

# Ebener Spannungszustand im Betonbau

## Grundlagen und Anwendungen

**Report**

**Author(s):**

Seelhofer, Hans

**Publication date:**

2009-11

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006060237>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

**Originally published in:**

IBK Bericht 320

# **Ebener Spannungszustand im Betonbau: Grundlagen und Anwendungen**

Hans Seelhofer

Institut für Baustatik und Konstruktion  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich  
November 2009



## Vorwort

Die vorliegende Dissertation stellt den Abschluss einer etwas über sechs Jahre dauernden Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Professor Dr. Peter Marti am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich dar, während der ich mich im Rahmen der Lehrtätigkeit sowie der Mitarbeit bei zahlreichen Gutachten, Expertisen und Beratungsmandaten mit den verschiedensten Fragestellungen des Betonbaus auseinandersetzen durfte. Das Konzept der vorliegenden Arbeit entwickelte sich sukzessive aus dieser intensiven Auseinandersetzung mit dem Betonbau und der Baustatik als Grundlage der Modellbildung im konstruktiven Ingenieurbau.

Bei der Modellierung von Stahlbetontragwerken kommt der Beschreibung des Verhaltens von Stahlbeton im ebenen Spannungszustand eine besondere Bedeutung zu. Denn diese liefert die Grundlage der Modellierung von Trägerstegen, Trägern unter Torsion und kombinierter Beanspruchung, Scheiben, Platten, Faltwerken und Schalen – also der meisten Anwendungen der Betonbauweise. Ausgehend von dieser Tatsache wird in der vorliegenden Arbeit das Verhalten des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand ins Zentrum der Betrachtungen gestellt, um darauf basierend Elemente ebener Flächentragwerke zu modellieren.

Neben der eigentlichen Thematik der Arbeit werden ihrer Bedeutung im konstruktiven Ingenieurbau entsprechend die Grundlagen der Baustatik als einheitliche widerspruchsfreie theoretische Basis der Modellierung sowie das Werkstoff- und Verbundverhalten relativ eingehend dargestellt. Verschiedene generelle Fragen zur Modellbildung im Betonbau, welche sich im Rahmen der Bearbeitung von Gutachten, Expertisen und Beratungsmandaten immer wieder aufdrängten, werden in einem separaten Kapitel aufgegriffen und einer Diskussion unterworfen. In diesem Kapitel, welches den Abschluss der Grundlagen bildet und zur eigentlichen Thematik überleitet, werden ferner als wichtig erachtete übergeordnete Tatsachen hervorgehoben und der Kontext hergestellt, in welchem die diskutierten und (weiter-)entwickelten Modellvorstellungen zu verstehen sind..

Mein besonderer Dank gilt Professor Dr. Peter Marti für die Ermöglichung dieser Dissertation und insbesondere für die zahlreichen äusserst anregenden Diskussionen, welche ich während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter mir ihm führen durfte. Ebenfalls danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. Johann Kollegger für die Übernahme des Korreferats sowie die Gastfreundschaft bei meinem Besuch der Technischen Universität Wien. Allen derzeitigen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik und Konstruktion möchte ich für das angenehme Arbeitsumfeld sowie die zahlreichen anregenden Fachdiskussionen danken.

Schliesslich möchte ich mich bei meiner Frau Birgit für ihr entgegengebrachtes Verständnis und ihren Rückhalt während des Entstehens dieser Arbeit bedanken.

Zürich, im November 2009

Hans Seelhofer



## Kurzfassung

Diese Abhandlung leistet einen Beitrag zur Modellierung des Tragverhaltens von Stahlbeton im ebenen Spannungszustand und deren Anwendung auf Elemente ebener Stahlbeton-Flächentragwerke. Die zur Erfassung der verschiedenen Aspekte des Tragverhaltens diskutierten und (weiter-)entwickelten Modelle beruhen auf klaren baustatischen Grundlagen und weisen im Hinblick auf die praktische Anwendung verschiedene Detaillierungsgrade auf. Die betrachteten Modelle dienen als Grundlage für die Bemessung bzw. Beurteilung des Tragwiderstands sowie die Bestimmung der Verformungen von (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereichen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke.

Der erste Teil der Abhandlung umfasst die wichtigsten Grundlagen und Konzepte der Baustatik, relevante Aspekte des Werkstoff- und Verbundverhaltens einschliesslich deren Modellierung sowie einige generelle Überlegungen zur Modellbildung im Betonbau. Bei der Darstellung der baustatischen Zusammenhänge wird die Dualität der mit statischen bzw. kinematischen Grössen formulierten Beziehungen sowohl in der Elastizitätstheorie als auch in der Plastizitätstheorie ins Zentrum der Betrachtungen gerückt, um darauf gestützt insbesondere Vereinfachungen und Näherungsverfahren zu diskutieren.

Im zweiten Teil der Abhandlung werden Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbeton im homogenen ebenen Spannungszustand behandelt. Im Rahmen der Behandlung plastischer Modelle werden Fliessbedingungen für zwei (und drei) schiefwinklige Bewehrungslagen formuliert und die entsprechenden Fliessflächen eingehend diskutiert. Unter der Prämisse, dass alle Bewehrungslagen beim Erreichen der Traglast auf Zug fließen, werden darauf basierend Bemessungsbeziehungen für zwei (und drei) schiefwinklige Bewehrungslagen abgeleitet. Zur Beschreibung der gesamten Last-Verformungscharakteristiken werden das klassische Druckfeldmodell und das Gerissene Scheibenmodell herangezogen, wobei beide Modelle zur Behandlung von beliebigen schiefwinkligen Bewehrungslagen weiterentwickelt werden. Ferner wird das Gerissene Scheibenmodell angepasst, um in der ursprünglichen Fassung auftretende Inkonsistenzen zu beseitigen. Basierend auf den beiden Modellen wird anschliessend das Festlegen der für die plastischen Modelle erforderlichen effektiven Betondruckfestigkeit erörtert. Ausserdem wird eine Beschreibung der schwind- und kriechnbedingten Umlagerungen der inneren Kräfte vorgestellt.

Im dritten Teil der Abhandlung werden Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke behandelt. Dabei wird in jeder zur Mittelebene parallelen Schicht von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen, womit sich die Modelle des zweiten Teils direkt übertragen lassen; Querkräfte werden als verallgemeinerte Reaktionen behandelt. Bei einer plastischen Modellierung gelingt es nicht, auf allen sechs betrachteten verallgemeinerten Verzerrungen beruhende, allgemein gültige Fliessbedingungen zu formulieren. Dementsprechend werden auf Fliessgelenklinien und verallgemeinerten Fliessgelenklinien mit reduzierten kinematischen Freiheitsgraden beruhende Fliessbedingungen behandelt. Zur Bemessung von allgemein beanspruchten Elementen ebener Flächentragwerke wird eine Weiterentwicklung des Sandwichmodells vorgelegt. Für die Fälle einer reinen Drillmomentenbeanspruchung sowie einer Beanspruchung durch Membranschubkräfte und Biegemomente (jeweils bezüglich der Richtungen einer orthogonalen Bewehrung) werden darauf basierend Bemessungsbeziehungen und Beziehungen zur Ermittlung eines unteren Grenzwerts der Traglast angegeben. Auf der Grundlage des klassischen Druckfeldmodells bzw. des (angepassten) Gerissenen Scheibenmodells wird ein Modell zur Beschreibung der gesamten Last-Verformungsbeziehungen vorgestellt, bei welchem die Elementdicke in Schichten mit konstanten Betonspannungszuständen unterteilt wird. Anhand eines Vergleichs mit Versuchsergebnissen werden die verschiedenen im dritten Teil behandelten Modellvorstellungen abschliessend eingehend diskutiert.

Der vierte Teil umfasst eine Zusammenfassung der Abhandlung, einige Folgerungen sowie Anregungen für weiterführende Arbeiten.

## Abstract

This thesis contributes towards the modelling of the structural response of reinforced concrete in the plane stress state and its application to reinforced concrete plate elements. The new and extended models, used to discuss the various aspects of the structural behaviour, are based on the basic principles of mechanics and feature levels of detail corresponding to the practical application. These models provide the basis for the design, evaluation and deformation prediction within continuous regions (with respect to geometry and loading) of reinforced concrete plates.

The first part of the thesis includes the basic principles and concepts of structural analysis, the relevant aspects and modelling of the material and bond behaviour as well as some considerations concerning the modelling of structural concrete in general. The duality of the basic equations of the theory of elasticity and plasticity formulated with static and kinematic variables, respectively, dominates the discussion of the general context of structural analysis and gives the basis for the subsequently mentioned simplifications and approximation methods.

In the second part of the thesis, models for describing the structural behaviour of reinforced concrete subjected to a uniform plane stress state are presented. Within the scope of the discussion concerning plastic modelling, the yield conditions for two (and three) skew reinforcement layers are formulated and the corresponding yield surfaces are discussed in detail. The dimensioning relations for two (and three) skew reinforcement layers are deduced on the assumption that all reinforcement layers have reached tensile yielding at ultimate load. The global load-deformation behaviour is described using the traditional Compression Field Model and the Cracked Membrane Model that are both extended to account for skew reinforcement layers. The Cracked Membrane Model is additionally adapted in order to eliminate inconsistencies present in the original version. Both models are used to determine the effective concrete compressive strength required for plastic modelling. In addition, a description of shrinkage and creep related internal load redistribution is given.

The third part of the thesis deals with models for describing the structural behaviour of reinforced concrete plate elements. Plane stress states are assumed in all layers parallel to the mid-plane, allowing the application of the models discussed in the second part of the thesis. Shear forces are treated as generalised reactions. Using the theory of plasticity it is not possible to formulate general yield conditions that consider all six general strains. Therefore, yield conditions derived from yield-lines and generalised yield-lines with a reduced degree of freedom are treated. An extension of the sandwich model is presented for the dimensioning of elements subjected to general loading. Resulting equations for design and a lower-bound value of the ultimate load are given for the cases of pure torsion as well as combined bending and membrane shear (both with respect to the axes of an orthogonal reinforcement). A model for the description of the complete load-deformation relationship, which is based on the traditional Compression Field Model and the (extended) Cracked Membrane Model, is presented, whereby the element thickness is divided into layers with uniform concrete stress states. Subsequently, test data is used to thoroughly discuss the models presented in this part of the thesis.

The fourth part summarises the thesis and includes some conclusions and suggestions for further work.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Hintergrund	1
1.2	Zielsetzung	2
1.3	Übersicht	2
1.4	Abgrenzung	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Baustatik</b>	<b>5</b>
2.1	Einleitung	5
2.1.1	Übersicht und Abgrenzung	5
2.1.2	Allgemeine Betrachtungen	6
2.2	Kinematische Beziehungen	7
2.2.1	Allgemeine Beziehungen	7
2.2.2	Ebener Verzerrungszustand	8
2.3	Statische Beziehungen	9
2.3.1	Allgemeine Beziehungen	9
2.3.2	Ebener Spannungszustand	10
2.4	Prinzip der virtuellen Arbeiten	11
2.4.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	12
2.4.2	Prinzip der virtuellen Kräfte	13
2.4.3	Bemerkungen zum Prinzip der virtuellen Arbeiten	14
2.5	Elastizitätstheorie	15
2.5.1	Lokales Verhalten	15
2.5.2	Systemverhalten	20
2.5.3	Vereinfachungen und Näherungsverfahren	26
2.6	Plastizitätstheorie	33
2.6.1	Allgemeines	33
2.6.2	Fliessbedingungen und plastisches Potential	33
2.6.3	Modifizierte Fliessbedingung von Coulomb	36
2.6.4	Systemverhalten – Vereinfachungen und Näherungen	40
2.6.5	Linearkombinationen von Fliessbedingungen und -flächen	44
2.6.6	Traglastverfahren	45
2.6.7	Diskontinuitäten	48
2.7	Zusammenfassung	50
<b>3</b>	<b>Werkstoff- und Verbundverhalten</b>	<b>53</b>
3.1	Einleitung	53
3.2	Bewehrungsstahl	53
3.2.1	Betonstahl	53
3.2.2	Spannstahl	54
3.3	Beton	54
3.3.1	Einachsige Druckbeanspruchung	54
3.3.2	Einachsige Zugbeanspruchung	57
3.3.3	Ebener Spannungszustand	58
3.3.4	Räumlicher Spannungszustand	59
3.3.5	Rissverzahnung	60
3.3.6	Zeitabhängiges Verhalten	62



3.4	Verbundverhalten	68
3.4.1	Verbund	68
3.4.2	Zugversteifung	71
3.4.3	Betondruckfestigkeit beim ebenen Spannungszustand bewehrter Betonbauteile	75
3.4.4	Schubübertrag im gerissenen Stahlbeton	77
3.5	Zusammenfassung	78
<b>4</b>	<b>Modellbildung</b>	<b>81</b>
4.1	Einleitung	81
4.2	Allgemeine Betrachtungen	81
4.2.1	Allgemeines	81
4.2.2	Tragverhalten von Stahlbeton	82
4.2.3	Tragsicherheit und plastisches Verformungsvermögen	83
4.3	Modelle	84
4.3.1	Wissenschaftliche Modelle	84
4.3.2	Modelle im konstruktiven Ingenieurbau	84
4.4	Auf dem Traglastverfahren basierende Modelle	87
4.4.1	Allgemeines	87
4.4.2	Bemessung	88
4.4.3	Überprüfung	92
4.5	Auf der Elastizitätstheorie basierende Modelle	92
4.6	Zusammenfassung	93
<b>5</b>	<b>Ebener Spannungszustand</b>	<b>95</b>
5.1	Einleitung	95
5.1.2	Definitionen und übergeordnete Voraussetzungen und Idealisierungen	95
5.2	Plastische Modellierung	98
5.2.1	Voraussetzungen und Idealisierungen	98
5.2.2	Fliessbedingungen	98
5.2.3	Bemessung	106
5.2.4	Äquivalente orthogonale Ersatzbewehrung	110
5.3	Ungerissenes Verhalten	112
5.4	Gerissenes Verhalten	115
5.4.1	Allgemeine Betrachtungen	115
5.4.2	Klassisches Druckfeldmodell	117
5.4.3	Gerissenes Scheibenmodell	121
5.4.4	Tragwiderstand und Bemessung	126
5.5	Diskussion	132
5.5.1	Beispiel	132
5.5.2	Experimentelle Verifikation	137
5.5.3	Schlussbetrachtungen	138
5.6	Zusammenfassung	138
<b>6</b>	<b>Elemente ebener Stahlbeton-Flächentragwerke</b>	<b>141</b>
6.1	Einleitung	141
6.2	Kinematische Beziehungen	141
6.2.1	Verallgemeinerten Verzerrungen	141
6.2.2	Transformationen der verallgemeinerten Verzerrungen	143

6.3	Statische Beziehungen	144
6.3.1	Verallgemeinerte Spannungen und Reaktionen	144
6.3.2	Transformationen der verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen	144
6.3.3	Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen	146
6.4	Plastische Modellierung	148
6.4.1	Allgemeines	148
6.4.2	Fliessgelenklinien – Normalmomenten-Fliessbedingungen	150
6.4.3	Verallgemeinerte Fliessgelenklinien	157
6.4.4	Sandwichmodell	164
6.5	Ungerissenes Verhalten	174
6.6	Gerissenes Verhalten	175
6.7	Vergleich mit experimentellen Ergebnisse	178
6.7.1	Reine Drillmomentenbeanspruchung $m_{xy}$	178
6.7.2	Beanspruchung durch Biegemomente $m_x$ und Membrankräfte $n_{xy}$	180
6.8	Zusammenfassung	184
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Folgerungen</b>	<b>187</b>
7.1	Zusammenfassung	187
7.2	Folgerungen	191
7.3	Ausblick	192
<b>Anhang</b>		
A	Beispiel zum Verfahren von Rayleigh-Ritz	193
B	Fliessbedingungen für drei Bewehrungslagen	199
C	Fliessflächenabschnitte bei zwei schiefen Bewehrungslagen	203
D	Kriechen und Schwinden des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand	207
Literatur		210
Bezeichnungen		221
Sachverzeichnis		235



# 1 Einleitung

## 1.1 Hintergrund

Ebene Flächentragwerke bilden die am weitesten verbreitete Anwendung des Betonbaus. Je nachdem, ob sie vorwiegend durch Membrankräfte oder Biege- und Drillmomente sowie Querkräfte beansprucht werden, spricht man dabei von Scheiben oder Platten; oft prägen aber beide Beanspruchungsarten das Tragverhalten gleichermaßen. Da ebene Flächentragwerke gegenüber Beanspruchungen in ihrer Ebene einen deutlich grösseren Tragwiderstand und eine erheblich grössere Steifigkeit aufweisen als gegen senkrecht zu ihrer Ebene wirkende Beanspruchungen, ist der Ingenieur beim Entwurf von Flächentragwerken stets bemüht, ein globales Tragsystem zu entwickeln, welches die Beanspruchung vorwiegend über Membrankräfte abträgt, während Biege- und Drillmomente sowie Querkräfte lokal die Einleitung der Beanspruchung in das globale Tragsystem sicherstellen. Die systematische Anwendung dieses Konstruktionsprinzips auf ebene Stahlbeton-Flächentragwerke geht auf Ehlers [39] zurück, während Craemer [34] für Konstruktionen, deren Entwurf auf diesem Prinzip beruht, den Ausdruck *Faltwerk* prägte. Im Zusammenhang mit aus Fachwerkscheiben gebildeten Stahlbrücken untersuchte Schwyzer [145] schon einige Jahre vorher erstmals systematisch das Tragverhalten derartiger Strukturen.

In Bild 1.1(a–c) sind typische Anwendung ebener Stahlbeton-Flächentragwerke dargestellt, welche kombiniert sowohl durch Membrankräfte als auch durch Biege- und Drillmomente sowie Querkräfte beansprucht werden. Bild 1.1(a) zeigt einen typischen Stahlbeton-Skelettbau, der sich aus Wänden, Decken und Stützen zusammensetzt. Die Wände, welche beim Kern zu einem Faltwerk zusammengefügt sind, übertragen neben den Eigen-, Auf- und Nutzlasten der Konstruktion insbesondere horizontal auf das Tragwerk wirkende Kräfte, wie sie bei einer Erdbeben- oder Windbeanspruchung auftreten, ins Fundament. Dementsprechend werden sie vorwiegend durch Membrannormal- und -schubkräfte beansprucht. Die Decken werden vorwiegend durch senkrecht zu ihrer Ebene wirkende Lasten beansprucht, übertragen aber auch horizontal wirkende Kräfte auf die Wände. Insbesondere die Decken der Untergeschosse erfahren oft zusätzlich eine beträchtliche Membrankraftbeanspruchung. Bei dem in Bild 1.1(a) dargestellten Kern, der bis zur Bodenplatte reicht, wird die Einspannung vorwiegend durch ein auf die Decke über dem ersten Untergeschoss und die Bodenplatte wirkendes Kräftepaar erzeugt, womit die beiden Platten einer beträchtlichen Membrankraftbeanspruchung unterworfen werden. Ausserdem entstehen bei Stahlbetonplatten im gerissenen Zustand aufgrund behinderter Verformung in der Mittelebene auch bei ausschliesslich senkrecht zur Mittelebene wirkenden Lasten Membrankräfte [16, 14], welche insbesondere bei entsprechenden Lagerungsbedingungen und geringen Bewehrungsgehalten das Tragverhalten massgeblich beeinflussen.

Als weiteres Beispiel ist in Bild 1.1(b) ein Ausschnitt aus einem Brückenoberbau mit Kastenquerschnitt dargestellt. Die Kragplatten erfahren infolge globaler Biege-, Normalkraft- und Torsionsbeanspruchung des Brückenträgers Membrannormalkräfte in Brückenlängsrichtung sowie Membranschubkräfte, wobei letztere ausserdem den Schubanschluss der Kragplatten an den Hohlkasten bewerkstelligen. Infolge senkrecht zur Mittelebene wirkender Lasten werden die Kragplatten ausserdem Biege- und Drillmomenten sowie Querkräften unterworfen. Die Trägerstege werden einerseits infolge der globalen Tragwirkung durch Membranschubkräfte und andererseits durch Querbiegemomente beansprucht. Ausgedehnte Faltwerke, die vor allem für Dachkonstruktionen eingesetzt werden (siehe beispielsweise Bild 1.1(c)), werden vorwiegend durch Membrankräfte beansprucht, während lokale Lasten über Biegung bis zu den Faltwerkkanten übertragen werden.

Ausser in lokal stark begrenzten Bereichen, in welchen konzentriert Kräfte senkrecht zu ihrer Ebene eingetragen werden, ist die Querkraftbeanspruchung von ebenen Stahlbeton-Flächentragwerken in der Regel gering, und es herrscht in jeder zur Mittelebene parallelen Schicht vorwiegend ein ebener Spannungszustand. Dementsprechend bildet dieser den Schlüssel für das Verständnis und die Modellierung des Tragverhaltens einzelner Elemente derartiger Tragsysteme. Dieselben physikalischen Gesetzmässigkeiten gelten näherungsweise auch für Stahlbeton-Schalentragwerke mit genügend grossen Hauptkrümmungsradien; siehe beispielsweise Bild 1.1(d).

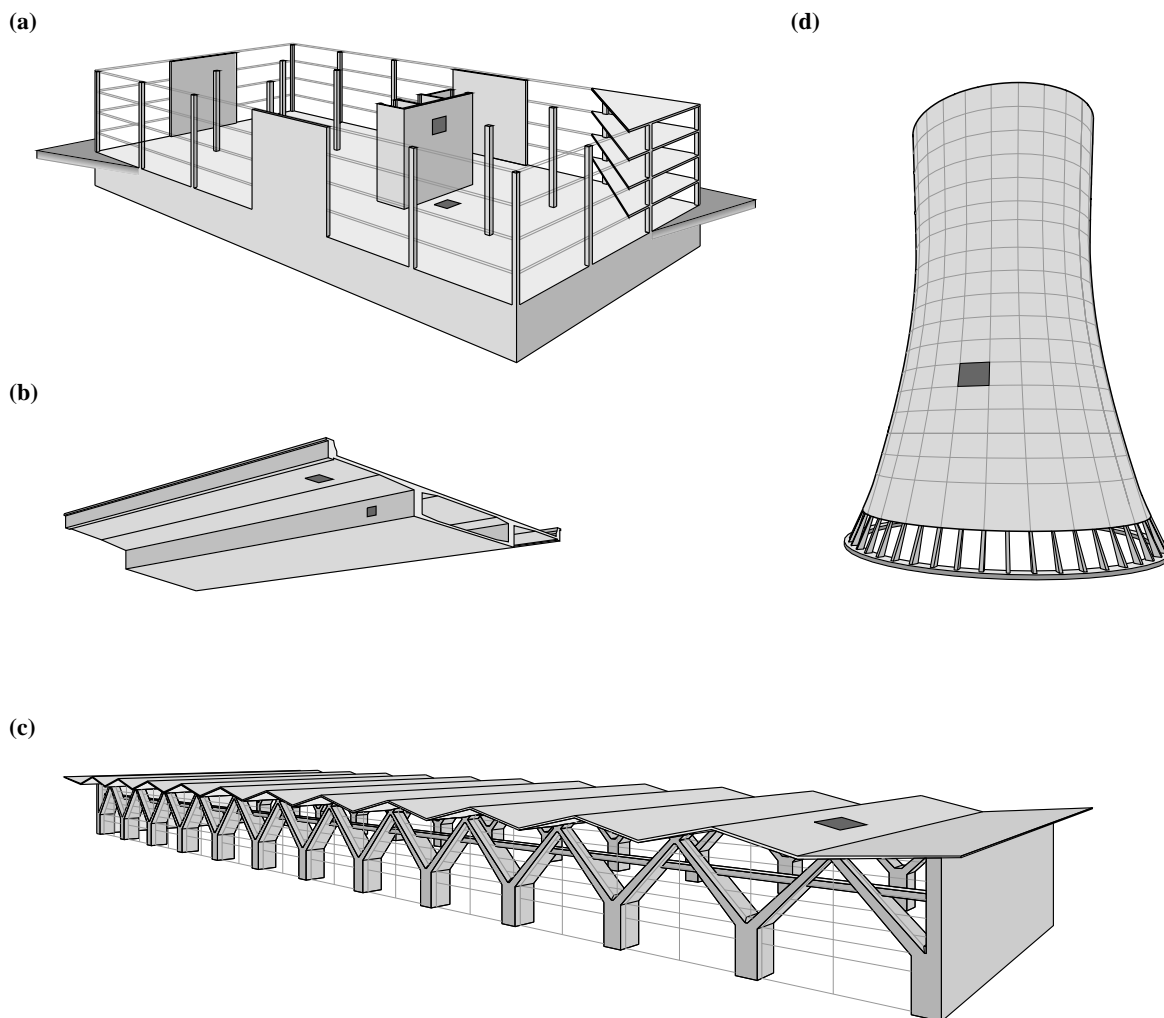
Im Zentrum der vorliegenden Abhandlung steht das Verhalten des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand, um darauf gestützt das Verhalten von Elementen ebener Flächentragwerke untersuchen zu können. Sowohl bei der Bemessung als auch bei der Überprüfung bestehender Tragwerke sind Fragen des Tragwiderstands von zentraler Bedeutung. Dementsprechend widmet sich die Abhandlung speziell diesem Aspekt des Tragverhaltens. Im Betonbau haben sich diesbezüglich für viele Fälle auf der Plastizitätstheorie beruhende Modelle als für die Praxis tauglich erwiesen, da diese die wesentlichen Parameter erfassen und auf einfachste Weise dem nichtlinearen Verhalten der Werkstoffe Rechnung tragen. Die Anwendbarkeit von plastischen Modellen bedingt allerdings, dass alle massgebenden Elemente eines Tragwerks ein ausreichendes Verformungsvermögen aufweisen, so dass sich die für das Erreichen der Traglast erforderlichen Verformungen tatsächlich einstellen können. Sichergestellt wird dies durch ein entsprechendes Tragwerkskonzept und eine geeignete konstruktive Durchbildung. Für die rechnerische Beurteilung der Anwendbarkeit plastischer Modelle werden verfeinerte Modellvorstellungen herangezogen, welche das nichtlineare Verhalten des Betons und Stahls sowie des Verbunds zwischen den beiden Bestandteilen des Stahlbetons geeignet erfassen. Darauf basierend lassen sich ausserdem die für eine plastische Modellierung erforderlichen effektiven Festigkeiten festlegen. Die vorliegende Arbeit knüpft hinsichtlich dieser Aspekte an frühere am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich im Rahmen des Forschungsprojekts „Verformungsvermögen von Massivbautragwerken“ verfasste Arbeiten an, insbesondere [149, 64]. Auf der Grundlage der verfeinerten Modelle lassen sich ausserdem auch Fragen der Verformungen, der Stabilität und der Ermüdungsfestigkeit von Betontragwerken behandeln, welche sich ausserhalb des Anwendungsbereichs der plastischen Modelle bewegen. Infolge der mit dem Einsatz von höher- und hochfesten Betonen einhergehenden zunehmenden Schlankheit der Tragwerke werden insbesondere die ersten beiden Aspekte künftig an Bedeutung gewinnen.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel der vorliegenden Abhandlung ist es, einen Beitrag zur Modellierung des Tragverhaltens von Stahlbeton im ebenen Spannungszustand und deren Anwendung auf Elemente ebener Stahlbeton-Flächentragwerke zu leisten. Die zur Erfassung der verschiedenen Aspekte des Tragverhaltens diskutierten und (weiter-)entwickelten Modelle sollen auf klaren baustatischen Grundlagen beruhen und im Hinblick auf die praktische Anwendung verschiedene Detaillierungsgrade aufweisen. Die betrachteten Modelle sollen als Grundlage für die Bemessung bzw. Beurteilung des Tragwiderstands sowie die Bestimmung der Verformungen von (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereichen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke dienen.

## 1.3 Übersicht

Im ersten Teil der Abhandlung (Kapitel 2 bis 4) werden wichtige Grundlagen und Konzepte der Baustatik, das Werkstoff- und Verbundverhalten sowie die Modellbildung im Betonbau generell thematisiert. Kapitel 2 umfasst eine Darstellung der grundlegenden Zusammenhänge der Baustatik; dabei werden die Dualität der mit kinematischen und statischen Grössen formulierten Beziehungen in der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie akzentuiert und darauf basierend die für den Ingenieur wichtigen Vereinfachungen und Näherungen vertieft behandelt. In Kapitel 3 werden das Verhalten des Betons und Bewehrungsstahls sowie deren Zusammenwirken anhand einfacher Modellvor-



**Bild 1.1** – Stahlbeton-Flächentragwerke: (a) typischer Stahlbetonskelettbau; (b) Ausschnitt einer Brücke mit Kastenträger; (c) Faltenwerk-Dachkonstruktion<sup>1</sup>; (d) Naturzugkühlturm<sup>2</sup>.

stellungen erörtert. Kapitel 4 enthält einige generelle Bemerkungen zur Modellbildung im Betonbau.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 5) werden Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbeton im homogenen ebenen Spannungszustand behandelt. Nach einer ausführlichen Erörterung der plastischen Modellierung, welche eine direkte Beurteilung des Tragwiderstands bzw. eine entsprechende Bemessung ermöglicht, werden das klassische Druckfeldmodell sowie das Gerissene Scheibenmodell eingehend diskutiert und für die Behandlung beliebiger schiefwinkliger Bewehrungslagen erweitert und präzisiert. Ferner werden die Umlagerungen der inneren Kräfte durch vorspann-, schwind- und kriechbedingte Eigenspannungen thematisiert.

Basierend auf den Modellen des zweiten Teils werden im dritten Teil der Abhandlung (Kapitel 6) Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke vorgestellt. Nach einer ausführlichen Behandlung der plastischen Modellierung werden auf dem klassischen Druckfeldmodell bzw. dem Gerissenen Scheibenmodell beruhende Modelle zur Beschreibung der gesamten Last-Verformungscharakteristiken entwickelt. Anhand eines Vergleichs mit Versuchsergebnissen werden die einzelnen Modellvorstellungen schliesslich eingehend diskutiert.

<sup>1</sup> Maschinenhaus des Kraftwerks Birsfelden (1954) (Arch.: Hofmann, H.; Ing.: Aegerter, A. [50])

<sup>2</sup> Naturzugkühlturm des Braunkohlekraftwerks Niederaussen (D) (1999–2001) (Ing.: Krätzig und Partner [22, 21])

Im vierten Teil (Kapitel 7) werden der Inhalt der Abhandlung zusammengefasst und einige Folgerungen abgeleitet. Einige Anregungen für weiterführende Arbeiten bilden den Abschluss der Abhandlung.

## **1.4 Abgrenzung**

Die vorliegende Abhandlung beschränkt sich auf die Betrachtung von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke konstanter Dicke. Das Tragverhalten gevouteter oder gekrümmter Elemente sowie ganzer Tragsysteme ist nicht Gegenstand der Abhandlung. Es werden durchwegs (infinitesimal) kleine Verformungen vorausgesetzt, so dass die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert werden dürfen (Theorie 1. Ordnung). Ausserdem wird stets von einer monotonen (quasi) statischen Belastung ausgegangen; dynamische und zyklische Beanspruchungen werden nicht betrachtet.

In der vorliegenden Abhandlung wird stets eine ausreichende Mindestbewehrung vorausgesetzt, welche ein Versagen des Stahlbetons bei der Erstrissbildung ausschliesst.

Abmessungen und Werkstoffparameter werden als deterministische Grössen behandelt; die Berücksichtigung der entsprechenden Unschärfen ist nicht Gegenstand der Abhandlung.

## 2 Grundlagen der Baustatik

### 2.1 Einleitung

#### 2.1.1 Übersicht und Abgrenzung

Im vorliegenden Kapitel werden einige wichtige Grundlagen und Konzepte der *Baustatik*<sup>1</sup> erläutert. Die für diese Abhandlung relevanten Aspekte werden damit in einem etwas erweiterten Gesamtzusammenhang dargestellt.

Einer energetischen Betrachtungsweise folgend wird das Prinzip der virtuellen Arbeiten ins Zentrum der Abhandlung gestellt. Ausgehend von dessen dualer Formulierung als Prinzip der virtuellen Verschiebungen und als Prinzip der virtuellen Kräfte wird die Dualität der mit statischen bzw. kinematischen Grössen formulierten Beziehungen sowohl in der Elastizitätstheorie als auch in der Plastizitätstheorie hervorgehoben. Einen weiteren Schwerpunkt bilden die aus der Sicht des Ingenieurs äusserst wertvollen Vereinfachungen und Näherungsverfahren, welche auf kinematischen Hypothesen fussen, wobei kinematische Bindungen zusätzlich eingeführt oder gelöst, und somit die kinematischen oder statischen Freiheitsgrade eines Systems reduziert werden. Schliesslich dient dieses Kapitel der Definition einiger Fachausdrücke.

Es wird vorausgesetzt, dass sich die kinematischen und statischen Grössen derart langsam ändern, dass die d'Alembert'schen Trägheitskräfte resp. die kinetische Energie vernachlässigt werden können. Die Verschiebungen seien derart klein, dass sich die Geometrie des Systems nicht um mehr als Grössen zweiter Ordnung verändert; Gleichgewichtsbedingungen lassen sich unter dieser Voraussetzung in der unverformten Lage des Systems formulieren. Die Diskussion der Stoffbeziehungen beschränkt sich auf die Grundkonzepte; für den Beton und die Bewehrung adäquate Idealisierungen werden im Kapitel 3 dargelegt. Auf zeitabhängiges Werkstoffverhalten wird im vorliegenden Kapitel nicht eingegangen; eine spezifisch auf den Beton zugeschnittene Betrachtungsweise erfolgt ebenfalls im Kapitel 3. Auf Fragen der Modellbildung im Allgemeinen und beim Betonbau im Speziellen wird im Kapitel 4 eingetreten.

Nach einer Zusammenstellung der grundlegenden kinematischen (Kapitel 2.2) und statischen (Kapitel 2.3) Beziehungen werden ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeiten (Kapitel 2.4) die wesentlichen Aspekte der Elastizitätstheorie (Kapitel 2.5) und der Plastizitätstheorie (Kapitel 2.6) behandelt.

Zu Gunsten möglichst übersichtlicher mathematischer Beziehungen wird nachfolgend die Einstein'sche Summiervereinbarung verwendet, wonach über den Wertevorrat aller in einem Term

---

<sup>1</sup> Die *Baustatik* ist ein nach den besonderen Bedürfnissen des Bauingenieurs gestaltetes Teilgebiet der Festkörper-Kontinuumsmechanik. Im Gegensatz zu dieser sind in der Baustatik meist nicht der vollständige Spannungs- und Verschiebungszustand von Interesse; Antworten auf die für die praktische Anwendung relevanten Aspekte davon genügen in der Regel. Der besondere Charakter der Baustatik zeigt sich ferner in speziell entwickelten, für die numerische Lösung im Einzelfall geeigneten Methoden [96]. Dieser Definition folgend kann die Baustatik im Gegensatz zur *Statik* als Teilgebiet der Mechanik, welche lediglich die an einem (materiellen) System wirkenden Kräfte (bei ruhenden Systemen allenfalls ergänzt durch die Gleichgewichtsaussage der *Kinetik*) untersucht [172], auch Fragen der Tragwerksdynamik umfassen. In diesem Sinn kann der historisch geprägte Ausdruck „Baustatik“ durchaus synonym mit dem moderneren Ausdruck „*Strukturmechanik*“ verwendet werden. Der in Anlehnung an den englischen Ausdruck „structural analysis“ verwendete Ausdruck „Tragwerksanalyse“ greift indes zu kurz, denn die Baustatik hat als Grundlage des Entwurfs sowie der Bemessung und konstruktiven Durchbildung von Tragstrukturen durchaus auch einen synthetischen Charakter.



doppelt vorkommender stummer Indizes summiert wird, ohne dass dies durch ein Summenzeichen ausgedrückt wird. Mit Komma abgetrennte Indizes stehen jeweils für partielle Ableitungen nach der entsprechenden Variablen.  $\delta_{kj}$  bezeichnet jeweils das Kroneckersymbol, d. h.  $\delta_{kj}=1$  für  $k=j$ , und  $\delta_{kj}=0$  für  $k \neq j$ .

### 2.1.2 Allgemeine Betrachtungen

Baustatische Fragestellungen werden in statischen und kinematischen Grössen formuliert. Deren Behandlung beruht auf drei Gruppen von Beziehungen. Die *statischen Beziehungen* betreffen ausschliesslich Kraftgrössen und umfassen die Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen. Die *kinematischen Beziehungen* betreffen nur Verformungsgrössen und umfassen die Verträglichkeitsbedingungen und kinematischen Randbedingungen. Die Stoffbeziehungen stellen schliesslich lokal den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen, also zwischen den statischen und kinematischen Grössen her; siehe Bild 2.1 Während die ersten beiden Beziehungsgruppen allgemein gültig sind, führen unterschiedliche Annahmen betreffend des Werkstoffverhaltens zu verschiedenen Stoffbeziehungen und damit zu verschiedenen Teilgebieten der Kontinuumsmechanik. Dabei unterscheidet man im Wesentlichen die Elastizitätstheorie von der Plastizitätstheorie, je nachdem ob die eingetragene Energie gespeichert oder dissipiert wird.

Sämtliche baustatische Verfahren lassen sich im Wesentlichen auf dem Prinzip der virtuellen Arbeiten begründen. Unter der Voraussetzung infinitesimal kleiner Verschiebungen lässt sich dieses als Prinzip der virtuellen Verschiebungen und als Prinzip der virtuellen Kräfte formulieren. Davon ausgehend gelangt man zu einer dualen Formulierung der Baustatik, indem entweder statische oder kinematische Grössen als primäre Unbekannte verwendet werden.

Das methodisch bedeutendste Werkzeug bei der Behandlung von Fragestellungen der Baustatik ist das *Schnittprinzip* nach Euler, wonach jeder mit einem fiktiven geschlossenen Schnitt aus einem im Gleichgewicht befindlichen und verträglich verformten System herausgetrennte *Schnittkörper* ebenfalls im Gleichgewicht und verträglich verformt ist. Der Schnittkörper stellt dabei seinerseits ein System mit anderer Systemabgrenzung dar. Mit Hilfe des *Reaktionsprinzips* gliedert man die Kraftgrössen dabei in Abhängigkeit von der Systemabgrenzung in innere und äussere, je nachdem, ob der Angriffspunkt ihrer Reaktionen innerhalb oder ausserhalb des Systems liegt. Durch die Schnittführung werden innere Kraftgrössen zu äusseren und somit erst einer Diskussion zugänglich gemacht. Insofern ist die geschickte Wahl eines Schnittkörpers für die Beantwortung baustatischer Fragestellung von entscheidender Bedeutung. Das den Schnittkörper und sämtliche an ihm wirkenden äusseren Kraftgrössen umfassende *Schnittkörperdiagramm* bildet die Basis der meisten baustatischen Untersuchungen.

Den Ausgangspunkt der anschliessenden Ausführungen zur Elastizitäts- und Plastizitätstheorie bildet ein aus dem jeweiligen idealisierten Kontinuum herausgetrennter Schnittkörper in Form eines infinitesimalen Quaders. Die an diesem wirkenden Spannungskomponenten stellen sodann äussere Kraftgrössen dar und können als solche einer eingehenden Diskussion unterzogen werden. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten werden die daraus gewonnen Einsichten anschliessend auf gesamte Systeme übertragen.

Die am System wirkenden Kraftgrössen lassen sich einerseits, wie erwähnt, in *äussere* und *innere* Kraftgrössen und andererseits in *eingeprägte*, also vorgeschriebene, Kraftgrössen und in mit den vorgeschriebenen Verschiebungen (kinematischen Bindungen) verknüpfte *Reaktionen*<sup>1</sup> unterteilen. Im Rahmen dieser Arbeit werden eingeprägte äussere Kraftgrössen ferner als *Lasten* bezeichnet.

---

<sup>1</sup> Diese sind von den Reaktionen im Sinne des Reaktionsprinzips zu unterscheiden. Da dies leicht möglich ist, wird der Ausdruck mit Rücksicht auf den üblichen Sprachgebrauch und den Mangel alternativer Ausdrücke für beide Kraftgrössen verwendet.

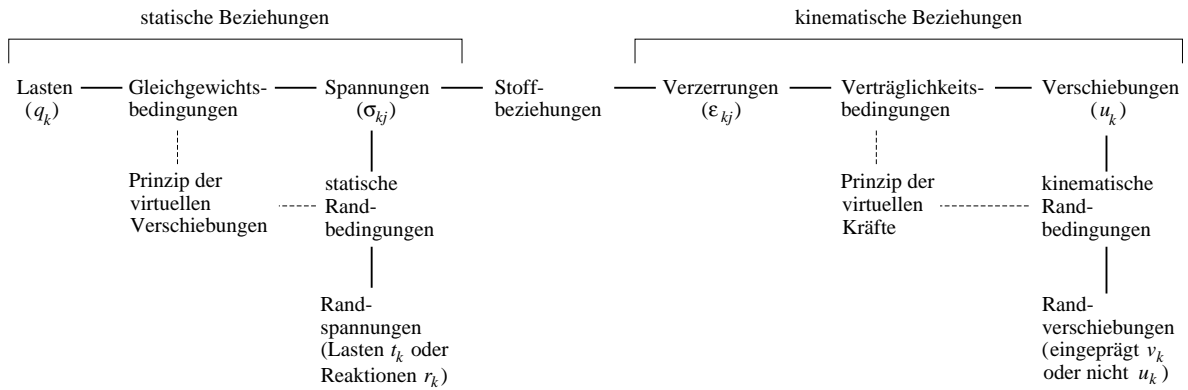


Bild 2.1 – Übersicht über die baustatischen Beziehungen.

## 2.2 Kinematische Beziehungen

### 2.2.1 Allgemeine Beziehungen

Die Lageänderung eines (materiellen) Systems bezüglich einer Referenzlage, der *Verschiebungszustand*, wird durch das *Verschiebungsfeld*  $u_k$  vollständig beschrieben, welches stetig und differenzierbar sei. Im Rahmen dieser Arbeit werden gegenüber den einzelnen Körpern kleine Verschiebungen und gegenüber eins kleine Verschiebungsableitungen,  $u_{k,j} \ll 1$ , vorausgesetzt. Mithin kann man von einem *infinitesimalen Verschiebungsfeld* ausgehen. Die Verformung eines Systems lässt sich in jedem Punkt durch den Verzerrungstensor  $\epsilon_{kj}$  beschreiben, welcher dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten  $u_{k,j}$  entspricht

$$\epsilon_{kj} = \epsilon_{jk} = (u_{k,j} + u_{j,k}) / 2 \tag{2.1}$$

Der antimetrische Teil  $(u_{k,j} - u_{j,k}) / 2$  des Verschiebungsgradienten beschreibt eine Starrkörperrotation. Der Verzerrungstensor charakterisiert demzufolge den *Verzerrungszustand* der unmittelbaren Umgebung eines Punktes eines Systems. Die Voraussetzung eines infinitesimalen Verschiebungsfelds führt zu einer Linearisierung der kinematischen Beziehungen. Damit wird die Superposition einzelner Verschiebungszustände möglich, und die Gleichgewichtsbedingungen dürfen am unverformten System formuliert werden (Theorie 1. Ordnung).

Wird an der Oberfläche eines Systems eine Verschiebung  $v_k$  vorgeschrieben, so verlangt die Verträglichkeit, dass die Verschiebung  $u_k$  an der betreffenden Stelle gleich dieser eingepägten Verschiebung  $v_k$  ist, was als *kinematische Randbedingung* bezeichnet wird. Genügt ein Verschiebungsfeld  $u_k$  in jedem Punkt eines Systems den Verträglichkeitsbedingungen (2.1) und am Rand den kinematischen Randbedingungen wird es in der Folge *kinematisch zulässig* genannt.

Bezüglich einer gegenüber der Basis  $e_{kj}$  gedrehten orthonormierten Basis  $e_{kj}'$  mit identischem Ursprung gilt die Transformationsbeziehung

$$\epsilon_{kj}' = \epsilon_{lm} n_{kl} n_{jm} \tag{2.2}$$

mit dem Richtungskosinus  $n_{kj}$  zwischen den Basisvektoren  $e_{lk}'$  und  $e_{lj}$ . Werden die Basisvektoren  $e_{kj}'$  wie üblich mit Hilfe der ursprünglichen Basis beschrieben, ist  $n_{kj} = e_{kj}'$ . Infolge der Symmetrie des Verzerrungstensors bilden dessen normierte Eigenvektoren, welche den Forderungen

$$(\epsilon_{kj} - \epsilon_m \delta_{kj}) n_{mj} = 0 \quad \text{und} \quad n_{mk} n_{mk} = 1 \tag{2.3}$$

genügen, eine orthonormierte Basis.  $n_{mj}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) entspricht den Richtungskosinussen der Hauptrichtungen des Verzerrungstensors, und dessen Eigenwerte, die Hauptverzerrungen  $\varepsilon_m$ , sind reell. Das homogene lineare Gleichungssystem (2.3) liefert bei verschwindender Determinante der Koeffizientenmatrix nichttriviale Lösungen für  $n_{mj}$ . Für die Bestimmung der Hauptverzerrungen resultiert die kubische Gleichung

$$\varepsilon_m^3 - \varepsilon_I \varepsilon_m^2 - \varepsilon_{II} \varepsilon_m - \varepsilon_{III} = 0 \quad (2.4)$$

mit den Grundinvarianten

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kj} \delta_{kj}, \quad \varepsilon_{II} = (\varepsilon_{kj} \varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kk} \varepsilon_{jj}) / 2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{III} = \det(\varepsilon_{kj}) \quad (2.5)$$

Einsetzen der Hauptverzerrungen  $\varepsilon_m$  in (2.3) liefert die zugehörigen Hauptrichtungen; die entsprechenden Einheitsvektoren betragen

$$n_{mj} = \frac{-h_{mk} h_{ml}}{\sqrt{h_{mj}^2 h_{mk}^2 + h_{mj}^2 h_{ml}^2 + h_{mk}^2 h_{ml}^2}} \quad \text{mit} \quad h_{mj} = (\varepsilon_{jj} - \varepsilon_m) \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{jk} \varepsilon_{jl} \quad (2.6)$$

wobei in beiden Beziehungen nicht über die Indizes zu summieren ist. Für einige Anwendungen ist es zweckmässig, den Verzerrungstensor in einen hydrostatischen Anteil  $\delta_{kj} \varepsilon_I / 3$  und einen deviatorischen Anteil  $e_{kj}$  zu zerlegen

$$\varepsilon_{kj} = \delta_{kj} \varepsilon_I / 3 + e_{kj} \quad (2.7)$$

Die erste Grundinvariante des Verzerrungstensors  $\varepsilon_I$  beschreibt die Volumenänderung (Dilatation) und  $e_{kj}$  die Gestaltänderung (Distorsion). Die Grundinvarianten des Verzerrungsdeviators  $e_{kj}$  lauten gemäss (2.5) und (2.7)

$$\begin{aligned} e_I &= 0, & e_{II} &= e_{kj} e_{kj} / 2 = \varepsilon_{II} + \varepsilon_I^2 / 3 & \text{und} \\ e_{III} &= e_{kj} e_{jl} e_{lk} / 3 = \varepsilon_{III} + e_{II} \varepsilon_I / 3 - \varepsilon_I^3 / 27 \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Ebener Verzerrungszustand

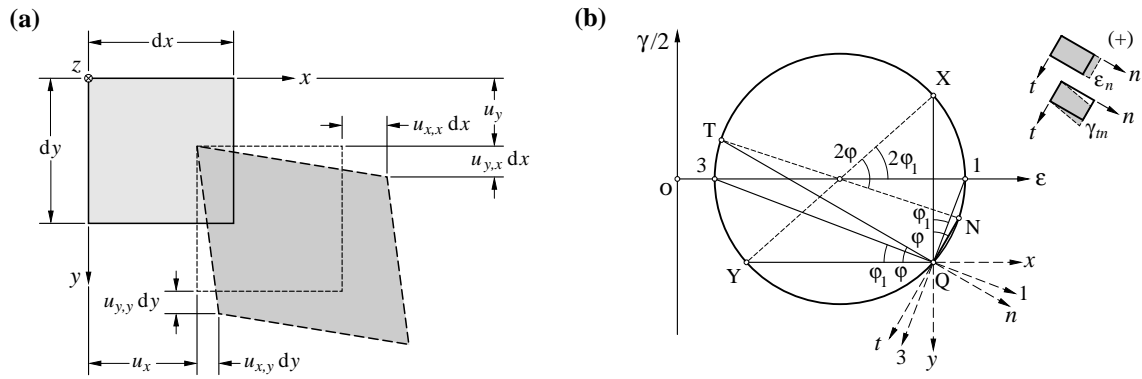
Verschwindet eine der Hauptverzerrungen,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_z = 0$ , so spricht man von einem *ebenen* Verzerrungszustand. Die Verträglichkeitsbeziehungen (2.1) liefern dann gemäss Bild 2.2(a)

$$\varepsilon_x = u_{x,x}, \quad \varepsilon_y = u_{y,y} \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx} = (u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (2.9)$$

Die Transformationsbeziehungen (2.2) lauten mit den Bezeichnungen in Bild 2.2(b) und  $n_{xx} = n_{yy} = \cos\varphi$ ,  $n_{xy} = -n_{yx} = \sin\varphi$ ,  $n_{xz} = n_{zx} = n_{yz} = n_{zy} = 0$  sowie  $n_{zz} = 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy} \sin\varphi \cos\varphi \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_x \sin^2\varphi + \varepsilon_y \cos^2\varphi - \gamma_{xy} \sin\varphi \cos\varphi \\ \gamma_{nt} &= \gamma_{tn} = 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin\varphi \cos\varphi + \gamma_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Unter Berücksichtigung von  $2\sin\varphi \cos\varphi = \sin 2\varphi$  und  $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$  lässt sich (2.10) wie folgt umformulieren



**Bild 2.2** – Ebener Verzerrungszustand: (a) Differenzielles Scheibenelement; (b) Mohr'scher Verzerrungskreis.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi \\
 \epsilon_t &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi \\
 \frac{\gamma_{nt}}{2} &= -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\varphi
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Somit können Transformationen graphisch mit Hilfe des Mohr'schen Verzerrungskreises gemäss Bild 2.2(b) vorgenommen werden. Dabei lassen sich die transformierten Verzerrungsbildpunkte anstatt durch eine Drehung um den Winkel  $2\varphi$  um das Zentrum des Mohr'schen Kreises auch durch eine Drehung um  $\varphi$  um den Pol  $Q$  gewinnen, siehe Bild 2.2(b). Für die Hauptverzerrungen resultiert aus (2.4) respektive dem Mohr'schen Verzerrungskreis

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}}{2} \tag{2.12}$$

und die zugehörigen Haupttrichtungen lassen sich mit dem Winkel  $\varphi_1$  gemäss Bild 2.2(b) beschreiben

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) \tag{2.13}$$

## 2.3 Statische Beziehungen

### 2.3.1 Allgemeine Beziehungen

Der *Spannungszustand* in einem Punkt eines Systems ist durch den bezüglich einer orthonormierten Basis  $e_{kj}$  formulierten Spannungstensor  $\sigma_{kj}$  vollständig bestimmt. Der erste Index bezeichnet dabei die Richtung und der zweite die Richtung der Flächennormalen der entsprechenden Spannungskomponente; in positiver Koordinatenrichtung seien die Komponenten positiv. Die an einem differentiellen Volumenelement mit entsprechenden Spannungskomponenten und der Volumenkraft  $q_k$  formulierten Gleichgewichtsbedingungen liefern

$$\sigma_{kj,j} + q_k = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{kj} = \sigma_{jk} \tag{2.14}$$

An der Oberfläche eines Systems verlangen die *statischen Randbedingungen*

$$t_k = \sigma_{kj} n_j \quad (2.15)$$

wobei  $t_k$  dort angreifende Spannungsvektoren und  $n_j$  die Einheitsnormalenvektoren der Oberfläche bezeichnen. Genügt ein Spannungszustand in jedem Punkt eines Systems den Gleichgewichtsbedingungen (2.14) und am Rand den statischen Randbedingungen (2.15), wird er nachfolgend *statisch zulässig* genannt. Als *Eigenspannungszustand* wird ein statisch zulässiger Spannungszustand eines beliebig abgegrenzten Systems bezeichnet, wenn an diesem keine Lasten wirken; der Ausdruck „Zwängung“ wird synonym dazu verwendet.

Bezüglich einer gegenüber der Basis  $e_{kj}$  gedrehten orthonormierten Basis  $e_{kj}'$  mit identischem Ursprung gilt analog (2.2) die Transformationsbeziehung

$$\sigma_{kj}' = \sigma_{lm} n_{kl} n_{jm} \quad (2.16)$$

Infolge der Symmetrie des Spannungstensors bilden dessen normierte Eigenvektoren, welche den Forderungen

$$(\sigma_{kj} - \sigma_m \delta_{kj}) n_{mj} = 0 \quad \text{und} \quad n_{mk} n_{mk} = 1 \quad (2.17)$$

genügen, eine orthonormierte Basis.  $n_{mj}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) entspricht den Richtungskosinussen der Hauptrichtungen des Spannungstensors, und dessen Eigenwerte, die Hauptspannungen  $\sigma_m$ , sind reell. Analog (2.4) liefert (2.17) die kubische Gleichung

$$\sigma_m^3 - \sigma_I \sigma_m^2 - \sigma_{II} \sigma_m - \sigma_{III} = 0 \quad (2.18)$$

für die Ermittlung der Hauptspannungen  $\sigma_m$  mit den Grundinvarianten

$$\sigma_I = \sigma_{kk}, \quad \sigma_{II} = (\sigma_{kj} \sigma_{kj} - \sigma_{kk} \sigma_{jj}) / 2 \quad \text{und} \quad \sigma_{III} = \det(\sigma_{kj}) \quad (2.19)$$

Einsetzen der Hauptspannungen  $\sigma_m$  in (2.17) liefert die Richtungskosinusse  $n_{mj}$  der zugehörigen Hauptrichtungen, wobei sich zu (2.6) analoge Ausdrücke ergeben. Für einige Anwendungen ist es zweckmässig, den Spannungstensor in einen hydrostatischen Anteil  $\sigma_0 \delta_{kj}$  und einen deviatorischen Anteil  $s_{kj}$  zu zerlegen,

$$\sigma_{kj} = \sigma_0 \delta_{kj} + s_{kj} \quad (2.20)$$

wobei  $\sigma_0 = \sigma_I / 3$  die mittlere Hauptspannung ist. Analog (2.8) sind gemäss (2.19) und (2.20)

$$\begin{aligned} s_I &= 0, & s_{II} &= s_{kj} s_{kj} / 2 = \sigma_{II} + \sigma_I^2 / 3 & \text{und} \\ s_{III} &= s_{kj} s_{jl} s_{lk} / 3 = \sigma_{III} + s_{II} \sigma_I / 3 - \sigma_I^3 / 27 \end{aligned} \quad (2.21)$$

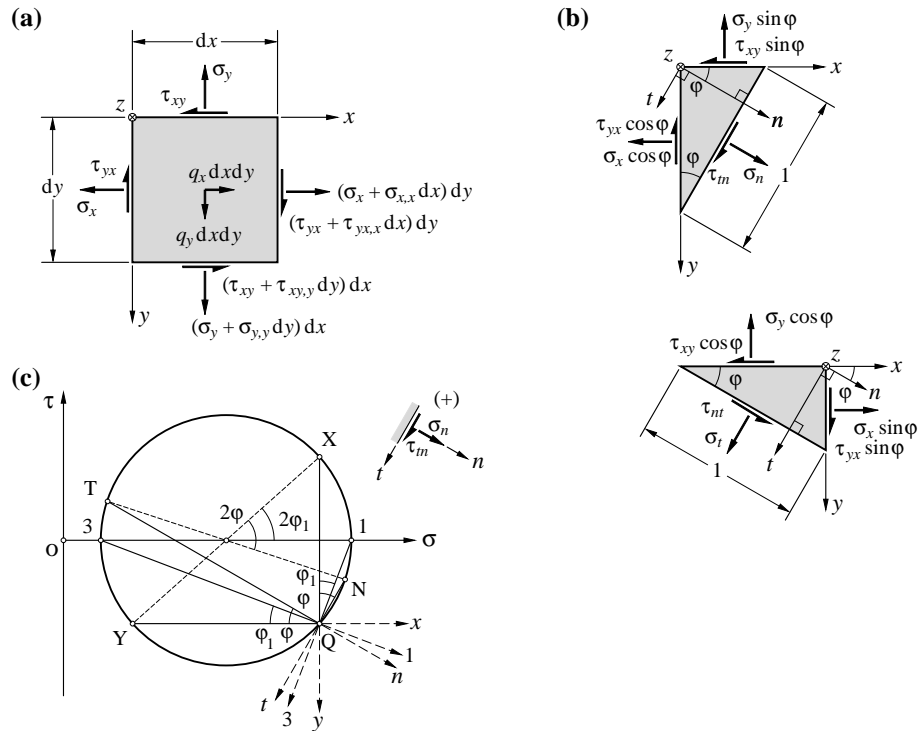
die Grundinvarianten des Spannungsdeviators  $s_{kj}$ .

### 2.3.2 Ebener Spannungszustand

Verschwindet eine der Hauptspannungen,  $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ , so spricht man von einem *ebenen* Spannungszustand. (2.14) liefert dann

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + q_x &= 0 \\ \sigma_{y,y} + \tau_{yx,x} + q_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.22)$$

siehe auch Bild 2.3(a). Die Transformationsbeziehungen (2.16) lauten mit den Bezeichnungen in Bild 2.3(b) und den Richtungskosinussen  $n_{xx} = n_{yy} = \cos\varphi$ ,  $n_{xy} = -n_{yx} = \sin\varphi$ ,  $n_{xz} = n_{zx} = n_{yz} = n_{zy} = 0$  sowie  $n_{zz} = 1$



**Bild 2.3** – Ebener Spannungszustand: (a) differentielles Scheibenelement; (b) Spannungstransformationen; (c) Mohr'scher Spannungskreis.

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
 \sigma_t &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
 \tau_{nt} &= \tau_{tn} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

was auch direkt aus der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen an den beiden Schnittkörpern in Bild 2.3(b) folgt. Mit Rücksicht auf die formale Ähnlichkeit zwischen (2.10) und (2.23) können auch Spannungstransformationen graphisch mit Hilfe des Mohr'schen Spannungskreises vorgenommen werden, siehe Bild 2.3(c). Für die Hauptspannungen resultiert aus (2.18) respektive dem Mohr'schen Spannungskreis

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \tag{2.24}$$

und die zugehörigen Hauptrichtungen lassen sich mit dem Winkel  $\varphi_1$  gemäss Bild 2.3(c) beschreiben

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \tag{2.25}$$

## 2.4 Prinzip der virtuellen Arbeiten

Da der Dualität von Kraft- und Verschiebungsgrössenformulierungen in der Statik eine grosse Bedeutung zukommt, wird das Prinzip der virtuellen Arbeiten als Prinzip der virtuellen Verschiebungen und als Prinzip der virtuellen Kräfte ausgesprochen. Einige Bemerkungen zur Dualität der beiden verwendeten Formulierungen und zur Rolle des Prinzips der virtuellen Arbeiten in der Axiomatik der Mechanik folgen am Schluss des Abschnitts.

### 2.4.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* kann wie folgt formuliert werden:

Ein Spannungszustand eines beliebig abgegrenzten (materiellen) Systems ist dann, und nur dann, statisch zulässig, wenn die virtuelle Arbeit  $\delta A$  für *jeden* virtuellen, kinematisch zulässigen Verschiebungszustand verschwindet.

Von virtuellen Verschiebungen wird dabei verlangt, dass sie infinitesimal klein sind, so dass die Änderung des Spannungszustands infolge des virtuellen Verschiebungszustands und der daraus resultierende Beitrag zur virtuellen Arbeit der inneren Kräfte als von höherer Ordnung klein vernachlässigt werden können. Die Verträglichkeitsbeziehung (2.1) gilt demnach für virtuelle Verschiebungen und virtuelle Verzerrungen exakt.

Für ein beliebiges System, das durch Volumenlasten  $q_k$  beansprucht wird, und dessen die Systemabgrenzung bildende Oberfläche  $S$  in einen Anteil  $S_t$  mit eingepprägten Spannungen  $t_k$  und einen Anteil  $S_v$  mit eingepprägten Verschiebungen  $v_k$  unterteilt wird, lässt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wie folgt anschreiben

$$\delta A = \int_V q_k \delta u_k dV + \int_{S_t} t_k \delta u_k dS_t - \int_V \sigma_{kj} \delta \varepsilon_{kj} dV = 0 \quad (2.26)$$

Die ersten beiden Integralterme entsprechen dabei der virtuellen Arbeit der äusseren Kräfte  $\delta A_a$  und der letzte jener der inneren Kräfte  $\delta A_i$ . Das Variationssymbol  $\delta$  deklariert dabei virtuelle Grössen. Um auch die auf  $S_v$  wirkenden Reaktionen  $r_k$  mit einzubeziehen, kann man das System gemäss dem Schnittprinzip von den kinematischen Bindungen befreien und entsprechende Reaktionen einführen. Die Reaktionen können dann als eingepprägte Kräfte aufgefasst und virtuellen Verschiebungen  $\delta v_k$  unterworfen werden. Mit der *Befreiung* werden damit auch die ursprünglich unzulässigen Verschiebungszustände zulässig und dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen zugänglich. Die Befreiung ist daher ein essentieller Bestandteil des Prinzips der virtuellen Verschiebungen.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist den Gleichgewichts- und statischen Randbedingungen, d. h. den statischen Beziehungen, äquivalent. Dieser Zusammenhang soll anschliessend ausgehend von (2.26) hergestellt werden. Mit der Verträglichkeitsbedingung (2.1) folgt für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\delta A_i = - \int_V \frac{\sigma_{kj}}{2} (\delta u_{k,j} + \delta u_{j,k}) dV \quad (2.27)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors  $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$ , welche aus der Formulierung des Prinzip der virtuellen Verschiebungen am differentiellen Volumenelement unter Verwendung von virtuellen Rotationen um die Koordinatenachsen folgt, gilt

$$\frac{\sigma_{kj}}{2} (\delta u_{k,j} + \delta u_{j,k}) = \frac{\sigma_{jk}}{2} (\delta u_{j,k} + \delta u_{k,j}) = \sigma_{kj} \delta u_{k,j} \quad (2.28)$$

Durch partielle Integration und Anwendung des Integralsatzes von Gauss resultiert für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte unter Berücksichtigung von (2.28)

$$\delta A_i = - \int_V [(\sigma_{kj} \delta u_k)_{,j} - \sigma_{kj,j} \delta u_k] dV = - \int_S (\sigma_{kj} \delta u_k) n_j dS + \int_V \sigma_{kj,j} \delta u_k dV \quad (2.29)$$

wobei  $n_j$  den jeweiligen Einheitsnormalenvektor auf  $S$  bezeichnet. Auftrennen des Oberflächenintegrals in die beiden unterschiedenen Bereiche und Einsetzen in (2.26) bringt unter Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen,  $\delta u_k = 0$  auf  $S_v$ ,

$$\delta A = \int_V (\sigma_{kj,j} + q_k) \delta u_k dV + \int_{S_t} (t_k - \sigma_{kj} n_j) \delta u_k dS_t = 0 \quad (2.30)$$

Da (2.30) für beliebige virtuelle Verschiebungen  $\delta u_k$  gilt, müssen die beiden Klammerausdrücke gemäss dem Fundamentallemma der Variationsrechnung [33] einzeln verschwinden, und es resultieren die Gleichgewichtsbedingungen (2.14) und die statischen Randbedingungen

$$t_k = \sigma_{kj} n_j \quad \text{auf } S_t \quad (2.31)$$

Werden durch Befreiung auch die Reaktionen  $r_k$  virtuellen Verschiebungen  $\delta v_k$  unterworfen, resultiert zusätzlich  $r_k = \sigma_{kj} n_j$  auf  $S_v$ .

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist also eine globale (schwache) Formulierung der Gleichgewichts- und statischen Randbedingungen oder kurz des Gleichgewichts. Wie anfangs formuliert, ist (2.26) nur dann eine hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht, wenn sie für jeden beliebigen virtuellen, kinematisch zulässigen Verschiebungszustand gilt. Häufig wird (2.26) im umgekehrten Sinn angewandt, indem von einem statisch zulässigen Spannungszustand ausgegangen wird und (2.26) mit einem beliebigen virtuellen, kinematisch zulässigen Verschiebungszustand formuliert wird.

## 2.4.2 Prinzip der virtuellen Kräfte

Unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungen des wirklichen Verschiebungszustands, der offensichtlich kinematisch zulässig ist, infinitesimal klein sind, kann, gemäss den Anforderungen an einen virtuellen Verschiebungszustand, dieser durch den wirklichen ersetzt werden. Da (2.26) für jeden beliebigen statisch zulässigen Spannungszustand gilt, kann der wirkliche Spannungszustand durch einen beliebigen statisch zulässigen Spannungszustand ersetzt werden. Dadurch resultiert das *Prinzip der virtuellen Kräfte*, welches bei infinitesimalen Verschiebungsfeldern das duale Gegenstück zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen darstellt und wie folgt formuliert werden kann:

Ein Verschiebungszustand ist dann, und nur dann, kinematisch zulässig, wenn die virtuelle Ergänzungsarbeit  $\delta A^*$  für *jeden* virtuellen, statisch zulässigen Spannungszustand verschwindet.

Unter den selben Voraussetzungen wie für (2.26) lässt sich das Prinzip der virtuellen Kräfte wie folgt anschreiben

$$\delta A^* = \int_V u_k \delta q_k dV + \int_{S_t} u_k \delta t_k dS_t + \int_{S_v} v_k \delta r_k dS_v - \int_V \varepsilon_{kj} \delta \sigma_{kj} dV = 0 \quad (2.32)$$

Die ersten drei Integralterme entsprechen dabei der virtuellen Ergänzungsarbeit der äusseren Kräfte  $\delta A_a^*$  und der letzte jener der inneren Kräfte  $\delta A_i^*$ .

Das Prinzip der virtuellen Kräfte entspricht unter der Voraussetzung infinitesimal kleiner Verschiebungen einer globalen (schwachen) Formulierung der Verträglichkeits- und kinematischen Randbedingungen oder kurz der Verträglichkeit. Dieser Zusammenhang soll nachfolgend ausgehend von (2.32) hergestellt werden. Durch Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen (2.14) in den ersten Summanden in (2.32), partielle Integration und Verwendung des Integralsatzes von Gauss resultiert

$$-\int_V u_k \delta \sigma_{kj,j} dV = -\int_V \left[ (u_k \delta \sigma_{kj})_{,j} - u_{k,j} \delta \sigma_{kj} \right] dV = \int_V u_{k,j} \delta \sigma_{kj} dV - \int_S u_k \delta \sigma_{kj} n_j dS \quad (2.33)$$

wobei  $n_j$  den jeweiligen Einheitsnormalenvektor auf  $S$  bezeichnet. Infolge der Symmetrie des Spannungstensors gilt

$$\frac{\delta \sigma_{kj}}{2} (u_{k,j} + u_{j,k}) = \frac{\delta \sigma_{jk}}{2} (u_{j,k} + u_{k,j}) = u_{k,j} \delta \sigma_{kj} \quad (2.34)$$



Rückeinsetzen von (2.33) in (2.32) bringt unter Berücksichtigung von (2.34) und Aufspalten des Oberflächenintegrals in die beiden unterschiedenen Bereiche sowie Einsetzen der statischen Randbedingungen  $\delta\sigma_{kj}n_j = t_k$  auf  $S_t$  und  $\delta\sigma_{kj}n_j = r_k$  auf  $S_v$

$$\delta A^* = \int_V \left[ \frac{1}{2} (u_{k,j} + u_{j,k}) - \varepsilon_{kj} \right] \delta\sigma_{kj} dV - \int_{S_v} (u_k - v_k) \delta\sigma_{kj} n_j dS_u = 0 \quad (2.35)$$

Da (2.35) für beliebige virtuelle, statisch zulässige Spannungszustände  $\delta\sigma_{kj}$  gilt, müssen die beiden Klammerausdrücke gemäss dem Fundamentallema der Variationsrechnung einzeln verschwinden und es resultieren die Verträglichkeitsbedingung (2.1) und die kinematischen Randbedingungen

$$u_k = v_k \quad \text{auf } S_v \quad (2.36)$$

### 2.4.3 Bemerkungen zum Prinzip der virtuellen Arbeiten

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen entspricht einer globalen (schwachen) Formulierung des Gleichgewichts, und das Prinzip der virtuellen Kräfte, falls man infinitesimal kleine Verschiebungen voraussetzt, einer globalen (schwachen) Formulierung der Verträglichkeit, womit die angestrebte Dualität der beiden Prinzipien klar ersichtlich ist. Im Gegensatz zu den virtuellen Verschiebungen wird von den virtuellen Kräften allerdings nicht verlangt, dass sie infinitesimal klein sind. Eine absolut duale Formulierung würde ausserdem verlangen, dass beim Prinzip der virtuellen Kräfte auf  $S_t$  keine virtuellen Kräfte wirken. Beide Abweichungen sind angesichts der Herleitung des Prinzips der virtuellen Kräfte evident.

Unter Voraussetzung infinitesimal kleiner Verschiebungen kann das *Prinzip der virtuellen Arbeiten* durch Vereinigung der beiden dualen Formulierungen ausgesprochen werden, indem man fordert, dass die virtuelle Arbeit, die ein statisch zulässiger Spannungszustand an einem beliebigen, unabhängig von ihm zustande gekommenen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand leistet, verschwindet. Üblicherweise werden in diesem Zusammenhang virtuelle Grössen nicht mehr explizit als solche gekennzeichnet.

Durch Formulieren der Verträglichkeitsbedingung (2.1) und der Gleichgewichtsbedingung (2.14) mit Feldoperatoren  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  sowie dem Verzerrungs- und Spannungstensor in Voigt'scher Notation  $\varepsilon_i = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]$  bzw.  $\sigma_i = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]$

$$\varepsilon_i = a_{ij} u_j \quad \text{bzw.} \quad q_i = b_{ij} \sigma_j \quad (2.37)$$

lässt sich mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten eine weitere interessante Aussage gewinnen. (2.32) liefert für einen beliebigen statisch zulässigen Spannungszustand und einen von diesem unabhängigen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand unter Berücksichtigung von (2.37)

$$\int_V \sigma_i a_{ij} u_j dV = \int_V u_i b_{ij} \sigma_j dV + \int_S t_i u_i dS \quad (2.38)$$

womit die beiden Feldoperatoren  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  zueinander *adjungiert* sind [33, 74]. Folglich kann der eine Feldoperator aus dem anderen gewonnen werden, wenn dieser transponiert wird, und die partiellen Differentiale  $m$ -ter Ordnung  $\partial^m$  mit  $(-1)^m$  multipliziert werden.

Wie erläutert, lässt sich das Prinzip der virtuellen Kräfte, unter Voraussetzung infinitesimal kleiner Verschiebungen, aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gewinnen. In diesem Sinn stellt das Prinzip der virtuellen Kräfte ein Theorem des Prinzips der virtuellen Verschiebungen dar und besitzt darüber hinaus keine allgemeine Gültigkeit. Bei einem axiomatischen Aufbau versteht man deshalb unter dem *Prinzip der virtuellen Arbeiten* ausschliesslich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Somit könnte man die beiden dualen Formulierungen auch als Prinzip der virtuellen Arbeiten und Satz (oder Theorem) der virtuellen Ergänzungsarbeit bezeichnen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten kann zusammen mit dem *Prinzip von d'Alembert*, dem *Reaktions-* und dem *Schnittprinzip* ins Zentrum der Axiomatik der gesamten Mechanik gestellt werden [143, 172]<sup>1</sup>. Formal lässt sich das Prinzip von d'Alembert mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten vereinen, indem in (2.26) zu den eingepprägten Volumenkräften die fiktiven (negativen) Trägheitskräfte gemäss dem *Prinzip von d'Alembert* addiert werden.

Werden an Stelle der virtuellen Verschiebungen virtuelle Geschwindigkeiten verwendet, spricht man vom Prinzip der virtuellen Leistungen. Die Forderung, dass die virtuellen Verschiebungen infinitesimal klein sein müssen, entfällt dann, ansonsten handelt es sich um eine rein formale Änderung des Prinzips der virtuellen Arbeiten. In der Regel wird eine Formulierung mit virtuellen Verschiebungen bevorzugt, da bei bewegten (materiellen) Systemen die virtuellen Verschiebungen bei festgehaltener Zeit auf das erstarrte System aufgebracht werden.

## 2.5 Elastizitätstheorie

### 2.5.1 Lokales Verhalten

#### Allgemeine Beziehungen

Das *elastische* Verhalten eines Werkstoffs zeichnet sich dadurch aus, dass die eingetragene Energie vollständig gespeichert wird und als mechanische Arbeit zurückgewonnen werden kann. Verzerrungen sind folglich vollständig reversibel. Die von den inneren Kräften zwischen zwei Lagen eines Systems pro Volumeneinheit geleistete Arbeit

$$A_{i0} = - \int_{\varepsilon_{kj}} \sigma_{kj} d\varepsilon_{kj} \quad (2.39)$$

ist dann nur von diesen abhängig und nicht davon, wie das System von der ersten in die zweite Lage gebracht wird. Das Arbeitsintegral ist also *wegunabhängig*, und die inneren Kräfte sind *konservativ*. Mithin entspricht der Integrand in (2.39) dem vollständigen Differential einer Potentialfunktion, der *spezifischen Formänderungsenergie*  $U_0$ ,

$$dA_{i0} = -\sigma_{kj} d\varepsilon_{kj} = -\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{kj}} d\varepsilon_{kj} = -dU_0 \quad \text{und somit} \quad \sigma_{kj} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{kj}} \quad (2.40)$$

Der Spannungstensor entspricht dem Gradient von  $U_0$ , womit der Spannungsvektor  $\sigma_i = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]$  (Voigt'sche Notation des Spannungstensors) im sechsdimensionalen (Euklid'schen) Verzerrungsraum senkrecht auf der Hyperfläche  $U_0 = \text{const}$  steht. Spannungs- und Verzerrungszustände, die (2.40)<sub>2</sub> genügen, werden *verträglich* genannt. Aus thermodynamischen Gründen ist die spezifische Formänderungsenergie, welche mit (2.40) nur bis auf einen konstanten Wert definiert ist, eine positiv definite Funktion der Verzerrungen, d. h.  $U_0(\varepsilon_{kj}) = 0$  für  $\varepsilon_{kj} = 0$  und  $U_0(\varepsilon_{kj}) > 0$  für  $\varepsilon_{kj} \neq 0$ . Mithin ist die spezifische Formänderungsenergie wie folgt definiert

$$U_0 = \int_{\varepsilon_{kj}} \sigma_{kj}(\varepsilon_{kj}) d\varepsilon_{kj} \quad (2.41)$$

---

<sup>1</sup> Impuls- und Drallsatz bzw. äquivalent Impulssatz und Symmetrie des Spannungstensors (Boltzmann'sches Axiom) lassen sich direkt aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten mit Berücksichtigung der Trägheitskräfte gemäss dem Prinzip von d'Alembert unter Verwendung des Reaktions- und Schnittprinzips ableiten [143, 172].

Ausserdem ist die im sechsdimensionalen Verzerrungsraum durch  $U_0 = \text{const}$  beschriebene Hyperfläche konvex und umfasst den Ursprung. Partielle Ableitung von (2.40)<sub>2</sub> nach einer beliebigen Verzerrung  $\varepsilon_{lm}$  liefert unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kj} \partial \varepsilon_{lm}} = \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial \varepsilon_{kj}} \quad (2.42)$$

womit die Rotation des Vektorfelds  $\sigma_{kj}(\varepsilon_{kj})$  verschwindet. (2.42) ist mathematisch die notwendige und hinreichende Bedingung (die sog. Integrabilitätsbedingung) für die Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals in (2.39). (2.40)<sub>2</sub> kann als lokale Form des *Satzes von Castigliano* und (2.42) als lokale Form der dualen Aussage des *verallgemeinerten Satzes von Maxwell* aufgefasst werden.

Beim elastischen Werkstoffverhalten ist auch das Integral der auf eine Volumeneinheit bezogenen Ergänzungsarbeit wegabhängig, womit die zu (2.40) und (2.42) dualen Beziehungen

$$\varepsilon_{kj} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{kj}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 U_0^*}{\partial \sigma_{kj} \partial \sigma_{lm}} = \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial \sigma_{lm}} = \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial \sigma_{kj}} \quad (2.43)$$

resultieren. Die *spezifische Ergänzungsenergie*

$$U_0^* = \sigma_{kj} \varepsilon_{kj} - U_0 = \int_{\sigma_{kj}} \varepsilon_{kj}(\sigma_{kj}) d\sigma_{kj} \quad (2.44)$$

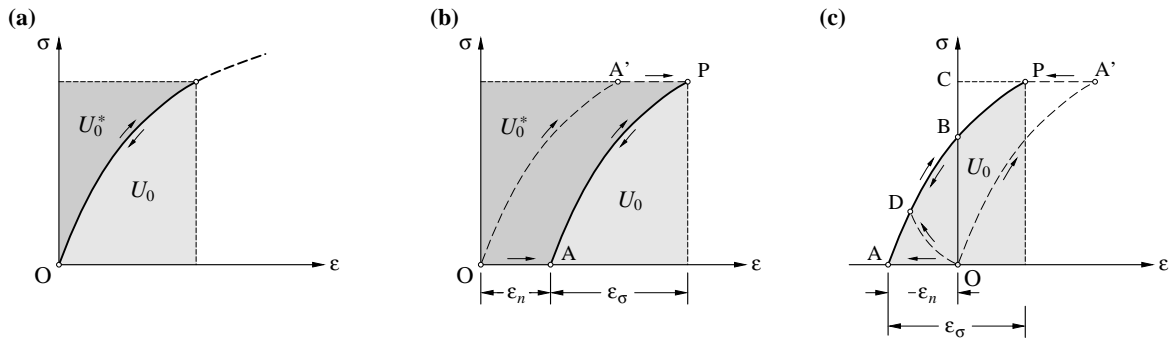
ist dabei eine positiv definite Funktion der Spannungen, d. h.  $U_0^*(\sigma_{kj}) = 0$  für  $\sigma_{kj} = 0$  und  $U_0^*(\sigma_{kj}) > 0$  für  $\sigma_{kj} \neq 0$ . Mithin ist die im sechsdimensionalen Spannungsraum durch  $U_0^*(\sigma_{kj}) = \text{const}$  beschriebene Hyperfläche, deren Gradienten gemäss (2.43)<sub>1</sub> den Verzerrungsvektoren  $\varepsilon_i = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]$  (Voigt'sche Notation des Verzerrungstensors) entsprechen, konvex und umfasst den Ursprung. Obwohl die spezifische Ergänzungsenergie  $U_0^*$  die Einheit einer Energie aufweist, ist sie eine rein mathematische Grösse und keine Energie im physikalischen Sinn. (2.43)<sub>1</sub> kann als lokale Form *des Satzes von Engesser* aufgefasst werden und die Beziehung (2.43)<sub>2</sub>, welche besagt, dass die Rotation des Vektorfeldes  $\varepsilon_{kj}(\sigma_{kj})$  verschwindet, als lokale Form des *verallgemeinerten Satzes von Maxwell*. Bild 2.4(a) zeigt die spezifische Formänderungs- und Ergänzungsenergie für einen einachsigen Spannungszustand.

Das Verhalten eines elastischen Werkstoffs ist lokal mit der spezifischen Formänderungsenergie  $U_0(\varepsilon_{kj})$  oder Ergänzungsenergie  $U_0^*(\sigma_{kj})$  vollständig beschrieben, wobei der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen durch die Beziehung (2.40)<sub>2</sub> bzw. (2.43)<sub>1</sub> eindeutig gegeben ist.

Ein *isotropes* Werkstoffverhalten zeichnet sich durch Richtungsunabhängigkeit aus; die Hauptachsen des entsprechenden Spannungs- und Verzerrungstensors sind folglich koaxial. Die spezifische Formänderungs- bzw. Ergänzungsenergie lässt sich bei derartigen Verhältnissen als Funktion der drei Grundinvarianten des Verzerrungs- bzw. Spannungstensors formulieren, wobei die Grundinvarianten  $\varepsilon_{II}$  und  $\varepsilon_{III}$  bzw.  $\sigma_{II}$  und  $\sigma_{III}$  alternativ durch die Grundinvarianten des Verzerrungs- bzw. Spannungstensors  $e_{II}$  und  $e_{III}$  bzw.  $s_{II}$  und  $s_{III}$  ersetzt werden können. Für  $U = U(\varepsilon_I, e_{II}, e_{III})$  liefert (2.40)<sub>2</sub> unter Berücksichtigung von (2.8) beispielsweise

$$\sigma_{kj} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_I} \delta_{kj} + \frac{\partial U}{\partial e_{II}} e_{kj} + \frac{\partial U}{\partial e_{III}} e_{kl} e_{lj} \quad (2.45)$$

Wird vorausgesetzt, dass sich die spezifische Formänderungsenergie (wie bei einem linear elastischen Werkstoffverhalten) aus einem hydrostatischen und einem deviatorischen Anteil  $U_{0h}(\varepsilon_I)$  bzw.  $U_{0d}(e_{II})$  zusammensetzt, d. h.  $U_0(\varepsilon_I, e_{II}) = U_{0h}(\varepsilon_I) + U_{0d}(e_{II})$ , verschwindet der dritte Term in (2.45). Durch Aufspalten der Spannungen in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil gemäss (2.20) resultiert dann aus (2.45)



**Bild 2.4** – Spezifische Formänderungs- und Ergänzungsenergie: (a) initial spannungsfrei; (b) und (c) mit Berücksichtigung spannungsunabhängiger Verzerrungen.

$$\sigma_0 = \frac{\partial U_{0h}}{\partial \varepsilon_I} \quad \text{sowie} \quad s_{kj} = \frac{\partial U_{0h}}{\partial e_{II}} e_{kj} \quad (2.46)$$

Durch das Schwinden des Werkstoffs sowie Feuchtigkeits- oder Temperaturänderungen entstehen spannungsunabhängige Verzerrungen  $\varepsilon_{nkj}$ . Ausserdem kann der Einbau nicht passgenauer Bauteile in statisch unbestimmte Systeme mit spannungsunabhängigen Verzerrungen beschrieben werden. Die totalen Verzerrungen  $\varepsilon_{kj}$  resultieren dann als Summe der spannungsabhängigen Verzerrungen  $\varepsilon_{\sigma kj}$  und der spannungsunabhängigen Verzerrungen  $\varepsilon_{nkj}$

$$\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{\sigma kj} + \varepsilon_{nkj} \quad (2.47)$$

Für die spezifische Formänderungs- bzw. Ergänzungsenergie resultiert somit

$$U_0(\varepsilon_{\sigma kj}) = \int_{\varepsilon_{\sigma kj}} \sigma_{kj}(\varepsilon_{\sigma kj}) d\varepsilon_{\sigma kj} \quad \text{oder} \quad U_0(\varepsilon_{kj}) = \int_{\varepsilon_{kj}} \sigma_{kj}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{nkj}) d\varepsilon_{kj} \quad (2.48)$$

$$U_0^*(\sigma_{kj}) = \sigma_{kj} \varepsilon_{kj} - U_0 = \int_{\sigma_{kj}} \varepsilon_{kj} d\sigma_{kj} = \int_{\sigma_{kj}} \varepsilon_{\sigma kj} d\sigma_{kj} + \varepsilon_{nkj} \sigma_{kj}$$

Die spezifische Formänderungsenergie ist dabei nach wie vor positiv definit, während dies für die spezifische Ergänzungsenergie nicht mehr zu trifft. In diesem Kontext wird der Charakter der spezifischen Ergänzungsenergie als rein mathematische Hilfsgrösse klar ersichtlich.

Bild 2.4(b) bzw. (c) zeigt die spezifische Formänderungs- und Ergänzungsenergie für den Fall eines einachsigen Spannungszustands mit positiver bzw. negativer spannungsunabhängiger Verzerrung  $\varepsilon_n$ . In Bild 2.4(c) entspricht die spezifische Ergänzungsenergie dabei der Fläche BCP abzüglich der Fläche OAB und ist folglich negativ. Wird die spannungsunabhängige Verzerrung vor der Spannung aufgebracht ohne einen systembedingten Eigenspannungszustand zu erzeugen, so stellt die Kurve OAP die Spannungs-Verzerrungscharakteristik dar. Wird die Spannung vor der spannungsunabhängigen Verzerrung aufgebracht, folgt die Spannungs-Verzerrungscharakteristik OA'P. Erzeugt die spannungsunabhängige Verzerrung auf Systemebene einen Eigenspannungszustand, so folgt die Spannungs-Verzerrungscharakteristik in Figur Bild 2.4(c) beispielsweise OD. Bei konstant gehaltenen spannungsunabhängiger Verzerrung bewegt sich der Spannungsbildpunkt anschliessend entlang AP.

### Linear elastisches Verhalten

Beim linear elastischen Werkstoffverhalten besteht zwischen den Spannungen und Verzerrungen ein linearer Zusammenhang,

$$\sigma_{kj} = c_{kjlm} \varepsilon_{lm} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{kj} = f_{kjlm} \sigma_{lm} \quad (2.49)$$

$c_{kilm}$  bezeichnet  $3^4 = 81$  werkstoffabhängige Proportionalitätskonstanten und  $f_{kilm}$  den zu  $c_{kilm}$  inversen Tensor. Infolge Symmetrie des Spannungstensors  $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$  bzw. Verzerrungstensors  $\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{jk}$  gilt  $c_{kilm} = c_{jklm}$  bzw.  $c_{kilm} = c_{kjml}$  und aus (2.42) folgt mit (2.49) die Beziehung

$$c_{kilm} = c_{lmkj} \quad (2.50)$$

Es verbleiben 21 Werkstoffkonstanten, wobei drei davon von der Wahl der Basis abhängen und bei einer Formulierung von (2.49) bezüglich der Hauptachsen des Verzerrungstensors entfallen. Das *linear elastische Werkstoffverhalten* lässt sich folglich allgemein mit 18 Werkstoffkonstanten beschreiben.

Mit (2.49) resultiert für die spezifische Formänderungs- bzw. Ergänzungsenergie gemäss (2.41) bzw. (2.44) eine homogene quadratische Funktion der Verzerrungen  $\varepsilon_{kj}$  bzw. Spannungen  $\sigma_{kj}$

$$U_0 = \frac{1}{2} c_{kilm} \varepsilon_{kj} \varepsilon_{lm} \quad \text{bzw.} \quad U_0^* = \frac{1}{2} f_{kilm} \sigma_{kj} \sigma_{lm} \quad (2.51)$$

Beide Funktionen sind positiv definit und liefern unter Ausschluss spannungsunabhängiger Verzerrungen identische Ergebnisse.

Werden zwei Spannungszustände  $\sigma_{1kj}$  und  $\sigma_{2kj}$  und mit ihnen verträgliche Verzerrungszustände  $\varepsilon_{1kj}$  und  $\varepsilon_{2kj}$  betrachtet, so resultiert mit Rücksicht auf (2.51) und (2.50) für die virtuelle spezifische Formänderungsenergie, wenn als virtueller Verschiebungszustand jeweils der Verzerrungszustand des anderen Spannungszustands verwendet wird

$$\delta U_{01} = c_{kilm} \varepsilon_{1kj} \varepsilon_{2lm} = c_{lmkj} \varepsilon_{2lm} \varepsilon_{1kj} = \delta U_{02} \quad (2.52)$$

Dies entspricht einer lokalen Form des *Satzes von Betti*. Für die entsprechend formulierten spezifischen Ergänzungsenergien folgt die dazu duale Aussage

$$\delta U_{01}^* = f_{kilm} \sigma_{1kj} \sigma_{2lm} = f_{lmkj} \sigma_{2lm} \sigma_{1kj} = \delta U_{02}^* \quad (2.53)$$

Ist der Tensor der werkstoffabhängigen Proportionalitätskonstanten  $c_{kilm}$  gegenüber Drehungen der Basis invariant,  $c'_{rstn} = c_{kilm} n_{rk} n_{sj} n_{tl} n_{nm} = c'_{kilm}$ , spricht man von *isotropem* linear elastischem Werkstoffverhalten. Die Hauptachsen des Spannungstensors und jene des mit ihm verträglichen Verzerrungstensors sind dann koaxial, und es verbleiben lediglich zwei Werkstoffkonstanten

$$c_{kilm} = K - \frac{2G}{3} \delta_{kj} \delta_{lm} + G \delta_{kl} \delta_{jm} \quad (2.54)$$

$K$  wird als Kompressionsmodul und  $G$  als Schubmodul bezeichnet. Mit

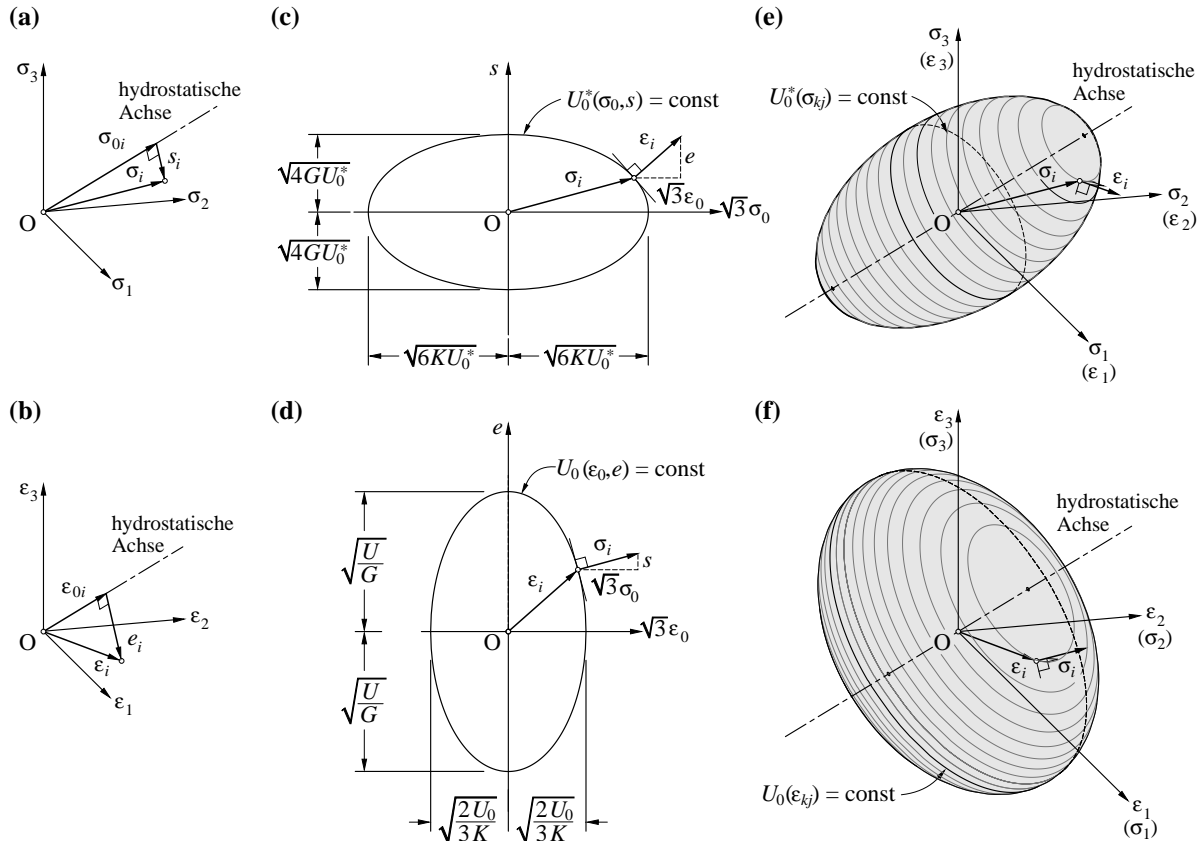
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.55)$$

wobei  $E$  den Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querdehnzahl bezeichnet, lässt sich (2.49) mit (2.54) alternativ wie folgt formulieren

$$\sigma_{kj} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{kj} + \frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{kj} \right) \quad (2.56)$$

Spaltet man sowohl den Spannungs- als auch den Verzerrungstensor in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil auf, liefert (2.56) unter Berücksichtigung von (2.55)

$$\sigma_0 = K \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad s_{kj} = 2G e_{kj} \quad (2.57)$$



**Bild 2.5** – Isotropes linear elastisches Werkstoffverhalten: (a) und (b) hydrostatische und deviatorische Spannungs- bzw. Verzerrungsvektoren im Hauptspannungs- bzw. Verzerrungsraum; (c) bis (f) Darstellung der Potentialfunktionen.

Der Kompressionsmodul beschreibt also die Volumen- und der Schubmodul die Gestaltänderung. Geometrisch entspricht  $2G$  dem Verhältnis des Durchmessers des Mohr'schen Spannungskreises zu dem des zugeordneten Verzerrungskreis. Da die spezifische Formänderungsenergie positiv definit ist, werden den Proportionalitätskonstanten die Restriktionen  $K > 0$ ,  $G > 0$ ,  $E > 0$  und  $-1 < \nu < 1/2$  auferlegt. (2.57) lässt sich im Hauptspannungs- bzw. Hauptverzerrungsraum mit  $\sigma_{0kj} = \sigma_0 \delta_{kj}$  und  $\epsilon_{0kj} = \epsilon_1 \delta_{kj} / 3$  anschaulich darstellen, siehe Bild 2.5(a, b). Für die spezifische Formänderungsenergie resultiert damit die Beziehung

$$U_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \epsilon_{kj} \epsilon_{kj} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk}^2 \right) = \frac{K}{2} \epsilon_1^2 + G e_{kj} e_{kj} \quad (2.58)$$

und für die spezifische Ergänzungsenergie ergibt sich

$$U_0^* = \frac{1+\nu}{2E} \left( \sigma_{kj} \sigma_{kj} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk}^2 \right) = \frac{\sigma_0^2}{2K} + \frac{1}{4G} s_{kj} s_{kj} \quad (2.59)$$

Um zu einer geometrischen Darstellung der beiden Potentialfunktionen  $U_0 = \text{const}$  und  $U_0^* = \text{const}$  im Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsraum zu gelangen, werden (2.58) und (2.59) mit  $\epsilon_0 = \epsilon_1 / 3$  und dem Betrag des Spannungs- bzw. Verzerrungsdeviatorvektors  $s$  ( $s^2 = s_{kj} s_{kj}$ ) bzw.  $e$  ( $e^2 = e_{kj} e_{kj}$ ) formuliert

$$U_0 = \frac{9K}{2} \epsilon_0^2 + G e^2 \quad \text{und} \quad U_0^* = \frac{1}{2K} \sigma_0^2 + \frac{1}{4G} s^2 \quad (2.60)$$

was den beiden Ellipsen in Bild 2.5(c, d) entspricht. Die Abszissen wurden derart gewählt, dass auf ihnen gerade der Betrag des hydrostatischen Spannungs- bzw. Verzerrungsvektors abgelesen werden kann. Mithin entspricht die Potentialfunktion  $U_0 = \text{const}$  ( $U_0^* = \text{const}$ ) im Hauptverzerrungsraum (Hauptspannungsraum) einem Rotationsellipsoid mit der hydrostatischen Achse als Drehachse, siehe Bild 2.5(e) (Bild 2.5(f)), dessen Halbachsen Bild 2.5(c) (Bild 2.5(d)) entnommen werden können. Man findet ausserdem (2.40) bzw. (2.43) bestätigt, indem der Spannungs- bzw. Verzerrungsvektor senkrecht auf der Hyperfläche  $U_0 = \text{const}$  bzw.  $U_0^* = \text{const}$  steht.

## 2.5.2 Systemverhalten

### Allgemeine Beziehungen

Die Verformung elastischer (materieller) Systeme ist per Definition vollständig reversibel. Die Formänderungs- bzw. Ergänzungsenergie des gesamten Systems mit konservativen inneren Kräften beträgt mit (2.41) bzw. (2.44)

$$U = \int_V U_0 dV = -A_i \quad \text{bzw.} \quad U^* = \int_V U_0^* dV = -A_i^* \quad (2.61)$$

und das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. Kräften lautet

$$\delta U = \delta A_a \quad \text{bzw.} \quad \delta U^* = \delta A_a^* \quad (2.62)$$

Bei *konservativen (materiellen) Systemen*, von denen verlangt wird, dass alle an ihnen wirkenden äusseren und inneren Kräfte konservativ sind, beträgt das Gesamtpotential

$$\Phi = U + H \quad (2.63)$$

wobei

$$H = - \int_V q_k u_k dV - \int_{S_t} t_k u_k dS_t \quad (2.64)$$

das *Potential der Lasten* ist. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen liefert dann unter Beachtung von (2.26), (2.61) und (2.63)

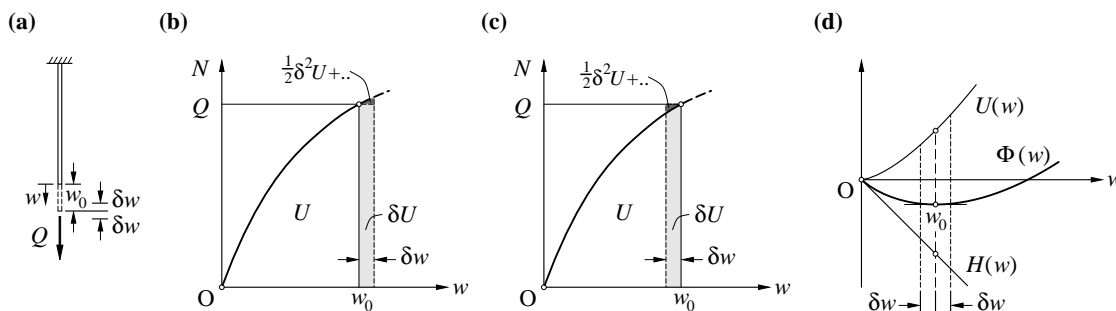
$$-\delta A = \delta H + \delta U = \delta(H + U) = \delta\Phi = 0 \quad (2.65)$$

Im Sinne der Variationsrechnung [33] kann dabei der virtuelle Verschiebungszustand als Variation des wirklichen Verschiebungszustands aufgefasst werden. (2.65) besagt dann, dass die erste Variation des Gesamtpotentials verschwindet. Von allen kinematisch zulässigen Verschiebungszuständen tritt also derjenige ein, bei dem das Gesamtpotential  $\Phi$  einen stationären Wert annimmt.

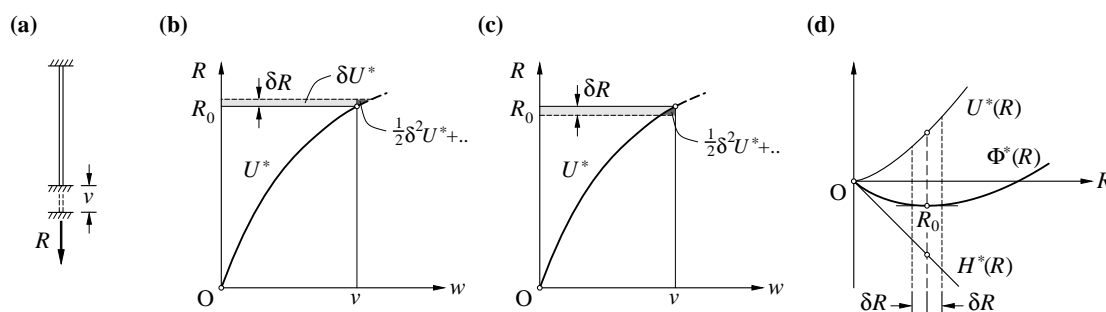
Ob der stationäre Wert ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt darstellt, lässt sich durch die Formulierung der Gesamtpotentialsänderung  $\Delta\Phi$  unter Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung der virtuellen Verschiebung untersuchen, womit von *endlich* kleinen virtuellen Verschiebungen ausgegangen wird. Mit einer Taylor-Reihenentwicklung folgt

$$\Delta\Phi = \delta\Phi + \frac{1}{2!} \delta^2\Phi + \dots \quad (2.66)$$

wobei Terme  $n$ -ter Ordnung der virtuellen Verschiebungen in der  $n$ -ten Variation des Gesamtpotentials  $\delta^n\Phi$  zusammengefasst werden. Gemäss (2.65) verschwindet der erste Summand, und da bei den (wirklichen) Verschiebungen von infinitesimalen Verschiebungsfeldern ausgegangen wird, verschwinden die höheren Variationen des Gesamtpotentials der Lasten,  $\delta^n H = 0$  für  $n > 1$ . Mithin folgt



**Bild 2.6** – Minimum des Gesamtpotentials: (a) statisches System; (b) und (c) Variation der Endverschiebung; (d) Änderung der Formänderungsenergie, des Potentials der äusseren Kräfte und des Gesamtpotentials.



**Bild 2.7** – Minimum des komplementären Gesamtpotentials: (a) statisches System; (b) und (c) Variation der Reaktion; (d) Änderung der Ergänzungsenergie, des komplementären Potentials der Reaktionen und des komplementären Gesamtpotentials.

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2!} \delta^2 U_{+..} > 0 \tag{2.67}$$

was der Änderung der Formänderungsenergie infolge der durch die virtuellen Verschiebungen hervorgerufenen Spannungen entspricht. Da die Formänderungsenergie positiv definit ist, nimmt das Gesamtpotential also zu und weist in der (stabilen<sup>1</sup>) Gleichgewichtslage ein Minimum auf. Für konservative Systeme liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen den *Satz vom Minimum des Gesamtpotentials*, welcher wie folgt formuliert werden kann:

Von allen kinematisch zulässigen Verschiebungszuständen eines konservativen (materiellen) Systems tritt derjenige ein, bei dem das Gesamtpotential  $\Phi$  minimal wird.

Bild 2.6 zeigt den beschriebenen Sachverhalt am Beispiel eines einachsigen beanspruchten Stabs, dessen freies Ende sich in der Gleichgewichtslage unter der Last  $Q$  um  $w_0$  nach unten verschiebt. Wird das freie Ende bei konstanter Last  $Q$  aus dieser Lage nun um einen endlich kleinen Betrag  $\delta w$  nach unten bzw. oben verschoben, so stellen die in Bild 2.6(b) bzw. (c) dunkelgrau hinterlegten, annähernd dreieckförmigen Flächen den Zuwachs des Gesamtpotentials dar; Bild 2.6(d) zeigt die entsprechenden Änderungen der Potentialgrößen. Da beim Prinzip der virtuellen Verschiebungen verlangt wird, dass die virtuellen Verschiebungen infinitesimal klein sind, sind die höheren Variatio-

<sup>1</sup> Eine Gleichgewichtslage eines konservativen Systems wird als *stabil* bezeichnet, wenn das System nach einer endlich kleinen virtuellen Verschiebung wieder in diese zurückkehrt, was nur dann geschieht, wenn für diese Verschiebung Arbeit aufgewendet werden muss und somit das Gesamtpotential ansteigt. Mithin weist das Gesamtpotential in der stabilen Gleichgewichtslage ein Minimum auf. Für die Formänderungsenergie bei stabilen Gleichgewichtslagen und einem infinitesimalen Verschiebungsfeld kann damit umgekehrt gefordert werden, dass sie *positiv definit* ist, damit keine werkstoffbedingten Instabilitäten auftreten.



nen der Formänderungsenergie und somit der Gesamtpotentialzuwachs von höherer Ordnung klein und können vernachlässigt werden.

