F	[-]	Formfaktor
g	[m/s ²]	Erdbeschleunigung (9.81 m/s ²)
Δh	[m]	Fallhöhe
Δh_e	[m]	Energieverluste
Δh	[m]	Fliessweg

i	[-]	Integrationskonstante für die mittlere Geschwindigkeit
$J = \tan \theta$	[-]	geodätisches Gefälle: Fallhöhe bezogen auf den <i>horizontalen</i> Weg
k	[1/m]	Wellenzahl
k	[m]	geometrisches Rauheitsmass
k'	[m]	äquivalente Sandrauheit
k_S	[m]	Sandrauheit
l	[m]	Prandtl'scher Mischungsweg
$l_v = \nu / u_\tau$	[m]	viskoser Längenmassstab
P	[m]	benetzter Umfang
P	[m ² /s ³]	Turbulenzproduktion
p	[Pa]	Druck
Q	[m ³ /s]	Abfluss
$q = d_0 U$	[m ² /s]	spezifischer Abfluss
q^2	[m ² /s ²]	zeitgemittelte Turbulenzenergie
$R = A/P$	[m]	hydraulischer Radius
R_a	[J/kgK]	Gaskonstante (287.05 J/kg/K)
$Re = \frac{DU}{\nu}$	[m]	Reynoldszahl
r	[m]	Integrationsweg
r_X	[-]	Verhältnis irgendeiner Grösse X des Wasser-Luft-Gemischs zur entsprechenden Grösse X_w bzw. X_w des Reinwasserabflusses (z.B. $r_\rho = \rho / \rho_w$, $r_U = U / U_w$)
$S = \sin \theta$	[-]	Fliessgefälle (Slope): Fallhöhe bezogen auf die zurückgelegte <i>Fliessstrecke</i> (im Gegensatz zu J)
S_e	[-]	Energieliniengefälle (bezogen auf die zurückgelegte <i>Fliessstrecke</i>)
s	[-]	Exposition der Rauheit über dem Bezugshorizont
T	[°C, K]	Temperatur
$t = y_T / k$	[-]	Parameter für die Unterkante des roughness sublayers
U	[m/s]	tiefen- und zeitgemittelte Geschwindigkeit in Fliessrichtung
u, v, w	[m/s]	lokale Geschwindigkeiten in x -, y -, z -Richtung

u', v', w'	[m/s]	turbulente Schwankungen von u, v, w
$\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$	[m/s]	zeitliche Mittel von u', v', w'
\bar{u}	[m/s]	lokale zeitlich gemittelte Geschwindigkeit in Fließrichtung
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	[m/s]	lokaler Geschwindigkeitsvektor
$u_\tau = \tau_0 / \rho_w$	[m/s]	Schubspannungsgeschwindigkeit
\bar{u}_0	[m/s]	Ausgangsgeschwindigkeit zur Integration des Profils
V	[m ³]	Volumen
v_b	[m/s]	Steiggeschwindigkeit einer Luftblase
$We = \frac{\rho D U^2}{\sigma}$	[-]	Weberzahl
x	[m]	Achse in Fließrichtung
y, y'	[m]	Achse senkrecht zur Fließrichtung; wo y sowohl Variable als auch Grenze einer Integration ist, wird erstere zur besseren Unterscheidung mit y' bezeichnet.
y_0	[m]	Ausgangspunkt zur Integration des Geschwindigkeitsprofils
y_{Max}	[m]	Obergrenze der Integration des Geschwindigkeitsprofils
y_R	[m]	Dicke des roughness sublayers nach Bezzola (2002)
y_T	[m]	Unterkante des roughness sublayers
y_v	[m]	Dicke der viskosen Unterschicht
y_W	[m]	Dicke des Wandbereichs nach Bezzola (2002)
z	[m]	sohlenparallele Achse quer zur Fließrichtung

Griechische Symbole

$\beta_R = k'/k$	[-]	Verhältnis äquivalente Sandrauheit / geometrische Rauheit
ε	[m ² /s ³]	Energiedissipation pro Masseneinheit und Zeit
ε_c	[m ² /s]	Austauschkoeffizient für Luft
$\eta = 1 - \frac{d}{d_0}$	[-]	“luftbereinigte”, dimensionslose Wandkoordinate
θ	[-]	Sohlneigungswinkel
κ	[-]	Kármán-Konstante
κ'	[-]	modifizierte Kármán-Konstante
κ_k	[-]	modifizierte Kármán-Konstante im Kornbereich
Λ	[m]	Mischungsweglänge (s. Abschnitt 3.5.3)

$\lambda_d = l/d_0$	[-]	Mischungswegfaktor im Mittenbereich (nach Escudier)
$\lambda_k = l/k$	[-]	Mischungswegfaktor im Kornbereich
μ	[kg/ms]	dynamische Zähigkeit / Viskosität
μ'	[kg/ms]	zweiter Viskositätskoeffizient (Volumenviskosität)
μ_t	[kg/ms]	Wirbelviskositätskoeffizient
ν	[m ² /s]	kinematische Zähigkeit / Viskosität
ρ	[kg/m ³]	Dichte
σ	[N/m]	Oberflächenspannung; Wasser zu Luft
τ	[Pa]	totale Schubspannung
τ_t	[Pa]	turbulente Schubspannung
τ_v	[Pa]	viskose Schubspannung
ξ	[-]	Kriterium l/D , das erfüllt sein muss, damit Blasen mit Durchmesser D widerstandsmindernd wirken können

Indizes

0	an der Sohle / bis zur Sohle (Schubspannungen, Wassertiefen)
<i>a</i>	Fall reiner Luft
<i>b</i>	Blase / bubble
<i>cr</i>	kritisch
<i>e</i>	Gleichgewichtsfall ("equilibrium" nach Wood 1983 ff.)
<i>e</i>	Energie (Gefälle etc.)
<i>g</i>	glatt
<i>m</i>	mixture; Gemisch-
<i>R</i>	roughness sublayer, an dessen Oberkante
<i>W</i>	Wandbereich, an dessen Oberkante
<i>w</i>	für Reinwasser (Fluideigenschaft)
<u><i>w</i></u>	für den Reinwasser-Referenzabfluss
<i>t</i>	turbulent
<i>v</i>	viskos
+	Normierung auf innere Variable

A1 Ausführungen zum MR-Ansatz

A1.1 Integration des Geschwindigkeitsprofils

Integrationsabschnitte

Mit dem MR-Ansatz gemäss Abschnitt 4.2.3 wird der wandnahe Bereich in weitere Integrationsabschnitte aufgeteilt. Die Integration des Gradienten nach (3-25) über diese Abschnitte führt zu einem Geschwindigkeitsprofil wie beispielsweise in Bild 4-8. Folgende Integrationsgrenzen und Unstetigkeiten, immer bezogen auf k , spielen in der Rechnung eine Rolle (vgl. Bild 4-6):

$y_W/k = Y_W = \frac{d_0 \lambda_d}{k \kappa}$	Obergrenze Wandbereich (aber $y_W \geq y_R$, vgl. 4.2.2b)
$y_R/k = Y_R = \beta_R$	Obergrenze roughness sublayer
$y_T/k = Y_T = t$	Untergrenze roughness sublayer
$y_K/k = Y_K = \frac{\lambda_k}{\kappa - \kappa_k}$	Obergrenze Kornbereich; Schnittpunkt des Mischungswegs nach Prandtl ($l = \kappa y$) mit demjenigen des Kornbereichs ($l = \lambda_k k + \kappa_k y$)
$y_0/k = Y_0 = \text{Max}\left(-\frac{\lambda_k}{\kappa_k}; Y_B\right)$	Integrationsbeginn

Hierbei ist $Y_B = s - 1$ die Lage der Kornbasis. Die Reihenfolge der Abschnittsgrenzen kann je nach den beteiligten Parametern variieren.

Gradienten

In Tab. A1-6 werden die erforderlichen Gradienten pro Integrationsabschnitt berechnet, mit $1 - \eta = d(y)/d_0$ ($= 1 - y/d_0$ im Reinwasserfall). Zum Vergleich sind in Tab. A1-1 bis Tab. A1-5 die entsprechenden Integrationsabschnitte für hydraulisch glatten bzw. rauen Abfluss nach Prandtl bzw. Escudier sowie für das Modell nach Bezzola (2002) dargestellt. – Die oben angesprochene variable Reihenfolge der Abschnittsgrenzen beeinflusst auch die Gradienten selbst, weil die jeweiligen Ansätze für den Mischungsweg einerseits und die turbulenten Schubspannungen andererseits auf unterschiedliche Art und Weise kombiniert werden.

A1.2 Integration der Konstanten B

Integrationsabschnitte

Für eine äquivalente Sandrauheit k ist die Konstante B definiert als die Geschwindigkeit auf die Höhe $k = \beta_R k$. Sie ergibt sich, indem man obige Integration von Y_0 bis β_R durchführt. Die Integration führt also über drei Abschnitte bzw. über die vier Abschnittsgrenzen Y_0, Y_T, Y_K und $Y_R = \beta_R$. Die Reihenfolge der dazwischen liegenden Grenzen Y_T und Y_K kann wechseln; sie hängt von den beteiligten Parametern $\kappa, \kappa_k, \lambda_k$ und t ab. Die vier Abschnittsgrenzen werden daher zunächst in allgemeiner Weise mit Y_0, Y_1, Y_2 und $Y_3 (= \beta_R)$ angesprochen.

Gradienten

Mit der Definition $a = \lambda_k / \kappa_k$ können die Gradienten für die drei Abschnitte aus Tab. A1-6 übernommen werden. Im mittleren Abschnitt hängt der Gradient davon ab, ob Y_T oder Y_K grösser ist.

unterer Abschnitt	mittlerer Abschnitt		oberer Abschnitt
	(Fall $y_T < y_K$)	(Fall $y_K < y_T$)	
$\frac{c_R}{\kappa_k(t - Y_0)} \cdot \frac{Y - Y_0}{Y + a}$	$\frac{c_R}{\kappa_k} \cdot \frac{1}{Y + a}$	$\frac{c_R}{\kappa(t - Y_0)} \cdot \left(1 - \frac{Y_0}{Y}\right)$	$\frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{1}{Y}$

Integration

Die Konstante B wird, entsprechend den obigen drei Abschnitten, in drei Teilkomponenten B_u, B_m und B_o zerlegt. Diese errechnen sich unter Verwendung der allgemeinen Grenzen Y_0 bis Y_3 (s. oben) zu:

$$\begin{aligned}
 B_u &= \frac{c_R}{\kappa_k(t - Y_0)} \int_{Y_0}^{Y_1} \frac{Y - Y_0}{Y + a} dy = \frac{c_R}{\kappa_k(t - Y_0)} [(-Y_0 - a) \ln(a + Y) + (a + Y)] \Big|_{Y_0}^{Y_1} \\
 &= \frac{c_R}{\kappa_k} \left(-\frac{a + Y_0}{t - Y_0} \ln \frac{a + Y_1}{a + Y_0} + \frac{Y_1 - Y_0}{t - Y_0} \right) = \frac{c_R}{\kappa_k} \left(\frac{a + Y_0}{t - Y_0} \ln \frac{a + Y_0}{a + Y_1} + \frac{Y_1 - Y_0}{t - Y_0} \right),
 \end{aligned}$$

$$B_{m, T < K} = \frac{c_R}{\kappa_k} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{Y + a} dy = \frac{c_R}{\kappa_k} [\ln(Y + a)] \Big|_{y_1}^{y_2} = \frac{c_R}{\kappa_k} \ln \frac{Y_2 + a}{Y_1 + a},$$

$$\begin{aligned}
 B_{m, K < T} &= \frac{c_R}{\kappa(t - Y_0)} \int_{y_1}^{y_2} \left(1 - \frac{Y_0}{Y}\right) dy = \frac{c_R}{\kappa(t - Y_0)} [Y - Y_0 \ln Y] \Big|_{y_1}^{y_2} \\
 &= \frac{c_R}{\kappa(t - Y_0)} \left(Y_2 - Y_1 - Y_0 \ln \frac{Y_2}{Y_1} \right) = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{Y_2 - Y_1}{t - Y_0} - \frac{Y_0}{t - Y_0} \ln \frac{Y_2}{Y_1} \right),
 \end{aligned}$$

$$B_o = \frac{c_R}{\kappa} \int_{Y_2}^{Y_3} \frac{1}{Y} dy = \frac{c_R}{\kappa} [\ln Y] \Big|_{Y_2}^{Y_3} = \frac{c_R}{\kappa} \ln \frac{Y_3}{Y_2} .$$

Setzt man nun für Y_0 bis Y_3 die Grenzen $Y_0, Y_K, Y_T = t$ und $Y_R = \beta_R$ ein, so erhält man

- falls $y_T < y_K$:

$$B_{T < K} = \frac{c_R}{\kappa_k} \left(\frac{a + Y_0}{t - Y_0} \ln \frac{a + Y_0}{a + t} + 1 \right) + \frac{c_R}{\kappa_k} \left(\ln \frac{a + Y_K}{a + t} \right) + \frac{c_R}{\kappa} \left(\ln \frac{\beta_R}{Y_K} \right) ,$$

- falls $y_K < y_T$:

$$B_{K < T} = \frac{c_R}{\kappa_k} \left(\frac{a + Y_0}{t - Y_0} \ln \frac{a + Y_0}{a + Y_K} + \frac{Y_K - Y_0}{t - Y_0} \right) + \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{t - Y_K}{t - Y_0} - \frac{Y_0}{t - Y_0} \ln \frac{t}{Y_K} \right) + \frac{c_R}{\kappa} \ln \frac{\beta_R}{Y_T} .$$

