

Wie Mathematik und Informatik im Unterricht voneinander profitieren können

Teil 1: Abstraktionsfähigkeit

Journal Article**Author(s):**

Hauser, Urs ; Komm, Dennis; Serafini, Giovanni

Publication date:

2019-04-15

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-b-000341565>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Originally published in:

Informatik Spektrum 42(2), <https://doi.org/10.1007/s00287-019-01165-2>



Wie Mathematik und Informatik im Unterricht voneinander profitieren können

Teil 1: Abstraktionsfähigkeit

Urs Hauser · Dennis Komm
Giovanni Serafini

Einleitung

Die Mathematik entstand aus der historischen Notwendigkeit, Güter bzw. Objekte jeglicher Art zu zählen und ihre Werte, zunächst für wirtschaftliche und anschließend für wissenschaftliche Zwecke, zu messen und zu vergleichen. Die Entwicklung möglichst allgemeiner abstrakter Notationen und formaler Methoden, welche den quantitativen Umgang mit Objekten aller Arten ermöglichen, ist ihre primäre und inhärente Aufgabe [2]. Bereits 1623 merkte Galileo Galilei an, dass die Mathematik eine Sprache ist, die den Menschen die Möglichkeit eröffnet, die Welt und die Naturgesetze zu untersuchen und zu beschreiben: „The great book of nature can be read only by those who know the language in which it was written. And this language is mathematics.“ Lernen, mathematisch zu denken, ist eine der grundlegenden Kompetenzen, die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten am Ende ihrer schulischen Laufbahn erreichen sollen.

Die Informatik hat sich wiederum erst im Verlauf der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts als eigenständige wissenschaftliche Disziplin etabliert. Ihre Wurzeln reichen jedoch weit zurück in die Geschichte der menschlichen Kultur. Die Methoden der Informatik begleiteten und ergänzten die Entstehung und die Entwicklung der Mathematik und die Informatik bediente sich aus den abstrakten, formalen Konzepten und methodischen Ansätzen der Mathematik, um ihren Zweck zu verfolgen, nämlich das Zählen, das Messen und das Vergleichen von Objekten zu automatisieren. Die Durchführung automatisierter (algorithmischer) Berechnungen setzt voraus, dass die zu bearbeitenden Informationen

digitalisiert, d. h. als endliche Folgen von Symbolen über einem Alphabet dargestellt werden. Die Informatik stellt heute den Kern der sogenannten Digitalisierung dar. Das allgemeinbildende Schulfach Informatik soll demnach Schülerinnen und Schülern ermöglichen, zu lernen, wie die von Menschen entwickelte technische Welt verstanden und gesteuert, aber auch mitgestaltet werden kann [6].

Die Schulinformatik soll den Schülerinnen und Schülern in einem Spiralcurriculum beibringen, konkrete Problemsituationen zu analysieren, wesentliche Informationen zu identifizieren und für die Lösung des Problems abstrakte und dennoch aussagekräftige Daten formal zu beschreiben. Der iterative Entwurf automatischer (algorithmischer) Lösungswege und die Frage nach der Qualität der Algorithmen bilden den konstruktiven, gestalterischen Kern des Unterrichts. Die in der Schule zu erwerbende Kompetenz wird mit dem Konzept des algorithmischen Denkens sinngemäß beschrieben und beinhaltet alle Denkprozesse, welche zur Entwicklung automatisierter Lösungen in Form von Algorithmen führen [1].