Bei konservativen äusseren Kräften existiert eine zu  $H$  duale Grösse, das komplementäre Potential der Reaktionen<sup>1</sup>

$$H^* = - \int_{S_v} v_k r_k dS_u \quad (2.68)$$

und für konservative Systeme resultiert die zum Gesamtpotential duale Grösse, das komplementäre Gesamtpotential

$$\Phi^* = U^* + H^* \quad (2.69)$$

Das Prinzip der virtuellen Kräfte lautet für konservative Systeme unter Beachtung von (2.32), (2.61) und (2.68) somit

$$-\delta A^* = \delta U^* + \delta H^* = \delta(U^* + H^*) = \delta \Phi^* = 0 \quad (2.70)$$

Da Lasten kein komplementäres Potential aufweisen, wirken im Unterschied zum Prinzip der virtuellen Kräfte keine virtuellen Volumenkräfte,  $\delta q_k = 0$ , und auf  $S_l$  keine virtuellen Kräfte,  $\delta t_k = 0$ . Setzt man voraus, dass die Kraftgrössen des virtuellen Spannungszustands infinitesimal klein sind, was beim Prinzip der virtuellen Kräfte keineswegs gefordert werden muss, kann der virtuelle Spannungszustand im Sinne der Variationsrechnung als Variation des wirklichen Spannungszustands aufgefasst werden. (2.70) besagt dann, dass die erste Variation des komplementären Gesamtpotentials verschwindet. Von allen statisch zulässigen Spannungszuständen tritt also derjenige ein, bei dem das komplementäre Gesamtpotential  $\Phi^*$  einen stationären Wert annimmt. Analog dem Satz vom Minimum des Gesamtpotentials lässt sich zeigen, dass der stationäre Wert bei positiv definiten spezifischer Ergänzungsenergie resp. einer stabilen Gleichgewichtslage ein Minimum ist. Für konservative Systeme geht das Prinzip der virtuellen Kräfte, abgesehen von den erwähnten Unterschieden, in den Satz vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials über, welcher wie folgt formuliert werden kann:

Von allen statisch zulässigen Spannungszuständen eines konservativen (materiellen) Systems tritt derjenige ein, bei dem das komplementäre Gesamtpotential  $\Phi^*$  minimal wird.

Verschwinden alle eingepprägten Verschiebungen, ist das System also starren kinematischen Bindungen unterworfen, was häufig angenommen wird, verschwindet das komplementäre Potential der Reaktionen,  $H^* = 0$ , und (2.70) reduziert sich auf  $\delta U^* = 0$ .

Bild 2.7 zeigt den beschriebenen Sachverhalt wiederum am Beispiel eines einachsigen beanspruchten Stabs, dessen unteres Ende um  $v$  nach unten verschoben wird, womit sich in der Gleichgewichtslage eine Reaktion  $R_0$  einstellt. Wird die Reaktion  $R$  am unteren Ende bei konstant gehaltener Verschiebung  $v$  um einen endlich kleinen Betrag  $\delta R$  vergrössert bzw. reduziert, so stellen die in Bild 2.7(b, c) dunkelgrau hinterlegten, annähernd dreieckförmigen Flächen den Zuwachs des komplementären Gesamtpotentials dar; Bild 2.7(d) zeigt die entsprechende Änderung der Potentialgrössen.

Wirken auf ein initial eigenspannungsfreies System ohne spannungsunabhängige Verzerrungen lediglich vorgeschriebene äussere Kräfte (Lasten), ist infolge  $0 > -U > H$  sowie  $U^* > H^* = 0$  das Gesamtpotential negativ,  $\Phi < 0$  und das komplementäre Gesamtpotential positiv,  $\Phi^* > 0$ . Wirken umgekehrt nur eingepprägte Verschiebungen, ist infolge  $0 > -U^* > H^*$  sowie  $U > H = 0$  das Gesamtpotential positiv,  $\Phi > 0$  und das komplementäre Gesamtpotential negativ,  $\Phi^* < 0$ . Weiter gilt bei initial eigenspannungsfreien Systemen ohne spannungsunabhängige Verzerrungen

---

<sup>1</sup> Eine (mathematisch) präzisere Bezeichnung wäre eigentlich Potential der eingepprägten Verschiebungen.

$$\Phi + \Phi^* = 0 \quad (2.71)$$

Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf Systeme, welche neben den Volumen- und Randlasten  $q_k$  bzw.  $t_k$  an  $n$  Punkten durch Lasten (Einzelkräfte bzw. -momente) mit Beträgen  $Q_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) beansprucht werden;  $w_j$  bezeichnet die Beträge der *korrespondierenden* Verschiebungen (bzw. Verdrehungen), d. h. die Verschiebungen der Punkte  $j$  in Richtung von  $Q_j$ . Wird die Formänderungsenergie mit Hilfe der kinematischen Beziehungen als Funktion dieser Verschiebungen ausgedrückt, so liefert der Satz vom Minimum des Gesamtpotentials

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial w_j} \delta w_j = \left( \frac{\partial U}{\partial w_j} + \frac{\partial H}{\partial w_j} \right) \delta w_j = \left( \frac{\partial U}{\partial w_j} - Q_j \right) \delta w_j = 0 \quad (2.72)$$

Da (2.72) für beliebige Variationen  $\delta w_j$  gilt, verschwindet der Klammerausdruck gemäss dem Fundamentallema der Variationsrechnung, und es resultiert

$$\frac{\partial U}{\partial w_j} = Q_j \quad (2.73)$$

der *Satz von Castigliano*, wonach die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach einer Verschiebung  $w_j$  der korrespondierenden Last  $Q_j$  entspricht. Wird das System an  $n$  Punkten eingepprägten Verschiebungen (bzw. Verdrehungen) mit Betrag  $v_j$  unterworfen, wobei  $R_j$  den Betrag der korrespondierenden Reaktionen bezeichnet, so resultiert analog

$$\frac{\partial U}{\partial v_j} = R_j \quad (2.74)$$

wenn die Reaktionen  $R_j$  vorübergehend als Lasten und die Verschiebungen  $v_j$  als korrespondierende Verschiebungen aufgefasst werden. Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Fassung (2.62) durch Aufbringen einer einzelnen virtuellen Verschiebung  $\delta w_j$ , an Stelle und in Richtung der Last  $Q_j$ , während an Stelle und in Richtung der übrigen Lasten keine virtuellen Verschiebungen erfolgen. Bild 2.8(a) zeigt den Zusammenhang (2.72) am Beispiel des Kraft-Verschiebungsdiagramms bei nur einer Last  $Q_j = Q$ . Durch partielle Ableitung von (2.73) nach einer beliebigen mit  $Q_j$  nicht korrespondierenden Verschiebung  $w_l$ , resultiert unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial w_j \partial w_l} = \frac{\partial Q_j}{\partial w_l} = \frac{\partial Q_l}{\partial w_j} \quad (2.75)$$

womit die Rotation des Vektorfeldes  $Q_j(w_j)$  verschwindet. (2.75) ist die zum *verallgemeinerten Satz von Maxwell* duale Aussage. Offensichtlich gilt derselbe Zusammenhang auch für eingepprägte Verschiebungen und die korrespondierenden Reaktionen.

Für Systeme, welche umgekehrt an  $n$  Punkten eingepprägten Verschiebungen (bzw. Verdrehungen) mit Beträgen  $v_j$  unterworfen werden, wobei  $R_j$  die Beträge der korrespondierenden Reaktionen (Einzelkräfte bzw. -momente) bezeichnet, erhält man die zum Satz von Castigliano duale Aussage, den *Satz von Engesser*. Wird die Ergänzungsenergie mit Hilfe der statischen Beziehungen als Funktion der Reaktionen  $R_j$  ausgedrückt, was direkt nur für statisch bestimmte Systeme möglich ist (in den übrigen Fällen sind die überzähligen statischen Grössen z. B. mit (2.70) zu bestimmen), so liefert der Satz vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials

$$\delta\Phi^* = \frac{\partial\Phi^*}{\partial R_j} \delta R_j = \left( \frac{\partial U^*}{\partial R_j} + \frac{\partial H^*}{\partial R_j} \right) \delta R_j = \left( \frac{\partial U^*}{\partial R_j} - v_j \right) \delta R_j = 0 \quad (2.76)$$

Da (2.76) für beliebige virtuelle Reaktionen  $\delta R_j$  gilt, muss der Klammerausdruck gemäss dem Fundamentallemma der Variationsrechnung verschwinden, und es folgt

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_j} = v_j \quad (2.77)$$

der *Satz von Engesser*, wonach die partielle Ableitung der Ergänzungsenergie nach einer Reaktion  $R_j$  der korrespondierenden eingepprägten Verschiebung  $v_j$  entspricht (wobei häufig  $v_j=0$  ist). Wird das System an  $n$  Punkten Lasten (Einzelkräfte bzw. -momente)  $Q_j$  mit korrespondierenden Verschiebungen  $w_j$  unterworfen, so resultiert

$$\frac{\partial U^*}{\partial Q_j} = w_j \quad (2.78)$$

wenn die Verschiebungen  $w_k$  vorübergehend als eingepprägt und die Lasten als korrespondierende Reaktionen aufgefasst werden. Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte in der Fassung (2.62), indem das System von den äusseren kinematischen Bindungen befreit und an Ort und Richtung einer eingepprägten Verschiebung  $v_j$  der virtuellen Kraft  $\delta R_j$  unterworfen wird, während an Stelle und in Richtung der übrigen eingepprägten Verschiebungen keine virtuellen Kräfte wirken. Bild 2.8(b) zeigt den Zusammenhang (2.78) am Beispiel des Kraft-Verschiebungs-Diagramms bei nur einer Last  $Q_j=Q$ . Durch partielle Ableitung von (2.78) nach einer beliebigen mit  $w_j$  nicht korrespondierenden Last  $Q_i$ , resultiert unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial Q_j \partial Q_i} = \frac{\partial w_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial w_i}{\partial Q_j} \quad (2.79)$$

womit die Rotation des Vektorfeldes  $w_j(Q_i)$  verschwindet. (2.79) ist der *verallgemeinerte Satz von Maxwell*. Der gleiche Zusammenhang gilt offensichtlich auch für die eingepprägten Verschiebungen und korrespondierenden Reaktionen.

### Linear elastische Systeme

Weisen alle Systembestandteile ein linear elastisches Werkstoffverhalten auf, so sind alle das System beschreibenden Beziehungen (unter Voraussetzung infinitesimaler Verschiebungen) linear. Mithin lassen sich einzelne Zustände superponieren, in dem Sinn, dass der Verschiebungszustand einer Summe von Spannungszuständen gleich der Summe der mit ihnen verträglichen Verschiebungszustände ist und umgekehrt. Daraus erwachsen gegenüber einem nichtlinearen Werkstoffverhalten entscheidende Vereinfachungen bei der Behandlung baustatischer Fragestellungen.

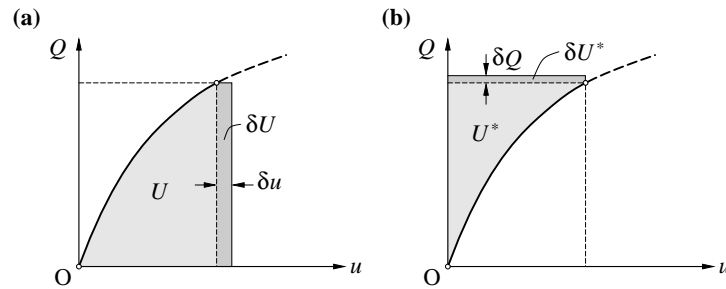
Neben den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts lassen sich einige weitere wichtige Aussagen ableiten, deren Gültigkeit sich auf linear elastische Systeme beschränkt.

Wird ein statisch zulässiger Spannungszustand mit zugehörigen Lasten  $q_{1k}$  und  $t_{1k}$  und ein mit ihm verträglicher Verschiebungszustand  $\{u_{1k}, \varepsilon_{1kj}\}$  sowie ein anderer statisch zulässiger Spannungszustand mit zugehörigen Lasten  $q_{2k}$  und  $t_{2k}$  und einem mit ihm verträglichen Verschiebungszustand  $\{u_{2k}, \varepsilon_{2kj}\}$  betrachtet, liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, wenn als virtueller Verschiebungszustand jeweils der mit dem anderen Spannungszustand verträgliche Verschiebungszustand verwendet wird

$$\int_V q_{1k} \delta u_{2k} dV + \int_{S_t} t_{1k} \delta u_{2k} dS_t - \int_V \sigma_{1kj} \delta \varepsilon_{2kj} dV = 0$$

bzw. (2.80)

$$\int_V q_{2k} \delta u_{1k} dV + \int_{S_t} t_{2k} \delta u_{1k} dS_t - \int_V \sigma_{2kj} \delta \varepsilon_{1kj} dV = 0$$



**Bild 2.8** – Satz von Castigliano (a) und Engesser (b) bei einer Last  $Q_j = Q$  mit korrespondierender Verschiebung  $w_j = w$ .

Gemäss (2.52) sind die beiden Formänderungsenergien identisch, und es resultiert

$$\int_V q_{1k} \delta u_{2k} dV + \int_{S_t} t_{1k} \delta u_{2k} dS_t = \int_V q_{2k} \delta u_{1k} dV + \int_{S_t} t_{2k} \delta u_{1k} dS_t \quad (2.81)$$

der *Satz von Betti*, wonach die beiden virtuellen Arbeiten der äusseren Kräfte identisch sind. Eine analoge Formulierung des Prinzips der virtuellen Kräfte liefert ferner die duale Beziehung

$$\int_V u_{1k} \delta q_{2k} dV + \int_{S_t} u_{1k} \delta t_{2k} dS_t + \int_{S_v} v_{1k} \delta r_{2k} dS_t = \int_V u_{2k} \delta q_{1k} dV + \int_{S_t} u_{2k} \delta t_{1k} dS_t + \int_{S_v} v_{1k} \delta r_{2k} dS_t \quad (2.82)$$

eine zum Satz von Betti duale Aussage, wonach die beiden virtuellen Ergänzungsarbeiten der äusseren Kräfte ebenfalls identisch sind.

Nachfolgende Betrachtungen beschränken sich auf Systeme, welche an  $n$  Punkten Lasten (Einzelkräfte bzw. -momente) mit Beträgen  $Q_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) mit korrespondierenden Verschiebungen (bzw. Verdrehungen)  $w_k$  unterworfen werden. Die Formänderungs- bzw. Ergänzungsenergie beträgt mit  $Q_k = c_{kj} w_j$  bzw.  $w_k = n_{kj} Q_j$  analog (2.51)

$$U = \frac{1}{2} c_{ml} w_m w_l \quad \text{bzw.} \quad U^* = \frac{1}{2} f_{ml} Q_m Q_l \quad (2.83)$$

wobei  $c_{ml}$  und  $f_{ml}$  die *Steifigkeits-* bzw. *Nachgiebigkeitskoeffizienten* bezeichnen. Mit (2.79) bzw. (2.75) resultiert

$$f_{ml} = f_{lm} \quad \text{bzw.} \quad c_{ml} = c_{lm} \quad (2.84)$$

der *Satz von Maxwell*, wonach die Verschiebung  $f_{ml}$  an Stelle und in Richtung  $Q_m$  infolge einer Einheitslast  $Q_l = 1$  identisch ist der Verschiebung  $f_{ml}$  an Stelle und in Richtung  $Q_l$  infolge einer Einheitslast  $Q_m = 1$ , bzw. die dazu duale Aussage, wonach die Reaktion  $c_{ml}$  an Stelle und in Richtung  $v_m$  infolge einer Einheitsverschiebung  $v_l = 1$  identisch ist der Reaktion  $c_{lm}$  an Stelle und in Richtung  $v_l$  infolge einer Einheitsverschiebung  $v_m = 1$ <sup>1</sup>. Lasten können wiederum vorübergehend als Reaktionen und die ihnen korrespondierender Verschiebungen als eingepägt aufgefasst werden und umgekehrt.

Wirken auf ein initial spannungsfreies System mit einem linear elastischen Werkstoffverhalten lediglich vorgeschriebene äussere Kräfte (Lasten), gilt infolge  $U = -H/2 = U^* > 0 = H^*$  die Relation  $\Phi = -U = -\Phi^* < 0$ . Wirken umgekehrt nur eingepägte Verschiebungen, gilt infolge  $U^* = -H^*/2 = U > 0 = H$  die Relation  $\Phi^* = -U^* = -\Phi < 0$ .

<sup>1</sup> Man beachte, dass die resultierenden Verschiebungen bzw. Reaktionen infolge der dimensionslosen Einheitslast- bzw. verschiebungsgrössen nicht die Dimensionen der entsprechenden Verschiebungs- bzw. Kraftgrössen aufweisen.

Beispiele zur Veranschaulichung der Zusammenhänge folgen in Kapitel 2.6.4 (Bild 2.14) und Kapitel 2.5.3 (Bild 2.9).

### 2.5.3 Vereinfachungen und Näherungsverfahren

#### Kinematische Hypothesen

Für die Behandlung baustatischer Fragestellungen ergeben sich durch das Einführen oder Lösen *kinematischer Bindungen*<sup>1</sup>, was mit dem Begriff „kinematische Hypothesen“ umschrieben wird, entscheidende Vereinfachungen. Im erstgenannten Fall werden dabei die kinematischen, im zweiten die statischen Freiheitsgrade reduziert. Das infinitesimale Verschiebungsfeld wird damit mit der gewünschten Genauigkeit durch *verallgemeinerte Verzerrungen* beschrieben. Alle Spannungen, die an einer verallgemeinerten Verzerrung  $\eta_m$  Arbeit leisten, werden zur korrespondierenden Resultierenden, der *verallgemeinerten Spannung*  $S_m$ , zusammengefasst. Die beiden *korrespondierenden* verallgemeinerten Größen sind also derart definiert, dass

$$S_m \eta_m = \int_S \sigma_{kj} \varepsilon_{kj} dS \quad (2.85)$$

die spezifische, auf eine Längeneinheit oder Flächeneinheit bezogene, virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist (der Verschiebungszustand braucht dabei mit dem Spannungszustand nicht verträglich zu sein). Die spezifische Formänderungs- und Ergänzungsenergie betragen somit

$$U_0 = \int_{\eta_m} S_m(\eta_m) d\eta_m \quad \text{und} \quad U_0^* = \int_{S_m} \eta_m(S_m) dS_m \quad (2.86)$$

und an Stelle von (2.40), (2.42) und (2.43) folgen

$$S_k = \frac{\partial U_0}{\partial \eta_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S_k}{\partial \eta_j} = \frac{\partial S_j}{\partial \eta_k} \quad (2.87)$$

sowie

$$\eta_k = \frac{\partial U_0^*}{\partial S_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta_k}{\partial S_j} = \frac{\partial \eta_j}{\partial S_k} \quad (2.88)$$

Spannungen, die zwar für das Gleichgewicht erforderlich sind, infolge der zusätzlichen kinematischen Bindungen allerdings keinen Beitrag zur spezifischen Formänderungsenergie leisten, lassen sich zu sog. *verallgemeinerten Reaktionen* zusammenfassen.

Bei Biegebalken beispielsweise wird üblicherweise angenommen, dass senkrecht zur Stabachse stehende Querschnitte auch in der verformten Lage eben sind und senkrecht zur verformten Stabachse stehen. Man stellt sich also vor, dass der Zusammenhang zwischen den Fasern gelöst sei und die Querschnitte sich wie starre Ebenen bewegen. Mithin wird der Verschiebungszustand durch die Längsdehnung in einem beliebigen Querschnittspunkt und die beiden Querschnittskrümmungen vollständig beschrieben. Mit diesen drei verallgemeinerten Verzerrungen korrespondieren die Nor-

---

<sup>1</sup> Grundsätzlich können Systeme auch *statische Bindungen*, d. h. Restriktionen des Spannungszustands, aufweisen. Beispiele hierzu sind Systeme mit vorgespannten Elementen, bei welchen gewisse Spannungen vorgegeben sind, oder eine Lagerung über ein System von Hydraulikzylindern mit geschlossenem Flüssigkeitskreislauf. Wird einem System eine zusätzliche statische Bindung auferlegt, so wird gleichzeitig eine kinematische Bindung entfernt und umgekehrt. Statische und kinematische Bindungen sind also reziprok, und jede statische Bindung lässt sich in eine kinematische Bindung transformieren. Im vorliegenden Kapitel erfolgen die Betrachtungen wie üblich mit kinematischen Bindungen, die Aussagen lassen sich entsprechend der Reziprozität umformulieren.

malkraft und die beiden Biegemomente als verallgemeinerte Spannungen. Da die zusätzlich eingeführten kinematischen Bindungen Schiebungen ausschliessen, leisten die Schubspannungen keinen Beitrag zur spezifischen Formänderungsenergie, und deren Querschnittsresultierende, die Querkräfte, stellen somit verallgemeinerte Reaktionen dar. Bei rahmenartigen Stabtragwerken wird die Schwerachse zudem häufig als in Längsrichtung starr angenommen, so dass die Normalkraft ebenfalls zur verallgemeinerten Reaktion wird. Demselben Prinzip folgend werden oft ganze Bestandteile von Tragstrukturen als starr oder völlig schlaff angenommen, indem entsprechende kinematische Bindungen eingeführt bzw. gelöst werden.

Liegt ein System mit einer endlichen Anzahl kinematischer Freiheitsgrade und entsprechenden verallgemeinerten Verzerrungen vor, kann das Gesamtpotential unter Ausnützung der kinematischen Beziehungen als Funktion von  $n$  unbekanntem verallgemeinerten Verzerrungen  $\eta_k$  beschrieben werden. Das Variationsproblem (2.65) geht dann in ein gewöhnliches Extremalproblem über,

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta_k} \delta\eta_k = 0 \quad , \text{ und somit gilt } \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta_k} = 0 \quad (2.89)$$

da (2.89)<sub>1</sub> für beliebige virtuelle verallgemeinerte Verzerrungen resp. Variationen  $\delta\eta_k$  gilt. (2.89) liefert somit  $n$  Gleichungen zur Bestimmung der  $n$  unbekanntem verallgemeinerten Verzerrungen. Bei linear elastischen Systemen resultiert dabei ein lineares Gleichungssystem. (2.89)<sub>2</sub> folgt auch direkt mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Formulierung (2.62), indem an Stelle und in Richtung einer unbekanntem verallgemeinerten Verzerrung eine virtuelle verallgemeinerte Verzerrung  $\delta\eta_k$  aufgebracht wird, während an Stelle und in Richtung der übrigen verallgemeinerten Verzerrungen keine virtuellen verallgemeinerten Verzerrungen eingeführt werden. Als primäre Unbekannte werden also die verallgemeinerten Verzerrungen gewählt und mit (2.89) bestimmt, was als *Deformationsmethode* (*Verformungsmethode*, *Weggrössenverfahren*) bezeichnet wird.

Kann analog das komplementäre Gesamtpotential unter Ausnützung der statischen Beziehungen als Funktion einer endlichen Anzahl,  $n$ , unbekannter verallgemeinerter Spannungen und Reaktionen  $X_k$  (statisch überzählige Grössen) beschrieben werden, spricht man von einem  $n$ -fach statisch unbestimmten System. Das Variationsproblem (2.70) geht dann in ein gewöhnliches Extremalproblem über,

$$\delta\Phi^* = \frac{\delta\Phi^*}{\partial X_k} \delta X_k = 0 \quad , \text{ und somit gilt } \quad \frac{\delta\Phi^*}{\partial X_k} = 0 \quad (2.90)$$

da (2.90)<sub>1</sub> für beliebige verallgemeinerte Spannungen und Reaktionen resp. Variationen  $\delta X_k$  gilt. (2.90)<sub>2</sub> kann auch direkt aus dem Prinzip der virtuellen Kräfte in der Formulierung (2.62) gewonnen werden, indem an Stelle und in Richtung einer verallgemeinerten Spannung oder Reaktion  $X_k$  eine virtuelle verallgemeinerte Spannung oder Reaktion  $\delta X_k$  aufgebracht wird, während an Stelle und in Richtung der übrigen verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen keine virtuellen verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen wirken. (2.90) liefert somit  $n$  Gleichungen zur Bestimmung der  $n$  unbekanntem verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen. Bei linear elastischen Systemen resultiert dabei wiederum ein lineares Gleichungssystem. Als primäre Unbekannte werden also die nicht mit den statischen Beziehungen alleine bestimmbaren verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen gewählt und mit (2.90) bestimmt, was als *Kraftmethode* (*Kraftgrössenverfahren*) bezeichnet wird.

### Verallgemeinerte Lasten und verallgemeinerte Verschiebungen

Im Rahmen baustatischer Fragestellungen wird das System einer beschränkten Anzahl Lastengruppen unterworfen. Spannungszustände sind folglich nicht willkürlich wählbar, sondern müssen mit diesen Lasten im Gleichgewicht sein. Entsprechend ist das System gewissen Bindungen unterworfen, so dass die Verschiebungszustände nicht willkürlich gewählt werden können, sondern diesen Bindungen genügen müssen. Man beschränkt sich also auf die Betrachtung spezieller Zustände.

Die aus  $n$  Lastgruppen bestehende, also  $n$ -parametrische, Belastung lässt sich mit einer endlichen Anzahl Parameter  $Q_m$ , den *verallgemeinerten Lasten* beschreiben. Eine identische Anzahl Parameter

$w_m$ , die verallgemeinerten Verschiebungen, welche den Verschiebungszustand festlegen, werden derart definiert, dass die Arbeit der äusseren Kräfte identisch  $Q_m w_m$  ist.

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten

$$Q_m w_m = \int_V \sigma_{kj} \varepsilon_{kj} dV \tag{2.91}$$

wobei der Verschiebungszustand mit dem Spannungszustand nicht verträglich zu sein braucht, lassen sich die verallgemeinerten Lasten  $Q_m(\sigma_{kj})$  und die korrespondierenden verallgemeinerten Verschiebungen  $w_m(\varepsilon_{kj})$  explizit als Funktionen der lokalen Grössen definieren.

Die Formänderungsenergie kann damit als Funktion der verallgemeinerten Verschiebungen und die Ergänzungsenergie als Funktion der verallgemeinerten Lasten ausgedrückt werden. Der Satz von Castigliano (2.73) sowie die Beziehung (2.75) und der Satz von Engesser (2.78) sowie die Beziehung (2.79) gelten folglich auch für verallgemeinerte Lasten und mit ihnen verträgliche verallgemeinerte Verschiebungen. Tab. 2.1 fasst die Beziehungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen sowie zwischen den entsprechenden verallgemeinerten Grössen zusammen.

Spannungen $\sigma_{kj}$  $\sigma_{kj} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{kj}}$ und $\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial \varepsilon_{kj}}$ (2.40) <sub>2</sub> (2.42)	Verzerrungen $\varepsilon_{kj}$  $\varepsilon_{kj} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{kj}}$ und $\frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial \sigma_{lm}} = \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial \sigma_{kj}}$ (2.43)
verallgemeinerte Spannungen $S_k$  $S_k = \frac{\partial U_0}{\partial \eta_k}$ und $\frac{\partial S_k}{\partial \eta_j} = \frac{\partial S_j}{\partial \eta_k}$ (2.87)	verallgemeinerte Verzerrungen $\eta_k$  $\eta_k = \frac{\partial U_0^*}{\partial S_k}$ und $\frac{\partial \eta_k}{\partial S_j} = \frac{\partial \eta_j}{\partial S_k}$ (2.91)
verallgemeinerte Lasten $Q_k$  $Q_k = \frac{\partial U}{\partial w_k}$ und $\frac{\partial Q_k}{\partial w_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial w_k}$ (2.73) (2.75)	verallgemeinerte Verschiebungen $w_k$  $w_k = \frac{\partial U^*}{\partial Q_k}$ und $\frac{\partial w_k}{\partial Q_j} = \frac{\partial w_j}{\partial Q_k}$ (2.78) (2.79)

**Tab. 2.1** – Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen sowie zwischen den entsprechenden verallgemeinerten Grössen konservativer Systeme.

### Näherungsverfahren

Die Sätze vom Minimum des Gesamtpotentials und vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials eröffnen alternative Möglichkeiten, um mittels Einführen oder Lösen kinematischer Bindungen Näherungslösungen zu erhalten, das Verfahren von *Rayleigh-Ritz* sowie weitere verwandte Verfahren wie jenes von Galyorkin (meist „Galerkin“ geschrieben) oder Trefftz. Nachfolgende Betrachtungen beschränken sich auf das Verfahren von Rayleigh-Ritz. Einige Bemerkungen zur *Methode der Finiten Elemente*, welche unter anderem auf dem Verfahren von Rayleigh-Ritz beruht, folgen am Schluss des Abschnitts.

Beim Verfahren von Rayleigh-Ritz werden die unbekannt Funktionen verallgemeinerter Verzerrungen bzw. Spannungen durch Linearkombinationen kinematisch zulässiger bzw. statisch zulässiger Ansatzfunktionen mit einer endlichen Anzahl unbekannter verallgemeinerter Verzerrungen bzw. Spannungen ersetzt, welche mit (2.89) bzw. (2.90) bestimmt werden können. Die teilweise nur mit grossem Aufwand oder nicht lösbarer Euler'schen Differentialgleichungen der Variationsprobleme (2.65) und (2.70) werden somit näherungsweise durch gewöhnliche Extremalprobleme ersetzt. Im Gegensatz zu den Vereinfachungen mittels kinematischer Hypothesen ist das Verfahren von *Ray-*

*leigh-Ritz* tendenziell eher mathematischer Natur, da das Einführen und Lösen kinematischer Bindungen praktisch willkürlich ohne direkten Bezug zum mechanischen Verhalten des Systems erfolgt.

Bei kinematischen Ansatzfunktionen werden zusätzliche kinematische Bindungen eingeführt und damit die kinematischen Freiheitsgrade reduziert. Beim Beispiel des elastisch gebetteten einfachen Balkens in Bild 2.9 mit einer Einzellast  $Q$  in Feldmitte wird beispielsweise die unbekannte Durchbiegungsfunktion  $w(x)$  durch die in Bild 2.9(a) dargestellte Funktion  $w_k(x)$  mit  $n$  unbekanntem Verschiebungen  $w_j$  ersetzt. Damit wird die Anzahl kinematisch zulässiger, virtueller Verschiebungszustände eingeschränkt, mit welchen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen formuliert werden kann. Gemäss diesem erfüllt ein Spannungszustand die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen dann und nur dann (exakt), wenn die virtuelle Arbeit für *jeden* kinematisch zulässigen, virtuellen Verschiebungszustand des Systems (*ohne* zusätzliche kinematische Bindungen) verschwindet. Folglich erfüllt der mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. dem daraus abgeleiteten Satz vom Minimum des Gesamtpotentials bei einer beschränkten Anzahl kinematisch zulässiger virtueller Verschiebungszustände bestimmte Spannungszustand die statischen Beziehungen im Allgemeinen nicht exakt. Um diese exakt zu erfüllen, müssen dem System in der Regel zusätzliche äussere Kräfte auferlegt werden, welche den Gleichgewichtsverletzungen entsprechen und entsprechend *residuale Lasten* genannt werden. Beim Beispiel in Bild 2.9 resultieren beispielsweise bei einem eingliedrigen Verschiebungsansatz ( $n = 1$ ) die in Bild 2.9(b) dargestellten residualen Kräfte  $q_r$  und  $Q_r$ . Wird der kinematische Freiheitsgrad erhöht, so werden die Anzahl kinematisch zulässiger, virtueller Verschiebungszustände vergrössert, die Gleichgewichtsverletzungen reduziert und die Näherungslösung somit verbessert.

Für Verschiebungen liefern Näherungslösungen mit wenigen Freiheitsgraden in der Regel bereits gute Lösungen. Die durch Differenzierung aus dem Verschiebungszustand gewonnenen Kraftgrössen büssen allerdings bei jeder Differenzierung an Genauigkeit ein, womit je nach Problemstellung eine Erhöhung der Anzahl kinematischer Freiheitsgrade notwendig wird. Die für die exakte Erfüllung der statischen Beziehungen notwendigen residualen Kräfte führen bezüglich der exakten Lösung zu einem höheren Gesamtpotential, was den Satz vom Minimum des Gesamtpotentials bestätigt. Die Steifigkeit des Systems wird überschätzt, in dem Sinn, dass die mit den verallgemeinerten Lasten korrespondierenden verallgemeinerten Verschiebungen im Mittel zu tief resp. die mit den eingepprägten verallgemeinerten Verschiebungen korrespondierenden verallgemeinerten Reaktionen zu hoch ausfallen. Bezüglich einer einzelnen verallgemeinerten Verschiebung lässt sich nur bei einer ein-parametrischen Belastung eine Aussage machen; bezüglich einer einzelnen Verschiebung nur, falls die ein-parametrische verallgemeinerte Last aus einer konzentrierten Last (Einzellast oder -moment) besteht. Für Reaktionen und korrespondierende eingepprägte Verschiebungen gilt die analoge Aussage. Beim Beispiel in Bild 2.9 wird somit die korrespondierende Mittendurchbiegung  $f$  der äusseren Last  $Q$  unterschätzt, siehe Bild 2.9(c, g).

Bild 2.9(c) zeigt die Last-Mittendurchbiegungs-Charakteristik der Näherungslösung  $OB_k$  im Vergleich zur exakten Lösung  $OB$ . Die Formänderungsenergie der exakten Lösung bzw. Näherungslösung entspricht der Fläche  $OBC$  bzw.  $OB_kC_k$ , das negative Potential der Last der Fläche  $OABC$  bzw.  $OAB_kC_k$  und das negative Gesamtpotential der Fläche  $OAB$  bzw.  $OAB_k$ . Da ein linear elastisches Werkstoffverhalten angenommen wird und keine spannungsunabhängigen Verzerrungen eingeführt werden, entspricht die Formänderungsenergie der Ergänzungsenergie, welche infolge verschwindenden Potentials der Reaktionen mit dem komplementären Gesamtpotential übereinstimmt. Wird anstelle der Last  $Q$  deren korrespondierende Verschiebung, die Mittendurchbiegung  $f$ , vorgeschrieben, so wird umgekehrt die als Reaktion aufgefasste Last  $Q$  überschätzt, siehe Bild 2.9(d, h).

Bild 2.9(c) zeigt die Last-Mittendurchbiegungs-Charakteristik der Näherungslösung  $OB_k$  im Vergleich zur exakten Lösung  $OB$ . Die Formänderungsenergie der exakten Lösung bzw. Näherungslösung entspricht der Fläche  $OBC$  bzw.  $OB_kC$ , das negative Potential der als Reaktion aufgefassten Last  $Q$  bzw.  $Q_k$  der Fläche  $OABC$  bzw.  $OA_kB_kC$  und das negative komplementäre Gesamtpotential der Fläche  $OAB$  bzw.  $OA_kB_k$ . Da ein linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt wird und keine spannungsunabhängigen Verzerrungen eingeführt werden, entspricht die Ergänzungsenergie der Formänderungsenergie, welche infolge verschwindenden Potentials der Lasten mit dem Gesamtpotential übereinstimmt.



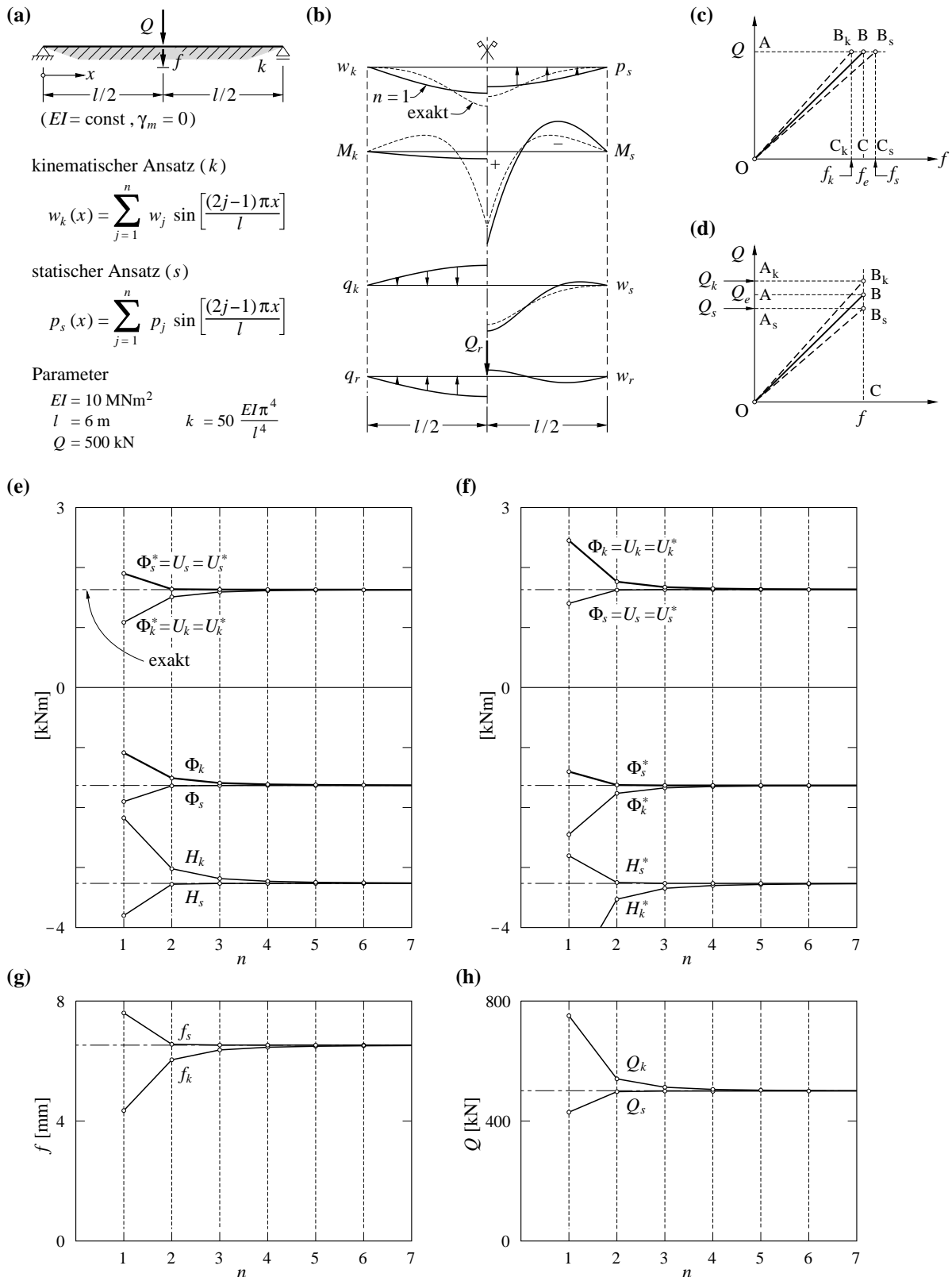
Bei statischen Ansatzfunktionen werden kinematische Bindungen gelöst und damit die statischen Freiheitsgrade reduziert. Beim Beispiel in Bild 2.9 wird beispielsweise die Funktion der elastischen Bettung  $p(x)$  durch die in Bild 2.9(a) dargestellte Funktion  $p_s(x)$  mit  $n$  unbekannten Reaktionen  $p_j$  ersetzt. Somit wird die Anzahl statisch zulässiger, virtueller Spannungszustände eingeschränkt, mit welchen das Prinzip der virtuellen Kräfte formuliert werden kann. Gemäss diesem erfüllt ein Verschiebungszustand die Verträglichkeitsbedingungen und die kinematischen Randbedingungen dann und nur dann (exakt), wenn die virtuelle Arbeit für *jeden* statisch zulässigen, virtuellen Spannungszustand des Systems (*ohne* gelöste kinematische Bindungen) verschwindet. Folglich erfüllt der mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte bzw. dem daraus abgeleiteten Satz vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials bei einer beschränkten Anzahl statisch zulässiger, virtueller Spannungszustände bestimmte Verschiebungszustand die kinematischen Beziehungen im Allgemeinen nicht exakt. Um diese exakt zu erfüllen, müssen dem System in der Regel zusätzliche Verschiebungen auferlegt werden, in der Folge *residuale Verschiebungen* genannt, welche den Verträglichkeitsverletzungen entsprechen. Beim Beispiel in Bild 2.9 resultieren bei einer Last  $Q$  in Feldmitte und einem eingliedrigem Ansatz ( $n=1$ ) beispielsweise die in Bild 2.9(b) dargestellten residualen Verschiebungen  $w_r$ . Wird der statische Freiheitsgrad erhöht, so werden die Anzahl statisch zulässiger, virtueller Spannungszustände vergrössert, die Verträglichkeitsverletzungen reduziert und die Näherungslösung somit verbessert.

Die für die exakte Erfüllung der kinematischen Beziehungen notwendigen residualen Verschiebungen führen bezüglich der exakten Lösung zu einem höheren komplementären Gesamtpotential, was den Satz vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials bestätigt. Das System wird infolgedessen zu weich angenommen, in dem Sinn, dass die mit den verallgemeinerten Lasten korrespondierenden verallgemeinerten Verschiebungen im Mittel zu hoch resp. die mit eingepprägten verallgemeinerten Verschiebungen korrespondierenden verallgemeinerte Reaktionen zu tief ausfallen. Bezüglich einer einzelnen verallgemeinerten Verschiebung lässt sich wiederum nur bei einer einparametrischen Belastung eine Aussage machen; bezüglich einer einzelnen Verschiebung nur, falls die ein-parametrische verallgemeinerte Last aus einer Einzellast besteht. Für Reaktionen und korrespondierende Verschiebungen gilt die analoge Aussage. Beim Beispiel in Bild 2.9 wird somit die korrespondierende Mittendurchbiegung  $f$  überschätzt, siehe Bild 2.9(c, e, g).

Bild 2.9(d) zeigt die Last-Mittendurchbiegungscharakteristik der Näherungslösung  $OB_s$  im Vergleich zur exakten Lösung  $OB$ . Die Formänderungsenergie der exakten Lösung bzw. Näherungslösung entspricht der Fläche  $OBC$  bzw.  $OB_sC_s$ , das negative Potential der Last der Fläche  $OABC$  bzw.  $OAB_sC_s$  und das negative Gesamtpotential der Fläche  $OAB$  bzw.  $OAB_s$ .

Wird anstelle der Last  $Q$  deren korrespondierende Verschiebung, die Mittendurchbiegung  $f$ , vorgeschrieben, so wird umgekehrt die als Reaktion aufgefasste Last  $Q$  unterschätzt, siehe Bild 2.9(d, f, h). Bild 2.9(c) zeigt die Last-Mittendurchbiegungs-Charakteristik der Näherungslösung  $OB_s$  im Vergleich zur exakten Lösung  $OB$ . Die Formänderungsenergie der exakten Lösung bzw. Näherungslösung entspricht der Fläche  $OBC$  bzw.  $OB_sC$ , das negative Potential der als Reaktion aufgefassten Last  $Q$  bzw.  $Q_k$  der Fläche  $OABC$  bzw.  $OA_sB_sC$  und das negative komplementäre Gesamtpotential der Fläche  $OAB$  bzw.  $OA_sB_s$ . Da es sich um ein initial eigenspannungsfreies linear elastisches System ohne spannungsunabhängige Verzerrungen handelt, gilt gemäss Bild 2.9(e) bei einer vorgeschriebenen Kraft  $\Phi = H/2 = -U = -U^* = -\Phi^* < 0 = H^*$ ; bei einer vorgeschriebenen Verschiebung gilt umgekehrt  $\Phi = U = U^* = -H/2 = -\Phi^* > 0 = H$ ; siehe Bild 2.9(f).

Die Berechnungen zum Beispiel in Bild 2.9 können dem Anhang A entnommen werden. Häufig werden Ansatzfunktionen gewählt, die das aus (2.89) bzw. (2.90) resultierende Gleichungssystem entkoppeln, womit die Unbekannten direkt bestimmt werden können und das Gleichungssystem beim Erhöhen der Anzahl Freiheitsgrade nicht jedes Mal von Neuem ausgewertet werden muss. Derartige Ansatzfunktionen werden *orthogonal* genannt; Fourier-Reihenansätze, wie sie beim Beispiel in Bild 2.9 verwendet werden, sind beispielsweise orthogonal. Statische Ansätze werden weit weniger häufig verwendet als kinematische, da sich das Auffinden statisch zulässiger Spannungszustände meist schwierig gestaltet und die korrespondierenden Verschiebungen durch Integration unter Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen ermittelt werden müssen. Klassische Anwendungen statischer Ansatzfunktionen sind Fragestellungen mit Spannungsfunktionen, z. B. die Airysche Span-



**Bild 2.9** – Näherungslösung: (a) System, Ansatzfunktionen und Parameter; (b) Ergebnisse bei Verwendung eines kinematischen bzw. statischen Ansatzes bei  $n=1$  im Vergleich zur exakten Lösung; (c) bzw. (d) Last-Mittendurchbiegungs-Diagramme bei einer Last bzw. vorgeschriebenen Mittendurchbiegung; (e) und (f) Potentialgrößen bei einer Last  $Q=500 \text{ kN}$  bzw. einer vorgeschriebenen Mittendurchbiegung  $f=6,53 \text{ mm}$ ; (g) Mittendurchbiegung bei einer Last  $Q=500 \text{ kN}$ ; (h) Last bei einer vorgeschriebenen Mittendurchbiegung  $f=6,53 \text{ mm}$ .

nungsfunktion bei Scheiben und die Prandtl'sche Torsionsfunktion, denn die aus diesen abgeleiteten Spannungen sind stets statisch zulässig.

Die Steifigkeit eines Systems wird durch einen kinematischen bzw. statischen Ansatz über- bzw. unterschätzt. Die Eingabelung der exakten Lösung durch Näherungslösungen beider Ansätze lässt sich wegen der Schwierigkeiten beim Auffinden einer Näherungslösung mit einem statischen Ansatz allerdings nur in wenigen Fällen realisieren.

Computergestützte Berechnungen erfolgen praktisch ausschliesslich nach der *Methode der Finiten Elemente*. Dabei werden abschnittsweise kontinuierliche Systeme in *diskrete Systeme* überführt, welche aus einer endlichen Anzahl Punkte, sog. *Knoten*, bestehen. Diskrete verallgemeinerte Spannungen und korrespondierende Verzerrungen sowie verallgemeinerte Lasten (bzw. Reaktionen) und korrespondierende Verschiebungen existieren nur in diesen Knoten. Durch die Verbindung benachbarter Knotenpunkte mit Linien oder Flächen werden kontinuierliche Körper in *finite Elemente* aufgeteilt, welche zur näherungsweise Bestimmung der Nachgiebigkeits- oder Steifigkeitswechselwirkungen zwischen den einzelnen Knoten dienen.

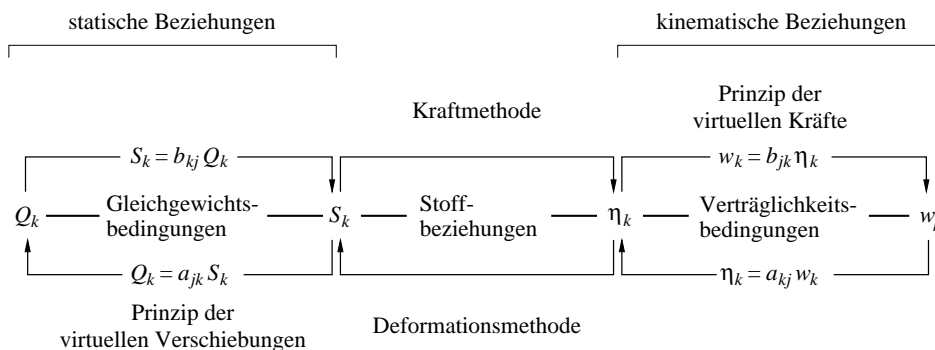
Bei einem Vorgehen gemäss der Deformationsmethode werden durch Annahme kinematischer Ansatzfunktionen innerhalb der finiten Elemente die verallgemeinerten Knotenspannungen, unter der Bedingung, dass diese die Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten erfüllen, bestimmt. Beim dualen Vorgehen gemäss der Kraftmethode werden durch Annahme statischer Ansatzfunktionen innerhalb der finiten Elemente die verallgemeinerten Knotenverzerrungen mit der Bedingung, dass diese die Verträglichkeitsbedingungen in den Knoten erfüllen, bestimmt. Das Verfahren von Rayleigh-Ritz wird dabei jeweils über ein finites Element angewandt, und die diesbezüglich erlangten Folgerungen behalten ihre Gültigkeit. Durch Vergrösserung der Anzahl Knoten bei gleichen kinematischen bzw. statischen Ansatzfunktionen innerhalb der Elemente werden die entsprechenden Freiheitsgrade erhöht, was zu genaueren Lösungen führt. Durch die Diskretisierung mit abschnittswisen, relativ einfachen Ansatzfunktionen können mit der Methode der Finiten Elemente im Gegensatz zum Verfahren von Rayleigh-Ritz auch Strukturen mit geometrisch komplizierter Berandung untersucht werden, ausserdem wird der Rechenaufwand erheblich reduziert.

Die das Tragverhalten diskreter Systeme beschreibenden Beziehungen lassen sich mit Hilfe der Matrizen Schreibweise sehr übersichtlich und für eine computergestützte Berechnung geeignet darstellen. Die Unterscheidung zwischen Rand- und Innenbereichen entfällt, da jeder Knoten in beiden Bereichen liegt. Gemäss dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. Kräfte werden statisch zulässige verallgemeinerte Lasten  $Q_k$  und Spannungen  $S_k$  *kontragredient* zu kinematisch zulässigen verallgemeinerten Verschiebungen  $w_k$  und Verzerrungen  $\eta_k$  transformiert bzw. umgekehrt, d. h. es gilt folgender fundamentaler Zusammenhang [2, 74] (siehe Bild 2.10)

$$S_k = b_{kj} Q_j \quad \text{und} \quad w_k = b_{jk} \eta_j \quad \text{bzw.} \quad \eta_k = a_{kj} w_j \quad \text{und} \quad Q_k = a_{jk} S_j \quad (2.92)$$

$a_{kj}$  und  $b_{kj}$  bezeichnen die Koeffizienten der entsprechenden Transformationsmatrizen, für welche bei statisch bestimmten Systemen ferner  $a_{kj} b_{jk} = \delta_{kj}$  bzw.  $b_{kj} a_{jk} = \delta_{kj}$  gilt. Die Kontragredienzeigenschaften (2.92) diskreter Systeme entsprechen der Adjungiertheit der Feldoperatoren abschnittsweise kontinuierlicher Systeme (siehe 2.4.3). Damit lässt sich die Kraftmethode bei eingepprägten Verschiebungen (eingepprägten Kräften) absolut dual zur Deformationsmethode bei eingepprägten Kräften (eingepprägten Verschiebungen) formulieren [2]; siehe Bild 2.10.

Da sich  $a_{kj}$  für jedes diskrete System (falls alle Knotenverschiebungen als Variablen  $w_k$  eingeführt werden) direkt bestimmen lässt, ist der Algorithmus der Deformationsmethode bei statisch unbestimmten diskreten Systemen direkter als jener der Kraftmethode. Die Deformationsmethode besitzt ausserdem den Vorteil, dass der Verschiebungszustand eines finiten Elements nur von den verallgemeinerten Verzerrungen des Elements abhängt, während der Spannungszustand eines finiten Elements bei der Kraftmethode auch von den verallgemeinerten Spannungen der anderen Elemente abhängt, was den Lösungsalgorithmus zusätzlich erschwert. Da die Voraussetzung infinitesimal kleiner Verschiebungen die Anwendungsmöglichkeiten der Kraftmethode ausserdem beschränkt, und sich das Auffinden geeigneter statischer Ansatzfunktionen oft schwierig gestaltet, arbeiten auf der



**Bild 2.10** – Übersicht über die baustatischen Beziehungen diskreter Systeme.

Methode der Finiten Elemente beruhende Berechnungsprogramme praktisch ausschliesslich gemäss der Deformationsmethode mit kinematischen Ansatzfunktionen.

## 2.6 Plastizitätstheorie

### 2.6.1 Allgemeines

Das *plastische* Verhalten oder Fliessen eines Werkstoffs, zeichnet sich dadurch aus, dass die eingetragene Energie mindestens teilweise dissipiert, d. h. in Wärmeenergie überführt wird. Wird die nach dem Erreichen der Fließgrenze zusätzlich eingetragene Energie vollständig dissipiert, weist der Werkstoff also keine Verfestigung auf, und erfolgt eine Entlastung vollständig elastisch, spricht man von *ideal plastischem* Verhalten. Neben der Annahme, dass die Verschiebungen infinitesimal klein sind, wird vorausgesetzt, dass die Verzerrungen keine Beschränkung durch Auftrennen des Werkstoffgefüges, also den Bruch, aufweisen.

Die nachfolgenden Erläuterungen beschränken sich auf die Traglastverfahren und die zu deren Formulierung erforderlichen Grundlagen. Notwendige Voraussetzung dazu ist, dass der Werkstoff ein ideal plastisches Verhalten aufweist. Eine umfassende Darstellung der Plastizitätstheorie findet man in [26, 62, 88].

### 2.6.2 Fließbedingung und plastisches Potential

Die Gesamtheit aller Spannungszustände  $\sigma_{kj}$ , bei welchen kein Fliessen eintritt wird *aplastischer Bereich* genannt. Dieser Bereich umfasst im sechsdimensionalen (Euklid'schen) Spannungsraum den Ursprung und wird durch die Fließfläche begrenzt, welche durch die Fließbedingung

$$Y(\sigma_{kj}) = 0 \tag{2.93}$$

beschrieben wird. Die vom Verformungsvorgang unabhängige Fließfläche umfasst die Gesamtheit aller Spannungszustände  $\sigma_{kj}$  eines ideal plastischen Werkstoffs, bei welchen Fliessen eintritt<sup>1</sup>. Das Vorzeichen der Fließfunktion  $Y(\sigma_{kj})$  wird üblicherweise so definiert, dass diese im aplastischen Bereich negative Werte liefert. Besteht die Fließfläche aus  $n$  verschiedenen, mit Fließbedingungen  $Y_m(\sigma_{kj}) = 0$  beschriebenen Abschnitten, dann beginnt der Werkstoff zu fließen, falls mindestens eine Fließbedingung erfüllt ist. Spannungen, für welche  $Y(\sigma_{kj}) > 0$  ist, sind unzulässig.

<sup>1</sup> Im Gegensatz zu einem ideal plastischen Werkstoff ändert sich die Fließfunktion bei einem plastischen Werkstoff mit *Verfestigung* während des plastischen Verformungsprozesses.

Die spezifische Arbeit der inneren Kräfte lässt sich in einen elastischen Anteil, welcher der negativen spezifischen Formänderungsenergie entspricht, und einen plastischen Anteil aufspalten

$$A_{i0} = -U_0(\varepsilon_{ekj}) - \int_{\varepsilon_{pkj}} \sigma_{kj} d\varepsilon_{pkj} \quad (2.94)$$

Entsprechend setzen sich die Verzerrungen  $\varepsilon_{kj}$  aus einem elastischen, d. h. reversiblen Anteil  $\varepsilon_{ekj}$  und einem plastischen, d. h. irreversiblen Anteil  $\varepsilon_{pkj}$  zusammen. Der zweite Summand in (2.94) wird *spezifische Dissipationsenergie* genannt und nachfolgend mit  $D_0$  bezeichnet. Bild 2.11(a) zeigt die spezifische Formänderungsenergie  $U_0$ , die spezifische Ergänzungsenergie  $U_0^*$  sowie die spezifische Dissipationsenergie  $D_0$  für einen linear elastisch-ideal plastischen Werkstoff bei einem einachsigen Spannungszustand während des Fließens. Die beim Fließbeginn im Punkt A gespeicherte spezifische Formänderungsenergie bleibt während des anschliessenden Fließens vom Punkt A zum Punkt B konstant, während die zusätzlich eingetragene Energie vollständig dissipiert wird.

Bei den Traglastverfahren beschränken sich die Betrachtungen auf die plastischen Verzerrungen. Mithin kann direkt von einem starr-ideal plastischen Werkstoffverhalten ausgegangen werden, bei welchem die eingetragene Energie vollständig dissipiert wird. Da der Fließmechanismus durch die Verhältnisse der plastischen Verzerrungsinkremente zueinander festgelegt ist und infinitesimale Verschiebungen vorausgesetzt werden, ist die absolute Grösse der plastischen Verzerrungen irrelevant, und der Verzerrungszustand kann mit *Verzerrungsinkrementen*  $\dot{\varepsilon}_{kj}$  beschrieben werden.

Bild 2.11(b) zeigt das Verhalten eines homogenen isotropen starr-ideal plastischen Werkstoffs im einachsigen Spannungszustand. Bewegt sich der Spannungsbildpunkt entlang OA, treten keine Verzerrungen auf, d. h. der Werkstoff verhält sich starr. Erreicht die Spannung im Punkt A die Fließgrenze  $\sigma = f_y$ , sind beliebig grosse zum Spannungsvektor koaxiale positive Verzerrungen ohne Spannungsänderung möglich. Erfolgt z. B. in B eine Entlastung verhält sich der Werkstoff wiederum starr. Bei vollständiger Entlastung entlang BC verbleibt die Verzerrung des Punktes B. Werden anschliessend Druckspannungen aufgebracht, so verhält sich der Werkstoff entlang CD starr. Beim Erreichen der Fließgrenze in Punkt D, d. h.  $\sigma = -f_y$ , treten beliebig grosse zum Spannungsvektor koaxiale negative Verzerrungen auf. Bewegt sich der Spannungsbildpunkt weiter entlang EFA, so stellt die Fläche BDEF die im gesamten Zyklus dissipierte spezifische Energie dar. Abgesehen von der spezifischen Dissipationsenergie lässt sich der selbe Zusammenhang auch direkt im Spannungsraum in Bild 2.11(c) darstellen. Liefern die beiden Fließfunktionen negative Werte, treten keine Verzerrungen auf. Für  $Y_t = 0$  bzw.  $Y_c = 0$  treten ausschliesslich positive bzw. negative Verzerrungen auf, also auch entsprechend positive bzw. negative Verzerrungsinkremente, was mit den Verzerrungsinkrementenvektoren veranschaulicht werden kann.

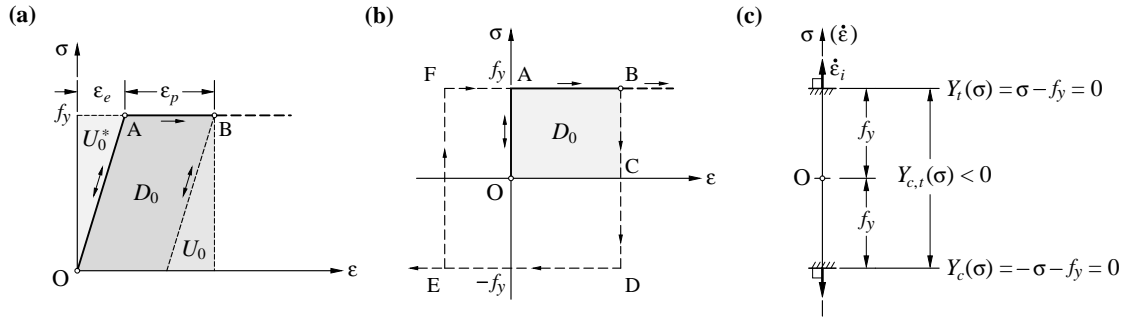
Um allgemein von Spannungszuständen an der Fließgrenze auf die Verzerrungsinkremente zu schliessen, postuliert man, dass der Verzerrungsinkrementenvektor  $\dot{\varepsilon}_i = [\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{xy}]$  (Voigt'sche Notation des Verzerrungstensors) im sechsdimensionalen (Euklid'schen) Spannungsraum senkrecht auf der Fließfläche steht, siehe Punkt P in Bild 2.12, und dass diese nicht konkav ist [127]. Damit resultiert das Fließgesetz [156]

$$\dot{\varepsilon}_{kj} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \sigma_{kj}} \quad (2.95)$$

$\lambda$  bezeichnet dabei einen beliebigen, nicht negativen Faktor. Gemäss (2.95) übernimmt die Fließfunktion die Funktion eines *plastischen Potentials*<sup>1</sup>. Setzt sich die Fließfläche aus mehreren durch entsprechende Fließbedingungen beschriebene Abschnitte zusammen, wird das Fließgesetz nach Koiter [71] wie folgt verallgemeinert

---

<sup>1</sup> Bei Werkstoffen mit nicht zugeordnetem Fließgesetz, wie z. B. Reibungsgesetzen, ist das plastische Potential verschieden von der Fließfunktion.



**Bild 2.11** – Plastisches Werkstoffverhalten – einachsiger Spannungszustand: (a) linear elastisch-ideal plastisches Verhalten; (b) starr-plastisches Verhalten; (c) Verzerrungszinkremente und Fließbedingung.

$$\dot{\varepsilon}_{kj} = \lambda_m \frac{\partial Y_m}{\partial \sigma_{kj}} \quad (m = 1, \dots, n) \quad (2.96)$$

$\lambda_m$  bezeichnet dabei  $n$  beliebige, nicht negative Faktoren. Bei Punkten der Fließfläche, die mehreren Fließbedingungen genügen, beschränkt sich der Verzerrungszinkrementenvektor  $\dot{\varepsilon}_i$  folglich auf den Winkelzwischenraum, der durch die nach aussen gerichteten Normalen der im entsprechenden Punkt aneinanderstossenden Fließflächenabschnitte gebildet wird; siehe Punkt C in Bild 2.12. Spannungs- und inkrementelle Verzerrungszustände, welche dem Fließgesetz (2.96) und der Bedingung  $\lambda_m \geq 0$  für  $Y_m(\sigma_{kj}) = 0$  bzw.  $\lambda_m = 0$  für  $Y_m(\sigma_{kj}) < 0$  genügen, werden *verträglich* genannt. Bereiche der Fließfläche, bei denen der Spannungszustand mit einem einzigen inkrementellen Verzerrungszustand und umgekehrt der inkrementelle Verzerrungszustand mit einem einzigen Spannungszustand verträglich ist, werden *regulär* genannt; die übrigen, also singuläre Stellen und schwach konvexe Abschnitte, siehe Punkt C bzw. Strecke AB in Bild 2.12, heissen *irregulär*.

Gemäss Bild 2.12 ist die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie

$$\dot{D}_0(\dot{\varepsilon}_{kj}) = \sigma_{kj} \dot{\varepsilon}_{kj} \quad (2.97)$$

auch bei irregulären Stellen der Fließfläche eine eindeutige Funktion der Verzerrungszinkremente. Ferner bewirkt eine Streckung des Verzerrungszinkrementenvektors mit einem positiven Faktor eine Vergrößerung der inkrementellen spezifischen Dissipationsenergie um denselben Faktor. Mithin ist die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie eine homogene Funktion ersten Grades der Verzerrungszinkremente; infolge der Konvexität des plastischen Potentials ist sie ausserdem positiv definit. Nach einem Satz von Euler gilt folglich  $\dot{D}_0 = \dot{\varepsilon}_{kj} \cdot (\partial \dot{D}_0 / \partial \dot{\varepsilon}_{kj})$ , und ein Vergleich mit (2.97) bringt

$$\sigma_{kj} = \frac{\partial \dot{D}_0}{\partial \dot{\varepsilon}_{kj}} \quad (2.98)$$

In Anbetracht der formalen Ähnlichkeit der Beziehungen (2.98) und (2.40) sowie (2.95) und (2.43) erfüllt in der Plastizitätstheorie die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie die Funktion der spezifischen Formänderungsenergie in der Elastizitätstheorie und das plastische Potential die der spezifischen Ergänzungsenergie.

Gemäss Bild 2.12 gilt infolge der Konvexität der Fließfläche und dem Fließgesetz (2.96) für einen beliebigen mit  $\dot{\varepsilon}_{kj}$  nicht verträglichen Spannungszustand  $\sigma_{kj}^*$  auf der Fließfläche oder im aplastischen Bereich offensichtlich

$$\left( \sigma_{kj} - \sigma_{kj}^* \right) \dot{\varepsilon}_{kj} = \dot{D}_0(\dot{\varepsilon}_{kj}) - \sigma_{kj}^* \dot{\varepsilon}_{kj} \geq 0 \quad (2.99)$$

Dies wird als *Prinzip der maximalen* (inkrementellen spezifischen) *Dissipationsenergie* bezeichnet [156], da der zweite Summand in (2.99) als fiktive spezifische Dissipationsenergie  $\dot{D}_0^*$  aufgefasst werden kann. Anstatt Konvexität der Fließfläche und Orthogonalität der plastischen Verzerrungsin-

kremente zu ihr sowie die Verallgemeinerung des Fließgesetzes für irreguläre Stellen zu postulieren und daraus (2.99) zu folgern, kann alternativ auch umgekehrt vorgegangen werden.<sup>1</sup>

### 2.6.3 Modifizierte Fließbedingung von Coulomb

Die Diskussion spezieller Fließbedingungen beschränkt sich nachfolgend auf die Fließbedingung von Coulomb mit der von Chen und Drucker [25] vorgeschlagenen Modifikation, welche sich wie folgt formulieren lässt

$$Y = |\tau| + \sigma \tan \varphi - c = 0 \quad \text{und} \quad Y_M = \sigma - f_{tm} = 0 \quad (2.100)$$

wobei  $c$  die Kohäsion [ $c \geq 0$ ],  $\varphi$  den Winkel der inneren Reibung [ $\pi/2 \geq \varphi \geq 0$ ] und  $f_{tm}$  die einachsige Zugfestigkeit [ $2c \cos \varphi / (1 + \sin \varphi) \geq f_{tm} \geq 0$ ] bezeichnen. In Bild 2.13(a) beschreibt (2.100)<sub>1</sub> die Geraden durch EB sowie ED. Der aplastische Bereich wird durch die beiden Geraden sowie den durch (2.100)<sub>2</sub> bestimmten Kreisbogen BAD mit Radius  $r = (f_c/2) - f_{tm} \sin \varphi / (1 - \sin \varphi)$  begrenzt.

Mit den Hauptspannungen  $\sigma_k \geq \sigma_j \geq \sigma_l$  lautet (2.100)

$$Y_{kl} = \sigma_k (1 + \sin \varphi) - \sigma_l (1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi = 0 \quad \text{und} \quad Y_{Mk} = \sigma_k - f_{tm} = 0 \quad (2.101)$$

da der Radius des massgebenden Mohr'schen Kreises  $(\sigma_k - \sigma_l)/2$  gleich [ $c \cot \varphi - (\sigma_k - \sigma_l)/2$ ]  $\sin \varphi$  ist. Dividiert man (2.101)<sub>1</sub> durch  $(1 - \sin \varphi)$  erhält man als alternative Formulierung der Fließbedingung von Coulomb

$$Y_{kl} = k \sigma_k - \sigma_l - f_c = 0 \quad (2.102)$$

mit der einachsigen Druckfestigkeit

$$f_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \geq 0 \quad (2.103)$$

und dem Parameter

$$k = \frac{f_c}{f_t} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \geq 1, \quad \text{wobei} \quad f_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \geq 0 \quad (2.104)$$

die einachsige Zugfestigkeit gemäss der Fließbedingung von Coulomb bezeichnet. Bei den Fließbedingungen (2.101) resp. (2.102) wird von einem isotropen Verhalten ausgegangen. Die Hauptachsen von Spannungstensors, welche (2.101) resp. (2.102) genügen, und die Hauptachsen der mit ihnen verträglichen Verzerrungsincremententensoren sind somit koaxial [171]. Die Fließbedingung von Coulomb (2.101)<sub>1</sub> resp. (2.102) definiert im Hauptspannungsraum sechs Ebenen, die paarweise parallel zu den Achsen verlaufen und eine irreguläre hexagonale Pyramide bilden [147]; siehe Bild 2.13(c). (2.101)<sub>2</sub> beschreibt drei die Pyramidenspitze abtrennende Ebenen, deren Flächennormalen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen; siehe Bild 2.13(c).

Wird das Fließgesetz (2.96) auf die reine Fließbedingung von Coulomb in der Fassung (2.102) angewandt, resultiert für Spannungszustände, die nur eine Bedingung (2.102) erfüllen, also auf den Seitenflächen der Pyramide liegen, ein ebener Verzerrungszustand

$$\dot{\epsilon}_k = \lambda_{kl} k, \quad \dot{\epsilon}_j = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\epsilon}_l = -\lambda_{kl} \quad \text{demzufolge} \quad \frac{\dot{\epsilon}_k}{\dot{\epsilon}_l} = -k \quad \left[ \sigma_k \geq \sigma_j \geq \sigma_l \right] \quad (2.105)$$

<sup>1</sup> Dieses Vorgehen ist in Anbetracht der irregulären Fließflächenabschnitte formal eleganter. Die hier verwendeten Postulate eignen sich allerdings besser, um die Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung im Experiment zu prüfen.





Für die Bestimmung der inkrementellen spezifischen Dissipationsenergie  $\dot{D}_0$  lässt sich gemäss Bild 2.13(d, f) jedem Spannungszustand an der Fliessgrenze der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb eine fiktive Fliessbedingung von Coulomb mit der Kohäsion  $c'$  und dem Winkel der inneren Reibung  $\varphi'$  [ $\varphi \leq \varphi' \leq \pi/2$ ] zuordnen [88]. Die Pyramidenfläche der fiktiven Fliessbedingung von Coulomb verläuft in Bild 2.13(c) durch die Kanten des Übergangs von  $Y_{kj}=0$  zu  $Y_{Mk}=0$ , und deren Spitze bewegt sich entlang der Strecke FG. Die Spur der fiktiven Fliessebene verläuft in Bild 2.13(f) durch LK, wobei sich L entlang der Strecke G'F' bewegt.

Da die Pyramidenspitze (Punkt F in Bild 2.13(c)) sämtliche mit der Fliessbedingung von Coulomb verträglichen Verzerrungsinkrementenvektoren enthält, und die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie eine eindeutige Funktion der Verzerrungsinkremente ist, lässt sich diese dort für alle der Fliessbedingung von Coulomb genügenden Spannungszuständen bestimmen. Da der deviatorische Anteil des Verzerrungsinkrementenvektors ausserdem senkrecht zum Spannungsvektor an der Pyramidenspitze verläuft, entspricht die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie dem Produkt des Betrags des Spannungsvektors an der Pyramidenspitze  $\sigma_i = c \cot \varphi [1, 1, 1]$  mit dem des hydrostatischen Anteils des Verzerrungsinkrementenvektors  $\dot{\epsilon}_{0i} = \dot{\epsilon}_I / 3 [1, 1, 1]$

$$\dot{D}_0 = c \cot \varphi \dot{\epsilon}_I = \frac{f_c \dot{\epsilon}_I}{k-1} \quad (2.108)$$

Die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb beträgt mit der Formulierung der fiktiven Fliessbedingung von Coulomb an der entsprechenden Stelle folglich [88]

$$\dot{D}_0 = c' \cot \varphi' \dot{\epsilon}_I \quad (2.109)$$

Gemäss Bild 2.13(d) ist  $c' \cos \varphi' = r - (r - f_{tm}) \sin \varphi'$ . Mit dem Radius des Kreisbogens BAD in Bild 2.13(a)  $r = [f_c - f_{tm}(k-1)]/2$  resultiert damit für die fiktive Kohäsion

$$c' = \frac{1}{2 \cos \varphi'} \left\{ f_c (1 - \sin \varphi') + f_{tm} [\sin \varphi' (k-1) - k + 1] \right\} \quad \left[ \varphi \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.110)$$

und die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie beträgt

$$\dot{D}_0 = \frac{\dot{\epsilon}_I}{2 \sin \varphi'} \left\{ f_c (1 - \sin \varphi') + f_{tm} [\sin \varphi' (k-1) - k + 1] \right\} \quad \left[ \varphi \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.111)$$

Für den ebenen Verzerrungszustand mit  $\dot{\epsilon}_j = 0$  [ $\sigma_k \geq \sigma_j \geq \sigma_l$ ] lässt sich die inkrementelle spezifische Dissipationsenergie auch direkt aus Bild 2.13(d) ablesen

$$\dot{D}_0 = c' \cos \varphi' |\dot{\epsilon}_i| \quad (2.112)$$

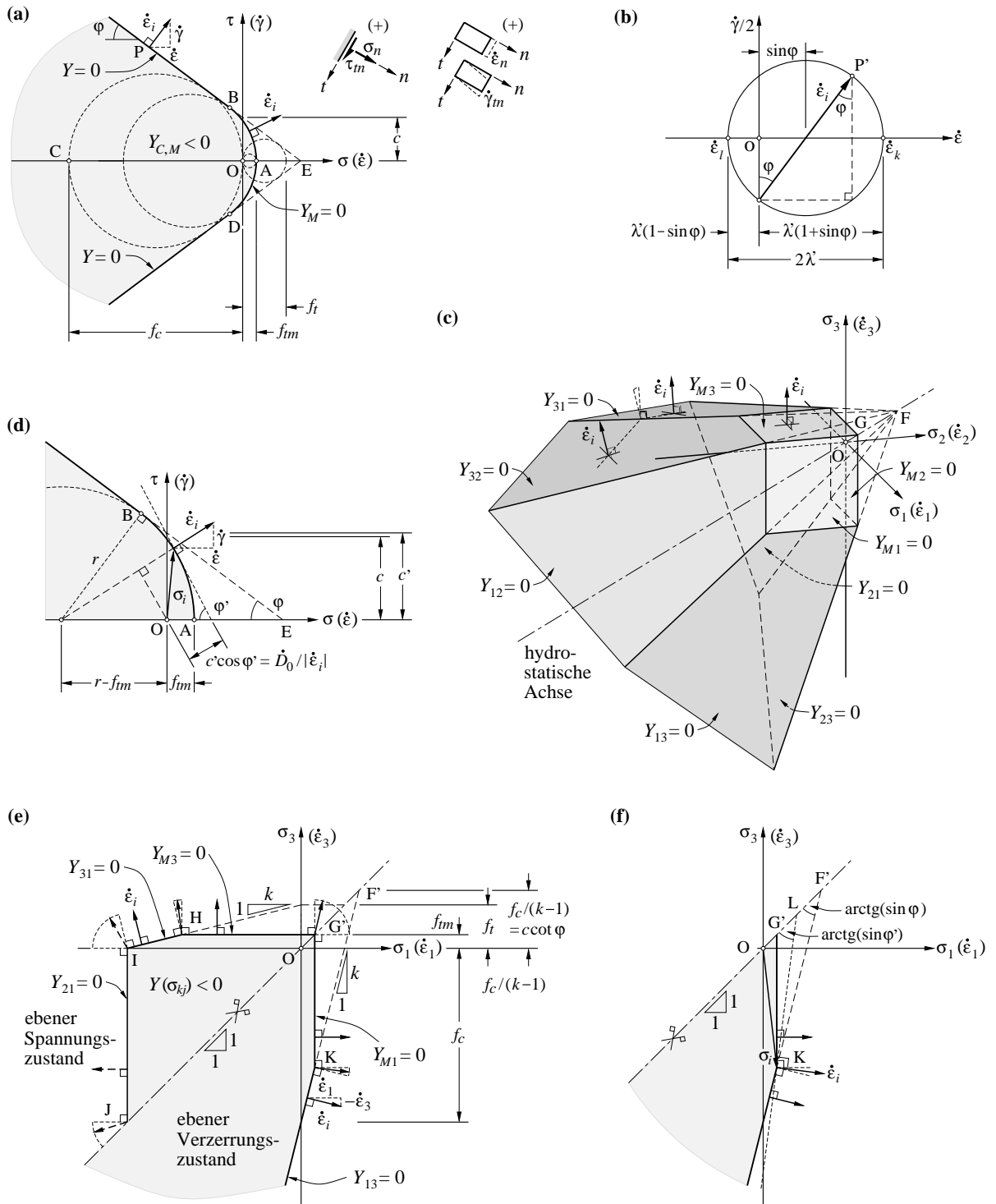
Unter Berücksichtigung von (2.110) und (2.106) folgt daraus

$$\dot{D}_0 = \frac{(\dot{\epsilon}_k - \dot{\epsilon}_l)}{2} \left\{ f_c (1 - \sin \varphi') + f_{tm} [\sin \varphi' (k-1) - k + 1] \right\} \quad \left[ \varphi \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.113)$$

wobei  $(\dot{\epsilon}_k - \dot{\epsilon}_l)/2$  dem Radius des Mohr'schen Kreises der Verzerrungsinkremente entspricht.

#### 2.6.4 Systemverhalten – Vereinfachungen und Näherungen

Analog 2.5.3 lassen sich auch bei einem starr-ideal plastischen Werkstoffverhalten durch das Einführen oder Lösen kinematischer Bindungen entscheidende Vereinfachungen erlangen. Im ersten Fall werden dadurch die kinematischen Freiheitsgrade reduziert, im zweiten die statischen. Das inkrementelle Verschiebungsfeld  $\dot{u}_k$  wird damit durch *verallgemeinerte Verzerrungsinkremente*  $\dot{\eta}_k$  beschrieben.



**Bild 2.13** – Modifizierte Fließbedingung von Coulomb: (a) Darstellung nach Mohr; (b) Mohr'scher Kreis der Verzerrungskremente; (c) Hauptspannungsraum; (d) Berechnung der inkrementellen spezifischen Dissipationsenergie; (e) und (f) ebener Spannungs- und Verzerrungszustand.

Alle Spannungen, die an einem verallgemeinerten Verzerrungssinkrement  $\dot{\eta}_k$  inkrementelle Arbeit leisten, werden zur korrespondierenden Resultierenden, der *verallgemeinerten Spannung*  $S_k$ , zusammengefasst. Die inkrementelle spezifische, also auf eine Längen- oder Flächeneinheit bezogene Dissipationsenergie beträgt somit

$$\dot{D}_0(\dot{\eta}_k) = S_k(\dot{\eta}_k) \cdot \dot{\eta}_k \quad (2.114)$$

Es lässt sich zeigen [170], dass (2.99) auch für verallgemeinerte Spannungen und Verzerrungssinkremente gilt,

$$\left( S_k - S_k^* \right) \dot{\eta}_k \geq 0 \quad (2.115)$$

Die Theorie des plastischen Potentials behält demzufolge auch für verallgemeinerte Spannungen und verallgemeinerte Verzerrungssinkremente ihre Gültigkeit [88, 170]. Formuliert man die Fließbedingung als Funktion der verallgemeinerten Spannungen,  $Y(S_k)=0$ , so lauten das Fließgesetz und die Beziehung (2.98) mit verallgemeinerten Spannungen und verallgemeinerten Verzerrungssinkrementen formuliert

$$\dot{\eta}_k = \lambda_m \frac{\partial Y_m}{\partial S_k} \quad \text{mit} \quad \lambda_m \geq 0 \quad \text{und} \quad S_k = \frac{\partial \dot{D}_0}{\partial \dot{\eta}_k} \quad (2.116)$$

Beim Einführen zusätzlicher bzw. Lösen kinematischer Bindungen werden Projektionen bzw. Schnitte der ursprünglichen Fließfläche betrachtet. Mit verallgemeinerten Lasten  $Q_j(S_k)$  und verallgemeinerten Verschiebungssinkrementen  $\dot{w}_j(\dot{\eta}_k)$  lautet das Prinzip der virtuellen Arbeiten in der inkrementellen Fassung

$$Q_j \dot{w}_j = \int_V S_k \dot{\eta}_k dV \quad (2.117)$$

Damit folgt aus (2.115)

$$\left( Q_j - Q_j^* \right) \dot{w}_j = \int_V \left( S_k - S_k^* \right) \dot{\eta}_k dV \geq 0 \quad (2.118)$$

und die Theorie des plastischen Potentials behält auch für verallgemeinerte Lasten und verallgemeinerten Verschiebungssinkremente ihre Gültigkeit [88]. Formuliert man die Fließbedingung als Funktion der verallgemeinerten Lasten,  $Y(Q_k)=0$ , so lauten das Fließgesetz und die Beziehung (2.98) mit verallgemeinerten Lasten und verallgemeinerten Verschiebungssinkrementen formuliert

$$\dot{w}_k = \lambda_m \frac{\partial Y_m}{\partial Q_k} \quad \text{mit} \quad \lambda_m \geq 0 \quad \text{und} \quad Q_k = \frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{w}_k} \quad (2.119)$$

Mit Hilfe des Beispiels in Bild 2.14 und Bild 2.15 werden nachfolgend die beiden dualen elastischen den beiden dualen plastischen Potentials gegenübergestellt und die Begriffe der verallgemeinerten Spannungen und verallgemeinerten Verzerrungen sowie der verallgemeinerten Lasten und verallgemeinerten Verschiebungen veranschaulicht.

Der in Bild 2.14 dargestellte, bei  $x=0$  aufgelegte und bei  $x=l$  eingespannte, einfach statisch unbestimmte Träger wird bei  $x=l/2$  bzw.  $x=l/4$  durch eine Einzellast  $Q_a$  bzw.  $Q_b$ , eine 2-parametrische Belastung, beansprucht. Deren korrespondierende verallgemeinerte Verschiebungen werden mit  $w_a$  bzw.  $w_b$  bezeichnet. Die in Bild 2.14 dargestellte Momenten-Krümmungsbeziehung jedes Trägerquerschnitts sei linear elastisch-ideal plastisch mit einer Biegesteifigkeit  $EI$  und den Fließbedingungen  $Y_p(M)=M-M_u=0$  sowie  $Y_n(M)=-M-M_u=0$ . Mit der Hypothese, dass die Querschnitte eben bleiben und senkrecht zur verformten Stabachse stehen, werden Schubverformungen ausgeschlossen. Ein derartiges Verhalten weist beispielsweise ein Stringerquerschnitt aus einem linear elastisch-ideal

plastischen Werkstoff mit einer schubstarrten Stegscheibe auf. Ein Fliessen oder Versagen infolge Querkraft wird ausgeschlossen.

Verhalten sich alle Querschnitte linear elastisch, so gilt  $Q_k = c_{kj}w_j$  und  $w_k = f_{kj}Q_j$  (mit  $k, j = a, b$ ) und für die Ergänzungs- und Formänderungsenergie des initial spannungsfreien Systems resultiert gemäss (2.83)

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2}f_{aa}Q_a^2 + f_{ab}Q_aQ_b + \frac{1}{2}f_{bb}Q_b^2 \\ U &= \frac{1}{2}c_{aa}w_a^2 + c_{ab}w_a w_b + \frac{1}{2}c_{bb}w_b^2 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$f_{kj} = f_{jk}$  und  $c_{kj} = c_{jk}$  bezeichnen die Nachgiebigkeits- bzw. Steifigkeitskoeffizienten (also die Koeffizienten der Nachgiebigkeits- bzw. Steifigkeitsmatrix) und können Bild 2.14(c) bzw. (d) entnommen werden. Da die Ergänzungs- bzw. Formänderungsenergie eine positiv definite quadratische Form der verallgemeinerten Lasten bzw. Verschiebungen ist, stellt  $U^* = \text{const}$  bzw.  $U = \text{const}$  in der  $Q_a$ - $Q_b$ -Ebene bzw.  $w_a$ - $w_b$ -Ebene eine Ellipse dar; siehe Bild 2.14(g) bzw. (h). Gemäss dem Mohr'schen Kreis in Bild 2.14(e) bzw. (f) betragen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der durch  $U^*$  bzw.  $U$  dividierten quadratischen Formen  $(2.120)_1$  bzw.  $(2.120)_2$

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= \frac{g_{aa} + g_{bb}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{aa} - g_{bb}}{2}\right)^2 + g_{ab}^2} \quad \text{bzw.} \\ h_{1,2} &= \frac{h_{aa} + h_{bb}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{h_{aa} - h_{bb}}{2}\right)^2 + h_{ab}^2} \end{aligned} \quad (2.121)$$

wobei  $g_{kj} = f_{kj}/(2U^*)$  und  $h_{kj} = c_{kj}/(2U)$  ist. Für den die Hauptrichtungen beschreibenden Winkel  $\alpha_Q$  bzw.  $\alpha_w$  gilt

$$\tan \alpha_Q = \frac{2g_{ab}}{g_{aa} - g_{bb}} \quad \text{bzw.} \quad \tan \alpha_w = \frac{2h_{ab}}{h_{aa} - h_{bb}} \quad (2.122)$$

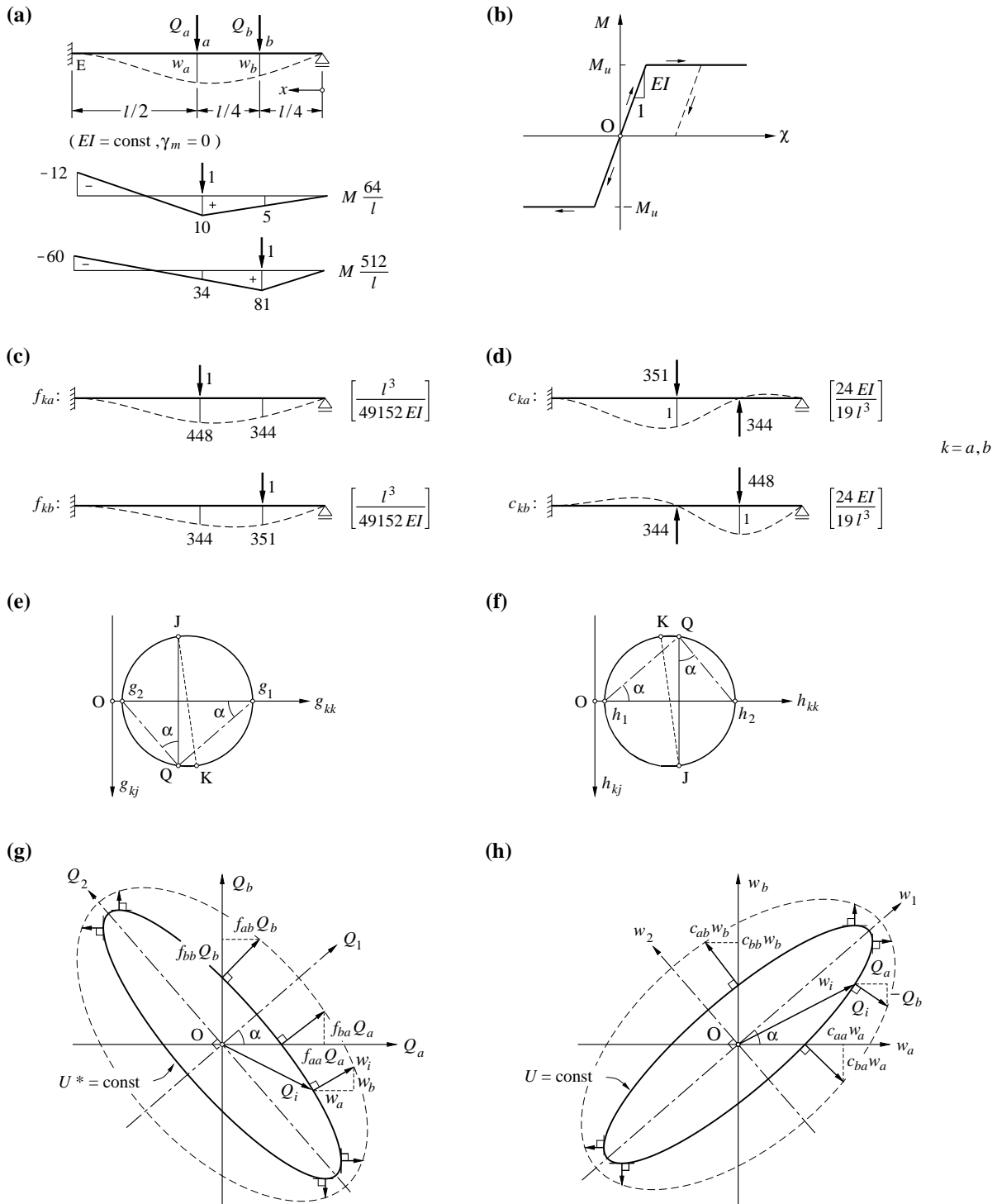
wobei in beiden Fällen  $40,99^\circ$  resultiert; siehe Bild 2.14(e, f). Die Normalformen der quadratischen Formen  $(2.120)_1$  und  $(2.120)_2$  sind

$$1 = g_1Q_1 + g_2Q_2 \quad \text{bzw.} \quad 1 = h_1w_1 + h_2w_2 \quad (2.123)$$

und die Halbachsen der beiden Ellipsen betragen  $r_{Q1,2} = g_{1,2}^{-1/2}$  bzw.  $r_{w1,2} = h_{1,2}^{-1/2}$ . Das Verhältnis der Halbachsen beträgt (unabhängig von  $l, EI$  und  $U^*$  bzw.  $U$ )  $r_{Q2}/r_{Q1} = r_{w1}/r_{w2} = 3,786$ .

Gemäss (2.73) bzw. (2.78) steht der Vektor der verallgemeinerten Verschiebungen bzw. Kräfte senkrecht auf  $U^* = \text{const}$  bzw.  $U = \text{const}$ , siehe Bild 2.14(g, h); die gestrichelte Linie legt dabei den Betrag der Vektoren fest. Da das Biegemoment abschnittsweise linear verläuft, kann der Fliessbeginn bei E, a oder b eintreten. Berücksichtigt man zusätzlich einen beliebigen durch ein initiales Biegemoment  $M_{E0}$  bei E festgelegten Eigenspannungszustand, so beschreiben  $\eta = 8(16\zeta - 3\xi \pm 16)/15$ ,  $\eta = 8(-16\zeta - 5\xi \pm 32)/17$  und  $\eta = 8(-16\zeta - 5\xi \pm 64)/81$  mit den Abkürzungen  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  gemäss Bild 2.15(a) den Fliessbeginn.

Beim initial spannungsfreien System, also  $\zeta = 0$ , entspricht die erste Beziehung in Bild 2.15 den Geraden durch GH und JK, die zweite den Geraden durch HI und KL und die dritte den Geraden durch LG und IJ. Gemäss Bild 2.15(a) bildet der aplastische Bereich des linear elastisch-ideal plastischen Systems im  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$ -Raum, also für sämtliche mögliche Eigenspannungszustände, ein Parallelepiped. Die orthogonale Projektion dieses Körpers in die  $\xi$ - $\eta$ -Ebene ergibt schliesslich die Fliessgrenze ABCDEF des starr-ideal plastischen Systems. Gemäss (2.119)<sub>2</sub> steht der Vektor der verallgemeinerten Verschiebungsincremente senkrecht auf  $Y(Q_a, Q_b) = 0$ . Bild 2.15 können einige Vektoren der verallgemeinerten Verschiebungsincremente mit den zugehörigen Kollapsmechanismen entnommen



**Bild 2.14** – Beispiel: (a) statisches System und Beanspruchung; (b) Momenten-Krümmungsbeziehung; (c) und (d) Komponenten der Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix; (e) und (f) Eigenwerte und -vektoren (Haupttrichtungen); (g)  $Q_a$ - $Q_b$ -Ebene; (h)  $w_a$ - $w_b$ -Ebene.

werden. Bei den Geraden AB, BC, CD, DE, EF und FA resultieren jeweils Kollapsmechanismen mit zwei Fließgelenken, während sich in den Ecken A, B, C, D, E und F solche mit drei Fließgelenken ergeben. Die gestrichelt eingetragene Linie beschreibt den Betrag der Vektoren der verallgemeinerten Verschiebungskremente bei gleicher spezifischer Dissipationsenergie. Da das einfach statisch unbestimmte System ( $n=1$ ) drei mögliche Fließgelenkpositionen ( $n_K=3$ ) E, a und b aufweist, existieren  $n_F=n_K-n=2$  unabhängige Gleichgewichtsbedingungen für die  $n_K=3$  unbekannt verallge-



$\dot{\omega}_{ml}$  bezeichnet dabei die verallgemeinerte Verzerrung an der Stelle  $m$  beim  $l$ -ten Grundmechanismus mit einer verallgemeinerten Einheitsverschiebung ( $\dot{w}_r=1$  für  $r=l$  und  $\dot{w}_r=0$  für  $r \neq l$ ). Sämtliche Kollapsmechanismen ergeben sich aus der Linearkombination der Grundmechanismen

$$\dot{\omega}_m = \dot{\omega}_{ml} \dot{w}_l \quad [l=k, j; m=E, k, j] \quad (2.125)$$

Die Fließgrenze des starr-ideal plastischen Systems wird durch die Beziehungen  $-12 - 2\xi \leq \eta \leq 12 - 2\xi$ ,  $(-20 - 2\xi)/3 \leq \eta \leq (20 - 2\xi)/3$  und  $-12 \leq \eta \leq 12$  beschrieben; siehe Bild 2.15(a).

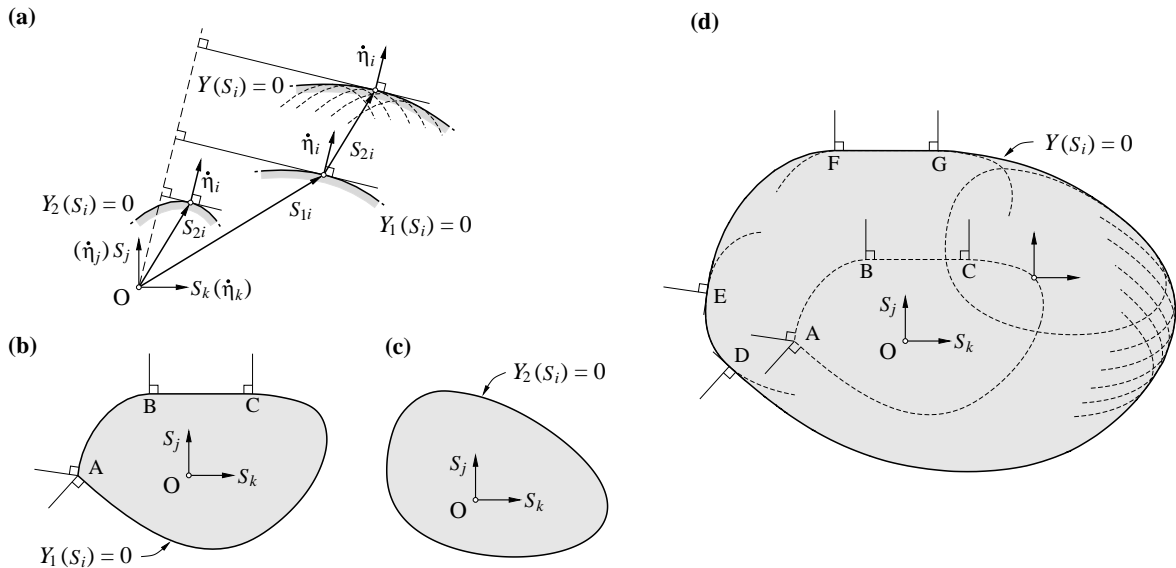
Bei der allgemeinen Formulierung der inkrementellen Dissipationsarbeit  $\dot{D}$  zwecks Darstellung von  $\dot{D} = \text{const}$  in der  $\dot{w}_a$ - $\dot{w}_b$ -Ebene sind die  $3! = 6$  Kombinationen von positiven und negativen Rotationen  $\{\dot{\omega}_E, \dot{\omega}_a, \dot{\omega}_b\}$  zu unterscheiden; siehe Bild 2.15(c).  $\dot{D} = \text{const}$  wird durch die Beziehungen  $(-\dot{D}/M_u - 4\dot{w}_a)/4 \leq \dot{w}_b \leq (\dot{D}/M_u - 4\dot{w}_a)/4$ ,  $(-\dot{D}/M_u + 8\dot{w}_a)/12 \leq \dot{w}_b \leq (\dot{D}/M_u + 8\dot{w}_a)/12$  und  $(-\dot{D}/M_u + 2\dot{w}_a)/12 \leq \dot{w}_b \leq (\dot{D}/M_u + 12\dot{w}_a)/12$  beschrieben. Die Geraden MN, NP, PQ, QR, RS und SM entsprechen dabei Kollapsmechanismen mit drei Fließgelenken, während die Ecken M, N, P, Q, R und S solchen mit zwei Fließgelenken entsprechen. Gemäss (2.119)<sub>3</sub> steht der Vektor der verallgemeinerten Kräfte senkrecht auf  $\dot{D} = \text{const}$ . Die gestrichelt eingetragene Linie beschreibt dabei den Betrag der Vektoren. Das Diagramm in Bild 2.15(c) liefert für einen vorgeschriebenen instabilen Verschiebungszustand die korrespondierenden Kräfte.

Bei einem monotonen Belastungszuwachs ohne Entlastungen lassen sich Systeme aus elastisch-plastischen Werkstoffen bis zum Erreichen der Traglast gemäss Kapitel 2.5 behandeln, wenn die Summe aus der Formänderungsenergie und der Dissipationsenergie als *fiktive* Formänderungsenergie aufgefasst werden. Der Unterschied zwischen elastisch gespeicherter Formänderungsenergie und Dissipationsenergie eines Systems tritt erst bei einer Entlastung in Erscheinung. Bei ideal plastischen Werkstoffen sind dabei Fallunterscheidungen vorzunehmen. Ist bei einem System aus ideal plastischen Werkstoffen lediglich die Traglast und der mit ihr verträgliche instabile Verschiebungszustand von Interesse, so sind die Grenzwertsätze der Traglastverfahren (siehe Kap. 2.6.6) das adäquate Werkzeug; eine Berechnung durch sukzessive Belastungserhöhung erweist sich in der Regel als relativ aufwendig.

### 2.6.5 Linearkombination von Fließbedingungen und -flächen

Bei der Ermittlung von aus vielen Teilstücken zusammengesetzten Fließflächen im Raum der verallgemeinerten Spannungen und der entsprechenden Fließbedingungen ist es oft zweckmässig, zuerst die Fließflächen einzelner Systembestandteile zu ermitteln und anschliessend durch Linearkombination die Fließbedingungen des Gesamtsystems zu bestimmen.

Die mit den verallgemeinerten Verzerrungsinkrementen  $\dot{\eta}_k$  verträglichen verallgemeinerten Spannungen  $S_k$  entsprechen offensichtlich der Summe der beiden verallgemeinerten Spannungen  $S_{1k}$  und  $S_{2k}$  zweier mit den Fließbedingungen  $Y_1(S_k)=0$  und  $Y_2(S_k)=0$  beschriebenen Fließflächen, welche mit  $\dot{\eta}_k$  verträglich sind; siehe Bild 2.16(a). Verschiebt man die Fließfläche  $Y_2(S_k)=0$  rein translatorisch derart, dass sich ihr Ursprung in der Fließfläche der nicht verschobenen Fließfläche  $Y_1(S_k)=0$  befindet, so ergibt sich die gesuchte Fließfläche  $Y(S_k)=0$  als Umhüllende aller möglichen verschobenen Lagen. Bei vertauschten Rollen der beiden Fließflächen resultiert offensichtlich dieselbe Fließfläche. Folglich lassen sich die einzelnen Fließbedingungen geometrisch ermitteln. Bild 2.16(d) zeigt exemplarisch die Fließfläche, welche sich aus der Kombination der beiden Fließflächen in Bild 2.16(b, c) ergibt. Schwach konvexe Abschnitte einer Fließfläche, Strecke BC in Bild 2.16(b), bilden auch auf der Gesamtfließfläche schwach konvexe Abschnitte gleicher Begrenzung, Strecke FG in Bild 2.16(d). Weist eine der beiden Fließflächen eine singuläre Stelle auf, Punkt A in Bild 2.16(b), so entspricht die Umhüllende im Bereich der Verzerrungsinkremente dem Winkelzwischenraum der anderen Fließfläche, Abschnitt ED in Bild 2.16(d). Besitzen beide Fließflächen eine gemeinsame Tangentialebene (Stützebene) (oder Tangente), ergibt sich an der entsprechende Stelle der Umhüllenden ein glatter Übergang zwischen den beiden Flächenabschnitten.



**Bild 2.16** – Geometrische Linearkombination von Fließflächen: (a) allgemein; (b) und (c) Fließfläche  $Y_1=0$  und  $Y_2=0$ ; (d) Linearkombination von  $Y_1=0$  und  $Y_2=0$ .

Typische Anwendungen der (geometrischen) Linearkombination von Teilfließflächen zur Ermittlung von Gesamtfließflächen und entsprechenden Fließbedingungen sind Interaktionsdiagramme von aus verschiedenen Werkstoffen zusammengesetzten Querschnitten, insbesondere bei komplizierter Berandung.

### 2.6.6 Traglastverfahren

Bei den Traglastverfahren wird mit Hilfe der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie nach Gvozdev [46], Hill [48] und Drucker, Greenberg und Prager [37, 38] die maximale Belastung eines starr-ideal plastischen Systems, die *Traglast*, bei welcher die Systemverschiebungen bei gleicher Belastung über alle Grenzen wachsen können, abgeschätzt resp. eingegabelt.

Der *statische (untere) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie* lässt sich wie folgt formulieren:

Jede Belastung, zu der sich ein stabiler statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, ist nicht höher als die Traglast.

Ein statisch zulässiger Spannungszustand wird als *stabil* bezeichnet, wenn er die Fließbedingungen nirgends verletzt. Die Richtigkeit des statischen Grenzwertsatzes lässt sich mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten (2.26), das offensichtlich auch mit Verschiebungs- und Verzerrungsinkrementen formuliert werden darf, zeigen. Dazu werden die Oberflächenlasten bei festgehaltenen Volumenlasten,  $q_k = \text{const}$ , mit einem Faktor  $\kappa$  proportional verändert (ein-parametrische Last;  $\kappa =$  verallgemeinerte Last),  $t_k = \kappa \cdot t_{k0}$ , wobei  $t_{k0}$  eine beliebige Bezugsbelastung bezeichnet. Wird das Prinzip der virtuellen Arbeiten mit dem mit der Traglast  $\kappa_u \cdot t_{k0}$  verträglichen Verschiebungszustand  $\{\dot{u}_{uk}, \dot{\epsilon}_{ukj}\}$  formuliert und als statisch zulässiger Spannungszustand einmal jener der Traglast,  $\sigma_{ukj}$ , und einmal ein beliebiger anderer Spannungszustand  $\sigma_{skj}$ , der nirgends die Fließgrenze verletzt, verwendet,

$$\int_V q_k \dot{u}_{uk} dV + \kappa_u \int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{uk} dS_t - \int_V \sigma_{ukj} \dot{\epsilon}_{ukj} dV = 0$$

$$\int_V q_k \dot{u}_{uk} dV + \kappa_s \int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{uk} dS_t - \int_V \sigma_{skj} \dot{\epsilon}_{ukj} dV = 0$$
(2.126)

so resultiert für den dem Spannungszustand  $\sigma_{skj}$  zugeordneten Lastfaktor



$$\kappa_s = \frac{\int_V \sigma_{skj} \dot{\epsilon}_{ukj} dV - \int_V q_k \dot{u}_{uk} dV}{\int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{uk} dS_t} \leq \frac{\int_V \sigma_{ukj} \dot{\epsilon}_{ukj} dV - \int_V q_k \dot{u}_{uk} dV}{\int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{uk} dS_t} = \kappa_u \quad (2.127)$$

da gemäss (2.99)  $(\sigma_{ukj} - \sigma_{skj}) \dot{\epsilon}_{ukj} \geq 0$  ist; siehe Bild 2.17(a).

Der *kinematische (obere) Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie* lässt sich wie folgt formulieren:

Jede Belastung, zu der sich ein instabiler nichttrivialer kinematisch zulässiger Verschiebungszustand angeben lässt, ist nicht tiefer als die Traglast.

Ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte bei einem virtuellen Verschiebungszustand nicht kleiner als die durch diesen eindeutig bestimmte Dissipationsenergie, so wird dieser Verschiebungszustand als *instabil* bezeichnet. Folglich ist jede Belastung, welche aus der Gleichsetzung der virtuellen Arbeit der äusseren Kräfte bei einem kinematischen zulässigen Verschiebungszustand mit der zugehörigen Dissipationsenergie resultiert, nicht tiefer als die Traglast.

Die Richtigkeit des kinematischen Grenzwertsatzes lässt sich analog dem statischen Grenzwertsatz zeigen. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten liefert bei festgehaltenen Volumenlasten mit einem beliebigen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand  $\{\dot{u}_{ok}, \dot{\epsilon}_{okj}\}$  und dem mit diesem Verschiebungszustand verträglichen Spannungszustand  $\sigma_{okj}$  mit zugehörigem Lastfaktor  $\kappa_o$  bzw. dem der Traglast zugeordneten Spannungszustand  $\sigma_{ukj}$  mit zugehörigem Lastfaktor  $\kappa_u$  als statisch zulässigen Spannungszustand

$$\begin{aligned} \int_V q_k \dot{u}_{ok} dV + \kappa_o \int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{ok} dS_t - \dot{D}(\dot{\epsilon}_{okj}) &= 0 \\ \int_V q_k \dot{u}_{ok} dV + \kappa_u \int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{ok} dS_t - \int_V \sigma_{ukj} \dot{\epsilon}_{okj} dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

Die Dissipationsenergie  $\dot{D}(\dot{\epsilon}_{okj})$  ist dabei eine eindeutige Funktion des Verschiebungszustands, folglich braucht der Spannungszustand  $\sigma_{okj}$  nicht ermittelt zu werden. Da gemäss (2.99)  $\dot{D}_0(\dot{\epsilon}_{okj}) - \sigma_{ukj} \dot{\epsilon}_{ukj} \geq 0$  ist, siehe Bild 2.17(b), folgt für den Lastfaktor

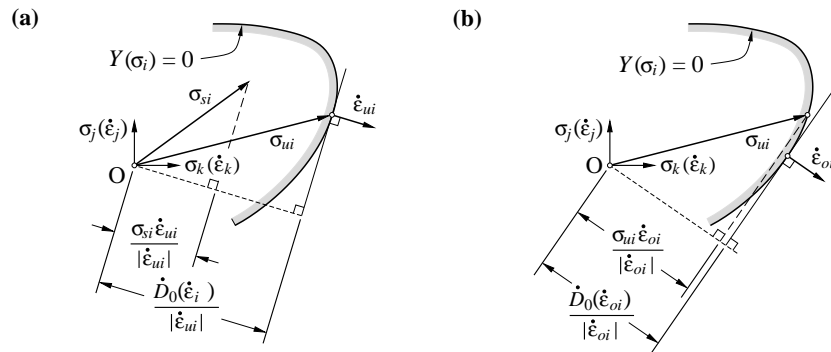
$$\kappa_o = \frac{\dot{D}(\dot{\epsilon}_{okj}) - \int_V q_k \dot{u}_{ok} dV}{\int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{ok} dS_t} \geq \frac{\int_V \sigma_{ukj} \dot{\epsilon}_{okj} dV - \int_V q_k \dot{u}_{ok} dV}{\int_{S_t} t_{0k} \dot{u}_{ok} dS_t} = \kappa_u \quad (2.129)$$

Der *Verträglichkeitssatz* lässt sich schliesslich wie folgt formulieren:

Jeder Verschiebungszustand, der mit einem stabilen statisch zulässigen Spannungszustand verträglich ist, ist instabil, und die zum Spannungszustand gehörende Belastung entspricht der Traglast.