Der Spezialfall $\kappa_k = 0$ muss separat integriert werden, weil obige Ausdrücke wegen der Division durch 0 nicht direkt anwendbar sind. Es kann berücksichtigt werden, dass in diesem Fall $Y_K = \lambda_k / \kappa_k = a$. Man erhält dann, wieder zuerst unter Verwendung der allgemeinen Grenzen Y_0 bis Y_3 :

$$\begin{aligned} B_u &= \frac{c_R}{\lambda_k(t-s+1)} \int_{s-1}^{Y_1} (Y-s+1) dy = \frac{c_R}{\kappa Y_K(t-s+1)} \left[\frac{1}{2} (Y-s+1)^2 \right] \Big|_{s-1}^{Y_1} \\ &= \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{(Y_1-s+1)^2}{2 Y_K(t-s+1)} , \end{aligned}$$

$$B_{m, T < K} = \frac{c_R}{\lambda_k} \int_{Y_1}^{Y_2} 1 dy = \frac{c_R}{\kappa Y_K} [Y] \Big|_{Y_1}^{Y_2} = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{Y_2 - Y_1}{Y_K} ,$$

$$\begin{aligned} B_{m, K < T} &= \frac{c_R}{\kappa(t-s+1)} \int_{Y_1}^{Y_2} \left(1 - \frac{Y_0}{Y} \right) dy = \frac{c_R}{\kappa(t-s+1)} [Y - Y_0 \ln Y] \Big|_{Y_1}^{Y_2} \\ &= \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{Y_2 - Y_1 - (s-1) \ln(Y_2/Y_1)}{t-s+1} , \end{aligned}$$

$$B_o = \frac{c_R}{\kappa} \int_{Y_2}^{\beta_R} \frac{1}{Y} dy = \frac{c_R}{\kappa} [\ln Y] \Big|_{Y_2}^{\beta_R} = \frac{c_R}{\kappa} \ln \frac{\beta_R}{Y_2} ,$$

und mit den Grenzen $Y_0, Y_K, Y_T = t$ und $Y_R = \beta_R$

- falls $y_T < y_K$:

$$B_u = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{(t-s+1)^2}{2 Y_K(t-s+1)} = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{t-s+1}{2 Y_K} ,$$

$$B_{m, T < K} = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{Y_K - t}{Y_K} = \frac{c_R}{\lambda_k} \left(1 - \frac{t}{Y_K} \right) ,$$

$$B_o = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \ln \frac{\beta_R}{Y_K} ,$$

$$B_{T < K} = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{1-s-t}{2a} + 1 + \ln \frac{\beta_R}{a} \right) , \quad (\text{A1-1})$$

- falls $y_T > y_K$:

$$B_u = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{(Y_K - s + 1)^2}{2Y_K(t - s + 1)} ,$$

$$B_{m, K < T} = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{t - Y_K - (s-1)\ln(t/Y_K)}{t - s + 1} ,$$

$$B_o = \frac{c_R}{\kappa} \cdot \ln \frac{\beta_R}{t} ,$$

$$B_{K < T} = \frac{c_R}{\kappa} \left(\frac{(a-s+1)^2}{2a(t-s+1)} + \frac{t-a-(s-1)\ln(t/a)}{t-s+1} + \ln \frac{\beta_R}{t} \right) . \quad (\text{A1-2})$$

Tab. A1-1: Integrationsabschnitte für hydraulisch glatten Abfluss nach Prandtl.

Integrationsgrenze	$\sqrt{\tau_t/\tau_0} =$	$l =$	$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau_t/\tau_0}}{l} =$
y_V	1	κy	$\frac{1}{\kappa y}$
	kein Mischungswegansatz		1
$(y_0; \bar{u}_0)$	(0; 0)		

Tab. A1-2: Integrationsabschnitte für hydraulisch glatten Abfluss nach Escudier.

Integrationsgrenze	$\sqrt{\tau_t/\tau_0} =$	$l =$	$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau_t/\tau_0}}{l} =$
y_W	$\sqrt{1-\eta}$	κy_W	$\frac{\sqrt{1-\eta}}{\kappa y_W}$
		κy	$\frac{\sqrt{1-\eta}}{\kappa y}$
y_V	kein Mischungswegansatz		1
$(y_0; \bar{u}_0)$	(0; 0)		

Tab. A1-3: Integrationsabschnitte für hydraulisch rauhen Abfluss nach Prandtl.

Integrationsgrenze	$\sqrt{\tau_t/\tau_0} =$	$l =$	$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau_t/\tau_0}}{l} =$
	1	κy	$\frac{1}{\kappa y}$
$(y_0; \bar{u}_0)$	$(k e^{-B\kappa}; 0)$ oder $(k; B)$		

Tab. A1-4: Integrationsabschnitte für hydraulisch rauen Abfluss nach Escudier.

Integrationsgrenze	$\sqrt{\tau_t/\tau_0} =$	$l =$	$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau_t/\tau_0}}{l} =$
y_W	$\sqrt{1-\eta}$	κy_W	$\frac{1}{\kappa y_W} \cdot \sqrt{1-\eta}$
		κy	$\frac{1}{\kappa k} \cdot \frac{\sqrt{1-\eta}}{y/k}$
$(y_0; \bar{u}_0)$	$(k e^{-B\kappa}; 0)$ oder $(k'; B)$		

Tab. A1-5: Integrationsabschnitte nach Bezzola für grosse relative Überdeckungen. In sehr rauen Verhältnissen, d.h. wenn $y_R = y_W$, entfällt der logarithmische Bereich, und das Modell besteht nur noch aus zwei Schichten. $Y = y/k$.

Integrationsgrenze	$\sqrt{\tau_t/\tau_0} =$	$l =$	$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau_t/\tau_0}}{l} =$
y_W	$\sqrt{1-\eta}$	κy_W	$\frac{1}{\kappa y_W} \cdot \sqrt{1-\eta}$
		κy	$\frac{1}{\kappa k} \cdot \frac{\sqrt{1-\eta}}{Y}$
y_R	c_R		
$(y_0; \bar{u}_0)$	$(k e^{-B\kappa}; 0)$ (s. Bezzola 2002, S. 125, zu Gl. (8.20))		

Tab. A1-6: Die drei unteren Integrationsabschnitte im MR-Ansatz, Gleichung (4-13).
 Oben der Fall $y_K > y_T$, unten der Fall $y_K < y_T$. Die darüber liegenden
 Abschnitte entsprechen Tab. A1-5.

$$Y = y/k; \quad Y_0 = y_0/k = \text{Max}(s-1, -\lambda_k/\kappa_k).$$

Integrations- grenze	$\sqrt{\tau_t/\tau_0} =$	$l/k =$	$\frac{k \partial \bar{u}}{u_\tau \partial y} = \frac{\sqrt{\tau_t/\tau_0}}{l/k} =$
y_R	c_R	κY	$\frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{1}{Y}$
y_K		$\kappa_k Y + \lambda_k$	$\frac{c_R}{\kappa_k} \cdot \frac{1}{Y + \lambda_k/\kappa_k}$; Spezialfall: - c_R/λ_k , falls $\kappa_k = 0$.
y_T			$c_R \frac{Y - Y_0}{t - Y_0}$
$(y_0; \bar{u}_0)$	$(kY_0; 0)$		
y_R	c_R	κY	$\frac{c_R}{\kappa} \cdot \frac{1}{Y}$
y_T			$\frac{c_R}{\kappa(t - Y_0)} \cdot \left(1 - \frac{Y_0}{Y}\right)$
y_K		$c_R \frac{Y - Y_0}{t - Y_0}$	$\kappa_k Y + \lambda_k$
$(y_0; \bar{u}_0)$	$(kY_0; 0)$		

A1.3 Illustration anhand von Anwendungen

Anhand dreier Beispiele wird die grobe Funktion des MR-Ansatzes illustriert. Verglichen werden je zwei verschiedene Rauheitsmasse, Rauheitstypen und Expositionen (Bilder A1-1 bis A1-3). Es wird stets eine Reinwassertiefe $d_0^+ = 20000$ angenommen. Die Darstellung der Bilder entspricht Bild 4-6.

Die Referenzrauheit ist in allen drei Fällen die gleiche (jeweils links im Bild): Eine Sandrauheit mit $k_1^+ = 400$ und $s = 0.2$. Die Bedingung $B = \bar{u}^+(y = k) = 8$ führt zu $\lambda_k = 0.12$.

Unterschiedliches Rauheitsmass (Bild A1-1)

Die Referenz-Sandrauheit wird mit einer halb so grossen Rauheit $k_2^+ = 200$ verglichen. Deren Exposition bleibt $s = 0.2$ und auch hier resultiert $\lambda_k = 0.12$.

Normiert auf die *jeweilige* Rauheit verläuft der logarithmische Ast also in beiden Fällen gleich. Im Absolutmassstab ergibt sich aber ein Geschwindigkeitsunterschied von $\Delta \bar{u}^+ \approx 3$. Der MR-Ansatz liefert also eine plausible Illustration der Wirkung unterschiedlicher Rauheiten.

Unterschiedliche Rauheitsdichte (Bild A1-2)

Betrachtet wird die gleiche Konfiguration wie oben mit dem einen Unterschied, dass die Rauheit k_2 *nicht kompakt* aufgebracht. Sie ist also *keine Sandrauheit* ($c_k \approx 20\%$). Es steht zu vermuten, dass die zweite Rauheit ihr kleineres Mass durch die geringere Rauheitsdichte zumindest teilweise wettmacht (vgl. Bild 3-7). Denn die weiteren Zwischenräume schaffen mehr "Bewegungsfreiheit"; gemessen an den Körnern sollte der Mischungsweg also grösser werden.

Tatsächlich bringt man die beiden logarithmischen Äste in Deckung, wenn für die zweite Rauheit mit $\lambda_k = 0.27$ ein grösserer relativer Mischungsweg gewählt wird.

Unterschiedliche Exposition (Bild A1-3)

Hier werden zwei gleiche Rauheiten verglichen, nur wird im zweiten Fall die Exposition zu $s = 0.4$ gewählt. Um das gleiche B wie im Referenzfall zu erreichen, muss λ_k auf 0.075 gesenkt werden.

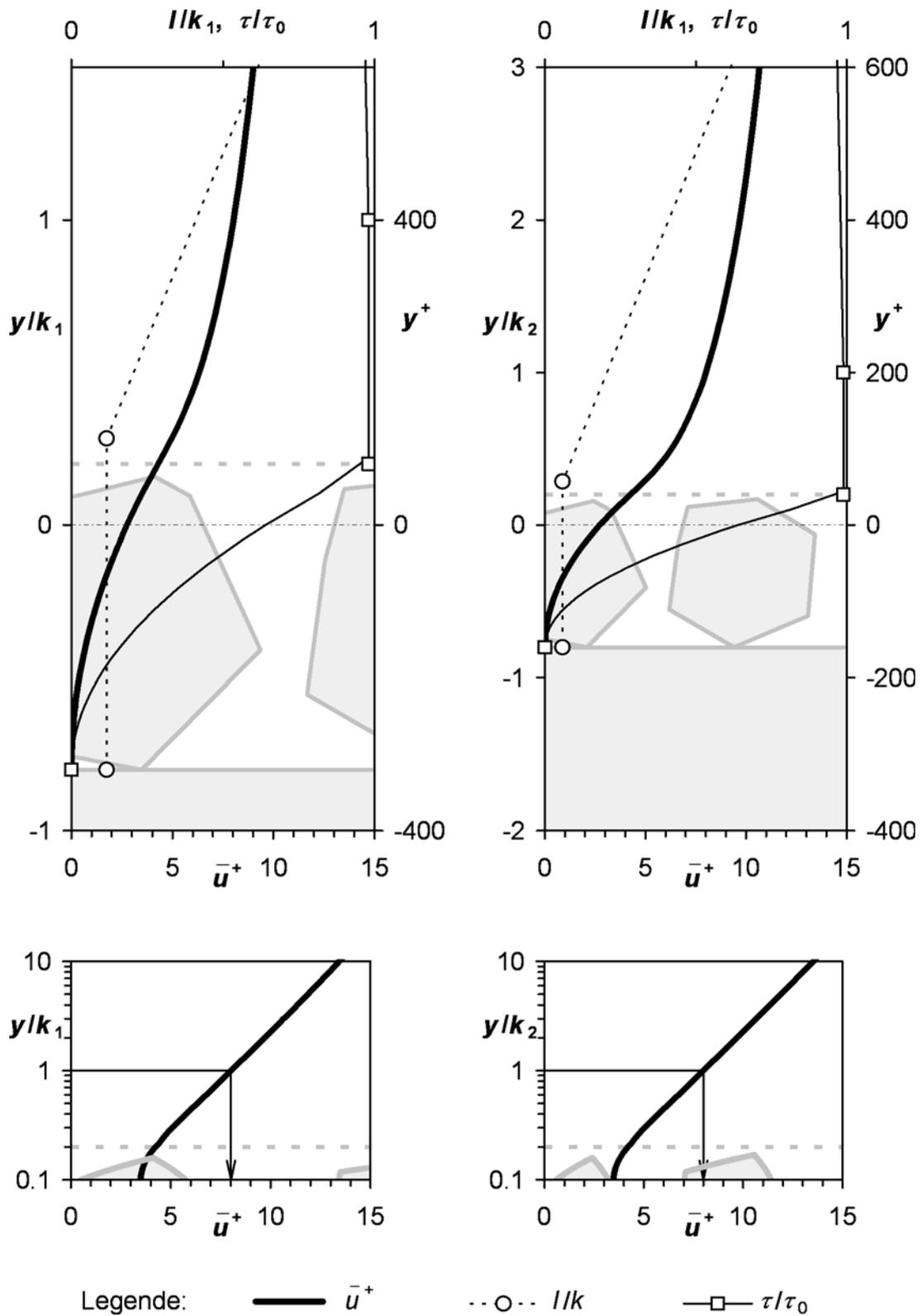


Bild A1-1: Unterschiedliche Rauheitsmasse, beide mit $s = 0.2$, $d_0^+ = 20000$.
 Links: Referenz-Sandrauheit $k_1^+ = 400$.
 Rechts: halb so grosse Rauheit $k_2^+ = 200$.