<https://doi.org/10.1007/s00287-019-01165-2>
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2019

Urs Hauser
ETH Zürich und PH Luzern,
Zürich, Schweiz
E-Mail: urs.hauser@inf.ethz.ch

Dennis Komm
ETH Zürich und PH Graubünden,
Zürich, Schweiz
E-Mail: dennis.komm@inf.ethz.ch

Giovanni Serafini
ETH Zürich,
Zürich, Schweiz
E-Mail: giovanni.serafini@inf.ethz.ch

Dieser zweigeteilte Beitrag befasst sich mit fächerübergreifenden Kompetenzen des Informatik- und Mathematikunterrichts: Aus schulischer Perspektive bildet der Prozess der mathematischen Modellierung einer Problemstellung das Bindeglied zwischen den beiden Fächern. Die Förderung der Problemlösefähigkeit und des abstrakten Denkens sind zwei fundamentale und fächerübergreifende Kompetenzen des Informatik- und Mathematikunterrichts. Wir stellen die Schnittstellen der beiden Fächer an konkreten Beispielen dar und erläutern, wie das Problemlösen und das abstrakte Denken gefördert werden können.

Problemlösestrategien

Unter Problemen versteht man Aufgabenanforderungen, für deren Bewältigung man keine bereits verfügbare Lösungsstrategie abrufen kann, sondern diese erst entwickeln muss. Zur Lösung eines Problems muss auf der Grundlage bestehenden Wissens neues Wissen generiert werden. Dafür gibt es verschiedene Strategien, wie zum Beispiel induktives Schlussfolgern oder Analogieschlüsse. „Problemlösekompetenz“ bedeutet damit die Fähigkeit, neue Situationen mit einem fachlich angemessenen Repertoire an Methoden und Konzepten zu bewältigen [9].

Der Problemlöseprozess kann in seiner Grundstruktur als Transformation eines Anfangszustandes in einen gewünschten Endzustand beschrieben werden, wobei eine *Barriere* zu überwinden ist [3]. Es handelt sich um einen strukturierten Prozess. Nach George Pólya [8] fördert der Mathematikunterricht die Entwicklung von Heuristiken des Problemlösens. Er teilt den Problemlöseprozess in vier Phasen ein: die Analyse und das Verstehen des Problems, den Entwurf eines Plans, seine Implementierung und schließlich die Überprüfung (siehe Abb. 1).

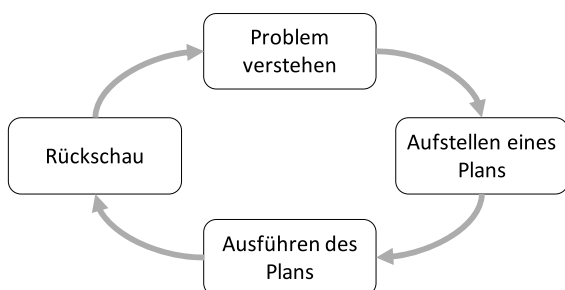


Abb. 1 Problemlöseprozess nach Pólya

Um Probleme zu lösen, benötigt man Problemlösestrategien (heuristische Strategien), die wir als allgemeingültige Verarbeitungsvorschriften für eine Klasse von Problemen definieren. Wir fokussieren auf die folgende Auswahl an Heuristiken:

1. *Die Variation der Darstellung.*
Ein Repräsentationswechsel eines Problems durch eine Zeichnung, eine Handlung oder Konstruktion. Ein wesentlicher Prozess der Darstellung eines Problems in der formalen Sprache der Mathematik besteht in der *Abstraktion*.
2. *Die Variation der Problemstellung.*
Durch eine *Umformulierung* des Problems, zum Beispiel durch eine Variation der Anordnung der Daten, des Anspruchs an die Exaktheit der Lösung oder des Allgemeingrades, lässt sich allenfalls ein Anknüpfen an bisheriges Wissen bilden. Bei der *Analogiebildung* kann die Lösungsstrategie, die man durch ähnliche Problemstellungen entwickelt hat, auf das aktuelle Problem angewendet werden.
3. *Modularisierung.*
Zerlegung eines Problems in (einfachere) Teilprobleme, deren Bewältigung die Lösung des Gesamtproblems schrittweise ermöglicht.

Dieser Artikel stellt den ersten von zweien dar, die sich mit der Frage beschäftigen, wie Informatik und Mathematik voneinander profitieren können. Hier fokussieren wir auf den ersten der beiden oberen Punkte, im zweiten Teil gehen wir auf die anderen beiden ein.