Umgekehrt ist offensichtlich jeder statisch zulässige Spannungszustand, welcher mit einem instabilen kinematisch zulässigen Verschiebungszustand verträglich ist, stabil. Wird das Prinzip der virtuellen Arbeiten mit einem stabilen statisch zulässigen Spannungszustand und einem mit ihm verträglichen Verschiebungszustand formuliert, so entspricht die negative Arbeit der inneren Kräfte gerade der Dissipationsenergie des Verschiebungszustands. Folglich ist dieser instabil und der Verträglichkeitssatz ist begründet. Eine vollständige Lösung umfasst also einen stabilen statisch zulässigen Spannungszustand und einen mit diesem verträglichen, und folglich instabilen, kinematisch zulässigen Verschiebungszustand.

Die Bedeutung des Verträglichkeitssatzes liegt darin, dass zu einem statisch zulässigen Spannungszustand, der die Fliessbedingung nirgends verletzt, nur die Existenz eines einzigen mit ihm verträglichen nichttrivialen kinematisch zulässigen Verschiebungszustands nachgewiesen werden



**Bild 2.17** – Grenzwertsätze: (a) zum statischen Grenzwertsatz; (b) zum kinematischen Grenzwertsatz.

muss. Die vom kinematischen Grenzwertsatz geforderte Instabilität dieses Verschiebungszustands ist durch den Verträglichkeitssatz gegeben und braucht nicht separat nachgewiesen zu werden.

Mit Hilfe der Grenzwertsätze lässt sich also die Traglast wie folgt eingrenzen

$$\kappa_s \leq \kappa_u \leq \kappa_o \quad (2.130)$$

Bei der statischen Methode wird durch Betrachtung verschiedener statisch zulässiger Spannungszustände  $\kappa_s$  maximiert und bei der kinematischen durch Betrachtung verschiedener kinematisch zulässiger Kollapsmechanismen  $\kappa_o$  minimiert.

### Korollare der Grenzwertsätze

Aus den Grenzwertsätzen lassen sich folgende für die Anwendung wichtigen Sätze ableiten [38, 27, 99]:

- Eigenspannungszustände haben keinen Einfluss auf die Traglast, wenn die daraus resultierenden Verschiebungen (infinitesimal) klein sind.
- Durch Hinzufügen von eigenlastfreien Elementen wird die Traglast eines Systems nicht reduziert, falls dabei weder Richtung noch Angriffspunkte der Lasten verändert werden. Umgekehrt wird die Traglast eines Systems durch Entfernen eigenlastfreier Systembestandteile nicht erhöht.
- Durch Erhöhen (Reduzieren) der Fließgrenze des Werkstoffs an einer beliebigen Stelle derart, dass dessen Fließfläche der ursprüngliche Fließfläche umschrieben (einbeschrieben) wird, wird die Traglast des Systems nicht reduziert (erhöht).
- Durch Einführen (Lösen) kinematischer Bindungen wird die Traglast nicht reduziert (erhöht).
- Die auf der Grundlage einer der wirklichen Fließfläche umschriebenen (einbeschriebenen) Fließfläche berechneten Traglasten sind obere (untere) Grenzwerte der wirklichen Traglast.
- Die Traglast ist eindeutig bestimmt.
- In der vollständigen Lösung ist der Verschiebungszustand nur bei regulären Stellen der Fließfläche eindeutig bestimmt.
- In der vollständigen Lösung sind die Spannungen in den starr bleibenden (plastisch nicht verformten) Bereichen nicht eindeutig bestimmt.
- Treten in einer vollständigen Lösung in einem bestimmten Bereich plastische Verformungen auf, so sind die zugehörigen Spannungen nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Fließfläche an der entsprechenden Stelle stark konvex ist.

### 2.6.7 Diskontinuitäten

Unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen behalten die Grenzwertsätze und der Verträglichkeitssatz auch für unstetige Spannungs- und Verschiebungsfelder ihre Gültigkeit [142]. Eingehende Untersuchungen der Spannungs- und Verzerrungszustände an Diskontinuitäten findet man bei Marti [88].

Der statische Grenzwertsatz behält seine Gültigkeit auch bei *diskontinuierlichen Spannungsfeldern*, falls die Gleichgewichtsbedingungen auch bei der Diskontinuität erfüllt werden. Folglich dürfen sich bei einer Diskontinuitätsebene lediglich die Normalspannungen und parallel zur Diskontinuitätsebene verlaufenden Schubspannungen senkrecht zur Diskontinuitätsebene stehender Ebenen sprunghaft ändern, die Funktionen aller übrigen Spannungskomponenten müssen kontinuierlich verlaufen. Für einen ebenen Spannungszustand ist an einer Diskontinuitätslinie gemäss Bild 2.18(a) folglich

$$\sigma_n^{(a)} = \sigma_n^{(b)} \quad \text{und} \quad \tau_{nt}^{(a)} = \tau_{nt}^{(b)} \quad (2.131)$$

zu fordern, während  $\sigma_t^{(a)} \neq \sigma_t^{(b)}$  sein kann.

Nachfolgend wird der in Bild 2.18(b) dargestellte Punkt P einer kinematischen Diskontinuität mit Schichtdicke  $d \rightarrow 0$  betrachtet. Der Verschiebungsinkrementenvektor  $\dot{\delta}_i$  liegt in der  $n$ - $t$ -Ebene und schliesst mit der zur Diskontinuität parallel verlaufenden  $t$ -Richtung den Winkel  $\alpha$  ein. Die  $n$ -Richtung verläuft senkrecht zur Diskontinuität. Für die Verschiebungsinkremente parallel und senkrecht zur Diskontinuität resultiert unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungsinkremente innerhalb der Diskontinuität linear variieren und die angrenzenden Bereiche keine plastischen Verzerrungen aufweisen

$$\dot{u}_n = \frac{\dot{\delta} n \sin \alpha}{d} \quad \text{und} \quad \dot{u}_t = \frac{\dot{\delta} n \cos \alpha}{d} \quad (2.132)$$

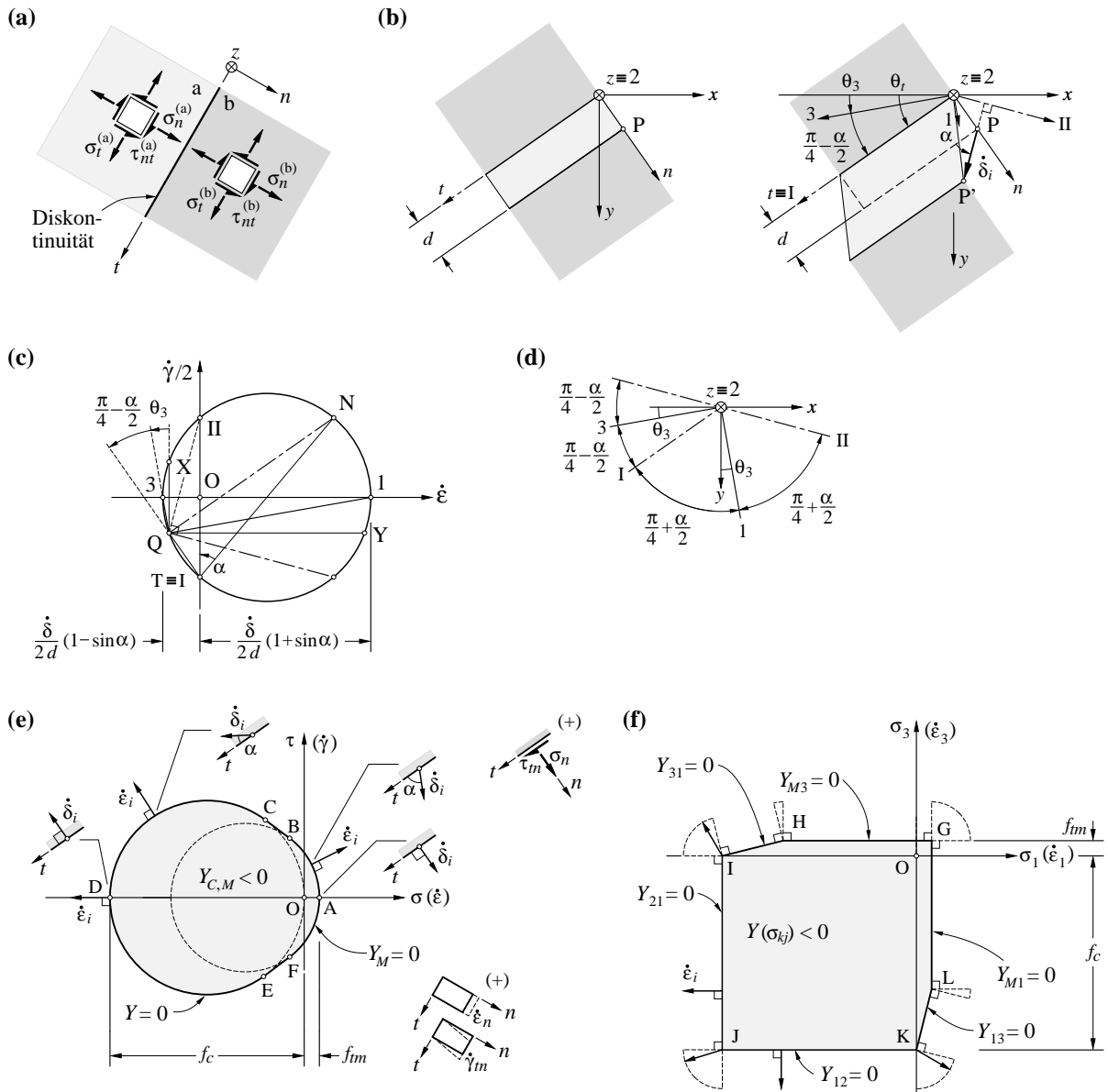
wobei  $\dot{\delta}$  den Betrag des Verschiebungsinkrementenvektors des Punktes P bezeichnet. Der Verzerrungszustand ist folglich über die Schichtdicke konstant,

$$\dot{\epsilon}_n = \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial n} = \frac{\dot{\delta} \sin \alpha}{d}, \quad \dot{\epsilon}_t = \frac{\partial \dot{u}_t}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_{nt} = \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial t} + \frac{\partial \dot{u}_t}{\partial n} = \frac{\dot{\delta} \cos \alpha}{d} \quad (2.133)$$

Die Hauptverzerrungsinkremente sowie die Hauptrichtung betragen gemäss dem Mohr'schen Kreis der Verzerrungsinkremente in Bild 2.18(c)

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\delta}}{2d}(1 + \sin \alpha), \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{\dot{\delta}}{2d}(1 - \sin \alpha) \quad \text{und} \quad \theta_3 = \theta_t + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (2.134)$$

Lässt man die Schichtdicke gegen null gehen,  $d \rightarrow 0$ , streben die beiden Hauptverzerrungsinkremente  $\dot{\epsilon}_1$  und  $\dot{\epsilon}_3$  gegen unendlich bzw. minus unendlich, während die zweite Hauptverzerrung einen endlichen Wert annimmt bzw. gegenüber  $\dot{\epsilon}_1$  und  $\dot{\epsilon}_3$  verschwindet. Demzufolge herrscht ein ebener Verzerrungszustand. In Richtung der Diskontinuität ( $t \equiv$  I-Richtung) sowie senkrecht zum Verschiebungsinkrementenvektor  $\dot{\delta}_i$  (II-Richtung) treten nur Schubverzerrungsinkremente auf. Dies sind die so genannten charakteristischen Richtungen und entsprechen möglichen Gleitlinien. Die Hauptverzerrungsrichtungen (1- und 3-Richtung) bilden die Winkelhalbierenden der charakteristischen Richtungen; siehe Bild 2.18(d). Für  $\alpha = \pi/2$  und  $\alpha = -\pi/2$  fallen die beiden charakteristischen Richtungen zusammen,  $I \equiv II$ , und entsprechen im ersten Fall der Hauptrichtung 3 und im zweiten der Hauptrichtung 1. Für plastisch inkompressible Werkstoffe muss gemäss (2.134)  $\alpha = 0$  sein, demgemäss treten an der Diskontinuität nur inkrementelle Schiebungen auf. Die charakteristischen Richtungen stehen dann senkrecht zueinander und schliessen mit den Hauptrichtungen der Verzerrungsinkremente einen Winkel von  $\pi/4$  ein.



**Bild 2.18** – Diskontinuitäten: (a) Diskontinuität im Spannungsfeld; (b) Diskontinuität im Verschiebungsfeld; (c) zugehöriger Mohr'scher Verzerrungskreis; (d) Haupt- und charakteristische Richtungen; (e) und (f) modifizierte Fließbedingung von Coulomb beim ebenen Spannungszustand.

Der kinematische Grenzwertsatz behält seine Gültigkeit auch bei kinematischen Diskontinuitäten, wenn bei der Berechnung der spezifischen Dissipationsenergie auch die der Diskontinuität berücksichtigt wird. Mit (2.134) beträgt die spezifische inkrementelle Dissipationsenergie an der Diskontinuität

$$\dot{D}_0(\dot{\epsilon}_{kj}) = \frac{\dot{\delta}}{2d} [\sigma_1(1 + \sin\alpha) - \sigma_3(1 - \sin\alpha)] \quad (2.135)$$

Ein Vergleich des Mohr'schen Kreises der Verzerrungsinkremente in Bild 2.18(c) mit jenem in Bild 2.13(b) zeigt, dass eine Fließbedingung nach Coulomb mit fiktivem Winkel der inneren Reibung  $\alpha$  die kinematischen Bedingungen (2.134) erfüllt. Mit der zugehörigen fiktiven Kohäsion  $c'$  resultiert folglich nach Integration über die Schichtdicke  $d$  für die auf eine Einheitsfläche bezogene inkrementelle Dissipationsenergie an der Diskontinuität

$$\dot{D}_0(\dot{\delta}) = \dot{\delta} c' \cos \alpha \quad (2.136)$$

[88, 59]. Genügt der Werkstoff einer modifizierten Fließbedingung von Coulomb gemäss 2.6.3, so beträgt die auf eine Einheitsfläche bezogene inkrementelle Dissipationsenergie an der Diskontinuität nach Integration über die Schichtdicke  $d$  gemäss (2.113)

$$\dot{D}_0(\dot{\delta}) = \frac{\dot{\delta}}{2} \left\{ f_c (1 - \sin \alpha) + f_m [\sin \alpha (k - 1) - k + 1] \right\} \quad \left[ \varphi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.137)$$

wobei die Schichtdicke  $d$  aus der Rechnung fällt. Bei einem ebenen Spannungszustand mit  $\sigma_2 = \sigma_z = 0$  liegt an einer Diskontinuität entlang der gesamten Fließgrenze ein ebener Verzerrungszustand mit  $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_z \rightarrow 0$  vor, im Gegensatz zum Bild 2.13(e) also auch entlang der Strecken IJ und KJ in Bild 2.18(f). Die Kurve ABCDEF in Bild 2.18(e) stellt also eine fiktive Fließgrenze dar, und der fiktive Winkel der inneren Reibung kann Werte im Intervall  $[-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2]$  annehmen. Für  $\alpha \leq \pi/2$  dringen demnach die durch die Diskontinuität getrennten starren Teilkörper ineinander ein. Für Verzerrung-sinkrementenvektoren senkrecht zu den Strecken IJ und KJ in Bild 2.18(f) resp. senkrecht zum Kreisbogen CDE in Bild 2.18(e), also  $[-\pi/2 \leq \alpha \leq \varphi]$ , resultiert die auf die Diskontinuitätsfläche bezogene spezifische inkrementelle Dissipationsarbeit

$$\dot{D}_0(\dot{\delta}) = \dot{\delta} \frac{f_c}{2} (1 - \sin \alpha) \quad \left[ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \varphi \right] \quad (2.138)$$

## 2.7 Zusammenfassung

Den Ausgangspunkt der Behandlung baustatischer Fragestellungen bildet jeweils ein möglichst geschickt gewählter Schnittkörper mit zugehörigem Schnittkörperdiagramm.

Im Zentrum der kurzen Übersicht über die Grundlagen der Baustatik steht das Prinzip der virtuellen Arbeiten, welches als Prinzip der virtuellen Verschiebungen und als Prinzip der virtuellen Kräfte formuliert wird. Für konservative Systeme, welche die eingetragene Energie vollständig speichern, folgen entsprechend der dualen Formulierung der Satz vom Minimum des Gesamtpotentials und der Satz vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials. Aus diesen lassen sich weiter der Satz von Castigliano und der Satz von Engesser ableiten. Die beiden Sätze bilden mit dem Verfahren von Rayleigh-Ritz ausserdem die Grundlage für die heute die computergestützte Modellierung der Tragwerke beherrschende Methode der Finiten Elemente.

Entscheidende Vereinfachungen bei der Behandlung baustatischer Fragestellungen werden durch das Einführen zusätzlicher kinematischer Bindungen oder das Entfernen solcher erwirkt; deren Angemessenheit ist durch verfeinerte Berechnungen oder experimentelle Untersuchungen im Einzelfall zu prüfen. Näherungsverfahren der Elastizitätstheorie fassen auf demselben Prinzip, indem statische oder kinematische Ansatzfunktionen verwendet werden, welche die kinematischen bzw. statischen Beziehungen lediglich global erfüllen. Durch die im Rahmen der Methode der Finiten Elemente vorgenommene Diskretisierung der abschnittsweise kontinuierlichen Systeme lassen sich Tragwerke praktisch beliebiger Geometrie behandeln und die das Systemverhalten beschreibenden Beziehungen in der übersichtlichen Matrizenform formulieren, welche sich für eine computergestützte Berechnung eignet.

Die duale Formulierung setzt sich auch in der Plastizitätstheorie fort, wenn auch in weniger ausgeprägtem Masse. Die Grenzwertsätze bilden dabei das plastische Analogon zum Verfahren von Rayleigh-Ritz in der Elastizitätstheorie. Bei beiden Theorien lassen sich Näherungslösungen mit statischen oder kinematischen Ansätzen gewinnen. In der Elastizitätstheorie wird die Steifigkeit mit kinematischen (statischen) Ansätzen überschätzt (unterschätzt), während in der Plastizitätstheorie die Traglast mit kinematischen (statischen) Ansätzen überschätzt (unterschätzt) wird. Während in der

Plastizitätstheorie das Eingrenzen der vollständigen Lösung durch die Verwendung beider Grenzwertsätze häufig gelingt, lässt sich dies in der Elastizitätstheorie nur in Einzelfällen realisieren.



## 3 Werkstoff- und Verbundverhalten

### 3.1 Einleitung

Im vorliegenden Kapitel werden die für diese Abhandlung relevanten mechanischen Eigenschaften des Bewehrungsstahls und des Betons sowie deren Zusammenwirken in einem etwas weiter gefassten Kontext thematisiert. Dabei stehen nicht die möglichst genaue Beschreibung des Werkstoff- und Verbundverhaltens, sondern vielmehr möglichst einfache Modellvorstellungen im Vordergrund, die das Verhalten für typische Fragestellungen des Betonbaus hinreichend genau beschreiben.

Das mechanische Verhalten, insbesondere jenes des Betons, hängt von vielen Parametern ab, die bei den meisten Fragestellungen des Betonbaus nicht oder nur teilweise bekannt sind. Daher basiert die Beschreibung des Werkstoff- und Verbundverhaltens zweckmässigerweise auf wenigen Kenngrössen, die das Verhalten zwar nicht vollständig, aber hinreichend genau beschreiben und experimentell einfach zu ermitteln sind. Dies gilt es beim Erarbeiten und Anwenden von Modellvorstellungen stets zu beachten, so dass der Detaillierungsgrad der verwendeten Modelle in einem ausgewogenen Verhältnis zur Genauigkeit der verwendeten Parameter steht.

Alle Spannungen sind nachfolgend als nominelle (auf den initialen Querschnitt bezogene) Spannungen zu verstehen.

### 3.2 Bewehrungsstahl

Bewehrungsstäbe, -litzen und -drähte werden vorwiegend auf Zug beansprucht; dabei wird zwischen schlaff eingelegtem Betonstahl und vorgespannt eingesetztem Spannstahl unterschieden. Die für die rechnerische Behandlung des Stahlbetons benötigten Kennzahlen des Bewehrungsstahls werden in der Regel aus einachsigen Zugversuchen gewonnen; das in den Versuchen beobachtete Verhalten wird mit entsprechenden Spannungs-Verzerrungsdiagrammen dargestellt.

Das Verformungsvermögen von Stahlbetonbauteilen wird massgeblich durch das Verhältnis von Zugfestigkeit zu Fließgrenze und die Bruchdehnung des Bewehrungsstahls bestimmt. Diese beiden Eigenschaften sind für den Betonbau mindestens so bedeutend wie die Fließgrenze und die Festigkeit des Bewehrungsstahls.

#### 3.2.1 Betonstahl

Grundsätzlich können bei Betonstählen zwei charakteristische Spannungs-Verzerrungsbeziehungen unterschieden werden; siehe Bild 3.1(a, b). Allen Betonstählen gemeinsam ist ein anfänglich praktisch linear elastisches Verhalten mit einem Elastizitätsmodul von etwa  $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$ . Warmgewalzte, vergütete und mikrolegierte sowie Betonstähle mit geringem Kohlenstoffgehalt zeigen nach dem Erreichen der Fließgrenze  $f_{sy}$  ein Fließplateau, bei welchem die Dehnung praktisch ohne Spannungszunahme bis zum Verfestigungsbeginn bei  $\epsilon_{sv}$  anwächst (Bild 3.1(a)). Die Länge des Fließplateaus nimmt in der Regel mit zunehmender Fließgrenze ab. Der Fließvorgang tritt nicht auf der ganzen Stablänge gleichzeitig auf; die Verformungen lokalisieren sich vielmehr in kleinen Stababschnitten (Lüders-Bänder). Nachdem sich die Lüders-Bänder über die einer konstanten Beanspruchung unterworfenen Stabstrecke ausgebreitet haben, beginnt die Verfestigung, bei welcher der tangentiale Verfestigungsmodul sukzessive abnimmt, bis die Zugfestigkeit  $f_{su}$  mit der zugehörigen Bruchdehnung  $\epsilon_{su}$  erreicht wird. Beim anschliessenden Bruchprozess lokalisieren sich die Verformungen in



einem etwa zwei Stabdurchmesser langen Einschnürungsbereich, während die übrigen Stababschnitte entlastet werden. Reicht das Dissipationsvermögen des Einschnürungsbereichs nicht mehr aus, um die Formänderungsenergie zu dissipieren, zerreißt der Stab schliesslich. Die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen kaltverformter Stähle sowie solcher mit einem hohen Kohlenstoffgehalt weisen kein Fließplateau auf, siehe Bild 3.1(b); als Fließgrenze wird in diesem Fall in der Regel die Spannung bezeichnet, bei der nach einer vollständigen Entlastung eine Dehnung von 2‰ verbleibt. Entlastungen von irgendeinem Punkt der Spannungs-Verzerrungscharakteristik beider Ausprägungen erfolgen annähernd linear elastisch mit der initialen Steifigkeit  $E_s$ . Kennzahlen typischer Betonstähle können Bild 3.1 entnommen werden.

Das Verformungsvermögen von Betonstählen wird massgeblich von deren Bruchdehnung sowie dem Verhältnis  $f_{su}/f_{sy}$  bestimmt. Bei abnehmenden Verhältnissen  $f_{su}/f_{sy}$  treten infolge der dem Betonstahl inhärenten kleinen Querschnitts- und Fließgrenzen-Schwankungen zunehmend Dehnungslokalisierungen auf [115, 149], was sich negativ auf das Verformungsvermögen auswirkt; eine experimentelle Verifikation dieses Verhaltens findet man bei Fürst und Marti [42] und eine vereinfachte Modellrechnung, welche diesen Einfluss quantifiziert, bei Fürst [43]. Warmgewalzte, vergütete und mikrolegierte sowie Betonstähle mit geringem Kohlenstoffgehalt weisen in der Regel höhere Bruchdehnungen und ein grösseres Verhältnis  $f_{su}/f_{sy}$  auf als kaltverformte Stähle und solche mit einem hohen Kohlenstoffgehalt.

Im Betonbau ist es zweckmässig, die Stoffgesetze zu vereinfachen und mit idealisierten Spannungs-Verzerrungsbeziehungen zu arbeiten. Unabhängig davon, ob der Stahl ein Fließplateau aufweist oder nicht, wird in der Folge das Verhalten des Betonstahls durch eine bilineare Spannungs-Verzerrungscharakteristik gemäss Bild 3.1(c) mit einem Verfestigungsmodul  $E_{sh} = (f_{su} - f_{sy}) / (\epsilon_{su} - \epsilon_{sy})$  idealisiert. Ausgehend davon wird je nach Problemstellung von einem linear elastisch-ideal plastischen oder einem starr-ideal plastischen Verhalten mit uneingeschränktem plastischem Fließen ausgegangen.

### 3.2.2 Spann Stahl

Spannstähle weisen bedeutend höhere Fließgrenzen und Zugfestigkeiten auf als Betonstähle. Dies ist einerseits notwendig, da die initialen Spannstahldehnungen signifikant höher als die viskosen Verzerrenungen des Betons sein müssen, damit der Verlust an Vorspannkraft sich in einem vertretbaren Rahmen bewegt. Andererseits würden nicht vorgespannte hochfeste Stähle zu unzulässig grossen Rissbreiten im Gebrauchszustand führen.

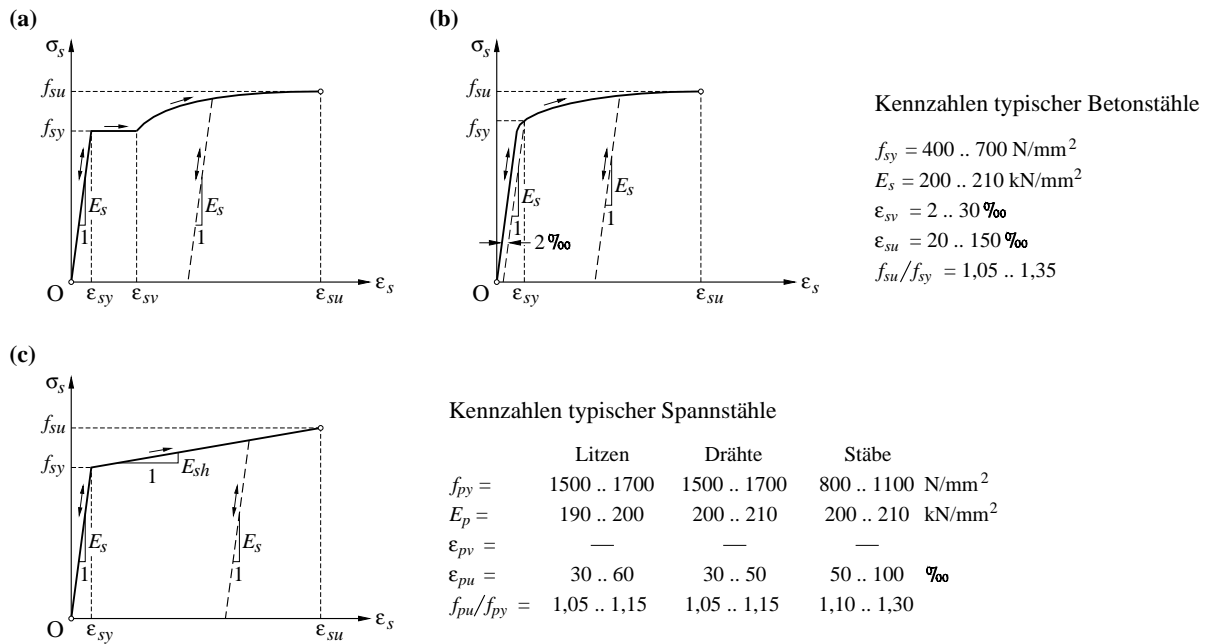
Als sieben-drähtige Litzen, Drähte oder Stangen konfektionierte Spannstähle zeigen in der Regel ein Verhalten gemäss Bild 3.1(b). Im Gegensatz zum Betonstahl wird dabei üblicherweise die Spannung, bei der nach einer vollständigen Entlastung eine Dehnung von 1‰ verbleibt, als Fließgrenze bezeichnet.

Kennzahlen heute üblicher Spannstähle können Bild 3.1 entnommen werden. Bedingt durch die verdrehte Struktur sieben-drähtiger Litzen fällt deren fiktiver Elastizitätsmodul, welcher im Wesentlichen von der Schlaglänge und Querdehnung abhängt, geringfügig tiefer aus als derjenige einzelner Drähte. Bei konstant hoher Beanspruchung zeigen Spannstähle nicht zu vernachlässigende viskose Dehnungen. Die vom Spannungsniveau abhängige Spannungsabnahme (Relaxation) kann bis etwa 10% betragen.

## 3.3 Beton

### 3.3.1 Einachsige Druckbeanspruchung

Als Hauptkenngrösse des Betons dient die im Alter von 28 Tagen mittels standardisierten Zylinderdruckversuchen (Höhe  $h=300$  mm, Durchmesser  $\varnothing=150$  mm) ermittelte einachsige Druckfestigkeit  $f_{cc}$ , welche zur mechanischen Spezifikation des Betons verwendet wird. An Stelle der Zylinderdruck-



**Bild 3.1** – Spannungs-Dehnungsbeziehungen von Bewehrungsstählen: (a) warmgewalzte, vergütete, mikrolegierte oder solche mit geringem Kohlenstoffgehalt; (b) kaltverformte oder solche mit einem hohen Kohlenstoffgehalt; (c) bilineare Idealisierung; Kennzahlen typischer Beton- und Spannstähle.

versuche werden häufig standardisierte Würfeldruckversuche (Seitenlänge  $a = 150 \text{ mm}$ ) durchgeführt, da die geschalteten Seitenflächen für die Lasteinleitung verwendet werden können und das Planschleifen oder die Applikation einer Mörtelschicht entfällt. Da die Druckfestigkeit bedingt durch die bei der Lasteinleitung behinderte Querverformung bei Versuchskörpern mit abnehmender Versuchskörperschlankheit  $h/\varnothing$  ab etwa  $h/\varnothing = 2,5$  (bzw.  $h/a = 2,5$ ) [157] anwächst, ist die Würfeldruckfestigkeit  $f_{cw}$  grösser als die entsprechende Zylinderdruckfestigkeit; näherungsweise gilt  $f_{cc} \approx (0,8 \dots 0,9) f_{cw}$ .

Die einachsige Druckfestigkeit in Betonstrukturen,  $f_c$ , ist unter anderem infolge schwierigeren Verarbeitungsbedingungen und dem Massstabeffekt<sup>1</sup> geringer als die Zylinderdruckfestigkeit  $f_{cc}$ . In Anlehnung an die im Rahmen der Anwendung plastischer Modelle von Muttoni et al. [116] vorgeschlagene *effektive Festigkeit* (vgl. Kap. 4), lassen sich diese Effekte näherungsweise mit

$$f_c = 2,7 f_{cc}^{2/3} \leq f_{cc} \quad [\text{in N/mm}^2] \quad (3.1)$$

berücksichtigen (z. B.  $f_{cc} = 40/60/80 \text{ N/mm}^2$  ergibt  $f_c/f_{cc} = 0,79/0,69/0,63$ ). Ferner ist dem Umstand Rechnung zu tragen, dass die Druckfestigkeit bei andauernder hoher Belastung abfällt [136, 137], was bei relativ jungem Beton teilweise durch die Festigkeitszunahme bei fortschreitender Hydratation kompensiert wird; Beziehungen, mit welchen sich dieser Effekt näherungsweise quantifizieren lässt, können [23] entnommen werden. Der Festigkeitsabfall bewegt sich dabei in der Größenordnung von etwa 20 %.

<sup>1</sup> Mit zunehmender Probekörpergrösse lässt sich eine Reduktion der Betonfestigkeit beobachten, was als *Massstabeffekt* bezeichnet wird. Mögliche Erklärungen dafür sind gemäss [11] die mit der Bauteilgrösse anwachsende Formänderungsenergie, welche in der Bruchprozesszone dissipiert werden muss, die Streuung der lokalen Festigkeiten, die Änderung der Wärme- und Wasserdiffusion, welche zu veränderten Eigenspannungen und Werkstoffeigenschaften führt sowie der Einfluss der Randzone, welche andere Werkstoffeigenschaften als der Rest des Bauteils aufweist. Den (semi-)empirischen Ansätzen zur Beschreibung dieses Phänomens ist die Problematik eigen, dass sich die zur Kalibrierung erforderlichen Versuchsdaten auf im Vergleich zu den Bauwerken relativ kleine Versuchskörper [20] beschränken. Dementsprechend weichen die Ansätze im extrapolierten Bereich stark voneinander ab. Im Betonbau lässt sich der Massstabeffekt durch Einlegen einer ausreichenden Mindestbewehrung oft weitgehend eliminieren [55].

Da wie bereits einleitend erwähnt die Zylinderdruckfestigkeit  $f_{cc}$  oft die einzige vorgegebene resp. ermittelte Betonkenngrösse ist, ist es unumgänglich, die übrigen für das Tragverhalten relevanten Parameter auf deren Grundlage abzuschätzen. Der Detaillierungsgrad der Modellvorstellungen sollte daher mit den Unsicherheiten der geschätzten Parameter in einem ausgewogenen Verhältnis stehen.

Bei geringer Beanspruchung verhält sich der Beton unter einer einachsigen Druckbeanspruchung gemäss Bild 3.2(a) annähernd linear elastisch. Der entsprechende Elastizitätsmodul lässt sich mit

$$E_c = k_E f_{cc}^{1/3} \quad [\text{in N/mm}^2] \quad (3.2)$$

abschätzen, wobei  $k_E$  je nach Zuschlag etwa gleich  $(8 \dots 11) \cdot 10^3$  ist. Der Elastizitätsmodul wächst also mit der Zylinderdruckfestigkeit unterproportional. In der Regel verhält sich der Beton in Bauteilen leicht anisotrop, indem die Steifigkeit senkrecht zur Einbringrichtung etwas höher ist als parallel dazu; ausserdem nimmt die Betonsteifigkeit gegen unten leicht zu. Bei Berechnungen kann der ungerissene Beton in guter Näherung als homogen und isotrop angenommen werden. Die Querdehnzahl beträgt etwa  $\nu_c = 0,2$ . Bis zum Erreichen der Betondruckfestigkeit kann die Spannungs-Verzerrungsbeziehung in Anlehnung an Sargin [138] durch

$$\sigma_{c3} = -f_c \frac{k_\sigma \xi - \xi^2}{1 + (k_\sigma - 2)\xi} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \quad \text{und} \quad k_\sigma = \frac{E_c \varepsilon_{cu}}{f_c} \quad (3.3)$$

beschrieben werden; der Tangentenmodul entspricht initial dem Elastizitätsmodul und verschwindet beim Erreichen der Druckfestigkeit.

Mit der bei höheren Beanspruchungen verstärkten Mikrorissbildung wird die Steifigkeit zunehmend reduziert. Damit einhergehend ist ein verstärkter Zuwachs der Querdehnungen  $\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c2}$ ; siehe Bild 3.2(c). Die kurz vor dem Bruch gegenüber den Längsdehnungen stärker anwachsenden Querdehnungen sind ein Indiz für ein ausgeprägtes Risswachstum, welches nominell etwa beim Bruch zu einem Übergang von einem kompressiblen ( $\varepsilon_{c1} < 0$ ) zu einem dilatanten ( $\varepsilon_{c1} > 0$ ) Verhalten führt (Bild 3.2(c)). Gemäss Bild 3.2(b) setzt der Steifigkeitsabfall mit zunehmender Druckfestigkeit bei höheren Beanspruchungen ein, fällt dafür ausgeprägter aus.

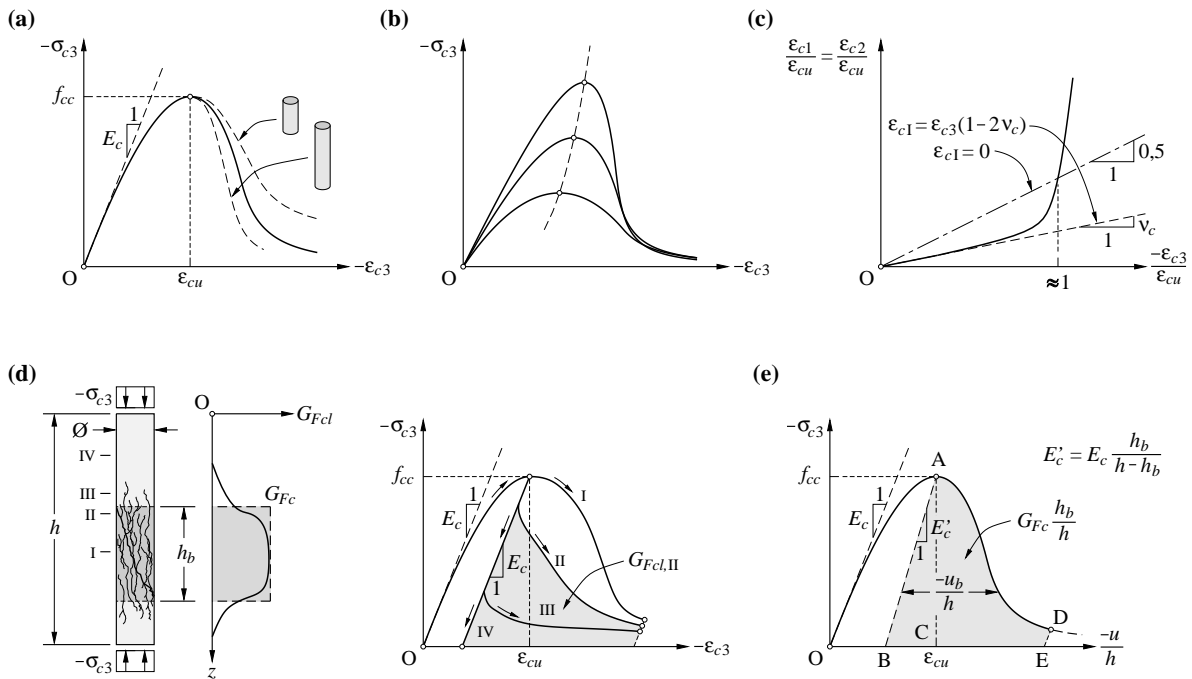
Die Bruchstauchung  $\varepsilon_{cu}$  nimmt mit zunehmender Druckfestigkeit leicht zu; als grobe Näherung kann man

$$\varepsilon_{cu} \approx 0,6 f_{cc}^{1/3} \quad [\text{in } \% \text{ und N/mm}^2] \quad (3.4)$$

setzen. Dabei gilt es zu beachten, dass die Bruchdehnung mit zunehmender Belastungsdauer erheblich anwächst. Bei einem mit einer exzentrischen Belastung verbundenen Verzerrungsgradienten fällt die Bruchdehnung der Randfaser je nach Querschnittsform und Lage der neutralen Achse ausserdem deutlich höher aus, was unter anderem eine Folge der unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten jeder Längsfaser ist [136, 137].

Bei vorgeschriebenen Randverschiebungen ist nach dem Überschreiten der Bruchstauchung ein entfestigendes Verhalten zu beobachten. Mit zunehmender Versuchskörperhöhe verläuft dabei die Spannungs-Verzerrungscharakteristik steiler [157], was einer Lokalisierung der Verzerrungen zuzuschreiben ist (Bild 3.2(a)). Die Abszisse des Diagramms in Bild 3.2(a) beschreibt nicht mehr den lokalen Verzerrungszustand, sondern vielmehr die mittlere Stauchung  $-u/h$  ( $u$  = Höhenänderung des Zylinders). Der abfallende Ast der Spannungs-Verzerrungscharakteristik beschreibt nicht das Werkstoff-, sondern das Systemverhalten. Demzufolge sind zur Beschreibung bruchmechanische Betrachtungen heranzuziehen; die Kontinuumsmechanik lässt ein derartiges Verhalten nicht zu.

Bild 3.2(d) zeigt typische lokale Spannungs-Verzerrungscharakteristiken in verschiedenen Querschnitten entlang des Versuchskörpers [83];  $G_{Fcl}$  bezeichnet die lokal nach dem Erreichen der Bruchstauchung dissipierte Energie pro Volumeneinheit. Der Versuchskörperteil, in welchem die Stauchungen anwachsen und folglich Energie dissipiert wird, wird als Bruchzone bezeichnet. Gemäss Bild 3.2(d) wächst die Bruchzone mit abnehmender Druckspannung  $-\sigma_{c3}$  an. Solange die in der Bruchzone dissipierte Energie grösser als die bei der Entlastung in den übrigen Bereichen freige-



**Bild 3.2** – Einachsige Druckbeanspruchung: (a) Spannungs-Dehnungsbeziehung; (b) Vergleich verschiedener Festigkeiten; (c) Verzerrungen; (d) und (e) Lokalisierung bei der Entfestigung, Definition der Bruchenergie.

setzte Formänderungsenergie ist, erfolgt bei vorgeschriebenen Verschiebungen eine stabile Entfestigung [115]. Sind die beiden Energien gleich, d.h. der Tangentenmodul in der Spannungs-Verzerrungs- resp. -Verschiebungsbeziehung strebt gegen minus unendlich, erfolgt bei konstanter Verschiebung ein plötzlicher Spannungsabfall, bis sich bei einem tieferen Druckspannungsniveau erneut ein stabiler Zustand einstellen kann.

Vereinfacht lässt sich das entfestigende Verhalten mit einem seriellen System [6, 115, 149] beschreiben, indem man von einer Bruchzone mit einer während der ganzen Entfestigung konstanten Bruchzonenhöhe  $h_b$  ausgeht, und annimmt, dass sich der Rest des Versuchskörpers linear elastisch entlastet; Bild 3.2(d, e). Aufgrund experimenteller Beobachtungen [58, 83, 117, 149] kann die Bruchzonenhöhe zu etwa  $h_b = 2\varnothing$  [149] (resp.  $h_b = 2,26 A^{1/2}$ ;  $A$  = Querschnittsfläche) festgelegt werden. Unter dieser Prämisse bewegt sich die auf das Volumen der Bruchzone bezogene, mit der Druckfestigkeit leicht anwachsende *spezifische Bruchenergie* in der Größenordnung von  $G_{Fc} = 60 \dots 110 \dots 160 \text{ kJ/m}^3$ . Gemäss Bild 3.2(e) lässt sich der Zusammenhang zwischen der Spannung und der mittleren Verzerrung bzw. Randverschiebung des freien Zylinderendes während der Entfestigung bei bekanntem Bruchzonenvolumen und angenommener Funktion des Kurvenverlaufs entlang AD mit Hilfe der spezifischen Bruchenergie beschreiben; häufig wird vereinfacht von einem linearen Kurvenverlauf entlang AD ausgegangen.

Da die in den entlasteten Bereichen freigesetzte Formänderungsenergie mit  $f_{cc}^2$  wächst, während die Bruchenergie mit der Druckfestigkeit nur leicht anwächst, fällt der abfallende Ast der Spannungs-Verzerrungscharakteristik mit zunehmender Druckfestigkeit steiler aus; Bild 3.2(b).

### 3.3.2 Einachsige Zugbeanspruchung

Die einachsige Zugfestigkeit  $f_{ct}$  ist gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit des Betons relativ gering und weist eine grosse Streuung auf. Bei der Ermittlung des Tragwiderstands von Stahlbetonstrukturen wird die Zugfestigkeit deshalb in der Regel vernachlässigt. Dies umso mehr als Betonstrukturen infolge ungleichmässiger und behinderter schwind- und hydratationsbedingter Verzerrungen sowie Temperaturverzerrungen rechnerisch kaum erfassbaren Eigenspannungen in der Größenordnung der Zugfestigkeit ausgesetzt sind. Unerlässlich ist die Berücksichtigung der Zugfestigkeit

allerdings für die Querkrafttragfähigkeit von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung, für den Verbund zwischen Beton und Bewehrung sowie für gewisse lokale Phänomene. Darüber hinaus nimmt die Zugfestigkeit bei Fragen zum Verformungsverhalten sowie zu Rissabständen und -breiten eine Schlüsselrolle ein.

Da sich Direktzugversuche insbesondere hinsichtlich einer zentrischen Krafteinleitung anspruchsvoll gestalten, werden sie vorwiegend in der Werkstoffforschung eingesetzt. Deshalb wird die Zugfestigkeit experimentell in der Regel aus Stempeldruckversuchen [24] (Bild 3.3(a)) Spaltzugversuchen (Bild 3.3(b)) oder Biegezugversuchen (Bild 3.3(c)) mit an Direktzugversuchen kalibrierten Umrechnungsbeziehungen gewonnen.

Für normalfeste Betone kann die Zugfestigkeit mit der Beziehung

$$f_{ct} = 0,3 f_{cc}^{2/3} \quad [\text{in N/mm}^2] \quad (3.5)$$

[130] abgeschätzt werden.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung kann bei einer einachsigen Beanspruchung bis zum Erreichen der Zugfestigkeit in guter Näherung als linear elastisch angenommen werden. Der Bruch erfolgt relativ spröd. Nichtsdestotrotz kann analog der einachsigen Druckbeanspruchung ein entfestigendes Verhalten beobachtet werden. Die Bruchzone beschränkt sich im Wesentlichen auf einen Riss, und die auf die Rissfläche bezogene Bruchenergie bewegt sich in der Grössenordnung von  $G_F = 100 \dots 200 \text{ J/m}^2$ .

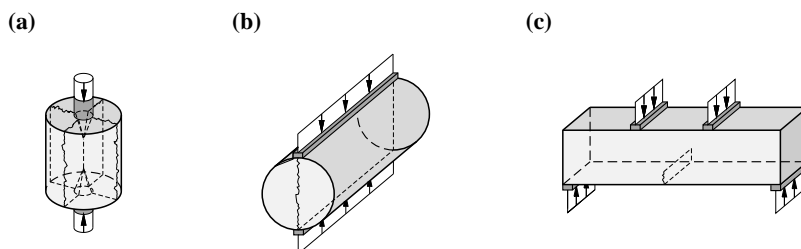
### 3.3.3 Ebener Spannungszustand

Das Verhalten des Betons im ebenen Spannungszustand wird an scheiben- oder würfelförmigen Versuchskörpern untersucht, wobei die Lasteinleitung zwecks einer möglichst unbehinderten Querverformung über Stahlbürsten oder Teflonsandwichplatten erfolgt [157, 158].

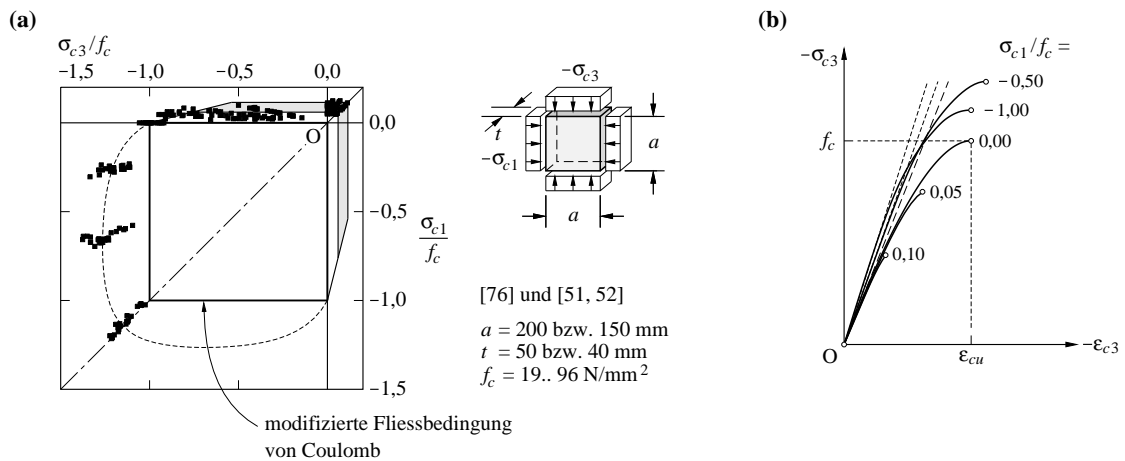
Bild 3.4(a) zeigt die in Versuchen von Kupfer [76] sowie Hussein und Marzouk [51, 52] beobachteten Verhältnisse der beiden auf die einachsige Druckfestigkeit bezogenen Hauptspannungen beim Bruch, wobei  $\sigma_{c2} = 0$  ist. Für  $0 \geq \sigma_{c1} \geq \sigma_{c3}$ , wenn also senkrecht zur Hauptdruckrichtung Querdruckspannungen wirken, fällt die beim Bruch vorhandene Druckspannung  $-\sigma_{c3}$  höher als die einachsige Druckfestigkeit  $f_c$  aus; die günstigsten Verhältnisse ergeben sich etwa bei  $\sigma_{c2} = 0,5 \sigma_{c3}$ . Mit zunehmender Zylinderdruckfestigkeit nimmt das Verhältnis  $\sigma_{c3}/f_c$  beim Bruch für  $\sigma_{c2} = 0,5 \sigma_{c3}$  leicht zu, während es für  $\sigma_{c2} = \sigma_{c3}$  etwas geringer ausfällt. Für  $\sigma_{c1} \geq 0 \geq \sigma_{c3}$ , wenn also senkrecht zur Hauptdruckrichtung Zugspannungen wirken, fallen die beim Bruch erreichten Druckspannung  $-\sigma_{c3}$  geringer als die einachsige Druckfestigkeit aus. Diese Festigkeitsreduktion ist mit zunehmender Zylinderdruckfestigkeit ausgeprägter.

Da die Versuchsergebnisse gemäss Bild 3.4(a) einer nicht unerheblichen Streuung unterworfen sind, bedient man sich zur Beschreibung der biaxialen Festigkeit häufig der modifizierten Fließbedingung von Coulomb (Kap. 2.6.3), mit Rücksicht auf die Erwägungen in Kapitel 3.3.2 oft mit einer verschwindenden Zugfestigkeit  $f_{ct} = 0$ . Mithin wird der Einfluss der mittleren Hauptspannung vernachlässigt und von einer Berücksichtigung der Festigkeitserhöhung infolge Querdruck abgesehen.

Bei Querdruck ist die initiale Steifigkeit etwas höher, was sich mit Hilfe der linearen Elastizitäts-



**Bild 3.3** – Versuche zur indirekten Bestimmung der einachsigen Betonzugfestigkeit: (a) Stempeldruckversuch; (b) Spaltzugversuch; (c) Biegezugversuch.



**Bild 3.4** – Ebener Spannungszustand: (a) Festigkeit; (b) Spannungs-Verzerrungsbeziehungen.

theorie erklären lässt, und die Bruchdehnung wird gegenüber dem einachsigen Verhalten moderat erhöht. Bei einer Querkzugbeanspruchung wird mit der Festigkeit auch die Bruchstauchung reduziert (Bild 3.4(b)).

Eine ausführliche Beschreibung des Verhaltens von Beton im ebenen Spannungszustand findet man in Kupfer [76].

### 3.3.4 Räumlicher Spannungszustand

Experimentelle Untersuchungen des Verhaltens von Beton unter allgemein räumlicher Beanspruchung werden an Würfeln durchgeführt, wobei die Lasteinleitung zwecks einer möglichst unbehinderten Querverformung über Stahlbürsten oder Teflonsandwichplatten erfolgt [157, 158]. Da sich derartige Versuche relativ aufwendig gestalten, werden allerdings häufig Triaxialversuche eingesetzt, bei welchen zylinderförmige Versuchskörper in der Regel konstanten Seitendruckspannungen  $-\sigma_{c1} = -\sigma_{c2}$  ausgesetzt werden, während die Längsdruckspannung  $-\sigma_{c3}$  bis zum Bruch erhöht wird (Bild 3.5).

Bild 3.5(c) zeigt die in Triaxialversuchen beobachteten Festigkeiten  $f_{c3}$  in Abhängigkeit der Seitendruckspannungen. Seitendruckspannungen führen allgemein zu einer erhöhten Druckfestigkeit. Analog zum ebenen Spannungszustand bedient man sich bei praktischen Anwendungen häufig der modifizierten Fließbedingung von Coulomb für die Beschreibung der Betonfestigkeit unter allgemein räumlichen Spannungszuständen.<sup>1</sup> Der neben der einachsigen Druckfestigkeit eingehende Parameter  $k$  (vgl. (2.91)) wird mit den in Triaxialversuchen bestimmten Festigkeiten bestimmt; für  $\sigma_{c1} = \sigma_{c2}$  folgt aus (2.91) mit  $-\sigma_{c2} = f_{c3}$

$$f_{c3} = f_c - k\sigma_{c1} \tag{3.6}$$

Gemäss Bild 3.5(c) nimmt  $k$  mit zunehmendem Seitendruck von etwa 5 auf 3,5 ab, was Winkeln der inneren Reibung von  $\varphi = (1 - k)/(1 + k) = 42$  bzw.  $34^\circ$  entspricht. Im Mittel kann etwa der von Richard et al. [132] vorgeschlagene Wert von  $k = 4$  ( $\varphi = 37^\circ$ ) verwendet werden. Eine Abhängigkeit des Parameters  $k$  von der Zylinderdruckfestigkeit kann experimentell nicht festgestellt werden.

<sup>1</sup> Die Anwendung komplexerer Versagenskriterien, wie sie von Willam und Warnke [166], Ottosen [125] und anderen vorgeschlagen wurden, welche vier und mehr Parameter aufweisen, ist angesichts der mit der Bestimmung dieser Parameter einhergehenden Unsicherheiten in den meisten Fällen nicht gerechtfertigt. Da die beiden erwähnten Kriterien im Unterschied zur modifizierten Fließbedingung von Coulomb allerdings keine Fallunterscheidungen erfordern, werden sie bei numerischen Analysen oft eingesetzt.

Bild 3.5(b) zeigt typische Spannungs-Verzerrungsbeziehungen von Triaxialversuchen für verschiedene Seitendrücke im Vergleich zur einachsigen Druckbeanspruchung. Die initiale Steifigkeit ist dabei der linearen Elastizitätstheorie folgend kaum durch Querdruckspannungen beeinflusst.

Mit zunehmendem Seitendruck wächst die Bruchstauchung  $\varepsilon_{cu3}$  erheblich an; selbst bei relativ geringen Seitendrücken ist sie beträchtlich höher als die einachsige Bruchstauchung  $\varepsilon_{cu}$ . Gemäss Bild 3.5(d) kann der Zuwachs der Bruchstauchung  $\varepsilon_{cu3}$  in Abhängigkeit des Seitendrucks mit

$$\frac{\varepsilon_{cu3}}{\varepsilon_{cu}} = 1 + 20 \frac{-\sigma_{c1}}{f_c} \quad (3.7)$$

grob abgeschätzt werden, wobei auch beim Bruchstauchungszuwachs keine signifikante Abhängigkeit von der Zylinderdruckfestigkeit festgestellt werden kann. Die Entfestigung des Betons nach dem Erreichen der Druckfestigkeit fällt gemäss Bild 3.5(b) bei sonst gleichen Bedingungen mit zunehmendem Seitendruck deutlich weniger steil aus.

Eine ausführliche Diskussion des Verhaltens von Beton unter allgemeinen Spannungszuständen findet man bei van Mier [158], Rogge [134] sowie Dahl [35, 36].

### 3.3.5 Rissverzahnung

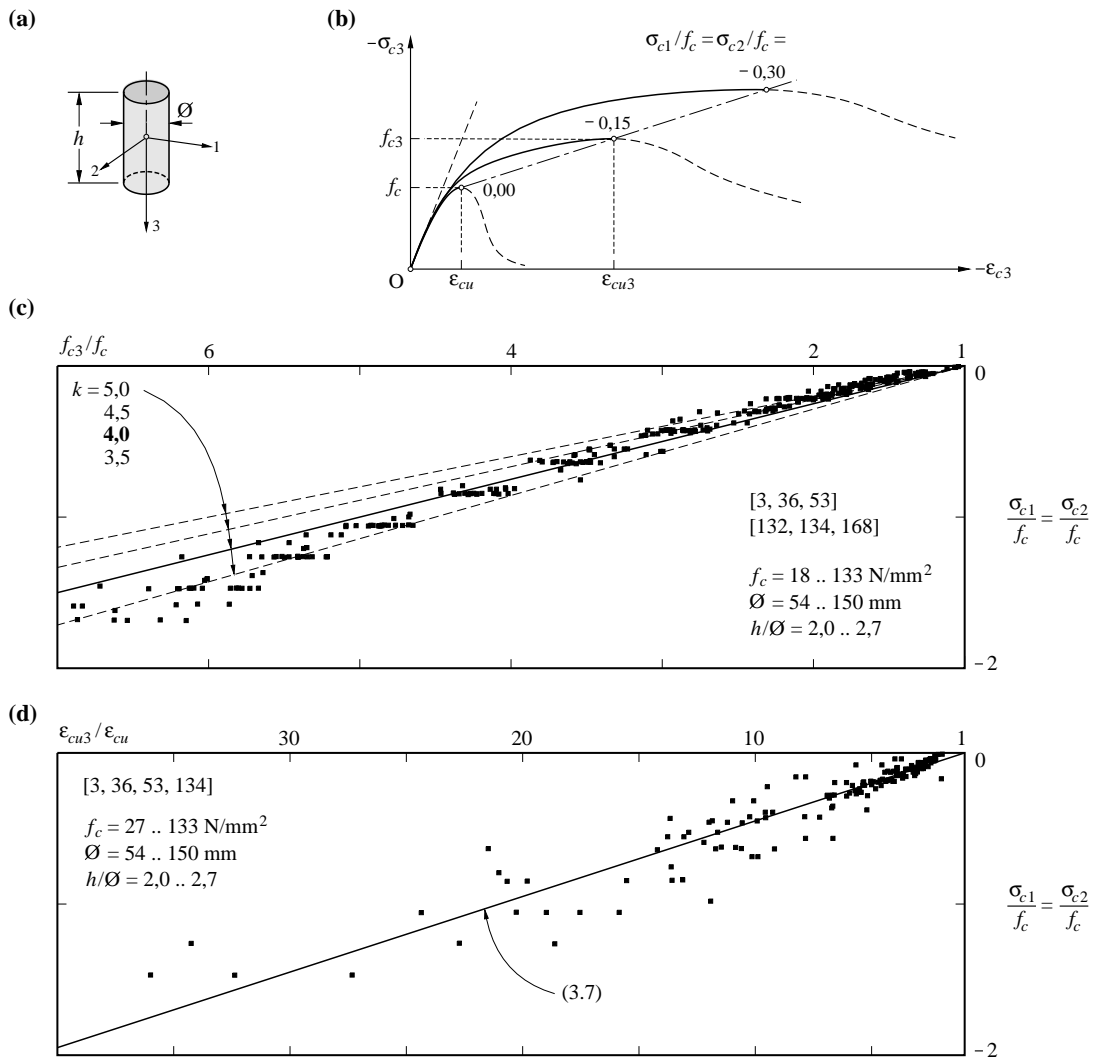
Durch die bei gegenseitiger Verschiebung der Rissufer hervorgerufene Verzahnung und Reibung können im Beton Spannungen über die Risse hinweg übertragen werden, was als *Rissverzahnung* bezeichnet wird. Bild 3.6(a) zeigt einen zur experimentellen Untersuchung der Rissverzahnung häufig eingesetzten Versuchsaufbau. Senkrecht zur Rissebene werden entweder mit hydraulischen Zylindern die Randspannungen oder die Randverschiebungen vorgeschrieben oder durch Verbindung der Lasteinleitplatten eine elastische Stützung erzeugt. Generell sind Rissverzahnungsversuche sehr anspruchsvoll, da sehr kleine Verschiebungen von unregelmässigen Rissufern unter grossen Kräften zu kontrollieren sind. Demgemäss sind die Ergebnisse einzelner Versuchsreihen relativ grossen Streuungen unterworfen.

Grundsätzlich können zwei unterschiedliche Mechanismen, welche die Übertragung von Spannungen über Risse im Beton hinweg ermöglichen, unterschieden werden [164, 165]. Einerseits werden beim Übereinandergleiten der rauen Oberflächen Reibungskräfte aktiviert, und andererseits dringen die Zuschlagkörner in die Zementmatrix ein (Bild 3.6(c)). Bei höherer Betonfestigkeit erreicht die Matrix ähnliche Zugfestigkeiten wie die Zuschlagkörner, sodass die Risse durch die Zuschlagkörner hindurch verlaufen (Bild 3.6(d)). Dabei verliert der zweite Mechanismus zunehmend an Bedeutung. Sehr ausgeprägt ist dieses Verhalten bei Leichtbetonen. Offensichtlich ist die Rissverzahnung infolge Reibung, Kontaktphänomenen und lokalen Systemänderungen von der Belastungsgeschichte abhängig.

Eine allgemeine Beschreibung der Rissverzahnung verlangt nach einer inkrementellen Beziehung zwischen den in Bild 3.6(b) dargestellten mittleren Rissspannungskomponenten  $\sigma_{cnr}$  und  $\tau_{cnr}$  und den ihnen zugeordneten mittleren Rissuferverschiebungskomponenten  $w_r$  und  $u_r$  in Bild 3.6(c),

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{cnr} \\ d\tau_{cnr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{nn} & a_{nt} \\ a_{tn} & a_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw_r \\ du_r \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Neben weiteren Einflüssen ist die Tangentensteifigkeitsmatrix von den mittleren Rissspannungen  $\sigma_{cnr}$  und  $\tau_{cnr}$ , den mittleren Rissverschiebungen  $w_r$  und  $u_r$  sowie der Beanspruchungsgeschichte abhängig. An Hand theoretischer Betrachtungen lassen sich der Rissverzahnungsbeziehung einige Restriktionen auferlegen [8]. Die Rissöffnung kann keine negativen Werte aufweisen,  $w_r \geq 0$ , und senkrecht zum Riss müssen Druckspannungen wirken,  $\sigma_{cnr} \leq 0$ . Bei einem reinen Öffnen des Risses, also  $du_r = 0$  (mit  $u_r \neq 0$ ) und  $dw_r > 0$ , müssen sich die mittleren Rissspannungskomponenten verringern, d.h.  $|d\sigma_{cnr}| \leq 0$  und  $|d\tau_{cnr}| \leq 0$ ; mithin ist  $a_{nn} = \partial\sigma_{cnr}/\partial w_r > 0$  und  $a_{nn} = \partial\tau_{cnr}/\partial w_r < 0$ , d.h. die Tangentensteifigkeitsmatrix ist mit Ausnahme von  $u_r = 0$  nie positiv definit, so dass die Rissverzahnung für sich allein instabil ist. Wird dem Beton vereinfachend ein starr-ideal plastisches Werkstoffverhalten zu



**Bild 3.5** – Dreiachsige Beanspruchung mit  $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} \leq \sigma_{c3}$  – Triaxialversuche: (a) Bezeichnungen; (b) Spannungs-Verzerrungscharakteristik; (c) Festigkeiten; (d) Bruchstauchungen.

Grunde gelegt, so verlieren die Rissufer bei einer reinen Rissöffnung den Kontakt, und die Rissspannungskomponenten verschwinden, d.h.  $\sigma_{cnr} = 0$  und  $\tau_{ctnr} = 0$  [64, 95].

Da eine derartige Beschreibung der Rissverzahnung zu relativ komplizierten Beziehungen führt, werden in der Regel vereinfachend Beziehungen der Form  $\sigma_{cnr} = \sigma_{cnr}(w_r, u_r)$  und  $\tau_{ctnr} = \tau_{ctnr}(w_r, u_r)$  verwendet. Für die Koeffizienten der Tangentensteifigkeitsmatrix  $a_{nm} = \partial \sigma_{cnr} / \partial w_r$ ,  $a_{nt} = \partial \sigma_{cnr} / \partial u_r$ ,  $a_{tn} = \partial \tau_{ctnr} / \partial w_r$  und  $a_{tt} = \partial \tau_{ctnr} / \partial u_r$  gilt dann  $\partial a_{nm} / \partial u_r = \partial a_{nt} / \partial w_r$  und  $\partial a_{tn} / \partial u_r = \partial a_{tt} / \partial w_r$ , womit gemäss (2.63) ein wegunabhängiges Verhalten vorliegt.

Walraven [164] entwickelte für Betone, deren Risse vorwiegend um die Zuschlagkörner herum verlaufen, eine auf physikalischen Grundlagen beruhende Modellvorstellung. Die Zuschlagkörner werden dabei als starre, stochastisch verteilte Kugeln mit einer Durchmesserhäufigkeit gemäss der Kornverteilung idealisiert und die Matrix als starr-ideal plastisches Kontinuum. Bild 3.6(e) zeigt eine aus diesem System herausgeschnittene Scheibe mit einer Dicke von eins, und in Bild 3.6(f) sind die in der Kontaktfläche zwischen Kugel und Matrix wirkenden Spannungen dargestellt.  $\mu$  bezeichnet den Reibungskoeffizient, und  $a_t$  bzw.  $a_n$  sind die Längen der in  $t$ - bzw.  $n$ -Richtung projizierten Kontaktstrecke. Damit folgen die mittleren Rissspannungskomponenten zu

$$\sigma_{cnr}(u_r, w_r) = -\sigma_k(A_t - \mu A_n) \quad , \quad \tau_{ctnr}(u_r, w_r) = -\sigma_k(\mu A_t + A_n) \quad (3.9)$$



wobei  $A_t$  bzw.  $A_n$  die auf eine Einheitsfläche bezogenen Summen der  $a_t$  bzw.  $a_n$  bezeichnen und von den Rissuferverschiebungskomponenten  $w_r$  und  $u_r$  sowie der Kornverteilung abhängen. Da sich die Bestimmung der Kontaktnormalspannung  $\sigma_k$  beim Fließbeginn der Matrix auf Grund des unbekannt variablen räumlichen Spannungszustands und der lokal grossen Streuungen unterworfenen Matrixfestigkeit nicht mit Hilfe einer Fließbedingung bestimmt lässt, werden die beiden Parameter  $\mu$  und  $\sigma_k$  direkt anhand von Messergebnissen von Rissverzahnungsversuchen kalibriert; für normalfeste Betone resultiert  $-\sigma_k = 6,39 f_{cc}^{0,56}$  und  $\mu = 0,4$ . Mit zunehmendem Grösstkorn fallen die Rissspannungskomponenten bei vorgeschriebener Rissuferverschiebung etwas grösser aus, da  $A_t$  bzw.  $A_n$  anwachsen. Eine Weiterentwicklung dieser Modellvorstellung für die Berücksichtigung zyklischer und andauernder Beanspruchungen findet man bei Pruijssers [128] bzw. Fréney [41].

Mittels Regressionsanalyse ermittelte Walraven [164, 165] weiter anhand umfangreicher Versuche mit einer elastischen Stützung in Querrichtung, Betonfestigkeiten bis  $f_{cc} = 60 \text{ N/mm}^2$  und einer Kornverteilung nach Fuller mit einem Grösstkorn von  $D_{max} = 16..32 \text{ mm}$  vereinfachte Rissverzahnungsbeziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_{cnr} &= \frac{f_{cc}}{17} - \left[ 1,35 w_r^{-0,63} + (0,191 w_r^{-0,552} - 0,15) 1,18 f_{cc} \right] u_r \leq 0 \\ \tau_{cnr} &= -\frac{f_{cc}}{25,5} + \left[ 1,80 w_r^{-0,80} + (0,234 w_r^{-0,707} - 0,20) 1,18 f_{cc} \right] u_r \geq 0\end{aligned}\quad (3.10)$$

deren Verläufe in Bild 3.6(h) für  $f_{cc} = 40 \text{ N/mm}^2$  wiedergegeben sind; die Würfeldruckfestigkeit wurde dabei mit  $f_{cc} = 0,85 f_{cw}$  auf die Zylinderdruckfestigkeit umgerechnet. Durch Umformung von (3.10) lassen sich die Riss Schubspannungen und die Verschiebungen parallel zum Riss als Funktion der Rissbreite und der Rissnormalspannungen ausdrücken; siehe Bild 3.6(g). Der Einfluss der Zylinderdruckfestigkeit auf die über einen Riss übertragbaren Riss Schubspannungen verringert sich mit zunehmender Druckspannung  $-\sigma_{cnr}$ . Die Rissuferverschiebungsrichtung verläuft mit zunehmender Druckspannung  $-\sigma_{cnr}$  flacher zur Rissebene.

Für hochfeste Betone, bei welchen die Risse durch die Zuschlagkörner verlaufen, werden die Rissspannungskomponenten mit (3.9) und (3.10) erheblich überschätzt. Bei Versuchen an Beton mit einer Zylinderdruckfestigkeit von  $f_{cc} = 100 \text{ N/mm}^2$  und einem Grösstkordurchmesser  $D_{max} = 16 \text{ mm}$  resultieren gegenüber (3.10) etwa 65 % tiefere Rissspannungskomponenten [162].

Alternative empirische Formulierungen der Form  $\sigma_{cnr} = \sigma_{cnr}(w_r, u_r)$  und  $\tau_{cnr} = \tau_{cnr}(w_r, u_r)$  enthalten [85] und [8].

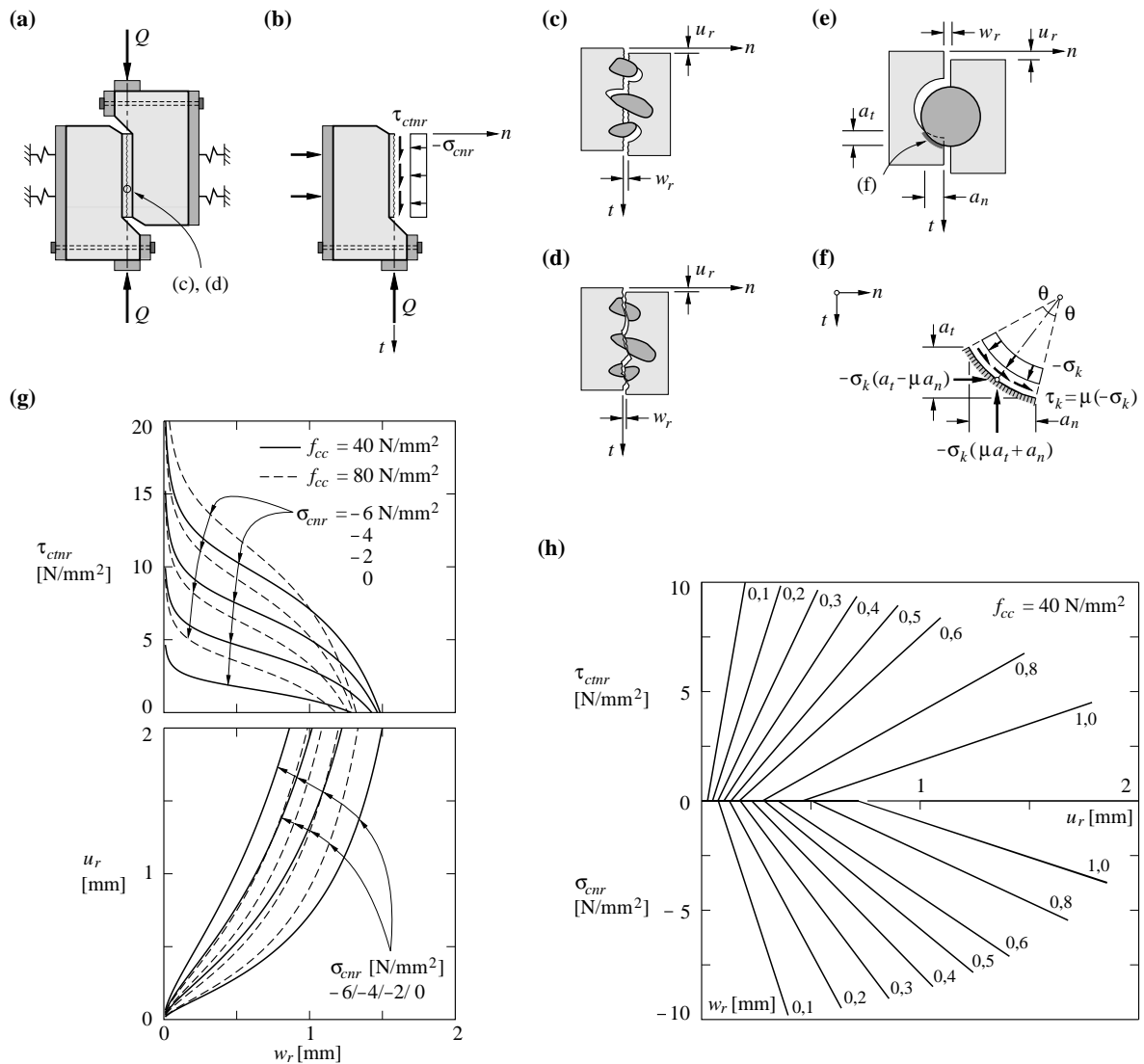
### 3.3.6 Zeitabhängiges Verhalten

Neben den unmittelbaren Auswirkungen einer Beanspruchung treten bei Betonkontinua immer auch zeitabhängige Auswirkungen auf; dabei werden die beanspruchungsunabhängigen Schwind- und Temperaturverformungen und die beanspruchungsabhängigen Kriechverformungen unterschieden.

Das *Schwinden* bezeichnet die durch Trocknung sowie, bei tiefen Wasserzementwerten, durch Hydratation des Zements verursachte Volumenabnahme des Betons. Die hauptsächlich von der Umgebungsfeuchte, der Bauteilgeometrie und der Betonzusammensetzung abhängige Schwindverzerrung  $\varepsilon_{cs}(t)$  wird üblicherweise durch empirische Produktansätze der Form

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs, \infty}(t_s) \beta(t - t_s) \quad (3.11)$$

beschrieben [23], wobei  $t$  das Alter des Betons,  $t_s$  das Alter des Betons beim Einsetzen des Schwindens,  $\varepsilon_{cs, \infty}(t_s)$  das *Endschwindmass* und  $\beta(t - t_s)$  eine normierte Zeitfunktion bezeichnen; für  $t = t_s$  nimmt  $\beta(t - t_s)$  den Wert 0, für  $t \rightarrow \infty$  den Wert 1 an. Das Endschwindmass liegt ungefähr zwischen 0,2 und 0,8 ‰. Unter der Prämisse einer rein isotropen Volumenabnahme folgt für den Betonverzerrungstensor infolge Schwindens



**Bild 3.6** – Rissverzahnung: (a) Versuchsaufbau; (b) Rissstresskomponenten; (c) und (d) Rissdetails; (e) und (f) Modell von Walraven; (g) Rissstress und Verschiebungskomponente parallel zum Riss in Funktion der Rissöffnung und -normalkraft; (h) Rissstresskomponenten in Funktion der Rissverschiebungskomponenten.

$$\varepsilon_{cskj}(t, t_s) = \varepsilon_{cs}(t, t_s) \delta_{kj} \quad (3.12)$$

Das *Kriechen* bezeichnet die zeitabhängige Änderung des Betonverzerrungszustands infolge andauernder Belastung und die *Relaxation* die zeitabhängige Änderung des Spannungszustands infolge eines vorgeschriebenen andauernden Verschiebungszustands; das Kriechen und die Relaxation sind also zwei zueinander duale Vorgänge im Sinne von Kapitel 2. Die Beschreibung des Kriechens und der Relaxation wird zunächst für einachsige Spannungszustände diskutiert und im Anschluss verallgemeinert. Bei Druckspannungen bis  $-\sigma_c \approx 0,4 f_{cc}$  kann der Beton unter Voraussetzung konstanter Feuchtigkeit und Temperatur in guter Näherung als alternder linear viskoelastischer Werkstoff idealisiert werden; die Kriechverzerrungen sind proportional zur aufgetragenen Spannung. Mithin können die spannungsabhängigen Betonverzerrungen infolge einer andauernden Spannung  $\sigma_{c0}$ , welche im Alter  $t_0$  aufgebracht wird, mit

$$\varepsilon_{cs}(t) = \sigma_{c0} J(t, t_0) \quad (3.13)$$

berechnet werden.  $J(t, t_0)$  bezeichnet die sogenannte *Nachgiebigkeitsfunktion*, welche aus der Summe der elastischen und der kriechbedingten Verzerrungen<sup>1</sup> infolge einer Einheitsspannung gebildet wird

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c0}} \quad (3.14)$$

(Bild 3.7(a)).  $E_{c0}$  bzw.  $E_c(t_0)$  bezeichnen hierbei die Elastizitätsmoduln des Betons im Alter von 28 Tagen bzw.  $t_0$  und  $\varphi(t, t_0)$  das Kriechmass. Bei Fragestellungen betreffend des Betonverhaltens in fortgeschrittenem Alter kann der Elastizitätsmodul mit guter Näherung als konstant in Rechnung gestellt werden, d. h.  $E_c(t) = E_{c0}$ . Das *Kriechmass*  $\varphi(t, t_0)$  wird gewöhnlich durch empirische Beziehungen, z. B. als Produkt aus dem *Endkriechmass*  $\varphi_\infty(t_0)$  und einer normierten Zeitfunktion  $f(t - t_0)$  beschrieben [23]

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_\infty(t_0) f(t - t_0) \quad (3.15)$$

für  $t = t_0$  nimmt  $f(t - t_0)$  den Wert 0, für  $t \rightarrow \infty$  den Wert 1 an. Neben dem Belastungsalter  $t_0$  ist das dimensionslose Kriechmass hauptsächlich von der Betonzusammensetzung, der Bauteilgeometrie sowie der Betonfeuchte und -temperatur abhängig. (3.15) liefert Werte in der Grössenordnung von  $\varphi(t, t_0) \approx 2 \dots 3$ . Bezüglich der verschiedenen empirischen Ansätze sei darauf hingewiesen, dass die Versuchsdatenbasis für fortgeschrittene Betonalter sehr beschränkt ist; mithin sind die extrapolierten Ansatzfunktionen mit entsprechenden Unsicherheiten behaftet, was sich in teilweise stark voneinander abweichenden Funktionswerten niederschlägt [28]. Diesen Sachverhalt gilt es bei der ingenieurmässigen Beurteilung auf der Basis entsprechender Berechnungen stets zu beachten.

Für linear viskoelastische Werkstoffe gilt bei veränderlichen Spannungen  $\sigma_c(t)$  das *Superpositionsprinzip von Boltzmann*

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \int_{t_0}^t J(t, \tau) d\sigma_c(\tau) \quad (3.16)$$

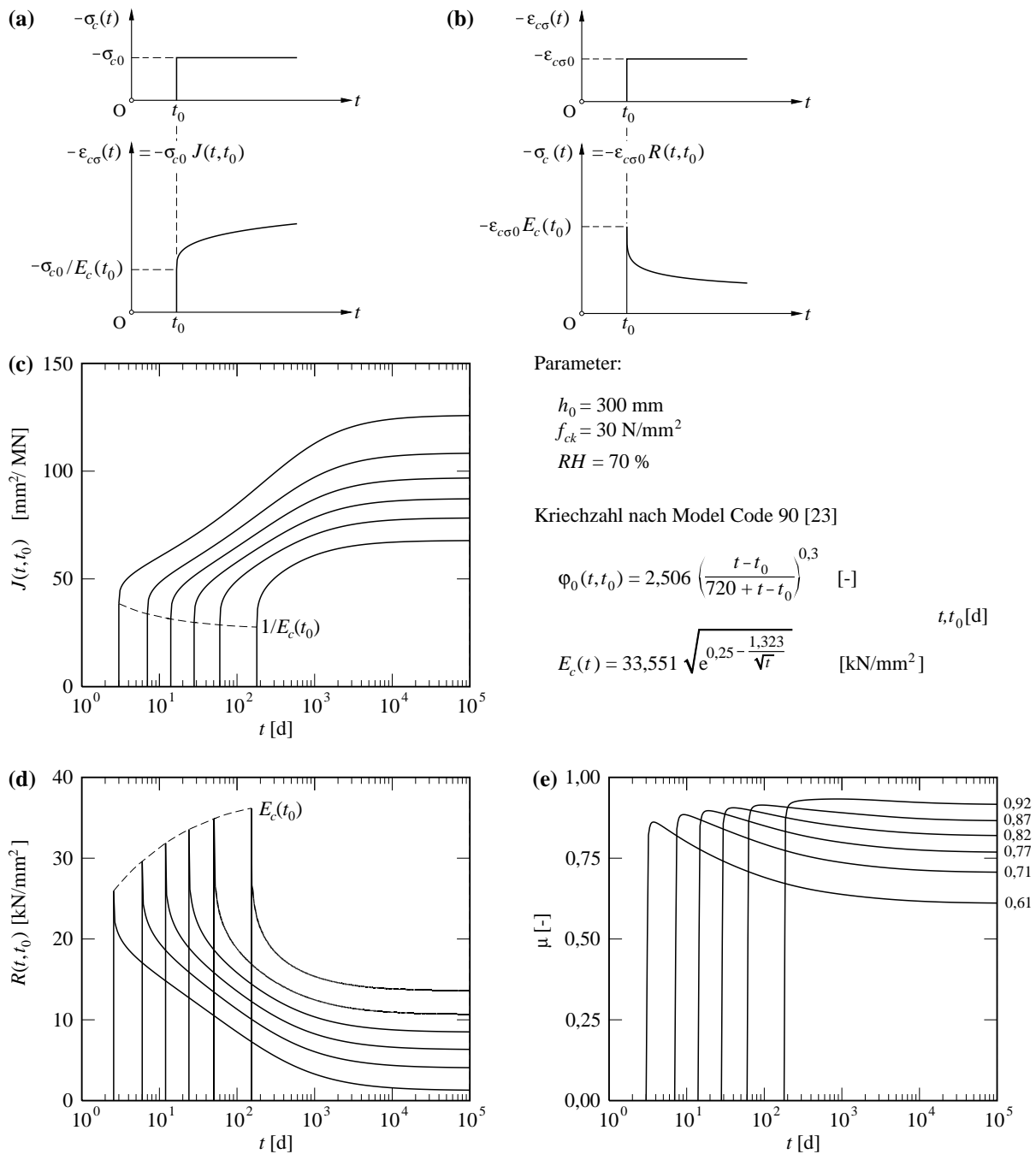
wobei der Integralausdruck als Stieltjes-Integral zu verstehen ist, welches auch auf unstetige Spannungsfunktionen anwendbar ist. Setzt man voraus, dass die Spannungsfunktion  $\sigma(t)$  nach einem initialen Sprung auf  $\sigma_{c0}$  stetig differenzierbar ist, geht der Integralausdruck in ein gewöhnliches Integral über, so dass (3.16) wie folgt geschrieben werden kann

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_{c0} J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} J(t, \tau) d\tau \quad (3.17)$$

Bei experimentellen Untersuchungen zur Anwendbarkeit des Superpositionsgesetzes auf Beton wurden neben den bereits erwähnten Annahmen der konstanten Feuchtigkeit und Temperatur (wobei insbesondere ein starkes Trocknen des Betons auszuschliessen ist) und der Begrenzung des Spannungsniveaus auf  $-\sigma_c \approx 0,4 f_{cc}$ , zwei weitere Voraussetzungen für eine adäquate Modellierung identifiziert, nämlich, dass im Laufe der Zeit keine erhebliche Reduktion der Betonverzerrungen und im fortgeschrittenen Betonalter kein ausgeprägter Anstieg des Spannungsniveaus auftritt [10]. Die Verletzung der zuletzt genannten Voraussetzung führt indes nur zu einem marginalen Fehler. Obschon das

---

<sup>1</sup> Da bereits unmittelbar nach der Beanspruchung grosse kriechbedingte Auswirkungen auftreten, können diese experimentell nicht klar von den elastischen Auswirkungen unterschieden werden, siehe Bild 3.7(c). Mithin ist  $J(t_0, t_0) = 1/E_c(t_0)$  abgesehen von der Beanspruchungsgeschwindigkeit auch stark von der in den Prüfnormen festgelegten Beanspruchungsdauer abhängig; da übliche Beanspruchungen von Betonbauten aber etwas andauern und lediglich der Funktionswert von  $J(t, t_0)$  interessiert, ist die exakte Aufteilung in einen elastischen und einen kriechbedingten Anteil nur von untergeordneter Bedeutung.



**Bild 3.7** – Kriechen und Relaxation: (a) Nachgiebigkeitsfunktion; (b) Relaxationsfunktion; (c) Nachgiebigkeitsfunktionen [23]; (d) Relaxationsfunktionen; (e) Alterungsbeiwerte.

Superpositionsprinzip direkt aus der angenommenen Linearität der Beziehung (3.13) folgt, ist das Anwendungsgebiet von (3.16) also restriktiver.

Bei der Relaxation, wenn also der Beton im Alter  $t_0$  an Stelle der Spannung einer konstanten andauernden spannungsabhängigen Verzerrung  $\varepsilon_{cs0}$  unterworfen wird, gilt die zu (3.16) duale Beziehung

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_{cs0} R(t, t_0) \quad (3.18)$$

wobei  $R(t, t_0)$  die *Relaxationsfunktion* bezeichnet (Bild 3.7(b)). Für zeitlich veränderliche spannungsabhängige Verzerrungen  $\varepsilon_{cs}(t)$  resultieren die zu (3.16) und (3.17) dualen Beziehungen

$$\sigma_c(t) = \int_{t_0}^t R(t, \tau) d\varepsilon_{c\sigma}(\tau) \quad (3.19)$$

bzw. für nach einem initialen Sprung um  $\varepsilon_{c\sigma 0}$  stetig differenzierbare Verzerrungsfunktionen

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t_0)R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \varepsilon_{c\sigma}(\tau)}{\partial \tau} R(t, \tau) d\tau \quad (3.20)$$

Da sich Relaxationsversuche im Vergleich zu Kriechversuchen viel schwieriger gestalten, wird von einer empirischen Beschreibung der Relaxationsfunktion entsprechend der Nachgiebigkeitsfunktion abgesehen und von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass die Relaxationsfunktion mathematisch durch die Nachgiebigkeitsfunktion bestimmt ist. Wird im Alter  $t_0$  eine spannungsabhängige Verzerrung  $\varepsilon_{c\sigma 0}$  aufgebracht, wobei  $\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{c\sigma 0} = \text{const}$  ist, liefert nämlich (3.18)  $\sigma_c(t) = \varepsilon_{c\sigma 0} \cdot R(t, t_0)$ ; wird dies in (3.17) eingesetzt, resultiert nach Division durch  $\varepsilon_{c\sigma 0}$

$$1 = E_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial R(\tau, t_0)}{\partial \tau} J(t, \tau) d\tau \quad (3.21)$$

eine lineare inhomogene Volterra-Integralgleichung zur Bestimmung der Relaxationsfunktion bei bekannter Nachgiebigkeitsfunktion, welche einer numerischen Lösung bedarf<sup>1</sup>. Bild 3.7(d) enthält die aus den Nachgiebigkeitsfunktionen der Bild 3.7(c) berechneten Relaxationsfunktionen, wobei man feststellt, dass die Relaxation erheblich schneller abläuft als das Kriechen. Wird umgekehrt im Alter  $t_0$  eine Spannung  $\sigma_{c0}$  aufgebracht, wobei  $\sigma_c(t) = \sigma_{c0} = \text{const}$  ist, liefert (3.13)  $\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_{c0} \cdot J(t, t_0)$ ; wird dies in (3.20) eingesetzt, resultiert nach Division durch  $\sigma_{c0}$  die zu (3.21) duale Beziehung

$$1 = \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} R(t, \tau) d\tau \quad (3.22)$$

Im Weiteren wird auf ein in der Praxis oft verwendetes, von Trost [154] vorgeschlagenes und von Bažant [7] weiterentwickeltes Berechnungsverfahren eingegangen, welches in der Folge kurz als *Verfahren nach Trost*<sup>2</sup> bezeichnet werden soll. Dabei wird vorausgesetzt, dass die spannungsabhängige Verzerrung der Beziehung

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \varphi(t, t_0) \quad (3.23)$$

mit beliebigen Konstanten  $\varepsilon_\alpha$  und  $\varepsilon_\beta$  genügt. Dies entspricht Fällen, bei denen  $\sigma_c(t) = \sigma_{c0} = \text{const}$  oder  $\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{c\sigma 0} = \text{const}$  ist oder eine Linearkombination der beiden Fälle vorliegt, denn bei  $\sigma_c(t) = \sigma_{c0} = \text{const}$  beträgt die spannungsabhängige Verzerrung gemäss (3.13) und (3.14)  $\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_{c0}[1/E_c(t_0) +$

<sup>1</sup> Die numerische Berechnung der Relaxationsfunktion kann mit Hilfe der Rekursionsbeziehung [7, 139]

$$\Delta R_k = \frac{-\sum_{i=1}^{k-1} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})] \Delta R_i}{J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{k-1})}$$

erfolgen, welche auf der numerischen Integration mittels Trapezmethode beruht, wobei  $k > 1$  und  $\Delta R_1 = E_c(t_0)$  ist. Um den Rechenaufwand bei ausreichender Genauigkeit möglichst gering zu halten, ist es zweckmässig, die Zeitintegrationschritte als geometrische Folge  $(t_k - t_0) = 10^{1/m}(t_{k-1} - t_0)$  zu wählen, wobei  $k > 1$  ist, und der erste Zeitschritt  $(t_1 - t_0)$  gleich dem Bruchteil eines Tages zu setzen ist (z. B. 1  $\mu$ d). Eine analytische Näherungsbeziehung für die Bestimmung der Relaxationsfunktion enthält [9].

<sup>2</sup> Im Englischen haben sich die von Bažant [7] eingeführte Bezeichnung „age adjusted effective modulus method“ sowie der Ausdruck „aging coefficient method“ etabliert.

$\varphi(t, t_0)/E_{c0}$ ], so dass die Superposition der Verzerrungen eines Falls mit  $\sigma_c(t) = \sigma_{c0} = \text{const}$  und eines Falls mit  $\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{c\sigma0} = \text{const}$  mit  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{c\sigma0} + \sigma_{c0}/E_c(t_0)$  und  $\varepsilon_\beta = \sigma_{c0}/E_{c0}$  (3.23) liefert.

Gemäss (3.23) ist

$$\varepsilon_{c\sigma}(t_0) = \varepsilon_{c\sigma0} = \varepsilon_\alpha \quad \text{und} \quad \Delta\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) - \varepsilon_{c\sigma0} = \varepsilon_\beta \varphi(t, t_0) \quad (3.24)$$

Mit (3.20) resultiert damit für die Spannungsänderung unter Verwendung von (3.22) und  $\sigma_{c0} = \varepsilon_{c\sigma0} \cdot E_c(t_0)$

$$\Delta\sigma_c(t) = \sigma_c(t) - \sigma_{c0} = \left(1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}\right) \left[ -\varepsilon_{c\sigma0} E_c(t_0) + \Delta\varepsilon_{c\sigma}(t) \frac{E_{c0}}{\varphi(t, t_0)} \right] \quad (3.25)$$

Auflösen nach  $\Delta\varepsilon_{c\sigma}(t)$  bringt mit  $\varepsilon_{c\sigma0} \cdot E_c(t_0) = \sigma_{c0}$  weiter

$$\Delta\varepsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c0}} \left[ \sigma_{c0} + \Delta\sigma_c(t) \left(1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}\right)^{-1} \right] \quad (3.26)$$

Mit (3.24)<sub>2</sub> resultiert damit

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_{c0} J(t, t_0) + \Delta\sigma_c(t) \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c0}} \left(1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}\right)^{-1} \quad (3.27)$$

und nach kurzer Umformung

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_{c0} J(t, t_0) + \Delta\sigma_c(t) J_{alt}(t, t_0) \quad (3.28)$$

mit

$$J_{alt}(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \mu(t, t_0) \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c0}} \quad (3.29)$$

und dem Alterungsbeiwert

$$\mu(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{E_c(t_0) - R(t, t_0)} - \frac{1}{E_c(t_0) J(t, t_0) - 1} \quad (3.30)$$

Bild 3.7(e) zeigt typische Verläufe des Alterungsbeiwerts, welche aus den Nachgiebigkeitsfunktionen in Bild 3.7(c) und den Relaxationsfunktionen in Bild 3.7(d) berechnet wurden. Da die Verläufe des Alterungsbeiwerts bei fortgeschrittenem Betonalter nur geringe Variationen aufweisen, kann der Alterungsbeiwert bei der Behandlung verschiedener Fragestellungen näherungsweise als Konstante in Rechnung gestellt werden; dadurch wird die Berechnung erheblich vereinfacht.

Obwohl (3.29) nur exakt gilt, falls die spannungsabhängigen Verzerrungen (3.23) genügen, kann das Verfahren nach Trost in den übrigen Fällen als Näherungslösung verwendet werden. Dieses Vorgehen ist insbesondere in Anbetracht der erwähnten Unsicherheiten bezüglich der extrapolierten Nachgiebigkeitsfunktionen zweckmässig.

Experimentelle Untersuchungen zum Kriechen bzw. zur Relaxation bei allgemeinen Spannungs- und Verzerrungszuständen zeigten [118], dass unter den erwähnten Prämissen bezüglich der Idealisierung des Betons als alternder linear viskoelastischer Werkstoff und der Anwendbarkeit des Superpositionsgesetzes das Verhalten näherungsweise als isotrop und die Querdehnzahl des Betons  $\nu_c$  als annähernd konstant vorausgesetzt werden können. Mithin resultiert bei räumlichen Spannungszuständen anstelle von (3.17) und (3.20)

$$\varepsilon_{c\sigma kj}(t) = f_{kijlm} E_{c0} \left[ \sigma_{c0lm} J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_{clm}(\tau)}{\partial \tau} J(t, \tau) d\tau \right] \quad (3.31)$$

und

$$\sigma_{ckj}(t) = c_{kijlm} E_{c0} \left[ \varepsilon_{c\sigma 0lm} R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \varepsilon_{c\sigma lm}(\tau)}{\partial \tau} R(t, \tau) d\tau \right] \quad (3.32)$$

wobei  $f_{kijlm}$  und  $c_{kijlm}$  die unter Annahme eines linear elastischen Werkstoffverhaltens mit dem Elastizitätsmodul  $E_c = E_{c0}$  und der Querdehnzahl  $\nu_c$  ermittelten elastischen Betonnachgiebigkeiten bzw. -steifigkeiten gemäss Kapitel 2.5.1 bezeichnen. Die Beziehung (3.28) gemäss dem Verfahren nach Trost lautet bei allgemeinen Spannungs- und Verzerrungszuständen analog

$$\varepsilon_{c\sigma kj}(t) = f_{kijlm} E_{c0} \left[ \sigma_{c0lm} J(t, t_0) + \Delta \sigma_{clm}(t) J_{alt}(t, t_0) \right] \quad (3.33)$$

Bei einachsigen Druckbeanspruchungen  $-\sigma_c > 0,4 f_{cc}$  entstehen zunehmend Mikrorisse, und die Proportionalität zwischen den Spannungen und den zugehörigen spannungsabhängigen Verzerrungen geht verloren. Bei hohen andauernden Spannungen (ab etwa  $-\sigma_c = 0,7 f_{cc}$ ) kann, wie bereits in Kapitel 3.3.1 erwähnt, ein vorzeitiges Versagen eintreten. Bedingt durch die in der Praxis eingesetzten Trag sicherheitskonzepte und wegen oft nur kurzzeitig wirkenden Nutzlasten sind korrekt bemessene Betonbauten allerdings in der Regel nicht derart hohen andauernden Beanspruchungen ausgesetzt.

## 3.4 Verbundverhalten

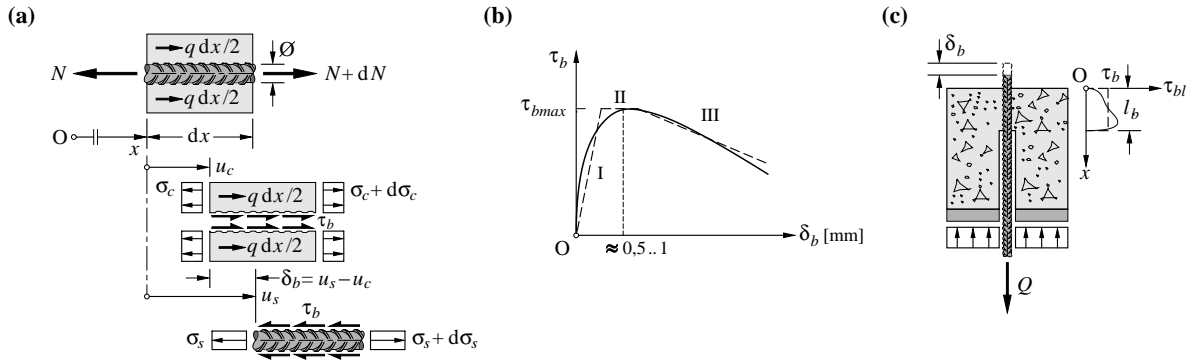
### 3.4.1 Verbund

Der Verbund zwischen Bewehrung und Beton übt einen Einfluss auf das Last-Verformungsverhalten von Stahlbetonstrukturen aus und ist für die Kraftübertragung von der Bewehrung auf den Beton verantwortlich. Rissabstände, Rissbreiten, die Zugversteifung und das Verformungsvermögen von Betonstrukturen sind direkt vom Verbundverhalten abhängig. Dieses ist von einer Vielzahl von Faktoren wie der Oberflächenbeschaffenheit der Bewehrungsstäbe, der Betonfestigkeit, der Lage der Bewehrung beim Betoniervorgang, dem Spannungszustand des Betons und der Bewehrung, den Randbedingungen, der Bewehrungsführung und der Dicke der Bewehrungsüberdeckung abhängig. Der Verbund zwischen Bewehrung und Beton basiert vorwiegend auf der Verzahnung der profilierten Bewehrungsoberfläche mit dem umgebenden Beton. Ausgehend von den Rippen der Bewehrungsstäbe werden Druckspannungen durch kegelförmige Spannungsfelder in den Beton eingetragen, welche in tangentialer Richtung im Beton Zugspannungen hervorrufen. Vereinfacht wird die im Einzelnen recht komplizierte Kraftübertragung zwischen Bewehrung und Beton durch eine über den Stabumfang gleichmässig wirkende nominelle Verbundschubspannung  $\tau_b$  und der dieser zugeordneten Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung, dem Schlupf  $\delta_b$ , beschrieben.

Aus Gleichgewichtsgründen gilt in jedem Querschnitt eines in Bewehrungsrichtung mit einer Zugkraft  $N$  beanspruchten Stahlbetonelements

$$N = A_s [\rho \sigma_s + (1 - \rho) \sigma_c] \quad (3.34)$$

wobei  $A_s$  die Bewehrungsquerschnittsfläche,  $\rho = A_s / A_c$  mit der Bruttoquerschnittsfläche  $A_c$  den Bewehrungsgehalt und  $\sigma_c$  bzw.  $\sigma_s$  die Beton- bzw. Stahlspannung bezeichnen. Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Bewehrungsstab- und Betonelement in Bild 3.8(a) bringt



**Bild 3.8** – Verbundverhalten: (a) differenzielles Element eines Stahlbetonzugglieds; (b) Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung; (c) Auszugsversuch.

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{4\tau_b}{\emptyset} \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma_c}{dx} = -\frac{4}{\emptyset} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \left( \tau_b + \frac{q}{\emptyset\pi} \right) \quad (3.35)$$

$\emptyset$  steht dabei für den Bewehrungsstabdurchmesser und  $q = q(x) = dN/dx$  für eine in Längsrichtung wirkende Belastung. Unter Voraussetzung des Ebenbleibens des Beton- und Stahlquerschnitts folgt aus Bild 3.8(a) die Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{d\delta_b}{dx} = \frac{du_s}{dx} - \frac{du_c}{dx} = \varepsilon_s - \varepsilon_c \quad (3.36)$$

Für ein linear elastisches Verhalten des Betons und der Bewehrung resultiert aus (3.35) und (3.36) mit dem Verhältnis vom Stahl- zum Betonelastizitätsmodul  $n = E_s/E_c$  die Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds nach Kuuskoski [77] und Rehm [131]

$$\frac{d^2\delta_b}{dx^2} - \tau_b(\delta_b) \frac{4}{E_s\emptyset} \left( 1 + \frac{n\rho}{1-\rho} \right) = q(x) \frac{4}{E_s\emptyset^2\pi} \cdot \frac{n\rho}{(1-\rho)} \quad (3.37)$$

eine gewöhnliche inhomogene nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich mit numerischen Methoden für beliebige Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen lösen lässt. Für abschnittsweise lineare  $\tau_b$ - $\delta_b$ -Beziehungen stellt (3.37) eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, welche sich analytisch lösen lässt. Bei  $q=0$  resultieren dann für  $d\tau_b/d\delta_b > 0$  (Kurvenabschnitt I in Bild 3.8(b)) hyperbolische, für  $d\tau_b/d\delta_b = 0$  (Kurvenabschnitt II in Bild 3.8(b)) parabolische und für  $d\tau_b/d\delta_b < 0$  (Kurvenabschnitt III in Bild 3.8(b)) trigonometrische  $\delta_b(x)$ -Funktionen. Da die Betonzugdehnungen  $\varepsilon_c < f_{ct}/E_c$  in der Regel bedeutend kleiner als die Stahldehnungen sind, können sie für  $q=0$  vernachlässigt werden, womit (3.36) und (3.37) in

$$\frac{d\delta_b}{dx} = \varepsilon_s \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2\delta_b}{dx^2} - \frac{4}{E_s\emptyset} \tau_b(\delta_b) = 0 \quad (3.38)$$

übergehen.

Experimentell werden nominelle Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen anhand von Auszugsversuchen bestimmt, indem der über eine kurze Verbundstrecke  $l_b$  einbetonierte Bewehrungsstab aus dem Betonversuchskörper ausgezogen wird (Bild 3.8(c)). Unter Vernachlässigung der Variation des Schlupfs und der Verbundschubspannungen werden mit dem am freien Stabende gemessenen Schlupf und der aus der Auszugskraft  $Q$  bestimmten mittleren Verbundschubspannung  $\tau_b = Q/(\emptyset\pi l_b)$  Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen bestimmt. Die resultierenden Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen sind dabei massgeblich von der gewählten Verbundstrecke abhängig. Die Verbundfestigkeit  $\tau_{bmax}$  wird bei einem Schlupf von etwa  $0,5 \dots 1$  mm erreicht. Durch Einlegen einer Quer- oder Umschnürungsbewehrung oder Aufbringen einer Querdruckbeanspruchung fällt sowohl die Verbundfestigkeit als auch deren zugeordneter Schlupf erheblich höher aus. Bei geringer Beweh-



rungsüberdeckung kann ein vorzeitiges sprödes Versagen eintreten, indem die verbundbedingten tangentialen Zugspannungen die Zugfestigkeit erreichen und sich parallel zu den Bewehrungsstäben sog. Sprengrisse bilden.

Um das Verbundverhalten bei fließender Bewehrung zu untersuchen, werden oft lange Verbundstrecken gewählt, womit die Variation des Schlupfs und der Verbundschubspannungen nicht mehr vernachlässigt werden können. Dementsprechend werden die Dehnungen entlang des Bewehrungsstabs (mit aufwendiger Messeinrichtungen) aufgezeichnet. Aus den Dehnungsverläufen können der Schlupf und unter Verwendung der Spannungs-Dehnungsbeziehung des nackten Stahls und der Gleichgewichtsbedingung (3.35) die Verbundschubspannungen ermittelt werden. Im Rahmen umfangreicher experimenteller Untersuchungen zum Verbundverhalten beobachteten Shima et al. [148] bei derartigen Versuchen, dass die Verbundschubspannungen beim Fließbeginn der Bewehrung beträchtlich abfallen.