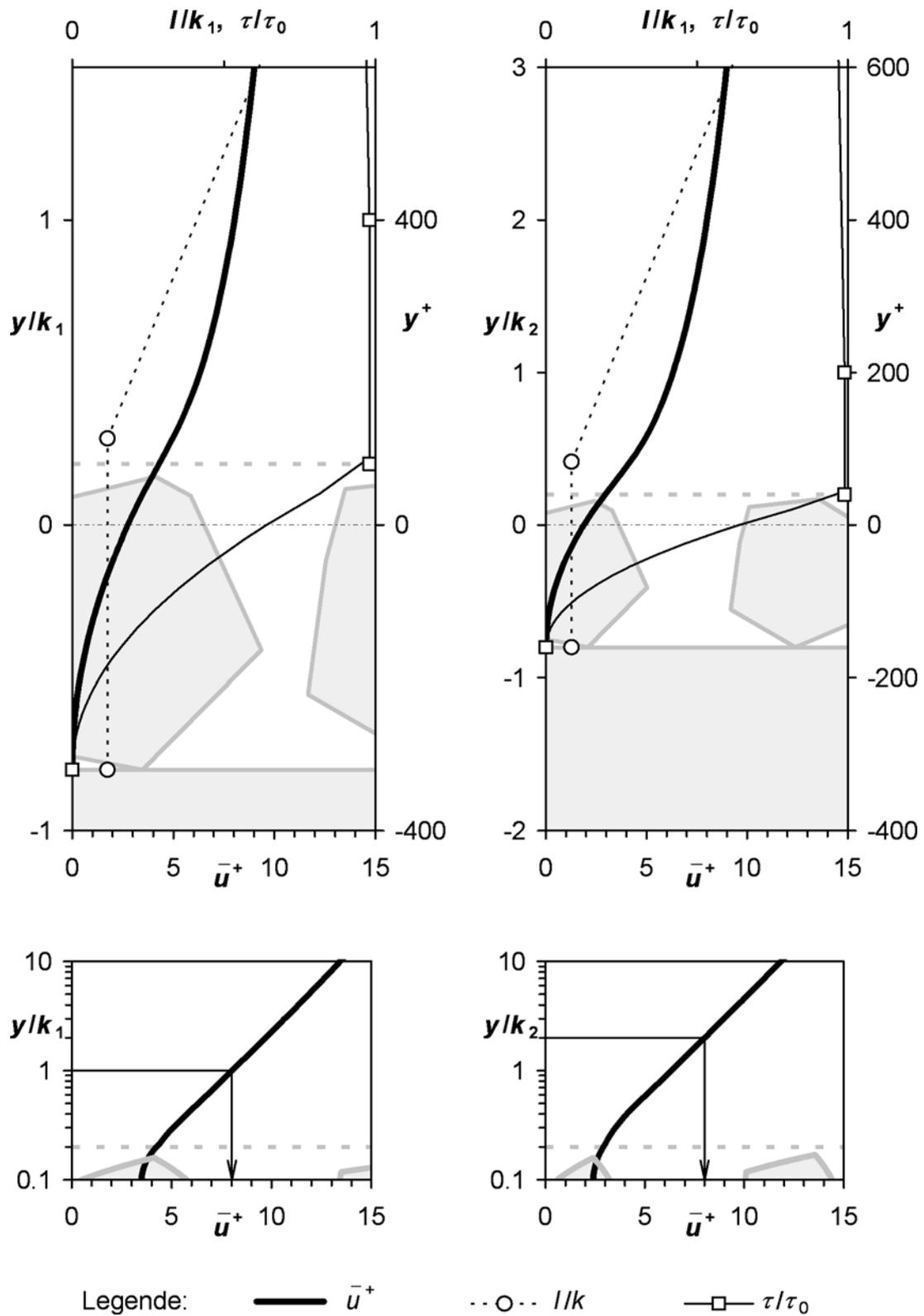


Bild A1-2: Unterschiedliche Rauheitstypen, beide mit $s = 0.2$.
 Links: Referenz-Sandrauheit $k_1^+ = 400$, $\lambda_k = 0.12$.
 Rechts: Rauheit $k_2 = k_1/2$, nicht kompakt aufgebracht ($c_k \approx 20\%$).

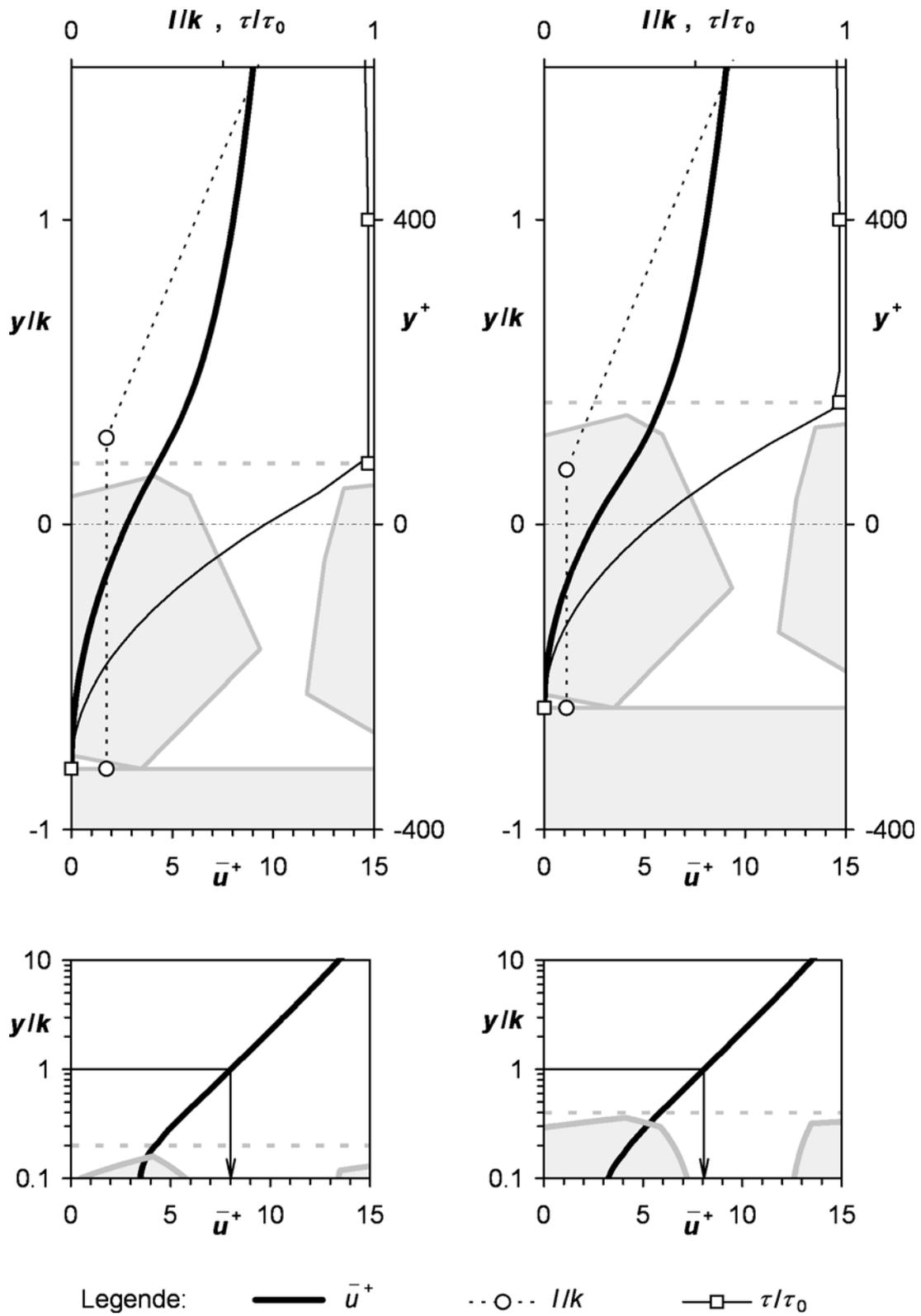


Bild A1-3: Unterschiedliche Exposition für die gleiche Rauheit $k_1^+ = k_2^+ = 400$.
 Links: $s = 0.2, \lambda_k = 0.12$.
 Rechts: $s = 0.4, \lambda_k = 0.075$.

A2 Verwendeter Code

A2.1 Deklarationen

```

Public Const IMax = 9999
Public Const NMax = 100
Public Const RhoW0 = 1000 'kg/m3
Public Const Nue0 = 0.0000013 'm2/s
Public Const Sigma0 = 0.073 'N/m
Public Const BetaR0 = 1
Public Const s0 = 0.2
Public Const DbMeth0 = 0
Public Const Xi0 = 10
Public Const LTMeth0 = "Pr" 'default: Prandtl
Public Const t0 = 0.2
Public Const eTau0 = 2
Public Const Ld0 = 0.12
Public Const Karman0 = 0.41
Public Const iB0 = 1
Public Const Bk1 = 5 'B for kI=1, i.e. Ln(kI)=0
Public Const Bk999 = 8 'B for kI=infinite
Public Const N0 = 100

Type ycuTyp 'profile in inner scale
  N As Integer 'number of points
  y(1 To N0) As Single 'y-scale
  u(1 To N0) As Single 'velocity distribution
  c(1 To N0) As Single 'air distribution
End Type

Type ycuDatTyp 'data either dimensionless or in inner variables
  'geometry / roughness
  k As Single 'roughness
  d0 As Single 'pure water depth
  yMax As Single 'flow depth (C=100% or y(N))
  BetaR As Single 'k'/k
  s As Single 'exposition of roughness
  DbMeth As Integer '=0: Db = 0; =1: Db = MIN(local//lower Dbu); =2: Db = local Db
  Xi As Single 'L/Db-criterion for the density effect to take place
  '(L = mixing length, DB = bubble diameter)

  'shear & mixing length
  LTMeth As String '"Pr", "Es", "Be", "MR"
  t As Single 't*k = yT = lower boundary of Taut maximum
  eTau As Single 'exponent of the Taut function in grain zone
  Ld As Single 'Ld*d0 = mixing length in central zone
  Karman As Single 'Karman*y= mixing length in log zone
  Lk As Single 'Lk*k = mixing length in grain zone
  'constant B
  iB As Integer 'type of transition (1:discontinious, 2:sand, 3:technical)
  BRau As Single 'constant B for fully rough conditions
  'zone limits
  yW As Single 'upper boundary log zone = lower boundary central zone
  yR As Single 'lower boundary des Taut maximum (rough)
  yk As Single 'border between l = Lk*k und l = Karman*y (rough)
  yT As Single 'lower boundary of Taut maximum (rough)
  yV As Single 'upper boundary of viscous layer (smooth)
  yB As Single 'lower boundary of calculation (depends on method)
  'results
  ycu As ycuTyp 'y-u-c-profile
  Um As Single 'mean velocity
End Type

Type RealDatTyp 'data in real scale, e.g. [m]
  Slope As Single 'sine of slope angle
  d0 As Single 'pure water depth
End Type

```

A2.2 Basisfunktionen

```

.....
' Boolean
.....

Function BlnDefault_3314(InputBlN, DefaultBlN) As Boolean
' Defaultfunktion für Boolean-Werte
  Dim Res As Boolean
  '-----
  If IsMissing(InputBlN) Or IsEmpty(InputBlN) Then Res = DefaultBlN Else Res = InputBlN
  'AngabeFehlt_3201(InputBlN) kann hier nicht gebraucht werden, weil dort wieder
  'BlNDefault_3314 gebraucht wird => circle
  '-----
  BlnDefault_3314 = Res
End Function

Function AngabeFehlt_3201(AngabeX, Optional NullNrTooG, Optional NullStrTooG) As Boolean
' prüft, ob eine Angabe X fehlt (Kombination von IsMissing(X), IsEmpty(X), X=0 und X="")
' mit NullNrToo=True und NullStrToo=True gelten auch die Angaben 0 und "" als fehlend,
' mit NullNrToo=False und NullStrToo=False werden sie als Eingabe akzeptiert
' Default: NullNrToo = NullStrToo = True
  Dim af As Boolean, NullNrToo As Boolean, NullStrToo As Boolean
  '-----
  'Defaults für NullNrToo und NullStrToo
  NullNrToo = BlnDefault_3314(NullNrTooG, True)
  NullStrToo = BlnDefault_3314(NullStrTooG, True)
  'Rechnung
  af = False
  If IsMissing(AngabeX) Or IsEmpty(AngabeX) Then af = True:           GoTo Result
  If (AngabeX = 0) Then If NullNrToo Then af = True:                 GoTo Result
  If (AngabeX = "") Then If NullStrToo Then af = True:               GoTo Result
  '-----
Result:   AngabeFehlt_3201 = af
End Function

Function IntDefault_3314(InputInt, DefaultInt, Optional NullNrTooG) As Integer
' Defaultfunktion für Integer-Werte
  Dim NullNrToo As Boolean, Res%
  '-----
  NullNrToo = BlnDefault_3314(NullNrTooG, True)
  If AngabeFehlt_3201(InputInt, NullNrToo) Then Res = DefaultInt Else Res = InputInt
  '-----
  IntDefault_3314 = Res
End Function

Function SngDefault_3314(InputSng, DefaultSng, Optional NullNrTooG) As Single
' Defaultfunktion für Single-Werte
  Dim NullNrToo As Boolean, Res!
  '-----
  NullNrToo = BlnDefault_3314(NullNrTooG, True)
  If AngabeFehlt_3201(InputSng, NullNrToo) Then Res = DefaultSng Else Res = InputSng
  '-----
  SngDefault_3314 = Res
End Function

Function StrDefault_3314(InputStr, DefaultStr, Optional NullStrTooG) As String
' Defaultfunktion für String-Werte
  Dim NullStrToo As Boolean, Res$
  '-----
  NullStrToo = BlnDefault_3314(NullStrTooG, True)
  If AngabeFehlt_3201(InputStr, False, NullStrToo) Then Res = DefaultStr _
  Else Res = InputStr
  '-----
  StrDefault_3314 = Res
End Function