Abstraktion

Beispiel (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Werfen eines regulären Würfels die zweite Augenzahl größer ist als die erste?

Gemäß Pólya besteht der erste Schritt bei der Lösung eines Problems in der Analyse und dem Verstehen der Aufgabenstellung. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen zu können, benötigen wir die Anzahl aller möglichen Wurfresultate und aller günstigen Wurfresultate (jene, bei denen der Würfel im zweiten Wurf eine größere Zahl zeigt). Es geht also um den in der Einleitung erwähnten ursprünglichen Prozess des *Zählens*. Um effizient zählen zu können, brauchen wir eine möglichst systematische Darstellung der Ergebnisse (Daten). Die Wurfresultate kann man als zweistellige Zahlen

Darstellung als Tabelle

AZ1 \ AZ2	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Tabelle 1

Die Tabellendarstellung liefert wichtige Erkenntnisse der abzählenden Kombinatorik, zum Beispiel die Anzahl aller Möglichkeiten, 2 Elemente aus n Elementen unter Beachtung der Reihenfolge und mit möglicher Wiederholung auszuwählen (Variationen mit Wiederholung) 6^2 .

Wenn der Ergebnisraum größer wird (mehrere Würfe), so lassen sich die Ergebnisse nicht mehr in einer einzelnen Tabelle darstellen. Hier kann man zwar den Ansatz der *modularen Methode* verfolgen, der darin besteht, die 36 bisherigen Lösungen der Tab. 1 in einer zweiten Tabelle mit je 36 Zeilen und Spalten mit allen Konkenationen aufzulisten. Die quadratische Form der Tabelle führt uns dann zu $36^2 = 6^4$ Fällen und allgemein für Wörter der Länge k über einem Alphabet mit n Elementen zu n^k Fällen.

Die Darstellung mit Tabellen ist bei mehreren Würfeln nicht mehr praktikabel und eine Variation der Darstellung ist notwendig. Hier hilft uns ein fundamentales Konzept, welches die Informatik zur Auflistung von Objekten mit gewissen Eigenschaften liefert: *Baumdiagramme*. Insbesondere bieten sie den Vorteil, nicht mehr alle, sondern nur die uns interessierenden Objekte aufzulisten. In Abb. 2 sind lediglich alle günstigen Lösungen unserer Problemstellung abgebildet. Falls die Problemstellung geändert und zum Beispiel dreimal gewürfelt würde, so müsste der Baum lediglich um eine Stufe erweitert werden. Die *Baumtiefe* entspricht der Länge des Wortes.

(für die Augenzahlen der Würfe) modellieren und als sortierte Liste notieren:

12, 13, 14, ..., 45, 46, ..., 56, ..., 66 .

Die Lernenden sind hier mit zentralen Konzepten der Informatik konfrontiert: der *Darstellung*, der *Suche* und dem *Sortieren* von Daten. Man kann hier den Zusammenhang zum allgemeinen Begriff der digitalen Informationsdarstellung als Folge von Symbolen (hier Ziffern bzw. Augenzahlen der Würfel) aufzeigen. Die vorliegenden Zahlen sind eigentlich nur eine Folge von zwei verbundenen Ziffern (Elementarereignissen), nicht zu verwechseln mit der Augensumme. In der Informatik nennt man das ein *Wort* der Länge 2 über dem *Alphabet* {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Zurück zur Darstellung der Daten. Eine weit effizientere Variante, Objekte zu zählen, verwendet eine Tabelle (siehe Tab. 1). Mathematisch entspricht sie dem Konzept des *kartesischen Produkts* $A \times A$ der Menge aller möglichen Wurfereignisse $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Elemente der neuen Menge sind geordnete Paare (x, y) mit $x, y \in A$. Die günstigen Ergebnisse lassen sich in Tabellen besonders anschaulich darstellen und abzählen. Die Wahrscheinlichkeit als Quotient aller günstigen durch alle möglichen Ergebnisse beträgt

$$P(AZ1 < AZ2) = \frac{15}{36} .$$

Beispiel (Graphen als Abstraktion). Im folgenden Beispiel gehen wir näher auf den Prozess der *Abstraktion* ein. Im preussischen Königsberg des 18. Jahrhunderts führten sieben Brücken über den Fluss Pregel (siehe Abb. 3). Beim *Königsberger-Brücken-Problem* geht es um die Fragestellung, ob es einen Rundweg gibt, bei dem man jede der Brücken genau einmal überqueren kann.