Das Verbundverhalten von Spanngliedern, welche erst nach dem Vorspannen durch Injizieren des Hüllrohrs mit dem Beton verbunden werden, beruht im Wesentlichen auf den selben Mechanismen wie bei Bewehrungsstäben, ist allerdings bedingt durch den mehrschichtigen Aufbau, die Bündelung einzelner Litzen und Drähte sowie die Umlenk- und vorspannbedingten Reibungskräfte im Bereich kleiner Krümmungsradien im Einzelnen bedeutend komplexer.

Bei geradlinigem Spanngliedverlauf werden die Verbundspannungen näherungsweise gleichmäßig über den kleinsten konvexen Umfang des Litzen- oder Drahtbündels, den *Verbundumfang*, wirkend angenommen. Bei Spanngliedern mit  $m$  Litzen lässt sich der Verbundumfang bei idealer zentrischer Führung der Litzen im Hüllrohr mit

$$u_p = 6 \left( \pi - 3 + \sqrt{12m - 3} \right) \sqrt{A_p / (7\pi m)} \quad (3.39)$$

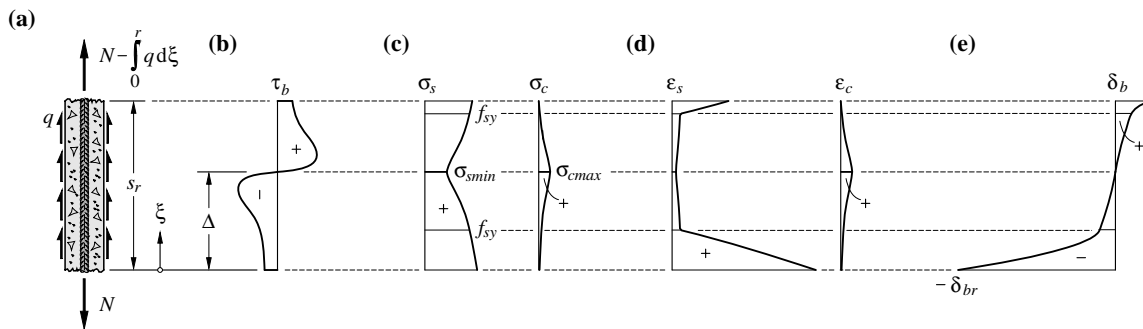
bestimmen [97], wobei  $A_p$  die totale Querschnittsfläche des Spannstahls bezeichnet. Unter den genannten Voraussetzungen gilt (3.39) exakt für  $m = 1, 7, 19, 37, \dots$ ; in den übrigen Fällen resultiert eine gute Näherung. Für Paralleldrahtkabel ist in (3.39) der Faktor 6 durch 2 und der Faktor 7 im Nenner der Wurzel durch 1 zu ersetzen [103]. Die nominellen Verbundschubspannungen von Spanngliedern sind (bei gleichem Schlupf) in der Regel geringer als diejenigen von Bewehrungsstäben.

Auf Grund der Auswertung von Auszugsversuchen mit langen Verbundstrecken vermuten Marti und Ullner [104, 155], dass das Verbundverhalten von Litzenspanngliedern bei variabler Stahlspannung nicht mit einer einzigen Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung angemessen beschrieben werden kann. Bei gekrümmt geführten Spanngliedern liegen die Litzen- oder Drahtbündel in den Umlenkbereichen an der Hüllrohrwandung an. Das Verbundverhalten wird insbesondere bei kleinen Krümmungsradien massgeblich durch die auf das Litzen- oder Drahtbündel wirkenden Umlenkkräfte beeinflusst, wobei die Verbundschubspannungen entlang des Verbundumfangs mit zunehmender Querpressung anwachsen. Der wirksame Verbundumfang weicht zum Teil deutlich von dem des ideal zentrisch im Hüllrohr verlaufenden Litzen- oder Drahtbündels ab. Insgesamt sind viele Aspekte betreffend des Verbundverhaltens von Spanngliedern noch nicht geklärt und eine adäquate Beschreibung noch ausstehend.

### 3.4.2 Zugversteifung

Bei einer Zugbeanspruchung eines gerissenen Stahlbetonkörpers bewirkt der Verbund gegenüber dem Verhalten des nackten Stahls eine Versteifung. Dieses Verhalten wird demgemäss als *Zugversteifung* bezeichnet und lässt sich an Hand eines Stahlbetonelements zwischen zwei benachbarten Rissen, einem *Risselement*, diskutieren.

Bild 3.9(a) zeigt ein Risselement eines Zugglieds mit einem Rissabstand  $s_r$  und einer allgemein in Längsrichtung variablen Belastung  $q$ , welche auf den Betonkörper wirkt. Bei den Rissen verschwindet die Betonspannung, und die Last wird ausschliesslich über die Bewehrung abgetragen. Von den Rissen weg ins Innere des Risselements fortschreitend werden die Stahlspannungen gemäss (3.35) über Verbundschubspannungen sukzessive in den umhüllenden Beton übertragen. Beim Vorzeichen-



**Bild 3.9** – Zugversteifung: (a) Risselement; (b) Verbundschubspannungen; (c) Stahl- und Betonspannungen; (d) Stahl- und Betondehnungen; (e) Schlupf.

wechsel der Verbundschubspannungen bei  $\xi = \Delta$  verschwindet der Schlupf,  $\delta_b = 0$ , die Betonspannungen erreichen ihren Maximal- und die Stahlspannungen ihren Minimalwert (Bild 3.9(b–e)).

Für beliebige Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen und allgemein nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen der Bewehrung und des Betons,  $\sigma_s(\epsilon_s)$  und  $\sigma_c(\epsilon_c)$ , lassen sich die Spannungen und Verzerrungen sowie der Schlupf iterativ numerisch mit (3.35) und (3.36) bestimmen [1, 67]. Ausgehend von den beiden Rissen mit bekannten Stahl- und Betonspannungen,  $\sigma_s$  und  $\sigma_c = 0$ , und entsprechenden Dehnungen,  $\epsilon_s$  und  $\epsilon_c = 0$ , lassen sich unter Annahme eines Schlupfes aus der  $\tau_b$ - $\delta_b$ -Beziehung die Verbundschubspannungen und anschliessend aus (3.35) die Stahl- und Betonspannungsänderungen bestimmen. Mithin können die Stahl- und Betondehnungen in einem Abstand  $dx$  von den Rissen aus den entsprechenden Spannungs-Verzerrungsbeziehungen bestimmt werden, und der Schlupf ergibt sich aus der Integration der Dehnungsdifferenzen  $\epsilon_s - \epsilon_c$ . Durch Fortsetzen dieses Algorithmus gelangt man zu zwei Querschnitten mit verschwindendem Schlupf. Falls die beiden Querschnitte nicht übereinstimmen, ist die Berechnung mit angepassten Startwerten für die Schlüpfen an den Rissen zu wiederholen.

Bei praktischen Fragestellungen interessieren in erster Linie das globale Last-Verformungsverhalten, also der Zusammenhang zwischen Normalkraft  $N$  und mittlerer Längsdehnung  $\epsilon_m$ , und die Rissbreiten  $w_r$  des Stahlbetonzugglieds, während die lokalen Spannungen und Verzerrungen zwischen den Rissen kaum von Bedeutung sind. Dementsprechend können zur angemessenen Beschreibung dieser globalen Grössen stark vereinfachte Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen verwendet werden, womit die Berechnung erheblich vereinfacht wird. Dies umso mehr, als dass durch die zweifache Integration bei der Berechnung der mittleren Längsdehnung die Ansatzfunktion der Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung das Ergebnis nur schwach beeinflusst und allfällige Fehler ausgeglichen werden.

Beim sog. *Zuggurtmodell* [1, 98, 99, 103, 149] nach Sigrist et al. wird die in Bild 3.10(a) dargestellte starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen verwendet und die Spannungs-Verzerrungsbeziehung des Betons gemäss Bild 3.10(b) als linear elastisch angenommen. Um der von Shima et al. [148] beobachteten Verminderung der Verbundschubspannungen nach dem Fließbeginn der Bewehrung Rechnung zu tragen, ist die Funktion  $\tau_b(\delta_b)$  bei  $\delta_{b1} = \delta_b(\sigma_s = f_{sy})$  abgetrept. Anhand der Vergleiche mit Versuchsergebnissen empfiehlt Sigrist [149] für Betonstähle die beiden Verbundspannungsniveaus  $\tau_{b0} = 0,6 f_{cc}^{2/3}$  und  $\tau_{b1} = \tau_{b0}/2$  zu verwenden. Die Spannungs-Verzerrungsbeziehung der Bewehrung kann in der Regel durch eine bilineare Charakteristik gemäss Bild 3.10(b) idealisiert werden. Durch die Verwendung des starr-ideal plastischen Verbundgesetzes wird die Wechselwirkung zwischen den Gleichgewichtsbedingungen und der Verträglichkeitsbedingung aufgehoben, womit der Spannungszustand direkt anhand von Gleichgewichtsbetrachtungen ohne Integration der Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds ermittelt werden kann. Mithin lassen sich im Unterschied zu komplexeren Verbundgesetzen analytische Formulierungen der vollständigen Last-Verformungsbeziehung von Stahlbetonzuggliedern erzielen. Kenel [67, 68] zeigte anhand von Betonbalkenversuchen mit faseroptischer Stahldehnungsmessung, dass die mit dem Zuggurtmodell ermittelten Dehnungsverläufe sehr gut mit den gemessenen übereinstimmen.

Bei einer konstanten Normalkraftbeanspruchung, d. h.  $q=0$ , resultiert mit Rücksicht auf  $\sigma_c \leq f_{ct}$  ein maximaler Rissabstand von

$$s_{r0} = \frac{f_{ct} \emptyset (1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} = \frac{\emptyset(1-\rho)}{4\rho} \approx \frac{\emptyset}{4\rho} \quad (3.40)$$

Bildet sich in der Mitte zwischen zwei Rissen bei  $\sigma_c = f_{ct}$  erneut ein Riss, resultiert der minimale Rissabstand  $s_{rmin} = s_{r0}/2$ . Dieser entspricht der kürzesten Strecke, über welche im Beton über Verbundwirkung die Zugfestigkeit erreicht werden kann. Nach abgeschlossener Rissbildung wird der Rissabstand

$$s_r = \lambda \cdot s_{r0} \quad (3.41)$$

also durch

$$0,5 \leq \lambda \leq 1,0 \quad (3.42)$$

begrenzt. Bei variabler Normalkraft erfolgt die Rissbildung sukzessive mit anwachsender Belastung  $q(x)$ , und der Rissabstand lässt sich direkt ermitteln. Für  $q = \text{const}$  beträgt der Abstand zum nächsten Riss  $s_r$  ausgehend von einem bestehenden Riss bei  $\xi = 0$

$$s_r = \frac{f_{ct} \emptyset (1-\rho)}{4\tau_{b0}\rho \left(1 - \frac{q}{\emptyset \pi \tau_{b0}}\right)} \quad (3.43)$$

wobei die entsprechende Belastung  $q$  aus der Bedingung folgt, dass die Betonspannung des ideellen Querschnitts mit verschwindendem Schlupf bei  $\xi = s_r$  unmittelbar vor dem Reissen gleich der Betonzugfestigkeit ist. Da die Rissbildung in Richtung abnehmender Zugbeanspruchung erfolgt, ist  $q > 0$ , womit der Rissabstand gemäss (3.43) stets grösser als  $s_{rmin}$  ist. Bei einer Querbewehrung entspricht der Rissabstand deren Stababstand oder einem Vielfachen davon, da die Querstäbe zu einer lokalen Querschnittsschwächung führen, so dass sich in den meisten Fällen eine Ermittlung des Rissabstands gemäss (3.42) bzw. (3.43) darauf beschränkt, zu bestimmen, bei welchem Vielfachen des Querstababstands die Risse etwa eintreten.

Bei gegebener Stahlspannung am Riss  $\sigma_{sr}$  lassen sich die Verbundschubspannungen, die Stahl- und Betonspannungen, die entsprechenden Verzerrungen sowie der Schlupf mit dem Zuggurtmodell analytisch ermitteln; Bild 3.10(c–g) bzw. (h–l) zeigt die entsprechenden Verläufe für  $q = \text{const}$  bzw.  $q = 0$ .

Bei einer konstanten Normalkraftbeanspruchung, also  $q = 0$ , resultiert eine mittlere Dehnung des Stahlbetonzugglieds

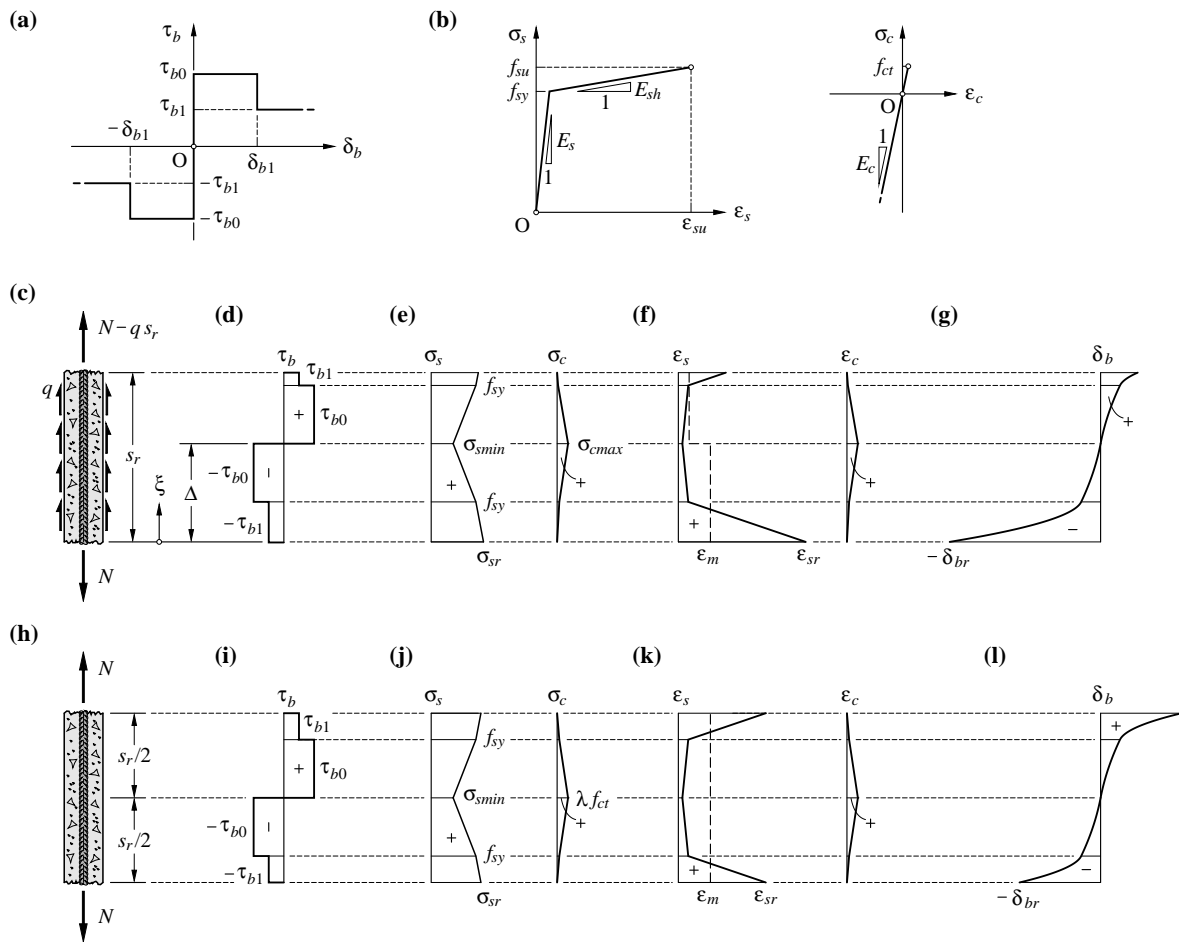
$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0} s_r}{E_s \emptyset} \quad (3.44)$$

falls die Stahlspannungen die Fließgrenze nicht überschreiten, d. h.  $\sigma_{sr} \leq f_{sy}$ ,

$$\varepsilon_m = \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})^2 \emptyset}{4E_{sh} \tau_{b1} s_r} \left(1 - \frac{E_{sh} \tau_{b0}}{E_s \tau_{b1}}\right) + \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})}{E_s} \cdot \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} + \frac{f_{sy}}{E_s} - \frac{\tau_{b0} s_r}{E_s \emptyset} \quad (3.45)$$

falls die Bewehrung entlang des Risselements nur teilweise fließt, d. h.  $\sigma_{smin} \leq f_{sy} \leq \sigma_{sr}$  und

$$\varepsilon_m = \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})}{E_{sh}} + \frac{f_{sy}}{E_s} - \frac{\tau_{b1} s_r}{E_{sh} \emptyset} \quad (3.46)$$



**Bild 3.10** – Zuggurtmodell: (a) Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung; (b) Spannungs-Verzerrungsbeziehungen der Bewehrung und des Betons; Risselement mit  $q = \text{const}$  (c) bzw.  $q = 0$  (h); (d) bzw. (i) Verbundschubspannungen; (e) bzw. (j) Stahl- und Betonspannungen; (f) bzw. (k) Stahl- und Betondehnungen; (g) bzw. (l) Schlupf.

falls die Bewehrung über die gesamte Risselementlänge fließt, d. h.  $f_{sy} \leq \sigma_{smin}$ . Bei vorgeschriebener mittlerer Dehnung  $\epsilon_m$  resultiert umgekehrt

$$\sigma_{sr} = E_s \epsilon_m + \frac{\tau_{b0} s_r}{\emptyset} \tag{3.47}$$

für  $\sigma_{sr} \leq f_{sy}$ ,

$$\sigma_{sr} = f_{sy} + 2 \frac{\frac{\tau_{b0} s_r}{\emptyset} - \sqrt{\left(f_{sy} - E_s \epsilon_m\right) \frac{\tau_{b1} s_r}{\emptyset} \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}}\right) + \frac{E_s}{E_{sh}} \tau_{b0} \tau_{b1} \frac{s_r^2}{\emptyset^2}}{\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}}} \tag{3.48}$$

für  $\sigma_{smin} \leq f_{sy} \leq \sigma_{sr}$  und

$$\sigma_{sr} = f_{sy} + E_{sh} \left( \epsilon_m - \frac{f_{sy}}{E_s} \right) + \frac{\tau_{b1} s_r}{\emptyset} \tag{3.49}$$

für  $f_{sy} \leq \sigma_{smin}$ .

Bei variabler Zugbeanspruchung, d. h.  $q \neq 0$ , sind die beiden durch den Schlupfnullpunkt  $\xi = \Delta$  separierten Bereiche des Risselements gesondert zu behandeln. Dabei ist in (3.44) bis (3.46)  $s_r$  jeweils durch  $2\Delta$  bzw.  $2(s_r - \Delta)$  zu ersetzen und für  $\sigma_{sr}$  die Stahlspannung am jeweiligen Riss einzusetzen. Der Schlupfnullpunkt  $\xi = \Delta$  lässt sich aus der Bedingung ermitteln, dass die Betonspannungen der beiden Bereiche bei  $\xi = \Delta$  übereinstimmen; mithin resultiert allgemein die Beziehung

$$\int_0^{\Delta} (\tau_b \varnothing \pi - q) d\xi = \int_{\Delta}^{s_r} (q - \tau_b \varnothing \pi) d\xi \quad (3.50)$$

zur Bestimmung von  $\Delta$ . Falls  $q = \text{const}$  ist und die Bewehrung an keiner Stelle im Risselement die Fließgrenze überschreitet, d. h.  $\tau_b = \tau_{b0}$  für  $0 \leq \xi \leq \Delta$  und  $\tau_b = -\tau_{b0}$  für  $\Delta \leq \xi \leq s_r$ , liefert (3.50) beispielsweise

$$\Delta = \frac{s_r}{2} \left( 1 + \frac{q}{\tau_{b0} \varnothing \pi} \right) \quad (3.51)$$

Häufig ist die Normalkraftänderung  $q = dN/dx$  gegenüber  $\tau_b \varnothing \pi$  relativ klein, so dass  $\Delta$  nur unwesentlich von  $s_r/2$  abweicht. Vereinfacht wird deshalb oft  $\Delta = s_r/2$  gesetzt, womit die Normalkraft über das Risselement als konstant und im Rissquerschnitt sprunghaft ändernd angenommen wird.

In Bild 3.11(a–c) sind die mit (3.47) bis (3.49) sowie einem Rissabstand gemäss (3.41) mit  $\lambda = 1$  und typischen Parametern ermittelten Stahlspannungen am Riss für verschiedene Bewehrungsgehalte der Spannungs-Dehnungsbeziehung des nackten Stahls gegenübergestellt. Geringere Bewehrungsgehalte führen einerseits zu einer grösseren Zugversteifung und andererseits zu einem geringeren Verformungsvermögen des Zugglieds. Da der Verbundumfang bei konstant gehaltenem Bewehrungsgehalt mit abnehmendem Stabdurchmesser anwächst, resultiert eine grössere Zugversteifung, wiederum verbunden mit einer Abnahme des Verformungsvermögens.

Als Mass für die Lokalisierung der Dehnungen von Stahlbetonzuggliedern kann das Verhältnis der mittleren Dehnung zur Stahldehnung am Riss verwendet werden [4, 149] (Bild 3.11(d)). Abnehmende Bewehrungsgehalte und Stabdurchmesser führen zu einer grösseren Lokalisierung der Stahldehnungen und folglich zu einer geringeren mittleren Bruchdehnung des Stahlbetonzugglieds. Von den Stahlkennwerten führen eine Abnahme der Bruchdehnung und des Verhältnisses von Zugfestigkeit zu Fließgrenze,  $f_{su}/f_{sy}$ , zu grösseren Lokalisierungen und geringeren Bruchdehnungen des Stahlbetonzugglieds. Zu beachten ist dabei, dass das Verhältnis der mittleren Dehnung zur Stahldehnung am Riss in Abhängigkeit der Stahldehnung am Riss massgeblich vom Spannungs-Dehnungsverlauf des Bewehrungsstahls im plastischen und verfestigenden Zustand (Bild 3.1) abhängt; entsprechende Gegenüberstellungen enthält [1].

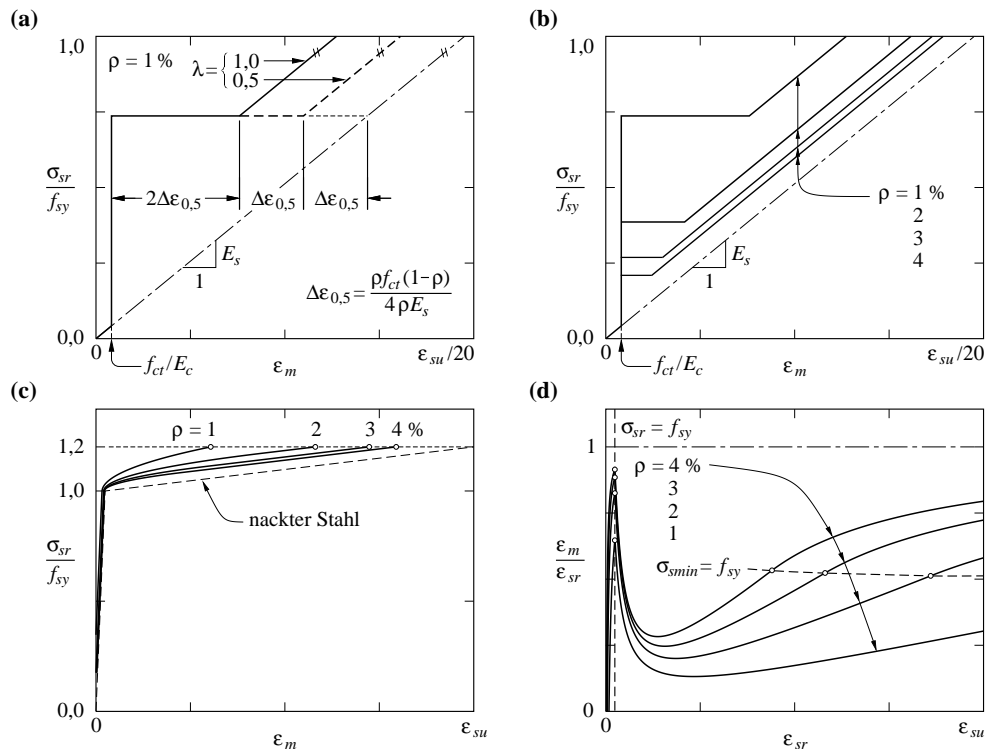
Die Rissbreite  $w_r$  entspricht allgemein der Summe der Schlüpfen am Riss der beiden angrenzenden Risselemente. Bei einer konstanten Normalkraftbeanspruchung resultiert

$$w_r = 2\delta_{br} = 2 \int_0^{s_r/2} \varepsilon_s - \varepsilon_c d\xi \quad (3.52)$$

resp. unter Vernachlässigung der Betonverzerrungen

$$w_r \approx \varepsilon_m s_r \quad (3.53)$$

Eine ausführliche Diskussion des Verhaltens von Stahlbeton-Zuggliedern mit Hilfe des Zuggurtmodells findet man bei Alvarez [1]. Dabei wird insbesondere das Verhalten bei einer Bewehrung aus Einheiten mit unterschiedlichem Verbundverhalten (z. B. Betonstahlstäbe in Kombination mit Spanngliedern) und bei einer Zwangbeanspruchung sowie der Einfluss unterschiedlicher Stahlstoffgesetze untersucht. Fürst [43] erweiterte das Zuggurtmodell zur Beschreibung von vorgespannten Zuggliedern unter zyklischer Belastung. Ergänzungen zu dieser Thematik findet man bei Thoma



**Bild 3.11** – Zugversteifung und Verformungsvermögen von Stahlbetonzuggliedern: (a) bis (c) Stahlspannung am Riss ; (d) Lokalisierung (Parameter:  $f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{su}/f_{sy} = 1,2$ ,  $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$ ,  $\epsilon_{su} = 100 \text{ ‰}$ ,  $f_{cc} = 40 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{ct} = 0,3 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$ ,  $E_c = 10 f_{cc}^{1/3} [\text{kN/mm}^2]$ ,  $\varnothing = 16 \text{ mm}$ ,  $\tau_{b0} = 2\tau_{b1} = 0,6 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$ )

[152], welcher auf der Grundlage des Zuggurtmodells ein stochastisches finites Element zur Beschreibung vorgespannter Zugglieder entwickelte.

### 3.4.3 Betondruckfestigkeit beim ebenen Spannungszustand bewehrter Betonbauteile

Wird auf den durch einen ebenen Spannungszustand beanspruchten Beton quer zur Hauptdruckrichtung eine Zugbeanspruchung aufgebracht, so tritt das Versagen bei geringeren Druckspannungen als bei einer einachsigen Druckbeanspruchung auf (Kapitel 3.3.3). Die Querspannungen führen gewissermassen zu einer Reduktion der Betondruckfestigkeit.

Bei einer (ausreichend) bewehrten Betonscheibe wird die Zugbeanspruchung nach dem Reißen durch die Bewehrung aufgenommen, womit unmittelbar beim Reißen kein Versagen eintritt. Solange die Spannung in der Bewehrung die Fließgrenze nicht überschreitet, kann die Druckbeanspruchung praktisch bis zum Erreichen der Betondruckfestigkeit gesteigert werden. Überschreitet die Spannung in der Bewehrung die Fließgrenze, so werden dem Beton durch Verbundwirkung grosse Dehnungen quer zur Hauptdruckrichtung aufgezwungen, womit die Betondruckfestigkeit erheblich reduziert wird<sup>1</sup>.

Experimentell lässt sich der Einfluss von Querspannungen auf die Betondruckfestigkeit an Hand von Stahlbetonscheiben unter Druck- und Querspannung untersuchen. Bei dem in Bild 3.12(a) dargestellten Versuch wird eine senkrecht zur Druckrichtung verlegte Bewehrung derart beansprucht, dass während der Belastung durch  $-\sigma_3$  eine konstante Querdehnung  $\epsilon_1$  vorherrscht. Einen alternativen Versuchsaufbau mit einer (quasi) isotrop (gleiche Bewehrungsgehalte in beiden orthogonalen Bewehrungsrichtungen) unter  $45^\circ$  zur Druckbeanspruchungsrichtung bewehrten Scheibe,

<sup>1</sup> Im Englischen wird dieser Effekt als „compression softening“ bezeichnet.

welche einer Beanspruchung  $\sigma_3 = -\sigma_1$ , also einer reinen Schubbeanspruchung bezüglich der Bewehrungsrichtungen, unterworfen wird, zeigt Bild 3.12(b). In beiden Fällen sind die Betonhauptspannungsrichtungen aus Symmetriegründen bekannt, und die Stahl- und Betonspannungen an den Rissen,  $\sigma_{sr}$  bzw.  $\sigma_{c3r}$ , können mit reinen Gleichgewichtsbetrachtungen ermittelt werden (siehe Kap. 5); bei den Verhältnissen in Bild 3.12(b) gilt  $\sigma_{sr} = -\sigma_3/\rho$  und  $\sigma_{c3r} = 2\sigma_3$ . Beim Erreichen der Betondruckfestigkeit erfolgt ein laminares Aufspalten entlang der Scheibenebene, was bei einer einschnittigen Bewehrung unmittelbar zum Versagen führt, während bei einer mehrschnittigen Bewehrung lediglich der Überdeckungsбетон abplatzt und die Druckbeanspruchung oft noch weiter erhöht werden kann. Bei einer unter  $45^\circ$  zur Druckrichtung verlegten Bewehrung ist die Druckfestigkeit gegenüber einer parallel zur Druckrichtung verlaufenden Bewehrung bei gleicher Hauptzugdehnung typischerweise etwas geringer. Während bei einer senkrecht zur Druckrichtung verlaufenden Bewehrung beliebige mittlere Querkzugdehnungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{su}$  aufgebracht werden können, beschränken sich diese bei einer isotropen Bewehrung gemäss Bild 3.12(b) auf  $\varepsilon_1 \leq 2\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{cu}$  [64]. Bei Versuchen mit Druck- und Querkzugbeanspruchungen von Betonscheiben mit nicht symmetrischen Verhältnissen, bei welchen erheblich höhere Hauptzugdehnungen auftreten können, lassen sich die Beton- und Stahlspannungen nicht mit Gleichgewichtsbetrachtungen alleine berechnen, sondern bedingen verschiedene Annahmen. Insofern sind derartige Verhältnisse zur Kalibrierung von allgemeinen Beziehungen für die Betondruckfestigkeit nicht geeignet, sondern dienen vielmehr der Verifizierung von Modellvorstellungen zur Beschreibung des Verhaltens von Stahlbetonscheiben.

Gestützt auf umfangreiche experimentelle Untersuchungen empfohlen Vecchio und Collins [30, 160, 161] die Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der Hauptzugverzerrung  $\varepsilon_1$  mit

$$f_c = \frac{f_{cc}}{0,8 + 170\varepsilon_1} \leq \frac{f_{cc}}{0,8} \quad [\text{in N/mm}^2] \quad (3.54)$$

zu ermitteln. Eine Zusammenstellung ähnlicher Beziehungen und eine Weiterentwicklung von (3.54) findet man in [159]. Da bei Versuchen an Scheiben aus höherfesten Betonen bei gleicher Querkzugdehnung tendenziell geringere Verhältnisse  $f_c/f_{cc}$  beobachtet wurden, schlug Kaufmann [64] auf Grund einer umfassenden Auswertung von Versuchen an Stelle von (3.54) die Beziehung

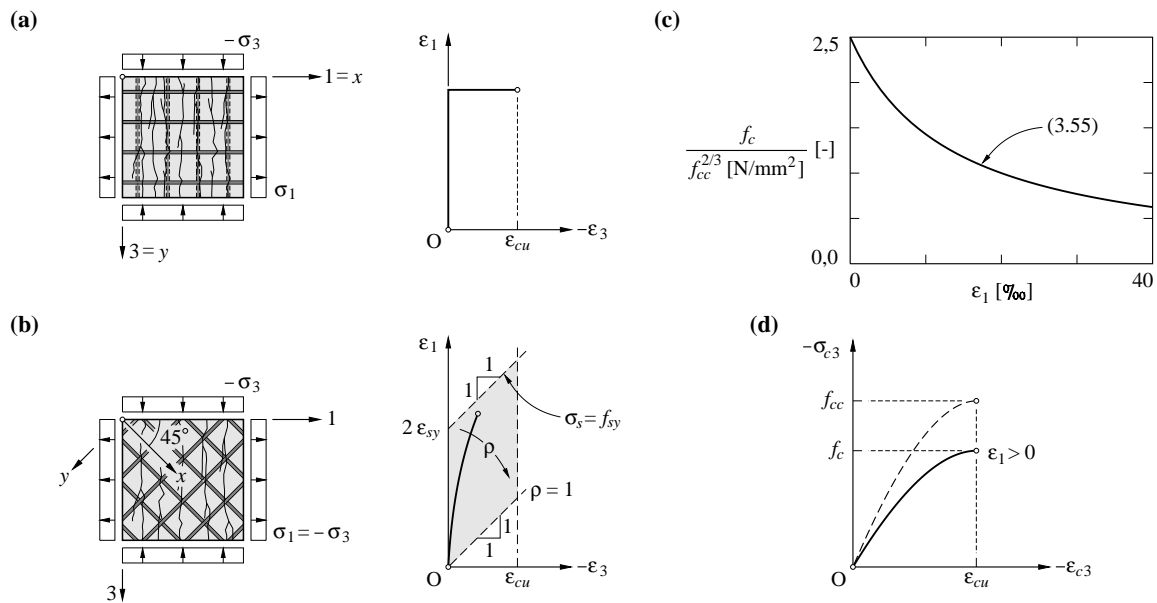
$$f_c = \frac{f_{cc}^{2/3}}{0,4 + 30\varepsilon_1} \leq \frac{f_{cc}^{2/3}}{0,4} \quad [\text{in N/mm}^2] \quad (3.55)$$

vor (Bild 3.12(c)). Um die mit zunehmenden Querkzugdehnungen einhergehende Reduktion der Betonsteifigkeit zu berücksichtigen, wird üblicherweise die Spannungs-Verzerrungscharakteristik des einachsig beanspruchten Betons mit einer reduzierten Druckfestigkeit verwendet (Bild 3.12(d)) [64, 159, 161].

### 3.4.4 Schubübertragung im gerissenen Stahlbeton

Parallel zu einem Riss im Stahlbeton wirkende nominelle Schubspannungen  $\tau_{mr}$  werden durch die Rissverzahnung (Kap. 3.3.5) sowie die den Riss querenden Bewehrungsstäbe aufgenommen. Bei einer senkrecht zum Riss verlaufenden Bewehrung erfolgt dies über Dübelwirkung; verlaufen die Bewehrungsstäbe schief zum Riss, liefern ausserdem die parallel zum Riss wirkenden Komponenten der Stablängskräfte einen Beitrag. Experimentell wird dieses Verhalten mit Abscherversuchen analog der reinen Rissverzahnung untersucht (Bild 3.13(a)).

Bei senkrecht zum Riss verlaufenden Bewehrungsstäben bewirkt eine Verschiebung parallel zum Riss in unmittelbarer Rissnähe eine Biege- und Querkraftbeanspruchung und im Beton entsprechende Reaktionen, was als *Dübelwirkung* bezeichnet wird (Bild 3.13(e)). Durch das Übereinanderschieben der rauen Rissufer verursachen Verschiebungen parallel zum Riss  $u_r$  jeweils ein Öffnen des Risses, also eine Verschiebung senkrecht zum Riss  $w_r$ . Die Bewehrungsstäbe wirken der Verschiebung  $u_r$  durch Dübelwirkung und der Rissöffnung  $w_r$  durch die Längssteifigkeit entgegen. Die Steifigkeit in Stablängsrichtung ist dabei massgeblich vom Verbundverhalten abhängig, welches wiederum vorwiegend von den durch die Dübelwirkung verursachten Querdruckspannungen im Beton abhängt.



**Bild 3.12** – Druckfestigkeit von Stahlbetonscheiben: (a) Versuche mit einer parallel zur Druckrichtung verlegten Bewehrung; (b) Versuche mit einer (quasi) isotropen Bewehrung; (c) Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der aufgezogenen Querdehnung; (d) Spannungs-Verzerrungsbeziehung.

Mit zunehmenden Querdruckspannungen wird die Verbundsteifigkeit und somit die Längssteifigkeit der im Verbund wirkenden Bewehrungsstäbe erhöht. Andererseits sinkt die Steifigkeit der Dübelwirkung mit zunehmender Längszugkraft in den Bewehrungsstäben. Mithin ist sowohl die Stahlspannung im Riss  $\sigma_{sr}$  als auch die nominelle Riss Schubspannung infolge Dübelwirkung  $\tau_d = n V_d / A_c$  ( $n$  = Anzahl Bewehrungsstäbe;  $V_d$  = Querlast im Riss pro Bewehrungsstab;  $A_c$  = Rissfläche) von beiden Verschiebungskomponenten abhängig, d. h.  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr}(w_r, u_r)$  und  $\tau_d = \tau_d(w_r, u_r)$ .

Die Gleichgewichtsbedingungen am Riss verlangen  $\tau_{mr} = \tau_{cnr} + \tau_d$  und  $\rho \sigma_{snr} + \sigma_{cnr} = 0$ , wobei  $\tau_{cnr}$  und  $\sigma_{cnr}$  die Rissspannungskomponenten infolge Rissverzahnung (Kap. 3.3.5) und  $\rho$  den Bewehrungsgehalt bezeichnen. Anhand experimenteller Untersuchungen konnten Millard und Johnson [110, 111] zeigen, dass sich die Schubübertragung im gerissenen Stahlbeton durch Kombination der Rissverzahnung mit der Dübelwirkung beschreiben lässt<sup>1</sup>. Während sich die Rissverzahnung durch Walravens Modell (Kap. 3.3.5) adäquat beschreiben lässt, gelang es bisher nicht, das zur Formulierung der Bewehrungslängssteifigkeit  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr}(w_r, u_r)$  erforderliche Verbundverhalten bei gleichzeitiger Dübelwirkung und Rissverzahnung zu quantifizieren. Daher werden an Stelle von  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr}(w_r, u_r)$  empirische Beziehungen für die Rissuferverschiebung verwendet [128]. Einen typischen Verlauf der durch  $u_r$ - $w_r$ -Beziehungen beschriebenen Rissuferverschiebung, welche gemäss experimentellen Beobachtungen unabhängig vom Bewehrungsgehalt ist [110, 111, 164, 165], zeigt Bild 3.13(d).

Die reine Dübelwirkung lässt sich experimentell separat untersuchen und entsprechend beschreiben. Der Dübelwiderstand kann unter Ausschluss eines vorzeitigen Versagens durch Abplatzen des Überdeckungsbetons mit der in Bild 3.13(f) dargestellten Modellvorstellung abgeschätzt werden [110,

<sup>1</sup> Da Walraven [164] die Längssteifigkeit der im Verbund mit dem Beton wirkenden Bewehrungsstäbe bei seinen rechnerischen Untersuchungen unterschätzte, ergab eine Kombination der Rissverzahnung mit der Dübelwirkung ein gegenüber den Versuchen zu weiches Verhalten. Deshalb vermutete er einen weiteren Mechanismus zum Schubübertrag über Bruchstücke in der unmittelbaren Umgebung der Bewehrungsstäbe. Kraterförmige Ausbrüche schienen diese Hypothese zu bekräftigen. Bei Versuchen von Millard und Johnson [110, 111] liessen sich keine derartigen Ausbrüche feststellen. Ausserdem zeigten sie, dass die Rissbreiten sich in der unmittelbaren Umgebung der Bewehrungsstäbe nicht verringern. Die Ausbrüche in Walravens Versuchen entstanden vermutlich erst nach dem eigentlichen Versuch, indem die Versuchskörper zwecks Sichtung der Rissflächen bei fließender Bewehrung auseinandergezogen und die Bewehrungsstäbe nicht zerschnitten wurden [110, 111].



121]. Das Werkstoffverhalten wird dabei als starr-ideal plastisch und der Betonquerdruck als gleichmässig verteilt angenommen. Für die Traglast resultiert demgemäss

$$V_{du} = \frac{\varnothing^2}{\sqrt{3}} \sqrt{f_c f_y (1 - \eta^2)} \quad \text{und somit} \quad \tau_{du} = \frac{4\rho}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{f_c f_y (1 - \eta^2)} \quad (3.56)$$

Die Länge  $a$  beträgt  $V_{du}/(f_c \varnothing)$ , und  $f_c$  bezeichnet die effektive Betondruckfestigkeit im Sinne der Plastizitätstheorie (vgl. Kap. 4), welche die Festigkeitserhöhung infolge lokal räumlichem Spannungszustand sowie weitere schwer quantifizierbare Phänomene<sup>1</sup> erfasst. Vergleichsrechnungen mit Versuchen liefern  $f_c \approx 5f_{cc}$ . Bei schief zum Riss verlaufenden Bewehrungsstäben fällt  $f_c$  deutlich tiefer aus; näherungsweise gilt  $f_c \approx 5f_{cc} \sin^4 \alpha$  [164], wobei  $\alpha$  den Winkel zwischen Riss und Stablängsrichtung bezeichnet. Der Term  $(1 - \eta^2)$  trägt der Momenten-Normalkraft-Interaktion gemäss Bild 3.13(g) Rechnung, wobei diese in guter Näherung durch eine quadratische Parabel ersetzt wird. Die Dübelsteifigkeit wird üblicherweise auf Grund von experimentellen Untersuchungen empirisch bestimmt; z. T. in Anlehnung an einen elastisch gebetteten Balken [110, 128].

Bild 3.13(d) zeigt typische Ergebnisse von Abscherversuchen, wobei die Steifigkeit und der Tragwiderstand  $\tau_{mru}$  mit zunehmendem Bewehrungsgehalt und abnehmender initialer Rissbreite  $w_{r0}$  anwachsen. Der Anteil der Dübelwirkung am Tragwiderstand ist bei üblichen Bewehrungsgehalten deutlich geringer als der der Rissverzahnung. Empirische Beziehungen zur Bestimmung des Tragwiderstands enthält [163].

Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Schubübertragung im gerissenen Stahlbeton unter zyklischer oder andauernder Belastung findet man in [128] bzw. [41].

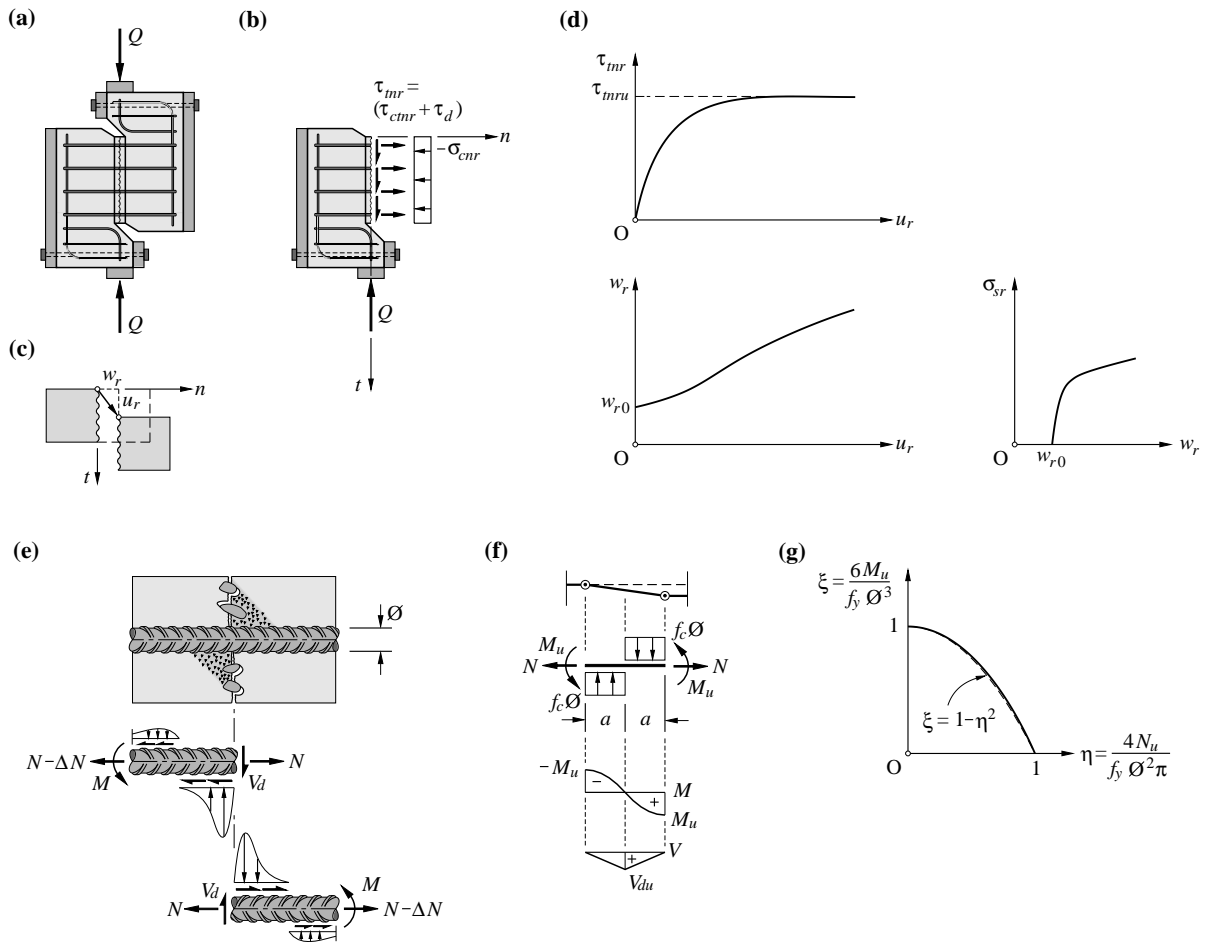
### 3.5 Zusammenfassung

Das mechanische Verhalten des Betons und des Verbunds zwischen Beton und Bewehrung hängt von vielen Parametern ab, die bei den meisten Fragestellungen des Betonbaus nicht oder nur teilweise bekannt sind. Daher basiert die Beschreibung des Werkstoff- und Verbundverhaltens in der Regel auf wenigen Kenngrössen.

Die Bewehrungseinheiten werden vorwiegend einachsig beansprucht, und deren Verhalten lässt sich für die meisten Fragestellungen mit einer bilinearen Spannungs-Dehnungscharakteristik beschreiben.

Der Beton wird in der Regel anhand der standardisierten Zylinderdruckfestigkeit klassiert; demgemäss basiert die Beschreibung des Betonverhaltens weitgehend auf dieser Kenngrösse. Unter einer einachsigen Druckbeanspruchung verhält sich der Beton ausgesprochen nichtlinear, wobei sich die Verzerrungen nach dem Erreichen der Höchstlast (während der Entfestigung) in einer Bruchzone lokalisieren. Die einachsige Betonzugfestigkeit ist gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit klein und einer starken Streuung unterworfen. Falls die Zugfestigkeit bei Fragen des Tragwiderstands günstig wirkt, wird sie dementsprechend in der Regel vernachlässigt. Bei einer zweiachsigen Druckbeanspruchung resultieren gegenüber der einachsigen Druckfestigkeit etwas höhere Festigkeiten, welche einer relativ grossen Streuung unterworfen sind. Bei Verwendung der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb wird diese Festigkeitserhöhung vernachlässigt. Die bei einer räumlichen Druckbeanspruchung des Betons beobachtete, teilweise erhebliche Festigkeitserhöhung lässt sich mit der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb beschreiben. Die Betonbruchstauchung wird durch eine räumliche Druckbeanspruchung des Betons markant vergrössert, was mit der (empirischen) Beziehung (3.6) erfasst werden kann.

<sup>1</sup> Auf der Biegedruckseite der Bewehrungsstäbe resultieren infolge Querpressungen hohe Verbundspannungen, während auf der Biegezugseite praktisch keine Verbundspannungen wirken. Dadurch wirkt der Beton auf der Biegedruckseite auf Biegezug mit, was gemäss Pruijssers [128] zu einer Erhöhung des Biegezugwiderstands um etwa ein Drittel führt.



**Bild 3.13** – Dübelwirkung: (a) Abscherversuch; (b) Schnittkörperdiagramm; (c) Verschiebungen; (d) Resultate von Abscherversuchen; (e) Dübelwirkung; (f) Modellvorstellung der Dübelwirkung; (g) Momenten-Normalkraft-Interaktion.

Die Rissverzahnung ist ein relativ komplexer, nicht reversibler Prozess, dessen Beschreibung entsprechend anspruchsvoll ist. Ein von Walraven entwickeltes Modell erfasst die wesentlichen Aspekte des Verhaltens. Zur Beschreibung des Verhaltens unter monotoner Belastungserhöhung stehen ausserdem vereinfachte empirische Beziehungen von Walraven zur Verfügung.

Für die im Gebrauchszustand von Betonbauten relevanten Betonspannungsniveaus kann der Beton zur Beschreibung des Kriechens und der Relaxation als linear viskoelastischer Werkstoff idealisiert werden. Praktische Fragestellungen lassen sich darauf basierend in der Regel mit genügender Genauigkeit mit dem vereinfachten Verfahren nach Trost behandeln.

Das komplexe Verhalten des Verbunds zwischen Beton und Bewehrung kann näherungsweise mit Hilfe nomineller Verbundschubspannungen erfasst werden. Die Zugversteifung lässt sich mit dem Zuggurmodell angemessen beschreiben.

Weist die ein Betondruckfeld querende Bewehrung eine Zugbeanspruchung auf, so wird die Betondruckfestigkeit reduziert, insbesondere wenn die Bewehrungsspannungen die Fließgrenze erreichen. Dies lässt sich mit Hilfe der (empirischen) Beziehungen (3.53) oder (3.54) erfassen.

Die Übertragung von Schubspannungen über Risse, welche von Bewehrungseinheiten gequert werden, erfolgt über Rissverzahnung und Dübelwirkung sowie Zugkräfte in der Bewehrung, falls die Bewehrungsstäbe schief zum Riss verlaufen. Aufgrund der Interaktion dieser komplexen Mechanismen resultiert ein äusserst komplexes, stark nichtlineares und irreversibles Verhalten, das bislang (noch) nicht befriedigend beschrieben werden kann.



## 4 Modellbildung

### 4.1 Einleitung

Der im konstruktiven Ingenieurbau tätige Ingenieur benötigt Modellvorstellungen, um das Verhalten von Tragwerken qualitativ und quantitativ zu erfassen. Die Modelle dienen ihm als Hilfsmittel für den Entwurf und als Grundlage für die Bemessung und Überprüfung von Tragwerken hinsichtlich deren Tragfähigkeit und Verformungen.

Nach einigen generellen Betrachtungen zur Modellbildung im Stahlbeton werden im vorliegenden Kapitel ausgehend von einer Beschreibung des typischen Tragverhaltens des Stahlbetons wichtige übergeordnete Aspekte der auf der Baustatik basierenden Modellbildung diskutiert. Gegenstände verschiedener Arbeiten von Marti [88, 94, 96, 99] zur Modellbildung im Betonbau generell werden erneut aufgegriffen und zur Diskussion gestellt. Dabei geht es in erster Linie darum, den Kontext, in welchem die Modelle der nachfolgenden Kapitel zu verstehen sind, darzulegen sowie einige wichtig erscheinende Tatsachen und Zusammenhänge hervorzuheben. Darüber hinaus dient das Kapitel der Definition verschiedener Fachausdrücke, welche weitgehend mit der Norm SIA 260 [124] übereinstimmen.

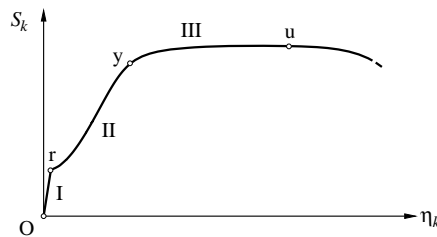
### 4.2 Allgemeine Betrachtungen

#### 4.2.1 Allgemeines

Bei der *Bemessung* und *Überprüfung* von Betontragwerken geht es darum, die Betonabmessungen, die Abmessungen und Anordnung der Bewehrungseinlagen, die Beton- und Stahleigenschaften und die konstruktive Durchbildung auf der Basis von konstruktiven oder ausführungstechnischen Betrachtungen sowie der Anforderungen bezüglich Tragsicherheit, Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit festzulegen bzw. zu überprüfen, wobei deren Erfüllung in der Regel rechnerisch nachzuweisen ist. Die Bemessung ist dabei grundlegend verschieden von der Überprüfung; während bei der ersteren das Tragverhalten sowohl hinsichtlich Tragfähigkeit als auch hinsichtlich Steifigkeit vorgegeben werden kann, ist man bei der letzteren mit einer bereits vollzogenen Bemessung oder einem bestehenden Tragwerk konfrontiert.

Von Tragwerken wird unter anderem gefordert, dass sie für die anzunehmenden Einwirkungen einen ausreichenden Tragwiderstand aufweisen und dass die Gesamtstabilität entsprechend einer festgelegten Zuverlässigkeit gewährleistet ist. Darüber hinaus sind die Funktionstüchtigkeit und das Aussehen des Bauwerks entsprechend der Gebrauchsgrenzen sicherzustellen. Gemäss diesen beiden grundlegend verschiedenen Anforderungen werden Fragen der *Tragsicherheit* getrennt von Fragen der *Gebrauchstauglichkeit* behandelt. Um Verluste an Menschenleben und Schäden im Falle eines Tragwerksversagens zu beschränken, wird hinsichtlich der Tragsicherheit weiter gefordert, dass sich das Versagen eines Tragwerks durch übermässige Verformungen sowie andere sichtbare Anzeichen wie breite Risse ankündigt und nicht unerwartet und schlagartig erfolgt (*Versagensankündigung*). Im Falle eines Versagens soll sich dieses zudem auf ein Ausmass beschränken, welches in einem vertretbaren Verhältnis zur Ursache steht (*Robustheit*).

Vorweg erscheint es wichtig zu betonen, dass die Bemessung nur eine von mehreren Massnahmen ist, um die Tragsicherheit, Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit von Tragwerken sicher zu stellen.



**Bild 4.1** – Lokales Verhalten von Stahlbeton: typische Beziehung zwischen einer verallgemeinerten Spannungen und der korrespondierenden (mittleren) verallgemeinerten Verzerrung bei deren monotoner Erhöhung.

#### 4.2.2 Tragverhalten von Stahlbeton

Das komplexe Tragverhalten des Stahlbetons wird von ausgeprägt nicht linearen, irreversiblen und zeitabhängigen Vorgängen geprägt, welche bereits unter moderaten Beanspruchungen der Tragwerke wirksam werden und Umverteilungen der inneren Kräfte bewirken.

Bei monotoner Beanspruchungserhöhung können lokal drei Stadien des Tragverhaltens von Stahlbeton unterschieden werden, nämlich das ungerissene Verhalten (Zustand I), das gerissene Verhalten bei nicht fließender Bewehrung (Zustand II) und das Verhalten bei fließender Bewehrung (Zustand III). Deren Übergänge – das Reissen (Punkt  $r$  in Bild 4.1) und der Fließbeginn der Bewehrung (Punkt  $y$  in Bild 4.1) – zeichnen sich durch eine ausgeprägte Steifigkeitsreduktion aus. Abgesehen vom zeitabhängigen Verhalten des Betons – dem Schwinden und Kriechen – ist das Verhalten des Stahlbetons bei moderaten Betonspannungen im Zustand I praktisch reversibel. Durch die Behinderung kriech- und schwindbedingter Betonverformungen durch die Bewehrung erfolgt bereits im ungerissenen Zustand eine gewisse Umlagerung der inneren Kräfte. Allgemein sind Schwindverformungen nicht und Kriechverformungen aufgrund der Alterung des Betons nur teilweise reversibel.

Das ausgeprägt nicht lineare und irreversible Verhalten des Stahlbetons ist insbesondere eine Folge des Reissens des Betons und des Fließens der Bewehrung. Das Reissen, welches bedingt durch die geringe Betonzugfestigkeit bereits bei moderaten Beanspruchungen eintritt, ist nicht reversibel, die dafür eingesetzte Energie wird dissipiert. Durch das Bilden, Fortpflanzen, Öffnen und Schliessen von Rissen entsteht lokal in einem Stahlbetontragwerk ein sich während des Beanspruchungsprozesses ständig änderndes, äusserst komplexes Tragsystem, bestehend aus einzelnen, durch Rissflächen voneinander getrennten, deformierbaren Betonkörpern und die Risse überbrückenden, deformierbaren Bewehrungselementen. Sowohl zwischen den Bewehrungseinheiten und dem umgebenden Beton als auch zwischen benachbarten Rissufer, die miteinander in Kontakt stehen, werden über Reibung und Verzahnung Kräfte übertragen, wobei Verzahnungs- und Reibungsvorgänge naturgemäss praktisch nicht reversibel sind. Durch all diese irreversiblen Prozesse ist das Tragverhalten des Stahlbetons in hohem Mass von der Belastungs- und Zwängungsgeschichte abhängig. Bei statisch unbestimmten Systemen führt die mit der Rissbildung verbundene lokale Steifigkeitsreduktion bereits bei moderaten Beanspruchungen vor dem Fließbeginn zu einer Umverteilung der inneren Kräfte.

Jedes Tragwerk weist unbekannte Eigenspannungszustände auf, die sich aufgrund innerer und äusserer Einflüsse laufend ändern, so dass der tatsächlich vorherrschende Spannungszustand zu keinem Zeitpunkt eindeutig bestimmt werden kann. Bei Betonbauten können ungleichmässige und behinderte Schwind-, Kriech- und Temperaturverformungen insbesondere infolge der Hydratationswärme, das Fügen von nicht passgenauen Tragwerkelementen bei der Herstellung sowie differentielle Setzungen Eigenspannungszustände verursachen. Dies ist speziell bei Tragwerken aus Ort beton der Fall, welche während der Herstellung durch die Abspriessabfolge und Etappierung bei noch tiefer Betonfestigkeit und rasch verlaufenden Schwind- und Kriechprozessen einer Vielzahl von Systemwechseln und Belastungsabfolgen unterworfen werden, die das Tragverhalten infolge eingepprägter Risse und Eigenspannungszuständen nachhaltig beeinflussen.

Falls infolge der Eigenspannungszustände die Risskraft örtlich überschritten wird, führt die damit verbundene drastische Steifigkeitsreduktion bei statisch unbestimmten Systemen ferner zu einer zusätzlichen Umverteilung der inneren Kräfte. Da Zwängungen statisch unbestimmter Systeme infolge spannungsunabhängiger Verzerrungen oder eingepprägter Verschiebungen direkt von der Systemsteifigkeit abhängen, werden sie durch die mit der Rissbildung verbundene Steifigkeitsreduktion vermindert.

Bedingt durch die Streuung der Werkstoffeigenschaften des Betons sind lokale Verformungsgrößen wie Rissbreiten generell erheblichen Streuungen unterworfen.

### 4.2.3 Tragsicherheit und plastisches Verformungsvermögen

Die Beurteilung der Tragsicherheit im Rahmen einer Überprüfung bzw. deren Sicherstellung durch eine entsprechende Bemessung basiert auf einem Spannungszustand, welcher entsprechenden Widerständen gegenübergestellt wird.

Aufgrund der Forderung nach Versagensankündigung und Robustheit sowie der Unsicherheiten bezüglich der tatsächlichen Belastungs- und Zwängungsgeschichte wird falls immer möglich ein *duktiler Verhalten* der Tragsysteme angestrebt, worunter ein mit ausgeprägten plastischen Verformungen verbundenes Versagen verstanden wird<sup>1</sup>. Eigenspannungszustände können dann durch entsprechende plastische Verformungen verändert werden, womit der Tragwiderstand nicht von der Belastungs- und Zwängungsgeschichte abhängt und sich das Versagen frühzeitig abzeichnet. Voraussetzung für ein duktiler Tragverhalten ist ein ausreichendes plastisches Verformungsvermögen der massgebenden Elemente des Tragwerks. Dieses ermöglicht den Abbau von Spannungsspitzen, die Beschränkung von zwängungsbedingten Spannungen und führt durch das erhöhte Dissipationsvermögen zu einem günstigen Verhalten bei aussergewöhnlichen dynamischen (insbesondere stossartigen) Einwirkungen.

Demgegenüber bilden bei einem Tragsystem mit nicht duktiler Verhalten die extremalen Spannungen infolge der Gesamtheit aller anzunehmenden Einwirkungen inklusive aller Zwängungen sowie deren mutmassliche Abfolge die Grundlage der Bemessung bzw. Überprüfung, was entsprechend umfangreiche, mit grösseren Unsicherheiten behaftete Untersuchungen mit sich bringt. Bei der Bemessung kommt erschwerend hinzu, dass der tatsächlich vorherrschende Spannungszustand erheblich von der Steifigkeit der einzelnen Systembestandteile abhängt, welche wiederum direkt durch die Bemessung beeinflusst wird, so dass ein ausgeprägt iteratives Vorgehen erforderlich wird.

Sicherstellen lässt sich ein ausreichendes plastisches Verformungsvermögen durch die Wahl von Bewehrungsstählen mit einem grossen Verformungsvermögen, eine geeignete konstruktive Durchbildung und, falls einige Elemente des Tragsystems ein nicht duktiler Verhalten aufweisen, durch die *Kapazitätsbemessung*; ein Konzept, das vor allem im Erdbebeningenieurwesen erfolgreich eingesetzt wird.

Bei der Kapazitätsbemessung wird der Tragwiderstand der einzelnen Bestandteile und Versagensmechanismen eines Tragsystems derart aufeinander abgestimmt, dass das Versagen unter allen anzunehmenden Einwirkungen ausschliesslich duktil erfolgt. Nicht duktile und duktile Systembestandteile werden dabei seriell<sup>2</sup> angeordnet und der Tragwiderstand der spröden Elemente derart festgelegt, dass die duktilen Elemente einen geringeren Tragwiderstand aufweisen und folglich das Versagen bestimmen. Mit dem Einsatz von duktilen Bauelementen praktische ohne Verfestigung und

<sup>1</sup> Effektiv zeigt ein elastisches Tragsystem mit ausgeprägter Steifigkeitsabnahme in Versagensnähe und hohem Verformungsvermögen bezüglich des Tragwiderstands ein ähnlich günstiges Verhalten. Da im Betonbau in der Regel nur durch plastische Verformungen eine ausgeprägte Steifigkeitsannahme eintritt, beschränken sich die Betrachtungen im vorliegenden Kapitel auf diese.

<sup>2</sup> Da das Versagen einer parallelen Anordnung von Systembestandteilen durch die kleinste Bruchverformung gegeben ist, würde eine parallele Anordnung von duktilen und nicht duktilen Elementen in einem nicht duktilen Versagen münden. Demgemäss sieht die Kapazitätsbemessung von einer derartigen Konstellation ab.

einem ausreichenden Verformungsvermögen lässt sich die übertragbare Kraft bei einer seriellen Anordnung auf einen klar definierten Wert beschränken, so dass auf diese Weise eine Überlastsicherung vorliegt. Dieses Konstruktionsprinzip, welches im Englischen „structural fuse concept“ genannt wird, wird seit längerem vor allem bei seismischen und stossartigen Einwirkungen sowie bei Untersuchungen zum progressiven Kollaps eingesetzt; kürzlich wurde ferner eine interessante Anwendung auf Druckglieder vorgeschlagen [173].

Da bei üblichen Tragwerken generell eine Vielzahl möglicher Lastfälle<sup>1</sup> vorliegt, kann das Versagen an sehr vielen Stellen eintreten. Mithin werden Betontragsysteme weitgehend duktil gestaltet und die Kapazitätsbemessung lediglich implizit angewandt, indem beispielsweise der Widerstand gegen ein nicht duktileres Querkraftversagen von Platten ohne Querkraftbewehrung derart gewählt wird, dass stets ein duktileres Biegeversagen eintritt und ein Querkraftversagen ausgeschlossen werden kann<sup>2</sup>. Ebenfalls auf dem Konzept der Kapazitätsbemessung fusst der Grundsatz, dass der Widerstand von Verbindungen, Krafteinleitungen und anderen Diskontinuitäten des Tragsystems mit einem mutmasslich spröden Versagen so festgelegt werden soll, dass das Versagen ausserhalb dieser Stellen eintritt. Generell wird durch das Einlegen einer geeigneten Mindestbewehrung ein nicht duktileres Versagen bei der Erstrissbildung ausgeschlossen.

## 4.3 Modelle

### 4.3.1 Wissenschaftliche Modelle

Ein *wissenschaftliches Modell* ist generell ein Abbild der Realität, welches nur die als wesentlich erachteten Eigenschaften eines Phänomens umfasst; als nebensächlich angesehene Eigenschaften werden vernachlässigt. Es dient der Beschreibung der erfahrenen Realität, und somit deren Interpretation, sowie zur Definition der zugehörigen Terminologie. Schliesslich bildet es die Grundlage für Prognosen über künftiges Verhalten innerhalb des von ihm erfassten Erfahrungsbereichs [17].

Von einem wissenschaftlichen Modell ist die Widerspruchslosigkeit in sich selbst zu verlangen. Der Wert eines wissenschaftlichen Modells lässt sich aus dessen Realitätsnähe und Leistungsfähigkeit ableiten. Es ist umso realistischer, je konsistenter es die Deutung vergangener und je genauer es die Vorhersage künftiger Ereignisse gestattet. Es ist umso leistungsfähiger, je grösser sein Erfahrungsbereich ist.

Wissenschaftliche Modelle sind nicht endgültig, sondern haben sich im ständigen, systematischen Vergleich mit der (experimentellen und praktischen) Erfahrung bezüglich Konsistenz, Genauigkeit und Umfang des Erfahrungsbereichs zu bewähren; gegebenenfalls sind sie anzupassen oder zu verwerfen.

Die vollständige Darstellung eines Modells umfasst stets auch dessen Anwendungsgrenzen sowie die verwendeten Abgrenzungen, Voraussetzungen und Idealisierungen. Einen wesentlichen Bestandteil der Arbeit mit Modellen stellt die Bereitstellung der Eingangsgrössen und die Interpretation der Ergebnisse verbunden mit einer Plausibilitätsprüfung dar, um daraus zuverlässige Aussagen zu gewinnen. Generell sollte der Detaillierungsgrad eines Modells in einem ausgewogenen Verhältnis zur Genauigkeit der verwendeten Eingangsgrössen stehen.

---

<sup>1</sup> Physikalisch verträgliche, gleichzeitig auftretende Einwirkungen werden im Rahmen der Behandlung baustatischer Fragestellungen zu *Lastfällen* zusammengefasst.

<sup>2</sup> Wie man sich leicht überzeugt, lässt sich dies bei grossen konzentrierten Lasten in unmittelbarer Umgebung der Abstützung allerdings nicht realisieren.

### 4.3.2 Modelle im konstruktiven Ingenieurbau

Modelle des konstruktiven Ingenieurbaus sind im dargelegten Sinn wissenschaftliche Modelle mit entsprechenden Anforderungen und Zielsetzungen. Darüber hinaus weisen Fragestellungen des konstruktiven Ingenieurbaus gegenüber rein naturwissenschaftlichen Fragestellungen einige besondere Ausprägungen auf. So können Fehleinschätzungen zu einer unmittelbaren Bedrohung von Menschenleben führen. Die zur Verfügung stehenden Informationen sind in der Regel relativ ungenau und unvollständig, und die zur Verfügung stehenden Mittel sind stark beschränkt. Modelle zur Behandlung von Fragen des konstruktiven Ingenieurbaus müssen folglich bei angemessenem Aufwand an Mitteln ausreichend genaue und sichere Aussagen liefern. Dementsprechend sind Einfachheit, Transparenz und Effizienz wesentliche Merkmale der Modelle des konstruktiven Ingenieurbaus.

Bei der Modellbildung im konstruktiven Ingenieurbau geht es darum, durch Abgrenzung und Idealisierung eines Tragsystems ein *Tragwerksmodell* und ein Modell der zugehörigen Einwirkungen zu entwickeln. Das *Tragsystem* umfasst die Anordnung und das Zusammenwirken der Elemente des *Tragwerks*, welches die Gesamtheit der für das Gleichgewicht und die Formerhaltung notwendigen Teile des Bauwerks und des Baugrunds bezeichnet. Bei der Abgrenzung werden die geometrischen Systemgrenzen festgelegt und als nebensächlich erachtete Merkmale des Tragverhaltens ausgeschieden. Die Idealisierungen betreffen im Wesentlichen die Stoffbeziehungen und die Wahl der kinematischen Bindungen. Ausgehend vom Tragwerksmodell verknüpft das *Berechnungsmodell* die Kraft- und Verformungsgrößen über die statischen, kinematischen und Stoffbeziehungen. Im Rahmen der Modellbildung ist man also bestrebt, die Fragestellung des konstruktiven Ingenieurbaus in eine aussagekräftige Aufgabe der Baustatik zu überführen.

Beim Werkstoffverhalten gelangen je nach Fragestellung meist die Elastizitätstheorie oder die Plastizitätstheorie zur Anwendung, wobei oft von einem linear elastisch-ideal plastischen Verhalten ausgegangen wird. Teilweise lassen sich auch Merkmale des von der Tragwerksform abhängigen Verhaltens durch die Wahl eines geeigneten fiktiven Werkstoffs berücksichtigen, indem relativ fein verteilte diskrete Tragwerkselemente in ein kontinuierliches Tragwerkselement mit einem annähernd gleichen Verhalten überführt werden. Rippenplatten lassen sich beispielsweise als Platten aus einem orthotropen Werkstoff idealisieren, und bestimmte regelmässige Fachwerke, Vierendeelträger sowie Rahmentragwerke lassen sich als Stäbe mit entsprechendem fiktivem Werkstoffverhalten abbilden.

Unwesentlich erscheinende Dimensionen lassen sich durch Einführen zusätzlicher kinematischer Bindungen eliminieren, womit die Tragwerkselemente als Stäbe, Scheiben, Platten, Faltwerke und Schalen idealisiert werden.

#### Konzeptionelles

Die Wahl der Modelle richtet sich nach deren Zweck und nach der im Rahmen der Gesamtaufgabe erforderlichen und erreichbaren Genauigkeit und Aussagekraft der Ergebnisse. Eine umfassende Voraussage des Verhaltens von Tragwerken unter allen mutmasslichen Einwirkungen während der Nutzungsdauer ist naturgemäss nicht möglich und auch nicht erstrebenswert. Wie bereits Maillart bemerkte, ist also eine relativ einfache Modellierung einzig möglich und genügend [87]. Ferner sind nach Poincaré [126] die Tatsachen am wertvollsten, die sich oft wiederholen, wobei er den einfachen Tatsachen die grösste Anwartschaft darauf zuschreibt. In diesem Sinn erwiesen sich wiederholt einfache Modelle mit wenigen drastischen Idealisierungen als besonders leistungsfähig. Verfeinerte Modellvorstellungen gestatten dagegen einen tieferen Einblick in das Tragverhalten des Stahlbetons, dienen der Beurteilung der Anwendungsgrenzen einfacher Modelle und ermöglichen eine genauere Beschreibung des Tragverhaltens, falls die Fragestellung dies erfordert. Verfeinerte Modellvorstellungen gelangen insbesondere bei der Überprüfung bestehender Tragwerke zu Anwendung. Darüber hinaus lassen sich aus ihnen durch Einführen weiterer Idealisierungen oft einfachere Modelle ableiten.

Die Zuverlässigkeit der Modelle des konstruktiven Ingenieurbaus ist massgeblich von einer adäquaten konstruktiven Durchbildung abhängig. Auf dem Traglastverfahren basierende Modelle erfordern beispielsweise ein gewisses plastisches Verformungsvermögen der massgebenden Elemente eines Tragwerks, welches eine geeignete konstruktiver Durchbildung und die Wahl entsprechender Werkstoffe bedingt. Durch Einlegen einer geeigneten Mindestbewehrung lassen sich naturgemäss



schwer quantifizierbare Verformungslokalisierungen weitgehend verhindern, womit die Zuverlässigkeit der Voraussage von Verformungsgrössen erhöht wird.

Bei der Bearbeitung der meist komplexen und mit verschiedenen Unschärfen verbundenen Fragestellungen des konstruktiven Ingenieurbaus bedient sich der Ingenieur einer Reihe methodischer Konzepte. Eines der wichtigsten ist die *sukzessive Approximation*, worunter die allmähliche Verschärfung der Auseinandersetzung mit einer Fragestellung verstanden wird (Eskalation). Dabei wird der Detaillierungsgrad ausgehend von ersten groben Abschätzungen schrittweise erhöht, bis eine für die jeweilige Fragestellung genügend genaue Antwort vorliegt. Die Aufgabe wird in der Regel von verschiedenen Seiten angegangen und der Bereich möglicher Lösungen eingegrenzt (*Eingrenzung*). Ausgangspunkt der Bearbeitung ist folglich die Abklärung der Relevanz der verschiedenen Merkmale des Tragverhaltens. Die Anzahl zu durchschreitender Verfeinerungen wächst mit zunehmender Komplexität der Fragestellung an. Diese Vorgehensweise stellt insbesondere sicher, dass der Blick für die grossen Zusammenhänge und relevanten Eigenschaften von Beginn weg gewahrt wird. In diesem Sinn trägt eine derartige Herangehensweise dem Umstand Rechnung, dass die menschliche Fähigkeit, klare Aussagen zu formulieren, mit zunehmender Komplexität des Modells abnimmt und andererseits die Fehleranfälligkeit ansteigt. Durch die Verwendung verschiedener Modelle mit verschiedenem Detaillierungsgrad zur Bearbeitung derselben Fragestellung werden ausserdem Redundanzen geschaffen, womit die Zuverlässigkeit der Modellierung erhöht wird. Einer hohen Komplexität der Fragestellung lässt sich im Sinne einer *Entflechtung* dadurch entgegenzutreten, dass an Stelle eines einzigen komplexen Modells eine Kombination verschiedener einfacher Modelle verwendet wird. Entsprechend wird das Tragwerksmodell zweckmässigerweise in Teilbereiche gegliedert, welche ausgehend vom Gesamttragwerksmodell separat untersucht werden. Der Detaillierungsgrad der verwendeten Tragwerksmodelle wird dabei mit abnehmenden Abmessungen des untersuchten Tragwerksbereichs erhöht.

Den durch ungenaue und unvollständige Grundlagen hervorgerufenen Unschärfen wird mit verschiedenen methodischen Konzepten begegnet. Zur Sicherstellung der geforderten Zuverlässigkeit gelangen hierbei insbesondere *Grenzwertbetrachtungen* als typisches Ingenieurinstrument, Plausibilitätsbetrachtungen, Sensitivitätsanalysen und Methoden der Stochastik zur Anwendung.

### **Verifikation**

Die Verifikation der Tragwerksmodelle erfolgt anhand von wissenschaftlichen Erkenntnissen aus Experimenten und der praktischen Erfahrung. Während das Verhalten von Tragwerken unter häufigen Einwirkungen mit entsprechenden Messungen erfasst und den Modellvoraussagen gegenübergestellt werden kann, ist die mit einer übermässigen Schädigung des Tragwerks verbundene Verifikation des Tragwiderstands offensichtlich nicht möglich. Folglich beschränkt sich die Überprüfung des Tragwiderstands sowie des Tragverhaltens in dessen unmittelbarer Nähe auf Laborversuche, deren Versuchskörper und klar definierten Einwirkungen in gewisser Weise ihrerseits Modelle des tatsächlich verwendeten Tragwerkselements darstellen.

Ausser der Verifikation dienen experimentelle Untersuchungen im Labor dem Entdecken neuer Tatsachen, welche wiederum Ausgangspunkt für die Entwicklung neuer oder die Anpassung bestehender Modelle sein können. Der Einfluss verschiedener Parameter auf das Tragverhalten wird dabei durch deren systematische Variation, begleitet durch sorgfältige theoretische Betrachtungen, erörtert.

Neben Laborversuchen können ferner auch Schadenfallanalysen zur Verifikation von Modellen zur Beschreibung des Tragwiderstands sowie des Tragverhaltens unmittelbar vor dem Erreichen des Tragwiderstands herangezogen werden.

### **Erfassen des Tragverhaltens**

Neben der Bemessung und Überprüfung der Tragwerke hinsichtlich Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit dienen Modelle auch ganz allgemein dem qualitativen Erfassen des Tragverhaltens von Tragsystemen sowohl im Kleinen wie im Grossen. Dazu werden zweckmässige graphische Darstellungen der Kraft- und Verformungsgrössen erstellt, welche wichtige Hilfsmittel beim Entwickeln des konzeptionellen Entwurfs von Tragwerken, bei Plausibilitätsbetrachtungen sowie beim Konzipieren

der konstruktiven Durchbildung sind. Insbesondere im Zusammenhang mit der Anwendung leistungsstarker computerbasierter Berechnungsmodelle (welche oft direkt Bemessungsgrößen wie Bewehrungsgehalte liefern) wird deren Bedeutung zu Unrecht oft verkannt.

Während praktisch jeder Mensch auf Grund der alltäglicher Beobachtung des Verhaltens weicher Gegenstände eine mehr oder minder ausgeprägte Intuition für visuell kaum wahrnehmbare Tragwerksverformungen entwickelt, lassen sich abstrakte Kraftgrößen nur mit entsprechenden Modellvorstellungen erfassen. Die überhöhte graphische Darstellung der Verformungen liefert direkt ein Abbild des beobachteten Verhaltens und lässt sich auf diese Weise leicht erfassen. Kraftgrößen können dagegen mit geeigneten Schnittkörperdiagrammen veranschaulicht werden. Der Spannungszustand lässt sich mit den Funktionsverläufen der verallgemeinerten Spannungen und den Trajektorien der Hauptspannungen resp. den entsprechenden verallgemeinerten Kräften darstellen. Durch Zusammenfassen der Hauptspannungen zu resultierenden Kräften werden die Spannungsfelder diskretisiert, womit sich der Spannungszustand näherungsweise durch *Fachwerkmodelle* mit unterschiedlichem Detaillierungsgrad darstellen lässt. Der Kraftfluss, also die Lastabtragung durch innere Kräfte im gesamten Tragsystem, lässt sich bei Stabtragsystemen direkt aus dem Querkraftverlauf ablesen; bei Plattentragsystemen wird er durch Richtung und Betrag der Hauptquerkräfte veranschaulicht [92, 94, 109]. Von besonderer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang die Stellen mit verschwindender Quer- bzw. Hauptquerkraft. Ein weiteres Hilfsmittel, um das Tragverhalten graphisch darzustellen und somit zu erfassen, sind Ersatztragsysteme, namentlich Stützlinien, Seilpolygone und Seilpolygonpaare [79]. Bei linear elastischen Tragsystemen lässt sich weiter der Einfluss von Lastpositionen durch Einflusslinien und -flächen veranschaulichen. Generell erweisen sich in diesem Zusammenhang geometrische Hilfskonstruktionen zur Veranschaulichung von mathematischen Beziehungen als sehr nützlich. Beispiele hierzu sind Mohr'sche Kreise zur Transformation von Tensoren, Thaleskreise zur Transformation von Plattenquerkräften sowie Fließflächen als geometrische Interpretation von Fließbedingungen.

## 4.4 Auf den Traglastverfahren basierende Modelle

### 4.4.1 Allgemeines

Auf den Traglastverfahren basierende Modelle dienen der Beurteilung der Tragsicherheit im Rahmen einer Überprüfung bzw. der Sicherstellung der Tragsicherheit durch eine entsprechende Bemessung. Wie bereits in Kapitel 2.6 festgehalten, setzen die Traglastverfahren der Plastizitätstheorie ein ideal plastisches Werkstoffverhalten und (infinitesimal) kleine Verschiebungen voraus. Falls bei Bauteilen Verschiebungsgrößen zweiter und höherer Ordnung zu berücksichtigen sind, wie dies bei Druckgliedern in der Regel der Fall ist, muss folglich die Bemessung bzw. Überprüfung auf der Elastizitätstheorie basierend erfolgen, womit die mutmassliche Belastungs- und Zwängungsabfolge zu berücksichtigen ist. Durch Anwendung der Kapazitätsbemessung lässt sich allenfalls trotzdem ein duktileres Verhalten erwirken, indem die einwirkende Kraft durch serielle Anordnung eines duktilen Systembestandteils mit geringerem Tragwiderstand plafoniert wird.

Durch die Voraussetzung eines ideal plastischen Verhaltens wird das bei Bewehrungsstählen (siehe Kap. 3.2) beobachtete Verhalten nach Überschreiten der Fließgrenze auf einfachst mögliche Weise abgebildet. Obwohl der Beton in der Regel – mit Ausnahme dreiachsiger Druckspannungszustände, welche beispielsweise mit Hilfe einer Umschnürungsbewehrung herbeigeführt werden können – ein relativ sprödes Verhalten zeigt (siehe Kap. 3.3), und das Öffnen und Schliessen von Rissen nicht mit einem ideal plastischen Werkstoffverhalten abgebildet werden kann, lässt sich der Tragwiderstand in vielen Fällen durch Annahme eines ideal plastischen Verhaltens hinreichend genau bestimmen. Dabei werden fiktive Fließspannungsniveaus, sog. *effektive Festigkeiten*, eingeführt, welche je nach Fragestellung unterschiedlich festgelegt werden. Neben dem Werkstoffverhalten berücksichtigen die effektiven Festigkeiten oft weitere Eigenschaften der entsprechenden Fragestellung, welche sich mit der Plastizitätstheorie nicht erfassen lassen. Dieser mit der Einfachheit des Konzepts verbundene Nachteil wird durch die Tatsache aufgewogen, dass sich die aus einzelnen

Versuchen gewonnenen Kennwerte der effektiven Festigkeiten auf eine Vielzahl von Fragestellungen übertragen lassen. Die Betonzugfestigkeit wird gemäss den Erwägungen in Kapitel 3.3.1 vernachlässigt und der Verbund zwischen Beton und Bewehrung als starr angenommen.

Ob die Anwendung der Traglastverfahren im Einzelfall geeignet ist, um die Tragsicherheit zu beurteilen oder im Rahmen einer Bemessung sicherzustellen, lässt sich neben entsprechenden experimentellen Untersuchungen rechnerisch durch Gegenüberstellen des plastischen Verformungsbedarfs und des plastischen Verformungsvermögens mit Hilfe verfeinerter Modelle beurteilen. Bei der Bestimmung des Verformungsbedarfs ist die mutmassliche Belastungs- und Zwängungsgeschichte angemessen zu berücksichtigen; den damit einhergehenden Unsicherheiten ist entsprechend Rechnung zu tragen. Das plastische Verformungsvermögen wird insbesondere vom Verfestigungsverhalten der Bewehrung (siehe Kap. 3.2), dem Verformungsvermögen des Betons und der ungünstig wirkenden Zugversteifung (siehe Kap. 3.4) bestimmt; diese Eigenschaften sind folglich angemessen zu berücksichtigen.

Bei der Anwendung der Traglastverfahren (siehe Kap. 2.6.6) zur Sicherstellung bzw. Überprüfung der Tragsicherheit arbeitet man entsprechend dem statischen und kinematischen Grenzwertsatz entweder mit statisch zulässigen Spannungszuständen oder mit nichttrivialen instabilen kinematisch zulässigen Verschiebungszuständen, wobei letztere primär bei der Überprüfung von Tragsystemen eingesetzt werden. Da sich die exakte Traglast nur in speziellen Fällen bestimmen lässt, stehen dabei Grenzwertbetrachtungen im Vordergrund.

Bei der Einführung zusätzlicher Vereinfachungen zur Ermittlung entsprechender Grenzwerte erweisen sich insbesondere die Korollare b bis d in Kapitel 2.6.6 als besonders kräftig und bilden die baustatische Grundlage vieler bei der Modellbildung eingesetzter Vereinfachungen. Beispielsweise werden die bedingt durch die Wahl der Systemabgrenzung nicht klar bestimmbar Randbedingungen oft stark idealisiert, indem eine unbekannt teilweise Einspannung beispielsweise als einfache Auflagerung idealisiert wird. Werden zusätzliche kinematische Bindungen eingeführt, so wird die Traglast auf Grund von Korollar d nicht unterschätzt; werden umgekehrt kinematische Bindungen gelöst, wird die Traglast nicht überschätzt.

#### 4.4.2 Bemessung

Bei der Sicherstellung eines ausreichenden Tragwiderstands durch eine entsprechende Bemessung mit Hilfe des statischen Grenzwertsatzes des Traglastverfahrens werden statisch zulässige Spannungszustände ausgearbeitet, auf deren Grundlage die Tragwiderstände und damit die Fließgrenzen festgelegt werden. Die verwendeten statisch zulässigen Spannungszustände sollten dabei nicht übermässig von den tatsächlich erwarteten Spannungszuständen abweichen, damit der Verformungsbedarf nicht an die Grenzen des Verformungsvermögens stösst und unter häufig auftretenden Einwirkungen keine plastischen Verformungen zu erwarten sind. Da in der Regel die Tragsicherheit für die Bemessung der Bewehrung massgebend ist, resultiert dadurch ausserdem eine für den Gebrauchszustand zweckmässige Bewehrungsanordnung, bei welcher die Bewehrung nicht übermässig beansprucht wird. Dementsprechend wird empfohlen, insbesondere die Zwängungen infolge der Vorspannung angemessen zu berücksichtigen [107], da diese im Gebrauchszustand permanent vorhanden sind. Da die Traglast des auf diese Weise bemessenen Tragwerks nicht kleiner als die zum verwendeten Spannungszustand gehörende Belastung ist, ist die Tragsicherheit dementsprechend gegeben.

Oft ist es zweckmässig, von statisch zulässigen Spannungszuständen auszugehen, welche sich unter Annahme eines linear elastischen ungerissenen Verhaltens des Tragsystems einstellen und mit der Methode der Finiten Elemente selbst bei geometrisch komplexen Verhältnissen mit angemessenem Aufwand bestimmt werden können. Durch die Überlagerung von Eigenspannungszuständen können von diesen ausgehend anschliessend weitere statisch zulässige Spannungszustände entwickelt werden.

Wie in Kapitel 2.6.7 erwähnt, können Spannungsfelder, welche lediglich den statischen Beziehungen genügen müssen, Diskontinuitäten aufweisen. Das Einführen zusätzlicher Diskontinuitäten, welche nicht durch die Geometrie oder Einwirkungen gegeben sind, erweist sich insbesondere bei der

analytischen Ausarbeitung statisch zulässiger Spannungszustände als nützlich; man spricht dabei von *diskontinuierlichen Spannungsfeldern*.

In der Regel sind bei der Bemessung von Tragsystemen verschiedene Lastfälle zu berücksichtigen, welche in beliebiger Abfolge auftreten können. Bei einer auf dem Traglastverfahren beruhenden Bemessung ist in diesem Zusammenhang eine Diskussion des *Einspielsatzes* (engl. „shakedown theorem“) [13, 106, 150, 151] und dessen Rolle bei der Bemessung opportun.

Der Einspielsatz besagt, dass

gegebene Grenzwerte der Belastungsintensität innerhalb des Anpassungsvermögens des hyperelastisch-ideal plastischen Tragsystems liegen, wenn ein Eigenspannungszustand angegeben werden kann derart, dass die Spannungen, welche durch Überlagerung der den Grenzbelastungen entsprechenden, am elastischen System ermittelten Spannungen und dem Eigenspannungszustand entstehen, nirgends die Fließgrenze überschreiten.

Die Rolle des Einspielsatzes wird nachfolgend anhand eines einfachen Beispiels diskutiert; einen allgemeinen Beweis des Einspielsatzes gibt Symonds [150].

Der in Bild 4.2(a) dargestellte Zweifeldträger weise in allen Querschnitten die in Bild 4.2(b) dargestellte Momenten-Krümmungsbeziehung mit Biegesteifigkeit  $EI$  und Fließmoment  $M_u$  auf. Die mit den Querkräften korrespondierenden Verformungsgrößen werden durch die Annahme ebener und in der verformten Lage senkrecht zur Stabachse stehender Querschnitte vernachlässigt, so dass die Querkräfte sowohl im elastischen wie im plastischen Sinn verallgemeinerte Reaktionen darstellen. Ausser der gleichmässig verteilten Last  $g$  wirkt auf den Träger eine feldweise anzusetzende Last  $q = \alpha g$ ; Bild 4.2(a) enthält die entsprechenden Lastfälle.

Damit sich der Träger einspielen kann, ist bei der Bemessung gemäss dem Einspielsatz allen Lastfällen derselbe Eigenspannungszustand zu überlagern. Für  $\alpha = q/g = 1/2$  wird somit zur Umhüllenden aller Biegemomentenverläufe der untersuchten Lastfälle (Grenzwertlinie) ein durch das Biegemoment über dem mittleren Auflager  $M_{B0} = 0,050gl^2$  beschriebener Eigenspannungszustand addiert, um eine optimale Bemessung zu erreichen. Das erforderliche Fließmoment  $M_u$  beträgt  $0,138gl^2$ ; siehe Bild 4.2(c). Bei einer Bemessung ohne Berücksichtigung des Einspielsatzes kann jedem Lastfall ein anderer Eigenspannungszustand überlagert werden, so dass ein erforderliches Fließmoment von  $M_u = 0,129gl^2$  resultiert, welches 6,7 % geringer als jenes bei Berücksichtigung des Einspielsatzes ist. Bild 4.2(d) zeigt die Reduktion des erforderlichen Fließmoments bei Annahme eines ideal plastischen Verhaltens bezüglich einer Bemessung gemäss dem Einspielsatz in Abhängigkeit von  $\alpha = q/g$ . Dem gegenübergestellt ist die Reduktion beim Grenzfall eines entsprechenden Trägers mit unendlich vielen Feldern; generell wächst der Unterschied des erforderlichen Widerstands der beiden Bemessungskonzepte mit zunehmender Anzahl Lastfälle an.

Nachfolgend wird das Verhalten der beiden unterschiedlich bemessenen Träger anhand der Belastungsabfolge 0-[a-b-a-c<sub>1</sub>]-[a-b-a-c<sub>1</sub>]-etc. diskutiert. Wird die Last des gemäss dem Einspielsatz bemessenen Trägers ausgehend vom initial spannungsfreien Zustand sukzessive bis zur Volllast  $q_1 = q_2 = 3g/2$  erhöht, erreicht der Querschnitt B bei  $q_1 = q_2 = 1,104g$  die Fließgrenze und das Fließgelenk erfährt bis zum Erreichen der Volllast eine plastische Rotation von  $0,033gl^3/EI$ ; siehe Bild 4.2(e). Die plastische Verformung bewirkt einen Eigenspannungszustand mit  $M_{B0} = 0,050gl^2$ . Bei der anschliessenden Belastungsabfolge ergeben sich jeweils bis zum Erreichen der entsprechenden Belastungsintensität keine weiteren plastischen Verformungen, und der Eigenspannungszustand verändert sich nicht, d. h. der Träger hat sich bei der ersten Belastung bis zur Volllast bereits eingespielt.

Wird der ideal plastisch bemessene Träger derselben Belastungsabfolge unterworfen, erreicht er erstmals während des Aufbringens der Volllast bei  $q_1 = q_2 = 1,029g$  die Fließgrenze im Querschnitt B; bis zur Volllast resultiert eine plastische Rotation des Fließgelenks von  $0,039gl^3/EI$  und ein Eigenspannungszustand mit  $M_{B0} = 0,059gl^2$ ; siehe Bild 4.2(f). Nach der Entlastung bis zum Lastfall a erreicht bei der anschliessenden sukzessiven Erhöhung der Last  $q_1$  der Querschnitt bei  $\xi = 0,435$  und  $q_1 = 1,361g$  die Fließgrenze, und es resultiert bis zum Erreichen des Lastfalls c<sub>1</sub> eine plastische Rotation von  $0,052gl^3/EI$ . Der Eigenspannungszustand wird dabei auf  $M_{B0} = 0,028gl^2$  reduziert.

Werden nach einer Entlastung bis zum Lastfall a sowohl  $q_1$  als auch  $q_2$  sukzessive bis zur Volllast gesteigert, erreicht der Querschnitt B bei  $q_1 = q_2 = g/4$  die Fließgrenze, und es resultiert bis zur Volllast eine zusätzliche plastische Rotation von  $0,021gl^3/EI$ , womit wiederum ein Eigenspannungszustand mit  $M_{B0} = 0,059gl^2$  vorliegt. Da bei den Lastfällen b und c<sub>1</sub> unterschiedliche Eigenspannungszustände auftreten, erfordert jeder Belastungszyklus zusätzliche gleichgerichtete plastische Rotationen im Querschnitt B sowie bei  $\xi = 0,435$ ; total resultiert bei B  $\theta_{Bpl} = (0,039 + n \cdot 0,021)gl^3/EI$  und bei  $\xi = 0,435$   $\theta_{Fpl} = n \cdot 0,052gl^3/EI$ , wobei  $n$  die Anzahl durchlaufener Zyklen bezeichnet. Die plastischen Rotationen der Fließgelenke wachsen also bei jedem Zyklus an, so dass nach einer gewissen Anzahl Zyklen das entsprechende Rotationsvermögen erreicht wird und ein Versagen unterhalb der Traglast des entsprechenden Lastfalls eintritt.

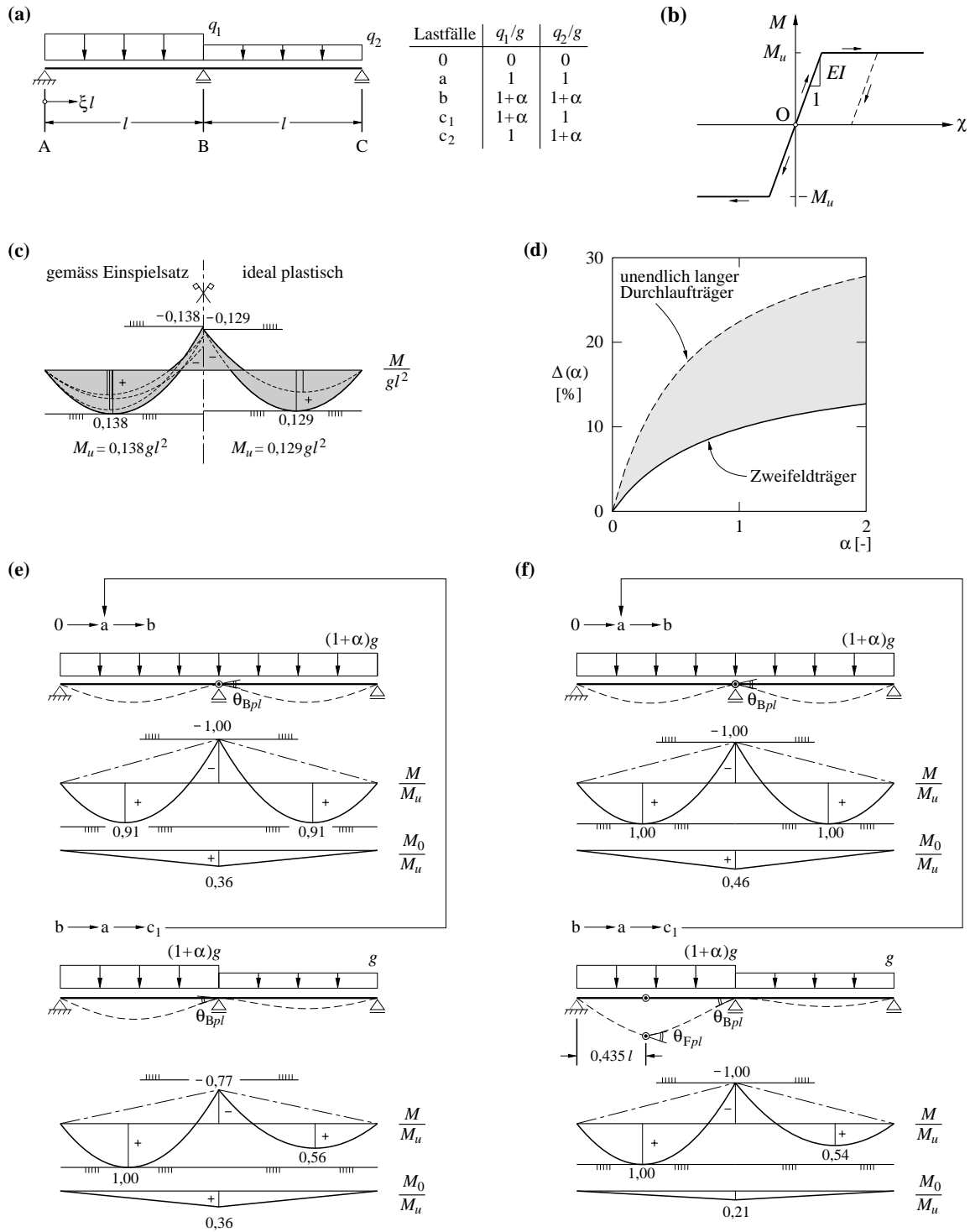
Schliesslich drängt sich die Frage auf, ob der Einspielsatz bei der Bemessung zu berücksichtigen ist. Dies lässt sich im Allgemeinen verneinen, da das Versagen in jedem Fall durch entsprechende plastische Verformungen angekündigt wird, und somit frühzeitig interveniert werden kann. Ferner wird beim Festlegen der Sicherheitsfaktoren, welche vorwiegend durch Tradition und praktische Erfahrung begründet sind, von einem einmaligen Erreichen des Tragwiderstands ausgegangen. Ein mehrfaches Erreichen des Tragwiderstands weist eine kleinere Eintretenswahrscheinlichkeit auf, was bei gleicher Zuverlässigkeit eine Verringerung der erforderlichen Sicherheitsfaktoren erlauben würde. Mithin kann die Tragsicherheit als gegeben erachtet werden, wenn der Tragwiderstand das einmalige Erreichen eines beliebigen Lastfalls mit der geforderten Zuverlässigkeit gewährleistet.

Bei geometrisch komplexen Verhältnissen, wie sie bei Platten- und Faltwerktragssystemen oft angetroffen werden, wird das Auffinden geeigneter Eigenspannungszustände erheblich erschwert, so dass die Bemessung in der Regel auf Grund eines unter der Annahme eines linear elastischen ungerissenen Verhaltens ermittelten Spannungszustands vorgenommen wird, welcher sich mit der Methode der Finiten Elemente mit angemessenem Aufwand ermitteln lässt. Es sei betont, dass es sich hierbei nach wie vor um eine auf den Traglastverfahren der Plastizitätstheorie beruhende Bemessung handelt. Tatsächlich entspricht dies einem Vorgehen gemäss dem Einspielsatz. Da Betonbauten im Vergleich zu den veränderlichen Lasten in der Regel einen hohen Eigenlastanteil aufweisen, und die Widerstände im Gegensatz zum Beispiel in Bild 4.2 abgestuft werden, führt ein derartiges Vorgehen im Vergleich zu einer ideal plastischen Bemessung in der Regel nur zu einem unerheblichen Mehraufwand an Werkstoffen. Darüber hinaus wird der Unterschied des mit dem erforderlichen Tragwiderstand verbundenen Werkstoffaufwands in der betrachteten Grössenordnung durch die Tatsache relativiert, dass die für die Erstellung erforderlichen Mittel vom Tragwerkskonzept und den gewählten Bauverfahren dominiert werden. Neben den Anforderungen der Tragsicherheit muss die Bemessung ausserdem auch jenen der Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit genügen und wird ferner wesentlich von ausführungstechnischen und konstruktiven Aspekten bestimmt. Angesichts dessen wird im konstruktiven Ingenieurbau im Allgemeinen von einer Optimierung der Bemessung abgesehen<sup>1</sup>.

Dem Grundsatz der Einfachheit und Transparenz folgend, ist die Anzahl der betrachteten Lastfälle mit freien – also beweglichen – Lasten generell auf ein vernünftiges Mass zu beschränken; dafür ist anhand des jeweils gewählten statisch zulässigen Spannungszustands der Kraftfluss konsequent zu verfolgen. Ausschliesslich auf diese Weise kann eine konsistente Bemessung erreicht werden. Insbesondere für die konstruktive Durchbildung ist neben dem Durchdenken des Bauvorgangs das konsequente Verfolgen des Kraftflusses unerlässlich. Begingt durch die Verfügbarkeit leistungsfähiger numerischer Verfahren zur Bestimmung der (verallgemeinerten) Spannungen linear elastischer Systeme sowie der bei derart idealisierten Systemen gegebenen Möglichkeit zur Superposition von Spannungszuständen verschiedener Belastungen wird die Bemessung oft direkt auf der Basis von aus verschiedenen Lastfällen resultierenden üblicherweise mit Grenzwertlinien beschriebenen extremalen

---

<sup>1</sup> Allgemeine Untersuchungen zur optimalen Bemessung von Tragsystemen mit einem elastisch-ideal plastischen Verhalten liefern allerdings (insbesondere wegen der im Bereich der Extrema im Allgemeinen flach verlaufenden Funktionen) oft nützliche qualitative Hinweise für die praktische Bemessung und vermitteln einen tieferen Einblick in das Tragverhalten derartig idealisierter Systeme.



**Bild 4.2** – Beispiel zur Rolle des Einspielsatzes bei der Bemessung: (a) System und Einwirkungen; (b) Werkstoffverhalten; (c) Bemessung für  $\alpha=1/2$  gemäss Einspielsatz bzw. unter Annahme eines ideal plastischen Verhaltens; (d) Reduktion des erforderlichen Querschnittswiderstands durch ideal plastische Bemessung; Verhalten während untersuchter Belastungsabfolge bei Bemessung gemäss Einspielsatz (e) bzw. bei Annahme eines ideal plastischen Werkstoffverhaltens (f).

(verallgemeinerten) Spannungen vorgenommen. Dies birgt den erheblichen Nachteil in sich, dass nicht mit einem einzigen statisch zulässigen Spannungszustand gearbeitet wird. Dadurch lässt sich der Kraftfluss nicht verfolgen, und die Möglichkeit zur Kontrolle der Ergebnisse anhand von Gleichgewichtsbetrachtungen an ausgewählten Schnittkörpern entfällt. Die Betrachtung einer Vielzahl von Laststellungen mit zugehörigen Lastfällen führt ferner zu einer unverhältnismässig grossen Daten-

menge, mit deren Ausmass die Übersichtlichkeit zunehmend beeinträchtigt wird. Letztlich dominiert bei Betonbauten meist die Eigenlast, und die Bemessung wird in der Regel von relativ wenigen Lastfällen wesentlich beeinflusst.

Da der kinematische Grenzwertsatz im Rahmen der den Traglastverfahren zu Grunde gelegten Annahmen einen oberen Grenzwert der Traglast liefert (siehe Kap. 2.6.6), lässt er sich nur bedingt zur Bemessung heranziehen. Falls die Fließmechanismen derart gewählt werden, dass deren Eintreten auf Grund der Erfahrung erwartet werden kann, liefern diese allerdings wertvolle Hinweise zur Bewehrungsführung und zu den Bauteilabmessungen.

#### 4.4.3 Überprüfung

Bei der Beurteilung der Tragsicherheit im Rahmen der Überprüfung eines bestehenden Tragwerks oder der Überprüfung der Bemessung eines Tragwerks werden in der Regel beide Grenzwertsätze zur Eingrenzung der Traglast herangezogen. Bei einem Vorgehen gemäss dem statischen Grenzwertsatz werden statisch zulässige Spannungszustände, welche die Fließbedingungen nirgends verletzen, untersucht. Da deren zugehörige Belastung einen unteren Grenzwert der Traglast darstellt, geht es darum, diese zu maximieren, um die grösstmögliche Aussagekraft bezüglich des tatsächlichen Tragwiderstands zu erlangen. Bezüglich des Umgangs mit verschiedenen Lastfällen und dem Einspielsatz gelten die vorhergehenden Feststellungen sinngemäss.

Bei einem Vorgehen gemäss dem kinematischen Grenzwertsatz werden nichttriviale instabile kinematisch zulässige Verschiebungszustände untersucht. Da deren zugehörige Belastung einen oberen Grenzwert der Traglast darstellt, ist diese zu minimieren, um die grösstmögliche Aussagekraft bezüglich des tatsächlichen Tragwiderstands zu erhalten.