```

```

Function StrIsValidNr_3344(aString$, Optional SkipLeerG) As Boolean
    Dim Valid As Boolean, SkipLeer As Boolean
    '-----
    SkipLeer = BlnDefault_3314(SkipLeer, True)
    Valid = True
    If Not IsNumeric(aString) Then 'Errors fallen hierunter (z.B. "Error 2007")
        Valid = False
    ElseIf (SkipLeer And (aString = "")) Then
        Valid = False
    End If
    '-----
    StrIsValidNr_3344 = Valid
End Function

Function EndLoop(Criterion As Boolean, CounterExpr As Boolean, Converged_VAR) As Boolean
'   loop criterion including a maximum counter value
'   Example: Loop Until EndLoop(Abs(LN / LA - 1) < 0.0001, Counter > 100, Converged)
    EndLoop = Criterion Or CounterExpr:          Converged_VAR = Not CounterExpr
End Function

.....
' Mathematik, Trigonometrie
.....

Function KlGrZeichen_5330(KlGrStr$, AKlB As Boolean, AGrB As Boolean, AGrB As Boolean)
'   gehört zu KlGrReal_5330 und KlGr_5334
    Dim KlGr As Boolean
    '-----
    KlGr = False
    If ((KlGrStr = "<") And AKlB) Then KlGr = True:          GoTo Result
    If ((KlGrStr = "<=") And (AKlB Or AGrB)) Then KlGr = True:      GoTo Result
    If ((KlGrStr = "=") And AGrB) Then KlGr = True:          GoTo Result
    If ((KlGrStr = ">=") And (AGrB Or AGrB)) Then KlGr = True:      GoTo Result
    If ((KlGrStr = ">") And AGrB) Then KlGr = True:          GoTo Result
    '-----
    Result:    KlGrZeichen_5330 = KlGr
End Function

Function KlGrReal_5330(A!, KlGrStr$, B!, Optional ToleranzG) As Boolean
'   vergleicht zwei Real A und B unter Berücksichtigung einer Toleranz
'   KlGrStr:   "<", "<=", "=", ">=", ">" (Vergleichsoperator)
'   Toleranz:  pos. Real (sinnvoll nur für "<=", "=", ">=", nicht für "<", ">")
    Dim KlGr As Boolean, AKlB As Boolean, AGrB As Boolean, AGrB As Boolean
    Dim Toleranz As Boolean, Tol!
    '-----
    Toleranz = True
    If IsMissing(ToleranzG) Or IsEmpty(ToleranzG) Then Toleranz = False Else Tol = ToleranzG
    '   Achtung: Die Toleranz- / Tol-Werte müssen wirklich so gesetzt werden!!!
    'Vergleich
    If (A < B) Then AKlB = True Else AKlB = False
    If (A > B) Then AGrB = True Else AGrB = False
    If (Toleranz And Abs(A - B) <= Tol) Or (A = B) Then AGrB = True Else AGrB = False
    KlGr = KlGrZeichen_5330(KlGrStr, AKlB, AGrB, AGrB)
    '-----
    KlGrReal_5330 = KlGr
End Function

Function Min_5330(a, B)
    Dim Min
    If (a < B) Then Min = a Else Min = B
    Min_5330 = Min
End Function

Function Max_5330(a, B)
    Dim Max
    If (a > B) Then Max = a Else Max = B
    Max_5330 = Max
End Function

Function Log10_5330(Argument!) As Single
    Log10_5330 = Log(Argument) / Log(10)
End Function

```

```

Function Tanh_5330(x!) As Single
'   Tangens hyperbolicus (= sinh/cosh)
  Dim ep!, em!, y!
  '-----
  If (x < -10) Then y = -1:                               GoTo Result
  If (x > 10) Then y = 1:                                 GoTo Result
  ep = Exp(x):      em = Exp(-x):      y = (ep - em) / (ep + em)
  '-----
Result:      Tanh_5330 = y
End Function

Function SimpsonIntegral_2414(dx!, y1!, y2!, y3!, _
                          Optional Int1_VAR, Optional Int2_VAR) As Single
'   berechnet das Simpson-Integral für 3 Stützwerte y1, y2, y3,
'   welche jeweils um dx auseinanderliegen (totale Integrationslänge also 2*dx).
'   Int1_VAR: die 1. Hälfte, also das Integral von y1 bis y2 (analog Int2_VAR)
'   Int1_VAR und Int2_VAR können nötig werden bei doppelter Integration
  Dim Res!
  '-----
  Int1_VAR = dx / 12 * (5 * y1 + 8 * y2 - y3)
  Int2_VAR = dx / 12 * (-y1 + 8 * y2 + 5 * y3)
  Res = dx / 3 * (y1 + 4 * y2 + y3)
  '-----
  SimpsonIntegral_2414 = Res
End Function

Function LinInterpollD(xRange As Range, yRange As Range, x!) As Single
'   interpoliert linear
  Dim Dir As inte, I%, N%, x1!, x2!, y1!, y2!, m!, Dirx!, y!
  '-----
  'ist der x-Array fallend oder steigend sortiert?
  N = xRange.Count
  If (xRange(1) < xRange(N)) Then Dir = 1 Else Dir = -1
  Dirx = Dir * x
  'die richtige Stelle I in der x-Range aufsuchen
  I = 1
  Do: I = I + 1
  Loop While (Dir * xRange(I) <= Dirx) And (I < N)
  'die beiden Punkte (x1,y1) und (x2,y2) bestimmen, zwischen denen interpoliert wird
  x1 = xRange(I - 1):      x2 = xRange(I)
  y1 = yRange(I - 1):      y2 = yRange(I)
  'Interpolationsrechnung
  If (x1 = x2) Then y = (y1 + y2) / 2: GoTo Result 'Division durch 0 vermeiden
  m = (y2 - y1) / (x2 - x1):      y = y1 + m * (x - x1)
  '-----
Result:      LinInterpollD = y
End Function

```

```

.....
' Arrays
.....

Function Array256Cut1El_5330(Array1 As SngArray256x1Typ, IACut%) As SngArray256x1Typ
' kürzt einen Array um 1 Element
Dim IA%, NAAlt%, Arr As SngArray256x1Typ
'-----
'initialisieren, reduzieren, Arr.N anpassen
Arr = Array1:      NAAlt = Arr.N
For IA = IACut To Arr.N - 1
    Arr.v(IA) = Arr.v(IA + 1)
Next IA
Arr.N = Arr.N - 1
'überflüssigen Wert nullsetzen; eigentlich genügt die Korrektur von Arr.N
Arr.v(NAAlt) = 0
'-----
Array256Cut1El_5330 = Arr
End Function

Function Array256CutKlGr_5330(Array1 As SngArray256x1Typ, KlGr$, vCut!, Optional ToleranzG) _
As SngArray256x1Typ
' Kürzt den Array um alle Werte, die <, <=, > oder >= vCut sind.
'KleinerGrösser: "<", "<=", ">" oder ">="
Dim IA%, NAAlt%, Arr As SngArray256x1Typ
'-----
'initialisieren, reduzieren, Arr.N anpassen
Arr = Array1:      NAAlt = Arr.N:      IA = 0
Do
    IA = IA + 1
    If KlGrReal_5330(Arr.v(IA), KlGr, vCut, ToleranzG) Then
        Arr = Array256Cut1El_5330(Arr, IA):      IA = IA - 1
    End If
Loop Until (IA >= Arr.N)
'-----
Array256CutKlGr_5330 = Arr
End Function

Function Array256EqualsEliminate_5248(Array1 As SngArray256x1Typ, Optional ToleranzG) _
As SngArray256x1Typ
' eliminiert aus einem SORTIERTEN(!) Array die doppelt vorkommenden Werte
Dim IA%, NAAlt%, Arr As SngArray256x1Typ
'-----
'initialisieren, reduzieren, Arr.N anpassen
Arr = Array1:      NAAlt = Arr.N:      IA = 0
Do
    IA = IA + 1
    If KlGrReal_5330(Arr.v(IA), "=", Arr.v(IA + 1), ToleranzG) Then
        Arr = Array256Cut1El_5330(Arr, IA):      IA = IA - 1
    End If
Loop Until (IA >= Arr.N - 1)
'-----
Array256EqualsEliminate_5248 = Arr
End Function

Function Array256Sort_5248(TheArray As SngArray256x1Typ) As SngArray256x1Typ
' sortiert einen Array
Dim IA%, Zwi!, Arr As SngArray256x1Typ
'-----
'initialisieren, reduzieren, Arr.N anpassen
Arr = TheArray:      IA = 0
Do 'äussere Schleife
    For IA = 1 To Arr.N - 1 'innere Schleife
        If (Arr.v(IA) > Arr.v(IA + 1)) Then
            Zwi = Arr.v(IA):      Arr.v(IA) = Arr.v(IA + 1):      Arr.v(IA + 1) = Zwi
            Exit For
        End If
    Next IA
Loop Until (IA = Arr.N)
'-----
Array256Sort_5248 = Arr
End Function

```

A2.3 Input/Output sowie Unterteilung der y -, c -, u -Ranges

```

' NOTATION: INNER OR WALL COORDINATES
'  $y_I = y/lNue = y*Nue/uTau$ 
'  $u_I = u/uTau$ 
'  $q_I = v_I * d_I = v*d / Nue = Re = q/Nue$ 

Public Const cRngNm = "cRange"

Function ycuXXArray_2417(N%, ycuArray, Optional uToo, Optional ArraySort) As ycuTyp
' transfers an ycuArray into an ycuTyp
' ArraySort = "Up"/"Down"; UToo = TRUE: read the vel. too
Dim I%, IA%, uTooLocal As Boolean, Flip As Boolean, ASrt$, ASrtIst$, ycu As ycuTyp
'-----
'ini
ycu.N = N
If IsMissing(uToo) Or IsEmpty(uToo) Then uTooLocal = False Else uTooLocal = uToo
If IsMissing(ArraySort) Or IsEmpty(ArraySort) Then ASrt = "Up" Else ASrt = ArraySort
If (ycuArray(1, 1) < ycuArray(N, 1)) Then ASrtIst = "Up" Else ASrtIst = "Down"
If (ASrt = ASrtIst) Then Flip = False Else Flip = True
'transfer into ycu
For I = 1 To ycu.N
    If Flip Then IA = ycu.N + 1 - I Else IA = I
    ycu.y(I) = ycuArray(IA, 1)
    ycu.c(I) = ycuArray(IA, 2)
    If (ycu.c(I) >= 1) Then ycu.c(I) = 0.999999 'avoids division/0
    If uTooLocal Then ycu.u(I) = ycuArray(IA, 3)
Next I
'-----
ycuXXArray_2417 = ycu
End Function

Function ycuXXRngs_2415(yRng, cRng, Optional uRng, Optional ArraySort) As ycuTyp
' transfers separate y-, c- and u-ranges into an ycuTyp - cleans errors
Dim uToo As Boolean, yValid As Boolean, CValid As Boolean, uValid As Boolean
Dim I%, N%, IA%, ycuArray(1 To N0, 1 To 3) As Single
Dim yString$, CString$, uString$
'-----
If IsMissing(uRng) Or IsEmpty(uRng) Then uToo = False Else uToo = True
N = yRng.Count
IA = 0
For I = 1 To N
    yString = CStr(yRng(I)): yValid = StrIsValidNr_3344(yString)
    CString = CStr(cRng(I)): CValid = StrIsValidNr_3344(CString)
    If uToo Then uString = CStr(uRng(I))
    If uToo Then uValid = StrIsValidNr_3344(uString)
    If yValid And CValid And (Not uToo Xor (uToo And uValid)) Then
        IA = IA + 1
        ycuArray(IA, 1) = CSng(yStringyRng(I))
        ycuArray(IA, 2) = CSng(CStringcRng(I))
        If uToo Then ycuArray(IA, 3) = CSng(uStringuRng(I))
    End If
Next I
'-----
'write into ycu and resort (bottom to top)
ycuXXRngs_2415 = ycuXXArray_2417(IA, ycuArray, uToo, ArraySort)
End Function