Es handelt sich um ein topologisches Problem, bei dem es nicht auf die Lage der Brücken ankommt, sondern nur darauf, welche Brücke welche Stadt-

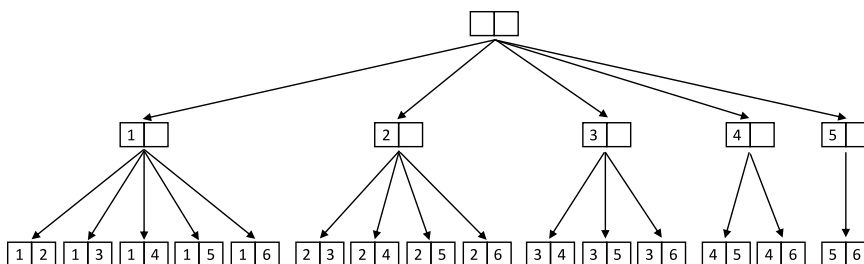


Abb. 2 Teillösungen im Baumdiagramm



Abb. 3 Königsberg und seine Brücken

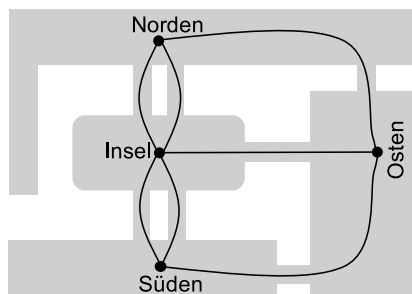


Abb. 4 Graph als Abstraktion der Brücken

teile verbindet. Um ein besseres Verständnis für die Problemstellung zu erlangen, abstrahieren wir die schriftlich und grafisch präsentierte Fragestellung, indem wir sie auf das Wesentliche reduzieren. Dazu modellieren wir den Rundgang als einen (Multi-) Graphen, wobei wir die einzelnen Stadtgebiete (oder Ufer) als *Knoten* und die Brücken als *Kanten* darstellen (siehe Abb. 4). Der *Grad* eines Knotens bezeichnet die Anzahl der Kanten, die in einem Knoten zusammenlaufen. In unserem Beispiel wäre dies die Anzahl der Brücken, durch die die Stadtteile miteinander verbunden sind.

Mithilfe der Abstraktion als Graph kann man nun das Problem kontextfrei und fokussiert auf die Fragestellung angehen. Damit lässt sich die gleiche Problemstellung auch allgemein lösen; egal, ob es sich bei den Kanten um Brücken, Straßen, Flüsse und bei den Knoten um Stadtteile, Personen oder andere Objekte handelt. Man erreicht mit der Abstraktion eine Vereinfachung und gute Veranschaulichung der Problemdarstellung und damit eine Reduktion der Komplexität.

Der Rundgang in Königsberg wird dann auf einen sogenannten *Eulerkreis* reduziert, der zu-

sammenhängend ist und bei dem jede Kante genau einmal besucht wird.

Durch Probieren stellt man schnell die Unlösbarkeit der Aufgabe fest. Das Problem wurde von Leonhard Euler für andere Stadtpläne bzw. Graphen verallgemeinert. „In einem zusammenhängenden Graphen existiert genau dann ein Eulerkreis, wenn alle Knoten geraden Grad besitzen.“ In unserem Beispiel haben offensichtlich alle Knoten einen ungeraden Grad.