In der Regel lassen sich bei den meisten Tragsystemen nichttriviale instabile kinematisch zulässige Verschiebungszustände mit deutlich geringerem Aufwand angeben als statisch zulässige Spannungszustände, welche die Fließbedingung nirgends verletzen; insbesondere da bei einer Überprüfung die Widerstände bzw. die entsprechenden Fließbedingungen bereits feststehen und nicht gewählt werden können. Somit erfolgen erste Abschätzungen der Traglast zweckmässigerweise mit Hilfe des kinematischen Grenzwertsatzes. Gleichzeitig lassen sich damit kritische Lastfälle identifizieren. Beim Aufsuchen eines minimalen oberen Grenzwertes der Traglast ist ferner die Tatsache hilfreich, dass die Funktionen im Bereich der Minima in der Regel flach verlaufen. Auf der damit erarbeiteten Grundlage kann anschliessend ein Vorgehen gemäss dem statischen Grenzwertsatz angegangen werden.

Oft reicht bereits einer der beiden Grenzwerte aus, um eine abschliessende Beurteilung der Tragsicherheit vornehmen zu können. Wird für alle relevanten Lastfälle ein unterer Grenzwert der Traglast gefunden, der die verlangte Belastungsintensität mit der geforderten Zuverlässigkeit übersteigt, kann die Tragsicherheit bei einem ausreichenden Verformungsvermögen als gegeben erachtet werden. Wird umgekehrt für einen Lastfall ein oberer Grenzwert der Traglast gefunden, der mit Rücksicht auf die verlangte Zuverlässigkeit geringer als die geforderte Belastungsintensität ist, ist die Tragsicherheit nicht erfüllt. Um in diesem Fall die Grössenordnung des Defizits und die kritischen Tragwerksbereiche zu identifizieren sowie um generell die Aussagekraft und Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu erhöhen, ist es empfehlenswert, stets beide Grenzwertsätze zu verwenden, um sowohl untere als auch obere Grenzwerte der Traglast zu bestimmen. Die exakte Traglast des idealisierten Tragsystems lässt sich nur in wenigen Fällen bestimmen.

Bei der Überprüfung bestehender Bauten gilt es in der Regel – im Unterschied zur Bemessung – alle Reserven des Tragsystems auszunützen und sämtliche für die bearbeitete Fragestellung relevanten Informationen, die mit einem verhältnismässigen Aufwand beschafft werden können, mit einzubeziehen, um den mit einer Verstärkung verbundenen Ressourcenverbrauch möglichst abzuwenden.

## 4.5 Auf der Elastizitätstheorie basierende Modelle

Modelle mit einem elastischen Werkstoffverhalten dienen in erster Linie der Bestimmung des Spannungs- und insbesondere Verschiebungszustands zur Abklärung bzw. Gewährleistung der Gebrauchstauglichkeit. Bedingt durch die Verfügbarkeit leistungsstarker numerischer Berechnungsverfahren (Methode der Finiten Elemente) und die Superponierbarkeit von Spannungs- und Verschiebungszuständen, wird insbesondere bei komplexen Tragwerken oft von einem linear elastischen Verhalten des Stahlbetons ausgegangen. Dies ist eine sehr starke Vereinfachung des komplexen Tragverhaltens des Betons, dessen man sich stets bewusst sein sollte, stellt auf Grund der beschränkten Mittel allerdings oft den einzig gangbaren Weg dar. Auf diese Weise lässt sich, wie bereits in Kapitel 4.4 erwähnt, auch ein spezieller statisch zulässiger Spannungszustand gewinnen, der als Grundlage für die Bemessung verwendet werden kann; wobei an dieser Stelle nochmals betont sei, dass es sich dabei trotzdem um ein auf den Traglastverfahren beruhendes Bemessungsverfahren handelt. Nichtlineare elastische Stoffbeziehungen werden in der Regel für verfeinerte Modellvorstellungen sowohl zur Beurteilung der Tragsicherheit als auch der Gebrauchstauglichkeit eingesetzt.

Stillschweigend wird meist von einem initial spannungsfreien Zustand und einem monotonen Belastungszuwachs ausgegangen, was in Anbetracht des tatsächlichen, durch irreversible Prozesse geprägten Tragverhaltens und der weitgehend unbekanntem Belastungs- und Zwängungsabfolge (siehe Kap. 4.2.2) eine drastische Idealisierung darstellt, deren man sich stets bewusst sein sollte.

Insbesondere das Einführen zusätzlicher kinematischer Bindungen stellt – wie in Kapitel 2.5.3 ausführlich erläutert – eine erhebliche Vereinfachung der baustatischen Fragestellung dar. Bei vorgegebenen Lasten werden dabei die Verformungsgrößen unterschätzt und umgekehrt bei eingepprägten Verschiebungen die korrespondierenden Reaktionen überschätzt. Ferner können nach dem sog. „Prinzip“ von Saint-Venant<sup>1</sup> lokale Belastungen durch statisch äquivalente Belastungen ersetzt werden, falls dadurch der Spannungs- und Verschiebungszustand nur lokal beeinflusst wird. An Hand von verfeinerten Modellvorstellungen ohne Einführen der entsprechenden Idealisierungen lässt sich deren Berechtigung rechnerisch abklären. Bei hoch beanspruchten gedrunenen Trägern und Platten sowie scheibenartigen Tragwerken ist beispielsweise zu beachten, dass die üblicherweise durch Einführen entsprechender kinematischer Bindungen vernachlässigten Verformungen infolge der Querkräfte eine ähnliche Grössenordnung wie die Biegeverformungen erreichen können und dementsprechend in Rechnung zu stellen sind.

Da lokale Verformungsgrößen wie Rissbreiten naturgemäss erheblichen Streuungen unterworfen sind, beschränkt man sich bei der Untersuchung des Verformungsverhaltens in der Regel darauf, einzelne integrale Tragwerksverformungen wie die Mittendurchbiegungen von Trägern und Platten einigermassen zutreffend abzuschätzen.

## 4.6 Zusammenfassung

Das komplexe Tragverhalten des Stahlbetons wird von nicht linearen, irreversiblen und zeitabhängigen Vorgängen geprägt, welche bereits unter moderaten Beanspruchungen der Tragwerke eine Umverteilung der inneren Kräfte bewirken. Entsprechend sind die tatsächlich vorherrschenden Spannungszustände nur in gewissen Grenzen bekannt bzw. vorhersehbar. Ausserdem ergeben sich bei der Modellierung von Tragwerken infolge unvollständiger und ungenauer Grundlagen verschiedene Unschärfen. Diese Umstände gilt es bei der Modellierung von Betonbauten zu berücksichtigen.

Bei der Modellbildung im konstruktiven Ingenieurbau geht es darum, durch Abgrenzung und Idealisierung eines Tragwerks ein Tragwerksmodell und ein Modell der zugehörigen Einwirkungen zu

---

<sup>1</sup> Das „Prinzip“ von Saint-Venant ist nicht als Bestandteil eines Axiomensystems der Mechanik zu verstehen, sondern lediglich eine Idealisierung im Rahmen der Modellbildung.



entwickeln, welche die für die jeweilige Fragestellung relevanten Aspekte erfassen. Die Modelle müssen bei angemessenem Aufwand an Mitteln ausreichend genaue und sichere Aussagen liefern, also einfach, transparent und effizient sein. Im Sinne einer sukzessiven Approximation werden Modelle mit verschiedenen Detaillierungsgraden verwendet und Grenzwertbetrachtungen herangezogen. Neben der Bemessung und Überprüfung der Tragwerke hinsichtlich Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit dienen Modelle auch generell dem qualitativen Erfassen des Tragverhaltens von Tragsystemen.

Hinsichtlich der Tragsicherheit wird aufgrund der Forderung nach Versagensankündigung und Robustheit sowie der Unsicherheiten bezüglich der tatsächlichen Belastungs- und Zwängungsgeschichte falls immer möglich ein duktiler Verhalten der Tragsysteme angestrebt. Dieses lässt sich durch duktile Bewehrungsstähle und eine geeignete konstruktive Durchbildung sicherstellen. Bei spröden Systembestandteilen kann teilweise mit Hilfe der Kapazitätsbemessung ein duktiler Verhalten erreicht werden.

Fragen der Tragsicherheit werden, falls die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, mit Hilfe der Traglastverfahren der Plastizitätstheorie behandelt. Bei der Behandlung des Betons werden dabei anhand von Experimenten oder verfeinerten Modellen effektive Festigkeiten festgelegt, welche neben der Festigkeit weitere mit der Plastizitätstheorie nicht erfassbare Aspekte der Fragestellung erfassen. Während die Bemessung in der Regel auf der Grundlage des statischen Grenzwertsatzes erfolgt, werden bei der Überprüfung häufig beide Grenzwertsätze eingesetzt. Von grosser praktischer Bedeutung sind in diesem Zusammenhang ausserdem die Korollare der Grenzwertsätze (Kap. 2.6.6). Das Auffinden beliebiger statisch zulässiger Spannungszustände ist bei komplexen Tragwerken oft schwierig. Häufig wird deshalb von einem linear elastischen Verhalten und einem initial eigenspannungsfreien Tragsystem ausgegangen, um einen (speziellen) statisch zulässigen Spannungszustand zu erhalten. Bei mehreren Lastfällen, welche in beliebiger Reihenfolge auftreten können, entspricht dies einem Vorgehen gemäss dem Einspielsatz. Da die Tragsicherheit durch das Gewährleisten des einmaligen Erreichens der Traglast als erfüllt erachtet werden kann, muss der Einspielsatz in der Regel nicht berücksichtigt werden.

Neben der Bestimmung statisch zulässiger Spannungszustände dienen auf der Elastizitätstheorie fussende Modelle der Behandlung von Fragen der Gebrauchstauglichkeit und der Tragsicherheit von Fällen, welche sich mit der Plastizitätstheorie nicht erfassen lassen, sowie zur Abklärung der Anwendungsgrenzen plastischer Modelle.

## 5 Ebener Spannungszustand

### 5.1 Einleitung

Gegenstand des vorliegenden Kapitels sind Modelle zur Beschreibung des Stahlbetons im homogenen ebenen Spannungszustand. Mit deren Hilfe wird der Stahlbeton in einen fiktiven, in der Regel anisotropen Werkstoff mit entsprechenden Stoffbeziehungen zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  und den korrespondierenden mittleren Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\gamma_{xy}$  überführt. Für orthogonale Bewehrungen formulierte Modelle werden konsequent zur Behandlung allgemein schiefwinkliger Bewehrungslagen erweitert.

Nach der Darstellung der plastischen Modellierung (Kapitel 5.2), welcher ein ideal plastisches Werkstoffverhalten zugrunde liegt, werden Modellvorstellungen zur Beschreibung des ungerissenen (Kapitel 5.3) und des gerissenen Verhaltens (Kapitel 5.4) erläutert. Letztere beschränken sich auf das klassische Druckfeldmodell [5, 75, 112] und das Gerissene Scheibenmodell [63, 64]; eine Diskussion alternativer Modelle zur Beschreibung des gerissenen Verhaltens von orthogonal bewehrtem Stahlbeton im ebenen Spannungszustand enthält [64]. Abschliessend werden die verschiedenen Modellvorstellungen anhand eines Beispiels einander gegenübergestellt und diskutiert (Kapitel 5.5).

#### 5.1.1 Definitionen sowie übergeordnete Voraussetzungen und Idealisierungen

Die Bewehrung bestehe aus mindestens zwei nicht parallelen Lagen fein verteilter Bewehrungsstäbe (-litzen oder -drähte). Weiter wird vorausgesetzt, dass der Bewehrungsgehalt und die Anordnung der Bewehrungslagen ein schlagartiges Versagen bei der Erstrissbildung ausschliessen, also eine ausreichende Mindestbewehrung vorliegt. Fälle mit einer hohen Druckbeanspruchung der Bewehrung werden ausgeschlossen. Ein vorzeitiges Ausknicken der Bewehrung (verbunden mit dem Abplatzen des Überdeckungsbetons) kann das Erreichen der Fließgrenze auf Druck verhindern oder das Verformungsvermögen der fließenden Bewehrung übermässig beschränken, so dass die Traglast gemäss Kapitel 5.2 nicht erreicht wird. Nichtsdestotrotz werden der Vollständigkeit halber in Kapitel 5.2 die entsprechenden Fließregime aufgeführt.

Die Spannungs- und Verzerrungstensoren werden unter Ausnützung der Symmetrie gemäss der Voigt'schen Notation nachfolgend als Vektoren dargestellt. Als stumme Indizes zur Darstellung von Vektoren, Tensoren und Matrizen werden  $i$ ,  $j$  und  $l$  verwendet. Der Index  $k$  bezeichnet allgemein Bewehrungslagen bzw. deren Richtung.

#### Statische Grössen

Im Beton wird jeweils von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen. Die Hauptrichtungen des Betonspannungstensors mit den zugehörigen Hauptspannungen  $\sigma_{c1}$  und  $\sigma_{c3} \leq \sigma_{c1}$  werden bezüglich der  $x$ -Achse durch den Winkel  $\theta$  [ $0 \leq \theta < \pi$ ] (positiv im Gegenuhrzeigersinn) beschrieben (Bild 5.1(a)). Die (äquivalenten) Betonspannungen werden auf die Bruttoquerschnittsflächen bezogen. Infolge der Bewehrung sind die Nettoquerschnittsflächen kleiner als die Bruttoquerschnittsflächen und entsprechend die Beträge der effektiven Betonspannungen etwas grösser als jene der äquivalenten Betonspannungen. Wegen der relativ geringen Bewehrungsgehalte wird diese Differenz jedoch vernachlässigt.

Zur Formulierung gewisser Spannungs- und Verzerrungstransformationen wird der von einem beliebigen Winkel  $\alpha$  abhängige Vektor

$$t_i(\alpha) = [\cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha, -\sin \alpha \cos \alpha] \quad (5.1)$$

eingeführt. Gemäss (2.23) gilt damit

$$\sigma_{ci} = \sigma_{c1} t_i(\theta - \pi/2) + \sigma_{c3} t_i(\theta) \quad (5.2)$$

wobei  $\sigma_{ci} = [\sigma_{cx}, \sigma_{cy}, \tau_{cxy}]$  den Betonspannungstensor (in Voigt'scher Notation) bezeichnet; Bild 5.1(a) zeigt den entsprechenden Mohr'schen Spannungskreis.

Der Spannungszustand der Bewehrungsstäbe sei einachsrig, und die Stahlspannungen werden über die Querschnittsfläche als konstant verteilt vorausgesetzt; von einer Dübelwirkung (Kap 3.4.4) wird demzufolge abgesehen. Die Richtung einer beliebigen Bewehrungslage mit dem auf die Bruttoquerschnittsfläche bezogenen Bewehrungsgehalt  $\rho_k$  wird bezüglich der  $x$ -Achse mit dem Winkel  $\psi_k$  [ $0 \leq \psi_k < \pi$ ] (positiv im Uhrzeigersinn) festgelegt (Bild 5.1(b)). Die Bewehrung einer Lage wird als gleichmässig verteilte Fasern in Stablängsrichtung idealisiert; mithin entspricht jeder Bewehrungslage ein einachsiges Zugspannungsfeld in Bewehrungsrichtung mit der *äquivalenten Stahlspannung*  $\rho_k \sigma_{sk}$ , wobei  $\sigma_{sk}$  für die entsprechende Stahlspannung steht. Mit (2.23) und dem Transformationsvektor (5.1) folgt der aus der Überlagerung der einachsigen Zugspannungsfelder aller Bewehrungslagen resultierende Spannungszustand aus

$$\sigma_{si} = \sum_{k=1}^m \sigma_{sk} \rho_k t_i(-\psi_k) \quad (5.3)$$

Mit diesen Idealisierungen lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_i = \sigma_{ci} + \sigma_{si} \quad (5.4)$$

wobei  $\sigma_i = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$  den Tensor der äusseren Spannung (in Voigt'scher Notation) bezeichnet. Bild 5.1(c, d) zeigt die entsprechenden Mohr'schen Spannungskreise für zwei schiefwinklige Bewehrungslagen bzw. eine orthogonale Bewehrung, welche sich insbesondere für die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen bei einer orthogonalen Bewehrung als sehr anschaulich erweisen.

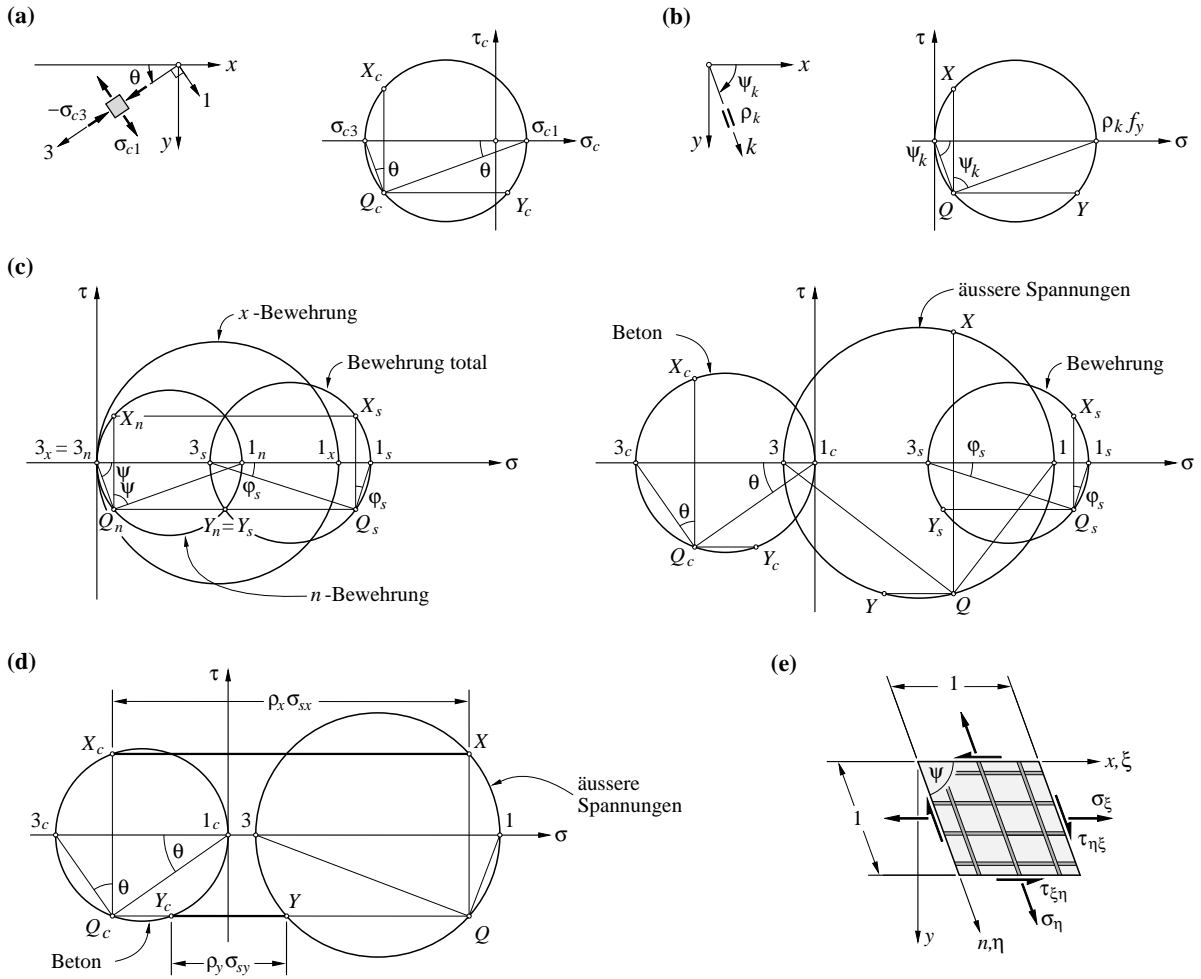
Bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen ist es oft zweckmässig statt der orthogonalen Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  *schiefe Spannungskomponenten*  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\eta$  und  $\tau_{\xi\eta}$  gemäss Bild 5.1(e) zu verwenden.  $\xi = x - y \cot \psi$  und  $\eta = y / \sin \psi$  bezeichnen dabei schiefe Koordinaten, wobei die  $\xi$ -Richtung parallel zur  $x$ -Richtung verläuft. Zwischen den orthogonalen und den schiefen Spannungskomponenten bestehen folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \sin \psi + \sigma_y \cos \psi \cot \psi - 2\tau_{xy} \cos \psi \\ \sigma_\eta &= \frac{\sigma_y}{\sin \psi} \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot \psi \end{aligned} \quad (5.5)$$

bzw. umgekehrt

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\xi}{\sin \psi} + \sigma_\eta \cos \psi \cot \psi - 2\tau_{\xi\eta} \cot \psi \\ \sigma_y &= \sigma_\eta \sin \psi \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy} = \tau_{\xi\eta} + \sigma_\eta \cos \psi \end{aligned} \quad (5.6)$$

Für zwei schiefwinklige Bewehrungslagen liefert (5.4) mit (5.6) und  $\psi_x = 0$  sowie  $\psi_n = \psi$



**Bild 5.1** – Statische Grössen: (a) Betonhaupttrichtungen und -spannungen mit Mohr'schem Spannungskreis; (b) Bewehrungslage in Richtung  $k$  mit Mohr'schem Spannungskreis der äquivalenten Spannungen; (c) und (d) Mohr'sche Spannungskreise für zwei schiefwinklige Bewehrungslagen ( $\psi_x=0$  und  $\psi_n=\psi$ ) bzw. eine orthogonale Bewehrung ( $\psi_x=0$  und  $\psi_y=\pi/2$ ); (e) (äussere) Spannungskomponenten in schiefwinkligen Koordinaten.

$$\begin{aligned}
 \sigma_\xi &= \sigma_{c1} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \tan \theta)^2 + \sigma_{c3} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)^2 + \rho_x \sigma_{sx} \sin \psi \\
 \sigma_\eta &= \sigma_{c1} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \psi} + \sigma_{c3} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \psi} + \rho_n \sigma_{sn} \sin \psi \\
 \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = \sigma_{c1} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \tan \theta) - \sigma_{c3} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

**Kinematische Grössen**

Die Haupttrichtungen des Verzerrungstensors  $\epsilon_i = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$  (Voigt'sche Notation) werden nachfolgend bezüglich der  $x$ -Achse durch den Winkel  $\beta$  (positiv im Gegenuhrzeigersinn) beschrieben (Bild 5.2(a)). Gemäss den Transformationsbeziehungen der Verzerrungen (2.10) gilt somit

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon_1 \sin^2 \beta + \epsilon_3 \cos^2 \beta \\
 \epsilon_y &= \epsilon_1 \cos^2 \beta + \epsilon_3 \sin^2 \beta
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \beta \cos \beta$$

und für die Dehnung in Richtung einer beliebigen Bewehrungslage

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1 \sin^2(\beta + \psi_k) + \varepsilon_3 \cos^2(\beta + \psi_k) \quad (5.9)$$

Bild 5.2(b) zeigt den entsprechenden Mohr'schen Verzerrungskreis. Mit Hilfe des Transformationsvektors (5.1) geht die Transformationsbeziehung der Verzerrungen (2.10)<sub>1</sub> in  $\varepsilon_n = \varepsilon_i \cdot t_i(-\varphi)$  über; mithin gilt für die Hauptverzerrungen

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_i \cdot t_i(\beta - \pi/2) \quad \text{sowie} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_i \cdot t_i(\beta) \quad (5.10)$$

und für die Dehnung in Richtung  $k$  einer beliebigen Bewehrungslage

$$\varepsilon_k = \varepsilon_i \cdot t_i(-\psi_k) \quad (5.11)$$

Der Winkel  $\beta$  [ $0 \leq \beta \leq \pi$ ], welcher die zur kleineren Hauptverzerrung  $\varepsilon_3$  gehörende Haupttrichtung des Verzerrungstensors beschreibt, folgt aus (5.8) resp. dem Mohr'schen Verzerrungskreis in Bild 5.2(b),

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \right) & \text{für } \gamma_{xy} \geq 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \right) + \frac{\pi}{2} & \text{für } \gamma_{xy} \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{arccot} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} + \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \right)^2 + 1} \right) & \text{für } \gamma_{xy} \geq 0 \\ \operatorname{arccot} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} + \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \right)^2 + 1} \right) + \frac{\pi}{2} & \text{für } \gamma_{xy} \leq 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

wobei  $\beta$  für  $\gamma_{xy} \geq 0$  im Intervall [ $0 \leq \beta \leq \pi/2$ ] und für  $\gamma_{xy} \leq 0$  im Intervall [ $\pi/2 \leq \beta \leq \pi$ ] liegt.

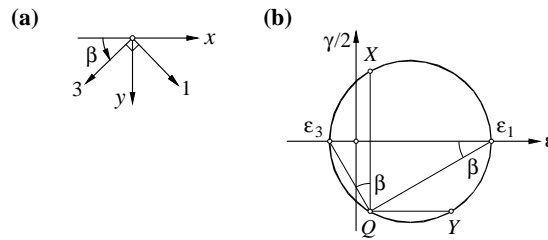
## 5.2 Plastische Modellierung

### 5.2.1 Voraussetzungen und Idealisierungen

Bei der plastischen Modellierung wird die Bewehrung durch unendlich fein verteilte Fasern mit verschwindend kleinem Durchmesser idealisiert, die in Faserrichtung einen einachsigen Spannungszustand aufweisen und mit dem umgebenden Beton in starrem Verbund stehen. Demzufolge werden lokale Variationen der Betonspannungen infolge Verbundschubspannungen vernachlässigt, so dass im Beton ein homogener ebener Spannungszustand herrscht. Sowohl dem Beton als auch dem Stahl wird ein ideal plastisches Verhalten zugrunde gelegt. Der Beton sei ferner homogen und isotrop und genüge der modifizierten Fließbedingung von Coulomb mit verschwindender Betonzugfestigkeit.

### 5.2.2 Fließbedingungen

Im vorliegenden Abschnitt werden die Fließbedingungen des mit zwei schiefwinklig zueinander verlaufenden Bewehrungslagen versehenen Betons im ebenen Spannungszustand erarbeitet. Die



**Bild 5.2** – Kinematische Grössen: (a) Hauptverzerrungsrichtungen; (b) Mohr'scher Verzerrungskreis.

Fliessbedingungen bei drei Bewehrungslagen (einschliesslich der Darstellung der entsprechenden Fliessflächen) können dem Anhang B entnommen werden; die entsprechenden Beziehungen lassen sich analog ableiten. Die Fliessbedingung wird gemäss den in Kapitel 2.6.5 erläuterten Zusammenhängen durch geometrische Linearkombination der Fliessbedingungen des Betons und der Bewehrung gewonnen.

### Fliessbedingung des Betons

In Hauptspannungskomponenten formuliert lauten die Fliessbedingungen des Betons

$$Y_{c1} = \sigma_1 = 0 \quad \text{und} \quad Y_{c2} = \sigma_3 + f_c = 0 \quad (5.13)$$

wobei  $f_c > 0$  die Betondruckfestigkeit im Sinne einer effektiven Festigkeit bezeichnet; Weiteres hierzu folgt in Kapitel 5.4.4. Bild 5.3(a) zeigt die entsprechende Fliessfläche im Hauptspannungsraum; die Mohr'schen Spannungskreise in Bild 5.3(b) veranschaulichen die in den Punkten A, B und O sowie den Strecken OA und AB vorherrschenden Spannungszustände. Mit (2.24) lassen sich die Fliessbedingungen (5.13) in orthogonalen Spannungskomponenten formulieren

$$\begin{aligned} Y_{c1} &= \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y = 0 & \text{mit } \sigma_x \leq 0 \quad \text{und} \quad \sigma_y \leq 0 \\ Y_{c2} &= \tau_{xy}^2 - (\sigma_x + f_c)(\sigma_y + f_c) = 0 & \text{mit } (\sigma_x + f_c) \geq 0 \quad \text{und} \quad (\sigma_y + f_c) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Durch Ermittlung der Eigenwerte und -vektoren der Koeffizientenmatrix der quadratischen Form (5.14)<sub>1</sub> lässt sich diese in die Normalform

$$\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0 \quad (5.15)$$

überführen.  $x$ ,  $y$  und  $z$  bezeichnen die zugehörigen Hauptachsen mit Ursprung in  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ; deren Richtungen werden durch die normierten Eigenvektoren  $e_{xi} = [-1, 1, 0]/\sqrt{2}$ ,  $e_{yi} = [0, 0, 1]$  und  $e_{zi} = [1, 1, 0]/\sqrt{2}$  beschrieben. Die Normalform und die Hauptachsenrichtungen von (5.14)<sub>2</sub> sind gleich denen von (5.14)<sub>1</sub>; der Ursprung der Hauptachsen liegt indessen bei  $\sigma_x = \sigma_y = -f_c$  und  $\tau_{xy} = 0$ . (5.14)<sub>1</sub> und (5.14)<sub>2</sub> beschreiben identische elliptische Kegelflächen mit Kegelspitze im Ursprung der entsprechenden Hauptachsen (Bild 5.3(c, d)).

Infolge der Isotropie des Werkstoffverhaltens ist die Fliessfigur in Bild 5.3(a) bezüglich der Achse  $\sigma_1 = \sigma_3$  symmetrisch. Im  $\sigma_x$ - $\sigma_y$ - $\tau_{xy}$ -Raum folgt aus der Isotropie, dass die Kegelachsen der Geraden  $\tau_{xy} = \sigma_x - \sigma_y = 0$  entsprechen, und die Schnittkurven der elliptischen Kegel mit senkrecht zur Kegelachse stehenden Ebenen Ellipsen mit einem Halbachsenverhältnis von  $\sqrt{2}$  sind, deren kleinere Halbachse parallel zur  $\tau_{xy}$ -Achse verläuft; oder gleichbedeutend, die um den Faktor  $\sqrt{2}$  in  $\pm \tau_{xy}$ -Richtung gestreckte Fliessfläche ist bezüglich der Kegelachsen rotationssymmetrisch [88, 141]. Anwendung des Fliessgesetzes (2.96) auf (5.13) und (5.14), Auflösen nach den entsprechenden Spannungskomponenten und Rückeinsetzen in die Fliessbedingungen liefert nach Elimination des jeweiligen Faktors  $\lambda$  für beide Fliessbedingungen

$$\left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2}\right)^2 - \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y = -\dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_{II} = 0 \quad (5.16)$$

wobei für  $Y_{c1}=0$  bzw.  $Y_{c2}=0$   $\dot{\epsilon}_1 \geq 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_2 = 0$  bzw.  $\dot{\epsilon}_1 = 0$ ,  $\dot{\epsilon}_3 \geq 0$  und  $\dot{\epsilon}_2 \geq 0$  ist. Im Mohr'schen Kreis der Verzerrungsinkremente lässt sich der erste Ausdruck in (5.16) geometrisch als Höhensatz von Euklid deuten. Für die singulären Stellen O, A und B der Fließfläche in Bild 5.3(a) gilt ferner der Reihe nach,  $\dot{\epsilon}_1 \geq 0$  und  $\dot{\epsilon}_3 \geq 0$  (sowie  $\dot{\epsilon}_2 \geq 0$  und  $\dot{\epsilon}_{II} \leq 0$ );  $\dot{\epsilon}_1 \geq 0$  und  $\dot{\epsilon}_3 \leq 0$  (sowie  $\dot{\epsilon}_2 \geq 0$  und  $\dot{\epsilon}_{II} \geq 0$ );  $\dot{\epsilon}_1 \leq 0$  und  $\dot{\epsilon}_3 \leq 0$  (sowie  $\dot{\epsilon}_2 \geq 0$  und  $\dot{\epsilon}_{II} \leq 0$ ). Für den die Hauptrichtungen beschreibenden Winkel  $\beta$  resultiert unter Berücksichtigung des Fließgesetzes (2.96) und (5.12)

$$\cot 2\beta = \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \cot 2\theta \quad (5.17)$$

Als Folge der Isotropie besitzen der Spannungstensor und der Tensor der verträglichen Verzerrungsinkremente ein gemeinsames Hauptachsensystem [169]. Bei singulären Punkten der Fließflächen, z. B. Punkt B der Fließfläche in Bild 5.3(c), sind mehrere inkrementelle Verzerrungszustände verträglich, wobei mindestens einer ein mit dem Spannungszustand gemeinsames Hauptachsensystem besitzt.

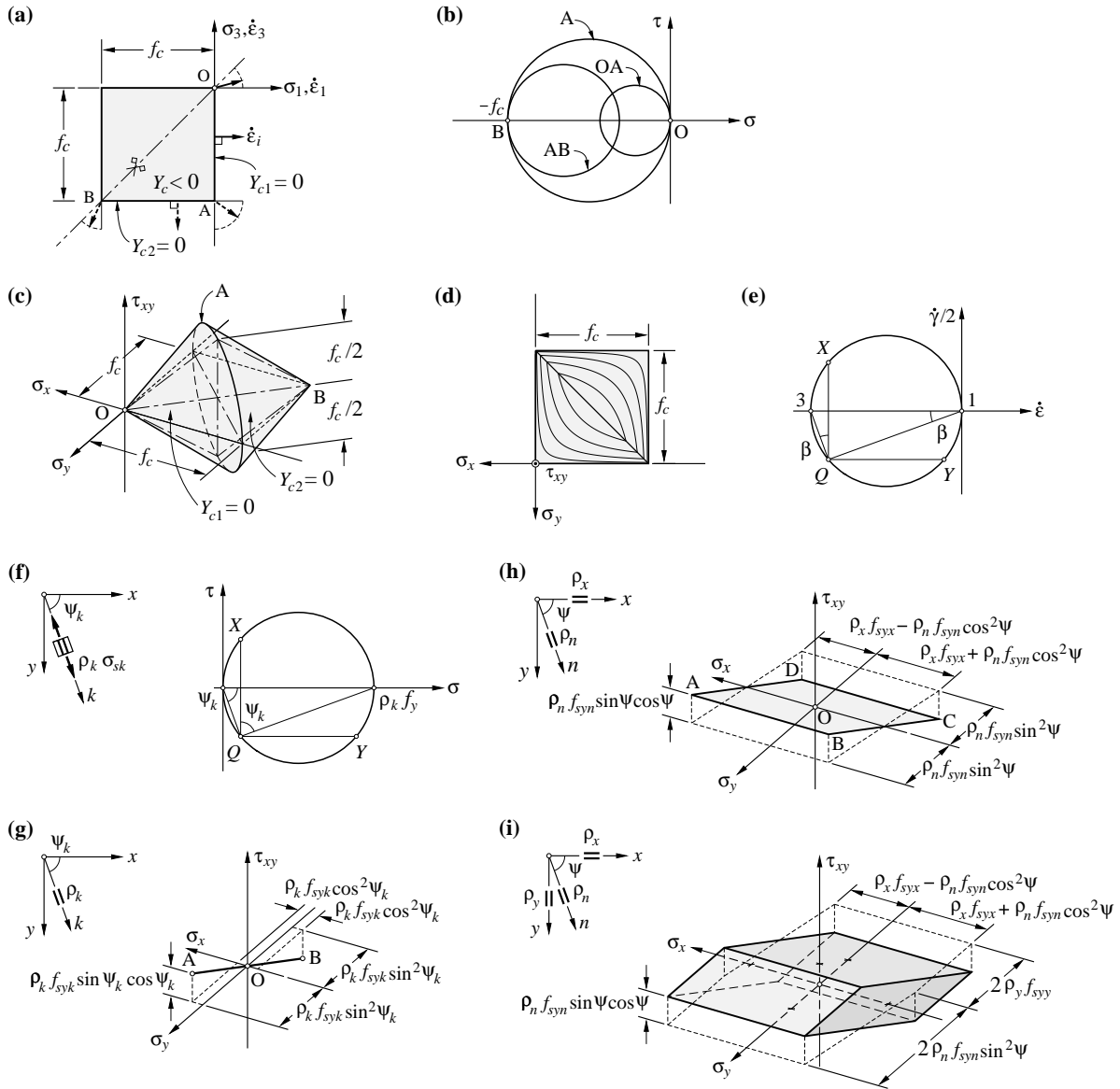
### Fließbedingung der Bewehrung

Unter Voraussetzung einer unter einachsiger Zug- und Druckbeanspruchung gleichen Fließgrenze des Stahls einer Bewehrungslage in Richtung  $k$ ,  $f_{syk} > 0$ , resultieren im Hauptspannungsraum die Fließbedingungen

$$Y_{s1} = \sigma_k - \rho_k f_{syk} = 0 \quad \text{und} \quad Y_{s2} = -\sigma_k - \rho_k f_{syk} = 0 \quad (5.18)$$

Mit Hilfe des in Bild 5.3(f) dargestellten Mohr'schen Spannungskreises lassen sich die Fließbedingungen (5.18) mit orthogonalen Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  formulieren, wobei die Bewehrungsrichtung  $k$  mit der  $x$ -Richtung den Winkel  $\psi_k$  (positiv im Uhrzeigersinn;  $0 \leq \psi_k < \pi$ ) einschliesst (Bild 5.3(f)). Aus Gleichgewichtsgründen liegen die Bildpunkte aller möglichen Spannungszustände der Bewehrungslage in Bild 5.3(g) auf einer Geraden durch AB. Die Fließbedingungen (5.18)<sub>1</sub> bzw. (5.18)<sub>2</sub> entsprechen dabei den Bildpunkten A bzw. B, mithin entspricht die Strecke AB dem aplastischen Bereich. Mit dem Spannungszustand an der Fließgrenze A verträgliche Verzerrungsinkrementenvektoren zeigen von A aus in den unendlichen Halbraum, der B nicht enthält und dessen Begrenzung die Ebene durch A mit der Flächennormalen AB ist; in eine andere Richtung weisende Verzerrungsinkrementenvektoren sind dem Spannungszustand an der Fließgrenze B verträglich. Weiter ist zu bemerken, dass für alle senkrecht zur Geraden durch AB verlaufenden Verzerrungsinkrementenvektoren die spezifische inkrementelle Dissipationsenergie verschwindet.

Die Fließflächen und die entsprechen Fließbedingungen für mehrere Bewehrungslagen lassen sich durch geometrische Linearkombination (siehe Kap. 2.6.5) ermitteln. Bild 5.3(h) zeigt die Fließbedingung zweier schiefwinklig zueinander verlaufender Bewehrungslagen. Aus Gleichgewichtsgründen liegen dabei alle Spannungszustände in der Ebene  $\tau_{\xi\eta} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot \psi = 0$ . Die Fließbedingung stellt ein in dieser Ebene liegendes Parallelogramm mit Flächenschwerpunkt im Ursprung O dar. Für senkrecht zur Ebene ABCD verlaufende Verzerrungsinkrementenvektoren verschwindet die spezifische inkrementelle Dissipationsenergie. Bei einer orthogonalen Bewehrung geht die Fließbedingung in ein in der Ebene  $\tau_{xy} = 0$  liegendes Rechteck über. Bei drei Bewehrungslagen resultiert analog eine parallelepipedförmige Fließfläche; Bild 5.3(i) zeigt die Fließfläche bei zwei orthogonalen und einer dritten schiefwinkligen Bewehrungslage. Anhand Bild 5.3(g-i) ist ferner ersichtlich, dass nur drei und mehr Bewehrungslagen in der Lage sind, beliebige Beanspruchungen  $[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$  allein, d. h. ohne Mitwirken des Betons, zu übernehmen.



**Bild 5.3** – Fließbedingungen: (a) und (b) Fließgrenze des Betons in der Hauptspannungsebene und zugehörige Mohr'sche Spannungskreise; (c) und (d) Axonometrie bzw. Grundriss der Fließfläche des Betons im  $\sigma_x$ - $\sigma_y$ - $\tau_{xy}$ -Raum; (e) Mohr'scher Kreis der Verzerrungsincremente; (f) Mohr'scher Spannungskreis einer Bewehrungslage; (g) bis (i) Fließgrenze von einer, zwei ( $\psi_x=0, \psi_n=\psi$ ) bzw. drei ( $\psi_x=0, \psi_n=\psi, \psi_y=\pi/2$ ) Bewehrungslagen.

### Fließbedingungen bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen

Die Fließfläche des Betons mit zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen im ebenen Spannungszustand resultiert durch Linearkombination der Fließbedingung der Bewehrung und derjenigen des Betons. Der Einfachheit halber wird die  $x$ -Richtung gleich einer Bewehrungsrichtung ( $\psi_x=0$ ) gewählt; die zweite Bewehrungsrichtung  $n$  schliesse mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\psi_n=\psi$  ein (Bild 5.4(a)). Bild 5.4(c–e) zeigt die resultierende Fließfläche, welche sich aus sieben Abschnitten (Fließregimen) zusammensetzt. Bild 5.5 zeigt die Verhältnisse für den Fall von zwei orthogonalen Bewehrungslagen.

Beschreibt man die Fließgrenze einer beliebigen Bewehrungslage (Punkte A und B in Bild 5.3(g)) durch den Vektor



$$a_i = \pm \rho_k f_{syk} t_i(-\psi_k) \quad [0 \leq \psi_k < \pi] \quad (5.19)$$

so beschreibt dieser Vektor beim Durchlaufen aller möglichen Bewehrungsrichtungen zwei elliptische Kegelflächen mit der Spitze in O; Bild 5.4(c) zeigt die Verhältnisse bei positivem Vorzeichen in (5.19). Die beiden Kegelflächen sind den Betonfliessflächen ähnlich, mithin ist der Vektor  $a_i$  stets parallel zu einer Erzeugenden der elliptischen Kegelflächen der Betonfliessbedingung. Daraus folgt, dass die Betonfliessfläche bei der geometrischen Linearkombination mit beliebigen Bewehrungslagen rein translatorisch verschoben wird und nicht in Teilstücke zerfällt [114].

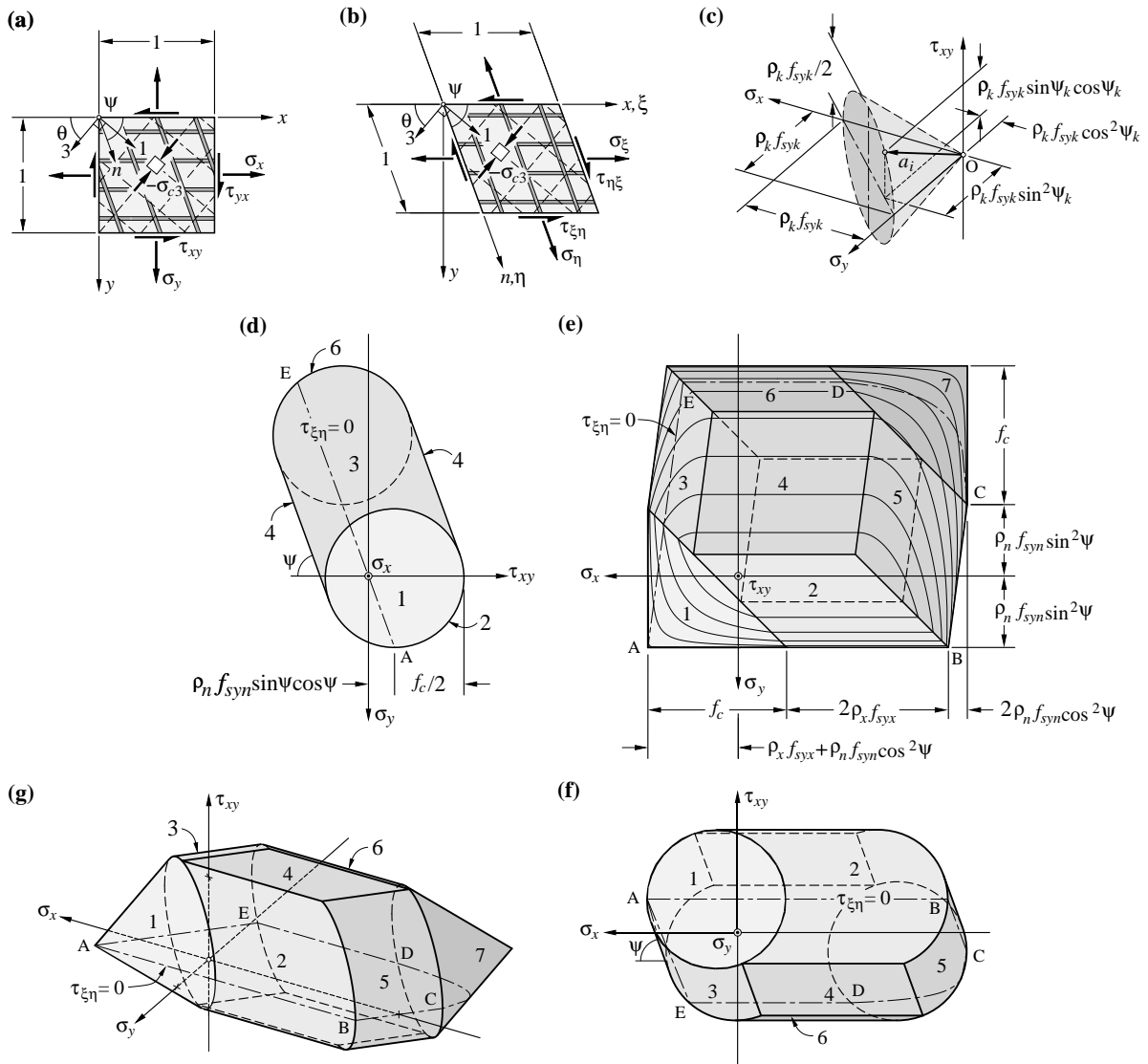
Die zu den sieben Fließregimen gehörenden Fließbedingungen lassen sich rein geometrisch bestimmen; es resultiert

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \left( \tau_{xy} - \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \right)^2 - \underbrace{\left( \rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi - \sigma_x \right)}_{\geq 0} \underbrace{\left( \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - \sigma_y \right)}_{\geq 0} = 0 \\
 Y_2 &= \left( \tau_{xy} - \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \right)^2 - \left( \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - \sigma_y \right) \left( f_c - \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi + \sigma_y \right) = 0 \\
 Y_3 &= \left[ \frac{\tau_{xy}}{\sin^2 \psi} - \cot \psi \left( \sigma_x + \sigma_y + f_c - \rho_x f_{syx} \right) \right]^2 - \left[ \rho_x f_{syx} - \sigma_x + \cot^2 \psi \left( f_c + \sigma_y \right) \right] \cdot \dots \\
 &\quad \cdot \left( f_c - \rho_x f_{syx} + \sigma_x - \sigma_y \cot^2 \psi \right) = 0 \\
 Y_4 &= \left[ \tau_{xy} \sin \psi - \cos \psi \left( \sigma_y + f_c / 2 \right) \right]^2 - \left( f_c / 2 \right)^2 = 0 \\
 Y_5 &= \left[ \frac{\tau_{xy}}{\sin^2 \psi} - \cot \psi \left( \sigma_x + \sigma_y + f_c + \rho_x f_{syx} \right) \right]^2 + \left[ \rho_x f_{syx} + \sigma_x - \cot^2 \psi \left( f_c + \sigma_y \right) \right] \cdot \dots \\
 &\quad \cdot \left( f_c + \rho_x f_{syx} + \sigma_x - \sigma_y \cot^2 \psi \right) = 0 \\
 Y_6 &= \left( \tau_{xy} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \right)^2 + \left( \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi + \sigma_y \right) \left( f_c + \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - \sigma_y \right) = 0 \\
 Y_7 &= \left( \tau_{xy} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \right)^2 - \underbrace{\left( \rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi + f_c + \sigma_x \right)}_{\geq 0} \cdot \dots \\
 &\quad \cdot \underbrace{\left( \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi + f_c + \sigma_y \right)}_{\geq 0} = 0
 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Bezeichnungen der Fließflächen können Bild 5.4(d–f) entnommen werden. Die geometrische Beschreibung der einzelnen Flächenabschnitte der Fließfläche mit Hilfe der Hauptachsen und der jeweiligen Normalform der Flächengleichung kann dem Anhang C entnommen werden. Spezielle Verhältnisse ergeben sich für  $\tau_{\xi\eta} = \tau_{xy} - \sigma_y \cot \psi = 0$ , also entlang der Kurve ABCDE in Bild 5.4(d–g) (resp. Kurve ABCD in Bild 5.5(b–e)). In diesem Fall erfolgt gemäss (5.7) die Beanspruchung nur in Richtung der beiden Bewehrungslagen (Bild 5.1(g)). Mithin können die beiden Richtungen unabhängig voneinander behandelt werden; entlang ABC gilt  $\theta = 0$ , entlang AED  $\theta = \pi - \psi$ .

Im Fließregime 1 fließen beide Bewehrungslagen auf Zug,  $\sigma_{sx} = f_{syx}$  und  $\sigma_{sn} = f_{syn}$ , während die Betonhauptspannung  $\sigma_{c1}$  verschwindet. Für die Betonhauptdruckspannung  $\sigma_{c3}$  und den Winkel  $\theta$  folgen damit aus (5.4)

$$\begin{aligned}
 -f_c \leq \sigma_{c3} = \sigma_x + \sigma_y - \rho_y f_{syy} - \rho_n f_{syn} \leq 0 \\
 \cot \theta = \frac{\rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi - \sigma_x}{\tau_{xy} - \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi} = \frac{\tau_{xy} - \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi}{\rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - \sigma_y} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$



**Bild 5.4** – Fließregime bei zwei schiefen Bewehrungslagen: (a) und (b) Bezeichnungen; (c) zur Geometrie der Fließgrenze einer Bewehrungslage; (d) Seitenansicht; (e) Grundriss; (f) Ansicht; (g) orthogonale Axonometrie.

Im Fließregime 2 fließt die Bewehrungslage in  $n$ -Richtung auf Zug,  $\sigma_{sn} = f_{syn}$ , und der Beton erreicht die effektive Festigkeit,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , während  $\sigma_{c1} = 0$  ist. Aus (5.4) folgen für die äquivalente Stahlspannung der Bewehrungslage in  $x$ -Richtung und den Winkel  $\theta$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho_x \sigma_{syx} &= \sigma_x + \sigma_y + f_c - \rho_n f_{syn} \\ \cot \theta &= \frac{\sigma_y + f_c - \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi}{\tau_{xy} - \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi} = \frac{\tau_{xy} - \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi}{\rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - \sigma_y} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Im Fließregime 3 fließt die Bewehrungslage in  $x$ -Richtung auf Zug,  $\sigma_{sx} = f_{syx}$ , und der Beton erreicht die effektive Festigkeit,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , während  $\sigma_{c1} = 0$  ist. Aus (5.4) folgen für die äquivalente Stahlspannung der Bewehrungslage in  $n$ -Richtung und den Winkel  $\theta$  die Beziehungen

$$\rho_n f_{syn} = \sigma_x + \sigma_y + f_c - \rho_x f_{syx} \quad (5.23)$$

$$\cot \theta = \frac{\sin^2 \psi (\rho_x f_{syx} - \sigma_x) + \cos^2 \psi (\sigma_y + f_c)}{\tau_{xy} - \sin \psi \cos \psi (\sigma_x + \sigma_y + f_c - \rho_x f_{syx})} = \frac{\tau_{xy} - \sin \psi \cos \psi (\sigma_x + \sigma_y + f_c - \rho_x f_{syx})}{\sin^2 \psi (\sigma_x + f_c - \rho_x f_{syx}) - \sigma_y \cos^2 \psi}$$

Im Fließregime 4 erreicht der Beton die effektive Festigkeit,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , während  $\sigma_{c1} = 0$  ist. Aus (5.4) folgen für den Winkel  $\theta$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} & \text{für} & \quad \tau_{xy} \sin \psi - \cos \psi (\sigma_y + f_c / 2) = f_c / 2 & \text{bzw.} & \quad \tau_{\xi\eta} > 0 \\ \theta &= \pi - \frac{\psi}{2} & \text{für} & \quad \tau_{xy} \sin \psi - \cos \psi (\sigma_y + f_c / 2) = -f_c / 2 & \text{bzw.} & \quad \tau_{\xi\eta} < 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

und für die äquivalenten Stahlspannungen der Bewehrungslagen in  $x$ - und  $n$ -Richtung die Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho_x f_{syx} &= \sigma_x + f_c \sin^2 \left( \frac{\psi}{2} \right) - \cot^2 \psi \left[ \sigma_y + f_c \cos^2 \left( \frac{\psi}{2} \right) \right] \\ \rho_n f_{syn} &= \frac{\sigma_y + f_c \cos^2 \left( \frac{\psi}{2} \right)}{\sin^2 \psi} \end{aligned} \quad (5.25)$$

für  $\tau_{\xi\eta} > 0$  bzw.

$$\begin{aligned} \rho_x f_{syx} &= \sigma_x + f_c \cos^2 \left( \frac{\psi}{2} \right) - \cot^2 \psi \left[ \sigma_y + f_c \sin^2 \left( \frac{\psi}{2} \right) \right] \\ \rho_n f_{syn} &= \frac{\sigma_y + f_c \sin^2 \left( \frac{\psi}{2} \right)}{\sin^2 \psi} \end{aligned} \quad (5.26)$$

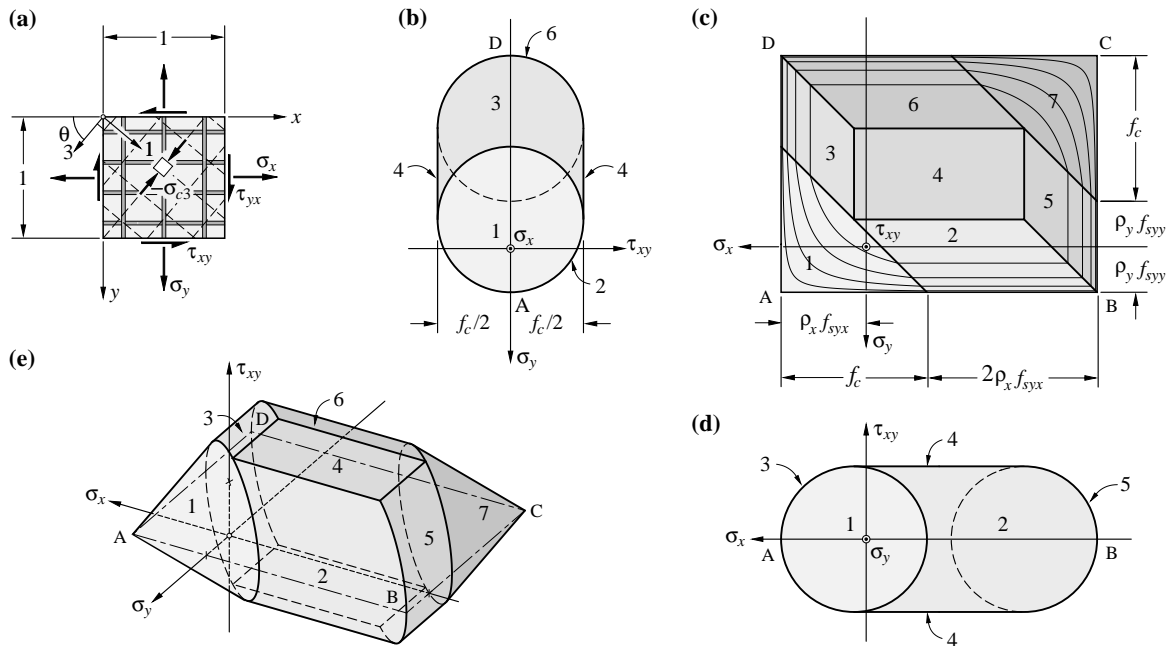
für  $\tau_{\xi\eta} < 0$ . Die durch den Winkel  $\theta$  beschriebene Betonhauptdruckrichtung 3 bildet gemäss (5.24) jeweils die Winkelhalbierende der beiden Bewehrungsrichtungen.

Im Fließregime 5 fließt die Bewehrungslage in  $x$ -Richtung auf Druck,  $\sigma_{sx} = -f_{syx}$ , und der Beton erreicht die effektive Festigkeit,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , während  $\sigma_{c1} = 0$  ist. Aus (5.4) folgen für die äquivalente Stahlspannung der Bewehrungslage in  $n$ -Richtung und den Winkel  $\theta$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho_n f_{syn} &= \sigma_x + \sigma_y + f_c + \rho_x f_{syx} \\ \cot \theta &= \frac{-\sin^2 \psi (\rho_x f_{syx} + \sigma_x) + \cos^2 \psi (\sigma_y + f_c)}{\tau_{xy} - \sin \psi \cos \psi (\sigma_x + \sigma_y + f_c + \rho_x f_{syx})} = \dots \\ &\dots \frac{\tau_{xy} - \sin \psi \cos \psi (\sigma_x + \sigma_y + f_c - \rho_x f_{syx})}{\sin^2 \psi (\sigma_x + f_c + \rho_x f_{syx}) - \sigma_y \cos^2 \psi} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Im Fließregime 6 fließt die Bewehrungslage in  $n$ -Richtung auf Druck,  $\sigma_{sn} = -f_{syn}$ , und der Beton erreicht die effektive Festigkeit,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , während  $\sigma_{c1} = 0$  ist. Aus (5.4) folgen für die äquivalente Stahlspannung der Bewehrungslage in  $x$ -Richtung und den Winkel  $\theta$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho_x \sigma_{syx} &= \sigma_x + \sigma_y + f_c + \rho_n f_{syn} \\ \cot \theta &= \frac{\sigma_y + f_c + \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi}{\tau_{xy} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi} = \frac{\tau_{xy} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi}{-\rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - \sigma_y} \end{aligned} \quad (5.28)$$



**Bild 5.5** – Fließregime bei zwei orthogonalen Bewehrungslagen: (a) Bezeichnungen; (b) Seitenansicht; (c) Grundriss; (d) Ansicht; (e) orthogonale Axonometrie.

Im Fließregime 7 fließen beide Bewehrungslagen auf Druck,  $\sigma_{sx} = -f_{syx}$  und  $\sigma_{sn} = -f_{syn}$ , während der Beton die effektive Festigkeit erreicht  $\sigma_{c3} = -f_c$ . Aus (5.4) folgen für die Betonhauptspannung  $\sigma_{c1}$  und den Winkel  $\theta$  die Beziehungen

$$-f_c \leq \sigma_{c1} = \sigma_x + \sigma_y + f_c + \rho_n f_{syn} + \rho_x f_{syx} \leq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\sigma_y + f_c + \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi}{\tau_{xy} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi} = \frac{\tau_{xy} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi}{\sigma_x + f_c + \rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi} \quad (5.29)$$

Die dem Spannungszustand der einzelnen Fließregime verträglichen Verzerrungsinkremente lassen sich mit dem Fließgesetz (2.96) bestimmen. Der Winkel  $\beta$ , welcher die zum kleineren Hauptverzerrungsinkrement  $\dot{\epsilon}_3$  gehörende Hauptrichtung des Tensors der Verzerrungsinkremente beschreibt, beträgt gemäss (5.12)

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{arccot} \left( \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} + \sqrt{\left( \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} \right)^2 + 1} \right) & \text{für } \dot{\gamma}_{xy} \geq 0 \\ \operatorname{arccot} \left( \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} + \sqrt{\left( \frac{\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}} \right)^2 + 1} \right) + \frac{\pi}{2} & \text{für } \dot{\gamma}_{xy} \leq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Da die um den Faktor  $\sqrt{2}$  in  $\pm \tau_{xy}$ -Richtung gestreckte Fließfläche in Bild 5.4 bezüglich der Achse  $\sqrt{2} \tau_{xy} = \sigma_x - \sigma_y = 0$  keine Rotationsrotationssymmetrie besitzt, ist die Fließfläche anisotrop. Die Hauptrichtungen eines Spannungszustands an der Fließgrenze sind somit im Allgemeinen verschieden von denjenigen des Tensors der verträglichen Verzerrungsinkremente. Mit dem Fließgesetz (2.96) und (5.30) lässt sich allerdings zeigen, dass für alle sieben Fließregime  $\beta = \theta$  gilt, d. h. die Hauptachsen des Tensors der Verzerrungsinkremente und jene des Betonspannungstensors sind koxial [114].

Für den Spezialfall einer isotropen Bewehrung, d. h.  $\rho_x f_{syx} = \rho_y f_{syy}$ , gehen die Fließbedingungen auf Nielsen [120] zurück. In einer späteren Arbeit behandelte er orthogonale und schiefe Bewehrungen und diskutierte die entsprechenden kinematischen Beziehungen [123]. Marti und Thürlimann [105] ermittelten die Fließbedingungen bei einer orthogonalen Bewehrung für den Fall, dass der Beton der modifizierten Fließbedingung von Coulomb mit einer von null verschiedenen Betonzugfestigkeit genügt. Müller [114] erarbeitete die Fließbedingung bei einer orthogonalen Bewehrung und diskutierte die korrespondierenden Verzerrungszustände. Mit Hilfe der geometrischen Linearkombination der Fließbedingungen des Betons und der Bewehrung ermittelte und diskutierte er ausserdem qualitativ die Fließflächen für zwei schiefe Bewehrungslagen sowie für eine von der modifizierten Fließbedingung von Coulomb abweichende Fließbedingung des Betons, welche die Erhöhung der Festigkeit bei einer zweiachsigen Druckbeanspruchung (siehe Kap. 3.3.3) berücksichtigt. Maier [86] konzipierte eine alternative Fließbedingung für den Beton zur Berücksichtigung der Festigkeit bei einer zweiachsigen Druckbeanspruchung, mit welcher er die Fließbedingung bei einer orthogonalen Bewehrung ermittelte.

### 5.2.3 Bemessung

Der Bemessung wird in der Regel das Fließregime 1 zugrunde gelegt, bei welchem alle Bewehrungslagen auf Zug fließen und der einachsig auf Druck beanspruchte Beton ( $\sigma_{c3} \leq \sigma_{c1} = \sigma_{c2} = 0$ ) die effektive Druckfestigkeit nicht erreicht. Das Versagen wird folglich durch plastische Verformungen der Bewehrungslagen angekündigt. Für einen Spannungszustand an der Fließgrenze des Fließregimes 1 folgen aus (5.4) mit  $\sigma_{c1} = 0$  und  $\sigma_{sk} = f_{syk}$  und Berücksichtigung von (5.2) und (5.3) die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_i = \sigma_{c3} \cdot t_i(\theta) + \sum_{k=1}^m \rho_k f_{syk} \cdot t_i(-\psi_k) \quad (5.31)$$

wobei die äquivalenten Beton- und Stahlspannungen den Restriktionen

$$-f_c \leq \sigma_{c3} \leq 0 \quad \text{und} \quad \rho_k f_{syk} \geq 0 \quad (5.32)$$

genügen müssen. Die Bewehrungsrichtungen werden in der Regel aufgrund konstruktiver Gesichtspunkte festgelegt und in der Folge als gegeben betrachtet.

Für eine beliebige gegebene Beanspruchung  $\sigma_i$  enthalten die drei Gleichgewichtsbedingungen (5.31)  $(m+2)$  Unbekannte, nämlich die  $m$  äquivalenten Fließspannungen der Bewehrungslagen,  $\rho_k f_{syk}$ , die Betonhauptspannung  $\sigma_{c3}$  und den Winkel  $\theta$ . Das System ist folglich  $(m-1)$ -fach statisch unbestimmt. Infolge der Bedingungen (5.32) sind allerdings allgemein mindestens zwei Bewehrungslagen mit unterschiedlichen Richtungen notwendig, um beliebige Beanspruchungen  $\sigma_i$  aufzunehmen. Keine Bewehrung ist erforderlich, falls  $\sigma_1 \leq 0$  ist, woraus mit (2.24) die Bedingung

$$\sigma_x \sigma_y \geq \tau_{xy}^2 \quad (5.33)$$

resultiert. Bei nur einer Bewehrungslage, welche in  $x$ -Richtung verläuft, resultieren aus (5.31)

$$\sigma_{c3} = \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_y}, \quad \rho_x f_{yky} = \sigma_x - \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_y} \quad \text{und} \quad \tan \theta = \frac{-\sigma_y}{\tau_{xy}} \quad (5.34)$$

Aus den beiden Restriktionen (5.32) folgen damit die Bedingungen

$$\sigma_y < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_x \sigma_y < \tau_{xy}^2 \quad \text{oder} \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_x > 0 \quad (5.35)$$

Der nur mit einer in  $x$ -Richtung verlaufenden Bewehrung versehene Beton überträgt demgemäss nur Beanspruchungen, die einer der Bedingungen (5.35) genügen. Bei nur einer in  $n$ -Richtung verlaufenden Bewehrung lassen sich mit (5.35) unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehungen (2.23)

entsprechende Bedingungen formulieren; (5.35)<sub>2</sub> bleibt dabei unverändert, denn damit werden Fälle mit  $\sigma_1 \leq 0$  ausgeschlossen.

### Bemessung für zwei schiefwinklige Bewehrungslagen

Zur Formulierung der Bemessungsbeziehungen für zwei schiefe Bewehrungslagen ist es zweckmässig statt der orthogonalen Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  die schiefen Spannungskomponenten  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\eta$  und  $\tau_{\xi\eta}$  zu verwenden. Mit  $\sigma_{sx} = f_{syx}$  und  $\sigma_{sn} = f_{syn}$  liefert (5.7)

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \sigma_{c3} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)^2 + \rho_x f_{syx} \sin \psi \\ \sigma_\eta &= \sigma_{c3} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \psi} + \rho_n f_{syn} \sin \psi \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = -\sigma_{c3} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)\end{aligned}\quad (5.36)$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\rho_x f_{syx} &= \frac{1}{\sin \psi} \left[ \sigma_\xi + \tau_{\xi\eta} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta) \right] \\ \rho_n f_{syn} &= \frac{1}{\sin \psi} \left[ \sigma_\eta + \tau_{\xi\eta} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)^{-1} \right] \\ \sigma_{c3} &= -\tau_{\xi\eta} \frac{\sin \psi}{\sin^2 \theta} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)^{-1} = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{\sin \psi} + 2\tau_{\xi\eta} \cot \psi - \rho_x f_{syx} - \rho_n f_{syn}\end{aligned}\quad (5.37)$$

Aus (5.36) und  $\sin \psi > 0$  [ $0 < \psi < \pi$ ] folgt, dass bei negativem  $\sigma_{c3}$  das Vorzeichen von  $\tau_{\xi\eta}$  mit jenem von  $(\cos \psi + \sin \psi \cot \theta)$  übereinstimmt. Die zweiten Summanden rechterhand in (5.37)<sub>1</sub> und (5.37)<sub>2</sub> können deshalb nicht negativ sein. Die Bemessungsbeziehungen lauten damit allgemein [78, 146]

$$\rho_x f_{syx} \geq \frac{1}{\sin \psi} \left( \sigma_\xi + k |\tau_{\xi\eta}| \right) \quad \text{und} \quad \rho_n f_{syn} \geq \frac{1}{\sin \psi} \left( \sigma_\eta + k^{-1} |\tau_{\xi\eta}| \right) \quad (5.38)$$

mit

$$k = |\cos \psi + \sin \psi \cot \theta| \quad (5.39)$$

Der positive Koeffizient  $k > 0$  und damit die Druckfeldrichtung  $\theta$  können unter Beachtung der Restriktion (5.32)<sub>2</sub> frei gewählt werden. Aus (5.37)<sub>3</sub> und der Bedingung (5.32)<sub>1</sub> resultiert unter Berücksichtigung von (5.39) die Bemessungsbeziehung für den Beton

$$\sigma_{c3} = \frac{1}{\sin \psi} \left[ 2\tau_{\xi\eta} \cos \psi - |\tau_{\xi\eta}| (k + k^{-1}) \right] \geq -f_c \quad (5.40)$$

oder, falls (5.37)<sub>3</sub> in orthogonalen Spannungskomponenten formuliert wird,

$$\sigma_{c3} = \sigma_x + \sigma_y - \rho_x f_{syx} - \rho_n f_{syn} = \sigma_1 - \rho_x f_{syx} - \rho_n f_{syn} \geq -f_c \quad (5.41)$$

Die Bedingung  $\sigma_{c3} \leq 0$  wird mit den Bemessungsbeziehungen (5.38) bereits sichergestellt.

Der Gesamtbewehrungsaufwand  $(\rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn})$  wird für  $k=1$  minimal; gemäss (5.41) tritt dann auch die geringste Betonbeanspruchung auf. Bild 5.6(e) zeigt für  $k=1$  die Betonspannung bezogen auf  $|\tau_{\xi\eta}|$ , wobei sich eine schiefwinklige Bewehrung bezüglich einer möglichst geringen Betonbeanspruchung dann als günstig erweist, wenn für  $\tau_{\xi\eta} \geq 0$  [ $0 \leq \psi \leq \pi/2$ ] und für  $\tau_{\xi\eta} \leq 0$  [ $\pi/2 \leq \psi \leq \pi$ ] ist. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass sich für zwei Zustände mit  $\tau_{\xi\eta b} = -\tau_{\xi\eta a}$ ,  $\sigma_{\xi b} = \sigma_{\xi a}$  und

$\sigma_{\eta b} = \sigma_{\eta a}$  sowie  $\psi_b = \pi - \psi_a$  [ $0 < \psi_a < \pi/2$ ;  $\pi/2 < \psi_b < \pi$ ] und  $\theta_b = \pi - \theta_a$  aus Symmetriegründen gleiche Verhältnisse ergeben. (5.38) bis (5.41) lassen sich mit Hilfe des Diagramms in Bild 5.6 (b) veranschaulichen. Die Bemessungsbeziehungen (5.38) beschränken die zulässigen Bildpunkte auf das Gebiet oberhalb der Hyperbel BAE, wobei (5.41) dieses gegen rechts durch die Gerade EB begrenzt. Führt man zusätzlich die Restriktion  $0,5 \leq k \leq 2$  ein (siehe Kap. 5.4.4), wird das Gebiet der zulässigen Bemessungspunkte auf die dunkelgrau hinterlegte Fläche CAD begrenzt. Der Koeffizient  $k$  lässt sich für jeden Punkt P mit Hilfe der in Bild 5.6(b) angeschriebenen Beziehung bestimmen. Im Punkt A, dem Scheitel der Hyperbel, ist  $k=1$ , und sowohl der Gesamtbewehrungsaufwand ( $\rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn}$ ) als auch die Betonhauptdruckspannung  $\sigma_{c3}$  werden betragsmässig minimal. Kurven konstanter Betonhauptdruckspannung  $\sigma_{c3}$  sind Geraden, welche parallel zu EB verlaufen. Bei einer orthogonalen Bewehrung entspricht die Hyperbel BAE der Schnittlinie der Fließfläche des Regimes 1 (Bild 5.5) und der Ebene  $|\tau_{xy}| = \text{const}$ .

Sind für  $k=1$  in (5.38)<sub>1</sub> und (5.38)<sub>2</sub> nicht beide Ausdrücke rechterhand positiv, so ist zur Befriedigung von (5.32)<sub>2</sub> für  $\sigma_\xi + |\tau_{\xi\eta}| < 0$  und  $\sigma_\eta + |\tau_{\xi\eta}| > 0$  bzw.  $\sigma_\eta + |\tau_{\xi\eta}| < 0$  und  $\sigma_\xi + |\tau_{\xi\eta}| > 0$  in  $x$ - bzw.  $n$ -Richtung keine Bewehrung vorzusehen. Aus  $\sigma_\xi + k|\tau_{\xi\eta}| = 0$  bzw.  $\sigma_\eta + k^{-1}|\tau_{\xi\eta}| = 0$  folgen dann die beiden Beziehungen

$$k = \frac{-\sigma_\xi}{|\tau_{\xi\eta}|} \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{-|\tau_{\xi\eta}|}{\sigma_\eta}, \quad (5.42)$$

womit für die Bewehrungslage in  $n$ - bzw.  $x$ -Richtung aus (5.38)<sub>2</sub> bzw. (5.38)<sub>1</sub> die Bemessungsbeziehungen

$$\rho_n f_{syn} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left( \sigma_\eta - \frac{\tau_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi} \right) \quad \text{bzw.} \quad \rho_x f_{syx} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left( \sigma_\xi - \frac{\tau_{\xi\eta}^2}{\sigma_\eta} \right) \quad (5.43)$$

resultieren. Bezüglich (5.42) ist zu bemerken, dass Fälle mit  $\tau_{\xi\eta} = 0$ , bei welchen der Beton spannungsfrei ist, mit (5.38) bemessen werden können. Da für  $\sigma_\xi = 0$  bzw.  $\sigma_\eta = 0$   $\sigma_\xi + |\tau_{\xi\eta}| > 0$  bzw.  $\sigma_\eta + |\tau_{\xi\eta}| > 0$  ist, gelangen die Beziehungen (5.43) nicht zu Anwendung.

Für Fälle mit  $\sigma_\xi + |\tau_{\xi\eta}| \leq 0$  und  $\sigma_\eta + |\tau_{\xi\eta}| \leq 0$  ist keine Bewehrung erforderlich; die Multiplikation von  $|\tau_{\xi\eta}| \leq -\sigma_\xi$  mit  $|\tau_{\xi\eta}| \leq -\sigma_\eta$  liefert unter Berücksichtigung von (5.5) (5.33). Für einen gegebenen Koeffizienten  $k$  folgt aus (5.39) für den die Druckfeldrichtung beschreibenden Winkel  $\theta$

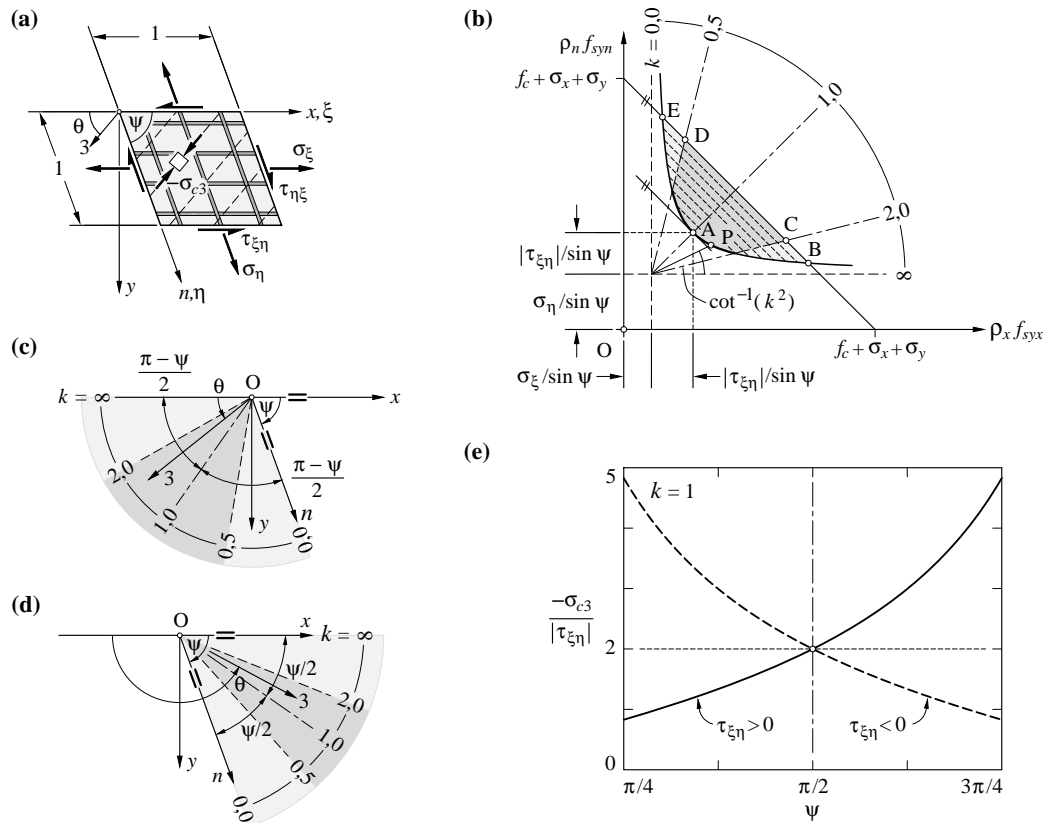
$$\cot \theta = \begin{cases} \frac{k - \cos \psi}{\sin \psi} & \text{für } \tau_{\xi\eta} \geq 0 \\ \frac{-k - \cos \psi}{\sin \psi} & \text{für } \tau_{\xi\eta} \leq 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

für  $k=1$  resultiert daraus

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi - \psi}{2} & \text{für } \tau_{\xi\eta} \geq 0 \\ \pi - \frac{\psi}{2} & \text{für } \tau_{\xi\eta} \leq 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

wobei die Betondruckfeldrichtung  $\theta$  in diesen Fällen der Winkelhalbierenden der  $x$ - und  $n$ -Richtung entspricht (Bild 5.6 (c, d)).

Die Bemessungsbeziehungen für orthogonale Bewehrungslagen ( $\psi = \pi/2$ ) gehen für  $k=1$  auf Leitz [81] zurück; den beliebig wählbaren Faktor  $k$  führte Hillerborg [49] ein. Die allgemeine Formulierung von (5.38) gelang schliesslich Kuyt [78]. Alternativ zeigte Rosenblueth [135] ein Vorgehen zur graphischen Bemessung der Bewehrung mit Hilfe Mohr'scher Spannungskreise auf. Durch Anwen-



**Bild 5.6** – Bemessung bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen: (a) Bezeichnungen; (b) Bemessungsdiagramm; (c) und (d) Druckfeldrichtung für  $\tau_{\xi\eta} > 0$  bzw.  $\tau_{\xi\eta} < 0$ ; (e) Betondruckbeanspruchung in Abhängigkeit der Bewehrungsrichtungen für  $k = 1$ .

dung der Plastizitätstheorie konnte Nielsen [123] die bekannten Bemessungsbeziehungen schliesslich mit klaren Grundlagen der Baustatik begründen. Marti et al. [102] erarbeiteten mit denselben Modellvoraussetzungen Bemessungsbeziehungen für allgemein räumlich beanspruchte Betonkörper mit drei orthogonalen Bewehrungslagen, welche die Bemessungsbeziehungen für zwei orthogonale Bewehrungslagen als Spezialfall enthalten. Bemessungsbeziehungen für alle Fließregime sowie Fälle mit nur einer Bewehrungslage erarbeitete Clark [29].

### Bemessung bei drei (und mehr) Bewehrungslagen

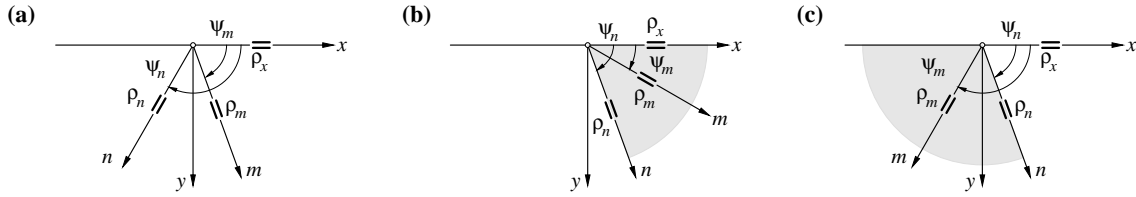
Wie bereits erwähnt, sind allgemein zwei Bewehrungslagen erforderlich, um eine beliebige Beanspruchung  $\sigma_i$  aufzunehmen. Die äquivalente Stahlflussstressspannung einer dritten, unter dem Winkel  $\psi_m$  zur  $x$ -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn;  $[0 < \psi_m < \pi]$ ) verlaufenden Bewehrungslage  $\rho_m f_{sym} \geq 0$  (Bild 5.7(a)) stellt somit eine überzählige Kraftgrösse dar und kann als solche frei gewählt werden. Die Bemessung kann daher gemäss dem vorangegangenen Abschnitt erfolgen, indem die äquivalente Stahlflussstressspannung der dritten Bewehrungslage  $\rho_m f_{sym} \geq 0$  gewählt wird, und anstelle des Tensors der äusseren Spannungen  $\sigma_i$  der Spannungstensor

$$\sigma_i' = \sigma_i - \rho_m f_{sym} t_i(-\psi_m) \quad (5.46)$$

verwendet wird. Aus (5.38) folgt, dass der Einsatz einer dritten Bewehrungslage den Gesamtbewehrungsaufwand ( $\rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} + \rho_m f_{sym}$ ) nur zu reduzieren vermag, falls der Winkel  $\psi_m$  für  $\tau_{\xi\eta} > 0$  im Intervall  $[0 < \psi_m < \psi]$  und für  $\tau_{\xi\eta} < 0$  im Intervall  $[\psi < \psi_m < \pi]$  liegt.

Unter Berücksichtigung von (5.46) lauten die Beziehungen (5.38) mit  $k = 1$  und  $z_m = \rho_m f_{sym}$





**Bild 5.7** – Bemessung bei drei Bewehrungslagen: (a) Bezeichnungen; (b) und (c) Richtung der dritten Bewehrungslage für  $\tau_{\xi\eta} > 0$  bzw. (c)  $\tau_{\xi\eta} < 0$ .

$$\rho_x f_{syx} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left[ \sigma'_\xi(z_m) + |\tau'_{\xi\eta}(z_m)| \right] \quad \text{und} \quad \rho_n f_{syn} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left[ \sigma'_\eta(z_m) + |\tau'_{\xi\eta}(z_m)| \right] \quad (5.47)$$

Da  $\sigma'_\xi(z_m)$ ,  $\sigma'_\eta(z_m)$  und  $\tau'_{\xi\eta}(z_m)$  lineare Funktionen in  $z_m$  sind, wird der Bewehrungsaufwand beim Vorzeichenwechsel von  $\tau'_{\xi\eta}(z_m)$ , also bei  $\tau'_{\xi\eta}(z_m)=0$ , minimal. Gemäss (5.40) ist der Beton dann spannungsfrei, und die Beanspruchung wird ausschliesslich von der Bewehrung abgetragen. Mit  $\sigma_{c3}=0$  liefert (5.31) die Beziehungen für die optimale Bemessung

$$\begin{aligned} \rho_x f_{syx} &\geq \sigma_x + \sigma_y \cot\psi_n \cot\psi_m - \tau_{xy} (\cot\psi_n + \cot\psi_m) \\ \rho_n f_{sym} &\geq \frac{\tau_{xy} - \sigma_y \cot\psi_m}{\sin^2\psi_n (\cot\psi_n - \cot\psi_m)} \\ \rho_m f_{sym} &\geq \frac{\tau_{xy} - \sigma_y \cot\psi_n}{\sin^2\psi_m (\cot\psi_m - \cot\psi_n)} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Infolge der Restriktionen (5.32)<sub>2</sub> beschränkt sich eine Bemessung gemäss (5.48) mit der Festlegung  $\psi_m < \psi_n$  und somit  $(\cot\psi_m - \cot\psi_n) > 0$  auf Beanspruchungen, welche

$$\begin{aligned} \sigma_y \cot\psi_n &\leq \tau_{xy} \leq \sigma_y \cot\psi_m \\ \sigma_x &\geq \tau_{xy} (\cot\psi_n + \cot\psi_m) - \sigma_y \cot\psi_n \cot\psi_m \end{aligned} \quad (5.49)$$

genügen. Bei anderen Beanspruchungen liefert die optimale Bemessung der Bewehrung in zwei der drei vorgegebenen Richtungen gemäss dem vorangegangenen Abschnitt einen geringeren Bewehrungsaufwand.

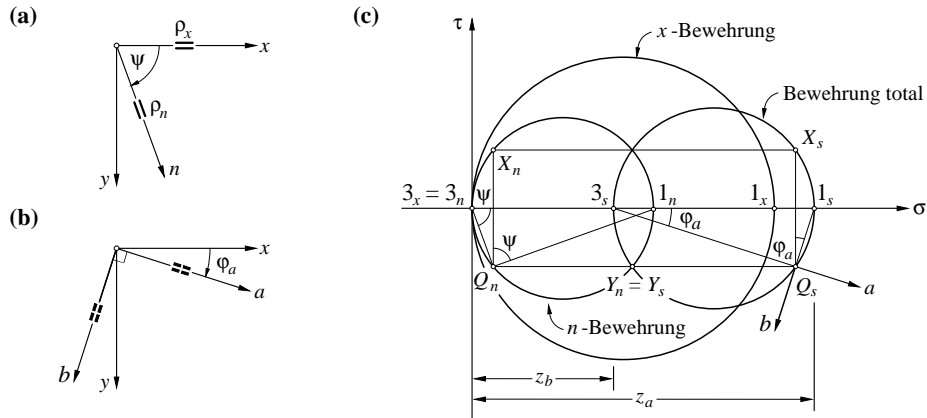
### 5.2.4 Äquivalente orthogonale Bewehrung

Bei konstanten Stahlspannungen ist der Spannungszustand jeder beliebigen Bewehrung derjenigen einer fiktiven orthogonalen Bewehrung äquivalent [61, 114, 123, 167]. Mithin lässt sich eine schiefwinklige Bewehrung bei Betrachtungen des Fließregimes 1 und 7 durch eine äquivalente orthogonale Bewehrung ersetzen.

Die äquivalenten Stahlspannungen der äquivalenten orthogonalen Bewehrung  $z_a = \rho_a f_{sya}$  und  $z_b = \rho_b f_{syb}$  entsprechen den Hauptspannungen des aus der Superposition der  $m$  äquivalenten Stahlspannungen hervorgehenden Spannungszustands; mithin resultiert mit (2.24) sowie (5.3)

$$z_{a,b} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^m \rho_k f_{syk} \pm \sqrt{\left( \sum_{k=1}^m \rho_k f_{syk} \cos 2\psi_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^m \rho_k f_{syk} \sin 2\psi_k \right)^2} \right] \quad (5.50)$$

Die Richtungen  $a$  und  $b$  der äquivalenten orthogonalen Bewehrung entsprechen den zugehörigen Hauptrichtungen, welche gemäss (2.25) bezüglich der  $x$ -Richtung durch den Winkel



**Bild 5.8** – Äquivalente orthogonale Bewehrung: (a) und (b) Bezeichnungen; (c) Mohr'sche Kreise der äquivalenten Stahlspannungen.

$$\varphi_a = \arctan \left( \frac{\sum_{k=1}^m \rho_k f_{syk} \sin 2\psi_k}{\sum_{k=1}^m \rho_k f_{syk} \cos 2\psi_k} \right) \quad (5.51)$$

(positiv im Uhrzeigersinn) bestimmt sind (Bild 5.8).

Werden die äusseren Spannungen mit (2.23) in die Richtungen der äquivalenten orthogonalen Bewehrung transformiert,

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_x \cos^2 \varphi_a + \sigma_y \sin^2 \varphi_a + 2\tau_{xy} \sin \varphi_a \cos \varphi_a \\ \sigma_b &= \sigma_x \sin^2 \varphi_a + \sigma_y \cos^2 \varphi_a - 2\tau_{xy} \sin \varphi_a \cos \varphi_a \\ \tau_{ab} &= \tau_{ba} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi_a \cos \varphi_a + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_a - \sin^2 \varphi_a) \end{aligned} \quad (5.52)$$

so resultiert aus den Fließbedingungen (5.20)<sub>1</sub> und (5.20)<sub>7</sub> mit  $\psi = \pi/2$

$$\begin{aligned} Y_1 &= \tau_{ab}^2 - (z_a - \sigma_a)(z_b - \sigma_b) = 0 \\ Y_7 &= \tau_{ab}^2 - (f_c + z_a - \sigma_a)(f_c + z_b - \sigma_b) = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

und aus den Bemessungsbeziehungen (5.38)

$$z_a \geq \sigma_a(z_a, z_b) + k' |\tau_{ab}(z_a, z_b)| \quad \text{und} \quad z_b \geq \sigma_b(z_a, z_b) + \frac{1}{k'} |\tau_{ab}(z_a, z_b)| \quad (5.54)$$

mit

$$k' = \left| \cot[\varphi_a(z_a, z_b) - \theta] \right| \quad (5.55)$$

Da die Spannungen  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  und  $\tau_{ab}$  Funktionen von  $z_a$  und  $z_b$  sind und die Betragsoperatoren eine Fallunterscheidung erfordern, ist die Bemessung anhand von (5.54) gegenüber der Verwendung von (5.38) erheblich aufwendiger. Da der Koeffizient  $k'$  von  $z_a$  und  $z_b$  abhängt, kann ferner die Druckfeldrichtung nicht durch eine entsprechende Wahl von  $k'$  auf ein bestimmtes Intervall beschränkt werden. Insofern ist der Ersatz schiefer Bewehrungen durch eine äquivalente orthogonale Bewehrung vorwiegend von theoretischem Interesse.

### 5.3 Ungerissenes Verhalten

Im ungerissenen Zustand gilt  $\sigma_{ci} \leq f_{ct}$ . Gleich wie bei der plastischen Modellierung wird die Bewehrung durch unendlich fein verteilte Einzelfasern mit verschwindend kleinem Durchmesser idealisiert, die in Faserrichtung einen einachsigen Spannungszustand aufweisen und mit dem umgebenden Beton in starrem Verbund stehen. Mithin gelten wiederum die Gleichgewichtsbedingungen (5.4). Aus Gründen der Verträglichkeit stimmen die Beton- und Stahlverzerrungen überein

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_{si} \equiv \varepsilon_i \quad (5.56)$$

Erfährt der Stahlbeton nicht überwiegend eine Druckbeanspruchung, so ist die Betonbeanspruchung im ungerissenen Zustand gering, und es kann von einem linear elastischen Verhalten des Betons und Stahls ausgegangen werden. Gemäss (2.56) ergeben sich somit die Betonspannungen in Abhängigkeit der Verzerrungen zu

$$\sigma_{ci} = c_{cij} \varepsilon_j \quad \text{mit} \quad c_{cij} = \frac{E_c}{1-\nu_c} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_c)/2 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

wobei  $E_c$  den Elastizitätsmodul und  $\nu_c$  die Querdehnzahl des Betons bezeichnen und  $c_{cij}$  für die Steifigkeitsmatrix des ungerissenen Betons steht. Unter Berücksichtigung von (2.56) und (5.11) sowie der Verträglichkeitsbedingung (5.56) beträgt die Stahlspannung einer beliebigen Bewehrungslage mit dem Elastizitätsmodul des Stahls  $E_s$

$$\sigma_{sk} = E_s \cdot \varepsilon_i \cdot t_i(-\psi_k) \quad (5.58)$$

Gemäss (5.3) beträgt die Summe der äquivalenten Stahlspannungen mit dem dyadischen Produkt  $t_{ij}(-\psi_k) = t_i(-\psi_k) \cdot t_j(-\psi_k)$

$$\sigma_{si} = c_{sij} \cdot \varepsilon_j \quad \text{mit} \quad c_{sij} = E_s \sum_{k=1}^m \rho_k t_{ij}(-\psi_k) \quad (5.59)$$

wobei  $c_{sij}$  die Bewehrungssteifigkeitsmatrix bezeichnet.

Einsetzen der Stoffbeziehungen (5.57) und (5.58) in die Gleichgewichtsbedingungen (5.4) bringt unter Berücksichtigung von (5.56)

$$\sigma_i = \underbrace{\left[ c_{cij} + c_{sij} \right]}_{c_{lij}} \cdot \varepsilon_j \quad (5.60)$$

wobei  $c_{lij}$  die Steifigkeitsmatrix des ungerissenen Stahlbetons bezeichnet. Da die Bewehrung gegenüber dem Beton im ungerissenen Zustand nur einen geringen Anteil zur Steifigkeit beiträgt, kann deren Anteil in der Regel vernachlässigt werden, d. h.  $c_{lij} \approx c_{cij}$ . Bei einer gegebenen Beanspruchung folgen die Verzerrungen aus

$$\varepsilon_i = f_{lij} \cdot \sigma_j \quad (5.61)$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix des ungerissenen Stahlbetons  $f_{lij} = c_{lij}^{-1}$ ; damit lassen sich die Beton- und Stahlspannungen mit (5.57) und (5.58) ermitteln. Wird der Beitrag der Bewehrung vernachlässigt, resultiert ein isotropes Verhalten, ansonsten ein anisotropes, bei welchem die Hauptrichtungen des Spannungs- und Verzerrungstensors nicht coaxial sind. Bei einer orthogonalen Bewehrung ist das Verhalten ferner orthogonal anisotrop oder kurz *orthotrop*; fallen die Hauptachsen der äusseren Spannungen mit den orthogonalen Bewehrungsrichtungen  $x$  und  $y$  zusammen, ergeben sich bezüglich dieser Richtung keine Schiebungen,  $\gamma_{xy} = 0$ , womit  $x$  und  $y$  orthogonale Hauptachsen der Anisotropie sind.

### Vorgespannter Stahlbeton

Werden einige Bewehrungslagen vorgespannt, so folgt aus (5.60) für die beim Spannvorgang herrschende Beanspruchung

$$\sigma_{vi} = c_{lvij} \cdot \varepsilon_{vj} + \sigma_{pvi} \quad (5.62)$$

wobei  $c_{lvij}$  nur die schlaffe Bewehrung umfasst und

$$\sigma_{pvi} = \sum_{k=1}^n \rho_{pk} \sigma_{pkv} t_i(-\Psi_k) \quad (5.63)$$

den Tensor der initialen äquivalenten Spannstahlspannungen mit der initialen Spannstahlspannung einer Bewehrungslage in Richtung  $k$   $\sigma_{pkv}$  bezeichnet. Für die Verzerrungen unmittelbar nach dem Vorspannen resultiert aus (5.63)

$$\varepsilon_{vi} = f_{lvij} (\sigma_{vj} - \sigma_{pvj}) \quad (5.64)$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix  $f_{lvij} = c_{lvij}^{-1}$ . Für eine orthogonale Bewehrung mit den geometrischen Bewehrungsgehalten in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung  $\rho_x$  und  $\rho_{px}$  bzw.  $\rho_y$  und  $\rho_{py}$  liefert (5.54) beispielsweise [100]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xv} &= \frac{(\sigma_{xv} - \rho_{px} \sigma_{pxv}) [1 + n_s \rho_y (1 - \nu_c^2)] - \nu_c (\sigma_{yv} - \rho_{py} \sigma_{pyv})}{E_c [1 + n_s (\rho_x + \rho_y) + n_s^2 \rho_x \rho_y (1 - \nu_c^2)]} \\ \varepsilon_{yv} &= \frac{(\sigma_{yv} - \rho_{py} \sigma_{pyv}) [1 + n_s \rho_x (1 - \nu_c^2)] - \nu_c (\sigma_{xv} - \rho_{px} \sigma_{pxv})}{E_c [1 + n_s (\rho_x + \rho_y) + n_s^2 \rho_x \rho_y (1 - \nu_c^2)]} \\ \gamma_{xyv} &= \frac{\tau_{xyv}}{G_c} \end{aligned} \quad (5.65)$$

mit dem Schubmodul des Betons  $G_c = E_c / [2(1 + \nu_c)]$  und der Wertigkeit  $n_s = E_s / E_c$ .

Mit (5.57) und (5.58) folgen der Betonspannungszustand und die Stahlspannungen der schlaffen Bewehrungslagen aus

$$\begin{aligned} \sigma_{cvi} &= c_{clil} f_{lvlj} (\sigma_{vj} - \sigma_{pvj}) \\ \sigma_{skv} &= E_s f_{lvij} (\sigma_{vj} - \sigma_{pvj}) t_i(\Psi_k) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Zwischen einer beliebigen in Richtung  $k$  verlaufenden vorgespannten Bewehrungslage und dem schlaff bewehrten Beton stellt sich unmittelbar nach dem Vorspannen die Dehnungsdifferenz

$$\Delta \varepsilon_{pk} = \frac{\sigma_{pkv}}{E_p} - \varepsilon_{kv} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{kv} = \varepsilon_{vi} \cdot t_i(-\Psi_k) \quad (5.67)$$

ein. In Bild 5.9(a) verschiebt sich der Bildpunkt beim Vorspannen bei einer Vorspannung mit nachträglichem Verbund entlang OB, während er sich bei einer Spannbettvorspannung entlang OAB bewegt. Nach dem Herstellen des Verbunds bleibt die Dehnungsdifferenz bei starrem Verbund (und bei Vernachlässigung der zeitabhängigen Schwind- und Kriechverzerrungen) konstant, womit sich der Bildpunkt in Bild 5.9(a) entlang der Geraden AB bewegt. In der Regel ist der zweite Summand in (5.67)<sub>1</sub> gegenüber dem ersten klein und kann vernachlässigt werden. Für den vorgespannten Stahlbeton gilt nach der Herstellung des Verbunds unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingung

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{ck} = \varepsilon_{sk} = \varepsilon_{pk} + \Delta\varepsilon_{pk} \quad (5.68)$$

Anstelle von (5.60) gilt

$$\sigma_i = \underbrace{[c_{clij} + c_{sij} + c_{pij}]}_{c_{lij}} \cdot \varepsilon_j + \sigma_{pdi} \quad \text{mit} \quad (5.69)$$

$$\sigma_{pdi} = \sum_{k=1}^n \rho_{pk} \sigma_{pkd} t_i(-\psi_k) = [\delta_{ij} + c_{pil} f_{lvlj}] \cdot \sigma_{pvj} - c_{pil} f_{lvlj} \sigma_{vj}$$

$c_{pij}$  bezeichnet dabei die Summe der Steifigkeitsmatrizen der vorgespannten Bewehrungslagen analog (5.59);  $\sigma_{pkd}$  ist die äquivalente Stahlspannung einer vorgespannten Bewehrungslage in Richtung  $k$  bei der Dekompression, also bei  $\varepsilon_i = [0, 0, 0]$ ; siehe hierzu Bild 5.9(b). Unter Berücksichtigung von (5.69) folgen aus (5.66) für die Beton- und Stahlspannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ci} &= c_{cili} f_{lvli} (\sigma_j - \sigma_{pdj}) \\ \sigma_{sk} &= E_s f_{lvkj} (\sigma_j - \sigma_{pdj}) t_i(-\psi_k) \\ \sigma_{pk} &= E_s \left[ f_{lvkj} (\sigma_j - \sigma_{pdj}) t_i(-\psi_k) - \Delta\varepsilon_{pk} \right] \end{aligned} \quad (5.70)$$

### Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens

Um die Umlagerungen der Spannungen zwischen Beton und Bewehrung sowie die Vorspannverluste zu quantifizieren, wird nachfolgend vorausgesetzt, dass der Stahlbeton bis zum Alter  $t_0$  spannungsfrei sei. Im Alter  $t = t_0$  werde der Stahlbeton vorgespannt, und das mit  $\varepsilon_{csi}(t) = [\varepsilon_{cs}(t), \varepsilon_{cs}(t), 0]$  beschriebene Schwinden setze ein. Unmittelbar nach dem Vorspannen (inkl. einer nach dem Herstellen des Verbunds aufgebracht Beanspruchung) wirkt auf den Stahlbeton die äussere Spannung  $\sigma_{0i}$ . Für  $t > t_0$  seien die äusseren Spannungen  $\sigma_i(t)$  stetig veränderlich. Gemäss (5.4) lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_i(t) = \sigma_{ci}(t) + \sigma_{si}(t) + \sigma_{pi}(t) \quad , \quad (5.71)$$

wobei  $\sigma_{pi}(t)$  die Summe der äquivalenten Spannstahlspannungen bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingungen (5.68) resultieren gemäss (5.60) und (5.69) die Stoffbeziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{si}(t) &= c_{sij} \cdot \varepsilon_j(t) & \text{und} \\ \sigma_{pi}(t) &= c_{pij} \cdot \varepsilon_j(t) + \sigma_{pdi} + \Delta\sigma_{preli}(t) \end{aligned} \quad (5.72)$$

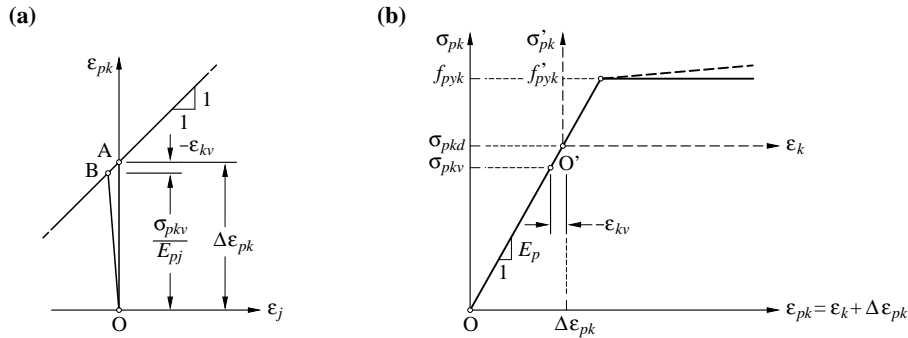
der schlaffen und vorgespannten Bewehrung.

$$\Delta\sigma_{preli}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_{pk} \Delta\sigma_{prelk}(t) t_i(-\psi_k) \quad (5.73)$$

bezeichnet dabei den Tensor der äquivalenten Spannstahl-Spannungsänderungen infolge der als bekannt vorausgesetzten Relaxation mit der entsprechenden Spannstahl-Spannungsänderung  $\Delta\sigma_{relk}(t)$  der vorgespannten Bewehrungslage in Richtung  $k$ . Wird der Beton gemäss Kapitel 3.3.6 als linear visko-elastischer alternder Werkstoff idealisiert, lautet dessen Stoffbeziehung gemäss dem Verfahren nach Trost, indem (3.34) für einen ebenen Spannungszustand formuliert wird,

$$\varepsilon_i(t) = f_{clij} E_c(t_0) \left[ J(t, t_0) \sigma_{c0j} + J_{alt}(t, t_0) \Delta\sigma_{cj}(t) \right] + \varepsilon_{csi}(t) \quad (5.74)$$

mit



**Bild 5.9** – Vorspannung: (a) Beton- und Spannstahlverzerrungen; (b) Stoffbeziehung des Spannstahls mit Berücksichtigung der Vorspannung.

$$J_{alt}(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \mu(t, t_0) \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c0}} \quad (5.75)$$

wobei die zeitunabhängige Betonnachgiebigkeitsmatrix  $f_{clij}$  mit  $E_c = E_c(t_0)$  ermittelt wird.  $\sigma_{c0i}$  bezeichnet den Betonspannungstensor im Alter  $t_0$  und lässt sich mit (5.70)<sub>1</sub> bestimmen. Durch Einsetzen von (5.72) und (5.74) in (5.71) resultiert für die Änderung der Betonspannungen

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ci}(t) = \sigma_{ci}(t) - \sigma_{c0i} = & \left[ (c_{sil} + c_{pil}) f_{clij} E_c(t_0) J_{alt}(t, t_0) + \delta_{ij} \right]^{-1} \cdot \dots \\ & \dots \left\{ \sigma_j(t) - \sigma_{pdj} - \Delta\sigma_{prelj}(t) - (c_{sjl} + c_{pjl}) \varepsilon_{csl}(t) - \dots \right. \\ & \left. \dots \left[ (c_{sjl} + c_{pjl}) f_{cllm} E_c(t_0) J(t, t_0) + \delta_{jm} \right] \sigma_{c0m} \right\} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Die Spannungsänderungen der Bewehrung lassen sich im Anschluss durch Einsetzen der aus (5.74) gewonnenen Verzerrungen  $\varepsilon_i(t)$  in (5.72) bestimmen. Anhang D enthält ein Vorgehen zur Ermittlung der Spannungsänderungen ohne die von Trost eingeführte Näherung.

## 5.4 Gerissenes Verhalten

### 5.4.1 Allgemeine Betrachtungen

Beim gerissenen Verhalten wird allgemein von parallelen ebenen Rissen mit gleichem Rissabstand  $s_r$  ausgegangen (Bild 5.10(a)). Die lokal bei den Bewehrungsstäben auf den Beton übertragenen Verbundschubspannungen werden als quer zum Stab gleichmässig verteilte Volumenkräfte idealisiert (Bild 5.10(b)). Die Richtung der Risse wird gemäss Bild 5.10(a) bezüglich der  $x$ -Achse durch den Winkel  $\theta_r$  [ $0 \leq \theta_r \leq \pi$ ] beschrieben, und  $a$  und  $b$  bezeichnen ein in Rissrichtung orientiertes Koordinatensystem.