```

```

Function ycuXXycuRng_2416(ycuRng, Optional uToo) As ycuTyp
' transfers an ycu-range into an ycuTyp
' cleans errors by means of ycuXXRngs_2415
Dim I%, N%, IA%, yRng, cRng, uRng, ycu As ycuTyp
'-----
If IsMissing(uToo) Or IsEmpty(uToo) Then uToo = False
N = ycuRng.Rows.Count
Set yRng = ycuRng.Range(Cells(1, 1), Cells(N, 1))
Set cRng = ycuRng.Range(Cells(1, 2), Cells(N, 2))
If uToo Then Set uRng = ycuRng.Range(Cells(1, 3), Cells(N, 3))
If uToo Then ycu = ycuXXRngs_2415(yRng, cRng, uRng) Else ycu = ycuXXRngs_2415(yRng, cRng)
'-----
ycuXXycuRng_2416 = ycu
End Function

Sub ycuRngXXycu_2417(ycu As ycuTyp, ycuRng As Range, Optional Flip)
' writes an ycuTyp result into a range
Dim I%, N%, iRng%
'-----
ycuRng.Cells.ClearContents:      N = ycuRng.Rows.Count
For I = 1 To ycu.N
    If Flip Then iRng = N + 1 - I Else iRng = I
    ycuRng(iRng, 1) = ycu.y(I): ycuRng(iRng, 2) = ycu.c(I): ycuRng(iRng, 3) = ycu.u(I)
Next I
'-----
End Sub

Sub ArraysXXycu_2416(ycu As ycuTyp, _
yArray_VAR As SngArray256x1Typ, cArray_VAR As SngArray256x1Typ)
' reads y- und die c-values from an ycuTyp into separate arrays
Dim I%, yA As SngArray256x1Typ, cA As SngArray256x1Typ
'-----
yA.N = ycu.N:          cA.N = ycu.N
For I = 1 To ycu.N:    yA.v(I) = ycu.y(I):      cA.v(I) = ycu.c(I):      Next I
'-----
yArray_VAR = yA:      cArray_VAR = cA
End Sub

Function ycuBG_81h(ycuDt As ycuDatTyp, yB!, yV!, yT!, yK!, yR!, yW!, yMax!) As ycuDatTyp
Dim dT As ycuDatTyp
'-----
dT = ycuDt:          dT.yB = yB:          dT.yV = yV:          dT.yT = yT
                   dT.yK = yK:          dT.yR = yR:          dT.yW = yW:          dT.yMax = yMax
'-----
ycuBG_81h = dT
End Function

Function ycu_83q(ID As ycuDatTyp, yB!, yV!, yT!, yK!, yR!, yW!, yMax!, yLinLog!, _
IDc As ycuDatTyp, Inflate, Optional NLinG) As ycuTyp
' creates the ycu of an ID, completing BG, scaling y, and rewriting c
Dim I%, c!, yAProz As SngArray256x1Typ, cAProz As SngArray256x1Typ, ycu As ycuTyp
'-----
ArraysXXycu_2416 IDc.ycu, yAProz, cAProz ' => yAProz, cAProz
ID = ycuBG_81h(ID, yB, yV, yT, yK, yR, yW, yMax) 'enters BG into the ID
ycu = ycuYArrayXXBereiche_5245(ID, yLinLog, , NLinG) 'scales y
For I = 1 To ycu.N 'rewrites c
    c = LinInterpoll1D(yAProz, cAProz, ycu.y(I) / Inflate): ycu.c(I) = Min_5330(c, 1)
Next I
'-----
ycu_83q = ycu
End Function

```

```

Function ycuDtXXValues_5290(k!, d0!, Optional BetaRG, Optional sG, _
  Optional DbMethG, Optional XiG, _
  Optional LTMethG, Optional tG, Optional eTauG, Optional LdG, Optional KarmanG, _
  Optional iBG, Optional BRauG, Optional NG) As ycuDatTyp
' reads data into a Pr
Dim Pr As ycuDatTyp
'-----
Pr.k = k:          Pr.d0 = d0:          Pr.BetaR = SngDefault_3314(BetaRG, s0)
Pr.s = SngDefault_3314(sG, s0)
Pr.DbMeth = IntDefault_3314(DbMethG, DbMeth0):    Pr.Xi = SngDefault_3314(XiG, 10)
Pr.LTMeth = StrDefault_3314(LTMethG, LTMeth0)
Pr.t = SngDefault_3314(tG, Pr.s):    Pr.eTau = SngDefault_3314(eTauG, eTau0)
Pr.Ld = SngDefault_3314(LdG, 99999999): Pr.Karman = SngDefault_3314(KarmanG, Karman0)
Pr.iB = IntDefault_3314(iBG, iB0):    Pr.BRau = SngDefault_3314(BRauG, Bk999)
Pr.ycu.N = IntDefault_3314(NG, N0)
'-----
ycuDtXXValues_5290 = Pr
End Function

```

```

Sub ExtractycuDt_7cd(Pr As ycuDatTyp, d0_VAR!, k_VAR!, BetaR_VAR!, s_VAR!, _
  DbMeth_VAR%, Xi_VAR!, LTMeth_VAR$, t_VAR!, eTau_VAR!, Ld_VAR!, Karman_VAR!, iB_VAR%)
' unwraps data from a Pr
Dim B!, dR!, cR!, Lk!
'-----
d0_VAR = Pr.d0:          k_VAR = Pr.k:          BetaR_VAR = Pr.BetaR
s_VAR = Pr.s:           DbMeth_VAR = Pr.DbMeth:    Xi_VAR = Pr.Xi
LTMeth_VAR = Pr.LTMeth: t_VAR = Pr.t:          eTau_VAR = Pr.eTau
Ld_VAR = Pr.Ld:         Karman_VAR = Pr.Karman
iB_VAR = Pr.iB
End Sub

```

```

Function BGAXXIP_5262(IP As ycuDatTyp, yLinLog!, Optional BGRngNmG) As SngArray256x1Typ
' reads zone limits into a BG-Array
Dim I%, Toleranz!, BGA As SngArray256x1Typ, BGRngNm$
'-----
'read
BGA.v(1) = IP.yB:  BGA.v(2) = 0:          BGA.v(3) = yLinLog
BGA.v(4) = IP.yV:  BGA.v(5) = IP.yT:    BGA.v(6) = IP.yk
BGA.v(7) = IP.yR:  BGA.v(8) = IP.yW:    BGA.v(9) = IP.yMax
BGA.N = 9
'ini, sort, eliminate values below yNull and above ymax, eliminate double values
Toleranz = 0.0001
BGA = Array256Sort_5248(BGA)
BGA = Array256CutK1Gr_5330(BGA, "<", IP.yB, Toleranz)
BGA = Array256CutK1Gr_5330(BGA, ">", IP.yMax, Toleranz)
BGA = Array256EqualsEliminate_5248(BGA, Toleranz)
'print
If (IsMissing(BGRngNmG) Or IsEmpty(BGRngNmG)) Then GoTo Result
BGRngNm = CStr(BGRngNmG):    WriteArray1DToRngNm_5248 BGA, BGRngNm
'-----
Result:    BGAXXIP_5262 = BGA
End Function

```

```

Function NXXf_5247(fLin!, fLog!, f!, Optional NLinG) As Integer
' => N from fLin, fLog and f (f is first guess)
' cond.: Lin. steps about same size as the smallest log. step (dyLin = dyLog,Min)
'NLin * (f-1) * yLinLog = yLinLog - yNull => NLin * (f-1) = 1 - fLin => NLin
'yLinLog * fNLog = yS          => f^NLog = fLog          => NLog
Dim NLin!, NLog!
'-----
NLin = (1 - fLin) / (f - 1):    NLog = Log(fLog) / Log(f)
'-----
NXXf_5247 = NLin + NLog
End Function

```

```

Function fXXN_5247(fLin!, fLog!, NSoll%, Optional NLinG, Optional NBLinG) As Single
' => (global) step factor f for the logarithmic zones
'- NLinG: number of dy per linear zone (i.e. same for all linear zones!)
'- NBLinG: number of linear zones; MUST be given, if NLinG is specified
Dim fu!, fo!, f!, N!, Epsilon, NLin%, NBLin%, NLog%
'-----
'control
If (Not AngabeFehlt_3201(NLinG)) And AngabeFehlt_3201(NBLinG, False) Then f = 0: GoTo Res
If AngabeFehlt_3201(NLinG) Then 'BC: dyLin = dyLog,Min
    'bottom limit
    fu = 1.1
    Do: fu = 1 + (fu - 1) / 2:      N = NXXf_5247(fLin, fLog, fu, NLin)
    Loop Until (N > NSoll)
    'top limit
    fo = 1.1
    Do: fo = 1 + (fo - 1) * 2:    N = NXXf_5247(fLin, fLog, fo, NLin)
    Loop Until (N < NSoll)
    'bisection
    Do: f = (fu + fo) / 2:      N = NXXf_5247(fLin, fLog, f, NLin)
    If (N > NSoll) Then fu = f Else fo = f
    Epsilon = Abs(fu / fo - 1)
    Loop Until (Epsilon < 0.001)
Else 'cond: NLin is given; is needed for smooth flow (NLin=1, NLinB=1)
    NLin = NLinG:      NBLin = NBLinG:      NLog = NSoll - NBLin * NLin
    f = fLog ^ (1 / NLog)
End If
'-----
Res:    fXXN_5247 = f
End Function

```

```

Function ycuLinAbschnitt_5264(ycuG As ycuTyp, BGyNeu!, IAlt%, I_VAR%, dyGlobal!, _
Optional NG) As ycuTyp
' divides a zone into linear (same size) steps dy
Dim I%, N%, dy!, dyB!, ycu As ycuTyp
'-----
ycu = ycuG
'dyB; => N either given (NG) or from: dy*N = dyB
dyB = BGyNeu - ycuG.y(IAlt)      'absolute y-span of this zone
If AngabeFehlt_3201(NG) Then N = Max_5330(Int(dyB / dyGlobal + 0.5), 1) Else N = NG
'correct dyGlobal such, that it corresponds to the rounded N => dy; fix y(I)
dy = dyB / N
'for all intermediate points:
For I = IAlt + 1 To IAlt + N - 1:    ycu.y(I) = ycu.y(I - 1) + dy:      Next I
ycu.y(I) = BGyNeu
'-----
ycuLinAbschnitt_5264 = ycu:      I_VAR = I
End Function

```

```

Function ycuLogAbschnitt_5264(ycuG As ycuTyp, BGyNeu!, IAlt%, I_VAR%, fGlobal!, _
Optional NG) As ycuTyp
' divides a zone into log. steps; horizon of log-scale is 0.
Dim I%, N%, f!, fB!, ycu As ycuTyp
'-----
ycu = ycuG
'fB; => N either given (NG) or from: f^N = fB
fB = BGyNeu / ycuG.y(IAlt)      'relative y-span of this zone
If AngabeFehlt_3201(NG) Then N = Max_5330(Int(Log(fB) / Log(fGlobal) + 0.5), 1) _
Else N = NG
'correct fGlobal such, that it corresponds to the rounded N => f; fix y(I)
f = fB ^ (1 / N)
For I = IAlt + 1 To IAlt + N - 1:    ycu.y(I) = ycu.y(I - 1) * f:      Next I
ycu.y(I) = BGyNeu
'-----
ycuLogAbschnitt_5264 = ycu:      I_VAR = I
End Function

```

```

Function ycuArrayXXBereiche_5245(IPG As ycuDatTyp, yLinLogG!, _
    Optional BGRngNm, Optional NLinG) As ycuTyp
' divides the y-array into logarithmic steps in the log./outer zone, into linear steps below;
' considers zone limits (BG)
'cond: linear step dy is about the same size as the first log. step
'- IPG:      ycuDatTyp; MUST contain N and the BG (yB, yV, ...)
'- yLinLog: position of the transition from lin. to log. scale
'- BGRngNm: range name for printing the reduced and sorted zone limits
'- NLin:    number of dy per linear zone (i.e. same for all linear zones!)
Dim I%, iBG%, iBGLinLog%, nB%
Dim fLin!, fLog!, f!, fB!, fGlobal!, dyGlobal!, yLinLog!, Toleranz!
Dim BGStr$
Dim BGA As SngArray256x1Typ, ycu As ycuTyp
'-----
'ini, sort, eliminate values below yNull and above ymax, eliminate double values.
'=> set all limits that are not needed to 0;
'=> they coincide and are then eliminated down to 1 zero.
ycu = IPG.ycu:                yLinLog = yLinLogG
BGA = BGAXXIP_5262(IPG, yLinLog, BGRngNm):    yLinLog = Max_5330(yLinLog, IPG.yB)
'find the transition from linear to log. scale => iBGLinLog
Toleranz = 0.0001
For iBG = 1 To BGA.N
    If KlGrReal_5330(BGA.v(iBG), ">=", yLinLog, Toleranz) Then Exit For
Next iBG
iBGLinLog = iBG
'divide roughly, set starting conditions => fGlobal, dyGlobal
fLin = IPG.yB / yLinLog 'rel. y-span of lin. zone rel. to yLinLog
fLog = IPG.yMax / yLinLog ' ' ' ' log. ' ' ' ' yLinLog
fGlobal = fXXN_5247(fLin, fLog, IPG.ycu.N, NLinG, iBGLinLog - 1) 'rough estimate of f
dyGlobal = yLinLog * (fGlobal - 1) 'rough estimate of dy
ycu.y(1) = BGA.v(1)
I = 1
'lin. scale
For iBG = 1 To iBGLinLog - 1
    ycu = ycuLinAbschnitt_5264(ycu, BGA.v(iBG + 1), I, I, dyGlobal, NLinG)
Next iBG
'log. scale
For iBG = iBGLinLog To BGA.N - 1
    ycu = ycuLogAbschnitt_5264(ycu, BGA.v(iBG + 1), I, I, fGlobal)
Next iBG
'rest log. scale too, but with given N = IPG.ycu.N - I
ycu = ycuLogAbschnitt_5264(ycu, BGA.v(iBG + 1), I, I, fGlobal, IPG.ycu.N - I)
'-----
ycuArrayXXBereiche_5245 = ycu
End Function