Beispiel (Zahlen als Abstraktion). „Zählen“ ist eine der fundamentalen Handlungen unserer Zivilisation, wie frühe Funde von gekerbten Knochen aus dem Spätpaläolithikum (30.000 bis 20.000 Jahre v. Chr.) belegen. Durch das Einkerbten von Holz oder Knochen oder das Anlegen von Steinhäufchen konnten Gegenstände gezählt und ihre Anzahl festgehalten und sogar einfache Rechnungen ausgeführt werden [7]. Ein Hirte war damit in der Lage, den Bestand seiner Herde festzustellen, ohne über einen abstrakten Zahlenbegriff zu verfügen.

Der Übergang vom Zählen zum abstrakten *Zahlenbegriff* als Quantifizierung dauerte allerdings sehr lange. Die Entwicklung von Handwerk und Handel trug wesentlich dazu bei. Besonders hervorzuheben ist das Niveau der Mathematik in Mesopotamien, ca. 5 000 v. Chr. Wir sehen hier den *Ursprung der Digitalisierung*, denn schon damals wurde eine eigene Schrift als Folge von Symbolen und ein eigenes Zahlensystem entwickelt und verwendet. Zahlen waren also ein grundlegendes Mittel zur Beschreibung des (damaligen) Lebens und zur langfristigen Speicherung der Steuereinträge und Buchhaltung des Landes. Zahlen standen von Anfang an im Fokus der symbolischen Darstellung und Schriftentwicklung. Die Entwicklung von Symbolen zur Darstellung von Zahlen und anderen Objekten ist ein Abstraktionsschritt, mit dem man die Welt beschreiben und modellieren kann.

Auf den Informatikunterricht trifft dies zu, weil es zu den Grundkompetenzen von Informatikerinnen und Informatikern gehört, unterschiedliche Objekte, Beziehungen und Informationen als Folge von Symbolen darzustellen, um sie abspeichern und bei Bedarf mit dem Computer bearbeiten zu können [5]. Als Informatikerin bzw. Informatiker achtet man hierbei darauf, dass die digitale Informationsdarstellung eine effiziente Durchführung der gewünschten Berechnungen (der

Datenverarbeitung) ermöglicht. Die Entwicklung der Zahlendarstellung ist ein schönes Beispiel. Die adischen Systeme der Zahlendarstellung haben sich gegen die Konkurrenz durchgesetzt, weil sie eine effiziente Durchführung der Multiplikation ermöglichen.

Beispiel (Kombinatorik). Die folgende Aufgabe stammt aus einer für Primarschüler (6. Schuljahr) obligatorischen Mathematik-Aufnahmeprüfung an das Gymnasium Glarus aus dem Jahr 2008. Es handelt sich um eine für die Lernenden ungewohnte und anspruchsvolle Problemstellung. Je ein Drittel der Prüflinge hat bei der Aufgabe die volle oder die halbe Punktzahl oder sogar keinen Punkt erzielt. Die unterschiedlichen Problemstrategien wurden sehr gut sichtbar und zeigten auch die Fehlvorstellungen bei der rechnerischen Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten. Die Darstellung der Situation als abstrahierter Graph machte keinerlei Probleme.

Abbildung 5 zeigt alle möglichen Skiabfahrten von der Bergstation A zur Talstation D eines Skigebiets, dargestellt als gerichteter Multigraph.

- Wie viele verschiedene Abfahrtsrouten gibt es, welche von A über B nach D verlaufen?
- Fridolin möchte auf möglichst vielen verschiedenen Routen von A nach D fahren. Wie viele Möglichkeiten hat er?

Der am häufigsten aufgetretene Fehler bei den Schülerlösungen war das falsche Berechnen der möglichen Routen zwischen zwei Knoten. Hier wurde einfach gezählt und aufsummiert. Zwischen A und D über B wurden $2 + 3$ anstatt $2 \cdot 3$ Wege berechnet. Eine systematische Darstellung als Baumdiagramm wie in Abb. 6 schafft Klarheit und hilft beim Verständnis der *Produktregel*. Die Anzahl möglicher Wege von A nach D ist $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 16$.