Werden die Gleichgewichtsbedingungen (5.4) mit dem Stahl- und Betonspannungstensor am Riss (gekennzeichnet durch den Fusszeiger  $r$ ) formuliert, resultieren unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehungen (2.23) die Gleichgewichtsbeziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{car} \sin^2 \theta_r + \sigma_{cbr} \cos^2 \theta_r + 2\tau_{cabr} \sin \theta_r \cos \theta_r + \left( \sum_{k=1}^m \rho_k \sigma_{skr} \cos^2 \psi_k \right) + \sigma_{pdx} \\ \sigma_y &= \sigma_{car} \cos^2 \theta_r + \sigma_{cbr} \sin^2 \theta_r - 2\tau_{cabr} \sin \theta_r \cos \theta_r + \left( \sum_{k=1}^m \rho_k \sigma_{skr} \sin^2 \psi_k \right) + \sigma_{pdy} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_{car} - \sigma_{cbr}) \sin \theta_r \cos \theta_r + \tau_{cabr} (\cos^2 \theta_r - \sin^2 \theta_r) + \left( \sum_{k=1}^m \rho_k \sigma_{skr} \cos \psi_k \sin \psi_k \right) + \tau_{pdx} \tau_{pdy}$$

Die Vorspannung wird durch den Tensor der äquivalenten Spannstahlspannungen bei der Dekompression  $\sigma_{pdi} = [\sigma_{pdx}, \sigma_{pdy}, \tau_{pdy}]$  sowie eine Modifikation der Stoffbeziehung des Spannstahls gemäss Bild 5.9(b) berücksichtigt, indem der Ursprung von O nach O' verschoben wird. Damit wird der Spannstahl wie ein schlaffer Bewehrungsstahl mit einer um  $\sigma_{pkd}$  reduzierten Fließgrenze bzw. Zugfestigkeit sowie einer um  $\Delta \varepsilon_{pk}$  reduzierten Fließ- bzw. Bruchdehnung behandelt. Die von einer in Richtung  $k$  verlaufenden Bewehrungslage auf den Beton übertragenen Verbundschubspannungen  $\tau_{bk}$  entsprechen in Richtung  $k$  verlaufenden Volumenkräften  $q_k = \tau_{bk} 4\rho_k / \emptyset_k$  ( $\emptyset_k$  = Stabdurchmesser,  $\rho_k$  = Bewehrungsgehalt); siehe Bild 5.10(b) ( $s_k$  = Stababstand). Mithin wirken auf das Betonkontinuum infolge der Verbundschubspannungen die Volumenkräfte

$$q_a = \sum_{k=1}^m q_k \sin(\theta_r + \psi_k) \quad \text{und} \quad q_b = -\sum_{k=1}^m q_k \cos(\theta_r + \psi_k) \quad (5.78)$$

Gemäss (2.22) haben die Betonspannungen den Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial a} + \frac{\partial \tau_{cab}}{\partial b} + q_a = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{cb}}{\partial b} + \frac{\partial \tau_{cab}}{\partial a} + q_b = 0 \quad (5.79)$$

und den statischen Randbedingungen

$$\sigma_{ca}(a = \pm s_r / 2, b) = \sigma_{car} \quad \text{und} \quad \tau_{cab}(a = \pm s_r / 2, b) = \tau_{cabr} \quad (5.80)$$

zu genügen. Da von einem homogenen äusseren Spannungszustand ausgegangen wird, wirken neben den verbundbedingten Volumenlasten keine weiteren Volumenlasten auf den Beton; mithin gilt aus Symmetriegründen  $\tau_{cab}(a=0, b)=0$ .

Aufgrund der Voraussetzungen bezüglich der Rissgeometrie kann gefolgert werden, dass die Betonverzerrungen  $\varepsilon_{ca}$ ,  $\varepsilon_{cb}$  und  $\gamma_{cab}$  sowie die Rissuferverschiebungen  $w_r$  [ $w_r \geq 0$ ] und  $u_r$  unabhängig von  $b$  sind. Mithin gilt mit den Verträglichkeitsbedingungen (2.9)  $\partial \varepsilon_{ca} / \partial b = \partial^2 u_{ca} / (\partial b \partial a) = 0$ ,  $\partial \varepsilon_{cb} / \partial b = \partial^2 u_{cb} / \partial b^2 = 0$  sowie  $\partial \gamma_{cab} / \partial b = \partial^2 u_{ca} / \partial b^2 + \partial^2 u_{cb} / (\partial b \partial a) = 0$  [63]. Da die auf den Beton wirkenden Verbundschubspannungen als gleichmässig verteilte Volumenlasten idealisiert werden und das Betonverhalten als homogen und isotrop angenommen wird, verlaufen benachbarte Schnitrufer in der verformten Lage parallel zueinander. Mithin ist die Betonverschiebung in  $a$ -Richtung am Riss  $u_{ca}(a = s_r / 2, t)$  unabhängig von  $b$ , womit  $\partial u_{ca} / \partial b = 0$  verlangt wird. Für das Verschiebungsfeld des Betons ergeben sich folglich die Ansatzfunktionen [56]

$$u_{ca} = g(a) \quad \text{und} \quad u_{cb} = f(a) + \omega b \quad (5.81)$$

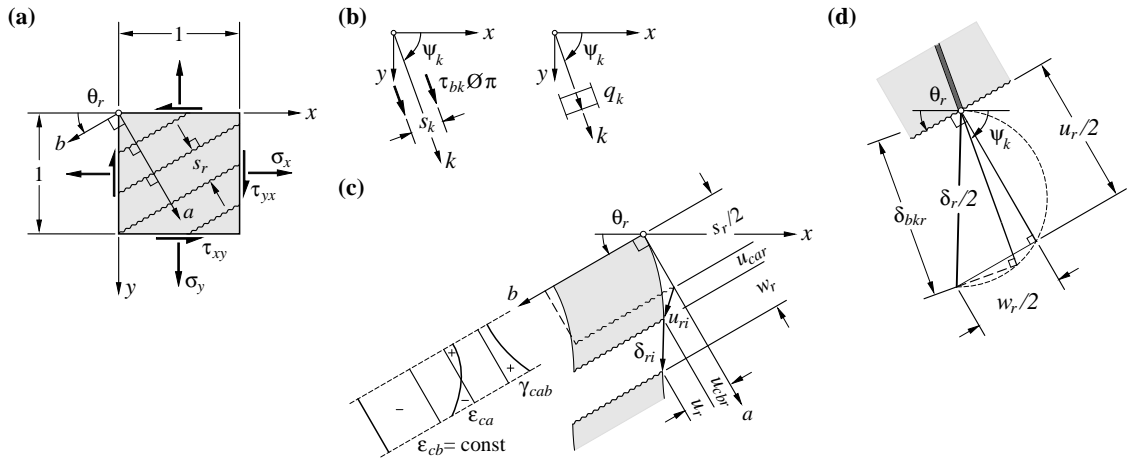
wobei aus Symmetriegründen  $g(a=0)=0$  ist. Mithin betragen die Betonverzerrungen

$$\varepsilon_{ca} = \frac{dg}{da}, \quad \varepsilon_{cb} = \omega \quad \text{und} \quad \gamma_{cab} = \frac{df}{da} \quad (5.82)$$

Bei einer beliebigen, bezüglich der  $x$ -Achse unter dem Winkel  $\psi_k$  verlaufenden Bewehrungslage gilt gemäss (3.37) zwischen dem entsprechenden Schlupf  $\delta_{bk}$  und den Dehnungen des Betons und des Stahls in Bewehrungsrichtung  $\varepsilon_{ck}$  und  $\varepsilon_{sk}$  der Zusammenhang

$$\frac{d\delta_{bk}}{dk} = \varepsilon_{sk} - \varepsilon_{ck} \quad (5.83)$$

Am Riss verlangt die Verträglichkeit gemäss Bild 5.10(d) ferner



**Bild 5.10** – Gerissenes Verhalten – Allgemeine Betrachtungen: (a) Bezeichnungen; (b) auf den Beton wirkende Verbundschubspannungen; (c) Verzerrungen des Betonkontinuums und Verschiebungen der Rissufer; (d) Schlupf am Riss.

$$\delta_{bkr} = \left[ w_r \sin(\psi_k - \theta_r) - u_r \cos(\psi_k - \theta_r) \right] / 2 \quad (5.84)$$

wobei  $\delta_{bkr}$  den Schlupf der Bewehrung am Riss bezeichnet.

Betrachtet man den gerissenen Stahlbeton vereinfachend als Kontinuum, so ergeben sich dessen Verzerrungen  $\epsilon_a, \epsilon_b$  und  $\gamma_{ab}$  aus der Summe der mittleren Betonverzerrungen und der mittleren aus den Rissuferverschiebungen resultierenden Verzerrungen, d. h.

$$\epsilon_a = \frac{2}{s_r} g \left( \frac{s_r}{2} \right) + \frac{w_r}{s_r}, \quad \epsilon_b = \omega \quad \text{und} \quad \gamma_{ab} = \frac{2}{s_r} \left[ f \left( \frac{s_r}{2} \right) - f(0) \right] + \frac{u_r}{s_r} \quad (5.85)$$

Gemäss dem vorangegangenen Abschnitt sind alle Grössen von  $b$  unabhängig, so dass lediglich die Verhältnisse entlang der  $a$ -Richtung zu betrachten sind. Für gegebene Rissrichtungen  $\theta_r$ , Rissabstände  $s_r$ , Stoffbeziehungen des als homogen und isotrop angenommenen Betons  $\sigma_{ca} = \sigma_{ca}(\epsilon_{ca}, \epsilon_{cb}, \gamma_{cab})$ ,  $\sigma_{cb} = \sigma_{cb}(\epsilon_{ca}, \epsilon_{cb}, \gamma_{cab})$ ,  $\tau_{cab} = \tau_{cab}(\epsilon_{ca}, \epsilon_{cb}, \gamma_{cab})$  und der Bewehrung  $\sigma_{sk} = \sigma_{sk}(\epsilon_{sk})$ , Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehungen  $\tau_{bk} = \tau_{bk}(\delta_{bk})$  sowie Beziehungen zwischen den Rissuferverschiebungen  $w_r$  und  $u_r$  und den über den Riss übertragenen Spannungen  $\sigma_{car}$  und  $\tau_{cabr}$  können der Spannungs- und Verzerrungszustand vollständig bestimmt werden; einen möglichen Lösungsalgorithmus enthält [63].

Grundsätzlich ist es möglich, den in [63] vorgeschlagenen Algorithmus mit Hilfe aufwendiger iterativ numerischer Berechnungsverfahren auszuführen. Das Vorgehen ist allerdings hinsichtlich der zuverlässigen Modellierung des Zusammenhangs zwischen den Rissuferverschiebungen und den über die Risse übertragenen Spannungen mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden. Zum einen liegen gemäss Kapitel 3.4.4 (noch) keine zuverlässigen, auf klaren baustatischen Grundlagen beruhende Modellvorstellungen vor, zum anderen sind die hochgradig nichtlinearen Beziehungen bezüglich der stark streuenden Parameter sehr empfindlich; insbesondere die Rissrichtung sowie der Rissabstand und die davon abhängigen Rissuferverschiebungen sind naturgemäss erheblichen Streuungen unterworfen. Darüber hinaus werden die Rissöffnung und -richtung durch schwer quantifizierbare Eigenspannungszustände wesentlich beeinflusst, und zudem entstehen mit fortschreitender Belastung Risse mit unterschiedlicher Richtung.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten werden in der Regel weitere Idealisierungen eingeführt.

#### 5.4.2 Klassisches Druckfeldmodell

Beim klassischen Druckfeldmodell, welches auf Arbeiten von Kupfer und Baumann [5, 75] sowie Mitchell und Collins [112] zurückgeht, wird von fiktiven drehbaren Rissen ( $\theta_r$  variabel) mit ver-



schwindend kleinem Rissabstand ( $s_r \rightarrow 0$ ) ausgegangen, die spannungsfrei sind ( $\sigma_{car} = 0$  und  $\tau_{cabr} = 0$ ) und sich senkrecht zu den Rissufern öffnen ( $u_r = 0$ ; zusätzlich eingeführte kinematische Bindung) [95].

Aufgrund der Voraussetzung eines verschwindend kleinen Rissabstands ist der Betonspannungszustand im Beton gleich jenem am Riss. Da die Risse ausserdem spannungsfrei sind, herrscht im Beton ein homogener einachsiger Druckspannungszustand in Richtung der Risse, d. h.  $\sigma_{cb} = \sigma_{c3} \leq 0$  und  $\sigma_{ca} = \sigma_{c1} = \tau_{cab} = 0$ . Lokale Variationen der Betonspannungen infolge eingetragener Verbundschubspannungen werden vernachlässigt. Der gerissene Beton wird folglich als in Richtung der fiktiven Risse verlaufendes Faserbündel idealisiert, welches nur Druckspannungen in Längsrichtung überträgt. Mithin lauten die Gleichgewichtsbedingungen gemäss (5.4) mit  $\sigma_{c1} = 0$

$$\sigma_i = \sigma_{c3} t_i(\theta_r) + \sum_{k=1}^m \rho_k \sigma_{sk} t_i(-\psi_k) + \sigma_{pdi} \quad (5.86)$$

wobei  $\sigma_{c3} < 0$  ist. Da die durch den Winkel  $\theta_r$  beschriebene Betondruckfeldrichtung variabel ist, liegt bei  $m$  Bewehrungslagen ein  $(m-1)$ -fach statisch unbestimmtes System vor.

Aufgrund der Voraussetzung des verschwindend kleinen Rissabstands (Betonverzerrungen:  $\varepsilon_{ca} = \gamma_{cab} = \varepsilon_{c1} = 0$  und  $\varepsilon_{cb} = \varepsilon_{c3} = \omega \leq 0$  da  $g(a) = f(a) = 0$ ; siehe (5.81) und (5.82)) und der Rissöffnung senkrecht zum Rissufer (Rissuferverschiebungsbedingte Verzerrungen:  $\varepsilon_{ra} = \varepsilon_{r1} \geq 0$  und  $\varepsilon_{rb} = \gamma_{rab} = \varepsilon_{r3} = 0$  da  $u_r = 0$ ; siehe (5.85)) resultiert ein gleichförmiger Verzerrungszustand mit Hauptverzerrungen in  $a$ - und  $b$ -Richtung,  $\varepsilon_b = \varepsilon_3 \leq 0$  und  $\varepsilon_a = \varepsilon_1 \geq 0$  (Bild 5.11(b)). Mithin sind die Hauptachsen des Verzerrungs- und Betonspannungstensors koaxial, d. h.  $\theta_r = \beta$ , womit  $\theta_r$  aus (5.12) (oder dem Mohr'schen Verzerrungskreis in Bild 5.11(c)) folgt. Die Hauptrichtungen des Tensors der äusseren Spannungen weichen in der Regel von denen des Verzerrungstensors ab, so dass sich der gerissene Stahlbeton in der Regel anisotrop verhält.

Bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen gemäss Bild 5.11(a) ist es zweckmässig den Winkel  $\theta_r$  als Funktion der Hauptdehnung des Betons,  $\varepsilon_3$ , und der Dehnungen in den beiden Bewehrungsrichtungen,  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_n$ , auszudrücken; da die drei Dehnungen nicht kollinear sind, ist der Verzerrungszustand durch diese vollständig bestimmt. Für  $\psi_n = \psi$  resultiert aus (5.8)<sub>1</sub> und (5.9) durch Elimination von  $\varepsilon_1$  eine quadratische Gleichung für den Winkel  $\theta_r$ .

$$(\cos \psi + \sin \psi \cot \theta_r)^2 = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_3}{\varepsilon_x - \varepsilon_3} \quad (5.87)$$

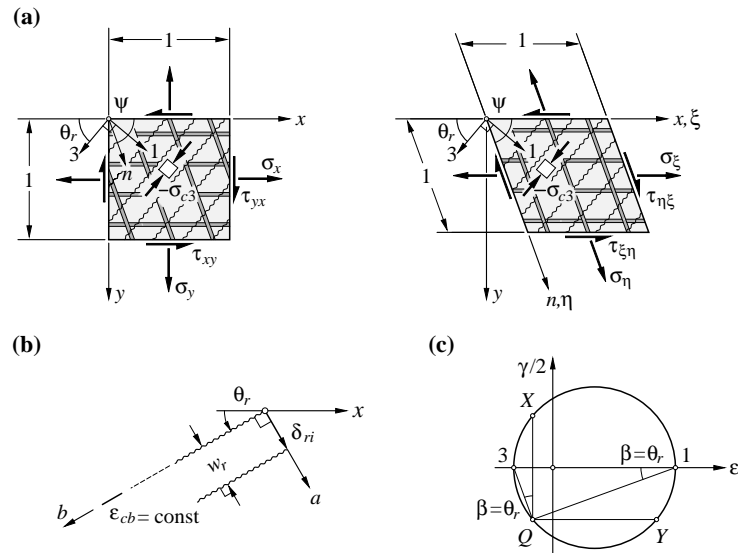
bei einer orthogonalen Bewehrung folgt daraus

$$\cot^2 \theta_r = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_3}{\varepsilon_x - \varepsilon_3} \quad (5.88)$$

Mit beliebigen Stoffbeziehungen für den Beton  $\sigma_{c3} = \sigma_{c3}(\varepsilon_3)$ , z. B. (3.3) mit  $f_c = f_c(\varepsilon_1)$  gemäss (3.55) oder (3.56), und für die Bewehrungslagen  $\sigma_{sk} = \sigma_{sk}(\varepsilon_k)$  liefert (5.86) mit Berücksichtigung von (5.10) und (5.11) die Gleichgewichtsbeziehung

$$\sigma_i = \sigma_{c3}(\varepsilon_i, \theta_r) \cdot t_i(\theta_r) + \sum_{k=1}^m \rho_k \sigma_{sk}(\varepsilon_k) \cdot t_i(-\psi_k) + \sigma_{pdi} \quad [\sigma_{c3} < 0] \quad (5.89)$$

Zusammen mit (5.12) (wobei  $\beta = \theta_r$  ist) stehen damit vier nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  und  $\theta_r$  zur Verfügung. Dieses Vorgehen entspricht einer Kombination von Kraft- und Deformationsmethode. (5.89) stellt bei bekanntem Winkel  $\theta_r$  das Gleichgewichtsgleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Verformungsgrössen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\gamma_{xy}$  dar (Deformationsmethode), während (5.12) mit  $\beta = \theta_r$  die Verträglichkeitsbedingung zur Bestimmung des Winkels  $\theta_r$  ist, welcher den Spannungszustand bestimmt und somit eine überzählige Kraftgrösse darstellt (Kraftmethode). Bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen liegt der Winkel  $\theta_r$  aufgrund der



**Bild 5.11** – Klassisches Druckfeldmodell; (a) Bezeichnungen bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen; (b) kinematische Grössen; (c) Mohr'scher Verzerrungskreis.

Nebenbedingung (5.89)<sub>2</sub> für τ<sub>ξη</sub> > 0 im Intervall [0 < θ<sub>r</sub> < π - ψ] und für τ<sub>ξη</sub> > 0 im Intervall [π - ψ < θ<sub>r</sub> < π]. Zur Berechnung gesamter Spannungs-Verzerrungscharakteristiken oder des Spannungs- und Verzerrungszustands im Bereich der maximalen äusseren Spannungen ist es zweckmässig, die Hauptdehnung ε<sub>3</sub> vorzugeben und schrittweise zu erhöhen [64]. Die unbekannte Verzerrung γ<sub>xy</sub> ist dann durch γ<sub>xy</sub> = 2(ε<sub>x</sub> - ε<sub>3</sub>)cotθ<sub>r</sub> bestimmt. An Stelle von ε<sub>3</sub> wird der Proportionalitätsfaktor der Beanspruchung κ als Unbekannte eingeführt, wobei σ<sub>i</sub> = κσ<sub>0i</sub> ist und σ<sub>0i</sub> vorgegeben wird. Einerseits wird dadurch die Konvergenz der Berechnung des nicht linearen Gleichungssystems verbessert, und andererseits ist, da die Vorzeichen von ε<sub>3</sub> und σ<sub>c3</sub> übereinstimmen, die Nebenbedingung (5.89)<sub>2</sub> zwangsläufig erfüllt.

Bei einem linear elastischen Werkstoffverhalten des Betons und der Bewehrungslagen, d. h. σ<sub>c3</sub> = E<sub>c</sub>ε<sub>3</sub> bzw. σ<sub>sk</sub> = E<sub>s</sub>ε<sub>sk</sub>, liefert (5.89)

$$\sigma_i = \underbrace{[c_{c\parallel ij}(\theta_r) + c_{sij}]}_{c_{\parallel ij}(\theta_r)} \cdot \epsilon_j + \sigma_{pdj} \tag{5.90}$$

mit der von θ<sub>r</sub> abhängigen Steifigkeitsmatrix des gerissenen Betons

$$c_{c\parallel ij}(\theta_r) = E_c \cdot t_i(\theta_r) t_j(\theta_r) \tag{5.91}$$

und der Gesamtsteifigkeitsmatrix des gerissenen Stahlbetons c<sub>∥ij</sub>(θ<sub>r</sub>). Mithin folgen die von θ<sub>r</sub> abhängigen Verzerrungen aus

$$\epsilon_i(\theta_r) = f_{\parallel ij}(\theta_r)(\sigma_j - \sigma_{pdj}) \tag{5.92}$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix des gerissenen Stahlbetons f<sub>∥ij</sub>(θ<sub>r</sub>) = [c<sub>∥ij</sub>(θ<sub>r</sub>)]<sup>-1</sup>. Einsetzen von (5.92) in (5.12) mit β = θ<sub>r</sub> liefert schliesslich eine Gleichung zur Bestimmung des Winkels θ<sub>r</sub>. Alternativ kann durch Anwendung des Satzes vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials eine Beziehung zur Bestimmung der statisch überzähligen Grösse θ<sub>r</sub> gewonnen werden, indem

$$\frac{\partial \Phi^*(\theta_r)}{\partial \theta_r} = 0 \tag{5.93}$$

mit dem komplementären Gesamtpotential

$$\Phi^*(\theta_r) = U^*(\theta_r) = f_{llj}(\sigma_j - \sigma_{pdj})(\sigma_i - \sigma_{pdi}) \quad (5.94)$$

ausgewertet wird. Für die bei praktischen Anwendungen relevanten Fälle von zwei bzw. drei Bewehrungslagen resultiert eine algebraische Gleichung 4. bzw. 6. Grades, welche jeweils zwei bzw. vier komplexe und zwei reelle Lösungen liefert, wobei eine reelle Lösung  $\sigma_{c3} = E_c \varepsilon_i(\theta_r) t_i(\theta_r) > 0$  liefert und infolge (5.89)<sub>2</sub> wegfällt.

Für zwei schiefwinklige Bewehrungslagen und identische Elastizitätsmoduln der schlaffen und vorgespannten Bewehrung ( $E_p = E_s$ ) resultiert durch Einsetzen der mit (5.10) und (5.11) transformierten Verzerrungen (5.92) in (5.87) die algebraische Gleichung 4. Grades

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \cot^4 \theta_r + a_2 \cot^3 \theta_r + a_3 \cot^2 \theta_r + a_4 \cot \theta_r + a_5 \\ \text{mit} \quad a_1 &= \rho_n (1 - \mu_y \cot \psi) (1 + n \rho_x) \\ a_2 &= \rho_n \left[ \cot \psi (3 + 2n \rho_x) (1 - \mu_y \cot \psi) + \mu_x - \cot \psi \right] \\ a_3 &= 3 \cot \psi \rho_n (\mu_x - \mu_y \cot^2 \psi) \\ a_4 &= \rho_n \cot \psi \left[ 3 \cot \psi (\mu_x - \cot \psi) + (1 - \mu_y \cot \psi) (2n \rho_x + \cot^2 \psi) \right] \dots \\ &\quad \dots - \mu_y \rho_x (1 + \cot^2 \psi)^2 \\ a_5 &= \rho_n \left[ (\mu_y \cot \psi - 1) n \rho_x + \cot^3 \psi (\mu_x - \cot \psi) \right] - \rho_x (1 + \cot^2 \psi)^2 \end{aligned} \quad (5.95)$$

sowie  $\mu_x = \frac{\sigma_x - \sigma_{pdx}}{\tau_{xy} - \tau_{pdy}}$ ,  $\mu_y = \frac{\sigma_y - \sigma_{pdy}}{\tau_{xy} - \tau_{pdy}}$  und  $n = \frac{E_s}{E_c}$

für die Bestimmung von  $\cot \theta_r$ . Für den Fall einer reinen Schubbeanspruchung ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ) resultiert aus (5.95)

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_n (1 + n \rho_x) \cot^4 \theta_r + 2 \rho_n \cot \psi (1 + n \rho_x) \cot^3 \theta_r + \dots \\ &\quad \dots - 2 \rho_n \cot \psi (n \rho_x - \cot^2 \psi) \cot \theta_r + \rho_x (1 + n \rho_n + 2 \cot^2 \psi) - \cot^4 \psi (\rho_x + \rho_n) \end{aligned} \quad (5.96)$$

Für eine schlaffe orthogonale Bewehrung, d. h.  $\cot \psi = 0$ , geht (5.95) in die Beziehung

$$\cot^2 \theta_r \rho_y (1 + n \rho_x) + \cot \theta_r \rho_y \frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = \tan^2 \theta_r \rho_x (1 + n \rho_y) + \tan \theta_r \rho_x \frac{\sigma_y}{\tau_{xy}} \quad (5.97)$$

über, welche von Kupfer [75] für Trägerstege unter reiner Schubbeanspruchung mit Hilfe von (5.93) gefunden und von Baumann [5] erstmals in der allgemeinen Form (5.97) formuliert wurde. Analytisch lässt sich der Winkel  $\theta_r$  für den Fall einer orthogonalen Bewehrung bei reiner Schubbeanspruchung ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ) bestimmen; dabei resultiert

$$\cot \theta_r = \sqrt[4]{\frac{\rho_x (1 + n \rho_y)}{\rho_y (1 + n \rho_x)}} \approx \sqrt[4]{\frac{\rho_x}{\rho_y}} \quad (5.98)$$

Für eine reine Zugbeanspruchung  $\sigma_1$  ( $\sigma_3 = 0$ ), deren Richtung bezüglich der  $x$ -Richtung durch den Winkel  $\varphi$  (positiv im Uhrzeigersinn) bestimmt ist, liefert (5.97) mit  $\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \varphi$ ,  $\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \varphi$  und  $\tau_{xy} = \sigma_1 \sin \varphi \cos \varphi$  bei Vernachlässigung der Betonverzerrungen, d. h.  $n = 0$ , ferner

$$\cot \theta_r = \sqrt[3]{\frac{\rho_x}{\rho_y} \tan \varphi} \quad (5.99)$$

### Berücksichtigung des Schwindens und Kriechens

Die mit einer Änderung von  $\theta_r$  infolge des Schwindens und Kriechens des Betons verbundene Umlagerung der inneren Kräfte lässt sich unter der Voraussetzung einer linear elastischen Stoffbeziehung des Betons und Betonspannungen bis etwa  $-\sigma_{c3} \approx 0,4 f_c$  analog dem ungerissenen Verhalten beschreiben, indem in (5.76)  $c_{clij}$  durch  $c_{clij}(\theta_r)$  ersetzt, und die daraus resultierenden, von  $\theta_r$  abhängigen Spannungsänderungen  $\Delta\sigma_i(t, \theta_r)$  in (5.74) eingesetzt werden. Einsetzen der daraus folgenden, von  $\theta_r$  abhängigen Verzerrungen  $\varepsilon_i(t, \theta_r)$  in (5.12) mit  $\beta = \theta_r$  liefert die Bestimmungsbeziehung für  $\theta_r$ .

#### 5.4.3 Gerissenes Scheibenmodell

Beim Gerissenen Scheibenmodell nach Kaufmann und Marti [63, 64] wird wie beim klassischen Druckfeldmodell von fiktiven drehbaren Rissen ausgegangen, die spannungsfrei sind ( $\sigma_{car} = 0$  und  $\tau_{cabr} = 0$ ) und sich senkrecht zu den Rissufer öffnen ( $u_r = 0$ ). Der Abstand  $s_r$  der fiktiven Risse sei hingegen endlich, womit die Zugversteifung mit einbezogen wird. Nachfolgend wird vereinfachend ein initial eigenspannungsfreier Zustand und ein monotoner Beanspruchungszuwachs vorausgesetzt.

Die von einer in Richtung  $k$  verlaufenden Bewehrungslage zwischen den Rissen in den Beton eingetragenen Verbundschubspannungen werden als quer zum Stab gleichmässig verteilte Volumenkräfte idealisiert (Bild 5.10(b)). Aufgrund dieser Volumenkräfte ändern die Haupttrichtungen der Betonspannungen entlang  $a$  und, da ein isotropes Verhalten des Betons vorausgesetzt wird, auch die der Betonverzerrungen; d. h.  $\beta_c = \theta_r$  gilt streng nur für  $a = \pm s_r/2$  (Bild 5.10(c)). Obwohl infolge der sich senkrecht öffnenden Risse die Hauptachse 3 der rissuferverschiebungsbedingten mittleren Verzerrungen mit der Rissrichtung übereinstimmt, weicht folglich bei einer Betrachtung als Kontinuum die Hauptachse 3 der mittleren Verzerrungen etwas von der Rissrichtung ab. In der Regel ist die Änderung der Haupttrichtungen der Betonverzerrungen relativ gering, und da der Anteil der Betonverzerrungen an den mittleren Verzerrungen eher klein ist, ist die Abweichung der Haupttrichtung 3 der mittleren Verzerrungen in der Regel unerheblich. Aufgrund dieser Überlegungen wird zur Vereinfachung der Berechnungen zusätzlich vorausgesetzt, dass die Hauptachse 3 der mittleren Verzerrungen und die Rissrichtung koaxial sind, d. h.  $\beta = \theta_r$ . Damit wird implizit eine zusätzliche kinematische Bindung eingeführt, welche bezüglich  $a$ - $b$  keine Betonschiebungen zulässt.

Gemäss Bild 5.12(a–c) besteht zwischen dem Rissabstand  $s_r$  und dem Rissabstand in Richtung einer beliebigen Bewehrungslage  $s_{rk}$  der Zusammenhang

$$s_r = s_{rk} \left| \sin(\theta_r + \psi_k) \right| \quad (5.100)$$

Aufgrund der Voraussetzung spannungsfreier Risse herrscht im Beton entlang der Rissufer ein einachsiger Druckspannungszustand, d. h.  $\sigma_{cbr} = \sigma_{c3r} \leq 0$  und  $\sigma_{car} = \sigma_{c1r} = \tau_{cabr} = 0$ . Folglich genügen die Spannungen am Riss gemäss (5.4) den Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_i = \sigma_{c3r} t_i(\theta_r) + \sum_{k=1}^m \sigma_{skr} \rho_k t_i(-\psi_k) \quad \text{mit } \sigma_{c3r} < 0 \quad (5.101)$$

Die verbundbedingte Volumenkraft infolge einer in Richtung  $k$  verlaufenden Bewehrungslage ruft im Beton eine Änderung der Normalspannungen in Richtung  $k$   $\Delta\sigma_{ck}$  hervor (Bild 5.12(d)). Mithin resultiert für die Stahlspannungen

$$\sigma_{sk} = \sigma_{skr} - \frac{\Delta\sigma_{ck}}{\rho_k} \quad (5.102)$$

(Bild 5.12(d)) und für den Betonspannungszustand

$$\sigma_{ci} = \sigma_{c3r} t_i(\theta_r) + \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ck} t_i(-\psi_k) \quad (5.103)$$

(Bild 5.12(e)). Da die fiktiven Risse spannungsfrei sind, verschwindet  $\Delta\sigma_{ck}$  an den Rissufern.

Aufgrund der Voraussetzung, dass die Hauptachse 3 ( $\varepsilon_3 < 0$ ) des Tensors der mittleren Verzerrungen  $\varepsilon_i$  zur Rissrichtung koaxial ist, gilt  $\beta = \theta_r$ ; mithin gilt für die mittleren Verzerrungen die Verträglichkeitsbedingung des klassischen Druckfeldmodells (5.12) mit  $\beta = \theta_r$ , welche bei zwei Bewehrungslagen in (5.87) übergeht.

Das Stahlverhalten wird allgemein durch eine bilineare Spannungs-Dehnungscharakteristik (Bild 5.12(g)) idealisiert, und das Verbundverhalten wird gemäss dem Zuggurtmodell (siehe Kap. 3.4.2) beschrieben. Die Verbundschubspannungen sind damit nur vom Spannungszustand der jeweiligen Bewehrungslage abhängig, vom Schlupf hingegen unabhängig (Bild 5.12(i)), was die Berechnungen erheblich vereinfacht. Den Zusammenhang zwischen den Stahlspannungen an den Rissen und den mittleren Dehnungen in Bewehrungsrichtung  $\sigma_{skr} = \sigma_{skr}(\varepsilon_k)$  beschreiben somit die Beziehungen (3.48) bis (3.50). Die Verwendung anderer Spannungs-Dehnungscharakteristiken des Bewehrungsstahls stellt grundsätzlich kein Problem dar, angesichts der einschneidenden Modellvoraussetzungen und -idealisationen wird jedoch davon abgesehen.

Die Beziehung zwischen der Betonhauptdruckspannung  $\sigma_{c3r}$  am Riss und den mittleren Verzerrungen wird mit (3.3) beschrieben, wobei die von den mittleren Verzerrungen abhängige Betondruckfestigkeit  $f_c = f_c(\varepsilon_1)$  mit (3.56) bestimmt wird

$$\sigma_{c3r}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = f_c(\varepsilon_1) \cdot \frac{k_\sigma(\varepsilon_1) \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_{cu}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_{cu}} \right)^2}{1 + \left[ k_\sigma(\varepsilon_1) - 2 \right] \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_{cu}} \right)} \quad \text{mit} \quad k_\sigma(\varepsilon_1) = \frac{E_c \varepsilon_{cu}}{f_c(\varepsilon_1)} \quad (5.104)$$

### Abstand der fiktiven Risse

Der maximale Abstand der fiktiven Risse  $s_{r0}$  stellt sich dann ein, wenn die maximale Betonhauptspannung in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen die Betonzugfestigkeit gerade erreicht

$$\sigma_{c1m} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{cxm} + \sigma_{cym} + \sqrt{(\sigma_{cxm} - \sigma_{cym})^2 + 4\tau_{cym}^2} \right] = f_{ct} \quad (5.105)$$

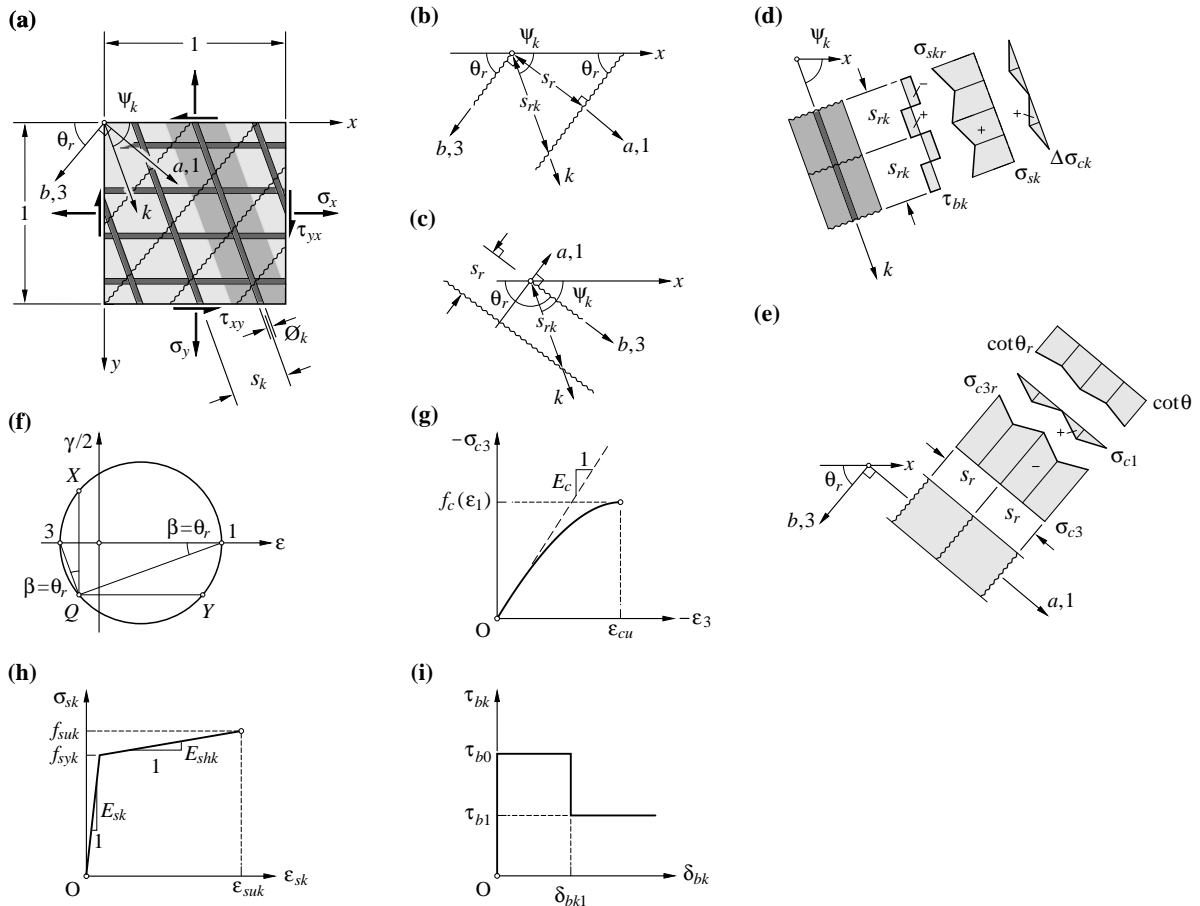
Die Betonspannungskomponenten  $\sigma_{cxm}$ ,  $\sigma_{cym}$  und  $\tau_{cym}$  in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen betragen gemäss (5.103)

$$\sigma_{cmi} = \sigma_{c3r} t_i(\theta_r) + \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ckm} t_i(-\Psi_k) \quad (5.106)$$

Die Änderung der Betonnormalspannung in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen infolge der Verbundschubspannungen einer beliebigen in Richtung  $k$  verlaufenden Bewehrungslage,  $\Delta\sigma_{ckm}$ , beträgt dabei

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ckm} &= \frac{s_{rk}}{2} \cdot \tau_{b0} \frac{4\rho_k}{\varnothing_k} && \text{für } \sigma_{skr} \leq f_{syk} \\ \Delta\sigma_{ckm} &= \frac{s_{rk}}{2} \cdot \tau_{b0} \frac{4\rho_k}{\varnothing_k} - \rho_k (\sigma_{skr} - f_{syk}) \left( \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - 1 \right) && \text{für } \sigma_{skmin} \leq f_{syk} \leq \sigma_{skr} \\ \Delta\sigma_{ckm} &= \frac{s_{rk}}{2} \cdot \tau_{b1} \frac{4\rho_k}{\varnothing_k} && \text{für } f_{syk} \leq \sigma_{skmin} \end{aligned} \quad (5.107)$$

Unter Verwendung von (5.100) mit  $s_r = s_{r0}$  liefert somit (5.105) mit (5.106) und (5.107) eine Gleichung für den maximalen Rissabstand. Der minimale Abstand der fiktiven Risse entspricht der kür-



**Bild 5.12** – Gerissenes Scheibenmodell: (a) Bezeichnungen; (b) und (c) Rissabstände für  $[0 \leq \theta_r \leq \pi - \psi_k]$  bzw.  $[\pi - \psi_k \leq \theta_r \leq \pi]$ ; (d) Verlauf der Stahlspannungen und der verbundbedingten Betonnormalspannungsänderungen; (e) Betonhauptspannungen und -richtungen; (f) Mohr'scher Kreis der mittleren Verzerrungen; (g) und (h) Stoffbeziehungen des Betons bzw. der Bewehrung; (i) Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung gemäss Zuggurtmodell mit  $\tau_{b0} = 2\tau_{b1} = 0,6 f_{ct}^{2/3}$  und  $\delta_{bk1} = \delta_{bk} (\sigma_{sk} = f_{syk})$ .

zesten Strecke, über welche im Beton über Verbundschubspannungen die Zugfestigkeit  $f_{ct}$  erreicht wird. Mithin gilt analog zum Zuggurtmodell für den Abstand der fiktiven Risse

$$s_r = \lambda \cdot s_{r0} \quad \text{mit} \quad 0,5 \leq \lambda \leq 1 \quad (5.108)$$

Setzt man vereinfachend  $\Delta\sigma_{ckm}$  gemäss (5.107)<sub>1</sub> voraus und verzichtet damit auf die Fallunterscheidung, ist  $\Delta\sigma_{ckm}$  unabhängig von der Stahlspannung am Riss und beträgt unter Berücksichtigung von (5.100)

$$\Delta\sigma_{ckm} = f_{ct} \frac{s_{rk}}{s_{rk0}} = f_{ct} \frac{s_r}{s_{rk0} |\sin(\theta_r + \psi_k)|} \quad (5.109)$$

mit dem maximalen Rissabstand bei einer reinen Zugbeanspruchung in Richtung  $k$  und lediglich einer in dieser Richtung verlaufenden Bewehrungslage

$$s_{rk0} = \frac{\varnothing_k f_{ct} (1 - \rho_k)}{2\tau_{b0} \rho_k} \cong \frac{\varnothing_k}{4\rho_k} \quad (5.110)$$

gemäss (3.41). Einsetzen von (5.109) in (5.108) liefert mit  $s_r = s_{r0}$

$$\sigma_{cmi} = \sigma_{c3r} \cdot t_i(\theta_r) + s_{r0} \tau_{b0} \cdot h_i \quad \text{mit} \quad h_i = 2 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{\varnothing_k |\sin(\theta_r + \psi_k)|} \cdot t_i(-\psi_k) \quad (5.111)$$

und (5.105) liefert für den maximalen Abstand der fiktiven Risse

$$s_{r0} = \frac{\omega_x + \omega_y - 2\tau_{cxyr} h_{xy} + \sqrt{(\omega_x - \omega_y)^2 + 4\alpha_x \alpha_y}}{2\tau_{b0} (h_{xy}^2 - h_x h_y)} \quad (5.112)$$

mit  $\omega_x = (\sigma_{cxr} - f_{ct}) h_y$ ,  $\omega_y = (\sigma_{cyr} - f_{ct}) h_x$ ,  $\alpha_x = \tau_{cxyr} h_x + (f_{ct} - \sigma_{cxr}) h_{xy}$  sowie  $\alpha_y = \tau_{cxyr} h_y + (f_{ct} - \sigma_{cyr}) h_{xy}$ , wobei  $h_x$ ,  $h_y$  und  $h_{xy}$  die Komponenten des Vektors  $h_i$  bezeichnen.

Ein oberer Grenzwert für den maximalen Rissabstand gemäss (5.112) lässt sich durch Aufspalten der Summe der verbundbedingten Normalspannungsänderungen des Betons in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil gewinnen [63, 64] (Bild 5.13(a-c)). Die Betonspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen betragen gemäss (5.111)

$$\begin{aligned} \sigma_{cxm} &= \sigma_{cxr} + \Delta\sigma_{cs} + \Delta\sigma_{ca} \\ \sigma_{cym} &= \sigma_{cyr} + \Delta\sigma_{cs} - \Delta\sigma_{ca} \\ \tau_{cym} &= \tau_{cxyr} + \Delta\tau_{ca} \end{aligned} \quad (5.113)$$

mit dem symmetrischen bzw. den antimetrischen Anteilen

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{cs} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ckm} \quad \text{bzw.} \\ \Delta\sigma_{ca} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ckm} \cos 2\psi_k \quad \text{und} \quad \Delta\tau_{ca} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ckm} \sin 2\psi_k \end{aligned} \quad (5.114)$$

Häufig weichen die Hauptrichtungen des Betonspannungstensors in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen nur geringfügig von jenen am Riss ab. Setzt man infolgedessen die beiden Winkel näherungsweise einander gleich,  $\theta_m = \theta_r$ , so beträgt die Betonhauptzugspannung in der Mittel zwischen zwei benachbarten Rissen gemäss Bild 5.13(c)

$$\sigma_{c1m} \cong \Delta\sigma_{cs} - \Delta\sigma_{ca} \cos 2\theta_r + \Delta\tau_{ca} \sin 2\theta_r \quad (5.115)$$

Mit (5.114) folgt daraus

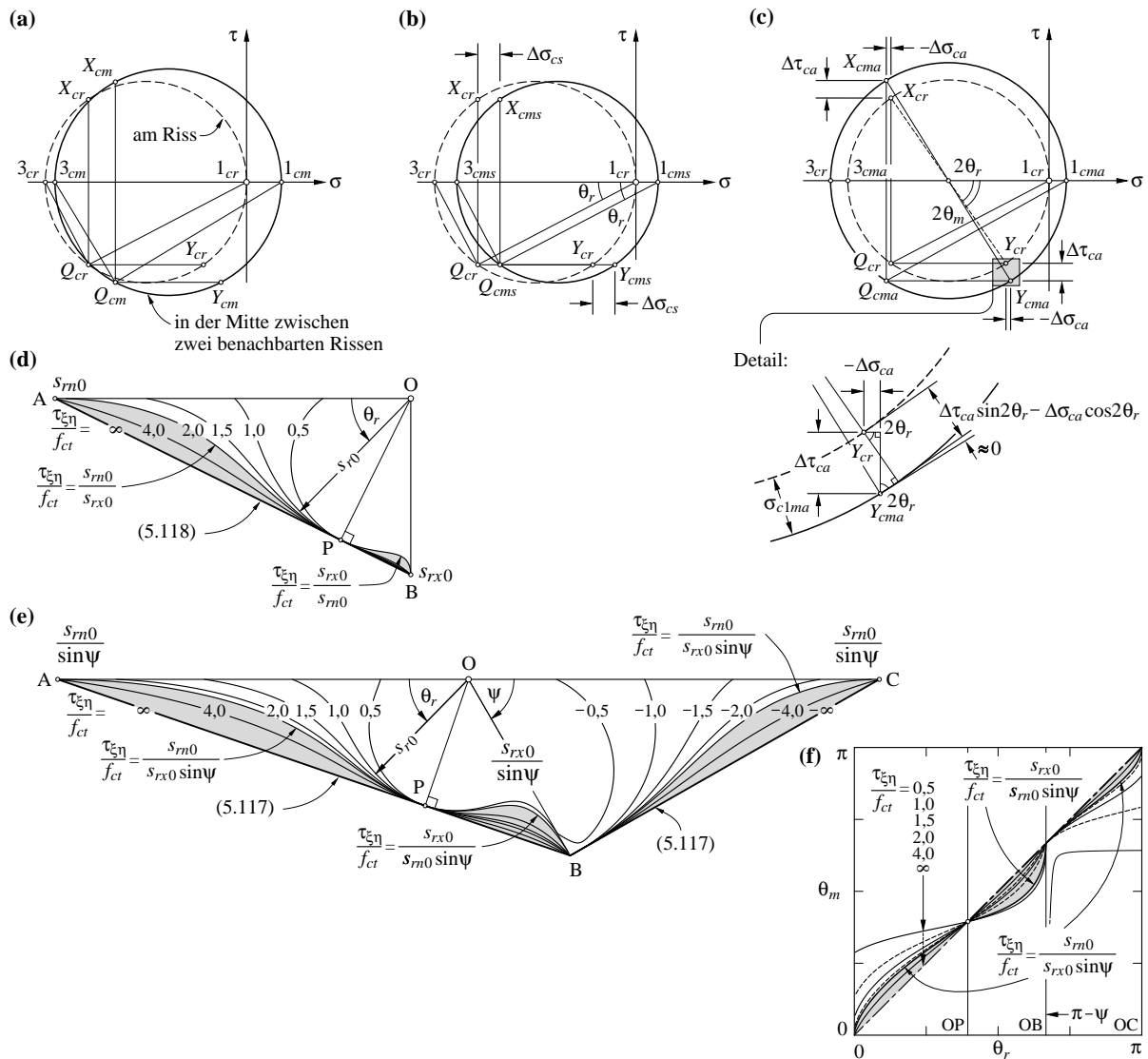
$$\sigma_{c1m} \cong \sum_{k=1}^m \Delta\sigma_{ckm} \sin^2(\psi_k + \theta_r) \quad (5.116)$$

und  $\sigma_{c1m} = f_{ct}$  liefert mit (5.109) einen oberen Grenzwert für den maximalen Abstand der fiktiven Risse

$$s_{r0} \cong \left( \sum_{k=1}^m \frac{|\sin(\theta_r + \psi_k)|}{s_{rk0}} \right)^{-1} \quad [0 \leq \theta_r, \psi_k < \pi] \quad (5.117)$$

Für eine orthogonale Bewehrung liefert (5.117) die von Vecchio und Collins [161] vorgeschlagene und von Kaufmann und Marti [63] entsprechend Bild 5.13(b, c) begründete Beziehung

$$s_{r0} \cong \left( \frac{|\sin \theta_r|}{s_{rx0}} + \frac{|\cos \theta_r|}{s_{ry0}} \right)^{-1} \quad [0 \leq \theta_r < \pi] \quad (5.118)$$



**Bild 5.13** – Gerissenes Scheibenmodell – Rissabstand und Betonspannungszustand: (a) Betonspannungen am Riss und in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen; (b) und (c) Aufspaltung der über Verbundspannungen in den Beton eingetragenen Spannungen in einen symmetrischen (Index  $s$ ) und antisymmetrischen (Index  $a$ ) Anteil; (d) und (e) polare Darstellungen des maximalen Rissabstands für zwei orthogonale bzw. schiefwinklige Bewehrungslagen (Parameter:  $\varnothing_x = \varnothing_y = \varnothing_n = 16$  mm,  $f_{ct} = 0,3 f_{cc}^{2/3}$  mit  $f_{cc} = 40$  N/mm<sup>2</sup>,  $\rho_x = 2$   $\rho_y = 2$   $\rho_n = 2$  %,  $\psi_n = \psi = 60^\circ$ ); (f) Abweichung der Hauptrichtungen des Betonspannungstensors in der Mitte zwischen den Rissen von jenen am Riss für das Beispiel in (e).

Bild 5.13(d, e) zeigt anhand von zwei Beispielen mit zwei Bewehrungslagen den mit (5.112) bzw. (5.117) ermittelten maximalen Rissabstand in Funktion des Winkels  $\theta_r$  und der Beanspruchung  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct}$  in einer polaren Darstellung, wobei

$$\sigma_{c3r} = \frac{-\tau_{\xi\eta}}{\sin \theta_r (\cot \theta_r + \cot \psi)} \quad (5.119)$$

mit  $\tau_{\xi\eta} \geq 0$  für  $[0 \leq \theta_r \leq \pi - \psi]$  und  $\tau_{\xi\eta} \leq 0$  für  $[\pi - \psi \leq \theta_r \leq \pi]$  ist. Für  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct} \rightarrow \infty$  liefern (5.117) und (5.112) gleiche Ergebnisse.

Infolge der gewählten Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung wird die Zugversteifung durch (5.112) bei geringen Beanspruchungen  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct}$  und Druckfeldrichtungen, die nur geringfügig von einer Bewehrungsrichtung abweichen, überschätzt, womit zu kleine maximale Rissabstände resultieren.



Bei zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen resultiert allgemein für die Grenzfälle  $\theta_r=0$  und  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct} < s_{r0}/(s_{rx0} \sin\psi)$   $s_{r0} < s_{rm0}/\sin\psi$  anstatt  $s_{r0}=s_{rm0}/\sin\psi$  und für  $\theta_r=\pi-\psi$  und  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct} < s_{rx0}/(s_{rm0} \sin\psi)$   $s_{r0} < s_{rx0}/\sin\psi$  anstatt  $s_{r0}=s_{rx0}/\sin\psi$ .

Foster und Marti [40] beseitigen für orthogonale Bewehrungen diese Inkonsistenzen, indem sie zur Ermittlung des maximalen Rissabstands  $s_{r0}$  mit (5.112) für Rissrichtungen im Sektor zwischen OA und OP in Bild 5.13(d) und der Bedingung  $\tau_{xy}/f_{ct} < s_{ry0}/s_{rx0}$  genügende Beanspruchungen bzw. Rissrichtungen im Sektor zwischen OP und OB und  $\tau_{xy}/f_{ct} < s_{rx0}/s_{ry0}$  genügende Beanspruchungen anstelle des effektiven Betrags für  $\tau_{xy}$  die Werte  $\tau_{xy}=f_{ct}s_{ry0}/s_{rx0}$  bzw.  $\tau_{xy}=f_{ct}s_{rx0}/s_{ry0}$  einsetzen. Bild 5.13(e) zeigt die entsprechenden Verhältnisse für zwei allgemeine schiefwinklige Bewehrungslagen. In (5.112) sind entsprechend für Rissrichtungen im Sektor zwischen OA und OP und zwischen OB und OC und der Bedingung  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct} < s_{rm0}/(s_{rx0}\sin\psi)$  genügende Beanspruchungen bzw. Rissrichtungen im Sektor zwischen OP und OB und  $\tau_{\xi\eta}/f_{ct} < s_{rx0}/(s_{rm0}\sin\psi)$  genügende Beanspruchungen anstelle des effektiven Betrags für  $\tau_{\xi\eta}$  die Werte  $f_{ct}s_{rm0}/(s_{rx0}\sin\psi)$  bzw.  $f_{ct}s_{rx0}/(s_{rm0}\sin\psi)$  einzusetzen. Die maximalen Rissabstände beschränken sich damit in Bild 5.13(d, e) auf die grau hinterlegten Flächen. Da die Beanspruchung  $\tau_{\xi\eta}$  gegeben ist, wird damit gemäss (5.112) implizit die Verbundschubspannung der beiden Bewehrungslagen gegenüber  $\tau_{b0}$  reduziert, was der vorausgesetzten Verbundschubspannungs-Schlupfbeziehung widerspricht.

Angesichts der Inkonsistenzen von (5.112) bzw. des bei deren Beseitigung dem Modell auferlegten Widerspruchs erscheint es zweckmässig, den maximalen Abstand der fiktiven Risse mit (5.117) zu bestimmen.

### Berechnung

Der Berechnungsalgorithmus entspricht demjenigen des klassischen Druckfeldmodells. Anstelle von (5.89) resultiert durch Einsetzen der Stoffbeziehungen des Betons (5.104) und der Bewehrung (3.48) bis (3.50) in die Gleichgewichtsbeziehungen die Beziehung

$$\sigma_i = \sigma_{c3r}(\varepsilon_i, \theta_r) \cdot t_i(\theta_r) + \left( \sum_{k=1}^m \rho_k \sigma_{skr}(\varepsilon_i, \theta_r) \cdot t_i(-\psi_k) \right) + \sigma_{pdi} \quad (5.120)$$

$$\text{mit } \sigma_{c3r}(\varepsilon_i, \theta_r) < 0$$

Der Rissabstand ist durch (5.117) (oder allenfalls (5.105) mit (5.106) und (5.107) resp. (5.112)) gegeben. Zusammen mit (5.12) und  $\beta=\theta_r$  stehen damit vier nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  und  $\theta_r$  zur Verfügung. Zur Berechnung der gesamten Spannungs-Verzerrungscharakteristiken oder des Spannungs- und Verzerrungszustands im Bereich der maximalen äusseren Spannungen gelten die Hinweise in Kapitel 5.4.2 sinngemäss.

### Breiten der fiktiven Risse

Durch Aufspalten der mittleren Verzerrungen in mittlere Betonverzerrungen  $\varepsilon_{ci}$  und mittlere rissbedingte Verzerrungen  $\varepsilon_{ri}$  gilt für die Rissbreiten

$$w_r = s_r \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_{c1}) \quad (5.121)$$

Da die Betonverzerrungen jedoch in der Regel relativ gering sind, kann die mittlere Breite der fiktiven Risse mit

$$w_r = s_r \cdot \varepsilon_1 \quad (5.122)$$

abgeschätzt werden.

### 5.4.4 Tragwiderstand und Bemessung

Mit einer plastischen Modellierung (siehe Kap. 5.2) lässt sich die Traglast direkt aus den Fließbedingungen bestimmen resp. eine darauf basierende Bemessung vornehmen, ohne dass eine relativ

aufwendige nichtlineare Berechnung gemäss dem klassischen Druckfeldmodell oder dem Gerissenen Scheibenmodell durchgeführt werden muss, wobei sowohl für die Ermittlung der Fliessbedingungen als auch für eine Bemessung gemäss Kapitel 5.2.3 die effektive Betonfestigkeit festzulegen ist. Wie in Kapitel 3.4.3 erläutert, ist die Betondruckfestigkeit des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand gemäss (3.55) bzw. (3.56) allerdings vom Verzerrungszustand abhängig, welcher mit einer plastischen Modellierung nicht erfasst wird. Diesem Umstand wird bei orthogonalen Bewehrungen in der Regel durch die Wahl eines konservativen Werts der effektiven Betondruckfestigkeit, in der Gröszenordnung von

$$f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \leq 0,6 f_c \quad (5.123)$$

[115], in Kombination mit einer Beschränkung der Betondruckfeldrichtung auf  $0,5 \leq \cot\theta \leq 2$  [80, 119] Rechnung getragen, womit Fälle mit übermässig hohen Hauptverzerrungen  $\varepsilon_1$  und entsprechend tiefer Betondruckfestigkeit oder einem vorzeitigen Zerreißen der Bewehrung ausgeschlossen werden sollen.

Um die effektive Betondruckfestigkeit für zwei schiefwinklige Bewehrungslagen zu ermitteln, ist es zweckmässig, schiefe Spannungskomponenten zu verwenden. Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf die ersten vier Fliessbedingungen, welche die relevanten Fälle mit nicht primär auf Druck beanspruchtem Stahlbeton umfassen. Ferner wird ein initial eigenspannungsfreies System unter monoton wachsender Beanspruchung vorausgesetzt.

Werden in den Fliessbedingungen (5.20)<sub>1-4</sub> die orthogonalen Spannungskomponenten mit (5.6) durch die entsprechenden schiefen ersetzt, resultieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} Y_1 &= \tau_{\xi\eta}^2 - s_\xi s_\eta = 0 \\ Y_2 &= (\tau_{\xi\eta} - s_\eta \cos \psi)^2 - s_\eta \sin \psi (f_c - s_\eta \sin \psi) = 0 \\ Y_3 &= (\tau_{\xi\eta} - s_\xi \cos \psi)^2 - s_\xi \sin \psi (f_c - s_\xi \sin \psi) = 0 \\ Y_4 &= \left( \tau_{\xi\eta} - \frac{f_c}{2} \cot \psi \right)^2 - \left( \frac{f_c}{2} \right)^2 (\sin \psi + \cos \psi \cot \psi)^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.124)$$

mit

$$s_\xi = \rho_x f_{syx} \sin \psi - \sigma_\xi \quad \text{und} \quad s_\eta = \rho_n f_{syn} \sin \psi - \sigma_\eta \quad (5.125)$$

Bild 5.14(a) zeigt die entsprechende Fliessfläche für  $\psi = 60^\circ$  und  $f_c = 1,93 f_{cc}^{2/3}$  [N/mm<sup>2</sup>] und Bild 5.15(a) die bedingt durch das Regime 4 betragsmässig maximal erreichbaren Spannungen  $\tau_{\xi\eta}$  in Abhängigkeit von  $\psi$

$$\tau_{\xi\eta} = f_c \frac{\cos \psi \pm 1}{2 \sin \psi} \quad (5.126)$$

Wie bereits in Kapitel 5.2.2 erwähnt, ergeben sich bezüglich einer orthogonalen Bewehrung mit einer schiefwinkligen Bewehrung dann günstigere Verhältnisse, wenn der Winkel  $\psi$  für  $\tau_{\xi\eta} \geq 0$  im Intervall  $[0 \leq \psi \leq \pi/2]$  und für  $\tau_{\xi\eta} \leq 0$  im Intervall  $[\pi/2 \leq \psi \leq \pi]$  liegt.

Um die Betondruckfestigkeit nach (3.56)

$$f_c = (c_1 + c_2 \varepsilon_1)^{-1} \cdot f_{cc}^{2/3} \leq c_1^{-1} \cdot f_{cc}^{2/3} \quad \text{in [N/mm}^2\text{]} \quad (5.127)$$

mit  $c_1 = 0,4$  und  $c_2 = 30$  zu ermitteln, sind die Verzerrungszustände beim Erreichen der Traglast des jeweiligen Regimes zu bestimmen. Wird ein ideal plastisches Verhalten der Bewehrung vorausgesetzt, so sind sowohl das klassische Druckfeldmodell als auch das Gerissene Scheibenmodell bei identischer Betondruckfestigkeit der plastischen Modellierung verträglich und liefern die gleiche

Traglast. Folglich können beide Modellvorstellungen zur Ermittlung des Verzerrungszustands beim Erreichen der Traglast herangezogen werden.

Beim Erreichen der Betondruckfestigkeit ist der Betrag der Hauptdehnung  $\varepsilon_3$  nicht grösser als  $\varepsilon_{cu}$ , mithin gilt  $\zeta_c = -\varepsilon_3/\varepsilon_{cu} \leq 1$ . Erreicht die Bewehrung die Fließsgrenze auf Zug, weist sie am Riss die Fließdehnung auf,  $\varepsilon_{skr} = \varepsilon_{syk}$ . Die auf die Fließdehnung bezogene mittlere Dehnung der nicht fließenden Bewehrung  $\varepsilon_k/\varepsilon_{syk} = \zeta_k$  ist beim Erreichen der Traglast demnach durch  $\zeta_k \leq 1$  begrenzt. Um einen oberen Grenzwert der Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  und entsprechend einen unteren Grenzwert der effektiven Betondruckfestigkeit zu erhalten, können somit  $\zeta_k = 1$  und  $\zeta_c = 1$  gesetzt werden. Durch die Zugversteifung sind die maximalen mittleren Dehnungen in Richtung der nicht fließenden Bewehrung beim Übergang vom Regime 1 zum Regime 2 und 3 etwas kleiner als die entsprechende Fließdehnung. Um dem Rechnung zu tragen, kann näherungsweise  $\zeta_k \approx 0,8 \dots 0,9$  gesetzt werden [64].

Im Regime 2 fließt die Bewehrung in  $n$ -Richtung, und der Beton erreicht die effektive Betondruckfestigkeit, d. h.  $\sigma_{snr} = f_{syn}$  und  $\sigma_{c3} = -f_c$ . Aus (5.7)<sub>2</sub> resultiert mit  $\sigma_{c1} = 0$ ,  $\sigma_{c3} = -f_c$  und  $\sigma_{sn} = f_{syn}$  unter Berücksichtigung von (5.125) für den Winkel  $\theta_r$ ,

$$\cot^2 \theta_r = \frac{f_c - s_\eta \sin \psi}{s_\eta \sin \psi} \quad (5.128)$$

und die Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  folgt aus (5.8)<sub>1</sub>

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x - \varepsilon_3) \cot^2 \theta_r \quad (5.129)$$

Mit  $\varepsilon_x = \zeta_x \cdot \varepsilon_{sxy}$  und  $\varepsilon_3 = -\zeta_c \cdot \varepsilon_{cu}$  liefert (5.127) damit die quadratische Gleichung

$$f_c = f_{cc}^{2/3} \left\{ c_1 + c_2 \left[ \zeta_x \varepsilon_{sxy} + \left( \zeta_x \varepsilon_{sxy} + \zeta_c \varepsilon_{cu} \right) \frac{f_c - s_\eta \sin \psi}{s_\eta \sin \psi} \right] \right\}^{-1} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (5.130)$$

zur Bestimmung der Betondruckfestigkeit, welche

$$f_c = \frac{s_\eta \sin \psi}{2c_2 (\zeta_x \varepsilon_{sxy} + \zeta_c \varepsilon_{cu})} \left[ \sqrt{4c_2 (\zeta_x \varepsilon_{sxy} + \zeta_c \varepsilon_{cu}) \frac{f_{cc}^{2/3}}{s_\eta \sin \psi} + (c_1 - c_2 \zeta_c \varepsilon_{cu})^2} - (c_1 - c_2 \zeta_c \varepsilon_{cu}) \right] \quad [\text{N/mm}^2] \quad (5.131)$$

liefert.

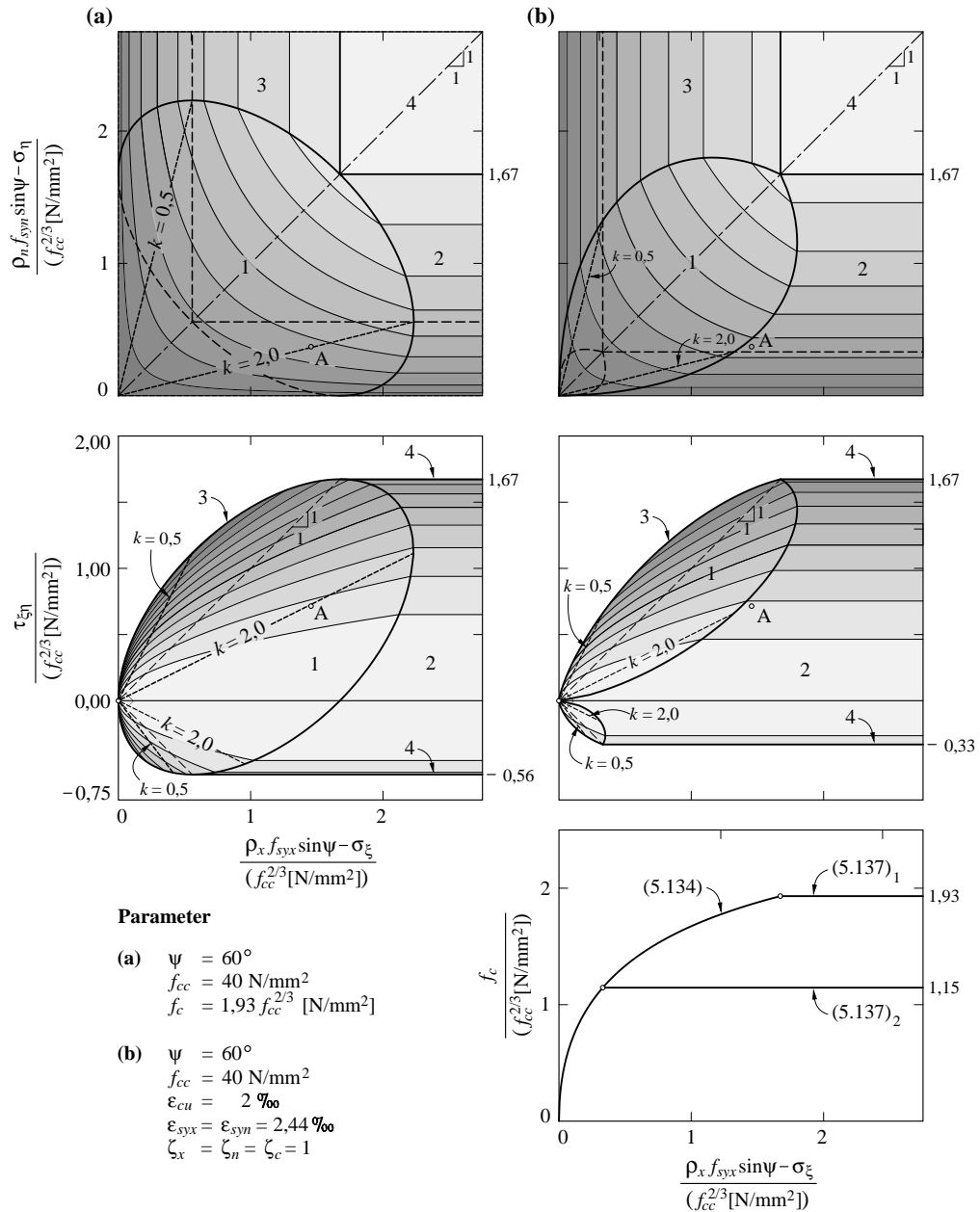
Im Regime 3 fließt die Bewehrung in  $x$ -Richtung, und der Beton erreicht die effektive Betondruckfestigkeit, d. h.  $\sigma_{sxr} = f_{syx}$  und  $\sigma_{c3} = -f_c$ . Eine Beziehung für den Winkel  $\theta_r$  lässt sich somit analog (5.128) mit  $\sigma_{c1} = 0$ ,  $\sigma_{c3} = -f_c$  und  $\sigma_{sx} = f_{syx}$  unter Berücksichtigung von (5.125) aus (5.7)<sub>1</sub> gewinnen. Mit der aus (5.9) folgenden Beziehung für die Hauptdehnung  $\varepsilon_1$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_n + (\varepsilon_n - \varepsilon_3) \cot^2 (\theta_r + \psi) \quad (5.132)$$

und  $\varepsilon_n = \zeta_n \cdot \varepsilon_{sny}$  sowie  $\varepsilon_3 = -\zeta_c \cdot \varepsilon_{cu}$  resultiert aus (5.127) schliesslich die zu (5.130) analoge quadratische Gleichung für die Betondruckfestigkeit

$$f_c = f_{cc}^{2/3} \left\{ c_1 + c_2 \left[ \zeta_n \varepsilon_{sny} + \left( \zeta_n \varepsilon_{sny} + \zeta_c \varepsilon_{cu} \right) \frac{f_c - s_\xi \sin \psi}{s_\xi \sin \psi} \right] \right\}^{-1} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (5.133)$$

aus welcher



**Bild 5.14** – Tragwiderstand: (a) Grundriss und Ansicht der Fließfläche mit  $f_c$  gemäss (5.137)<sub>1</sub>; (b) Grundriss und Ansicht der Fließfläche mit  $f_c$  gemäss (5.134) und (5.137). (Äquidistanzen = 0,2).

$$f_c = \frac{s_\xi \sin \psi}{2c_2 (\zeta_n \varepsilon_{sny} + \zeta_c \varepsilon_{cu})} \left[ \sqrt{4c_2 (\zeta_n \varepsilon_{sny} + \zeta_c \varepsilon_{cu}) \frac{f_{cc}^{2/3}}{s_\xi \sin \psi} + (c_1 - c_2 \zeta_c \varepsilon_{cu})^2} - (c_1 - c_2 \zeta_c \varepsilon_{cu}) \right] \quad (5.134)$$

[N/mm<sup>2</sup>]

folgt.

Im Regime 4 erreicht der Beton die effektive Betondruckfestigkeit, während keine der beiden Bewehrungslagen fließt. Unter der Annahme  $\varepsilon_{syx} = \varepsilon_{syn}$  ist  $\varepsilon_x = \varepsilon_n = \zeta_x \cdot \varepsilon_{syx}$ , und (5.87) liefert die Gleichung

$$(\cos \psi + \sin \psi \cot \theta_r)^2 = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_3}{\varepsilon_x - \varepsilon_3} = 1 \quad (5.135)$$

womit

$$\theta_r = \begin{cases} \frac{\pi - \Psi}{2} & \text{für } \tau_{\xi\eta} \geq 0 \\ \pi - \frac{\Psi}{2} & \text{für } \tau_{\xi\eta} \leq 0 \end{cases} \quad (5.136)$$

ist. Mit (5.132) resultiert damit aus (5.127)

$$f_c = f_{cc}^{2/3} \left\{ c_1 + c_2 \left[ \zeta_x \varepsilon_{sxy} + (\zeta_x \varepsilon_{sxy} + \zeta_c \varepsilon_{cu}) \tan^2 \left( \frac{\Psi}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \quad [\text{N/mm}^2] \quad \text{für } \tau_{\xi\eta} \geq 0 \quad (5.137)$$

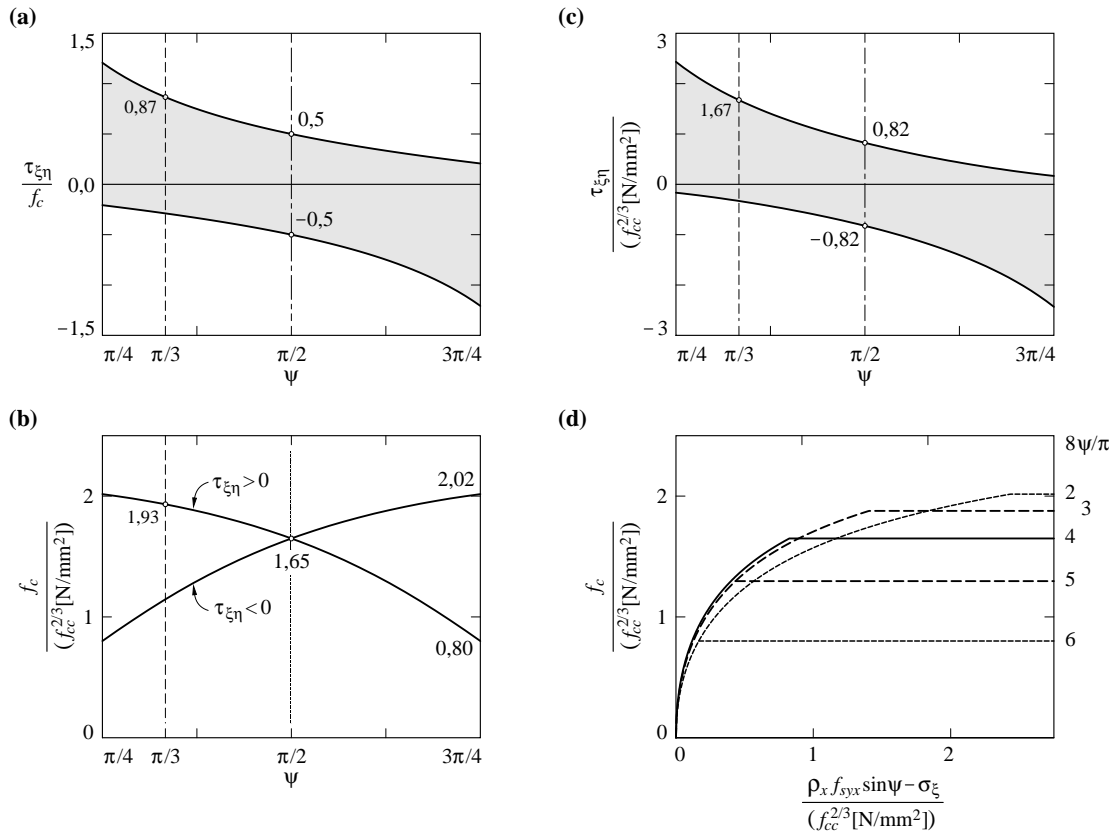
$$f_c = f_{cc}^{2/3} \left\{ c_1 + c_2 \left[ \zeta_x \varepsilon_{sxy} + (\zeta_x \varepsilon_{sxy} + \zeta_c \varepsilon_{cu}) \cot^2 \left( \frac{\Psi}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \quad [\text{N/mm}^2] \quad \text{für } \tau_{\xi\eta} \leq 0$$

Schliesslich liefern die Fliessbedingungen (5.124) mit den effektiven Betondruckfestigkeiten der Regime 2 bis 4 gemäss (5.131), (5.134) sowie (5.137) und  $\zeta_x = 1$  bzw.  $\zeta_n = 1$  und  $\zeta_c = 1$  einen unteren Grenzwert des Tragwiderstands bei einer effektiven Betondruckfestigkeit gemäss (5.127) und ideal plastischen Verhalten der Bewehrung. Eine Bemessung mit einer effektiven Betondruckfestigkeit gemäss (5.127) kann wie in Kapitel 5.2.2 vorgenommen werden, indem in (5.41) für  $s_\xi > s_\eta$  bzw.  $s_\xi < s_\eta$  die effektive Betondruckfestigkeit gemäss (5.131) bzw. (5.134) verwendet wird. Für  $k = 1$  liefern (5.131), (5.134) und (5.137) gleiche Betondruckfestigkeiten.

Bild 5.14(b) zeigt anhand eines Beispiels die Fliessfläche mit den vier betrachteten Fliessregimen mit Betondruckfestigkeiten gemäss (5.131), (5.134) und (5.137). Da die Fliessbedingung des für die Bemessung relevanten Fliessregimes 1 nicht von der Betondruckfestigkeit abhängt, stimmt die zugehörige Fliessfläche (mit der gewählten Diagrammskalierung) mit jener in Bild 5.14(a) überein; deren Oberfläche ist allerdings, bedingt durch eine engere Begrenzung, deutlich kleiner. Bei relativ geringen Beträgen der Spannung  $\tau_{\xi\eta}$  lässt sich dieser Unterschied bei schiefwinkligen Bewehrungen und einer plastischen Modellierung mit konstanter Betondruckfestigkeit (z. B. gemäss Bild 5.15(b)) auf die gleiche Weise wie bei einer orthogonalen Bewehrung durch eine Beschränkung der Druckfeldrichtung mit der Bedingung  $[0,5 \leq k \leq 2]$  beheben. Aufgrund der Form der Begrenzungskurve des Regimes 1 in Bild 5.14(b) liegen bei hohen Beträgen der Spannung  $\tau_{\xi\eta}$  allerdings trotz der Begrenzung grosse Bereiche der Fliessfläche des Regimes 1 in Bild 5.14(a) bereits im Regime 2 oder 3 der Fliessfläche in Bild 5.14(b).

Bild 5.15(b) zeigt die Betondruckfestigkeit des Regimes 4 gemäss (5.137) für typische Parameter in Funktion der Richtung der Bewehrungslagen. Gegenüber einer orthogonalen Bewehrung ergeben sich dabei höhere Betondruckfestigkeiten, falls der Winkel  $\psi$  für  $\tau_{\xi\eta} \geq 0$  im Intervall  $[0 \leq \psi \leq \pi/2]$  und für  $\tau_{\xi\eta} \leq 0$  im Intervall  $[\pi/2 \leq \psi \leq \pi]$  liegt, ansonsten tiefere. Da die durch das Regime 4 (5.126) bestimmte betragsmässig maximal erreichbare Spannung  $\tau_{\xi\eta}$  in gleicher Weise von  $\psi$  abhängt (Bild 5.15(a)), wird der Einfluss von  $\psi$  auf die betragsmässig maximal erreichbare Spannung  $\tau_{\xi\eta}$  verstärkt (Bild 5.15(c)). Bild 5.15(d) zeigt den Einfluss von  $\psi$  auf die Betondruckfestigkeit aller betrachteten Fliessregime; wird auf der Abszisse anstelle von  $s_\xi / f_{cc}^{2/3} [-]$   $s_\eta / f_{cc}^{2/3} [-]$  aufgetragen, ergeben sich aufgrund der formalen Ähnlichkeit von (5.131) und (5.134) gleiche Verhältnisse. Der Einfluss von  $\psi$  auf die Betondruckfestigkeit der Regime 2 und 3 ist gering.

Um bei drei (oder mehr) Bewehrungslagen die Begrenzung des für die Bemessung relevanten Regimes 1 zu bestimmen, kann analog vorgegangen werden. Allgemein grenzen an das Regime 1 Regime mit einer oder zwei nicht fliessenden Bewehrungslagen, wobei letztere nur Punkte der Begrenzungskurve bilden und somit Spezialfälle der ersteren darstellen (siehe Anhang B). Wird die Richtung der nicht fliessenden Bewehrungslage mit  $n$  und der entsprechende Winkel mit  $\psi$  bezeichnet, so lässt sich die für die Bestimmung der Betondruckfestigkeit gemäss (5.127) erforderliche Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  mit (5.132) mit  $\varepsilon_n = \zeta_n \cdot \varepsilon_{s\eta n}$  und  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_{cu}$  bestimmen. Definiert man



**Bild 5.15** – Tragwiderstand – Einfluss von  $\psi$ : (a) maximale erreichbare Spannung  $\tau_{\xi\eta}$  bei einer effektiven Betondruckfestigkeit  $f_c$  gemäss (5.137)<sub>1</sub>; (b) Betondruckfestigkeit des Regimes 4 gemäss (5.137); (c) maximale erreichbare Spannung  $\tau_{\xi\eta}$  bei  $f_c$  gemäss (5.131), (5.134) und (5.137); (d) Betondruckfestigkeit. (Parameter gleich wie für Bild 5.14)

$$\sigma'_i = \sigma_i - \sum_{k=1}^m \rho_k f_{sky} t_i (-\psi_k) \quad (5.138)$$

wobei über die  $m$  fließenden Bewehrungslagen summiert wird, lautet die Gleichgewichtsbedingung (5.7)<sub>1</sub> mit der entsprechenden Spannung in schiefwinkligen Koordinaten

$$\sigma'_\xi = \sigma'_x \sin \psi + \sigma'_y \cos \psi \cot \psi - 2\tau'_{xy} \cos \psi \quad (5.139)$$

$$\sigma'_\xi = -f_c \frac{\sin^2 \theta_r}{\sin \psi} (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta_r)^2 \quad (5.140)$$

Wird (5.140) nach  $\theta_r$  aufgelöst und dies in (5.132) eingesetzt, resultiert eine quadratische Gleichung für  $f_c$  mit der Lösung

$$f_c = \frac{-\sigma'_\xi \sin \psi}{2c_2 (\zeta_n \varepsilon_{sny} + \varepsilon_{cu})} \left[ \sqrt{4c_2 (\zeta_n \varepsilon_{sny} + \varepsilon_{cu}) \frac{f_{cc}^{2/3}}{-\sigma'_\xi \sin \psi} + (c_1 - c_2 \varepsilon_{cu})^2} - (c_1 - c_2 \varepsilon_{cu}) \right] \quad (5.141)$$

[N/mm<sup>2</sup>]

Durch Einsetzen der auf diese Weise ermittelten Betondruckfestigkeit in die entsprechende Fließbedingung der Regime mit einer nicht fließenden Bewehrungslage lässt sich schliesslich die Begrenzung des Regimes 1 bestimmen.

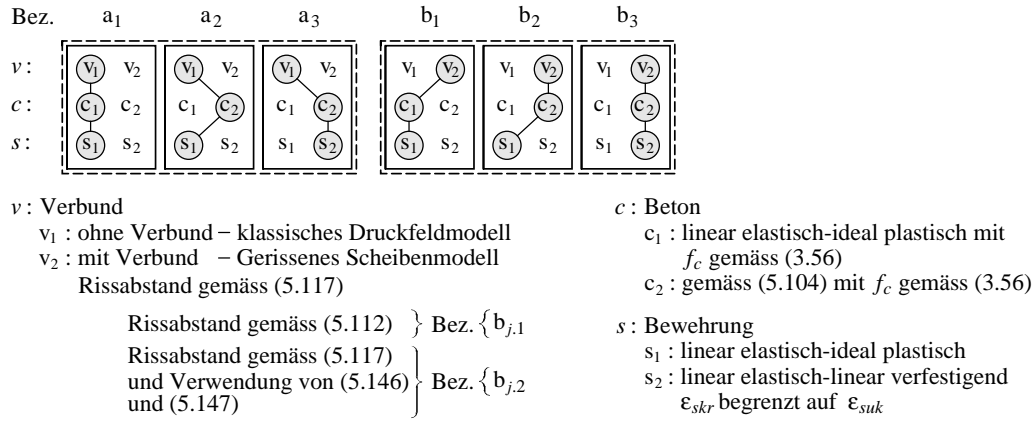


Bild 5.16 – Bezeichnung der Modelle.

## 5.5 Diskussion

### 5.5.1 Beispiel

Die Diskussion und Gegenüberstellung der verschiedenen Modelle erfolgt nachfolgend anhand des Beispiels in Bild 5.17 (Zahlenwerte gemäss Tab. 5.1), eines mit zwei schiefwinkligen Lagen bewehrten, initial spannungsfreien Scheibenelements unter monoton wachsender reiner Schubbeanspruchung  $\tau_{xy}$  ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ). Zwecks einer knappen und konsistenten Darstellung werden die in Kapitel 5.4 eingeführten Modelle mit zweckmässig kombinierten Stoffbeziehungen des Betons und der Bewehrung gemäss Bild 5.16 bezeichnet.

Bild 5.17(a) zeigt die Ergebnisse gemäss dem klassischen Druckfeldmodell a<sub>1</sub> mit stark idealisierten Stoffbeziehungen. Nach dem Reißen bei  $\tau_{xy} = 3,71 \text{ N/mm}^2$  mit  $\theta_r = 45,4^\circ$  (ohne Berücksichtigung der Bewehrung:  $\tau_{xy} = f_{ct} = 3,51 \text{ N/mm}^2$  mit  $\theta_r = 45^\circ$ ) liefern die Gleichgewichtsbedingungen (5.37) unter Berücksichtigung von (5.5)

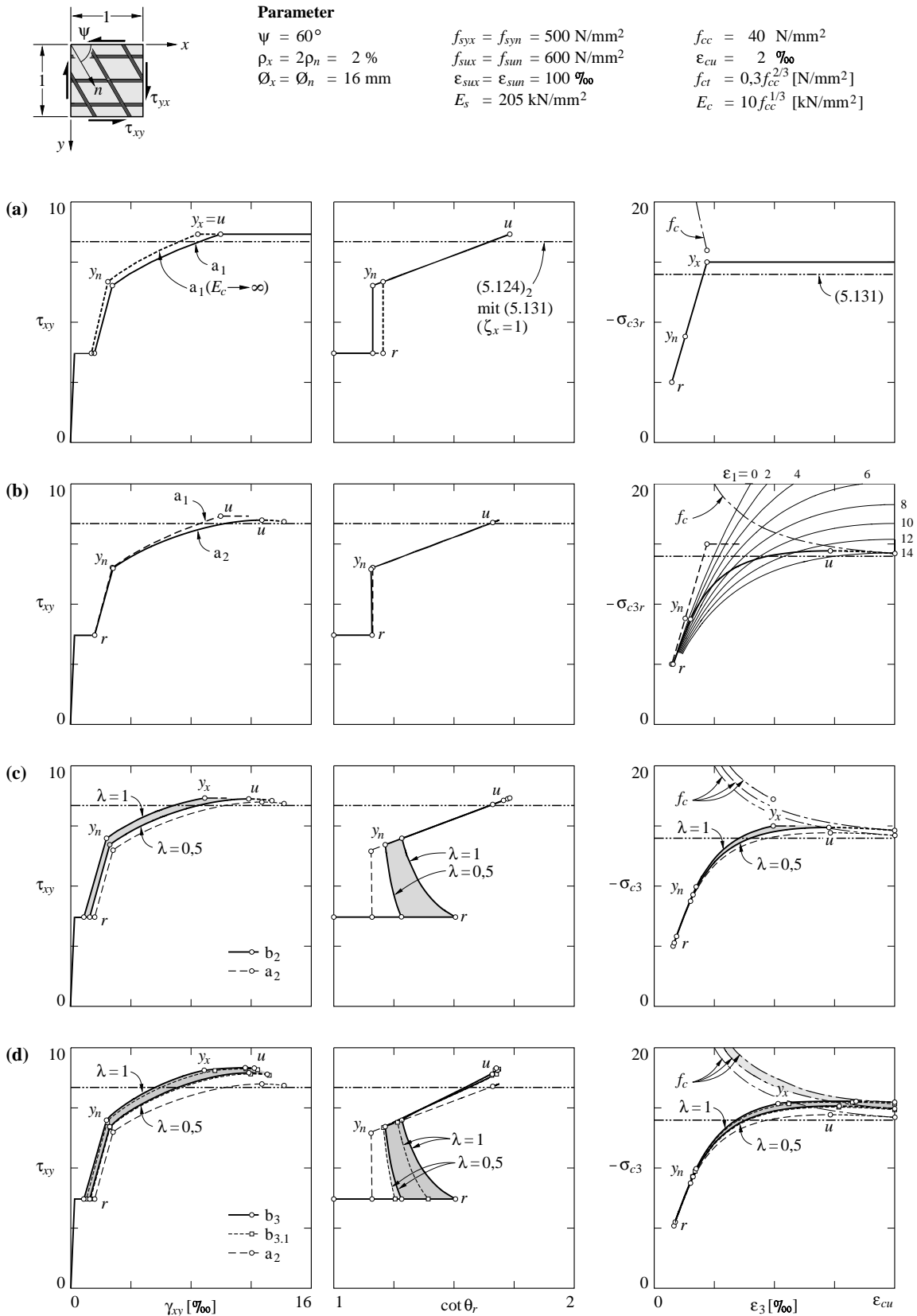
$$\sigma_{sx} = \frac{\tau_{xy}}{\rho_x \sin \psi} (\cot \theta_r \sin \psi - \cos \psi) \quad \text{und} \quad \sigma_{sn} = \frac{\tau_{xy}}{\rho_n \sin \psi} (\cot \theta_r \sin \psi + \cos \psi)^{-1} \quad (5.142)$$

zur Bestimmung der Stahlspannungen, wobei die Druckfeldrichtung aus (5.96) folgt,  $\theta_r = 40,71^\circ$ . Die Betondruckspannung folgt gemäss (5.41) aus  $-\sigma_{c3r} = \rho_x \sigma_{sx} + \rho_n \sigma_{sn}$ . Nachdem die Bewehrung in n-Richtung bei  $\tau_{xy} = \rho_n f_{syn} \sin \psi (\cos \psi + \sin \psi \cot \theta_r) = 6,52 \text{ N/mm}^2$  die Fließgrenze erreicht, ist das System statisch bestimmt, und die Betondruckfeldrichtung resultiert direkt aus der Gleichgewichtsbedingung (5.142)<sub>2</sub>

$$\cot \theta_r = \frac{\tau_{xy}}{\rho_n f_{syn} \sin^2 \psi} - \cot \psi \quad (5.143)$$

Die Bewehrung in x-Richtung erreicht die Fließgrenze bevor der Beton die Druckfestigkeit  $f_c = 16 \text{ N/mm}^2$  gemäss (3.56) erreicht; mithin wird das Regime 1 massgebend. Die Traglast beträgt

$$\tau_{xyu} = \rho_n f_{syn} \sin \psi \left( \cos \psi + \sqrt{\cos^2 \psi + \frac{\rho_x f_{syx}}{\rho_n f_{syn}}} \right) = 8,66 \text{ N/mm}^2 \quad (5.144)$$



**Bild 5.17** – Beispiel: (a) klassisches Druckfeldmodell  $a_1$ ; (b) klassisches Druckfeldmodell  $a_2$ ; (c) Gerissenes Scheibenmodell  $b_2$ ; (d) Gerissenes Scheibenmodell  $b_3$  und  $b_{3,1}$ . Alle Spannungen in  $[\text{N/mm}^2]$ .



	Modell	$\tau_{xy}$ N/mm <sup>2</sup>	$-\sigma_{c3r}$ N/mm <sup>2</sup>	$f_c$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{sxr}$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{snr}$ N/mm <sup>2</sup>	$\gamma_{xy}$ ‰	$\varepsilon_1$ ‰	$-\varepsilon_3$ ‰	$\cot\theta_r$	Reg.
Fließbeginn	a <sub>1</sub>	6,52	8,82	24,57	190,8		2,76	2,54	0,26	1,162	
	a <sub>1</sub> <sup>(1)</sup>	6,68	9,20	24,61	209,8		2,47	2,51	0,00	1,205	
	a <sub>2</sub>	6,49	8,74	24,56	187,5	500,0	2,81	2,54	0,30	1,155	
	b <sub>2,3</sub> ( $\lambda=0,5$ )	6,72	9,28	24,91	213,8		2,59	2,32	0,32	1,214	
	b <sub>2,3</sub> ( $\lambda=1$ )	6,96	9,88	25,27	244,3		2,37	2,10	0,35	1,279	
$\tau_{xy,max}$	a <sub>1</sub>	8,66	15,00	15,98	500,0		9,97	11,07	0,44	1,732	1
	a <sub>1</sub> <sup>(1)</sup>	8,66	15,00	16,89	500,0		8,45	9,76	0,00	1,732	1
	a <sub>2</sub>	8,49	14,43	14,79	471,5	500,0	12,71	13,02	1,47	1,688	2
	b <sub>2</sub> ( $\lambda=0,5$ )	8,62	14,87	15,28	493,7		11,84	12,18	1,45	1,722	2
	b <sub>2</sub> ( $\lambda=1$ )	8,66	15,00	17,23	500,0		8,91	9,30	0,99	1,732	1
	b <sub>3</sub> ( $\lambda=0,5$ )	8,95	15,43	15,43	492,7	529,3	11,85	11,93	1,54	1,678	2
	b <sub>3</sub> ( $\lambda=1$ )	9,17	15,55	15,68	506,8	540,9	11,60	11,53	1,68	1,684	2

<sup>(1)</sup> a<sub>1</sub> mit  $E_c \rightarrow \infty$

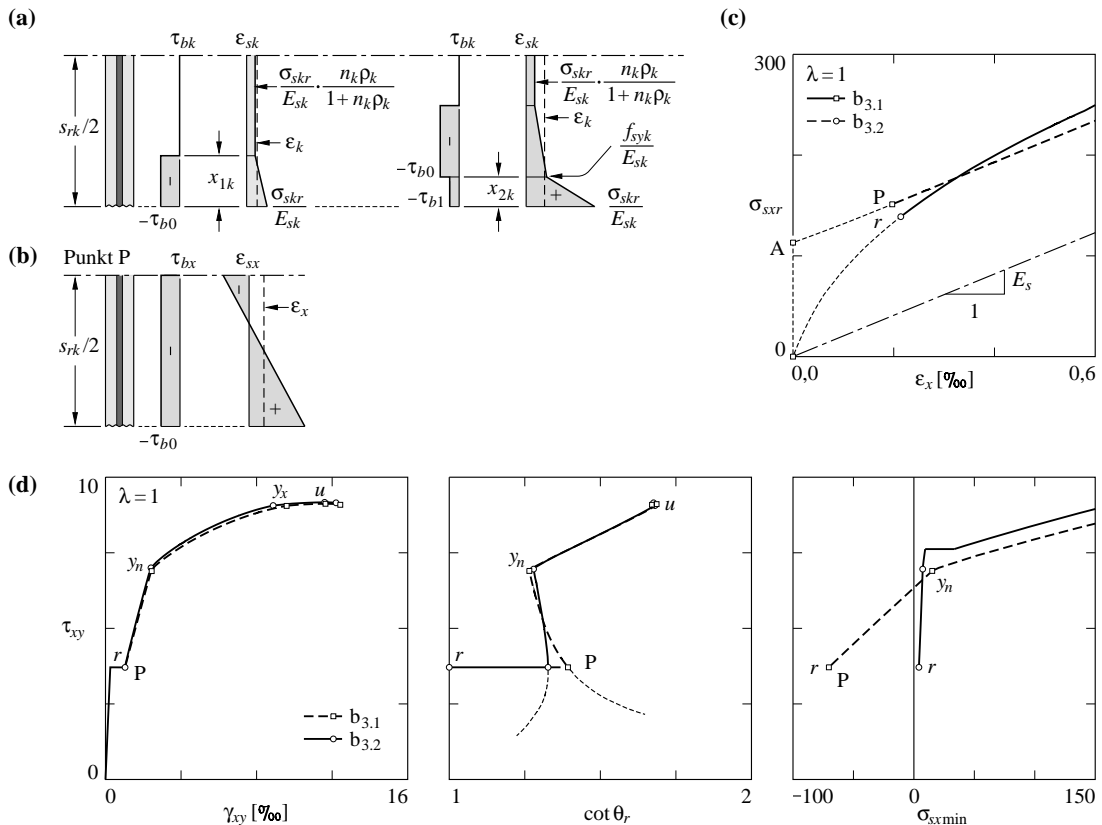
Tab. 5.1 – Beispiel in Bild 5.17: Ergebnisse der einzelnen Modelle.

und die zugehörige Betondruckspannung  $-\sigma_{c3r} = \rho_x f_{sx} + \rho_n f_{syn} = 15,0 \text{ N/mm}^2$ . Der die Betondruckfeldrichtung beschreibende Winkel  $\theta_r$  folgt aus

$$\cot \theta_r = \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\cos^2 \psi + \frac{\rho_x f_{sxx}}{\rho_n f_{syn}}} = 1,732 \quad (5.145)$$

zu  $\theta_r = 30^\circ$ . Wird der Beton vereinfachend als starr angenommen ( $E_c \rightarrow \infty$ ), beträgt die Druckfeldrichtung gemäss (5.96)  $\theta_r = 39,69^\circ$ , und das Verhalten wird etwas steifer. Die Traglast gemäss Regime 1 bleibt unverändert. Da beim Erreichen der Traglast im Regime 1  $\varepsilon_3 = 0$  ist, und beim Modell a<sub>1</sub> mit  $E_c \rightarrow \infty$   $\varepsilon_3 = 0$  ist, sind infolge der Koaxialität der Hauptachsen des Verzerrungstensors, des Tensors der Verzerrungssinkremente und des Betondruckspannungstensors die Vektoren der Verzerrungssinkremente und der Verzerrungen allgemein kollinear, d. h. es gilt  $\dot{\varepsilon}_i = \alpha \cdot \varepsilon_i$  mit dem positiven Skalar  $\alpha > 0$ . Mithin lässt sich der Mohr'sche Verzerrungskreis inkl. Pol mit einer zentrischen Streckung bezüglich des Ursprungs in den Mohr'schen Kreis inkl. Pol der Verzerrungssinkremente überführen.

Bild 5.17(b) zeigt die Ergebnisse einer Modellierung gemäss dem klassischen Druckfeldmodell a<sub>2</sub>. Bei elastischer Bewehrung ist die Spannungs-Dehnungscharakteristik des Betons annähernd linear, der Winkel  $\theta_r$  demgemäss annähernd konstant, womit das Verhalten kaum von jenem des Modells a<sub>1</sub> abweicht. Nach dem Fließbeginn der Bewehrung in  $n$ -Richtung wird das Verhalten gegenüber jenem des Modells a<sub>1</sub> bedingt durch die grösseren Betonstauchungen zunehmend nachgiebiger. Infolge der grösseren Hauptdehnungen  $\varepsilon_1$  fällt die Betonfestigkeit tiefer aus, so dass die maximale Beanspruchung  $\tau_{xyu}$  vor dem Fließbeginn der Bewehrung in  $x$ -Richtung eintritt (Regime 2). Da die Zunahme der Betondruckspannung  $-\sigma_{c3r}$  infolge anwachsender Hauptdehnung  $-\varepsilon_3$  durch den mit zunehmender Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  abnehmenden Wert  $f_c$  kompensiert bzw. überkompensiert wird, erreicht der Betrag von  $\sigma_{c3r}$  den Maximalwert bei Verzerrungen  $\varepsilon_3 = \varepsilon_{3u}$ , welche betragsmässig geringer als  $\varepsilon_{cu}$  sind. Der zugehörige Maximalbetrag von  $\sigma_{c3r}$  – die Betondruckfestigkeit – ist etwas grösser als der Parameter  $f_c$ , welcher folglich in (5.104) nicht die Betondruckfestigkeit beschreibt. Zur Erläuterung zeigt Bild 5.17(b)<sub>3</sub> die Betondruckspannung  $-\sigma_{c3r}$  gemäss (3.56) in Abhängigkeit von  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_1$  im Vergleich zur entsprechenden Charakteristik des Modells a<sub>2</sub> mit veränderlicher Hauptdehnung  $\varepsilon_1$ . Folglich lässt sich die maximale Beanspruchung  $\tau_{xy,max}$  bei einer nicht fließenden Bewehrungslage allgemein nicht direkt durch Lösen des Gleichungssystems unter Vorgabe von  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_{cu}$  ermitteln; die auf diese Weise ermittelte Beanspruchung  $\tau_{xy}$  weicht allerdings in der Regel nur unbedeutend von  $\tau_{xy,max}$  ab und ist stets tiefer. Zum Vergleich ist in Bild 5.17(a–d) die aus (5.124)<sub>2</sub> mit der Betondruckfestigkeit gemäss (5.131) mit  $\zeta_x = 1$  und  $\zeta_c = 1$  berechnete Traglast  $\tau_{xyu} = 8,36 \text{ N/mm}^2$  resp. die entsprechende Betondruckfestigkeit  $f_c = 14,0 \text{ N/mm}^2$  eingetragen (siehe auch Bild 5.14(b) Punkt A).



**Bild 5.18** – Anpassung des Gerissenen Scheibenmodells: (a) Risselement mit starrem Verbund in Elementmitte; (b) Verbundschubspannungs- und Stahldehnungsverlauf unmittelbar nach dem Reißen (Punkt P) bei einer Berechnung des Beispiels in Bild 5.17 gemäss dem Gerissenen Scheibenmodell  $b_{3,1}$  ( $\lambda=1$ ); (c) und (d) Gegenüberstellung von Ergebnissen gemäss  $b_{3,1}$  und  $b_{3,2}$ . Parameter: vgl. Bild 5.17. Alle Spannungen in  $[\text{N}/\text{mm}^2]$ .

Da  $\zeta_x = \varepsilon_x / \varepsilon_{syx} = 0,94$  und  $\zeta_c = -\varepsilon_3 / \varepsilon_{cu} = 0,74$  sind, sind die Betondruckfestigkeit und die maximale Beanspruchung gemäss Modell  $a_2$  etwas höher (siehe Tab. 5.1). Die Hauptachsen des Betonspannungstensors beim Erreichen des Tragwiderstands stimmen allgemein sowohl mit jenen des Verzerrungstensors als auch mit jenen des Tensors der Verzerrungsinkremente überein, sodass die Hauptachsen dieser beiden Tensoren stets koaxial sind.

Bild 5.17(c) zeigt die Ergebnisse einer Modellierung gemäss dem Gerissenen Scheibenmodell  $b_2$  für die beiden Grenzfälle  $\lambda=0,5$  und  $\lambda=1$ . Bedingt durch die Berücksichtigung der Zugversteifung resultiert insbesondere nach dem Fließbeginn ein steiferes Verhalten, verbunden mit einer höheren Betondruckfestigkeit und entsprechend einem etwas grösseren Tragwiderstand. Während für  $\lambda=0,5$  der Tragwiderstand gemäss Regime 2 eintritt, erreicht für  $\lambda=1$  die Bewehrung in  $x$ -Richtung die Fließgrenze, bevor der Beton die Druckfestigkeit erreicht, so dass das Regime 1 massgebend ist. Bei  $\lambda=0,5$  liefert (5.131) die maximale Betondruckfestigkeit gemäss Modell  $b_2$ , falls  $\zeta_x=0,81$  und  $\zeta_c=0,73$  gesetzt werden. Durch die Berücksichtigung der Zugversteifung konzentrieren sich die plastischen Dehnungen der fließenden Bewehrung auf den Rissquerschnitt und wachsen im Modell folglich über alle Grenzen. Vor dem Fließbeginn weicht die Druckfeldrichtung gemäss  $b_2$  stark von jener gemäss  $a_2$  ab. Nach dem Fließbeginn ist das System bei beiden Modellen statisch bestimmt, womit die Druckfeldrichtung durch die Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmt und folglich bei beiden Modellen gleich ist.

Bild 5.17(d) zeigt die Ergebnisse einer Modellierung gemäss dem Gerissenen Scheibenmodell  $b_3$  und  $b_{3,1}$  für die beiden Grenzfälle  $\lambda=0,5$  und  $\lambda=1$ . Obwohl die Druckfeldrichtungen der beiden Modelle  $b_3$  und  $b_{3,1}$  vor dem Fließbeginn der Bewehrung in  $n$ -Richtung nicht zu vernachlässigende Unterschiede aufweisen, weichen die beiden  $\tau_{xy}$ - $\gamma_{xy}$ -Charakteristiken nur unwesentlich voneinander ab.

Gegenüber einer Beschreibung gemäss  $b_2$  resultiert nach dem Fließbeginn, bedingt durch die Verfestigung sowie die Zugversteifung der verfestigenden Bewehrung, ein steiferes Verhalten, welches zu einer höheren Betondruckfestigkeit und somit einer höheren maximalen Beanspruchung  $\tau_{xy,max}$  führt. Durch die Berücksichtigung der Verfestigung des Bewehrungsstahls lässt sich die Lokalisierung der Stahldehnungen im Rissbereich beschreiben, wodurch die Berücksichtigung einer Begrenzung der Bewehrungsdehnung ermöglicht wird.

Wie bereits in Kapitel 5.4.3 bei der Bestimmung des Abstands der fiktiven Risse erwähnt, überschätzt das Gerissene Scheibenmodell bei geringen Beanspruchungen teilweise die Zugversteifung. Im Gegensatz zu einer reinen Zugbelastung in Richtung der Bewehrung wie sie bei einem Zugglied vorherrscht, können die mittleren Dehnungen in Richtung einer Bewehrungslage  $\varepsilon_k$  bei monoton wachsenden ebenen Belastungen sehr geringe Werte annehmen. Bild 5.18(b) zeigt beispielsweise den Verlauf der Stahldehnungen der Bewehrung in  $x$ -Richtung bei einer Berechnung gemäss dem Modell  $b_{3,1}$  ( $\lambda = 1$ ) unmittelbar nach dem Reißen (Punkt P). Obwohl die Stahlspannung am Riss positiv ist, und die Beanspruchung monoton anwächst, resultieren durch die konstant über das Risselement wirkenden Verbund Schubspannungen  $\tau_{b0}$  in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen negative Stahlspannungen (Druckspannungen). Bild 5.18(d)<sub>3</sub> zeigt, dass die Stahlspannungen der Bewehrung in  $x$ -Richtung in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen im betrachteten Fall bis kurz vor dem Fließbeginn negativ sind. Gemäss Bild 5.18(c) ergeben sich mit einer Modellierung gemäss dem Gerissenen Scheibenmodell für  $\varepsilon_x = 0$  Stahlspannungen am Riss, welche durch die Dehnung  $\varepsilon_x$  nicht eindeutig bestimmt sind (Strecke AO). Wird beim betrachteten Beispiel ein Beton mit geringerer Zylinderdruckfestigkeit verwendet, z. B.  $f_{cc} = 20 \text{ N/mm}^2$ , so liefert das Gleichungssystem des Gerissenen Scheibenmodells aufgrund der unbestimmten Stahlspannung der Bewehrung in  $x$ -Richtung unmittelbar nach dem Reißen keine Lösung.