```

A2.4 Reinwassertiefe, Abfluss, Energiehöhe, Luftverteilung

```

.....
' Functions for Water Depth, Flow and Energy
.....

'general remarks concerning comment notation:
'- integration:
'   integral I of a(x) from x1 to x2:
'   => I = Int[x1:x2]<a(x)>dx
'- discretization: a(x) is given as an aArray for a(1) to a(n).
'   sum S from i=i1 to i=i2 (where x1 = x(i1) and x2 = x(i2) ):
'   => S = Sum[i1:i2]<am[i1:i2] * dx>
'       where: dx = x2 - x1 = x(i2) - x(i1), am[i1:i2] = (a(i1) + a(i2)) / 2
'- arrays run from top to bottom!
'   => y(1) = ymax, y(n) = 0, dy = y(i-1) - y(i)

Function d_2388(ycu As ycuTyp, Optional yUG) As Single
'   => water depth:      d = Int[y0:Inf]{Rho(y)}dy / RhoW = Int[y0:Inf]<1-C(y)>dy
' discretization:      => d = Sum[2:n]<(1-Cm(i-1:i)) * dy>
Dim I%, yu!, cU!, dyu!, dy!, dc!, cm!, dd!, Res!
'-----
If IsMissing(yUG) Or IsEmpty(yUG) Then yu = 0 Else yu = yUG
For I = 2 To ycu.N
    If (ycu.y(I) <= yu) Then
        dd = 0
    ElseIf (ycu.y(I) > yu) And (ycu.y(I - 1) < yu) Then
        dyu = ycu.y(I) - yu
        dy = ycu.y(I) - ycu.y(I - 1)
        dc = ycu.c(I) - ycu.c(I - 1)
        cU = Min_5330(ycu.c(I) - dc / dy * dyu, 1) 'inter-/extrapolation of c for yU
        cm = (ycu.c(I) + cU) / 2
        dd = dyu * (1 - cm)
    ElseIf (ycu.y(I - 1) >= yu) Then '(normal case)
        dy = ycu.y(I) - ycu.y(I - 1)
        cm = (ycu.c(I - 1) + ycu.c(I)) / 2
        dd = dy * (1 - cm)
    End If
    Res = Res + Abs(dd)
Next I
'-----
d_2388 = Res
End Function

Function qSpez_2388(ycu As ycuTyp) As Single
'   specific flow:    q = Int[y0:Inf]<Rho(y)*u(y)>dy / RhoW
' discretization:    => q = Sum[2:n]<(1-Cm(i-1:i)) * um(i-1:1) * dy>
Dim I%, dy!, dd!, cm!, Um!, Res!
'-----
For I = 2 To ycu.N
    dy = ycu.y(I - 1) - ycu.y(I)
    cm = (ycu.c(I - 1) + ycu.c(I)) / 2
    Um = (ycu.u(I - 1) + ycu.u(I)) / 2
    dd = dy * (1 - cm):
    Res = Res + Abs(Um * dd)
Next I
'-----
qSpez_2388 = Res
End Function

```

```

Function hE_2388(ycu As ycuTyp, Slope!)
' specific energy; y perpendicular to flow direction
'pressure at y:      p(y) = Int[y:Inf]<Rho(y)'*g*cosJ>dy'
'                   = RhoW*g*cosJ * Int[y:Inf]<(1-C(y)) * dy>'
' (integral similar to water depth, but lower integration limit at y instead of 0)
'energy per unit vol.: H(y) = y*cosJ + p(y)/(Rho(y)*g) + u(y)^2/2/g}
'spec. energy flow:   E = Int[0:Inf]<Rho(y)*g*H(y)*u(y)>dy
' [J/s/m']           = RhoW*g * Int[0:Inf]<(1-C(y)) * H(y) * u(y)>dy
'spec. mass flow:    M = Int[0:Inf]<Rho(y)*g * u(y)>dy
' [kg/s/m']         = RhoW * Int[0:Inf]<(1-C(y)) * u(y)>dy
'                   = RhoW * q
'spec. energy:       hE = E / (M*g) = E/(RhoW*g) / (M/RhoW)
'discretization:
' pRhoWg(y) = p(y)/(RhoW*g) = cosJ * Sum[1:i]<(1-Cm(i-1)) * dy>
' H(i) = y(i)*cosJ + pRhoWg(i)/(1-C(i)) + um(i)^2/2/g}
' ERhoWg = E/(RhoW*g) = Sum[2:n]<Hm(i-1:i) * um(i-1:i) * (1-Cm(i-1:i)) * dy>
' MRhoW = M/RhoW = q
' hE = E/(RhoW*g) / (M/RhoW) = ERhoWg / q
Dim I%, dy!, dd!, cm!, Hm!, Um!, HAlt!, CosS!, pRhoWg!, H!, ERhoWg!
'-----
CosS = Cos(Atn(Slope))
'integrate pressure and energy flow
HAlt = ycu.y(1) * CosJ + ycu.u(1) ^ 2 / 2 / 9.81
For I = 2 To ycu.N
    dy = ycu.y(I - 1) - ycu.y(I)
    cm = (ycu.c(I - 1) + ycu.c(I)) / 2
    Um = (ycu.u(I - 1) + ycu.u(I)) / 2
    dd = dy * (1 - cm):                pRhoWg = pRhoWg + dd
    H = ycu.y(I) * CosS + pRhoWg / (1 - ycu.c(I)) + ycu.u(I) ^ 2 / 2 / 9.81
    Hm = (HAlt + H) / 2:  HAlt = H:    ERhoWg = ERhoWg + Abs(Hm * Um * dd)
Next I
'-----
hE_2388 = ERhoWg / qSpez_2388(ycu)
End Function

Function dXXRng_2415(yRng, cRng, Optional yUG) As Single
Dim yu!, ycu As ycuTyp
'-----
'If IsMissing(yUG) Or IsEmpty(yUG) Then yU = 0 Else yU = yUG
ycu = ycuXXRngs_2415(yRng, cRng)
'-----
dXXRng_2415 = d_2388(ycu, yUG)
End Function

Function qSpezXXRng_2415(yRng, cRng, uRng) As Single
qSpezXXRng_2415 = qSpez_2388(ycuXXRngs_2415(yRng, cRng, uRng))
End Function

Function hEXXRng_2415(yRng, cRng, uRng, J!) As Single
hEXXRng_2415 = hE_2388(ycuXXRngs_2415(yRng, cRng, uRng, "Down"), J)
End Function

Function cy0_2419() As ycuTyp
' creates an air distribution with c = konst = 0
Dim ycu As ycuTyp
'-----
ycu.N = 2:  ycu.y(1) = 0:  ycu.y(2) = 1:  ycu.c(1) = 0:  ycu.c(2) = 0
'-----
cy0_2419 = ycu
End Function

Function cHager_2437(Theta!, YY!)
' => Hager's air distribution
Dim YY0!, yStern!, CC0!, cc!, Slope!
'-----
Slope = Sin(Theta)
YY0 = 2 / Slope ^ 0.5:  CC0 = Min_5330(1.25 * Theta ^ 3, 0.65 * Slope)
yStern = (1 - YY) * YY0:  cc = 1.05 * Exp(-0.54 * (yStern + 0.3) ^ 2)
'-----
cHager_2437 = CC0 + cc * (0.9 - CC0)
End Function

```

A2.5 Berechnung der Konstanten *B* aus der Rauheit

```

.....
'   Transition for B from Smooth to Rough
.....

Function BTech_7cl(Karman!, B1!, B999!, k!) As Single
'   => constant B for techn. roughness [to B_2409]
    BTech_7cl = 8 - 1 / Karman * Log(1 + Exp(Karman * (B999 - B1)) / k)
End Function

Function BSand_7cl(Karman!, B1!, B999!, k!) As Single
'   => constant B for sand roughness [to B_2409]
    Dim lnk!, B11!, W!
    lnk = Log(k):   B11 = B1 + lnk / Karman:   W = Tanh_5330(lnk / Karman / (B999 - Bk1) - 2)
    BSand_7cl = (1 - W) / 2 * B11 + (1 + W) / 2 * B999
End Function

Function B_2409(k!, Optional KarmanG, Optional iBG, Optional B1G!, Optional B999G!) As Single
'   => constant B in the ROUGH equation:   uI = 1/Karman * ln(y/k) + B
'   B is defined such, that it can fall below 5 for smooth conditions!
'   B1, B999:   B for kI = 1 // kI = infinite
'   iB=1:   discontinuous at the intersection:   (Ln(kI); B) = (0.41*(8-5); 8) = (1.23; 8)
'   iB=2:   sand roughness (Schlichting 1997)
'   iB=3:   techn. roughness (Schlichting 1997)
    Dim iB%, Karman!, B1!, B999!, B!
    '-----
    'ini
    Karman = SngDefault_3314(KarmanG, Karman0):   iB = IntDefault_3314(iBG, 1)
    B1 = SngDefault_3314(B1G, Bk1):   B999 = SngDefault_3314(B999G, Bk999)
    If (k <= 0) Then B = 999999999:   GoTo Result
    'calc
    Select Case iB
        Case Is = 1:   B = Min_5330(B1 + Log(k) / Karman, B999)   'unstetig
        Case Is = 2:   B = BSand_7cl(Karman, B1, B999, k)   'Sandrauheit
        Case Is = 3:   B = BTech_7cl(Karman, B1, B999, k)   'technische Rauheit
        Case Else:   B = 999999999
    End Select
    '-----
Result:   B_2409 = B
End Function

```

A2.6 Berechnungen in Wandnähe: B , λ_k , κ_k

```

Const koeffa = 24
Const kTurb = 60      'from k=60 fully turbulent
Const LNT = 999

.....
'   Functions for B, Calculated from Roughness Parameters
.....

'   short names:
'   Karman: Karman
'   kk:      KarmanK (in the roughness zone)
'   lk:      LambdaK

Sub Bereichsgrenzen_7c6(BetaR!, s!, t!, Karman!, kk!, Lk!, iCase_VAR%, _
  kk_VAR!, Lk_VAR!, YB_VAR!, YT_VAR!, YK_VAR!, Y0_VAR!, Y1_VAR!, Y2_VAR!, Y3_VAR!)
'   fixes the zone limits for the integration of B
  Dim iCase%, YB!, YT!, YK!, Y0!, Y1!, Y2!, Y3!, B!
  '-----
  'errors
  iCase = 0 'default
  If (s = 1) Or (kk < 0) Or (kk > Karman) Or (Lk < 0) Then iCase = 9:           GoTo Result
  If (kk = Karman And Not Lk = 0) Or _
    (Lk = 0 And Not kk = Karman) Then iCase = 9: GoTo Result
  If (kk = Karman) Or ((kk = 0) And (Lk = 0)) Then iCase = 1:                 GoTo Result
  'avoid inexact calculation for values close to 0
  If (kk < 0.0001) Then kk = 0
  If (Lk < 0.0001) Then Lk = 0
  'YB, YT, YK => Y0, Y1, Y2, Y3
  YB = s - 1:           YT = t:           YK = Lk / (Karman - kk)
  If (kk = 0) Then Y0 = YB Else Y0 = Max_5330(YB, -Lk / kk)
  Y1 = Min_5330(YT, YK): Y2 = Max_5330(YT, YK): Y3 = BetaR
  '-----
Result:      iCase_VAR = iCase:      kk_VAR = kk:      Lk_VAR = Lk
  YB_VAR = YB:      YT_VAR = YT:      YK_VAR = YK
  Y0_VAR = Y0:      Y1_VAR = Y1:      Y2_VAR = Y2:      Y3_VAR = Y3
End Sub

Function Bu_7c2(cR!, BetaR!, s!, t!, Karman!, KkG!, LkG!) As Single
'   B-part of bottom section
  Dim iCase%, kk!, Lk!, YB!, YT!, YK!, Y0!, Y1!, Y2!, Y3!, a!, dy!, dY2!, Bu!
  '-----
  Bereichsgrenzen_7c6 _
    BetaR, s, t, Karman, KkG, LkG, iCase, kk, Lk, YB, YT, YK, Y0, Y1, Y2, Y3
  'special cases
  If (iCase <> 0) Then Bu = 9999999:           GoTo Result
  dy = Y1 - Y0:      dY2 = Y1 ^ 2 - Y0 ^ 2
  If (kk = 0) Then Bu = cR / Lk / (t - Y0) * (dY2 / 2 - Y0 * dy):           GoTo Result
    ' = cR/Lk/(t-Y0) * ((Y1^2-Y0^2)/2 - Y0*(Y1-Y0))
    ' = cR/(Karman*YK)/(t-Y0) * ((Y1-Y0)*(Y1+Y0)/2 - Y0*(Y1-Y0))
    ' = cR/(Karman*YK)/(t-Y0) * (Y1-Y0) * (Y1+Y0)/2
    ' = cR/Karman * (Y1-s+1)^2 / (2*YK*(t-s+1))
  a = Lk / kk
  'general cases
  '- -lk/kk > YB: du/dY = cR / kk / (t-Y0)
  If (-a >= YB) Then Bu = cR / kk / (t - Y0) * dy:           GoTo Result
  '- Y0 = YB: du/dY = cR / kk / (t-Y0) * (Y-Y0) / (Y+lk/kk)
  Bu = cR / kk / (t - Y0) * ((Y0 + a) * Log((Y0 + a) / (Y1 + a)) + dy)
  '-----
Result:      Bu_7c2 = Bu
End Function

```

```

Function Bm_7c2(cR!, BetaR!, s!, t!, Karman!, KkG!, LkG!) As Single
' B-part of middle section
Dim iCase%, kk!, Lk!, YB!, YT!, YK!, Y0!, Y1!, Y2!, Y3!, a!, dy!, Bm!
'-----
Bereichsgrenzen_7c6 _
BetaR, s, t, Karman, KkG, LkG, iCase, kk, Lk, YB, YT, YK, Y0, Y1, Y2, Y3
'special cases
If (iCase <> 0) Then Bm = 9999999: GoTo Result
'- YK = YT: Bm does not contribute to B
If (YK = YT) Then Bm = 0: GoTo Result
'- YK > YT, kk=0: du/dY = cR / lk
If (YK > YT) And (kk = 0) Then Bm = cR * (Y2 - Y1) / Lk: GoTo Result
' = cR/Karman * (Y2-Y1)/YK
'general cases
'- YK > YT: du/dY = cR / kk / (Y+lk/kk)
If (YK > YT) Then a = Lk / kk: Bm = cR / kk * Log((a + Y2) / (a + Y1)): GoTo Result
'- YK < YT: du/dY = cR / Karman / (YT-Y0) * (1-Y0/Y)
Bm = cR / Karman / (t - Y0) * (Y2 - Y1 - Y0 * Log(Y2 / Y1))
'-----
Result: Bm_7c2 = Bm
End Function