In höheren Klassen (ab dem 10. Schuljahr) kann man im Rahmen des Programmierunterrichts überlegen, wie sich eine solche Problemstellung mit dem Computer lösen lässt. Wie kann man einen Graphen mathematisch darstellen und in einem Programm abspeichern? Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten E , wobei die Knoten durchgehend von 1 bis n nummeriert sind. Eine Möglichkeit, einen Graphen mathematisch darzustellen, ist die Adja-

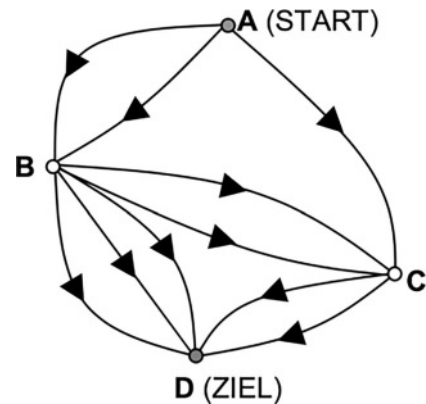


Abb. 5 Skigebiet als Multigraph

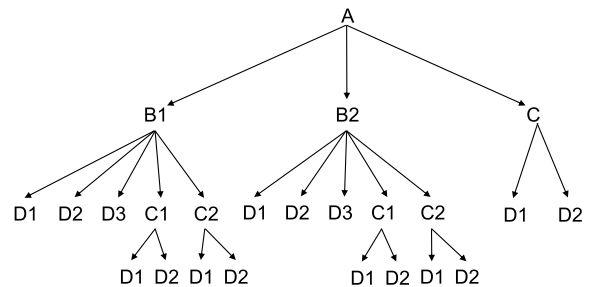


Abb. 6 Skipisten als Baum

zenzmatrix (Nachbarschaftsmatrix), deren Einträge a_{ij} der Anzahl der Kanten vom i -ten Knoten zum j -ten Knoten entsprechen. In unserem Beispiel entspricht $a_{12} = |(1, 2)| = |(A, B)| = 2$ der Anzahl der Kanten von A nach B. Die ganze Matrix für das Skigebiet ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier kann man im Mathematikunterricht an die *Matrizenrechnung* anknüpfen, zum Beispiel bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten mit stochastischen Matrizen für Markov-Ketten.

Eine weitere Speichermöglichkeit ist die Adjazenzliste, in der die Nachbarknoten jedes Knotens gespeichert werden, also $liste = [[1, 1, 2], [3, 3, 3, 2, 2], [3, 3]]$.

Im zweiten Teil des Artikels werden wir Beispiele für die oben genannten Heuristiken *Varia-*

tion der Problemstellung und Modularisierung aufzeigen.

Literatur

1. Aho AV (2012) Computation and computational thinking. *Comput J* 55(7): 832–835
2. Devlin K (2012) *Introduction to Mathematical Thinking*. K. Devlin, Petaluma
3. Heinze A (2007) Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. *Journal der Mathematik-Didaktik* 3–30
4. Hromkovič J (2018) *Einfach Informatik – Strategien*. Klett & Balmer Verlag, Baar
5. Hromkovič J (2018) *Einfach Informatik – Daten darstellen, verschlüsseln, komprimieren*. Klett & Balmer Verlag, Baar
6. Hromkovič J, Lacher R (2017) The Computer Science Way of Thinking in Human History and Consequences for the Design of Computer Science Curricula. In: *Proc. of ISSEP 2017, LNCS 10696*. Springer, pp 3–11
7. Ifrah G (1991) *Universalgeschichte der Zahlen*. Campus Verlag, Frankfurt New York
8. Pólya G (1949) *Schule des Denkens*. A. Francke, Bern
9. Stern E, Hardy I (2005) Anspruchsvolle Lernaufgaben. *Handbuch Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik*, S 396–402