Bei einem – beispielsweise durch (5.117) – gegebenen Rissabstand lässt sich diese Inkonsistenz beseitigen, indem bei der Bestimmung der Stahlspannung am Riss zwei weitere Fälle eingeführt werden, bei denen nur im Bereich des Risses ein verschieblicher Verbund vorliegt (Modell  $b_{3,2}$ ). Gemäss Bild 5.18(a) beträgt die Stahlspannung am Riss in diesen Fällen

$$\sigma_{skr} = x_{1k} \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing_k} (1 + n_k \rho_k) \quad \text{mit} \quad (5.146)$$

$$x_{1k} = \frac{s_{rk}}{2} \left( \sqrt{n_k^2 \rho_k^2 + \frac{E_s \varepsilon_k \cdot \varnothing_k}{\tau_{b0} s_{rk}}} - n_k \rho_k \right) \quad [0 \leq x_{1k} \leq s_{rk}/2]$$

sowie

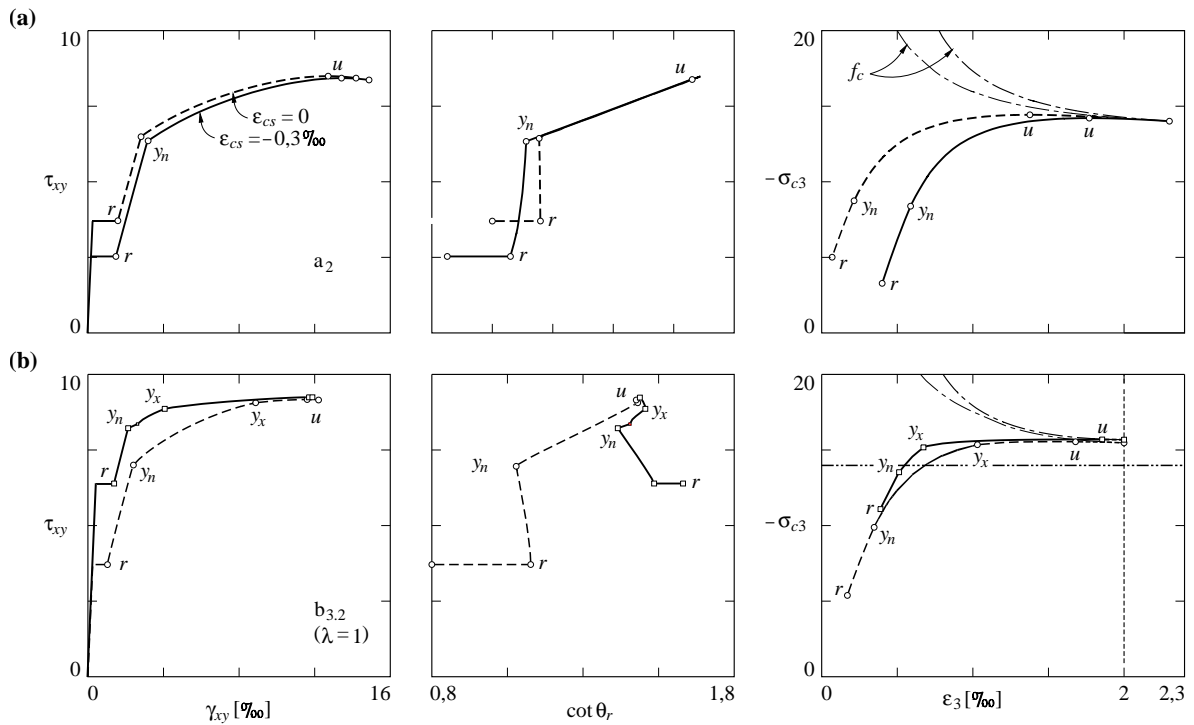
$$\sigma_{skr} = f_{syk} + x_{2k} \frac{4\tau_{b1}}{\varnothing_k} \quad \text{mit} \quad (5.147)$$

$$x_{2k} = \frac{\varnothing_k f_{syk} E_{sh}}{4\tau_{b1} \alpha E_s} \left( \sqrt{4 \frac{\alpha E_s}{E_{sh}} \left[ \frac{s_{rk} \tau_{b1}}{\varnothing_k f_{syk}} \left( \frac{\alpha E_s \varepsilon_k}{f_{syk}} - n_k \rho_k \right) - \frac{\tau_{b1}}{4\alpha \tau_{b0}} \right]} + 1 - 1 \right)$$

mit  $\alpha = 1 + n_k \rho_k$   $[0 \leq x_{2k} \leq s_{rk}/2]$

Auf diese Weise verschwindet (allgemein) die Stahlspannung am Riss bei  $\varepsilon_k = 0$  (siehe beispielsweise Bild 5.18(c)), und die Stahlspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen sind stets positiv (siehe beispielsweise Bild 5.18(d)<sub>3</sub>). Vor dem Fließbeginn der Bewehrung in  $n$ -Richtung resultieren gegenüber dem Modell  $b_{3,1}$  geringere Werte für  $\cot\theta_r$ , welche weniger ausgeprägt von den Werten gemäss  $a_1$  und  $a_2$  abweichen. Die  $\tau_{xy}$ - $\gamma_{xy}$ -Charakteristiken von  $b_{3,1}$  und  $b_{3,2}$  weisen indes nur geringe Unterschiede auf (Bild 5.18(c)).

Bild 5.19(a) zeigt die Ergebnisse einer Berechnung gemäss Modell  $a_2$  mit Berücksichtigung einer konstanten Schwinddehnung des Betons  $\varepsilon_{cs} = -0,3 \%$ . Gegenüber einer analogen Berechnung ohne Berücksichtigung des Schwindens resultiert durch die dem Beton in Bewehrungsrichtung auferlegte



**Bild 5.19** – Beispiel in Bild 5.17: (a) Modell  $a_2$  mit Berücksichtigung des Schwindens,  $\epsilon_{cs} = -0,3\text{‰}$ ; (b) vorgespannte Bewehrung in  $x$ -Richtung (Parameter der vorgespannten Bewehrung:  $\rho_{px} = 0,93\text{‰}$ ,  $f_{pyx} = 1080\text{ N/mm}^2$ ,  $f_{pux} = 1230\text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{pxo} = 0,85 \cdot 0,7 \cdot f_{pux}$  ( $\Delta\epsilon_{px} = 3,768\text{‰}$ ,  $\sigma_{pdi} = [(7,15), 0, 0]\text{ N/mm}^2$ ); übrige Parameter vgl. Bild 5.17). Alle Spannungen in  $[\text{N/mm}^2]$ .

Zwängung eine tiefere Risslast  $\tau_{xy} = 2,53\text{ N/mm}^2$ . Bei gleichen Elastizitätsmodul der beiden Bewehrungslagen behindert die Bewehrung in  $x$ -Richtung die Schwinddehnungen des Betons stärker, so dass der Winkel  $\theta_r$  beim Reißen,  $\theta_r = 49,6^\circ$ , grösser ausfällt als bei vernachlässigten Schwinddehnungen. Dementsprechend ergibt sich bis zum Erreichen der maximalen Beanspruchung eine grössere Änderung der Druckfeldrichtung. Generell resultiert ein etwas weiches Verhalten; der Tragwiderstand wird indes nicht beeinflusst.

Bild 5.19(b) zeigt die Ergebnisse einer Berechnung gemäss Modell  $b_{3,2}$ , für den Fall, dass beim Beispiel in Bild 5.18 die Bewehrung in  $x$ -Richtung vorgespannt ist. Deren Bewehrungsgehalt ist dabei so gewählt worden, dass der mechanische Bewehrungsgehalt  $\omega_x = \rho_{px} \cdot f_{pyx} / f_{cc}$  jenem des Beispiels in Bild 5.18 ( $\omega_x = \rho_{sx} \cdot f_{syx} / f_{cc}$ ) entspricht, was bezüglich des Tragwiderstands einen direkten Vergleich der beiden Beispiele zulässt. Die den Verbund und somit die Zugversteifung bestimmenden Parameter  $\phi_x$ ,  $\tau_{b0}$  und  $\tau_{b1}$  werden der Einfachheit halber gleich jenen der schlaffen Bewehrung gewählt. Im Vergleich zum Beispiel in Bild 5.18 bewirkt die Vorspannung eine Erhöhung der Risslast auf  $\tau_{xy} = 5,90\text{ N/mm}^2$  und im gerissenen Zustand ein steiferes Verhalten. Die Druckfeldrichtung unmittelbar vor dem Reißen schliesst mit der  $x$ -Richtung einen kleineren Winkel ein, womit die Änderung der Druckfeldrichtung bis zur maximalen Beanspruchung verringert wird. Wird bei zwei Bewehrungslagen diejenige mit dem grösseren mechanischen Bewehrungsgehalt  $\omega_k = \rho_{pk} \cdot f_{pyk} / f_{cc}$  vorgespannt, ergeben sich generell geringere Änderungen der Druckfeldrichtung zwischen der Erstrissbildung und dem Tragwiderstand. Der Tragwiderstand wird in der Regel durch eine Vorspannung nicht beeinflusst.

### 5.5.2 Experimentelle Verifikation

Eine Gegenüberstellung von Messwerten experimenteller Untersuchungen an orthogonal bewehrten Betonscheiben und den Ergebnissen einer entsprechenden Berechnung mit dem Gerissenen Scheibenmodell ( $b_{3,1}$ ) findet man bei Kaufmann [64]. Generell resultiert eine gute Übereinstimmung so-

wohl hinsichtlich der Höchstlast als auch der Last-Verformungscharakteristiken. Tendenziell ist das Verhalten im Experiment insbesondere bei gegenüber der Höchstlast geringen Belastungen etwas steifer als gemäss dem Gerissenen Scheibenmodell. Mutmassliche Ursache ist die im Modell vernachlässigte Verzahnung der Risse insbesondere bei geringen Rissbreiten. Die Betondruckfestigkeit wird ausser der Dehnung senkrecht zur Druckrichtung auch von der vorangegangenen Änderung der Druckfeldrichtung beeinflusst, indem der Beton dadurch mit mehr Rissen durchsetzt und entsprechend geschädigt ist; dies wird bei den diskutierten Modellen nicht berücksichtigt. Experimentelle Untersuchungen an schiefwinklig bewehrten Betonscheiben unter einer homogenen ebenen Beanspruchung sind dem Verfasser keine bekannt.

### 5.5.3 Schlussbetrachtungen

Die Wahl eines geeigneten Modells zur Behandlung einer Fragestellung zum ebenen Spannungszustand im Stahlbeton hängt (wie in Kapitel 4 diskutiert) von der im Rahmen der Gesamtaufgabe geforderten und erreichbaren Genauigkeit und Aussagekraft der Ergebnisse ab. Zu beachten ist dabei, dass selbst die verfeinerten Modelle (z. B.  $b_{3,2}$ ), welche mit den aufwendigen Berechnungen eine hohe Genauigkeit suggerieren, auf einer Reihe einschneidender Voraussetzungen und Idealisierungen basieren und verschiedene Einflüsse wie die Belastungsgeschichte nicht mit einbeziehen. Im Sinne einer sukzessiven Approximation bilden zweckmässigerweise die einfachsten Modelle stets den Anfang der Behandlung einer Fragestellung. Der Tragwiderstand lässt sich in einem ersten Schritt mit den in Kapitel 5.2 betrachteten Fliessbedingungen und einer konstanten Betondruckfestigkeit, z. B. gemäss (5.137) und Bild 5.15(b), und einer Beschränkung des Faktors  $k$  abschätzen. Der Ersatz der Betondruckfestigkeit durch die entsprechenden Werte des Kapitels 5.4.4 bildet die nächst höhere Stufe der sukzessiven Approximation. Weitere Verfeinerungen der Modellierung werden mit den Modellen  $a_2$ ,  $b_2$  und schliesslich  $b_3$  des Kapitels 5.4 erreicht, wobei der damit verbundene Berechnungsaufwand in den allermeisten Fällen nicht gerechtfertigt ist.

Eine erste Abschätzung des gesamten Tragverhaltens liefert das Modell  $a_1$  (allenfalls vereinfacht mit  $E_c \rightarrow \infty$ ); die Modelle  $a_2$  sowie  $b_1$  bis  $b_3$  stellen der Reihe nach die weiteren Stufen der sukzessiven Approximation dar. Für viele Fragestellungen reicht die Beschreibung der Steifigkeit im gerissenen Zustand bei elastischen Bewehrungslagen mit dem Modell  $a_1$  oder allenfalls  $b_1$  aus. Vereinfachend lässt sich das gesamte Tragverhalten durch diese, die Traglast gemäss Kapitel 5.4.4 sowie die Steifigkeit im ungerissenen Zustand charakterisieren, womit sich die Spannungs-Dehnungscharakteristik des Stahlbetonkontinuums aus vier linearen Ästen zusammensetzt; für viele Fragestellungen reicht eine derartige Approximation bereits aus. Eine grobe Abschätzung der Rissbreiten erlaubt (5.122) mit dem Rissabstand  $s_r = \lambda \cdot s_{r0}$  mit  $[0,5 \leq \lambda \leq 1]$  und dem maximalen Rissabstand  $s_{r0}$  gemäss (5.118). Die Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  kann dabei vereinfachend auch mit dem Modell  $a_1$  bestimmt werden.

## 5.6 Zusammenfassung

Der Tragwiderstand und die Bemessung von Stahlbeton im ebenen Spannungszustand können mit einer plastischen Modellierung gemäss Kapitel 5.2 ermittelt werden. Beziehungen zur Bestimmung der Betondruckfestigkeit enthält Kapitel 5.4.4; vereinfachend kann eine von der Beanspruchung unabhängige Betondruckfestigkeit gemäss (5.137) (Bild 5.15(b)) in Kombination mit einer Beschränkung des Faktors  $k = |\cos\psi + \sin\psi \cot\theta|$  auf das Intervall  $[0,5 \leq k \leq 2]$  verwendet werden. Für grosse Schubspannungen  $\tau_{\xi\eta}$  und von eins stark abweichende Werte für  $k$  wird damit der Tragwiderstand allerdings überschätzt; für  $k=1$  wird der Tragwiderstand stets leicht unterschätzt, so dass eine auf der sicheren Seite liegende Bemessung resultiert.

Die Fliessbedingungen sind anisotrop; die Hauptachsen des Tensors der Verzerrungsinkremente und diejenigen des Betonspannungstensors sind hingegen koaxial.

Ist die grössere Hauptspannung der äusseren Spannungen bei einem zweiachsigen Spannungszustand positiv,  $\sigma_1 > 0$ , sind in der Regel zwei Bewehrungslagen erforderlich; die Verhältnisse, bei de-

nen eine Bewehrungslage ausreicht, werden in Kapitel 5.2.3 aufgezeigt. Eine dritte Bewehrungslage stellt eine frei wählbare überzählige Kraftgrösse dar, so dass die Bemessung aufgrund der Beziehungen für zwei Bewehrungslagen erfolgen kann. Die Verwendung von äquivalenten orthogonalen Bewehrungen zur Beschreibung allgemein schiefwinkliger Bewehrungslagen ist nicht zweckmässig.

Im ungerissenen Zustand kann der Beitrag der Bewehrung in der Regel vernachlässigt werden. Durch die Bewehrung behinderte Schwinddehnungen des Betons verursachen einen Eigenspannungszustand, der eine Umlagerung der inneren Kräfte bewirkt und die Risslast reduziert.

Das gerissene Verhalten lässt sich mit dem klassischen Druckfeldmodell gemäss Kapitel 5.4.2 beschreiben. Die Zugversteifung lässt sich mit dem Gerissenen Scheibenmodell gemäss Kapitel 5.4.3 berücksichtigen. Bei Vernachlässigung der Zugversteifung wird der Tragwiderstand unter- und das Verformungsvermögen in der Regel überschätzt. Bis zum Fliessbeginn einer Bewehrungslage kann mit guter Näherung von einem linear elastischen Verhalten des Betons ausgegangen werden. In der Regel ist das Verhalten anisotrop; die Hauptachsen des Verzerrungstensors und diejenigen des Betonspannungstensors sind hingegen bei beiden betrachteten Modellen coaxial. Der Abstand der fiktiven Risse  $s_r$  ist auf das Intervall  $[s_{r0}/2 \leq s_r \leq s_{r0}]$  beschränkt, wobei der maximale Abstand der fiktiven Risse  $s_{r0}$  mit (5.117) ermittelt werden kann. Die Rissbreite lässt sich näherungsweise mit (5.122) bestimmen. In bestimmten Fällen wird die Zugversteifung mit dem Gerissenen Scheibenmodell bei geringen Beanspruchungen überschätzt. Wird der Abstand der fiktiven Risse vorausgesetzt, so lässt sich dieser Mangel des Modells beheben, indem der verschiebliche Verbund auf den rissnahen Bereich beschränkt wird.

Das Verformungsvermögen wird in der Regel durch den Bruch des Betons beschränkt. Die Analyse von Fällen mit einem Zerreißen der Bewehrung erfordert die Berücksichtigung des Verbundverhaltens und der Verfestigung des Bewehrungsstahls (z. B. mit Hilfe des Gerissenen Scheibenmodells).

Sowohl das klassische Druckfeldmodell als auch das Gerissene Scheibenmodell sind mit einer plastischen Modellierung gemäss Kapitel 5.2 vereinbar.

Bei praktischen Fragestellungen stehen in der Regel der Tragwiderstand und die Steifigkeiten des ungerissenen und gerissenen Stahlbetons bei elastischer Bewehrung im Vordergrund. Fragen des Verformungsvermögens erfordern eine genauere Beschreibung des Werkstoffverhaltens mit Berücksichtigung des Verbundverhaltens und der Verfestigung des Bewehrungsstahls.



## 6 Elemente ebener Stahlbeton-Flächentragwerke

### 6.1 Einleitung

Gegenstand des vorliegenden Kapitels sind Modellvorstellungen zur Beschreibung des Tragverhaltens von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke. Die Modelle sollen einerseits eine Bemessung sowie Beurteilung des Tragwiderstands aufgrund gegebener verallgemeinerten Spannungen erlauben und andererseits den Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Spannungen und verallgemeinerten Verzerrungen entsprechend den gewählten kinematischen Bindungen beschreiben.

Den Anfang des Kapitels bildet eine Darstellung der kinematischen und statischen Beziehungen (Kap. 6.2 und 6.3). Im Kapitel 6.4 werden auf einem ideal plastischen Werkstoffverhalten basierende Modelle beschrieben, mit deren Hilfe der Tragwiderstand bestimmt oder durch eine entsprechende Bemessung sichergestellt werden kann. Die wesentlichen Voraussetzungen und Idealisierungen werden dabei von Kapitel 5.2 übernommen. Im Anschluss an die Beschreibung des ungerissenen Verhaltens (Kap. 6.5) werden auf dem klassischen Druckfeldmodell (Kapitel 5.4.2) sowie dem (angepassten) Gerissenen Scheibenmodell (Kap. 5.4.3 und 5.5) beruhende Modelle zur Beschreibung des gerissenen Verhaltens von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke erläutert (Kap. 6.6). Kapitel 6.7 enthält eine Gegenüberstellung von Versuchs- und Modellergebnissen, anhand welcher die einzelnen Modelle diskutiert werden.

Nachfolgend wird jeweils von einem homogenen Spannungszustand ausgegangen, um den Zusammenhang der verallgemeinerten Verzerrungen und den mit diesen korrespondierenden verallgemeinerten Spannungen herzustellen. Die auf dieser Basis erarbeiteten Modelle erlauben die Beschreibung des Tragverhaltens der (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereiche ebener Stahlbeton-Flächentragwerke konstanter Dicke. Näherungsweise lässt sich darauf basierend auch das Verhalten der (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereiche von Stahlbetonschalen mit grossen Hauptkrümmungsradien erfassen. Die Modellierung von Diskontinuitäten wie Ränder, Ecken und Kanten sowie Bereichen mit konzentrierten Krafteinleitungen erfolgt zweckmässigerweise mit Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen; siehe dazu beispielsweise [89, 91, 116, 144]. Da die Querkraftbeanspruchung der kontinuierlichen Bereiche in der Regel gering ist, wird auf deren Einfluss auf den Tragwiderstand und die Verformungen nicht weiter eingegangen. Durch Einführung entsprechender kinematischer Bindungen erscheinen die Querkräfte lediglich als verallgemeinerte Reaktionen. Eine ausführliche Behandlung des Querkraftwiderstands von Platten mit und ohne Querkraftbewehrung findet man in [56].

### 6.2 Kinematische Beziehungen

#### 6.2.1 Verallgemeinerte Verzerrungen

Bei der Behandlung dünner ebener Flächentragwerke wird in der Regel vorausgesetzt, dass die Durchbiegungen  $w$  gegenüber der Dicke  $h$  des Flächentragwerks klein sind. Im Sinne von zusätzlichen kinematischen Bindungen wird vorausgesetzt, dass Normalen zur Mittelebene in der verformten Lage Normalen zur verformten Mittelfläche sind. Ausserdem sei der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Normalen invariant.  $x$ ,  $y$  und  $z$  bezeichnen ein orthogonales Koordinatensystem mit Ursprung in der als Bezugsebene gewählten Mittelebene, welches so orientiert ist, dass die  $z$ -Achse senkrecht zur Mittelebene verläuft. Mit den Verschiebungen  $u_{x0}$  und  $u_{y0}$  in der Bezugsebene



und der Durchbiegung  $w$  als verallgemeinerte Verschiebungen ergeben sich die Verschiebungen eines beliebigen Punktes zu

$$u_x = u_{x0} - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = u_{y0} - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{und} \quad u_z = w \quad (6.1)$$

(Bild 6.1(a)). Mit (2.1) resultieren daraus die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + z \cdot \chi_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + z \cdot \chi_y \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{xy0} + z \cdot 2\chi_{xy} \quad (6.2)$$

Die übrigen Verzerrungen verschwinden ( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ ), sodass  $z$  eine Hauptachse des Verzerrungszustands ist und in jeder Ebene  $z = \text{const}$  ein ebener Verzerrungszustand herrscht. Die Verzerrungen der Bezugsebene

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_{x0}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial u_{y0}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial x} \quad (6.3)$$

sowie die Krümmungen  $\chi_x$  und  $\chi_y$  und die Drillungen  $\chi_{xy} = \chi_{yx}$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.4)$$

erscheinen als verallgemeinerte Verzerrungen. Gemäss (2.12) betragen die Hauptverzerrungen in Abhängigkeit von  $z$

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_{x0} + z\chi_x + \varepsilon_{y0} + z\chi_y \pm \sqrt{\left[ \varepsilon_{x0} + z\chi_x - (\varepsilon_{y0} + z\chi_y) \right]^2 + (\gamma_{xy0} + 2z\chi_{xy})^2} \right\} \quad (6.5)$$

und der Winkel  $\beta$  [ $0 \leq \beta \leq \pi$ ] (positiv im Gegenuhrzeigersinn), welcher entsprechend Kapitel 5 die Richtung der kleineren Hauptverzerrung  $\varepsilon_3$  bezüglich der  $x$ -Achse beschreibt, beträgt gemäss (5.12)

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left[ \frac{\varepsilon_{y0} + z\chi_y - (\varepsilon_{x0} + z\chi_x)}{\gamma_{xy0} + 2z\chi_{xy}} \right] & \text{für} \quad (\gamma_{xy0} + 2z\chi_{xy}) \geq 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left[ \frac{\varepsilon_{y0} + z\chi_y - (\varepsilon_{x0} + z\chi_x)}{\gamma_{xy0} + 2z\chi_{xy}} \right] + \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad (\gamma_{xy0} + 2z\chi_{xy}) \leq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

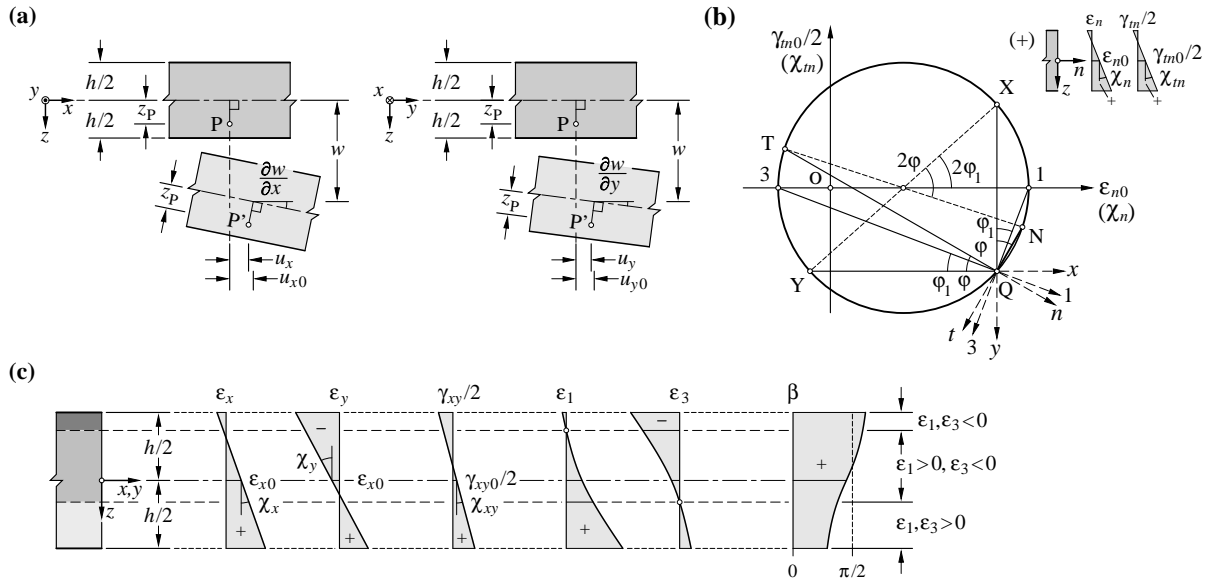
Bild 6.1(c) zeigt mögliche Verläufe der Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\gamma_{xy}$ , der zugehörigen Hauptverzerrungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_3$  sowie des Winkels  $\beta$ .  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(z)$  und  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(z)$  sind hyperbolische Funktionen. Da die zweite Ableitung nach  $z$  von  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(z)$  bzw.  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(z)$

$$\frac{d^2 \varepsilon_{1,3}}{dz^2} = \pm \frac{\left[ \gamma_{xy0} (\chi_x - \chi_y) + 2\chi_{xy} (\varepsilon_{y0} - \varepsilon_{x0}) \right]^2}{\left\{ \left[ \varepsilon_{x0} + z\chi_x - (\varepsilon_{y0} + z\chi_y) \right]^2 + (\gamma_{xy0} + 2z\chi_{xy})^2 \right\}^{3/2}} \quad (6.7)$$

positiv bzw. negativ ist, ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(z)$  konkav und  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(z)$  konvex. Für  $\varepsilon_1 = 0$  und  $\varepsilon_3 = 0$  resultiert aus (6.5) eine quadratische Gleichung für  $z$

$$\left( \chi_{xy}^2 - \chi_x \chi_y \right) z^2 + \left( \chi_{xy} \gamma_{xy} - \chi_x \varepsilon_{y0} - \chi_y \varepsilon_{x0} \right) z + \left( \gamma_{xy0}^2 / 4 - \varepsilon_{x0} \varepsilon_{y0} \right) = 0 \quad (6.8)$$

mit den Lösungen



**Bild 6.1** – Kinematische Beziehungen: (a) Verformung; (b) Mohr'scher Kreis zur Transformation der verallgemeinerten Verzerrungen; (c) Orthogonale Verzerrungskomponenten, Hauptverzerrungen und Hauptrichtung der kleineren Hauptverzerrung.

$$z = \frac{\chi_x \epsilon_{y0} + \chi_y \epsilon_{x0} + \chi_{xy} \gamma_{xy0} \pm \sqrt{(\chi_x \epsilon_{y0} - \chi_y \epsilon_{x0})^2 + (\chi_x \gamma_{xy0} - 2\chi_{xy} \epsilon_{x0})(\chi_y \gamma_{xy0} - 2\chi_{xy} \epsilon_{y0})}}{2(\chi_{xy}^2 - \chi_x \chi_y)} \quad (6.9)$$

Mit Ausnahme von Spezialfällen existieren im Intervall  $[-h/2 \leq z \leq h/2]$  höchstens zwei Werte  $z$ , für welche eine der beiden Hauptverzerrungen verschwindet. Für mehr als zwei Werte von  $z$  verschwinden die Hauptverzerrungen nur, falls alle drei Klammerausdrücke linkerhand in (6.8) verschwinden. Dies ist nur dann der Fall, wenn  $\epsilon_1(z) \cdot \epsilon_3(z) = 0$  und  $\beta(z) = \text{const}$  sind, also ein einachsiger Verzerrungszustand mit konstanter Richtung vorherrscht [113].

## 6.2.2 Transformationen der verallgemeinerten Verzerrungen

Mit (6.2) resultieren aus (2.10) die Transformationsbeziehungen der verallgemeinerten Verzerrungen

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n0} &= \epsilon_{x0} \cos^2 \varphi + \epsilon_{y0} \sin^2 \varphi + \gamma_{xy0} \sin \varphi \cos \varphi \\
 \epsilon_{t0} &= \epsilon_{x0} \sin^2 \varphi + \epsilon_{y0} \cos^2 \varphi - \gamma_{xy0} \sin \varphi \cos \varphi \\
 \gamma_{m0} &= \gamma_{nt0} = 2(\epsilon_{y0} - \epsilon_{x0}) \sin \varphi \cos \varphi + \gamma_{xy0} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)
 \end{aligned} \quad (6.10)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \chi_n &= \chi_x \cos^2 \varphi + \chi_y \sin^2 \varphi + 2\chi_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
 \chi_n &= \chi_x \sin^2 \varphi + \chi_y \cos^2 \varphi - 2\chi_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
 \chi_{m0} &= \chi_{nt0} = (\chi_y - \chi_x) \sin \varphi \cos \varphi + \chi_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Geometrisch können die Transformationen mit Hilfe Mohr'scher Kreise gemäss Bild 6.1(b) vorgenommen werden.

## 6.3 Statische Beziehungen

### 6.3.1 Verallgemeinerte Spannungen und Reaktionen

Die in Bild 6.2(a) dargestellten orthogonalen Spannungskomponenten werden entsprechend den kinematischen Bindungen zu verallgemeinerten Spannungen zusammengefasst. Mit den Verzerrungen der Bezugsebene  $\varepsilon_{x0}$ ,  $\varepsilon_{y0}$  und  $\gamma_{xy0}$  korrespondieren die Membrannormal- und -schubkräfte

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad , \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad \text{sowie} \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (6.12)$$

und mit den Krümmungen  $\chi_x$  und  $\chi_y$  und den doppelten Drillungen  $2\chi_{xy} = 2\chi_{yx}$  die Biege- und Drillmomente

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad , \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad \text{und} \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (6.13)$$

(Bild 6.2(b)). Die Schubspannungen  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  und  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  in Bild 6.2(a) werden zu verallgemeinerten Reaktionen,

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz \quad \text{und} \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz \quad (6.14)$$

den Querkräften, zusammengefasst. Da Normalen senkrecht zur Mittelebene starr sind ( $\varepsilon_z = 0$ ) stellen Normalspannungen  $\sigma_z$  in  $z$ -Richtung, welche bei in  $z$ -Richtung wirkenden Randspannungen oder Volumenkräften aus Gleichgewichtsgründen erforderlich sind, ebenfalls verallgemeinerte Reaktionen dar.

Eine beliebige zur Mittelebene parallele Bewehrungslage wird durch den Winkel  $\psi_k$ , welcher analog Kapitel 5 deren Richtung bezüglich der  $x$ -Richtung bestimmt, die Ordinate  $z_k$  sowie deren Querschnittsfläche  $a_{sk}$  beschrieben; siehe Bild 6.2(c). Mit den in Kapitel 5.1 festgehaltenen Voraussetzungen und Idealisierungen ergeben sich aus (6.12) und (6.13) mit den Beton- und Stahlspannungen  $\sigma_{ci} = [\sigma_{cx}, \sigma_{cy}, \tau_{cxy}]$  bzw.  $\sigma_{sk}$  eines beliebig bewehrten Elements für die Komponenten der Tensoren der verallgemeinerten Spannungen  $n_i = [n_x, n_y, n_{xy}]$  und  $m_i = [m_x, m_y, m_{xy}]$  die Beziehungen

$$n_i = n_{ci} + n_{si} \quad \text{und} \quad m_i = m_{ci} + m_{si} \quad (6.15)$$

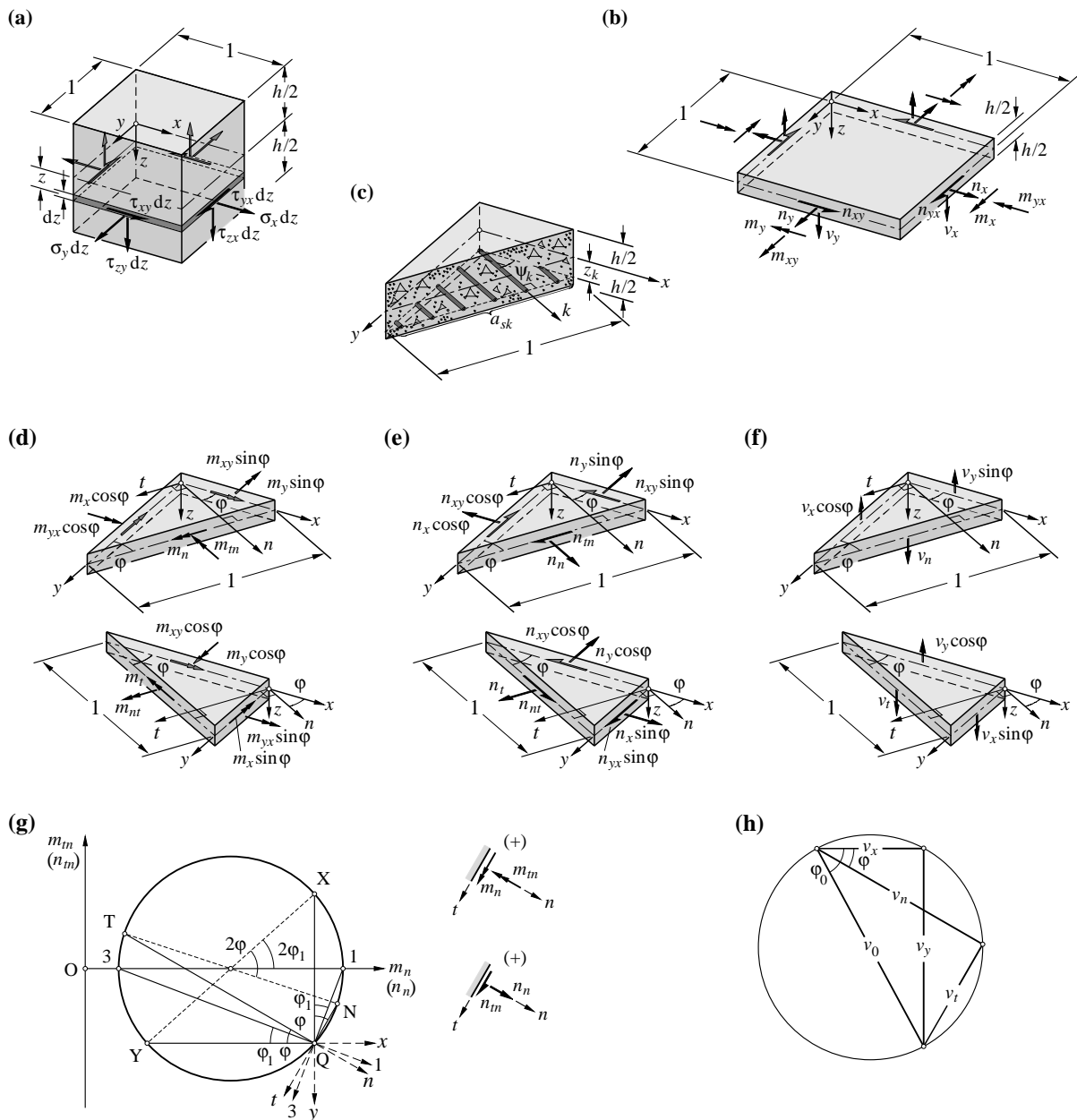
mit den verallgemeinerten Beton- und Bewehrungsspannungen

$$n_{ci} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ci} dz \quad \text{und} \quad m_{ci} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ci} z dz \quad \text{bzw.} \quad (6.16)$$

$$n_{si} = \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} \cdot t_i(-\psi_k) \quad \text{und} \quad m_{si} = \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} z_k \cdot t_i(-\psi_k)$$

### 6.3.2 Transformationen der verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen

Auswerten der Gleichgewichtsbedingungen an den Schnittkörperdiagrammen in Bild 6.2(d) liefert die Transformationsbeziehungen der Biege- und Drillmomente



**Bild 6.2** – Verallgemeinerte Spannungen und Reaktionen: (a) Spannungskomponenten; (b) verallgemeinerte Spannungen und Reaktionen; (c) Beschreibung der Bewehrungslagen; (d) bis (f) Schnittkörperdiagramme zur Formulierung der Transformationsbeziehungen; (g) Mohr'scher Kreis zur Transformation der Biege- und Drillmomente sowie der Membrannormal- und -schubkräfte; (h) Thaleskreis zur Transformation der Querkräfte.

$$\begin{aligned}
 m_n &= m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + 2m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
 m_t &= m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - 2m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
 m_m &= m_{nt} = (m_y - m_x) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

Geometrisch lassen sich die Transformationen mit Mohr'schen Kreisen gemäss Bild 6.2(g) vornehmen. Die Haupttrichtungen, für welche  $m_m = m_{nt} = 0$  ist, sind bezüglich der  $x$ -Richtung durch den Winkel  $\varphi_{1m}$  bestimmt, welcher der Beziehung

$$\cot 2\varphi_{1m} = \frac{m_x - m_y}{2m_{xy}} \quad (6.18)$$

genügt, und die Hauptmomente  $m_1$  und  $m_2$  betragen

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ m_x + m_y \pm \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \right] \quad (6.19)$$

Beschränkt man den Winkel  $\varphi_{1m}$  auf das Intervall  $[0 \leq \varphi_{1m} \leq \pi]$ , so ist für  $m_{xy} \leq 0$  zu dem aus (6.18) resultierenden Winkel  $\pi/2$  zu addieren. Der auf diese Weise ermittelte Winkel  $\varphi_{1m}$  beschreibt stets die Richtung des grösseren Hauptmoments  $m_1$ ; für  $m_{xy} \geq 0$  liegt er im Intervall  $[0 \leq \varphi_{1m} \leq \pi/2]$  und für  $m_{xy} \leq 0$  im Intervall  $[\pi/2 \leq \varphi_{1m} \leq \pi]$ . Die Membrankräfte werden analog transformiert; Bild 6.2(e) zeigt die entsprechenden Schnittkörperdiagramme zur Formulierung der Transformationsbeziehungen.

Auswerten der Gleichgewichtsbedingungen an den Schnittkörperdiagrammen in Bild 6.2(f) liefert die Transformationsbeziehungen der Querkräfte

$$v_n = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \quad \text{und} \quad v_t = -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi \quad (6.20)$$

welche sich geometrisch mit Hilfe des Thaleskreises in Bild 6.2(h) deuten lassen. Die Hauptquerkraft

$$|v_0| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (6.21)$$

übertragen wird, ist bezüglich der  $x$ -Richtung durch den Winkel

$$\varphi_0 = \operatorname{arccot} \left( \frac{v_x}{v_y} \right) \quad (6.22)$$

bestimmt. In der senkrecht zur Hauptquerkraftichtung verlaufenden Richtung verschwindet die Querkraft.

### 6.3.3 Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen

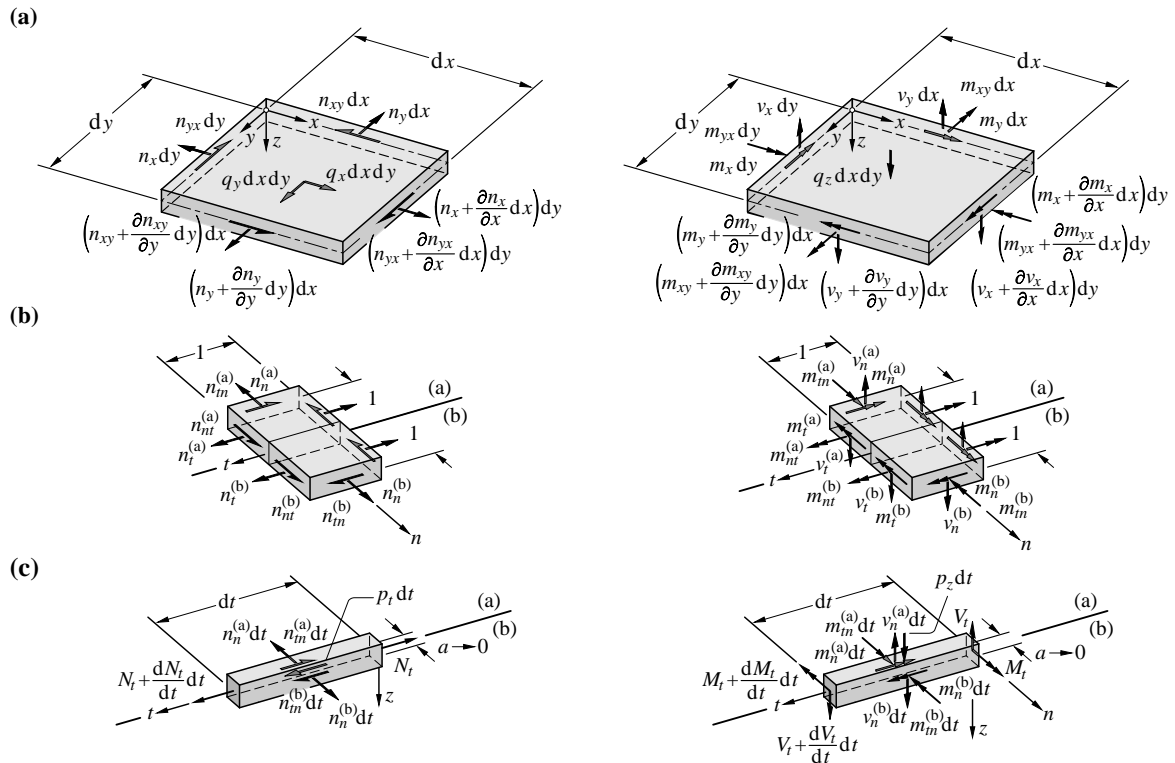
Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen an den beiden Schnittkörperdiagrammen in Bild 6.3(a) liefert die Gleichgewichtsbedingungen der verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + q_y = 0 \\ \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q_z = 0 \\ v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$q_x$ ,  $q_y$  und  $q_z$  bezeichnen an der Mittelebene angreifende Flächenlasten.

Bild 6.3(b) zeigt die verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen bei einer senkrecht zur Mittelebene in  $t$ -Richtung verlaufenden Diskontinuitätsebene gemäss Kapitel 2.6.7. Gemäss (2.131) gilt für die verallgemeinerten Spannungen und Reaktionen an der Diskontinuitätsebene

$$n_n^{(a)} = n_n^{(b)} \quad , \quad n_{nt}^{(a)} = n_{nt}^{(b)} \quad , \quad m_n^{(a)} = m_n^{(b)} \quad , \quad m_{nt}^{(a)} = m_{nt}^{(b)} \quad \text{und} \quad v_n^{(a)} = v_n^{(b)} \quad (6.24)$$



**Bild 6.3** – Statische Beziehungen: (a) differenzielle Schnittkörperdiagramme; (b) statische Diskontinuitäten; (c) differenzielle Schnittkörperdiagramme eines Stringers und einer Plattendiskontinuität.

während die Funktionen der Membrannormalkräfte  $n_t$ , der Biegemomente  $m_t$  und der Querkräfte  $v_t$  an der Diskontinuitätsebene sprunghaft ändern können. Bei verschwindend kleinem Abstand zweier paralleler Diskontinuitätsebenen ( $a \rightarrow 0$ ) resultieren Diskontinuitätsebenen, bei welchen auch die Funktionen der Membranschubkräfte  $n_{nt}$  sowie der Drillmomente  $m_{nt}$  und Querkräfte  $v_n$  sprunghaft ändern können. Bei einem Sprung der Membranschubkraft  $n_{nt}$  resultieren entlang der Diskontinuitätsebene übertragene Stringerkräfte  $N_t$  bzw. eine in  $t$ -Richtung wirkende Streckenkraft  $p_t$ , welche gemäss Bild 6.3(c) der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{dN_t}{dt} = n_{nt}^{(a)} - n_{nt}^{(b)} - p_t \quad (6.25)$$

genügen; eine derartige Diskontinuität wird als *Stringer* bezeichnet. Eine Unstetigkeit der Drillmomenten- oder Querkräftfunktionen  $m_{nt}$  bzw.  $v_n$  bedingt eine entlang der Diskontinuität in  $t$ -Richtung übertragene konzentrierte Querkraft  $V_t$  bzw. eine in  $z$ -Richtung wirkende Streckenkraft  $p_z$ , die Stützkraft. Allgemein kann auch ein konzentriertes Biegemoment  $M_t$  entlang einer derartigen Diskontinuität übertragen werden. Die am Schnittkörperdiagramm in Bild 6.3(c) formulierten Gleichgewichtsbedingungen liefern die Beziehungen

$$V_t = m_m^{(b)} - m_m^{(a)} + \frac{dM_t}{dt} \quad \text{und} \quad p_z = v_n^{(a)} - v_n^{(b)} - \frac{dV_t}{dt} \quad (6.26)$$

die zusammengefasst die Gleichgewichtsbedingung

$$p_z = v_n^{(a)} + \frac{\partial m_m^{(a)}}{\partial t} - \left( v_n^{(b)} + \frac{\partial m_m^{(b)}}{\partial t} \right) - \frac{d^2 M_t}{dt^2} = \frac{\partial m_n^{(a)}}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_m^{(a)}}{\partial t} - \left( \frac{\partial m_n^{(b)}}{\partial n} + 2 \frac{\partial m_m^{(b)}}{\partial t} \right) - \frac{d^2 M_t}{dt^2} \quad (6.27)$$

ergeben. Diese Art einer Diskontinuität wird als *Plattendiskontinuität* bezeichnet. An einem freien oder aufgelegten Rand in  $t$ -Richtung resultieren aus (6.24) bis (6.27) mit  $n_n^{(b)} = n_{nt}^{(b)} = m_n^{(b)}$

$= m_{nt}^{(b)} = v_n^{(b)} = 0$  sowie  $M_t = 0$  die statischen Randbedingungen. Diskontinuitäten im Innern ebener Flächentragwerke bedingen unstetige Spannungs- und Verschiebungsfelder und beschränken sich folglich auf ein starr-ideal plastisch idealisiertes Werkstoffverhalten (Kap. 2.6.7).

Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf Elemente ebener Flächentragwerke mit einem gleichförmigen Spannungsfeld, also konstanten verallgemeinerten Spannungen  $\partial m_x / \partial x = \partial m_y / \partial y = \partial m_{xy} / \partial x = \partial n_x / \partial x = \partial n_y / \partial y = \partial n_{xy} / \partial x = 0$ . Gemäss (6.23) gilt somit  $q_x = q_y = q_z = 0$  sowie  $v_x = v_y = 0$ , womit  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  und die  $z$ -Richtung eine Hauptrichtung des Spannungszustands ist. Da  $q_z = 0$  und  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  sind, treten keine in  $z$ -Richtung wirkenden Randspannungen oder Volumenlasten auf. Gemäss (2.14) gilt demnach  $\partial \sigma_z / \partial z = 0$ , und da  $\sigma_z (z = \pm h/2) = 0$  ist, verschwinden die Normalspannungen in  $z$ -Richtung ( $\sigma_z = 0$ ). In jeder Ebene  $z = \text{const}$  herrscht somit ein ebener Spannungszustand, und das Verhalten der einzelnen Schichten lässt sich mit den im Kapitel 5 behandelten Modellen beschreiben. Bei ausschliesslich durch Membrankräfte beanspruchten Elementen ( $m_x = m_y = m_{xy} = 0$ ) mit einer hinsichtlich Steifigkeiten und Festigkeit zur Mittelebene symmetrischen Bewehrung können mit  $\sigma_i = n_i / h$  und  $\rho_k = 2a_{sk} / h$  direkt die Beziehungen in Kapitel 5 verwendet werden.

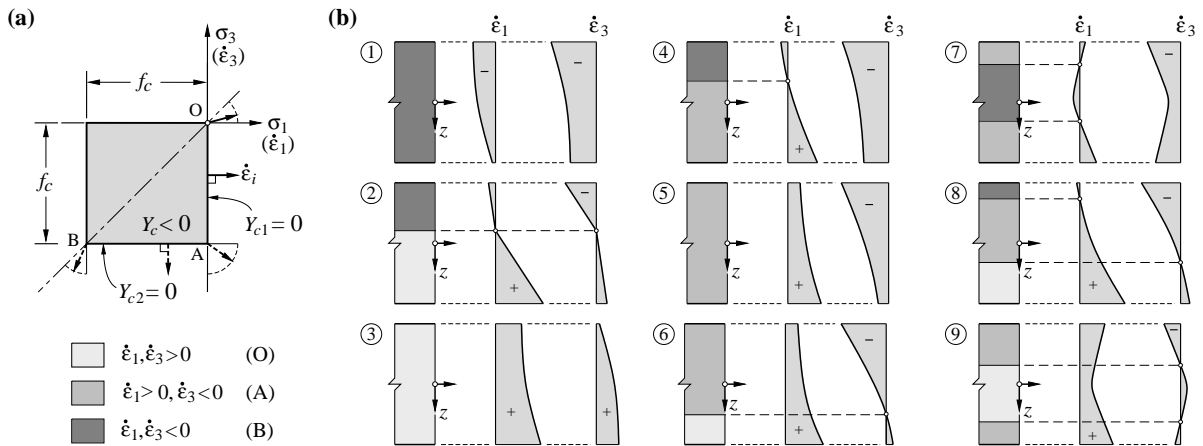
## 6.4 Plastische Modellierung

### 6.4.1 Allgemeines

Bei der plastischen Modellierung von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke werden ausser den in den Kapiteln 6.2 und 6.3 festgehaltenen Voraussetzungen und Idealisierungen diejenigen des Kapitels 5.2 verwendet. Im Vordergrund stehen dabei die Formulierung von Fliessbedingungen mit verallgemeinerten Spannungen und die Erarbeitung von Beziehungen zur Bemessung der Bewehrung und Kontrolle der Betonabmessungen. Im Zusammenhang mit der Anwendung des kinematischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren wird ferner die Berechnung der inkrementellen Dissipationsenergie bei vorgegebenen Verschiebungszuständen behandelt.

Für gegebene verallgemeinerte Verzerrungsinkremente  $\dot{\eta}_i = [\dot{\epsilon}_{x0}, \dot{\epsilon}_{y0}, \dot{\gamma}_{xy0}, \dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y, 2\dot{\chi}_{xy}]$  lassen sich die Verzerrungsinkrementenverläufe entlang  $z$  mit (6.2) ermitteln, und (6.5) liefert die entsprechenden Hauptverzerrungsinkrementenverläufe. Die Transformationsbeziehung (5.11) liefert die Verzerrungsinkremente  $\dot{\epsilon}_{sk}$  der Bewehrungslagen. Ausser für den Fall eines verschwindenden Verzerrungsinkrements ist die entsprechende Stahlspannung aufgrund der Fliessbedingung und des Fliessgesetzes eindeutig bestimmt. Gemäss der in Bild 6.4(a) dargestellten Fliessgrenze des Betons ist dessen Spannungszustand über das Fliessgesetz durch die Hauptverzerrungsinkremente  $\dot{\epsilon}_1$  und  $\dot{\epsilon}_3 \leq \dot{\epsilon}_1$  in den Eckpunkten O, A und B eindeutig bestimmt. Entlang der Strecken OA und AB hingegen – falls eines der Hauptverzerrungsinkremente verschwindet – ist jeweils eine der beiden Betonhauptspannungen nicht eindeutig bestimmt. Ausser bei einem einachsigen Verzerrungszustand mit einer von  $z$  unabhängigen Richtung (wie er bei Fliessgelenklinien auftritt; siehe Kap. 6.4.2) tritt dieser Fall gemäss Kapitel 6.2 allerdings höchstens an zwei Stellen im Intervall  $[-h/2 \leq z \leq h/2]$  auf. Folglich ist der Betonspannungszustand mit Ausnahme des erwähnten Spezialfalls durch die verallgemeinerten Verzerrungen eindeutig gegeben. In den Punkten O und B sind die Betonhauptspannungen gleich und der Spannungszustand richtungsunabhängig. Im Punkt A herrscht hingegen ein einachsiger Druckspannungszustand, dessen Richtung in Übereinstimmung mit Kapitel 5 bezüglich der  $x$ -Richtung durch den Winkel  $\theta$  festgelegt wird.

Die Elementdicke lässt sich in maximal drei Schichten mit unterschiedlichen Betonspannungszuständen entsprechend den Punkten O, A und B der Betonfliessgrenze unterteilen; in den Schichtgrenzen entspricht der Spannungszustand Bildpunkten entlang OA oder AB. Durch Betrachtung sämtlicher Funktionsverläufe des grösseren und kleineren Hauptverzerrungsinkrements, wobei  $\dot{\epsilon}_1(z)$  konkav und  $\dot{\epsilon}_3(z)$  konvex ist (Kap. 6.2), resultieren total neun verschiedene, in Bild 6.4(b) dargestellte Anordnungen der Schichten unterschiedlicher Betonspannungszustände (inklusive der bezüglich der Mittelebene gespiegelten Verhältnisse). Für die Fälle 1 bis 3 ist der Betonspannungszustand richtungsunabhängig, so dass keine Schubspannungen auftreten. Bei einer orthogonalen Bewehrung in  $x$ -



**Bild 6.4** – Plastische Modellierung: (a) Fließgrenze des Betons; (b) Betonspannungszustände.

und  $y$ -Richtung leisten in diesen Fällen gemäss (6.15) und (6.16) weder der Beton noch die Bewehrung einen Beitrag zu  $n_{xy}$  und  $m_{xy}$ , so dass diese verallgemeinerten Spannungen verschwinden. Dementsprechend können die beiden Richtungen  $x$  und  $y$  unabhängig voneinander wie zwei Balken unter Biegung und Normalkraft behandelt werden.

Die spezifische inkrementelle Dissipationsenergie

$$\dot{D}_0(\dot{\eta}_i) = S_i \dot{\eta}_i \quad (6.28)$$

ist eine eindeutige Funktion der verallgemeinerten Verzerrungen. Nicht eindeutig bestimmte Spannungen leisten keinen Beitrag, da deren korrespondierenden Verzerrungszinkremente verschwinden.

Die mit den verallgemeinerten Verzerrungen  $\dot{\eta}_i$  korrespondierenden verallgemeinerten Spannungen  $S_i = [n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}]$  lassen sich unter Berücksichtigung der Fließbedingungen und Fließgesetze des Betons und Stahls mit (2.116)<sub>2</sub> oder direkt mit den Gleichgewichtsbedingungen (6.15) bestimmen. Damit kann die Fließfläche im Raum der verallgemeinerten Spannungen  $S_i$  in Abhängigkeit von fünf die Richtung des Vektors der verallgemeinerten Verzerrungszinkremente  $\dot{\eta}_i$  bestimmenden Parametern ermittelt werden. Falls das Verzerrungszinkrement einer Bewehrungslage verschwindet oder ein einachsiger Verzerrungszustand mit konstanter Richtung vorherrscht, sind der entsprechende Bewehrungs- bzw. Betonspannungszustand und somit auch die verallgemeinerten Spannungen indes nicht eindeutig bestimmt. In der Regel gelingt es nicht, die fünf Parameter zu eliminieren und damit eine Fließbedingung der Form  $Y(n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}) = 0$  zu formulieren. Eine explizite Formulierung der Fließbedingungen gelingt teilweise, indem weitere kinematische Bindungen eingeführt werden, womit Projektionen der ursprünglichen Fließfläche betrachtet werden. Die auf allen sechs in Kapitel 6.2 eingeführten verallgemeinerten Verzerrungen beruhende Traglast wird damit überschätzt.

Obere und untere Grenzwerte der Traglast können mit Hilfe des statischen bzw. kinematischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren angegeben werden. Die exakte Traglast lässt sich ferner durch Formulieren von entsprechenden Optimierungs- bzw. Variationsproblemen gewinnen, welche in der Regel eines iterativ-numerischen Berechnungsalgorithmus bedürfen.

Da das System mit Ausnahme der Fälle 1 bis 3 in Bild 6.4(b) Schichten mit einachsigen Druckspannungszuständen enthält, deren durch die Funktion  $\theta = \theta(z)$  beschriebene Richtung sich frei einstellen kann, ist das Problem  $\infty$ -fach statisch unbestimmt, so dass entsprechend viele Möglichkeiten stabiler statisch zulässiger Spannungszustände existieren. Das im Kapitel 6.4.4 behandelte Sandwichmodell stellt einen bestimmten statisch zulässigen Spannungszustand dar, der sich insbesondere für die Bemessung eignet. Für die Bestimmung der exakten Traglast sind die in Bild 6.4(b) dargestellten Fälle einzeln zu behandeln. Aufgrund der unbekanntenen Funktion  $\theta = \theta(z)$  resultieren dabei für



die Fälle 4 bis 9 Variationsprobleme. Näherungsweise lassen sich diese mit Hilfe des Verfahrens von Ritz [133] lösen.

Für beliebig gewählte verallgemeinerte Verzerrungsincremente  $\dot{\eta}_i$  liefert die mit verallgemeinerten Spannungen und Verzerrungen formulierte Beziehung (2.129) einen oberen Grenzwert der Traglast

$$\kappa_o = \frac{\dot{D}_0(\dot{\eta}_i)}{S_{0i}\dot{\eta}_i} \geq \kappa_u \quad (6.29)$$

[129] (Bild 6.5). Durch Minimierung des Ausdrucks rechterhand in Abhängigkeit von fünf die Richtung des Vektors der verallgemeinerten Verzerrungsincremente  $\dot{\eta}_i$  bestimmenden Parametern, lässt sich auf diese Weise ein möglichst geringer oberer Grenzwert der Traglast bzw. die Traglast selbst bestimmen. Da nur die spezifische inkrementelle Dissipationsenergie eine eindeutige Funktion der verallgemeinerten Verzerrungsincremente ist, lässt sich der zugehörige Spannungszustand aufgrund der auf diese Weise gefundenen Richtung des Vektors der verallgemeinerten Verzerrungsincremente oft nicht direkt bestimmen. Wie erwähnt tritt dies ein, wenn entweder ein einachsiger Verzerrungszustand mit konstanter Richtung vorherrscht oder wenn eine der Bewehrungsdehnungen verschwindet. Der Beweis, dass der im letztgenannten Fall erhaltene Lastfaktor der Traglast entspricht, ist dann gegeben, wenn für die betreffende Bewehrungslage eine Spannung innerhalb der Fließgrenzen gefunden werden kann, mit welcher die Gleichgewichtsbedingungen (6.15) und (6.16) erfüllt sind.

Da im Vergleich zu einem Vorgehen gemäss dem statischen Grenzwertsatz kein Variations- sondern ein gewöhnliches Optimierungsproblem mit fünf Parametern ohne Nebenbedingungen resultiert, eignet sich dieses Vorgehen für die numerische Bestimmung der Traglast bzw. einer Näherung der Traglast besser.

#### 6.4.2 Fließgelenklinien – Normalmomenten-Fließbedingungen

Fließgelenklinien stellen Diskontinuitäten der Verschiebungsfelder im Sinne von Kapitel 2.6.7 dar. Der Verschiebungszustand einer beliebigen in Bild 6.6(a) dargestellten Fließgelenklinie in Richtung  $b$  ist aufgrund der in Kapitel 6.2 vorausgesetzten kinematischen Hypothese durch das Verschiebungsincrement der Mittelebene  $\dot{\delta}_a$  und das Rotationsinkrement  $\dot{\omega}_a$  bestimmt,

$$\dot{u}_a = \frac{a}{d}(\dot{\delta}_a + \dot{\omega}_a z) \quad \text{und} \quad \dot{u}_b = 0 \quad (6.30)$$

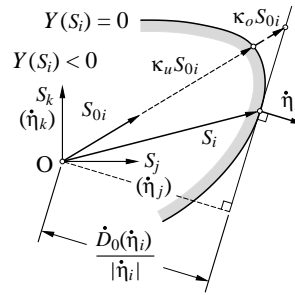
Für  $\dot{\omega}_a > 0$  ( $\dot{\omega}_a < 0$ ) wird die Fließgelenklinie entsprechend der Vorzeichenkonvention des korrespondierenden Biegemoments als positiv (negativ) bezeichnet. Die kinematischen Freiheitsgrade werden von sechs auf drei, nämlich  $\dot{\delta}_a$  und  $\dot{\omega}_a$  sowie den Winkel  $\varphi$  zur Beschreibung der Fließgelenklinienrichtung, reduziert. Gemäss (6.3) herrscht in der Fließgelenklinie ein über die Schichtdicke der Diskontinuität  $d \rightarrow 0$  konstanter einachsiger Verzerrungszustand in Richtung  $a$ ,

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{\partial \dot{u}_a}{\partial a} = \dot{\varepsilon}_{a0} + \dot{\chi}_a z \quad , \quad \dot{\varepsilon}_b = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_{ab} = 0 \quad (6.31)$$

mit den verallgemeinerten Verzerrungsincrementen  $\dot{\varepsilon}_{a0} = \dot{\delta}_a/d$  und  $\dot{\chi}_a = \dot{\omega}_a/d$ .

Mit den zusätzlich eingeführten kinematischen Bindungen erscheinen ausser den Querkräften  $v_a$  und  $v_b$  auch die Membrannormalkraft  $n_b$ , die Membranschubkraft  $n_{ab}$ , das Biegemoment  $m_b$  und die Drillmomente  $m_{ba} = m_{ab}$  als verallgemeinerte Reaktionen. Die auf die Fließgelenklinienlänge bezogene inkrementelle Dissipationsenergie beträgt gemäss (2.114)

$$\dot{D}_0(\dot{\omega}_a, \dot{\delta}_a) = d(n_a \dot{\varepsilon}_{a0} + m_a \dot{\chi}_a) = m_a \dot{\omega}_a + n_a \dot{\delta}_a \quad (6.32)$$



**Bild 6.5** – Plastische Modellierung: Ermittlung eines oberen Grenzwertes der Traglast mit dem kinematischen Grenzwerzatz der Traglastverfahren.

Da eines der beiden Hauptverzerrungsincremente verschwindet, entspricht der Betonspannungszustand gemäss dem Fliegsesetz der Strecke OA oder AB der in Bild 6.4(a) dargestellten Betonfliessgrenze. Mithin ist die Betonhauptspannung in Richtung  $b$  nicht eindeutig bestimmt. Die Betondruckzonenhöhe  $c = h/2 - \dot{\delta}_a / \dot{\omega}_a$ , durch welche die Richtung des Vektors der verallgemeinerten Verzerrungen  $\dot{\eta}_i = [\dot{\delta}_a, \dot{\omega}_a]$  gegeben ist, lässt sich für eine beliebige Bewehrung aus

$$n_a(\varphi) = \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} \cos^2(\varphi - \psi_k) - c f_c \quad (6.33)$$

bestimmen, und das plastische Moment  $m_{au}$  beträgt

$$m_{au}(\varphi) = \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} z_k \cos^2(\varphi - \psi_k) - f_c \frac{c}{2} (h - c) \quad (6.34)$$

Die effektive Betondruckfestigkeit  $f_c$  kann gemäss (3.1) oder (3.56) mit  $\varepsilon_1 = 0$  gewählt werden. Die Bestimmung der Stahlspannungen  $\sigma_{sk}$  bedarf einer Fallunterscheidung; für  $c < h/2 + z_k$  bzw.  $c > h/2 + z_k$  erreichen die Stahlspannungen die Fliegsesgrenze auf Druck ( $\sigma_{sk} = -f_{syk}$ ) bzw. Zug ( $\sigma_{sk} = f_{syk}$ ), und für  $c = h/2 + z_k$  liefert (6.33) die Stahlspannung  $\sigma_{sk}$  [ $-f_{syk} < \sigma_{sk} < f_{syk}$ ]. Das plastische Moment bei einer negativen Fliegsesgelenklinie  $m_{au}'$  lässt sich analog bestimmen und wird, wie üblich, positiv definiert, d. h.  $m_{au}'(\varphi) > 0$ . Bild 6.6(b) zeigt das zu den beiden Gleichgewichtsbedingungen (6.33) und (6.34) gehörende Schnittkörperdiagramm bei je zwei schiefen Bewehrungslagen am oberen und unteren Elementrand. Im Folgenden werden ausschliesslich reine Biege- und Drillmomentenbeanspruchungen  $m_i = \kappa [m_{x0}, m_{y0}, m_{xy0}]$  betrachtet, deren Intensität bei festgehaltenen Werten  $m_{x0}$ ,  $m_{y0}$  und  $m_{xy0}$  vom jeweiligen Lastfaktor  $\kappa$  abhängt. Entsprechend leistet nur das Biegemoment

$$m_a(\kappa, \varphi) = \kappa (m_{x0} \cos^2 \varphi + m_{y0} \cos^2 \varphi + 2m_{xy0} \sin \varphi \cos \varphi) \quad (6.35)$$

einen Beitrag zur inkrementellen Dissipationsenergie. Membrankräfte werden im Rahmen der Betrachtung verallgemeinerter Fliegsesgelenklinie im Kapitel 6.4.3 behandelt. Damit lautet die sogenannte *Normalmomenten-Fliegsesbedingungen* [49]

$$m_{au}'(\varphi) \leq m_a(\kappa, \varphi) \leq m_{au}(\varphi) \quad (6.36)$$

(Bild 6.6(c)). Die Lastfaktoren  $\kappa_u$  und  $\kappa_u'$  der positiven bzw. negativen Fliegsesgelenklinie sowie die entsprechenden Winkel  $\varphi_u$  bzw.  $\varphi_u'$  folgen mit

$$g(\kappa, \varphi) = m_{au}(\varphi) - m_a(\kappa, \varphi) \quad \text{und} \quad g'(\kappa, \varphi) = m_{au}'(\varphi) + m_a(\kappa, \varphi) \quad (6.37)$$

aus den Beziehungen

$$g(\kappa, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g(\kappa, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{bzw.} \quad g'(\kappa, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g'(\kappa, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (6.38)$$

wobei der kleinere der beiden Lastfaktoren massgebend ist.

Um ausgehend von (6.36) zu einer Fliessbedingung  $Y(m_x, m_y, m_{xy}) = 0$  zu gelangen, werden die plastischen Momente  $m_{au}$  und  $m_{au}'$  der positiven bzw. negativen Fliessgelenklinie näherungsweise durch Überlagerung der plastischen Momente in Richtung der Bewehrungslagen  $m_{ku}$  bzw.  $m_{ku}'$  gemäss Bild 6.6(b) bestimmt. Mit

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sum_{k=1}^r m_{ku} \cos^2 \psi_k, & \mu_y &= \sum_{k=1}^r m_{ku} \sin^2 \psi_k, & \mu_{xy} &= \sum_{k=1}^r m_{ku} \sin \psi_k \cos \psi_k, \\ \mu_x' &= \sum_{k=1}^r m_{ku}' \cos^2 \psi_k, & \mu_y' &= \sum_{k=1}^r m_{ku}' \sin^2 \psi_k, & \mu_{xy}' &= \sum_{k=1}^r m_{ku}' \sin \psi_k \cos \psi_k \end{aligned} \quad (6.39)$$

resultieren damit die Beziehungen

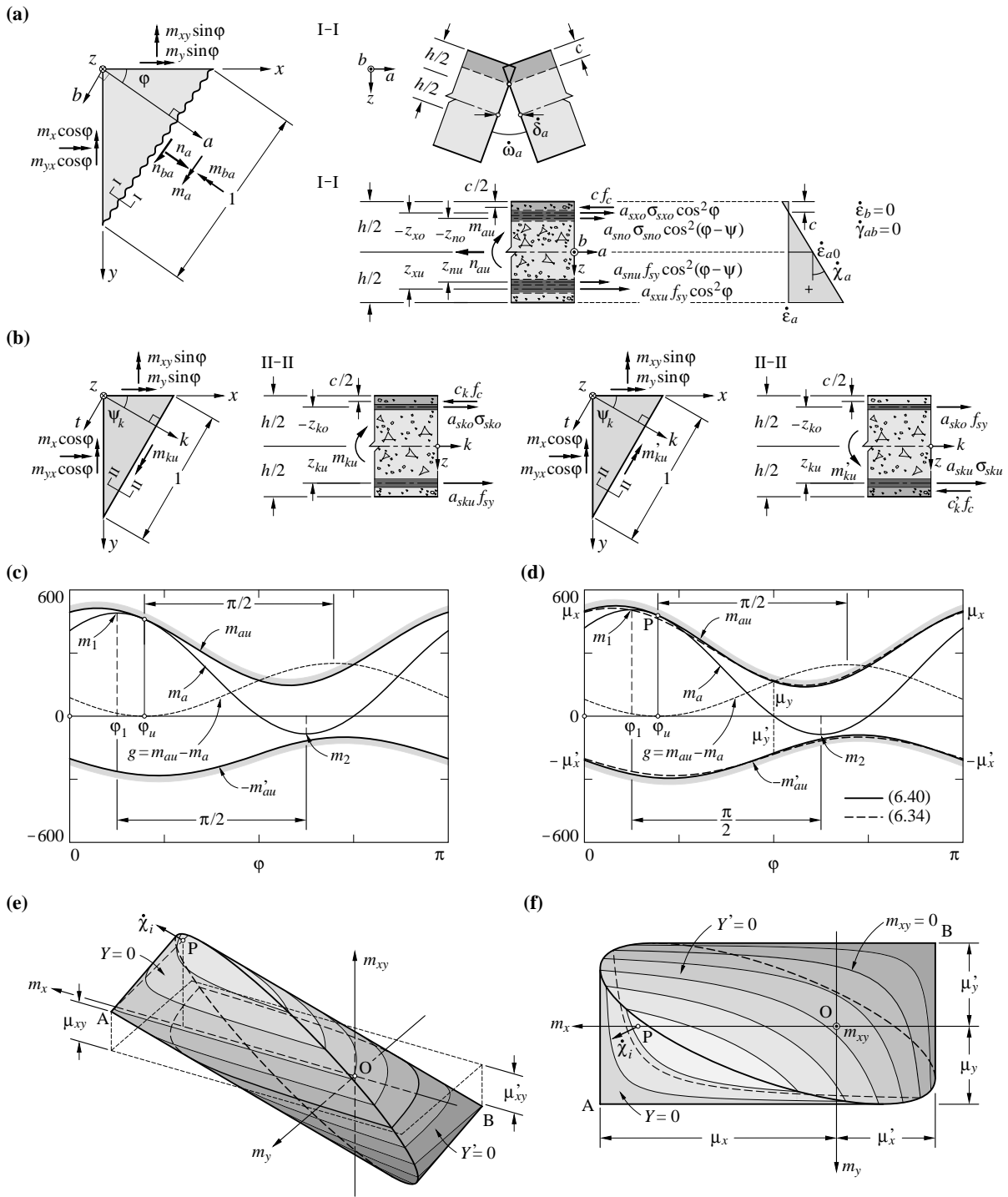
$$\begin{aligned} m_{au}(\varphi) &\cong \sum_{k=1}^r m_{ku} \cos^2(\varphi - \psi_k) = \mu_x \cos^2 \varphi + \mu_y \sin^2 \varphi + 2\mu_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ m_{au}'(\varphi) &\cong \sum_{k=1}^r m_{ku}' \cos^2(\varphi - \psi_k) = \mu_x' \cos^2 \varphi + \mu_y' \sin^2 \varphi + 2\mu_{xy}' \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (6.40)$$

Für eine (quasi) isotrope Bewehrung, d. h.  $a_{sxu} = a_{syu}$  und  $a_{sxo} = a_{syo}$  und vereinfachend gleich gewählten  $z$ -Ordinaten der Bewehrungslagen in  $x$ - und  $y$ -Richtung ( $z_{xu} = z_{yu}$  und  $z_{xo} = z_{yo}$ ) stimmen (6.40) und (6.34) überein, wobei beide plastischen Momente unabhängig von  $\varphi$  sind. Bei einer beliebigen orthogonalen Bewehrung, d. h.  $\mu_{xy} = \mu_{xy}' = 0$ , sind die Betondruckzonenhöhen der beiden plastischen Momente  $m_{xu}$  und  $m_{yu}$  in der Regel verschieden, d. h.  $c_x \neq c_y$ , und dem betrachteten Spannungszustand lässt sich kein verträglicher Verschiebungszustand gemäss Bild 6.6(a) zuordnen. Da die Betondruckfelder der beiden Betondruckzonen orthogonal zueinander verlaufen, wird die Fliessbedingung des Betons jedoch nicht verletzt. Folglich liefert (6.40) einen unteren Grenzwert des plastischen Moments gemäss (6.34) [99]. Bei einer allgemein nicht orthotropen Bewehrung wird die Fliessbedingung des Betons verletzt, da die Betondruckfelder in Richtung der einzelnen Bewehrungslagen nicht orthogonal zueinander verlaufen. Mithin wird das plastische Moment gemäss (6.34) teils über- und teils unterschätzt, wobei (6.40) in der Regel eine ausreichend genaue Näherung für (6.34) darstellt; siehe beispielsweise Bild 6.6(d). Bei geringen Bewehrungsgehalten ist der Beitrag der Bewehrung auf der Biegedruckseite relativ gering und kann in der Regel vernachlässigt werden. Ferner ist die Gefahr des Ausknickens einer gedrückten Bewehrung zu beachten.

Werden die Parameter (6.39) gemäss Gvozdev [45] als Komponenten eines positiv semidefiniten symmetrischen Tensors aufgefasst, der die plastischen Momente beschreibt, so entsprechen den Funktionen  $g(\kappa, \varphi)$  und  $g'(\kappa, \varphi)$  die beiden symmetrischen Tensoren

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \mu_x - m_x & \mu_{xy} - m_{xy} \\ \mu_{xy} - m_{xy} & \mu_y - m_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad g_{ij}' = \begin{bmatrix} \mu_x' + m_x & \mu_{xy}' + m_{xy} \\ \mu_{xy}' + m_{xy} & \mu_y' + m_y \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

und anstelle der Beziehungen (6.38) tritt die Forderung, dass der kleinere Eigenwert des Tensors  $g_{ij}$  bzw.  $g_{ij}'$  verschwindet.



<b>Parameter</b>	$a_{sxo} = 0,770 \text{ mm } (\text{Ø}14@200)$	$z_{xo} = -163 \text{ mm}$	$\psi_{xo} = 0$	
$h = 400 \text{ mm}$	$f_{sy} = 500 \text{ N/mm}^2$	$a_{sno} = 1,272 \text{ mm } (\text{Ø}18@200)$	$z_{no} = -147 \text{ mm}$	$\psi_{no} = \pi/3$
	$f_{cc} = 40 \text{ N/mm}^2$	$a_{snu} = 1,272 \text{ mm } (\text{Ø}18@200)$	$z_{nu} = 135 \text{ mm}$	$\psi_{nu} = \pi/3$
	$f_c = 2,5 f_{cc}^{2/3} \text{ [N/mm}^2\text{]}$	$a_{sxu} = 2,655 \text{ mm } (\text{Ø}26@200)$	$z_{xu} = 157 \text{ mm}$	$\psi_{xu} = 0$

**Bild 6.6** – Fließgelenklinie – Normalmomenten-Fließbedingung: (a) positive Fließgelenklinie; (b) plastische Momente in Bewehrungsrichtung; (c) Normalmomenten-Fließbedingungen; (d) Normalmomenten-Fließbedingungen bei Überlagerung der plastischen Momente in Bewehrungsrichtung; (e) und (f) orthogonale Axonometrie und Grundriss der Fließfläche.

Dies bedingt, dass die Determinante verschwindet und die Diagonalelemente positiv sind<sup>1</sup>, woraus direkt die Fließbedingungen

$$\begin{aligned}
 Y &= (\mu_{xy} - m_{xy})^2 - (\mu_x - m_x)(\mu_y - m_y) = 0 \\
 Y' &= (\mu_{xy}' + m_{xy}')^2 - (\mu_x' + m_x)(\mu_y' + m_y) = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.42}$$

mit den Restriktionen

$$-\mu_x' \leq m_x \leq \mu_x \quad \text{und} \quad -\mu_y' \leq m_y \leq \mu_y
 \tag{6.43}$$

folgen. Die zum kleineren Eigenwert des jeweiligen Tensors gehörende Hauptrichtung beschreibt die Richtung senkrecht zur Fließgelenklinie und ist bezüglich der Richtung  $x$  durch den Winkel

$$\begin{aligned}
 \varphi_u &= \arctg\left(\frac{\mu_x - m_x}{m_{xy} - \mu_{xy}}\right) = \arctg\left(\frac{m_{xy} - \mu_{xy}}{\mu_y - m_y}\right) \\
 \varphi_u' &= \arctg\left(-\frac{\mu_x' + m_x}{m_{xy}' + \mu_{xy}'}\right) = \arctg\left(-\frac{m_{xy}' + \mu_{xy}'}{\mu_y' + m_y}\right)
 \end{aligned}
 \tag{6.44}$$

bestimmt (Bild 6.6(d)). Für  $(m_{xy} - \mu_{xy}) \geq 0$  bzw.  $(m_{xy}' + \mu_{xy}') \geq 0$  liegen die Winkel im Intervall  $[0 \leq \varphi_u, \varphi_u' \leq \pi/2]$  und für  $(m_{xy} - \mu_{xy}) \leq 0$  bzw.  $(m_{xy}' + \mu_{xy}') \leq 0$  im Intervall  $[-\pi/2 \leq \varphi_u, \varphi_u' \leq 0]$ .

Die beiden Fließbedingungen (6.41) beschreiben im  $[m_x, m_y, m_{xy}]$ -Raum elliptische Kegelflächen mit Spitzen in den Punkten  $[\mu_x, \mu_y, \mu_{xy}]$  bzw.  $[-\mu_x', -\mu_y', -\mu_{xy}']$  (Bild 6.6(e, f)). Bei einer orthogonalen Bewehrung liegen die Kegelspitzen in der Ebene  $m_{xy} = 0$ , und die Schnittellipse liegt in einer zur  $m_{xy}$ -Achse parallelen Ebene.

Mit dem Fließgesetz (2.96) resultieren aus den beiden Fließbedingungen (6.42) die korrespondierenden Krümmungsinkremente

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}_x &= \lambda(\mu_y - m_y) \quad , \quad \dot{\chi}_y = \lambda(\mu_x - m_x) \quad \text{und} \quad 2\dot{\chi}_{xy} = -2\lambda(\mu_{xy} - m_{xy}) \\
 \dot{\chi}_x &= -\lambda'(\mu_y' + m_y) \quad , \quad \dot{\chi}_y = -\lambda'(\mu_x' + m_x) \quad \text{und} \quad 2\dot{\chi}_{xy} = 2\lambda'(\mu_{xy}' + m_{xy}')
 \end{aligned}
 \tag{6.45}$$

mit den positiven Parametern  $\lambda, \lambda' > 0$ . Gemäss (6.42) resultiert in beiden Fällen

$$\dot{\chi}_x \dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2 = 0
 \tag{6.46}$$

so dass die Determinante des Krümmungstensors und somit eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet ( $\dot{\chi}_1 \cdot \dot{\chi}_2 = 0$ ). Für Spannungszustände die (6.42)<sub>1</sub> bzw. (6.42)<sub>2</sub> genügen, gilt weiter  $\dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y \geq 0$  bzw.  $\dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y \leq 0$ , so dass die kleinere bzw. grössere Hauptkrümmung verschwindet und sich, wie vorausgesetzt, eine positive bzw. negative Fließgelenklinie einstellt. Entlang der Erzeugenden

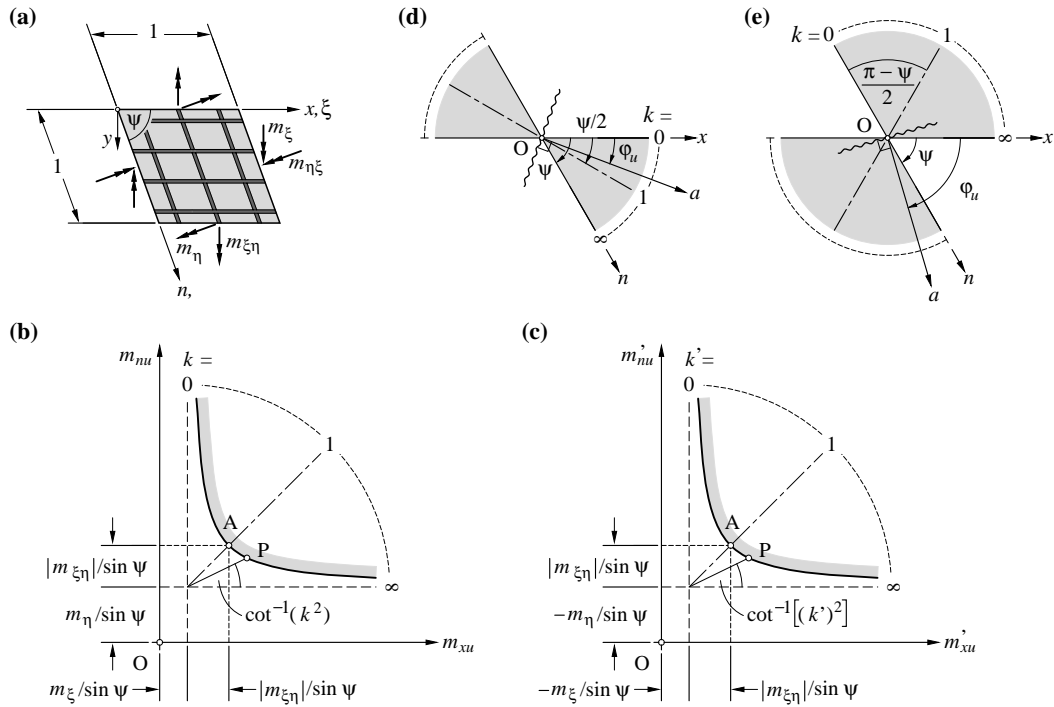
<sup>1</sup> Das Verschwinden des kleineren Eigenwerts

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_{II}} \right)$$

eines symmetrischen Tensors

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_x & a_{xy} \\ a_{xy} & a_y \end{bmatrix}$$

bedingt  $a_{II} = -\det(a_{ij}) = a_{xy}^2 - a_x \cdot a_y = -a_1 \cdot a_2 = 0$  und  $a_1 = a_x + a_y = a_1 + a_2 > 0$ . Da gemäss der ersten Bedingung beide Diagonalelemente das selbe Vorzeichen aufweisen müssen, kann anstelle der zweiten Bedingung gefordert werden, dass die Diagonalelemente positiv sein müssen, d. h.  $a_x, a_y \geq 0$ .



**Bild 6.7** – Normalmomenten-Fließbedingungen – Bemessung: (a) Biege- und Drillmomente in schiefwinkligen Koordinaten; (b) und (c) Bemessungsdiagramm für positive bzw. negative Fließgelenklinie; (d) Richtung der positiven (negativen) Fließgelenklinie für  $|m_{\xi\eta}| > 0$  ( $|m_{\xi\eta}| < 0$ ); (e) Richtung der positiven (negativen) Fließgelenklinie für  $|m_{\xi\eta}| < 0$  ( $|m_{\xi\eta}| > 0$ ).

der Fließflächen ergeben sich gleiche inkrementelle Verzerrungszustände, also Fließgelenklinien mit derselben Richtung  $\varphi_u$  bzw.  $\varphi'_u$ . Mit Ausnahme einer (quasi) isotropen Bewehrung sind die Hauptachsen des Tensors der Biege- und Drillmomente und jene des Tensors der Krümmungs- und Drillungsinkremente in der Regel verschieden, was einem anisotropen Verhalten entspricht. Als verträgliche inkrementelle Verschiebungszustände der Platten ergeben sich abwickelbare Flächen. Den Spannungszuständen der Punkte A und B in Bild 6.6(e, f) sind Schnittpunkte von zwei positiven bzw. negativen Fließgelenklinien verträglich, und solchen auf der Schnittellipse der Flächen  $Y=0$  und  $Y'=0$  die Schnittpunkte von einer positiven mit einer negativen Fließgelenklinie.

Um auf der Basis von (6.42) Bemessungsbeziehungen für die plastischen Momente  $m_{xu}$  und  $m_{nu}$  bzw.  $m'_{xu}$  und  $m'_{nu}$  in Richtung von je zwei schiefwinkligen Bewehrungslagen am oberen und unteren Elementrand zu formulieren, ist es entsprechend den Bemessungsbeziehungen des ebenen Spannungszustands in Kapitel 5.2.3 zweckmässig, von schiefen Spannungskomponenten auszugehen. Die entsprechenden Biege- und Drillmomente sind analog (6.13) durch

$$m_{\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi} z \, dz \quad , \quad m_{\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\eta} z \, dz \quad \text{und} \quad m_{\xi\eta} = m_{\eta\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\eta} z \, dz \quad (6.47)$$

bestimmt; siehe Bild 6.7(a). Folglich gelten zwischen  $[m_x, m_y, m_{xy}]$  und  $[m_{\xi}, m_{\eta}, m_{\xi\eta}]$  dieselben Zusammenhänge wie zwischen den entsprechenden Spannungskomponenten (5.5) und (5.6), d. h.

$$m_{\xi} = m_x \sin\psi + m_y \cos\psi \cot\psi - 2m_{xy} \cos\psi$$

$$m_{\eta} = \frac{m_y}{\sin\psi} \quad (6.48)$$

$$m_{\xi\eta} = m_{\eta\xi} = m_{xy} - m_y \cot\psi$$

resp.

$$\begin{aligned}
 m_x &= \frac{m_\xi}{\sin\psi} + m_\eta \cos\psi \cot\psi - 2m_{\xi\eta} \cot\psi \\
 m_y &= m_\eta \sin\psi \\
 m_{xy} &= m_{xy} = m_{\xi\eta} + m_\eta \cos\psi
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Die Fließbedingungen (6.42) gehen damit in

$$\begin{aligned}
 Y &= m_{\xi\eta}^2 - (m_{xu} \sin\psi - m_\xi)(m_{nu} \sin\psi - m_\eta) = 0 \\
 Y' &= m_{\xi\eta}^2 - (m_{xu}' \sin\psi + m_\xi)(m_{nu}' \sin\psi + m_\eta) = 0
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

mit den Restriktionen

$$-m_{xu}' \sin\psi \leq m_\xi \leq m_{xu} \sin\psi \quad \text{und} \quad -m_{nu}' \sin\psi \leq m_\eta \leq m_{nu} \sin\psi \tag{6.51}$$

über. Werden auch die Beziehungen für die Fließgelenklinien-Richtungen (6.44) entsprechend umformuliert, so lassen sich die Fließbedingungen (6.50) in die Parameterform

$$\begin{aligned}
 m_{xu} &\geq \frac{1}{\sin\psi} (m_\xi + k |m_{\xi\eta}|) \quad \text{und} \quad m_{nu} \geq \frac{1}{\sin\psi} (m_\eta + k^{-1} |m_{\xi\eta}|) \\
 m_{xu}' &\geq \frac{1}{\sin\psi} (-m_\xi + k' |m_{\xi\eta}|) \quad \text{und} \quad m_{nu}' \geq \frac{1}{\sin\psi} [-m_\eta + (k')^{-1} |m_{\xi\eta}|]
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

überführen, welche sich für die Bemessung eignen. Die positiven Koeffizienten

$$k = |\sin\psi \tan\varphi_u + \cos\psi| \quad \text{und} \quad k' = |\sin\psi \tan\varphi_u' + \cos\psi| \tag{6.53}$$

welche die Fließgelenklinienrichtung bestimmen, können frei gewählt werden. Die formale Ähnlichkeit mit den Bemessungsbeziehungen für den ebenen Spannungszustand (5.38) ist evident. Analog lassen sich die Beziehungen (6.52) mit den Diagrammen in Bild 6.7(b, c) veranschaulichen. Die Summen der plastischen Momente ( $m_{xu} + m_{nu}$ ) und ( $m_{xu}' + m_{nu}'$ ) werden für  $k=1$  bzw.  $k'=1$  minimal. Sind für  $k=1$  nicht beide Ausdrücke rechterhand in (6.52)<sub>1</sub> und (6.52)<sub>2</sub> positiv, so ist für  $m_\xi + |m_{\xi\eta}| < 0$  und  $m_\eta + |m_{\xi\eta}| > 0$  bzw.  $m_\xi + |m_{\xi\eta}| > 0$  und  $m_\eta + |m_{\xi\eta}| < 0$  am unteren Elementrand in  $x$ - bzw.  $n$ -Richtung keine Bewehrung vorzusehen. Setzt man den Ausdruck linkerhand in (6.52)<sub>1</sub> bzw. (6.52)<sub>2</sub> gleich null, so resultieren für  $k$  die Beziehungen

$$k = \frac{-m_\xi}{|m_{\xi\eta}|} \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{|m_{\xi\eta}|}{-m_\eta} \tag{6.54}$$

womit für die plastischen Momente in  $n$ - bzw.  $x$ -Richtung aus (6.52)<sub>2</sub> bzw. (6.52)<sub>1</sub> die Bemessungsbeziehungen

$$m_{nu} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left( m_\eta - \frac{m_{\xi\eta}^2}{m_\xi} \right) \quad \text{bzw.} \quad m_{xu} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left( m_\xi - \frac{m_{\xi\eta}^2}{m_\eta} \right) \tag{6.55}$$

resultieren. Für die Bemessungsbeziehungen (6.52)<sub>3</sub> und (6.52)<sub>4</sub> lauten die zu (6.54) und (6.55) analogen Beziehungen

$$k' = \frac{m_\xi}{|m_{\xi\eta}|} \quad \text{bzw.} \quad k' = \frac{|m_{\xi\eta}|}{m_\eta} \tag{6.56}$$

sowie

$$m'_{nu} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left( \frac{m_{\xi\eta}^2}{m_\xi} - m_\eta \right) \quad \text{bzw.} \quad m'_{xu} \geq \frac{1}{\sin\psi} \left( \frac{m_{\xi\eta}^2}{m_\eta} - m_\xi \right) \quad (6.57)$$

Sind in für  $k=1$  bzw.  $k'=1$  beide Ausdrücke rechterhand in (6.52)<sub>1</sub> und (6.52)<sub>2</sub> bzw. (6.52)<sub>3</sub> und (6.52)<sub>4</sub> negativ, so ist am entsprechenden Elementrand keine Bewehrung erforderlich. Für vorgegebene Koeffizienten  $k$  bzw.  $k'$  gelten gemäss (6.53) für die Winkel  $\varphi_u$  bzw.  $\varphi_u'$  die Beziehungen

$$\tan \varphi_u = \begin{cases} \frac{k - \cos\psi}{\sin\psi} & \text{für } m_{\xi\eta} > 0 \\ \frac{-k - \cos\psi}{\sin\psi} & \text{für } m_{\xi\eta} < 0 \end{cases} \quad (6.58)$$

bzw.

$$\tan \varphi_u' = \begin{cases} \frac{-k' - \cos\psi}{\sin\psi} & \text{für } m_{\xi\eta} > 0 \\ \frac{k' - \cos\psi}{\sin\psi} & \text{für } m_{\xi\eta} < 0 \end{cases} \quad (6.59)$$

Für  $k=1$  bzw.  $k'=1$  entspricht die Richtung  $a$  senkrecht zur Fließgelenklinie einer der beiden Winkelhalbierenden der Bewehrungsrichtungen, je nach Vorzeichen von  $m_{\xi\eta}$  (Bild 6.7(d, e)). Da die Richtungen der beiden Bewehrungslagen am oberen und unteren Elementrand gleich sind, ist die Bewehrungsrichtung am einen Elementrand günstig und am anderen ungünstig. Die minimale Summe der plastischen Momente ergibt sich daher für eine orthogonale Bewehrung. Für die Bemessung von drei und mehr Bewehrungslagen lassen sich die Betrachtungen in Kapitel 5.2.3 sinngemäss übertragen, und die Schlussfolgerungen der Diskussion äquivalenter orthogonaler Bewehrungen gelten auch für die Normalmomenten-Fließbedingungen.

Das Konzept der Fließgelenklinien wurde vom Dänen Johansen [60, 61] erarbeitet; den Begriff der Bruch- oder Fließgelenklinie prägte aufgrund von experimentellen Beobachtungen bereits Ingerslev [54]. Die Parameterform der Normalmomenten-Fließbedingungen für eine orthogonale Bewehrung ((6.38) mit  $\psi = \pi/2$ ), welche zur Bemessung der Bewehrungsquerschnittsflächen verwendet werden kann, geht auf Hillerborg [49] zurück. Weitere wichtige Beiträge zu den Normalmomenten-Fließbedingungen leisteten ausserdem Nielsen [122], Wolfensberger [167], Kemp [65, 66], Morley [113] und Save [140] sowie Bræstrup [15]

### 6.4.3 Verallgemeinerte Fließgelenklinien

Werden bei Fließgelenklinien zusätzlich Verschiebungsinkremente  $\dot{\delta}_{ba} \neq 0$  in Richtung  $b$  eingeführt, spricht man von *verallgemeinerten Fließgelenklinien* [57]. Für eine beliebige in Bild 6.8(a) dargestellte verallgemeinerte Fließgelenklinie resultiert anstelle von (6.30)

$$\dot{u}_a = \frac{a}{d} (\dot{\delta}_a + \dot{\omega}_a z) \quad \text{und} \quad \dot{u}_b = \frac{a}{d} \dot{\delta}_{ba} \quad (6.60)$$

und anstelle von (6.31)

$$\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_{a0} + \dot{\chi}_a z, \quad \dot{\epsilon}_b = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_{ab} = \dot{\gamma}_{ab0} \quad (6.61)$$

mit den verallgemeinerten Verzerrungen  $\dot{\epsilon}_{a0} = \dot{\delta}_a/d$ ,  $\dot{\gamma}_{ba0} = \dot{\delta}_{ba}/d$  und  $\dot{\chi}_a = \dot{\omega}_a/d$ ; siehe Bild 6.8(b). Die inkrementelle Dissipationsarbeit beträgt



$$\dot{D}_0(\dot{\omega}_a, \dot{\delta}_a, \dot{\delta}_{ba}) = d(n_a \dot{\epsilon}_{a0} + n_{ba} \dot{\gamma}_{ba0} + m_a \dot{\chi}_a) = n_a \dot{\delta}_a + n_{ba} \dot{\delta}_{ba} + m_a \dot{\omega}_a \quad (6.62)$$

wobei ausser den Querkraften  $v_a$  und  $v_b$  die Membrankraft  $n_b$ , das Biegemoment  $m_b$  und die Drillmomente  $m_{ba} = m_{ab}$  als verallgemeinerte Reaktionen erscheinen.

Gemäss dem Mohr'schen Kreis der Verzerrungsinkremente in Bild 6.8(c) weisen die Hauptverzerrungsinkremente (für  $\dot{\delta}_{ba} \neq 0$ ) unterschiedliche Vorzeichen auf ( $\dot{\epsilon}_3 < 0 < \dot{\epsilon}_1$ ). Folglich ist der Verzerrungszustand mit dem Spannungszustand in Punkt A der in Bild 6.4(a) dargestellten Betonfliessgrenze verträglich, was in Bild 6.4(b) Fall 5 entspricht. Für den die Richtung des Betondruckfeldes bezüglich der Richtung  $a$  beschreibenden Winkel  $\alpha$  (Bild 6.8(c, d)) gilt

$$\cot 2\alpha = \frac{-\dot{\epsilon}_a}{\dot{\gamma}_{ba}} = -\frac{\dot{\epsilon}_{a0} + \dot{\chi}_a z}{\dot{\gamma}_{ba0}} = -\frac{\dot{\delta}_a + \dot{\omega}_a z}{\dot{\delta}_{ba}} \quad (6.63)$$

Die Richtung des Vektors der verallgemeinerten Verzerrungsinkremente  $\dot{\eta}_i = [\dot{\epsilon}_a, \dot{\gamma}_{ba0}, \dot{\chi}_a]$  kann folglich mit den beiden Parametern  $\cot 2\alpha_o$  und  $\cot 2\alpha_u$  der in  $z$  linearen Funktion  $\cot 2\alpha$  beschrieben werden

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{2}(\cot 2\alpha_u + \cot 2\alpha_o) + \frac{z}{h}(\cot 2\alpha_u - \cot 2\alpha_o) \quad (6.64)$$

(Bild 6.8(b)). Werden die Betonspannungen mit Hilfe des Mohr'schen Kreises der Betonspannungen in Bild 6.8(d) in Funktion des Winkels  $\alpha$  ausgedrückt, resultiert für die verallgemeinerten Betonspannungen gemäss (6.15)

$$\begin{aligned} n_{ca} &= -f_c \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2 \alpha \, dz, & n_{cba} &= f_c \int_{-h/2}^{h/2} \sin \alpha \cos \alpha \, dz & \text{und} \\ m_{ca} &= -f_c \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \sin^2 \alpha \, dz \end{aligned} \quad (6.65)$$

Wird  $z$  in (6.65)<sub>1</sub> mit Hilfe von (6.64) durch  $\alpha$  substituiert, resultiert nach ausgeführter Integration

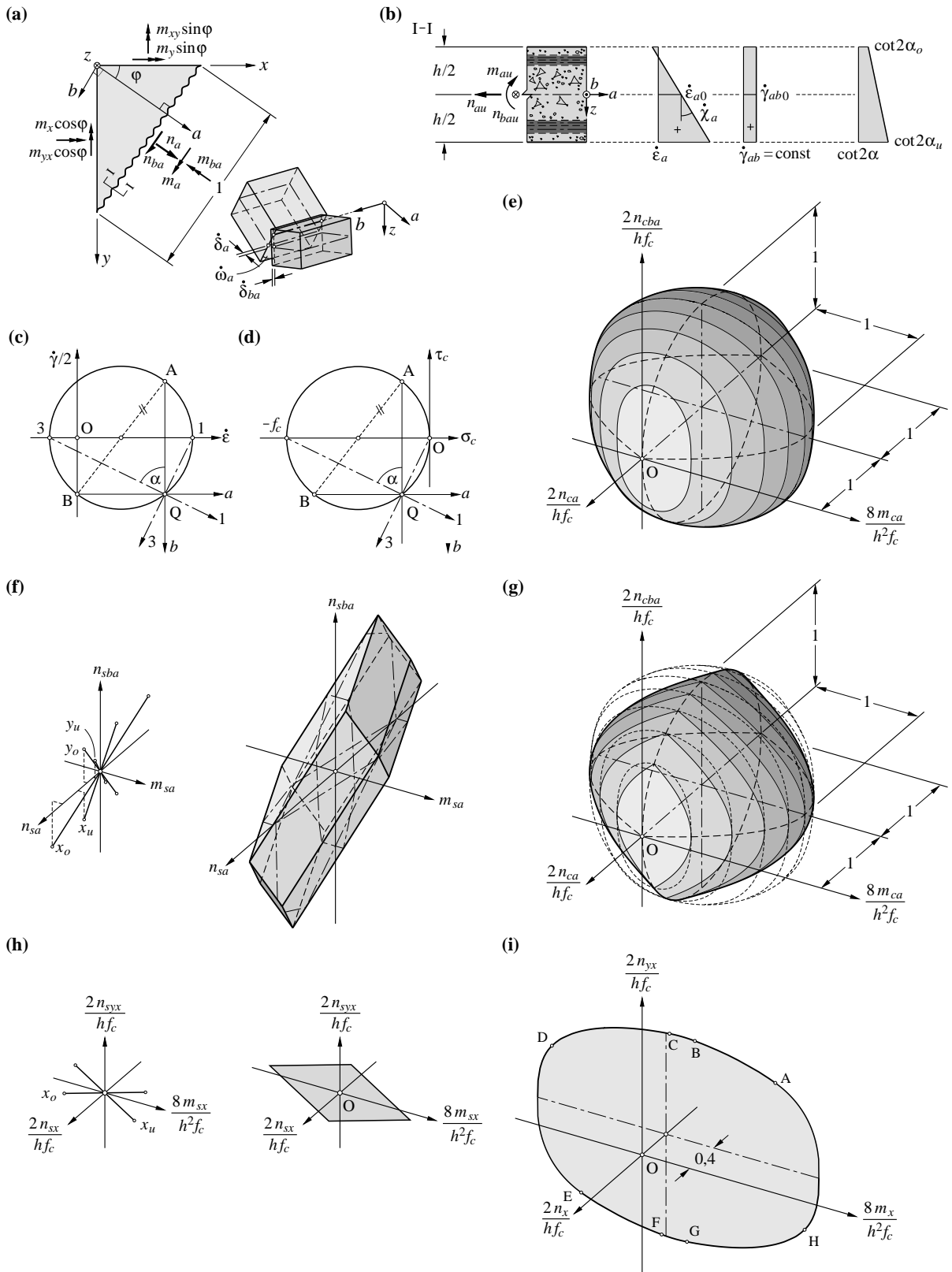
$$n_{ca} = -f_c h \frac{\tan \alpha_o \tan \alpha_u}{1 + \tan \alpha_o \tan \alpha_u} \quad (6.66)$$

Mit den Abkürzungen  $t = \tan \alpha_o$  und  $\zeta = -n_{ca}/(f_c h)$  erhält man daraus

$$\tan \alpha_u = \frac{\zeta}{t(1-\zeta)} \quad (6.67)$$

Wird  $z$  in (6.65)<sub>2</sub> und (6.65)<sub>3</sub> unter Berücksichtigung von (6.64) und (6.67) durch  $\alpha$  substituiert, folgen nach der Integration die Beziehungen

$$\begin{aligned} n_{cba} &= f_c h \frac{\zeta t}{t^2 - \frac{\zeta}{1-\zeta}} \ln \left( t^2 \cdot \frac{\zeta}{1-\zeta} \right) & \text{und} \\ m_{ca} &= \frac{f_c h^2}{2} \frac{1}{\left( t^2 - \frac{\zeta}{1-\zeta} \right)^2} \left\{ \zeta(1-\zeta) \left[ t^4 - \left( \frac{\zeta}{1-\zeta} \right)^2 \right] - 2\zeta^2 t^2 \ln \left( t^2 \cdot \frac{\zeta}{1-\zeta} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.68)$$



**Bild 6.8** – Verallgemeinerte Fließgelenklinien: (a) Bezeichnungen; (b) Verzerrungsinkremente; (c) Mohr'scher Kreis der Verzerrungsinkremente; (d) Mohr'scher Kreis der Betonspannungen; (e) Axonometrie der Fließbedingung des Betons; (f) Bewehrungsfließfläche; (g) Axonometrie der vereinfachten Fließbedingung des Betons; (h) Fließfläche einer Bewehrung in Richtung  $a=x$ ; (i) Schnittlinie der Fließfläche eines in Richtung  $x$  bewehrten Elements bei einer vorgegebenen verallgemeinerten Fließgelenklinie in Richtung  $y$ .