```

```

Function Bo_7c2(cR!, BetaR!, s!, t!, Karman!, KkG!, LkG!) As Single
' B-part of top section
Dim iCase%, kk!, Lk!, YB!, YT!, YK!, Y0!, Y1!, Y2!, Y3!, Bo!
'-----
Bereichsgrenzen_7c6 _
BetaR, s, t, Karman, KkG, LkG, iCase, kk, Lk, YB, YT, YK, Y0, Y1, Y2, Y3
'special cases
If (iCase <> 0) Then Bo = 9999999: GoTo Result
'general cases
Bo = cR / Karman * Log(Y3 / Y2)
'-----
Result: Bo_7c2 = Bo
End Function

```

```

Function B_7c2(cR!, BetaR!, s!, t!, Karman!, Optional KkG, Optional LkG) As Single
' => B
Dim kk!, Lk!, Bu!, Bm!, Bo!, B!
'-----
'ini, y-limits, errors
kk = SngDefault_3314(KkG, 0): Lk = SngDefault_3314(LkG, 0)
If (s = 1) Or (kk < 0) Or (kk > Karman) Or (Lk < 0) Then B = 9999999: GoTo Result
If (kk = Karman And Not Lk = 0) Or _
(Lk = 0 And Not kk = Karman) Then B = 9999999: GoTo Result
'rechnen
Bu = Bu_7c2(cR, BetaR, s, t, Karman, kk, Lk)
Bm = Bm_7c2(cR, BetaR, s, t, Karman, kk, Lk)
Bo = Bo_7c2(cR, BetaR, s, t, Karman, kk, Lk)
'-----
Result: B_7c2 = Bu + Bm + Bo
End Function

```

```

.....
'   Functions for Roughness Parameters (Lambdak, Kappak) from given B
.....

Function LkXXXk_5213(cR!, s!, t!, Karman!, kk!, BSoll!, Optional BetaRG) As Single
'   => lk that yields correct B for given kk (and Beta, wegen k')
    Dim Counter%, Lk!, Lku!, Lko!, B!, BetaR!, Epsilon!
    '-----
    BetaR = SngDefault_3314(BetaRG, 1):           Lku = 0:           Lko = 1
    Do: Counter = Counter + 1
        Lk = (Lku + Lko) / 2:                     B = B_7c2(cR, BetaR, s, t, Karman, kk, Lk)
        If (B > BSoll) Then Lku = Lk Else Lko = Lk
        Epsilon = Abs(B / BSoll - 1)
    Loop Until (Epsilon < 0.00001) Or (Counter > 1000)
    '-----
    If (Lk <= 0.001) Then Lk = -1
    LkXXXk_5213 = Lk
End Function

Function KkXXLk_5213(cR!, s!, t!, Karman!, Lk!, BSoll!, Optional BetaRG) As Single
'   => kk that yields correct B for given lk (and Beta, wegen k')
    Dim Counter%, kk!, Kku!, Kko!, B!, BetaR!, Epsilon!
    '-----
    BetaR = SngDefault_3314(BetaRG, 1):           Kku = 0:           Kko = 0.41
    Do: Counter = Counter + 1
        kk = (Kku + Kko) / 2:                     B = B_7c2(cR, BetaR, s, t, Karman, kk, Lk)
        If (B > BSoll) Then Kku = kk Else Kko = kk
        Epsilon = Abs(B / BSoll - 1)
    Loop Until (Epsilon < 0.00001) Or (Counter > 1000)
    '-----
    If (kk <= 0.001) Then kk = -1
    KkXXLk_5213 = kk
End Function

```

A2.7 Integration des Geschwindigkeitsprofils

```
Public Const cRngNm = "CRange"
```

```
.....
' Numerical Integration of the Velocity Profile in Inner Variables
'.....

Function yV_3160(Optional KarmanG, Optional c0G) As Single
' => wall layer thickness yvI => intersection of the log. and the lin. profile (SMOOTH)
'recursion: y = (1/Karman * ln(y) + 5)
Dim I%, y!, Karman!
'-----
Karman = SngDefault_3314(KarmanG, Karman0)
y = 10.8: For I = 1 To 10: y = (1 / Karman * Log(y) + Bkl): Next I
'-----
yV_3160 = y
End Function

Function LI_2411(LTMeth$, k!, d0!, Lk!, Karman!, Ld!, y!) As Single
' => mixing length
' ALL DISTANCE AND VELOCITY VARIABLES (y, u, ...) ARE INNER VARIABLES (yI, uI, ...)
Dim LI!
'-----
LI = Karman * y: If (LTMeth = "Pr") Then GoTo Result
LI = Min_5330(LI, Ld * d0): If (LTMeth = "Es") Or (LTMeth = "Be") Then GoTo Result
LI = Min_5330(Max_5330(LI, Lk * k), Ld * d0): If (LTMeth = "MR") Then GoTo Result
LI = 0: Exit Function
'-----
Result: LI_2411 = LI
End Function

Function TautTau0_5172(LTMeth$, k!, d0!, dR!, d!, s!, eTau!, t!, y!) As Single
' => coeff. for turb. shear (Taut/Tau0)^0.5 at y (y reference: log. profile)
' ALL DISTANCE AND VELOCITY VARIABLES (y, u, ...) ARE INNER VARIABLES (yI, uI, ...)
'd0=d(y=0), dR=d(y=yR), d=d(y): pure water cover at the ref.horizon, at yR, at y
'eTau = exponent of the turbulent shear curve in the grains; usually eTau=2
't*k = lower border of roughness sublayer = top border of grain zone
'Prandtl: t = 0 eTau = 0
'Escudier, Bezzola: t = 0 eTau = 0
'MR: t = f(s) eTau = 2
Dim fk!, cR2!, c2!, TtT0!, y0!, yBYk!
'-----
TtT0 = 1: If (LTMeth = "Pr") Then GoTo Result
c2 = d / d0: TtT0 = c2: If (LTMeth = "Es") Then GoTo Result
cR2 = dR / d0: TtT0 = Min_5330(TtT0, cR2): If (LTMeth = "Be") Then GoTo Result
y0 = s - 1: yBYk = y / k
If (eTau = 0) Or (yBYk >= t) Then fk = 1 Else fk = ((yBYk - y0) / (t - y0)) ^ eTau
TtT0 = Min_5330(TtT0, fk * cR2): If (LTMeth = "MR") Then GoTo Result
Exit Function
'-----
Result: TautTau0_5172 = TtT0
End Function
```

```

Function dudyI_2414(Pr As ycuDatTyp, dRI!, Lk!, yI!, dI!, cy!, Tau0!, Sigma!, _
  DbMeth%, DbI_VAR!, Optional LI_VAR!, Optional TtT0_VAR!) As Single
' => velocity gradient
' dI = dI(y) (pure water cover); cy = c(y) (local air concentration);
' Tau0 = shear [Pa]; Sigma = surface tension [Pa]
' DbMeth = 0: DB = 0 (bubble diameter has no influence)
' = 1: minimum DB ( ' ' ' small ' )
' = 2: local DB from local conditions ( ' ' ' strong ' )
' = 3: no drag reduction by air ( ' ' ' no ' )
'general: duI/dyI = (Taut(y)/Tau0/rRho)^0.5 / LI
Dim iB%
Dim d0I!, kI!, BetaR!, s!, Xi!, t!, eTau!, Ld!, Karman!, B!
Dim uTau!, LNue!, LI!, L!, TtT0!, Tau!, rRho!, We!, DbI!, p!, dudyI!
Dim LTMeth$
'-----
'above nappe: c=1 => avoid #Div/0!
If (cy = 1) Then dudyI = 0: GoTo Result
'c<1:
ExtractycuDt_7cd Pr, d0I, kI, BetaR, s, DbMeth, Xi, LTMeth, t, eTau, Ld, Karman, iB
LI = LI_2411(LTMeth, kI, d0I, Lk, Karman, Ld, yI)
TtT0 = TautTau0_5172(LTMeth, kI, d0I, dRI, dI, s, eTau, t, yI)
rRho = 1 - cy
'bubbles
If (DbMeth = 3) Or (Tau0 = 0) Or (TtT0 = 0) Or (cy = 0) Then _
  DbI = 0: rRho = 1: GoTo Gradient
If (DbMeth = 0) Then DbI = 0: rRho = 1 - cy: GoTo Gradient
uTau = (Tau0 / RhoW0) ^ 0.5: LNue = Nue0 / uTau: L = LI * LNue: Tau = TtT0 * Tau0
We = Tau * L / Sigma: DbI = LI * 0.725 / rRho ^ 0.2 / We ^ 0.6
If (DbMeth = 1) Then DbI = Min_5330(DbI, DbI_VAR)
p = (Tanh_5330(2 * Log(LI / DbI / Xi)) + 1) / 2: rRho = 1 - p * cy
'gradient
Gradient: dudyI = (TtT0 / rRho) ^ 0.5 / LI
'-----
Result: dudyI_2414 = dudyI: LI_VAR = LI: TtT0_VAR = TtT0: DbI_VAR = DbI
End Function

Function uXXycProz_5256(ycuDt As ycuDatTyp, cyProz As ycuTyp, Optional Tau0G, _
  Optional NebenResultateRngNmG) As ycuDatTyp
' integrates uI(yI) and evaluates UI
' evaluates the y scale on its own (with ycuArrayXXBereiche_5245)
' From: ycuDt: .d0 .ycu.N .LTMeth
' .k .BetaR .s
' .t .eTau
' .Ld .Karman .Lk (bzw. Kk);
' cyProz: .y(I) .c(I) (must be sorted from bottom to top!)
' Tau0G [Pa]
' Xi
' =>: ycuDt: .ycu.u(I) .Um
' ALL DISTANCE AND VELOCITY VARIABLES (y, u, ...) ARE INNER VARIABLES (yI, uI, ...)
Dim Glatt As Boolean, Converged As Boolean, Printout As Boolean
Dim Counter%, I%, iB%, DbMeth%
Dim k!, d0!, s!, BetaR!, Xi!, t!, eTau!, Ld!, Karman!, Lk!, B!, Sigma!, Tau0!
Dim kGr!, yB!, yV!, yT!, yK!, yR!, yW!, yMax!, yLinLog!, c!, Inflate!
Dim c00!, c05!, c10!, y00!, y05!, y10!, dy!, dz!, d00!, d05!, d10!, dd!, dR!, dRAlt!, cR!
Dim dudy00!, dudy05!, dudy10!, du!, du05!, du10!, u00!, u05!, u10!, dq!, q!
Dim LTMeth$, NebenResRngNm$
Dim IDc As ycuDatTyp, ID As ycuDatTyp, ycu As ycuTyp, Rng As Range
Dim INRes%, L!, TtT0!, dB!
'-----
DbMeth = 2
Printout = False
If Not (IsMissing(NebenResultateRngNmG) Or IsEmpty(NebenResultateRngNmG)) Then
  Printout = True: NebenResRngNm = CStr(NebenResultateRngNmG)
  Sheets("1Clc").Select: Set Rng = Range(NebenResRngNm): Rng.Cells.ClearContents
End If
'1. read ID and cyProz, evaluate yMax
ID = ycuDt
ExtractycuDt_7cd ID, d0, k, BetaR, s, DbMeth, Xi, LTMeth, t, eTau, Ld, Karman, iB
B = B_2409(BetaR * k, Karman, iB): Sigma = Sigma0
Tau0 = SngDefault_3314(Tau0G, 0)
IDc.ycu = cyProz: IDc.yMax = IDc.ycu.y(IDc.ycu.N)
IDc.d0 = d_2388(IDc.ycu, 0): Inflate = d0 / IDc.d0: yMax = IDc.yMax * Inflate

```

```

'2. checks
'2b. smooth or rough; in smooth case exclude Bezzola and MR methods
kGr = Exp(Karman * (Bk999 - Bk1))
If (BetaR * k < kGr) Then Glatt = True Else Glatt = False
If Glatt And (LTMeth = "Be" Or LTMeth = "MR") Then LTMeth = "Es"
'2c. take over / define / correct the other parameters according to selected method
If (LTMeth = "MR") Then t = Max_5330(t, 0): GoTo StartBG
s = 0: t = 0: eTau = 0: Lk = 0: If (LTMeth = "Pr") Then Ld = 999999
'3. domain limits: ID.yB .yV .yR .yT .yK .yMax; yLinLog and y-scale
StartBG: If Glatt Then GoTo Smooth Else GoTo Rough
Smooth:
  yB = 0
  yV = yV_3160(): yLinLog = yV
  yW = yMax: If (LTMeth = "Pr") Then GoTo ycul
  yW = Ld / Karman * d0: If (LTMeth = "Es") Then GoTo ycul Else Exit Function
Rough: 'only preliminary results, IF NOT "MR"! (where yB, yT, yK take different values)
  yB = BetaR * k / Exp(B * Karman): yLinLog = yB
  yV = 0: yT = 0: yK = 0
  yW = yMax: If (LTMeth = "Pr") Then GoTo ycul
  yW = Ld / Karman * d0: If (LTMeth = "Es") Then GoTo ycul
  yR = Min_5330(yMax, k * BetaR)
  yW = Max_5330(yW, yR): If (LTMeth = "Be") Then GoTo ycul
  If (LTMeth = "MR") Then GoTo MR Else Exit Function
ycul:
  ycu = ycu_83q(ID, yB, yV, yT, yK, yR, yW, yMax, yLinLog, IDc, Inflate, 1) 'rewrite ycu
  dR = d_2388(ycu, yR): GoTo EndBG
MR: 'recursion: cR=1 => Lk=LkXXXk... => yK = yLinLog => ycu => dR => cR ...
  yB = (s - 1) * k: yT = t * k: cR = 1: dR = d0
  Do: Counter = Counter + 1
  Lk = LkXXXk_5213(cR, s, t, Karman, 0, B, BetaR)
  yK = Lk / Karman * k: yLinLog = yK
  ycu = ycu_83q(ID, yB, yV, yT, yK, yR, yW, yMax, yLinLog, IDc, Inflate)
  dRAlt = dR: dR = d_2388(ycu, yR): cR = (dR / d0) ^ 0.5
  Loop Until EndLoop_7ck(Abs(dRAlt / dR - 1) < 0.001, Counter > 100, Converged)
EndBG:
'5. set starting conditions: I; u(1), u(2); y00, c00, u00, d00; q; dR
I = IIf(Glatt, 3, 2): dB = 999999999
ycu.u(1) = 0: If Glatt Then ycu.u(2) = yV
y00 = ycu.y(I - 1): c00 = ycu.c(I - 1): u00 = ycu.u(I - 1)
d00 = d_2388(ycu, y00): q = IIf(LTMeth = "MR", 0, y00 * u00 / 2)
'6. integrate the profile up to the surface
For I = I To ycu.N 'Simpson integration of u
  '6a. duI/dyI in the center / at the top of dy => dudy05, dudy10
  y00 = ycu.y(I - 1): y05 = (ycu.y(I) + ycu.y(I - 1)) / 2: y10 = ycu.y(I)
  c00 = ycu.c(I - 1): c05 = (ycu.c(I - 1) + ycu.c(I)) / 2: c10 = ycu.c(I)
  dy = ycu.y(I) - ycu.y(I - 1): dz = dy / 100000
  d05 = Max_5330(0, d00 - (1 - (c00 + c05) / 2) * dy / 2)
  d10 = Max_5330(0, d05 - (1 - (c05 + c10) / 2) * dy / 2)
  dudy00 = dudyI_2414(ID, dR, Lk, y00 + dz, d00, c00, Tau0, Sigma, DbMeth, dB)
  dudy05 = dudyI_2414(ID, dR, Lk, y05 + 0, d05, c05, Tau0, Sigma, DbMeth, dB)
  dudy10 = dudyI_2414(ID, dR, Lk, y10 - dz, d10, c10, Tau0, Sigma, DbMeth, dB, L, TtT0)
  If Printout Then
    INRes = ycu.N - I + 1
    Rng(INRes, 2) = L: Rng.Cells(INRes, 1) = TtT0: Rng.Cells(INRes, 3) = dB
  End If
  '6b. u-distribution (Simpson integral for: dyI/duI => uI(yI) )
  du = SimpsonIntegral_2414(dy / 2, dudy00, dudy05, dudy10, du05, du10) '=> du05, du10
  u05 = u00 + du05: u10 = u05 + du10: ycu.u(I) = u10
  '6c. q; is needed for um (double Simpson integral for: u(y) => q(y))
  dd = d00 - d10: dq = SimpsonIntegral_2414(dy / 2, u00, u05, u10) * dd / dy
  q = q + dq
  '6d. set boundary conditions for the next step => d00, c00, u00 and dudy00
  d00 = d10: u00 = u10
Next I
'-----
Result: ID.Um = q / d0: ID.ycu = ycu ': NRes.N = ycu.N: NebenRes_VAR = NRes
uXXycProz_5256 = ID
End Function

```

```

Function UXXValues_2416(k!, d0!, Optional BetaR, Optional s, Optional DbMeth, Optional Xi, _
  Optional LTMeth, Optional t, Optional eTau, Optional Ld, Optional Karman, Optional Lk, _
  Optional iB, Optional BRau, Optional N, Optional Tau0, Optional cRngNm) As Single
' => mean velocity; air distribution c(y) is given by 1 ycu-RANGENAME
  Dim ID As ycuDatTyp, cA As ycuTyp
  '-----
  ID = ycuDtXXValues_5290(k, d0, BetaR, s, DbMeth, Xi, LTMeth, t, eTau, Ld, Karman, _
    iB, BRau, N)
  If AngabeFehlt_3201(cRngNm) Then cA = cy0_2419 _
    Else cA = ycuXXycuRng_2416(Range(cRngNm), False)
  ID = uXXycProz_5256(ID, cA, Tau0)
  '-----
  UXXValues_2416 = ID.Um
End Function

Function UXXProzRngs_3190(k!, d0!, Optional BetaR, Optional s, _
  Optional DbMeth, Optional Xi, _
  Optional LTMeth, Optional t, Optional eTau, Optional Ld, Optional Karman, Optional Lk, _
  Optional iB, Optional BRau, Optional N, Optional Tau0, _
  Optional yProzRng, Optional cProzRng) As Single
' => mean velocity; air distribution c(y) is given by 2 RANGES for y and c
  Dim ID As ycuDatTyp, cy As ycuTyp
  '-----
  ID = ycuDtXXValues_5290(k, d0, BetaR, s, DbMeth, Xi, LTMeth, t, eTau, Ld, Karman, _
    iB, BRau, N)
  If IsMissing(yProzRng) Or IsEmpty(yProzRng) Then cy = cy0_2419 _
    Else cy = ycuXXRngs_2415(yProzRng, cProzRng)
  ID = uXXycProz_5256(ID, cy, Tau0)
  '-----
  UXXProzRngs_3190 = ID.Um
End Function

```

```

.....
' Numerical Integration of the Velocity Profile in Real Variables
.....

Function LambdaXXks_(Re!, ksDivD!) As Single
' => Lambda from Re and ks/D (recursion)
  Dim Converged As Boolean, Counter%, L!, LA!, LN!, ZwRes!
  '-----
  If (ksDivD < 0) Or (Re <= 6) Then L = 0:                               GoTo Result
  '(for Re < ca. 5.95 the recursion does not converge any longer)
  LN = 0.01
  'LN = 0.01: starting value (not the rough approx., since inadequate in case ks=0!)
  Do: Counter = Counter + 1:      LA = LN
    ZwRes = 2.51 / Re / LA ^ 0.5 + ksDivD / 3.71
    If (ZwRes <= 0) Then LN = 0 Else LN = 1 / (-2 * Log10_5330(ZwRes)) ^ 2
  Loop Until EndLoop_7ck(Abs(LN / LA - 1) < 0.0001, Counter > 100, Converged)
  L = LN:      If Not Converged Then L = 0
  '-----
Result:      LambdaXXks_ = L
End Function

Function UEben_3207(kB!, d!) As Single
' => mean vel. in 2D-FLOW
' ALL DISTANCE AND VELOCITY VARIABLES (y, u, ...) ARE INNER VARIABLES (yI, uI, ...)
  Dim Converged As Boolean, Counter%, LB!, Um!, UmAlt!, Re!, Epsilon!
  '-----
  'starting values
  LB = 1:      UmAlt = 0
  'recursion
  Do: Counter = Counter + 1
    Um = (8 / LB) ^ 0.5:      Re = 4 * d * Um
    LB = LambdaXXks_(Re, kB / (4 * d))
    Epsilon = Abs(UmAlt / Um - 1):      UmAlt = Um
  Loop Until EndLoop_7ck(Epsilon < 0.01, Counter > 100, Converged)
  If Not Converged Then Um = 0
  '-----
  UEben_3207 = Um
End Function

Function URechteck_3207(kB!, kh!, B!, d!) As Single
' => mean vel. in a RECTANGLE (different invert and wall roughnesses)
' ALL DISTANCE AND VELOCITY VARIABLES (y, u, ...) ARE INNER VARIABLES (yI, uI, ...)
  'notation:  pi = Pi/P      of perimeter section i
  '           li = Lambda '' '' '' i
  'derivation:
  '- S = 1*U^2/(8g*R),  uTau = (gdS)^0.5      => UI = U/uTau = (8/l * RI/dI)^0.5
  '- Re = 4R*U/Nue = 4 * (RI * Nue/uTau) * (UI * uTau) / Nue = 4 * RI * UI
  '- S = 1*U^2/(8g*R) = li*U^2/(8g*RI)      => RiI = li/l * RI
  '- S = 1*U^2/(8g*R),  A = P*R != Sum(Ai) = Sum(Pi*RI) => l = Sum(pi*li)
  Dim Converged As Boolean, Counter%
  Dim a!, p!, r!, RB!, Rh!, pB!, ph!, L!, LB!, Lh!, Um!, UmAlt!, Re!, Epsilon!
  '-----
  'preliminary, starting values
  a = B * d:      p = B + 2 * d:      r = a / p:      pB = B / p:      ph = 2 * d / p
  L = 1:      LB = 1:      Lh = 1:      UmAlt = 0
  'recursion
  Do: Counter = Counter + 1
    Um = (8 / L * r / d) ^ 0.5:      Re = 4 * r * Um
    RB = LB / L * r:      Rh = Lh / L * r
    If (kB > 0) Then LB = LambdaXXks_(Re, kB / (4 * RB)) Else LB = 0
    If (kh > 0) Then Lh = LambdaXXks_(Re, kh / (4 * Rh)) Else Lh = 0
    L = pB * LB + ph * Lh
    Epsilon = Abs(UmAlt / Um - 1):      UmAlt = Um
  Loop Until EndLoop_7ck(Epsilon < 0.01, Counter > 100, Converged)
  If Not Converged Then Um = 0
  '-----
  URechteck_3207 = Um
End Function

```

```

Function UWU_3207(kB!, BetaRB!, kh!, B!, d!) As Single
' => ratio of vel. with and without wall influence (same Q)
' ALL DISTANCE AND VELOCITY VARIABLES (y, u, ...) ARE INNER VARIABLES (yI, uI, ...)
Dim Converged As Boolean, Counter%, kBS!, Um!, UW!, q!, UWU!, dW!, dWalt!
'-----
If (kh <= 0) Then UWU = 1: GoTo Result
kBS = kB * BetaRB
Um = UEben_3207(kBS, d): q = B * d * Um: dW = d
Do: Counter = Counter + 1: dWalt = dW
    UW = URechteck_3207(kBS, kh, B, dW): dW = q / B / UW
Loop Until EndLoop_7ck(Abs(dWalt / dW - 1) < 0.001, Counter > 100, Converged)
If Converged Then UWU = UW / Um: GoTo Result
UWU = 0: GoTo Result
'-----
Result: UWU_3207 = UWU
End Function

```

```

Function uXXQ_7cl(Pr_VAR As ycuDatTyp, cyProz As ycuTyp, _
Nue!, kW!, Breite!, Slope!, QSoll!, OnlyConverged As Boolean) As ycuDatTyp
' => u(y) [m/s] for rq = rS = 1
' Nue[m2/s], kW[m], Breite[m], QSoll[m3/s]
Dim Converged As Boolean, Counter%
Dim d0!, Tau0!, uTau!, LNue!, BrI!, kWl!, UWU!, UW!, fQ!, d0u!, d0o!
Dim Pr As ycuDatTyp, PrI As ycuDatTyp 'PrI is Pr in inner variables
'-----
Pr = Pr_VAR: PrI = Pr_VAR: d0u = 0: d0o = QSoll / 1
Do: Counter = Counter + 1: d0 = (d0u + d0o) / 2
    Tau0 = 9810 * d0 * Slope: uTau = (9.81 * d0 * Slope) ^ 0.5: LNue = Nue / uTau
    PrI.d0 = d0 / LNue: PrI.k = Pr.k / LNue
    PrI = uXXycProz_5256(PrI, cyProz, Tau0)
    BrI = Breite / LNue: kWl = kW / LNue
    UWU = UWU_3207(PrI.k, PrI.BetaR, kWl, BrI, PrI.d0): UW = UWU * PrI.Um * uTau
    fQ = Breite * d0 * UW / QSoll
    If (fQ > 1) Then d0o = d0 Else d0u = d0
Loop Until EndLoop_7ck(Abs(fQ - 1) < 0.00001, Counter > 100, Converged)
Pr.d0 = d0: Pr.Um = UW
If OnlyConverged And Not Converged Then Pr.d0 = 0: Pr.Um = 0
'-----
uXXQ_7cl = Pr
End Function

```

```

Function UmXXQ_7cn(k!, QSoll!, Breite!, Slope!, _
Optional BetaRG, Optional sG, Optional DbMethG, Optional XiG, _
Optional LTMethG, Optional tG, Optional eTauG, Optional LdG, Optional KarmanG, _
Optional iBG, Optional BRauG, Optional NG, Optional yProzRngG, Optional cProzRngG, _
Optional NueG, Optional kWG, Optional OnlyConvergedG, Optional DBG) As Single
' => U[m/s] for rQ = rS = 1
Dim OnlyConverged As Boolean, iB%, N%, DbMeth%
Dim BetaR!, s!, Xi!, t!, eTau!, Ld!, Karman!, Nue!, kW!, BRau!, dR!, cR!, LTMeth$
Dim yProzRng As Range, cProzRng As Range, Pr As ycuDatTyp, cyProz As ycuTyp
'-----
'read parameters
BetaR = SngDefault_3314(BetaRG, 1): s = SngDefault_3314(sG, s0)
DbMeth = StrDefault_3314(DbMethG, DbMeth0): Xi = SngDefault_3314(XiG, Xi0)
LTMeth = StrDefault_3314(LTMethG, LTMeth0)
t = SngDefault_3314(tG, t0): eTau = SngDefault_3314(eTauG, eTau0)
Ld = SngDefault_3314(LdG, Ld0): Karman = SngDefault_3314(KarmanG, Karman0)
iB = IntDefault_3314(iBG, iB0): BRau = SngDefault_3314(BRauG, Bk999)
N = IntDefault_3314(NG, N0)
Nue = SngDefault_3314(NueG, Nue0): kW = SngDefault_3314(kWG, 0)
OnlyConverged = BlnDefault_3314(OnlyConvergedG, True)
'wrap parameters
Pr = ycuDtXXValues_5290(k, 0, BetaR, s, DbMeth, Xi, LTMeth, t, eTau, Ld, Karman, _
    iB, BRau, N)
If IsMissing(yProzRngG) Or IsEmpty(yProzRngG) Then cyProz = cy0_2419 _
    Else cyProz = ycuXXRngs_2415(yProzRngG, cProzRngG)
'calculate
Pr = uXXQ_7cl(Pr, cyProz, Nue, kW, Breite, Slope, QSoll, OnlyConverged)
'-----
UmXXQ_7cn = Pr.Um
End Function

```