Mit den Abkürzungen

$$\lambda_1 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \lambda_2 = \frac{n_{cba}}{f_c h (1-\zeta)} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \frac{m_{ca}}{f_c h^2 \zeta (1-\zeta)} \quad (6.69)$$

folgt daraus eine quadratische Gleichung für den Parameter  $t$  mit der Lösung

$$t = \tan \alpha_o = \frac{1}{1-\lambda_3} \left[ \lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_1 (1-\lambda_3^2)} \right] \quad (6.70)$$

Wird dies in (6.68)<sub>1</sub> eingesetzt, resultiert die Fließbedingung des Betons im  $n_a$ - $n_{ba}$ - $m_a$ -Raum

$$Y_c(n_{ca}, n_{cba}, m_{ca}) = \ln \left\{ \frac{2\lambda_2 \left[ \lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1 (1-\lambda_3^2)} \right]}{\lambda_1 (1-\lambda_3)^2} - \frac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3} \right\} - \dots \quad (6.71)$$

$$\dots - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 (1-\lambda_3)} \left[ \lambda_2 - \frac{\lambda_1 (1-\lambda_3)}{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1 (1-\lambda_3^2)}} \right] = 0$$

Bild 6.8(e) enthält eine Darstellung der Fließfläche. Für  $n_{cba}=0$  setzt sich die Schnittkurve aus zwei quadratischen Parabeln zusammen, und für  $m_{ca}=0$  resultiert ein Kreis. Cookson [32] ermittelte eine Parameterform von (6.71), wobei es ihm nicht gelang, die Parameter zu eliminieren. Marti [88] formulierte (6.71) explizit mit Hilfe des statischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren<sup>1</sup>. Gemäss (6.16) betragen die verallgemeinerten Bewehrungsspannungen unter Verwendung der Transformationsbeziehungen (6.17)

$$n_{sa} = \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} \cos^2(\varphi - \psi_k) \quad (6.72)$$

$$n_{sba} = - \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} \sin(\varphi - \psi_k) \cos(\varphi - \psi_k)$$

---

<sup>1</sup> Mit der Funktion  $\alpha = \alpha(z)$  als überzählige Grösse folgt aus der Bedingung, dass  $n_{cba}$  bei festgehaltenen Werten von  $n_{ca}$  und  $m_{ca}$  maximal wird, das isoperimetrische Variationsproblem

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} H[z, \alpha(z), \kappa_1, \kappa_2] dz \rightarrow \text{Max} \quad \text{mit}$$

$$H[z, \alpha(z), \kappa_1, \kappa_2] = f_c \sin \alpha \cos \alpha + \kappa_1 (f_c \sin^2 \alpha + n_{ca}) + \kappa_2 (f_c z \sin^2 \alpha + m_{ca})$$

wobei  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  Lagrange'sche Multiplikatoren bezeichnen. Durch Lösen der Euler'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial H}{\partial \alpha'} \right] = 0$$

resultiert daraus

$$-\cot 2\alpha = \kappa_1 + z \cdot \kappa_2$$

Werden die beiden Parameter  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  durch  $\cot 2\alpha_o$  und  $\cot 2\alpha_u$  ersetzt, folgt wiederum (6.64).

$$m_{sa} = \sum_{k=1}^r a_{sk} \sigma_{sk} z_k \cos^2(\varphi - \psi_k)$$

wobei die Stahlspannungen  $\sigma_{sk}$  Werte im Intervall  $[-f_{syk} \leq \sigma_{sk} \leq f_{syk}]$  annehmen können. Bild 6.8(f) zeigt als Beispiel die Bewehrungsfließfläche einer orthogonalen Bewehrung in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die mit  $x_u, x_o, y_u$  und  $y_o$  bezeichneten Strecken entsprechen dabei den Fließbedingungen der einzelnen Bewehrungslagen, aus welchen sich durch geometrische Linearkombination die polyederförmige Fließfläche der Bewehrung entwickeln lässt. Auf den ebenen Flächen erreichen alle ausser zwei Bewehrungslagen eine der beiden Fließgrenzen, so dass bei  $r$  Bewehrungslagen ein konvexes Polyeder mit  $r!/(r-2)!$  Flächen resultiert. Auf den Kanten liegt die Stahlspannung jeweils einer Bewehrungslage im aplastischen Bereich.

Durch geometrische Linearkombination der Beton- und Bewehrungsfließfläche lassen sich die Fließbedingungen  $Y_j(n_a, n_{ba}, m_a) = 0$  der verschiedenen Fließregime entsprechend den verschiedenen Spannungszuständen der Bewehrungslagen formulieren. Die Fließbedingungen entsprechen (6.71), wenn die verallgemeinerten Betonspannungen gemäss (6.15) durch

$$n_{ca} = n_a - n_{sa} \quad , \quad n_{cba} = n_{ba} - n_{sba} \quad \text{und} \quad m_{ca} = m_a - m_{sa} \quad (6.73)$$

ersetzt werden. Die Stahlspannungen sind dabei mit dem der Forderung einer maximalen Traglast entspringenden Optimierungsproblem mit den Nebenbedingungen  $[-f_{syk} \leq \sigma_{sk} \leq f_{syk}]$  zu bestimmen.

Um schliesslich die Fließbedingungen der verschiedenen Regime in der Form  $Y_j(n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}) = 0$  explizit zu formulieren, sind die verallgemeinerten Spannungen mit (6.17) zu transformieren und der Winkel  $\varphi$  mit den Bedingungen

$$Y_j(n_i, m_i, \varphi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dY_j(n_i, m_i, \varphi)}{d\varphi} = 0 \quad (6.74)$$

(analog (6.38) in Kap. 6.4.2) zu eliminieren. Infolge der Form von (6.71) ist dies allerdings kaum möglich.

### Verallgemeinerten Fließgelenklinien mit fester Richtung

Wird die durch den Winkel  $\varphi$  beschriebene Fließgelenklinienrichtung vorgegeben, also eine zusätzliche kinematische Bindung eingeführt, so beschreibt (6.71) unter Berücksichtigung von (6.73) die entsprechenden Fließbedingungen. Fallen die beiden orthogonalen Richtungen  $a$  und  $b$  ferner mit den Richtungen  $x$  und  $y$  einer orthogonalen Bewehrung zusammen, ergeben sich besonders übersichtliche Verhältnisse.

Bild 6.8(h) zeigt für einen solchen Fall die Fließfläche der Bewehrung, welche aus einem in der Ebene  $n_{syx} = 0$  liegenden Parallelogramm besteht und unabhängig von der in  $y$ -Richtung vorhandenen Bewehrung ist. Die Fließfläche des bewehrten Elements mit neun Fließregimen ist selbst für diesen Fall aufgrund der Betonfließfläche relativ komplex. Bild 6.8(i) zeigt beispielsweise die Fließgrenze für  $n_x = -0,4 f_c h/2$ . Diese lässt sich mit (6.71) unter Berücksichtigung von (6.73) bestimmen, indem  $n_{yx}$  für gegebene Werte von  $n_x$  und  $m_x$  bezüglich der Stahlspannungen maximiert wird. Entlang der Kurvenabschnitte BC und AG betragen die Stahlspannungen der oberen und unteren Bewehrungslage  $\sigma_{sxo} = \sigma_{sxu} = f_{syx}$ , entlang AH  $\sigma_{sxo} = -f_{syx}$  und  $\sigma_{sxu} = f_{syx}$  und entlang DE  $\sigma_{sxo} = f_{syx}$  und  $\sigma_{sxu} = -f_{syx}$ . Entlang der Kurvenabschnitte AB und GH ist  $\dot{\epsilon}_{xo} = 0$  und entlang CD und EF  $\dot{\epsilon}_{xu} = 0$ , so dass die Stahlspannung der oberen bzw. unteren Bewehrung im aplastischen Bereich liegt. Entlang des Kurvenabschnitts AB geht beispielsweise die Stahlspannung der oberen Bewehrung von  $\sigma_{sxo} = -f_{syx}$  auf  $\sigma_{sxo} = f_{syx}$  über.

Bild 6.9 veranschaulicht weiter die gesamte Fließfläche für ein Element mit einer bezüglich der Mittelebene symmetrischen Bewehrung, welche bezüglich der Ebenen  $m_x = 0, n_{yx} = 0$  sowie  $n_x = -1$  symmetrisch ist. Für  $m_x = 0$  (Schnittkurve AHJG) entsprechen die Verhältnisse der Fließfläche des Elements im ebenen Spannungszustand mit  $n_y = 0$  (Bild 5.5), womit sich die Schnittkurve mit den

entsprechenden Fließbedingungen (5.20) berechnen lässt. Die Schnittkurve entlang  $n_{yx}=0$  setzt sich aus Kurvenabschnitten quadratischer Parabeln (AB, CDE und FG) und tangential an diese anknüpfende Geraden (BC und EF) zusammen. In dem mit 1 bzw. 6 bezeichneten Fließregime fließen beide Bewehrungslagen auf Zug bzw. Druck. Im Fließregime 3 fließt die untere Bewehrungslage auf Druck und die obere auf Zug. Im Regime 4 erreicht keine der beiden Bewehrungslagen die Fließgrenze. Da die verallgemeinerten Verzerrungsinkremente  $\dot{\epsilon}_{x0}$  und  $\dot{\chi}_x$  verschwinden, ist gemäss (6.63)  $\cot[2\alpha(z)]=0$ , und für die Richtung des einachsigen Betondruckfelds gilt  $\alpha=\theta=\text{const}=\pi/4$ . Im Regime 2 bzw. 5 fließt die untere Bewehrungslage auf Zug bzw. Druck, während die obere die Fließgrenze nicht erreicht. Bild 6.9(b) zeigt weiter einen Schnitt durch die Fließfläche bei  $n_x=0$ . Wird der Überdeckungsбетон vereinfachend vernachlässigt, verschwinden die Regime 1 und 6, und als Fließflächen der Regime 2 und 5 ergeben sich Kreiszyylinderabschnitte.

Bedingt durch die einfache Form der Fließfläche einer orthogonalen Bewehrung mit Richtungen parallel und senkrecht zur verallgemeinerten Fließgelenklinie lassen sich die Schnitte durch die Fließfläche bei  $n_{yx}=0$  und  $m_x=0$  sowie das Fließregime, bei welchem die Spannungen beider Bewehrungslagen die Fließgrenze nicht erreichen (Regime 4 in Bild 6.9) rasch gewinnen. In der Regel kann anhand dieser Angaben das Fließregime bestimmt werden, in welches der betrachtete Fall zu liegen kommt. Liegt der betrachtete Fall in einem Fließregime, bei welchem beide Bewehrungslagen fließen, so liefert (6.71) unter Berücksichtigung von (6.73) direkt die Traglast. In den übrigen Fällen ist die Traglast schliesslich durch Maximierung bezüglich der Stahlspannungen und Berücksichtigung der Nebenbedingung  $[-f_{syk} \leq \sigma_{sk} \leq f_{syk}]$  zu bestimmen. Betrachtet man Schnitte  $n_x=\text{const}$ , so lassen sich die gesuchten Kurvenabschnitte unter Beachtung der bekannten Anfangs- und Endpunkte sowie der entsprechenden Steigungen durch vereinfachte Kurvenverläufe approximieren; siehe beispielsweise Bild 6.9(b).

Da gegenüber der Betrachtung verallgemeinerter Fließgelenklinien mit variabler Richtung eine weitere kinematische Bindung eingeführt wird, fällt die auf dieser Grundlage ermittelte Traglast entsprechend höher aus.

### Näherung

Aufgrund der Probleme bei der Elimination des Winkels  $\varphi$  bei der Betrachtung von verallgemeinerten Fließgelenklinien schlug Cookson [31] vor, die durch (6.71) beschriebene Betonfließfläche vereinfachend durch zwei Rotationsparaboloide zu ersetzen, welche der ursprünglichen Fließfläche einbeschrieben werden und mit dieser für  $n_{cba}=0$  oder  $m_{ca}=0$  übereinstimmen (Bild 6.8(g)). Die entsprechenden Fließbedingungen lauten

$$\begin{aligned} Y_c &= n_{cba}^2 + n_{ca}(f_c h + n_{ca}) + 2m_{ca}f_c = 0 & \text{für } \dot{\omega}_a > 0 \\ Y_c' &= n_{cba}^2 + n_{ca}(f_c h + n_{ca}) - 2m_{ca}f_c = 0 & \text{für } \dot{\omega}_a < 0 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Mit (6.73) folgen daraus die Fließbedingungen des bewehrten Elements

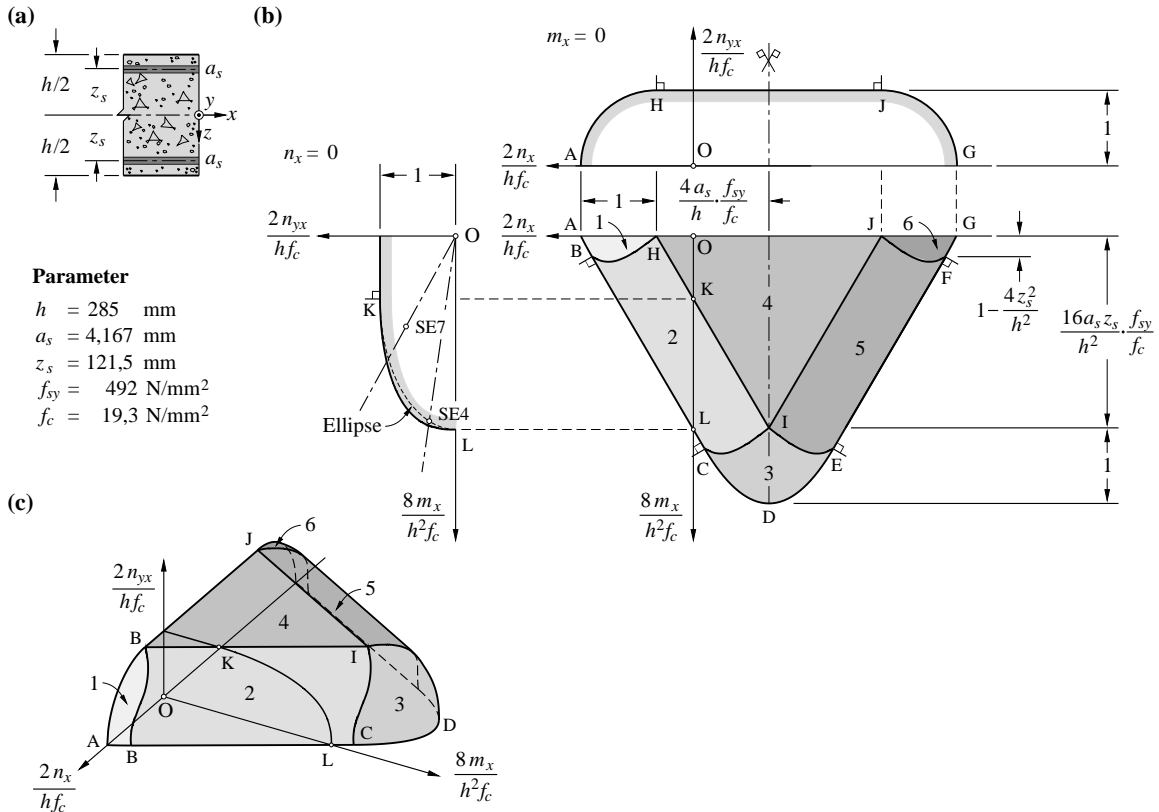
$$\begin{aligned} Y_c &= (n_{ba} - n_{sba})^2 + (n_a - n_{sa})[f_c h + (n_a - n_{sa})] + 2f_c(m_a - m_{sa}) = 0 & \text{für } \dot{\omega}_a > 0 \\ Y_c' &= (n_{ba} - n_{sba})^2 + (n_a - n_{sa})[f_c h + (n_a - n_{sa})] - 2f_c(m_a - m_{sa}) = 0 & \text{für } \dot{\omega}_a < 0 \end{aligned} \quad (6.76)$$

Durch Transformation der verallgemeinerten Spannungen mit Hilfe von (6.17) folgen aus (6.76) mit

$$\tilde{n}_i = n_i - n_{si} \quad \text{und} \quad \tilde{m}_i = m_i - m_{si} \quad (6.77)$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} Y_c &= (\tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_x + \tilde{n}_x^2 + 2f_c \tilde{m}_x) \cos^2 \varphi + (\tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_y + \tilde{n}_y^2 + 2f_c \tilde{m}_y) \sin^2 \varphi + \dots \\ &\dots 2[\tilde{n}_{xy}(\tilde{n}_x + \tilde{n}_y + hf_c) + 2f_c \tilde{m}_{xy}] \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (6.78)$$



**Bild 6.9** – Verallgemeinerte Fließgelenklinien mit fester Richtung  $y$ : (a) Bezeichnungen; (b) Fließfläche bei einer Bewehrung mit  $a_{sxu} = a_{sxo} = a_s$  und  $z_{xu} = -z_{xo} = z_s$  und verallgemeinerten Spannungen  $n_x$ ,  $n_{yx}$  und  $m_x$  ( $n_y = 0$ ,  $m_y = m_{xy} = 0$ ); (c) Axonometrie der Fließfläche.

$$Y_c' = \left( \tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_x + \tilde{n}_x^2 - 2f_c \tilde{m}_x \right) \cos^2 \varphi + \left( \tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_y + \tilde{n}_y^2 - 2f_c \tilde{m}_y \right) \sin^2 \varphi + \dots$$

$$\dots 2 \left[ \tilde{n}_{xy} (\tilde{n}_x + \tilde{n}_y + hf_c) - 2f_c \tilde{m}_{xy} \right] \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

Um den Winkel  $\varphi$  zu eliminieren, können die Klammerausdrücke analog Kapitel 6.4.2 als Komponenten eines symmetrischen Tensors aufgefasst werden. Aus der Bedingung, dass deren kleinerer Eigenwert verschwindet und die Diagonalelemente positiv sind, resultieren schliesslich die Fließbedingungen

$$Y = \left[ \tilde{n}_{xy} (\tilde{n}_x + \tilde{n}_y + hf_c) + 2f_c \tilde{m}_{xy} \right]^2 \dots$$

$$\dots - \left( \tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_x + \tilde{n}_x^2 + 2f_c \tilde{m}_x \right) \left( \tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_y + \tilde{n}_y^2 + 2f_c \tilde{m}_y \right) = 0 \quad (6.79)$$

$$Y' = \left[ \tilde{n}_{xy} (\tilde{n}_x + \tilde{n}_y + hf_c) - 2f_c \tilde{m}_{xy} \right]^2 \dots$$

$$\dots - \left( \tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_x + \tilde{n}_x^2 - 2f_c \tilde{m}_x \right) \left( \tilde{n}_{xy}^2 + hf_c \tilde{n}_y + \tilde{n}_y^2 - 2f_c \tilde{m}_y \right) = 0$$

wobei die beiden letzten Klammerausdrücke rechterhand in beiden Beziehungen gemäss der zweiten Forderung positiv sein müssen. Die Stahlspannungen sind jeweils mit der Forderung einer maximalen Traglast mit Berücksichtigung der Nebenbedingungen  $[-f_{syk} \leq \sigma_{sk} \leq f_{syk}]$  zu bestimmen, was trotz der eingeführten Vereinfachungen aufwendig ist. Aufgrund dessen schlug Cookson vor, vereinfachend nur die vier Fälle zu untersuchen, bei denen die beiden oberen und die beiden unteren Bewehrungslagen jeweils auf Zug oder Druck fließen. Unwesentlich aufwendiger wäre allenfalls eine Berücksichtigung aller Fälle mit fließenden Bewehrungslagen. Die Anzahl Fließflächen beträgt dann  $2 \cdot 2^4$ , bei vier Bewehrungslagen also 32. Für  $m_i = 0$  und  $m_{si} = 0$  stimmen die beiden Fließbedin-

ungen (6.79) überein und entsprechen der Fließbedingung des Regimes 1 bzw. 7 des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand gemäss Kapitel 5.2. Für  $n_i=0$ , und eine orthogonale Bewehrung ( $n_{sxy}=0, m_{sxy}=0$ ) geht (6.79) in die Normalmomenten-Fließbedingungen (6.42) über.

Obwohl ausser den kinematischen Bindungen weitere Vereinfachungen eingeführt werden, gelingt es nicht, die Fließbedingungen explizit zu formulieren. Da die als Näherung verwendete Betonfließfläche der effektiven Fließfläche einbeschrieben wird, kann die auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhende Traglast mit (6.79) sowohl unter- wie überschätzt werden. Die auf den drei verallgemeinerten Verzerrungen der verallgemeinerten Fließgelenklinie sowie deren Richtung als vierter kinematischer Freiheitsgrad beruhende Traglast wird stets unterschätzt. Werden weitere Vereinfachungen bezüglich des Bewehrungsspannungszustands eingeführt, verliert allerdings auch diese Aussage ihre Gültigkeit.

#### 6.4.4 Sandwichmodell

Da auf dem statischen Grenzwertsatz der Traglastverfahren beruhende Modelle einen unteren Grenzwert der Traglast liefern, werden diese insbesondere für die Bemessung bevorzugt verwendet. Um mit einer endlichen Anzahl statischer Grössen arbeiten zu können, wird das Element allgemein in eine Anzahl Schichten mit konstanten Betonspannungszuständen unterteilt. In Schichten mit einem Spannungszustand gemäss Punkt A der Betonfließgrenze in Bild 6.4(b) wird ausserdem über die ganze Schichtdicke von derselben Richtung des einachsigen Betondruckfelds ausgegangen.

Eine Bemessung der Bewehrung kann in diesem Sinn häufig auf der Grundlage des Falls 9 in Bild 6.4(b) mit je einem einachsigen Betondruckfeld konstanter Richtung am unteren und oberen Elementrand erfolgen. Für eine derartige Modellierung wird die von Brøndum-Nielsen [18] geprägte Bezeichnung *Sandwichmodell* verwendet. Vorerst wird von einer orthogonalen Bewehrung bestehend aus je zwei in  $x$ - und  $y$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslagen am unteren und oberen Elementrand ausgegangen; Hinweise zur Formulierung des Modells für schiefwinklige Bewehrungslagen folgen am Schluss des Abschnitts. Die Stahlquerschnittsflächen werden mit  $a_{sxu}, a_{syu}, a_{sxo}$  und  $a_{syo}$  und die jeweiligen  $z$ -Ordinaten mit  $z_{xu}, z_{yu}, z_{xo}$  und  $z_{yo}$  bezeichnet (Bild 6.10(a, b)), wobei die Fusszeiger  $u$  und  $o$  für den unteren bzw. oberen Elementrand stehen und das Koordinatensystem in Bewehrungsrichtung orientiert ist. In Übereinstimmung mit Kapitel 5.2.3 soll die Bemessung derart erfolgen, dass die Bewehrung auf Zug fließt, bevor der Beton die effektive Druckfestigkeit  $f_c$  erreicht; diese wird gemäss (5.123) in Rechnung gestellt.

Mit den Bezeichnungen in Bild 6.10(a) und (b) lauten die Gleichgewichtsbedingungen

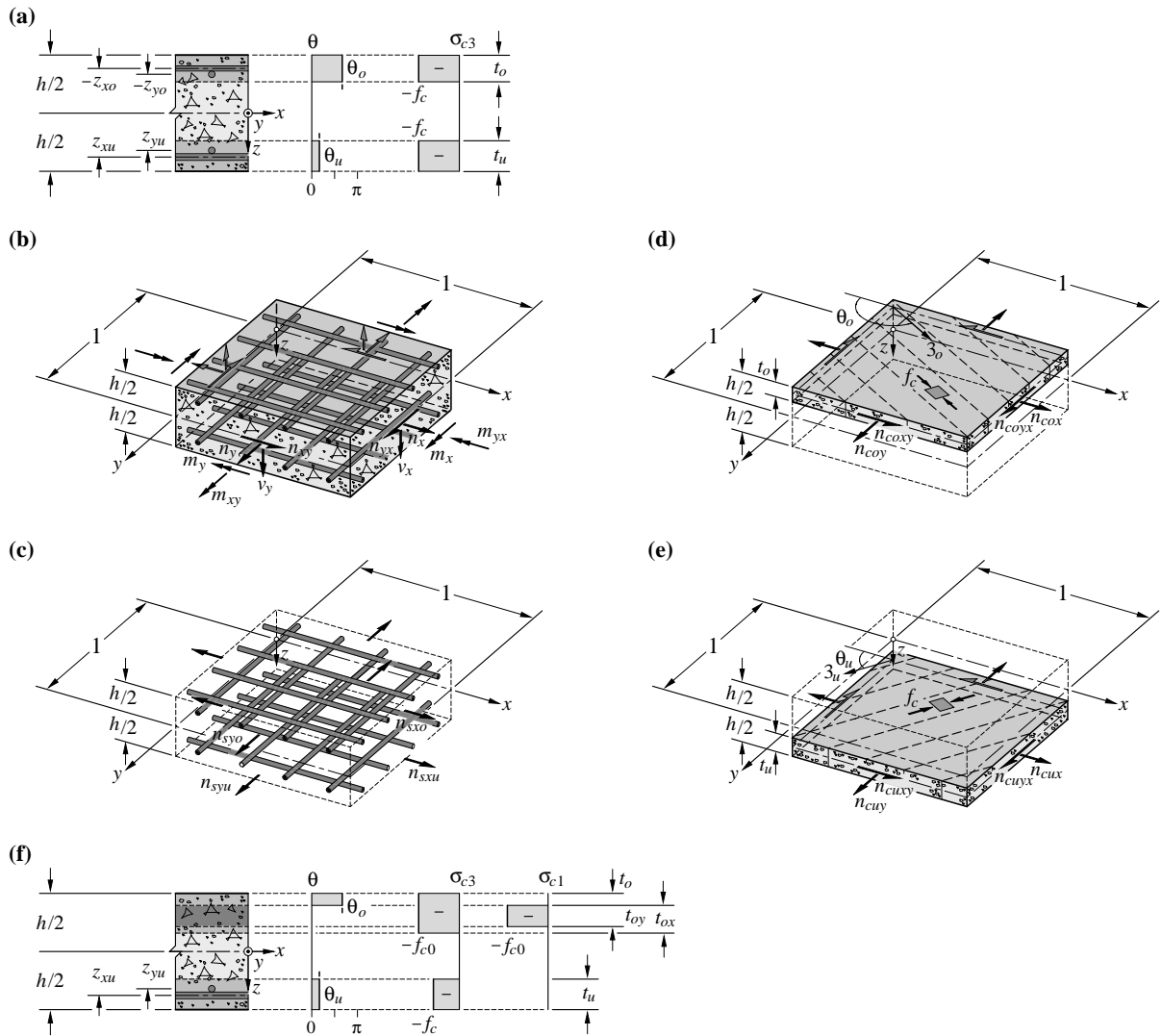
$$\begin{aligned} n_i &= -f_c t_o \cdot t_i(\theta_o) - f_c t_u \cdot t_i(\theta_u) + n_{syi} & \text{und} \\ m_i &= -f_c \frac{t_o}{2}(t_o - h) \cdot t_i(\theta_o) - f_c \frac{t_u}{2}(h - t_u) \cdot t_i(\theta_u) + m_{syi} \end{aligned} \quad (6.80)$$

mit den verallgemeinerten Bewehrungsspannungen  $n_{syi} = [n_{sxo} + n_{sxu}, n_{syo} + n_{syu}, 0]$  und  $m_{syi} = [n_{sxu} z_{xu} + n_{sxo} z_{xo}, n_{syu} z_{yu} + n_{syo} z_{yo}, 0]$  gemäss Bild 6.10(c), wobei  $n_{sk} = a_{sk} f_{syk}$  ist. Bild 6.10(d, e) zeigt die resultierenden Membrankräfte der beiden Betonschichten mit einem einachsigen Druckspannungszustand entsprechend den ersten beiden Termen rechterhand in den Gleichungen (6.80)<sub>1</sub>. Ausser den vier Bewehrungsflächen sind die Dicken der beiden Betonschichten  $t_u$  und  $t_o$  sowie die Winkel  $\theta_u$  und  $\theta_o$  unbekannt; das System ist zweifach statisch unbestimmt. Als überzählige Grössen werden die Winkel  $\theta_u$  und  $\theta_o$  so gewählt, dass der erforderliche Bewehrungsgehalt minimal wird.

Löst man die dritte Gleichung (6.80)<sub>1</sub> nach  $t_o$  auf und setzt dies in die dritte Gleichung (6.80)<sub>2</sub> ein, resultiert mit  $\xi_u = \sin\theta_u \cos\theta_u$  und  $\xi_o = \sin\theta_o \cos\theta_o$  eine quadratische Gleichung für  $t_u$

$$\left(\frac{t_u}{h}\right)^2 \xi_u (\xi_u - \xi_o) + 2 \frac{t_u}{h} \xi_u \left(\xi_o - \frac{n_{xy}}{h f_c}\right) + \left(\frac{n_{xy}}{h f_c}\right)^2 - \xi_o \frac{n_{xy}}{h f_c} + 2 \xi_o \frac{m_{xy}}{h^2 f_c} = 0 \quad (6.81)$$

Für  $\xi_u \neq \xi_o$  folgen daraus für die Betonschichtdicken die Beziehungen



**Bild 6.10** – Sandwichmodell: (a) Bezeichnungen und Betonspannungszustand; (b) verallgemeinerte Spannungen; (c) verallgemeinerte Bewehrungsspannungen; (d) und (e) resultierende Kräfte der oberen bzw. unteren Betonschicht; (f) Betonspannungsverteilung mit Zusatzschichten am oberen Rand ohne Bewehrung.

$$t_o = h \cdot \frac{\xi_u}{\xi_u - \xi_o} \left[ 1 - \frac{n_{xy}}{\xi_u h f_c} - \sqrt{1 - \frac{n_{xy}}{h f_c} \left( \frac{1}{\xi_u} + \frac{1}{\xi_o} \right) - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{\xi_u} - \frac{1}{\xi_o} \right) + \frac{1}{\xi_u \xi_o} \left( \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^2} \right] \quad (6.82)$$

$$t_u = h \cdot \frac{\xi_o}{\xi_o - \xi_u} \left[ 1 - \frac{n_{xy}}{\xi_o h f_c} - \sqrt{1 - \frac{n_{xy}}{h f_c} \left( \frac{1}{\xi_u} + \frac{1}{\xi_o} \right) - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{\xi_u} - \frac{1}{\xi_o} \right) + \frac{1}{\xi_u \xi_o} \left( \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^2} \right]$$

Für  $\xi_u = \xi_o$  geht (6.81) in eine lineare Gleichung über, womit für die Betonschichtdicken die Beziehungen

$$t_o = \frac{h}{2} \left[ \frac{n_{xy}}{\xi_u h f_c} - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \xi_u - \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^{-1} \right] \quad \text{und} \quad t_u = \frac{h}{2} \left[ \frac{n_{xy}}{\xi_u h f_c} + \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \xi_u - \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^{-1} \right] \quad (6.83)$$

folgen. In Anlehnung an die Bemessungsbeziehungen in Kapitel 5.2.3 werden die in gewissen Grenzen frei wählbaren Parameter



$$k_u = |\cot \theta_u| \quad \text{und} \quad k_o = |\cot \theta_o| \quad (6.84)$$

mit den Abkürzungen

$$\zeta_u = |\sin \alpha_u \cos \alpha_u| = (k_u + k_u^{-1})^{-1} \quad \text{und} \quad \zeta_o = |\sin \alpha_o \cos \alpha_o| = (k_o + k_o^{-1})^{-1} \quad (6.85)$$

eingeführt. Dominiert das Drillmoment  $m_{xy}$  gegenüber der Membranschubkraft  $n_{xy}$  (Fall a), weisen die Betonmembranschubkräfte der beiden Schichten  $n_{cuxy}$  und  $n_{coxy}$  unterschiedliche Vorzeichen auf, und die Betonschichtdicken betragen gemäss (6.82)

$$t_o = \frac{h\zeta_u}{\zeta_u + \zeta_o} \left[ 1 - \frac{m_{xy}}{|m_{xy}|} \frac{n_{xy}}{\zeta_u h f_c} - \sqrt{1 - \frac{n_{xy}}{h f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} - \frac{1}{\zeta_o} \right) - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} + \frac{1}{\zeta_o} \right) - \frac{1}{\zeta_u \zeta_o} \left( \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^2} \right] \quad (6.86)$$

$$t_u = \frac{h\zeta_o}{\zeta_o + \zeta_u} \left[ 1 - \frac{m_{xy}}{|m_{xy}|} \frac{n_{xy}}{\zeta_o h f_c} - \sqrt{1 - \frac{n_{xy}}{h f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} - \frac{1}{\zeta_o} \right) - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} + \frac{1}{\zeta_o} \right) - \frac{1}{\zeta_u \zeta_o} \left( \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^2} \right]$$

Dominiert hingegen die Membranschubkraft  $n_{xy}$  gegenüber dem Drillmoment  $m_{xy}$ , weisen die Betonmembranschubkräfte der beiden Schichten  $n_{cuxy}$  und  $n_{coxy}$  gleiche Vorzeichen auf (Fall b), und die Betonschichtdicken betragen

$$t_o = \frac{h\zeta_u}{\zeta_u - \zeta_o} \left[ 1 - \frac{|n_{xy}|}{\zeta_u h f_c} - \sqrt{1 - \frac{|n_{xy}|}{h f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} + \frac{1}{\zeta_o} \right) - \frac{n_{xy}}{|n_{xy}|} \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} - \frac{1}{\zeta_o} \right) + \frac{1}{\zeta_u \zeta_o} \left( \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^2} \right] \quad (6.87)$$

$$t_u = \frac{h\zeta_o}{\zeta_o - \zeta_u} \left[ 1 - \frac{|n_{xy}|}{\zeta_o h f_c} - \sqrt{1 - \frac{|n_{xy}|}{h f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} + \frac{1}{\zeta_o} \right) - \frac{n_{xy}}{|n_{xy}|} \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{\zeta_u} - \frac{1}{\zeta_o} \right) + \frac{1}{\zeta_u \zeta_o} \left( \frac{n_{xy}}{h f_c} \right)^2} \right]$$

Bei gleichen Druckfeldrichtungen der beiden Betonschichten (Fall c) resultieren ferner aus (6.83) die Beziehungen

$$t_o = \frac{h}{2} \frac{n_{xy}}{|n_{xy}|} \left[ \frac{n_{xy}}{\zeta_u h f_c} - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \zeta_u - \frac{|n_{xy}|}{h f_c} \right)^{-1} \right] \quad (6.88)$$

$$t_u = \frac{h}{2} \frac{n_{xy}}{|n_{xy}|} \left[ \frac{n_{xy}}{\zeta_u h f_c} + \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \zeta_u - \frac{|n_{xy}|}{h f_c} \right)^{-1} \right]$$

Bei frei gewählten Parametern  $k_u$  und  $k_o$  entsprechen die Betonschichtdicken denen des Falls a (6.86), falls in den Gleichungen (6.86) die Ausdrücke rechterhand positiv sind und die Drillmomente  $m_{xy}$  nicht verschwinden, andernfalls jenen des Falls b (6.87) bzw. jenen des Falls c (6.88), falls  $k_u = k_o$  ist. Die Betonschichtdicken werden aufgrund der Elementdicke  $h$  durch die Bedingung

$$t_o + t_u \leq h \quad (6.89)$$

beschränkt. Werden die  $z$ -Ordinaten der Bewehrungslagen aufgrund der vorgegebenen Betonüberdeckung abgeschätzt, liefern die Gleichungen (6.80)<sub>1</sub>, (6.80)<sub>2</sub>, (6.80)<sub>4</sub> und (6.80)<sub>5</sub> die Bemessungsbeziehungen zur Ermittlung der Bewehrungsquerschnittsflächen

$$\begin{aligned}
 n_{sxu} &= \frac{1}{z_{xu} - z_{xo}} \left\{ m_x - n_x z_{xo} + \frac{f_c}{2} \left[ \frac{t_u k_u^2 (h - t_u - 2z_{xo})}{1 + k_u^2} - \frac{t_o k_o^2 (h - t_o + 2z_{xo})}{1 + k_o^2} \right] \right\} \\
 n_{syu} &= \frac{1}{z_{yu} - z_{yo}} \left\{ m_y - n_y z_{yo} + \frac{f_c}{2} \left[ \frac{t_u (h - t_u - 2z_{yo})}{1 + k_u^2} - \frac{t_o (h - t_o + 2z_{yo})}{1 + k_o^2} \right] \right\} \\
 n_{sxo} &= \frac{1}{z_{xu} - z_{xo}} \left\{ -m_x + n_x z_{xu} + \frac{f_c}{2} \left[ \frac{t_o k_o^2 (h - t_o + 2z_{xu})}{1 + k_o^2} - \frac{t_u k_u^2 (h - t_u - 2z_{xu})}{1 + k_u^2} \right] \right\} \\
 n_{syo} &= \frac{1}{z_{yu} - z_{yo}} \left\{ -m_y + n_y z_{yo} + \frac{f_c}{2} \left[ \frac{t_o (h - t_o + 2z_{yu})}{1 + k_o^2} - \frac{t_u (h - t_u - 2z_{yu})}{1 + k_u^2} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

Gemäss Kapitel 5.2.3 ergeben sich im ebenen Spannungszustand bei einer orthogonalen Bewehrung für eine Druckfeldrichtung unter  $45^\circ$  zu den Bewehrungsrichtungen minimale Bewehrungsgehalte und gleichzeitig eine minimale Betonbeanspruchung. Folglich werden die Dicken der Betondruckfelder  $t_u$  und  $t_o$  minimal und deren Hebelarme entsprechend maximal, falls  $k_u = k_o = 1$  gewählt wird. Dementsprechend resultieren damit aus (6.90) die geringsten Bewehrungsquerschnittsflächen. Die Beziehungen (6.86) reduzieren sich dann auf

$$\begin{aligned}
 t_o &= \frac{h}{2} \left[ 1 - \frac{2m_{xy} n_{xy}}{|m_{xy}| hf_c} - \sqrt{1 - \frac{8m_{xy}}{h^2 f_c} - 4 \left( \frac{n_{xy}}{hf_c} \right)^2} \right] \\
 t_u &= \frac{h}{2} \left[ 1 - \frac{2m_{xy} n_{xy}}{|m_{xy}| hf_c} + \sqrt{1 - \frac{8m_{xy}}{h^2 f_c} - 4 \left( \frac{n_{xy}}{hf_c} \right)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

und die Beziehungen (6.87) und (6.88) liefern

$$\begin{aligned}
 t_o &= \frac{h}{2} \frac{n_{xy}}{|n_{xy}|} \left[ \frac{n_{xy}}{hf_c} - \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{2} - \frac{|n_{xy}|}{hf_c} \right)^{-1} \right] \\
 t_u &= \frac{h}{2} \frac{n_{xy}}{|n_{xy}|} \left[ \frac{n_{xy}}{hf_c} + \frac{2m_{xy}}{h^2 f_c} \left( \frac{1}{2} - \frac{|n_{xy}|}{hf_c} \right)^{-1} \right]
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

Setzt man (6.91) bzw. (6.92) in (6.89) ein, resultiert für die Elementdicke  $h$  ausserdem die Forderung

$$h \geq \frac{2}{f_c} \sqrt{n_{xy}^2 + 2f_c |m_{xy}|} \tag{6.93}$$

Ist mit  $k_u = k_o = 1$  in einer der Bemessungsbeziehungen (6.86) der Ausdruck rechterhand negativ, so ist in der entsprechenden Richtung keine Bewehrung erforderlich. Der Grad der statischen Unbestimmtheit reduziert sich damit um eins. Der Parameter  $k_j$  des entsprechenden Elementtrands ist dann nicht frei wählbar, sondern folgt mit  $a_{sk} = 0$  aus der entsprechenden Bemessungsbeziehung (6.90).

Verschwinden auf diese Weise beide Bewehrungsquerschnittsflächen auf einer Elementseite, was bei betragsmässig grossen Druckmembrannormalkräften oder gegenüber den Drillmomenten grossen Biegemomenten möglich ist, führt dies zu einer relativ konservativen Bemessung. Verschwinden mehr als zwei Bewehrungsquerschnittsflächen, so weist das System zu wenige statische Freiheitsgrade auf. Die verbleibende Bewehrungsquerschnittsfläche kann nicht bemessen und die Betonabmes-

sungen können nicht geprüft werden. Das Modell lässt sich allerdings ohne eingreifende Veränderungen der Bemessungsbeziehungen für derartige Verhältnisse anpassen, indem am Elementrand ohne Bewehrung auf der Innenseite der Betonschicht mit einem einachsigen Spannungszustand zwei zusätzliche einander überlagerte Schichten mit einem einachsigen Spannungszustand in Richtung  $x$  bzw.  $y$  mit Dicken  $t_{ox}$  und  $t_{oy}$  bzw.  $t_{ux}$  und  $t_{uy}$  eingeführt werden. Bild 6.10(f) zeigt beispielsweise die Betonspannungsverteilungen für den Fall, dass nur unten eine Bewehrung erforderlich ist. Obwohl ein derartiger Betonspannungszustand gemäss Bild 6.4(b) im Element nicht auftreten kann, lässt sich damit ein für die Bemessung geeigneter statisch zulässiger Spannungszustand erzeugen.

Am entsprechenden Elementrand kreuzen keine Bewehrungsstäbe die Betonspannungsfelder, folglich kann anstelle von  $f_c$  gemäss (5.123) von einer einachsigen Betondruckfestigkeit gemäss (3.56) mit  $\varepsilon_1 = 0$ , also

$$f_{c0} = 2,5 f_{cc}^{2/3} \quad \text{in [N/mm}^2\text{]} \quad (6.94)$$

ausgegangen werden. Da die zusätzlich eingeführten Schichten keinen Beitrag zu den verallgemeinerten Spannungen  $n_{xy}$  und  $m_{xy}$  leisten, können die Dicken der äusseren Schichten mit den Beziehungen (6.86) bis (6.88) bestimmt werden, wenn die Abkürzung (6.85)<sub>1</sub> resp. (6.85)<sub>2</sub> des Elementrands ohne Bewehrung durch

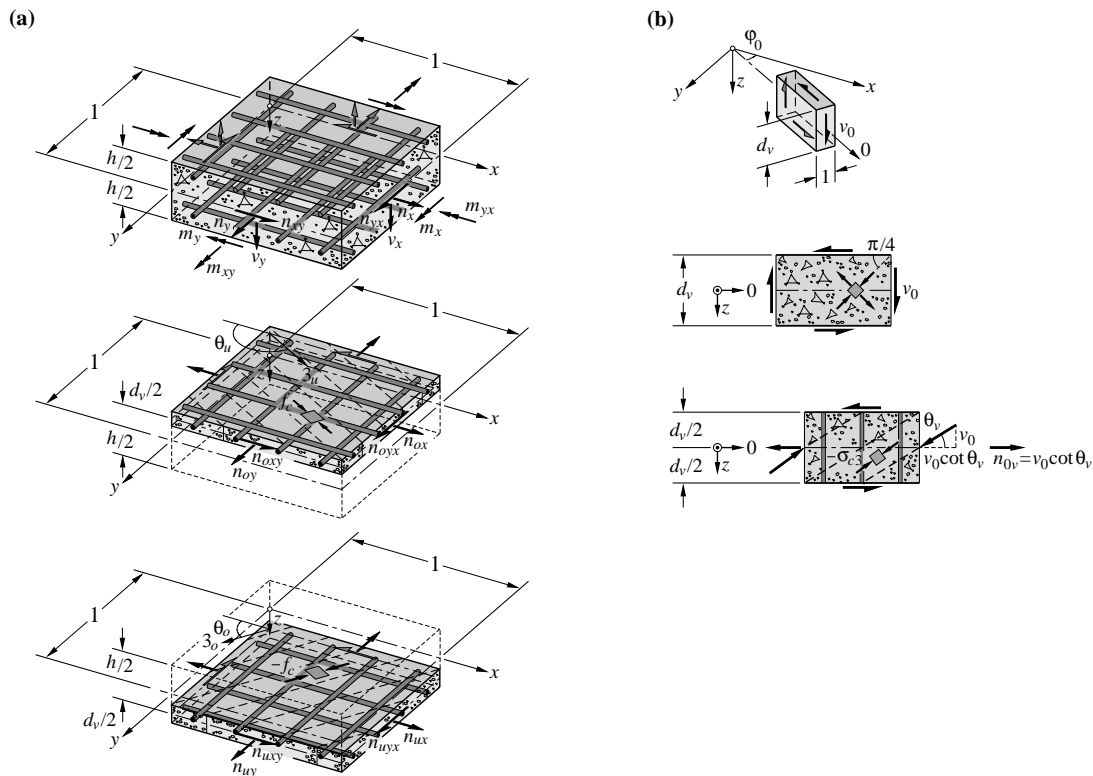
$$\zeta_u = \frac{f_{c0}}{f_c} (k_u + k_u^{-1})^{-1} \quad \text{resp.} \quad \zeta_o = \frac{f_{c0}}{f_c} (k_o + k_o^{-1})^{-1} \quad (6.95)$$

ersetzt wird.

Falls am oberen Rand keine Bewehrung erforderlich ist, wird in den Bemessungsbeziehungen der Bewehrungsquerschnittsflächen (6.90) zur Membrankraft  $n_x$  der Term  $f_{c0} t_{ox}$ , zur Membrankraft  $n_y$  der Term  $f_{c0} t_{oy}$ , zum Biegemoment  $m_x$  der Term  $f_{c0} t_{ox} (t_{ox} - h + t_o)/2$  und zum Biegemoment  $m_y$  der Term  $f_{c0} t_{oy} (t_{oy} - h + t_o)/2$  addiert. Die erforderlichen Dicken der zusätzlichen Betondruckfelder  $t_{ox}$  und  $t_{oy}$  lassen sich aus den entsprechend ergänzten Beziehungen (6.90)<sub>3</sub> und (6.90)<sub>4</sub> bestimmen, indem  $a_{sxo} = a_{syo} = 0$  gesetzt wird

$$\begin{aligned} t_{ox} &= \frac{h}{2} - \frac{t_o}{2} + z_{xu} - \sqrt{\left(\frac{h}{2} - \frac{t_o}{2} + z_{xu}\right)^2 + 2\left(\frac{n_x z_{xu}}{f_c} - \frac{m_x}{f_c}\right)} + \mu_x && \text{mit} \\ \mu_x &= \frac{t_u k_u^2 (h - t_u - 2z_{xo})}{1 + k_u^2} - \frac{t_o k_o^2 (h - t_o + 2z_{xo})}{1 + k_o^2} && \text{und} \\ t_{oy} &= \frac{h}{2} - \frac{t_o}{2} + z_{yu} - \sqrt{\left(\frac{h}{2} - \frac{t_o}{2} + z_{yu}\right)^2 + 2\left(\frac{n_y z_{yu}}{f_c} - \frac{m_y}{f_c}\right)} + \mu_y && \text{mit} \\ \mu_y &= \frac{t_u (h - t_u - 2z_{yo})}{1 + k_u^2} - \frac{t_o (h - t_o + 2z_{yo})}{1 + k_o^2} && \end{aligned} \quad (6.96)$$

Die erforderlichen Querschnittsflächen der unteren Bewehrungslagen folgen unter Berücksichtigung von (6.96) aus den entsprechend ergänzten Bemessungsbeziehungen (6.90)<sub>1</sub> und (6.90)<sub>2</sub>. Ist am unteren Rand keine Bewehrung erforderlich, ergeben sich analoge Beziehungen. Ist keine Bewehrung erforderlich, so können bei beiden Rändern zusätzliche Betonschichten angefügt werden, um die Betonabmessungen zu prüfen. Ist an einem Elementrand nur eine Bewehrungslage erforderlich, so kann alternativ zum beschriebenen Vorgehen auch eine Zusatzschicht mit einem einachsigen Betondruckspannungszustand in Richtung der entsprechenden Bewehrungslage eingeführt werden. Bei der Betrachtung von Beanspruchungen mit gegenüber den Biegemomenten geringen Drillmomenten  $m_{xy}$  kann es unter Umständen auch zweckmässig sein, die Zusatzschichten am Elementrand anzuordnen; die Bemessungsbeziehungen sind dann entsprechend anzupassen.



**Bild 6.11** – Sandwichmodell: (a) Näherung; (b) Berücksichtigung der Querkräfte.

Falls an einem Elementrand zwei Bewehrungslagen vorhanden sind, so ist der entsprechende Parameter  $k_j$  in Anlehnung an die Überlegungen des Kapitels 5.4.4 jeweils auf Werte des Intervalls  $[0,5 \leq k_j \leq 2]$  zu beschränken. Verlaufen die Bewehrungslagen schiefwinklig in zwei Richtungen  $x$  und  $n$ , so lassen sich die Bemessungsbeziehungen wiederum am einfachsten mit in schiefwinkligen Koordinaten formulierten verallgemeinerten Spannungen schreiben. Wie bereits im Kapitel 6.4.2 erläutert, ist eine solche Bewehrungsanordnung allerdings für hohe Drillmomentenbeanspruchungen gegenüber einer orthogonalen Bewehrung ungünstig.

Untere Grenzwerte der Traglast lassen sich mit dem Sandwichmodell mit oder ohne Zusatzschichten gewinnen, indem beim Auswerten der Gleichgewichtsbedingungen die überzähligen Größen mit Rücksicht auf die Fließbedingungen frei gewählt werden. Um möglichst hohe untere Grenzwerte der Traglast zu erhalten, sind die überzähligen Größen anhand einer entsprechenden Optimierung zu bestimmen. Bei den Gleichgewichtsbedingungen des Sandwichmodells ohne Zusatzschichten treten neben dem Traglastfaktor  $\kappa = S_i / S_{i0}$  ( $S_{i0}$  bezeichnet gegebene verallgemeinerte Spannungen), die vier Stahlspannungen, die Betonschichtdicken  $t_u$  und  $t_o$  sowie die Winkel  $\theta_u$  und  $\theta_o$  als unbekannte statische Größen in Erscheinung, sodass drei dieser Größen überzählig sind und gewählt bzw. durch Lösen des entsprechenden Optimierungsproblems bestimmt werden können. Khalifa [69] bestimmte mit Hilfe eines für diesen Zweck entwickelten numerischen Algorithmus auf dieser Grundlage eine der Fließfläche für reine Biege- und Drillmomentenbeanspruchungen ( $n_i = 0$ ) einbeschriebene Fließfläche. Anstelle der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Zusatzschichten schiebt er zur Behandlung der entsprechenden Spezialfälle das einachsige Druckfeld des schwächer beanspruchten Elementrands an den Rand des anderen Druckfeldes, so dass der Beton am einen Elementrand spannungsfrei ist.

### Näherung

Um eine Abschätzung der Bewehrungsquerschnittsflächen vorzunehmen, können die resultierenden Membrankräfte der einachsigen Betondruckfelder sowie die resultierenden Kräfte der beiden Bewehrungslagen des jeweiligen Elementrands vereinfachend in derselben Ebene wirkend angenommen werden. Geht man davon aus, dass die beiden Ebenen denselben Abstand  $d_v/2$  zur Elementmittelebe-

ne aufweisen, betragen die in den beiden Ebenen wirkenden, zu den verallgemeinerten Spannungen  $n_i$  und  $m_i$  statisch äquivalenten Membrankräfte

$$\begin{aligned} n_{xo} &= \frac{n_x}{2} - \frac{m_x}{d_v} & , & & n_{yo} &= \frac{n_y}{2} - \frac{m_y}{d_v} & \text{ und } & & n_{xyo} &= \frac{n_{xy}}{2} - \frac{m_{xy}}{d_v} & \text{ bzw.} \\ n_{xu} &= \frac{n_x}{2} + \frac{m_x}{d_v} & , & & n_{yu} &= \frac{n_y}{2} + \frac{m_y}{d_v} & \text{ und } & & n_{xyu} &= \frac{n_{xy}}{2} + \frac{m_{xy}}{d_v} \end{aligned} \quad (6.97)$$

(Bild 6.11(a)). Die Bemessung der Bewehrung kann damit für die beiden Scheibenelemente separat mit den entsprechenden Beziehungen des Kapitels 5.2.3 vorgenommen werden. Für einen gewählten Abstand  $d_v$  lassen sich auf diese Weise die erforderlichen Querschnittsflächen der Bewehrungslagen direkt bestimmen. Entsprechen die Schichtdicken der beiden einachsigen Betondruckfelder etwa dem doppelten Randabstand der Bewehrungslagen, resultieren auf diese Weise gute Näherungslösungen. Mit Hilfe dieses vereinfachten Modells lassen sich ferner die Normalmomenten-Fliessbedingungen alternativ herleiten, indem (6.97) bei verschwindenden Membrankräften in die Fliessbedingung des Regimes 1 des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand (5.20)<sub>1</sub> eingesetzt und die Beziehung mit  $d_v$  multipliziert wird [122].

### Berücksichtigung der Querkräfte

Nach einem Vorschlag von Marti [90] können die Querkräfte  $v_x$  und  $v_y$  bei der Bemessung vereinfachend anhand einer Querschnittsbetrachtung berücksichtigt werden. Für nominelle Schubspannungen  $\tau_0 < f_{cc}^{1/2}/6$  und eine Dicke  $h < 0,4$  m kann in der Regel auf eine Querkraftbewehrung verzichtet werden, wobei sich infolge Querkraft in Hauptquerkrafttrichtung eine reine Schubspannungsbeanspruchung gemäss Bild 6.11(b) einstellt. Die Schubspannungen sind dabei in der mittleren Betonschicht über  $z$  konstant verteilt und werden in der oberen und unteren Betonschicht sukzessive bis zum Verschwinden am Elementrand abgebaut. Die nominelle Schubspannung beträgt näherungsweise

$$\tau_0 = v_0 / d_v \quad \text{mit} \quad d_v = h - t_u / 2 - t_o / 2 \quad (6.98)$$

Bei höheren Querkraftbeanspruchungen oder dickeren Elementen ist eine Querkraftbewehrung vorzusehen. In Hauptquerkrafttrichtung kann dann ähnlich wie bei einem Trägersteg von einem einachsigen Betondruckfeld ausgegangen werden, welches bezüglich der Mittelebene den Winkel  $\theta_v$  aufweist, und zu diesem zentrisch über die Höhe von  $2 \cdot d_v / 2$  wirkend angenommen wird (Bild 6.11(b)). Der erforderliche Bewehrungsgehalt der senkrecht zur Mittelebene verlaufenden Querkraftbewehrung beträgt

$$\rho_z = \frac{v_0}{f_{sy} d_v \cot \theta_v} \quad (6.99)$$

Damit am Querschnitt das Gleichgewicht gewahrt wird, ist der Anteil der resultierenden Betondruckkraft parallel zur Mittelebene durch eine einachsige Membrankraftbeanspruchung  $n_{0v} = v_0 \cdot \cot \theta_v$  zu kompensieren. Unter Berücksichtigung der entsprechenden Transformationsbeziehungen sowie (6.21) ergeben sich somit Membrankräfte

$$n_{vi} = \frac{\cot \theta_v}{|v_0|} \left[ v_x^2, v_y^2, v_x v_y \right] \quad (6.100)$$

welche bei der Auswertung der Bemessungsbeziehungen des vorangegangenen Abschnitts zu den Membrankräften  $n_i$  zu addieren sind. Falls das Betondruckfeld exzentrisch zur Mittelebene eingeführt wird, sind analog zu den Biege- und Drillmomenten entsprechende verallgemeinerte Spannungen  $m_{vi}$  zu addieren.

### Reine Drillmomentenbeanspruchung

Ein einfaches Beispiel für die Bestimmung eines unteren Grenzwertes der Traglast mit Hilfe des Sandwichmodells stellt ein Plattenelement unter reiner Drillmomentenbeanspruchung  $m_{xy}$  in Bewehrungsrichtung mit  $a_{sx} \equiv a_{sxo} = a_{sxu}$  und  $a_{sy} \equiv a_{syo} = a_{syu}$  dar. Infolge der Symmetrie der Bewehrung bezüglich der Mittelebene sind die Stahlspannungen der Bewehrungslagen in  $x$ - und  $y$ -Richtung gleich gross und werden gleich der Fließgrenze auf Zug gesetzt. Für den Betonspannungszustand folgt daraus, dass die beiden einachsigen Druckfelder gleich dick sind ( $t \equiv t_o = t_u$ ). Ausserdem gilt für die Druckfeldrichtungen die Beziehung  $\theta_u = -\theta_o$ . Die Gleichungen (6.80)<sub>3</sub>, (6.80)<sub>4</sub> und (6.80)<sub>5</sub> sind damit bereits erfüllt, und aus (6.80)<sub>1</sub> und (6.80)<sub>1</sub> resultieren die Beziehungen

$$t = \frac{f_{sy}}{f_c} (a_{sx} + a_{sy}) \leq \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad \cot \theta_u = -\cot \theta_o = \sqrt{\frac{a_{sx}}{a_{sy}}} \quad (6.101)$$

Damit liefert (6.80)<sub>6</sub>

$$|m_{xyu}| \geq f_{sy} \sqrt{a_{sx} a_{sy}} \cdot \left[ h - \frac{f_{sy}}{f_c} (a_{sx} + a_{sy}) \right] \leq \frac{f_c h^2}{8} \quad (6.102)$$

einen unteren Grenzwert der Traglast, welcher von Nielsen [122] entwickelt wurde. Marti [88] zeigte anhand eines Vergleichs mit der von ihm bestimmten Traglast, dass (6.102) eine sehr gute Näherung liefert. Bestimmen lässt sich die Traglast mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} 4 \left( \frac{a_{sx} f_{syx}}{h \cdot f_c} \right) &= 1 - 2\sqrt{\alpha\beta} + (\beta - \alpha) \cdot \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \right] \\ 4 \left( \frac{a_{sy} f_{syy}}{h \cdot f_c} \right) &= 1 - 2\sqrt{\alpha\beta} + (\alpha - \beta) \cdot \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \right] \\ m_{xy} &= \frac{f_c h^2}{8} \left\{ \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2} - 2(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha\beta} - (\alpha - \beta)^2 \cdot \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.103)$$

Die Richtung des Vektors der Verzerrungszinkremente ist dabei durch die beiden Parameter

$$\alpha = \frac{\dot{\epsilon}_{x0}}{h \cdot \dot{\chi}_{xy}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\dot{\epsilon}_{y0}}{h \cdot \dot{\chi}_{xy}} \quad (6.104)$$

gegeben. Der Betonspannungszustand entspricht Fall 9 in Bild 6.4(b), wobei die Schichtgrenzen bei

$$z = \pm h \sqrt{\alpha\beta} \quad (6.105)$$

liegen. Für eine gegebene reine Drillmomentenbeanspruchung ergibt sich für  $a_{sx} = a_{sy}$  der geringste Gesamtbewehrungsgehalt. Aus (6.86) und (6.90) resultieren ferner die Bemessungsbeziehungen

$$a_{sx} \geq \frac{h}{2} \cdot \frac{f_c}{f_{sy}} \cdot \frac{k^2}{1 + k^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4(k + k^{-1}) \cdot \frac{|m_{xy}|}{f_c h^2}} \right] \quad (6.106)$$

$$a_{sy} \geq \frac{h}{2} \cdot \frac{f_c}{f_{sy}} \cdot \frac{1}{1+k^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4(k+k^{-1}) \cdot \frac{|m_{xy}|}{f_c h^2}} \right]$$

welche sich für  $k=1$  auf

$$a_{sx} = a_{sy} \geq \frac{h}{4} \cdot \frac{f_{sy}}{f_c} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{8|m_{xy}|}{f_c h^2}} \right) \quad (6.107)$$

reduzieren. Die Dicke der Sandwichdeckel beträgt

$$t = \frac{h}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4(k+k^{-1}) \frac{|m_{xy}|}{f_c h^2}} \right] \leq \frac{h}{2} \quad (6.108)$$

### Beanspruchung durch Membranschubkräfte $n_{xy}$ und Biegemomente $m_x$

Die Stege von Stahlbeton-Kastenträgern werden infolge der Biege- und Torsionsbeanspruchung sowie der Einleitung von Lasten über Querbiegung vorwiegend durch Membranschubkräfte  $n_{xy}$  und Biegemomente  $m_x$  beansprucht. Bei einer Bemessung gemäss dem Sandwichmodell kann dabei der Fall  $a$  infolge verschwindender Drillmomentenbeanspruchung nicht auftreten. Wählt man ferner  $k_u = k_o \equiv k$  [ $0,5 \leq k \leq 2$ ], also gleiche Richtungen ( $\theta_u = \theta_o \equiv \theta$ ) der beiden Betondruckfelder, liefert (6.88) unter Berücksichtigung von (6.84) und (6.85) sowie (6.89) eine Betondruckfelddicke von

$$t = (k + k^{-1}) \cdot \frac{|n_{xy}|}{2f_c} \leq \frac{h}{2} \quad (6.109)$$

wobei die beiden einachsigen Betondruckfelder gleich dick sind ( $t_u = t_o \equiv t$ ). Aus (6.90) resultieren damit die Bemessungsbeziehungen der Bewehrungslagen

$$\begin{aligned} n_{sxu} &= \frac{m_x - k \cdot z_{xo} |n_{xy}|}{z_{xu} - z_{xo}} \quad , \quad n_{sxo} = \frac{-m_x + k \cdot z_{xu} |n_{xy}|}{z_{xu} - z_{xo}} \\ n_{syu} &= \frac{-z_{yo} |n_{xy}|}{k(z_{yu} - z_{yo})} \quad \text{und} \quad n_{syo} = \frac{z_{yu} |n_{xy}|}{k(z_{yu} - z_{yo})} \end{aligned} \quad (6.110)$$

Ist ein positives Biegemoment  $m_x > 0$  gegenüber  $|n_{xy}|$  so gross, dass der Ausdruck rechterhand in (6.110)<sub>2</sub> negativ wird, so ist am oberen Elementrand in  $x$ -Richtung keine Bewehrung erforderlich. Setzt man den Ausdruck rechterhand in (6.110)<sub>2</sub> entsprechend gleich null, resultiert für den Parameter  $k$  die Beziehung

$$k = \frac{m_x}{z_{xu} |n_{xy}|} \quad (6.111)$$

Die Bemessungsbeziehungen (6.110)<sub>1</sub>, (6.110)<sub>3</sub> und (6.110)<sub>4</sub> gehen dann in

$$n_{sxu} = \frac{m_x}{z_{xu}} \quad , \quad n_{syu} = \frac{-z_{yo} z_{xu} n_{xy}^2}{m_x (z_{yu} - z_{yo})} \quad \text{und} \quad n_{syo} = \frac{z_{yu} z_{xu} n_{xy}^2}{m_x (z_{yu} - z_{yo})} \quad (6.112)$$

über.

Damit die durch den Parameter  $k$  bestimmte Betondruckfeldrichtung auch für diese Fälle frei wählbar bleibt, können alternativ am oberen Elementrand ein zusätzliches einachsiges Betondruckfeld in Richtung  $x$  mit einer Dicke  $t_x$  eingeführt und die beiden Betondruckfelder um  $t_x$  gegen die Mittelebene hin verschoben werden. Die Bemessungsbeziehung der unteren, in Richtung  $x$  verlaufenden Bewehrung und die Dicke  $t_x$  lassen sich mit (6.90)<sub>1</sub> und (6.90)<sub>3</sub> bestimmen, wenn zur Membrankraft  $n_x$  der Term  $f_c t_x$  und zum Biegemoment  $m_x$  der Term  $f_c t_x(t_x - h)/2$  addiert wird

$$n_{sxu} = k |n_{xy}| + f_c \left[ \frac{h}{2} + z_{xu} - \sqrt{\left(\frac{h}{2} + z_{xu}\right)^2 + 2 \left(\frac{k |n_{xy}|}{f_c} - \frac{m_x}{f_c}\right)} \right] \quad (6.113)$$

$$t_x = \frac{n_{sxu}}{f_c} - k \frac{|n_{xy}|}{f_c}$$

In der Regel resultiert auf diese Weise gegenüber dem erstgenannten Vorgehen eine geringere erforderliche Querschnittsfläche der unteren in Richtung  $x$  verlaufenden Bewehrungslage. Die Bewehrungslagen in Richtung  $y$  lassen sich nach wie vor mit den Beziehungen (6.110)<sub>3</sub> und (6.110)<sub>4</sub> bemessen. Ist für ein gegenüber  $|n_{xy}|$  betragsmässig grosses negatives Biegemoment  $m_x < 0$  keine untere Bewehrung erforderlich, kann analog vorgegangen werden.

Wird bei der Bemessung von Stegen gemäss [88, 107, 153] von einem einzigen bezüglich der Mittelebene exzentrischen einachsigen Betondruckfeld ausgegangen, so resultieren zusätzlich Biegemomente  $m_y$  und Drillmomente  $m_{xy}$ , welche bei der Formulierung des globalen Gleichgewichts entsprechend zu berücksichtigen sind. Für die praktische Bemessung von Kastenträgern ist ein derartiges Vorgehen allerdings nicht zweckmässig, da in der Regel zuerst die globalen Kraftgrössen bestimmt werden, und anschliessend auf deren Grundlage die Bemessung vorgenommen wird. Ausserdem ist die Berücksichtigung der beiden Kraftgrössen bei der Formulierung des Gleichgewichts oft aufwendig. Werden die bei einer derartigen Bemessung resultierenden Biegemomente  $m_y$  und Drillmomente  $m_{xy}$  vernachlässigt, so werden die beiden Grössen implizit als verallgemeinerte Reaktionen aufgefasst. Ein derartiges Vorgehen liefert folglich einen unteren Grenzwert der Traglast, welche auf den drei kinematischen Freiheitsgraden einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie mit fester Richtung  $y$  beruht. Die in [107] zur Bemessung von Trägerstegen angegebenen Interaktionsdiagramme liefern folglich in der Regel einen oberen Grenzwert der auf allen sechs in Kapitel 6.2 eingeführten verallgemeinerten Verzerrungen beruhenden Traglast; worauf in [107] allerdings nicht hingewiesen wird.

Mit der Voraussetzung, dass die Richtungen der beiden Betondruckfelder gleich sind ( $\theta_u = \theta_o$ ), lässt sich auf der Grundlage des Sandwichmodells auch ein unterer Grenzwert der Traglast ermitteln. Vereinfachend wird dabei vorausgesetzt, dass  $z_{yo} = -z_{yu} \equiv z_y$  und  $a_{syo} = a_{syu} \equiv a_{sy}$  ist und ausser der oberen in  $x$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage alle Bewehrungslagen die Fließgrenze erreichen. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (6.80) resultiert damit ein unterer Grenzwert der Traglast von

$$n_{xy} = \frac{1}{z_{xo}} \left\{ a_{sy} f_{syy} \beta - \sqrt{a_{sy} f_{syy} \left[ 2 a_{sx} f_{syx} z_{xo} (z_{xo} - z_{xu}) + a_{sy} f_{syy} \beta^2 \right]} \right\} \quad (6.114)$$

wobei  $\beta = m_x/n_{xy}$  ist. Für die Stahlspannung der oberen in  $x$ -Richtung verlaufenden Bewehrung resultiert

$$\sigma_{sxo} = \frac{\beta \cdot n_{xy} - a_{sxu} f_{syx} z_{xu}}{z_{xo} a_{sxo}} \quad [-f_{syx} \leq \sigma_{sxo} \leq f_{syx}] \quad (6.115)$$

und für die Betondruckfelddicke und -richtung folgen

$$t = a_{sy} \frac{f_{syy}}{f_c} + \frac{n_{xy}^2}{4 a_{sy} f_{syy} f_c} \quad \text{sowie} \quad \cot \theta = \frac{n_{xy}}{2 a_{sy} f_{syy}} \quad (6.116)$$



Fliesst auch die obere in Richtung  $x$  verlaufende Bewehrungslage, liefern die Gleichgewichtsbedingungen (6.80) auch bei verschiedenen Richtungen und Dicken der einachsigen Betondruckfelder nicht genügend statische Freiheitsgrade zur Ermittlung eines unteren Grenzwerts der Traglast, so dass eine Zusatzschicht mit einem einachsigen Betondruckspannungszustand in Richtung  $x$  einzuführen ist.

### Bisherige Arbeiten zum Sandwichmodell

Die Grundidee des Sandwichmodells, das Aufteilen des Flächentragwerkelements in zwei an den Rändern angeordneten Schichten, welche ähnlich wie Scheiben behandelt werden können, wird bereits seit den Anfängen der Modellbildung im Betonbau verwendet, um die inneren Kräfte eines gerissenen Plattenelements unter einer Drillmomentenbeanspruchung zu studieren. Bereits Leitz [81, 82] behandelte Plattenelemente auf diese Weise, indem er die Bereiche ober- und unterhalb der Mittelebene getrennt als Scheiben betrachtete. Hillerborg [49] bediente sich der dieser Modellvorstellung zur Herleitung einer Parameterform der Normalmomenten-Flie遥edingungen. Basierend auf der Arbeit von Hillerborg verwendete J. Nielsen [119] das Sandwichmodell bei einer reinen Drillmomentenbeanspruchung im Zusammenhang mit dem Studium der inneren Kräfte an Plattenecken anhand von Fachwerkmodellen. M. P. Nielsen [122] stützte das Sandwichmodell schliesslich auf der klaren baustatischen Grundlage der Plastizitätstheorie ab. Für eine reine Drillmomentenbeanspruchung fand er auf diese Weise für eine (quasi) isotrope Bewehrung die Traglast und für eine orthogonale Bewehrung einen unteren Grenzwert der Traglast. Ferner gelang ihm, wie erwähnt, damit eine alternative Herleitung der Normalmomenten-Flie遥edingungen. Baumann [5] schlug unabhängig von der Arbeit von M. P. Nielsen ein ähnliches Modell für die Bemessung von Plattenelementen ( $n_i = 0$ ) vor. Basierend auf der Arbeit von Nielsen schlug Brøndum-Nielsen [18] zur Bemessung von Elementen ebener Flächentragwerke vor, die verallgemeinerten Spannungen gemäss (6.69) in statisch äquivalente Membrankräfte von zwei an den Rändern im Abstand  $d_v/2$  zur Mittelebene angeordneten Scheiben umzurechnen. Gupta [44] stellte die Bemessungsbeziehungen des Sandwichmodells mit zwei an den Rändern angeordneten Betonschichten mit einachsigem Druckfeld allgemein mit Berücksichtigung der verschiedenen Hebelarme auf, allerdings ohne Beziehungen zur Bestimmung der Druckfelddicken. Er bestimmte diese sowie die Druckfeldrichtungen iterativ durch sukzessive Approximation. Fallunterscheidungen für weniger als vier erforderliche Bewehrungslagen führte er nicht explizit ein.

## 6.5 Ungerissenes Verhalten

Bei moderaten Betonspannungen kann im ungerissenen Zustand in der Regel von einem linear elastischen Verhalten des Betons und der Bewehrung ausgegangen werden. Eine entsprechende Beschreibung kann dann auf den Voraussetzungen und Idealisierungen des Kapitels 5.3 basierend erfolgen. Aus (6.15) resultiert mit den Steifigkeitsmatrizen (5.57) sowie (5.59) und Berücksichtigung von (6.2) mit den verallgemeinerten Verzerrungen  $\epsilon_{0i} = [\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \gamma_{xy0}]$  und  $\chi_i = [\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}]$

$$\begin{bmatrix} n_i \\ m_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1ij} & c_{12ij} \\ c_{21ij} & c_{2ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{0j} \\ \chi_j \end{bmatrix} \quad (6.117)$$

Die Steifigkeitsmatrix setzt sich dabei aus den Untermatrizen

$$c_{1ij} = \frac{E_c h}{1 - \nu_c^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_c)/2 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^r a_{sk} \cdot t_i(-\psi_k) t_j(-\psi_k) \quad (6.118)$$

$$c_{2ij} = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_c)/2 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^r a_{sk} z_k^2 \cdot t_i(-\psi_k) t_j(-\psi_k)$$

$$c_{12ij} = c_{21ij} = \sum_{k=1}^r a_{sk} z_k \cdot t_i(-\psi_k) t_j(-\psi_k)$$

zusammen. Gemäss dem Satz von Maxwell ist die Steifigkeitsmatrix symmetrisch, d. h.  $c_{1ij} = c_{1ji}$ ,  $c_{2ij} = c_{2ji}$  und  $c_{12ij} = c_{21ji}$  sowie  $c_{21ij} = c_{12ji}$ . Folglich sind die beiden Koppelungsmatrizen  $c_{s12ij}$  und  $c_{s21ij}$  gemäss (6.118)<sub>3</sub> symmetrisch (d. h.  $c_{12ij} = c_{12ji}$  und  $c_{21ij} = c_{21ji}$ ). Da beim Beton von einem homogenen und isotropen Verhalten ausgegangen wird, ergeben sich hinsichtlich der Steifigkeit symmetrische Verhältnisse bezüglich der Mittelebene, so dass  $n_i$  nicht von  $\chi_i$  und  $m_i$  nicht von  $\varepsilon_{0i}$  abhängen; die Scheiben- und Plattentragwirkung werden dementsprechend entkoppelt. Die Koppelungsmatrizen der Bewehrung  $c_{12ij} = c_{21ij}$  verschwinden nur, falls die Bewehrung (hinsichtlich ihrer Steifigkeit) symmetrisch zur Mittelebene angeordnet wird. Bei einer reinen Membrankraftbeanspruchung ( $m_i = 0$ ) bzw. einer reinen Biege- und Drillmomentenbeanspruchung ( $n_i = 0$ ) folgen aus (6.117) die Beziehungen

$$n_i = \left[ c_{1ij} - c_{12il} \cdot c_{2lm}^{-1} \cdot c_{21mj} \right] \varepsilon_{0j}$$

$$m_i = \left[ c_{2ij} - c_{21il} \cdot c_{1lm}^{-1} \cdot c_{12mj} \right] \chi_j$$
(6.119)

wobei im ersten Fall  $\chi_i = [c_{2il}^{-1} c_{21lj}] \cdot \varepsilon_{0j}$  und im zweiten  $\varepsilon_{0i} = [c_{1il}^{-1} c_{12lj}] \cdot \chi_j$  ist.

In der Regel ist der Beitrag der Bewehrung zur Steifigkeitsmatrix relativ gering und kann vernachlässigt werden, womit sich das Element homogen und isotrop verhält, und die Koppelung der Scheiben- und Plattenwirkung entfällt. Schwind- und Kriechverformungen des Betons lassen sich entsprechend Kapitel 5.3 berücksichtigen.

## 6.6 Gerissenes Verhalten

Da in jeder Ebene  $z = \text{const}$  ein ebener Spannungszustand herrscht, kann die Beschreibung des gerissenen Verhaltens von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke auf der Grundlage der im Kapitel 5.4 behandelten Modelle erfolgen. Wie bei der Modellierung von Stahlbetonträgern üblich, wird dabei die Zugfestigkeit des Betons nach dem Reissen der Randfaser vernachlässigt. Anhand der Hauptverzerrungen können somit folgende drei Betonspannungszustände unterschieden werden:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{c1}, \sigma_{c3} = 0 & \text{für} & 0 \leq \varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 \\ \sigma_{c3} < 0 = \sigma_{c1} & \text{für} & \varepsilon_3 < 0 \leq \varepsilon_1 \\ \sigma_{c3} \leq \sigma_{c1} < 0 & \text{für} & \varepsilon_3 \leq \varepsilon_1 < 0 \end{array} \quad (6.120)$$

Gemäss den in Kapitel 6.2 diskutierten Hauptverzerrungsverläufen können über die Elementdicke analog der plastischen Modellierung maximal drei Schichten mit den unterschiedenen Betonspannungszuständen auftreten, womit wiederum die neun in Bild 6.4(b) dargestellten Anordnungen von Schichten verschiedener Betonspannungszustände möglich sind.

Wird die verbundbedingte Zugversteifung vernachlässigt, kann die Modellierung des Flächentragwerkelements auf der Grundlage des im Kapitel 5.4.2 beschriebenen klassischen Druckfeldmodells vorgenommen werden. Für den Beton wird die Stoffbeziehung (5.104) mit der von der grösseren Hauptverzerrung abhängigen Betondruckfestigkeit gemäss (5.127) verwendet (Bild 6.12(a)) ( $f_{c0} = f_c(\varepsilon_1 = 0)$ ). Gemäss Kapitel 3.3.1 nimmt die Betonbruchstauchung  $\varepsilon_{cu}$  mit zunehmendem Verzerrungsgradient  $d\varepsilon_3/dz$  zu und mit zunehmender Hauptdehnung senkrecht zu Druckrichtung  $\varepsilon_1$  ab (Kap. 3.3). Messwerte von  $\varepsilon_{cu}$  in Versuchen an ebenen Flächentragwerken bewegen sich in der Grössenordnung von 1 bis 4 ‰ [55, 69, 70, 73, 101, 108]. Vor diesem Hintergrund wird im Rahmen

dieser Arbeit vereinfachend von einer Betonbruchstauchung  $\varepsilon_{cu} = 3\text{‰}$  ausgegangen. Infolge der Konkavität der Funktion  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(z)$  und der Konvexität der Funktion  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(z)$  treten die Maximalwerte von  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(z)$  und die Minimalwerte von  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(z)$  an einem der beiden Elementränder auf. Folglich tritt der Betonbruch erwartungsgemäss an einem der beiden Ränder ein.

In Schichten mit einem zweiachsigen Druckspannungszustand des Betons werden die beiden Haupttrichtungen ferner als unabhängig voneinander betrachtet, d. h.  $\sigma_{c1} = \sigma_{c1}(\varepsilon_1)$  und  $\sigma_{c3} = \sigma_{c3}(\varepsilon_3)$ . Dem Bewehrungsstahl wird eine bilineare Spannungs-Dehnungscharakteristik gemäss Bild 6.12(b) fallweise mit oder ohne Verfestigung zugrunde gelegt.

Bei gegebenen verallgemeinerten Verzerrungen resultieren die Verzerrungen aus (6.2), und die Spannungen können mit den entsprechenden Stoffbeziehungen bestimmt werden. Die verallgemeinerten Spannungen resultieren schliesslich aus den Gleichgewichtsbedingungen (6.15) und (6.16). Die Ermittlung der verallgemeinerten Verzerrungen bei gegebenen verallgemeinerten Spannungen bedarf hingegen einer iterativ-numerischen Berechnung. Die Integration der Betonspannungen in den Gleichgewichtsbedingungen (6.16)<sub>1,2</sub> erfolgt dabei numerisch, indem der Beton in  $m$  Schichten mit einer Dicke  $\Delta z = h/m$  getrennt wird, in welchen jeweils ein konstanter Spannungszustand herrscht [47]. (6.15) und (6.16) lauten damit

$$\begin{aligned}
 n_i &= \sum_{j=1}^m \sigma_{cij} \Delta z + \sum_{k=1}^r \rho_k \sigma_{sk} t_i (-\psi_k) \\
 m_i &= \sum_{j=1}^m \sigma_{cij} \frac{\Delta z}{2} [\Delta z(2j-1) - h] + \sum_{k=1}^r \rho_k \sigma_{sk} z_k t_i (-\psi_k)
 \end{aligned}
 \tag{6.121}$$

wobei

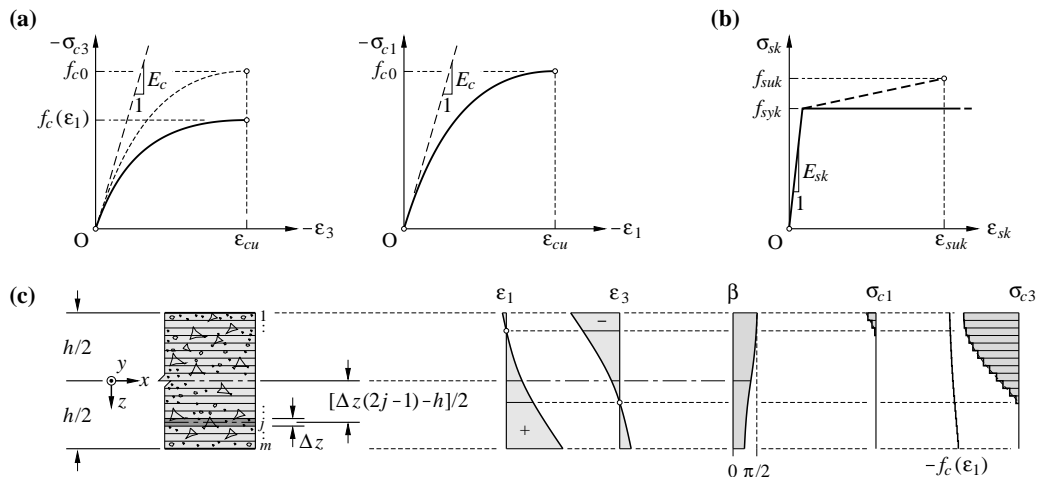
$$\sigma_{cij} = \sigma_{c1} \cdot t_i [\theta(z_j) - \pi/2] + \sigma_{c3} \cdot t_i [\theta(z_j)]
 \tag{6.122}$$

ist (Bild 6.12(c)). Kritisch für die Wahl der Anzahl Betonschichten  $m$  sind stark ändernde Druckfeldrichtungen im Bereich betragsmässig grosser Betonspannungen; für übliche Fälle empfiehlt sich  $m > 10$  zu wählen. Einen Algorithmus zur iterativen Berechnung der verallgemeinerten Verzerrungen findet man beispielsweise in [72]. Um die Konvergenz der iterativ-numerischen Berechnung bei der Berechnung ganzer Last-Verformungscharakteristiken oder einzelner Punkte in der Nähe der Höchstlast zu verbessern, wird vorzugsweise eine der verallgemeinerten Verzerrungen vorgegeben und der Lastfaktor  $\kappa$  als Unbekannte eingeführt.

Eine Modellierung mit Berücksichtigung der Zugversteifung kann auf die gleiche Weise basierend auf dem Zuggurtmodell (Kap. 3.4.2) bzw. dem Gerissenen Scheibenmodell (Kap. 5.4.3) erfolgen. Sind beide (mittleren) Hauptverzerrungen positiv ( $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \geq 0$ ) lässt sich die Zugversteifung mit dem Zuggurtmodell beschreiben, indem bei jeder Bewehrungslage von einer senkrecht zur Bewehrungsrichtung verlaufenden Risschar mit einem Rissabstand gemäss (3.41) ausgegangen wird. Weisen die beiden (mittleren) Hauptverzerrungen unterschiedliche Vorzeichen auf ( $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_3 \leq 0$ ) kann die Zugversteifung mit Hilfe des Gerissenen Scheibenmodells berücksichtigt werden. Der Rissabstand lässt sich dabei mit der Beziehung (5.117) ermitteln, wobei der Winkel  $\theta_r$  der jeweiligen Ebene  $z = \text{const}$  eingesetzt wird, welche die Stäbe beider Bewehrungslagen eines Elementrands berührt. Weiter wird die Dicke der auf Zug mitwirkenden Betonschicht gleich dem doppelten Randabstand dieser Ebene gewählt.<sup>1</sup> Damit kann die Zugversteifung berücksichtigt werden, indem die Stahlspannungen mit den Beziehungen (3.48) bis (3.50) sowie (5.146) und (5.147) berechnet werden.

---

<sup>1</sup> Bei Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke hängen die Stahlspannungen am Riss unmittelbar nach dem Reissen von der Betondruckfeldrichtung ab, welche ihrerseits von der mitwirkenden Betonschicht abhängt. Folglich wäre eine Berechnung der mitwirkenden Betonschichtdicken entsprechend dem in [19] für Stahlbetonbalken vorgeschlagenen Verfahren nur iterativ möglich, so dass davon abgesehen wird.



**Bild 6.12** – Gerissenes Verhalten: (a) Stoffbeziehung des Betons; (b) Spannungs-Dehnungscharakteristik des Bewehrungsstahls; (c) numerische Integration der Betonspannungen.

Mit einer verfestigenden Spannungs-Dehnungscharakteristik der Bewehrung lässt sich damit der Dehnungsverlauf der Bewehrungsstäbe geeignet beschreiben, womit die Beschränkung des Verformungsvermögens durch Zerreißen der Bewehrung untersucht werden kann. Die Rissbreiten lassen sich mit Hilfe des ermittelten Rissabstands und (5.122) abschätzen.

In der Folge werden die beiden Modelle mit den verschiedenen Annahmen bezüglich der Stoffbeziehungen wiederum gemäss Bild 5.16 bezeichnet.

Bild 6.13 zeigt exemplarisch die Ergebnisse einer Berechnung mit den Modellen  $b_{3,2}$  und  $a_3$  (bis zum Fließbeginn ausserdem mit  $a_1$ ) für ein Plattenelement, welches den verallgemeinerten Spannungen  $n_i=0$  und  $m_i=\kappa \cdot [1, 0, 2]$  kN unterworfen wird. Die Resultate des Modells  $a_3$  werden nachfolgend jeweils in Klammern denjenigen gemäss Modell  $b_{3,2}$  nachgestellt. Dem Bewehrungsstahl wird eine linear elastisch-linear verfestigende Spannungs-Dehnungscharakteristik zugrunde gelegt. Die Bewehrungsquerschnittsflächen wurden mit Hilfe des in Kapitel 6.4.4 beschriebenen Sandwichmodells für  $\kappa=100$  unter Vorgabe einer minimalen Bewehrung von  $\text{Ø}14@200$  bemessen. Die Berechnung der dargestellten Charakteristiken erfolgte durch inkrementelle Steigerung der Drillung  $\chi_{xy}$ , wobei der Beton in 100 je 4 mm dicke Schichten mit konstanten Spannungszuständen unterteilt wurde.

Bild 6.13(a) zeigt die Hauptverzerrungen, den Verlauf des Winkels  $\beta=\theta$ , sowie die Betonhauptspannungs- und Betondruckfestigkeitsverläufe für eine Belastung unterhalb der Fließlast  $\kappa_y$  sowie bei der Höchstlast gemäss Modell  $b_{3,2}$ . Beide Modelle liefern einen Betonspannungszustand, der dem Fall 9 in Bild 6.4(b) entspricht, wobei die Druckfeldrichtung im oberen und unteren Elementbereich kaum variiert und sich entsprechend der Bemessung am unteren Elementrand im Bereich  $\theta_u=45..46^\circ$  und am oberen im Bereich  $\theta_o=136..137^\circ$  bewegt. Die beiden unteren Bewehrungslagen erreichen bei  $\kappa=100,8$  und  $102,4$  ( $\kappa=101,8$  und  $102,2$ ) unmittelbar nacheinander die Fließgrenze. Gemäss Modell  $b_{3,2}$  erreichen die beiden oberen Bewehrungslagen kurz vor dem Erreichen der Höchstlast ebenfalls die Fließgrenze. Gemäss Modell  $a_3$  erreicht keine der beiden oberen Bewehrungslagen die Fließgrenze, die Stahlspannung der in  $y$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage  $\sigma_{syo}=495 \text{ N/mm}^2$  ist allerdings nur wenig unterhalb der Fließgrenze. Die Höchstlast tritt beim Erreichen der Betonbruchstauchung am oberen Elementrand bei  $\kappa_u=107,6$  ( $\kappa_u=103,3$ ) ein; die entsprechende Betondruckfestigkeit  $f_c(\varepsilon_1)$  beträgt  $f_c=20,2 \text{ N/mm}^2=1,73 f_{cc}^{2/3}$  [ $\text{N/mm}^2$ ] ( $f_c=19,2 \text{ N/mm}^2=1,64 f_{cc}^{2/3}$  [ $\text{N/mm}^2$ ]). Die Zugversteifung bewirkt eine Abnahme der maximalen Hauptverzerrung  $\varepsilon_1$ , so dass die Betondruckfestigkeit nach (5.127) etwas höher ausfällt, was den höheren Tragwiderstand gemäss einer Berechnung gemäss Modell  $b_{3,2}$  gegenüber jener gemäss  $a_3$  erklärt. Durch die gegen den Elementrand hin zunehmenden Hauptverzerrungen  $\varepsilon_1$  fällt die Betondruckfestigkeit ab, sodass die Betondruckspannungen  $\sigma_{c3}$  betragsmässig gegen den Elementrand hin leicht abnehmen.

Bei gleicher Drillung  $\chi_{xy}$  resultiert gemäss dem Modell  $b_{3,2}$  eine grössere spezifische Formänderungsenergie (Bild 6.13(j)) und somit erwartungsgemäss eine höhere Steifigkeit als gemäss dem Modell  $a_3$ . Bezüglich der einzelnen verallgemeinerten Verzerrungen lässt sich allerdings keine Angabe darüber machen, ob diese bei Berücksichtigung der Zugversteifung zu- oder abnehmen.

## 6.7 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Nachfolgend werden die Ergebnisse von vier Experimenten den Modellergebnissen gegenübergestellt. Das gerissene Verhalten wird mit Hilfe der Modelle  $b_{3,2}$  und  $a_3$  (bis zum Fliessbeginn ausserdem mit  $a_1$ ) abgebildet; die Resultate des Modells  $a_3$  werden jeweils in Klammern denjenigen des Modells  $b_{3,2}$  nachgestellt. Bei der numerischen Integration wird der Beton jeweils in 100 Schichten konstanter Spannung unterteilt. Es wird jeweils von einem initial eigenspannungsfreien Zustand ausgegangen.

### 6.7.1 Reine Drillmomentenbeanspruchung $m_{xy}$

Bild 6.14(a) zeigt die mit (6.2) und den Messergebnissen berechneten verallgemeinerten Verzerrungen in Abhängigkeit des Lastfaktors  $\kappa$  des Plattenversuchs ML8 von Marti et al. [101] mit einer reinen Drillmomentenbeanspruchung  $m_{xy}$  bezüglich der Bewehrungsrichtungen. Bei jeder Laststufe sind jeweils der Lastfaktor unmittelbar beim Unterbruch und der etwas tiefere Wert, welcher sich bei konstant gehaltener Verformung nach praktisch vollständig abgeklungener Relaxation einstellt, eingetragen. Die verallgemeinerten Verzerrungen  $\gamma_{xy0}$ ,  $\chi_x$  und  $\chi_{xy}$  sind gegenüber den anderen verallgemeinerten Verzerrungen klein und wurden entsprechend nicht dargestellt. Die Höchstlast  $\kappa_u = 64,8$  (Endwert der Laststufe  $\kappa_u = 60,5$ ) wurde beim Versagen des Betons erreicht. Die entsprechenden Hauptverzerrungen betragen am oberen Elementrand  $\varepsilon_1 = 7,0 \text{ ‰}$  und  $\varepsilon_3 = -2,1 \text{ ‰}$  und am unteren Elementrand  $\varepsilon_1 = 7,4 \text{ ‰}$  und  $\varepsilon_3 = -1,8 \text{ ‰}$  erreicht. Die Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$ , welche die Richtung der kleineren Hauptverzerrung am unteren bzw. oberen Elementrand beschreiben, betragen  $\beta_u = 35,7^\circ$  und  $\beta_o = -36,9^\circ$ .

Die Berechnungen gemäss allen drei Modellen ergeben verschwindende verallgemeinerte Verzerrungen  $\gamma_{xy0}$ ,  $\chi_x$  und  $\chi_{xy}$ , was mit den Versuchsergebnissen korreliert. Die Bewehrungslagen in  $y$ -Richtung erreichen die Fliessgrenze bei  $\kappa_y = 53,4$  ( $\kappa_y = 51,8$ ), und die Höchstlast beträgt  $\kappa_u = 63,0$  ( $\kappa_u = 58,9$ ), wobei die Bewehrungslagen in  $x$ -Richtung die Fliessgrenze nicht erreichen. Die Betonspannung beträgt beim Erreichen der Höchstlast an den Elementrändern  $-\sigma_{c3} = 19,5 \text{ N/mm}^2 = 1,45 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  ( $-\sigma_{c3} = 18,9 \text{ N/mm}^2 = 1,41 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$ ).

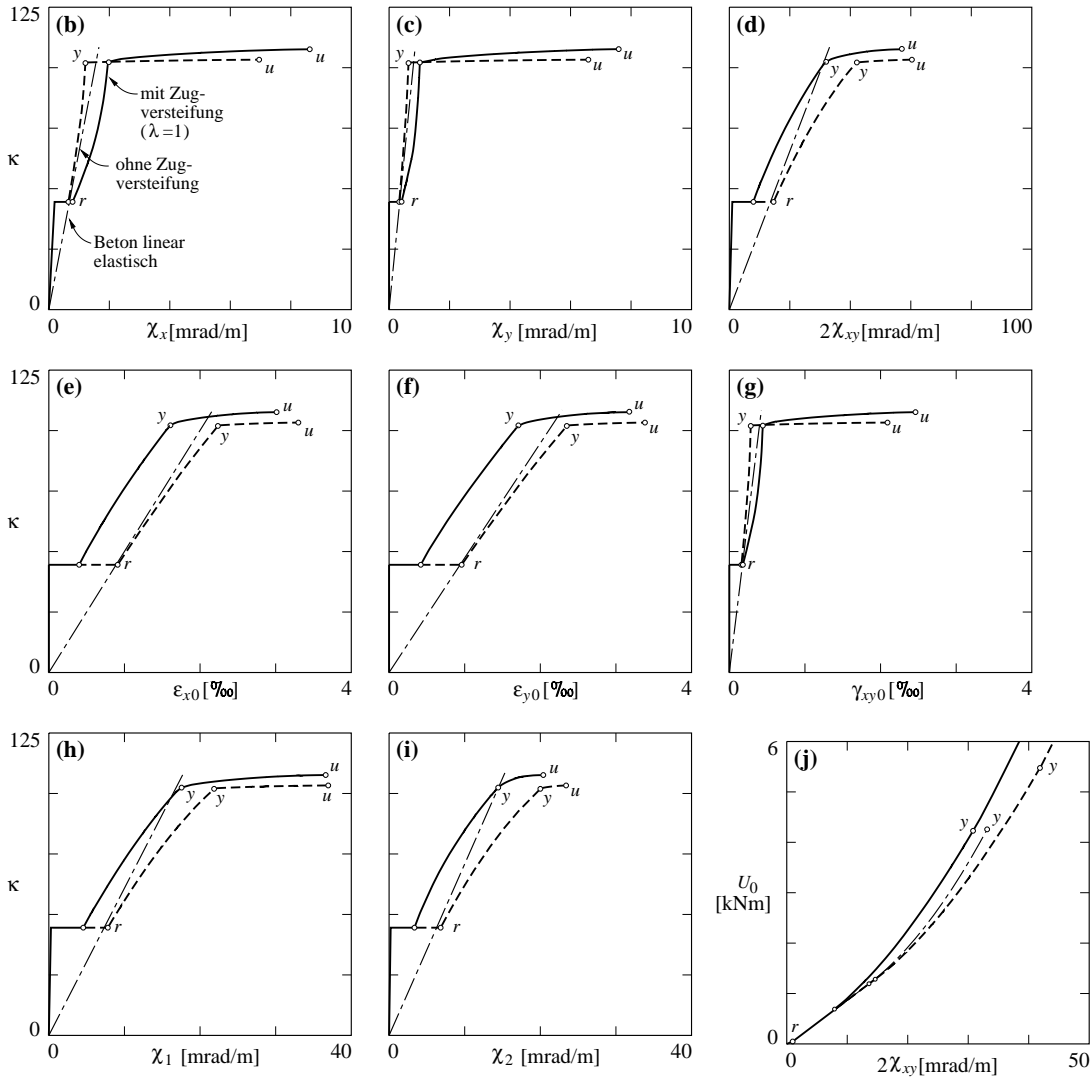
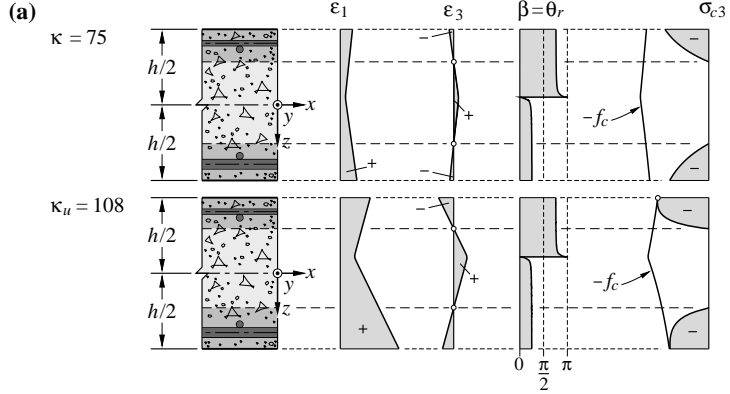
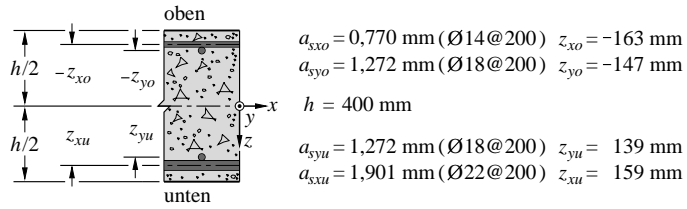
Die Traglast beträgt gemäss (6.103) mit einer effektiven Betondruckfestigkeit von  $f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$   $\kappa_u = 67,2$ , wobei die Randschichten mit einem einachsigen Betonspannungszustand 50 mm dick sind. (6.102) liefert mit demselben Wert der effektiven Betondruckfestigkeit einen unteren Grenzwert der Traglast  $\kappa_u = 66,8$ , der nur geringfügig tiefer als die Traglast ist. Aus den Normalmomenten-Fliessbedingungen folgt mit einer effektiven Betondruckfestigkeit von  $f_c = 2,5 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  (gemäss (5.127) mit  $\varepsilon_1 = 0$ ) eine Traglast von  $\kappa_u = 79,1$ .

In Bild 6.14(b) sind die entsprechenden Grössen des Plattenversuchs ML9 aus derselben Versuchsserie dargestellt. Im Unterschied zum Prüfkörper ML8 weist der Prüfkörper ML9 eine (quasi) isotrope Bewehrung auf. Die Höchstlast  $\kappa_u = 101,5$  (Endwert der Laststufe  $\kappa_u = 93,3$ ) wurde beim Versagen des Betons bei Hauptverzerrungen am oberen Elementrand von  $\varepsilon_1 = 7,0 \text{ ‰}$  sowie  $\varepsilon_3 = -3,0 \text{ ‰}$  und am unteren Elementrand von  $\varepsilon_1 = 7,0 \text{ ‰}$  sowie  $\varepsilon_3 = -2,8 \text{ ‰}$  erreicht. Die Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$ , welche die Richtung der kleineren Hauptverzerrung am unteren bzw. oberen Elementrand beschreiben, liegen während der ganzen Belastung in der Umgebung von  $\beta_u = 45^\circ$  und  $\beta_o = -45^\circ$ . Gemäss beiden Modellen sind die verallgemeinerten Verzerrungen  $\varepsilon_{x0}$  und  $\varepsilon_{y0}$  jeweils gleich gross, womit die Hauptverzerrungen gemäss (6.5) durch

$$\varepsilon_{1,3} = \varepsilon_{x0} \pm \chi_{xy} \cdot z \quad (6.123)$$

**Parameter**

- $n_i = \kappa [0,0,0]$  kN/m
- $m_i = \kappa [1,0,2]$  kN
- $f_{sy} = 500$  N/mm<sup>2</sup>
- $f_{su} = 600$  N/mm<sup>2</sup>
- $\epsilon_{su} = 100$  ‰
- $E_s = 205$  kN/mm<sup>2</sup>
- $f_{cc} = 40$  N/mm<sup>2</sup>
- $\epsilon_{cu} = 3$  ‰
- $f_{ct} = 0,3f_{cc}^{2/3}$  [N/mm<sup>2</sup>]
- $E_c = 10f_{cc}^{1/3}$  [kN/mm<sup>2</sup>]



**Bild 6.13** – Gerissenes Verhalten – Beispiel: (a) Hauptverzerrungs- Betondruckfeldrichtungs- sowie Betonspannungs- und Betondruckfestigkeitsverläufe; (b) bis (g) verallgemeinerte Verzerrungen in Abhängigkeit des Lastfaktors; (h) und (i) Hauptkrümmungen in Abhängigkeit des Lastfaktors; (j) spezifische Formänderungsenergie in Abhängigkeit der Drilling.

gegeben sind, also über  $z$  linear variieren und bei  $z=0$  das Vorzeichen der Steigung ändern. Der Winkel  $\beta=\theta_r$  beträgt  $\pi/4$  für  $z\geq 0$  und  $3\pi/4$  für  $z\leq 0$ . Folglich dreht die Druckfeldrichtung bei  $z=0$  sprunghaft um  $\pi/2$ , was im Experiment indes nicht zu erwarten ist. Die Höchstlast beträgt  $\kappa_u=89,7$  ( $\kappa_u=86,4$ ), wobei keine der Bewehrungslagen die Fließgrenze erreicht. Die Betonspannung betragen an den Elementrändern beim Erreichen der Höchstlast  $-\sigma_{c3}=22,1 \text{ N/mm}^2=1,76 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  ( $-\sigma_{c3}=21,7 \text{ N/mm}^2=1,73 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$ ).

Die Traglast beträgt gemäss (6.103) und (6.102) mit einer effektiven Betondruckfestigkeit von  $f_c=1,6 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$   $\kappa_u=97,1$ , wobei die Randschichten mit einem einachsigen Betonspannungszustand 82 mm dick sind. Aus der Normalmomenten-Fließbedingungen folgt mit einer effektiven Betondruckfestigkeit von  $f_c=2,5 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  (gemäss (5.127) mit  $\varepsilon_1=0$ ) eine Traglast von  $\kappa_u=138,9$ .

Sowohl die Höchstlast als auch die verallgemeinerten Spannungs-Verzerrungscharakteristiken gemäss Modells  $b_{3,2}$  korrelieren gut mit den aus den Messergebnissen gewonnen Grössen. Beim Versuch ML8 werden die verallgemeinerten Verzerrungen beim Erreichen der Höchstlast etwas überschätzt, was darauf zurückzuführen, dass die Betonbruchstauchung im Versuch nur bei etwa  $-2\%$  liegt. Im Versuch ML9 werden die Höchstlast und die zugehörigen verallgemeinerten Verzerrungen etwas unterschätzt. Durch die vernachlässigte Zugversteifung werden die verallgemeinerten Verzerrungen durch das Modell  $a_3$  überschätzt. Der mit dem Sandwichmodell berechnete untere Grenzwert der Traglast und die Traglast stimmen mit der Höchstlast der Versuche gut überein. Die kinematisch restriktivere Normalmomenten-Fließbedingungen überschätzt indes die Traglast der Versuche ML8 und ML9 um 25% bzw. 37%.

### 6.7.2 Beanspruchung durch Biegemomente $m_x$ und Membranschubkräfte $n_{xy}$

Bild 6.15 zeigt die mit (6.2) und den Messergebnissen berechneten verallgemeinerten Verzerrungen in Abhängigkeit des Lastfaktors  $\kappa$  des Versuchs SE4 von Khalifa und Kirschner [69, 70] mit verallgemeinerten Spannungen  $n_i=\kappa\cdot[0, 0, 2]$  kN/m und  $m_i=\kappa\cdot[1, 0, 0]$  kN. Bei  $\kappa=175$  (Lastniveau  $r_u$  in Bild 6.15) traten am unteren und bei  $\kappa=235$  (Lastniveau  $r_o$  in Bild 6.15) am oberen Elementrand erste Risse auf. Die untere Bewehrung in  $x$ -Richtung erreichte bei  $\kappa=376$  die Fließgrenze. Die Höchstlast betrug  $\kappa_u=480$  und wurde beim Versagen des Betons am unteren Elementrand erreicht. Am oberen Elementrand ergaben sich dabei Hauptverzerrungen  $\varepsilon_1=3,1\%$  und  $\varepsilon_3=-3,0\%$  und am unteren Elementrand  $\varepsilon_1=15,2\%$  sowie  $\varepsilon_3=-1,21\%$ . Gemäss den Angaben im Versuchsbericht flossen bei der Höchstlast die untere in  $x$ -Richtung und die obere in  $y$ -Richtung verlaufende Bewehrungslage, was aufgrund der gemessenen Randverzerrungen plausibel ist. Die Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$ , welche die Richtung der kleineren Hauptverzerrung am unteren bzw. oberen Elementrand beschreiben, sind in Bild 6.15(j) in Funktion des Lastfaktors  $\kappa$  aufgetragen. Am unteren Elementrand dreht  $\beta_u$  zwischen der Erstrissbildung und dem Fließbeginn stark ab. Nach einer vollständigen Entlastung nach der vierten Laststufe entstand entsprechend eine Schar Risse mit anderer Richtung. Nach dem Fließbeginn nehmen beide Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$  zu.

Gemäss Modell  $b_{3,2}$  ( $a_3$ ) erreicht die untere in  $x$ -Richtung verlaufende Bewehrungslage die Fließgrenze bei  $\kappa=403$  ( $\kappa=399$ ) und die untere in  $y$ -Richtung verlaufende Bewehrungslage bei  $\kappa=447$  ( $\kappa=439$ ). Die Höchstlast beträgt  $\kappa_u=492$  ( $\kappa_u=482$ ) und tritt gemäss Bild 6.15(a) beim Versagen des Betons am oberen Elementrand bei einer Hauptdruckspannung  $-\sigma_{c3}=29,3 \text{ N/mm}^2=2,42 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  ( $-\sigma_{c3}=29,2 \text{ N/mm}^2=2,41 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$ ) ein. Die Betonhauptdruckspannung am unteren Elementrand  $-7,0 \text{ N/mm}^2$  ( $-6,7 \text{ N/mm}^2$ ) erreicht die Betondruckfestigkeit  $f_c=9,0 \text{ N/mm}^2$  ( $f_c=8,7 \text{ N/mm}^2$ ) ebenfalls beinahe. Aufgrund der grossen Hauptverzerrungen  $\varepsilon_1$  am unteren Elementrand ist die Betondruckfestigkeit deutlich geringer als diejenige am oberen Elementrand. Die Spannungen der Bewehrungslagen am oberen Elementrand betragen beim Erreichen der Höchstlast  $\sigma_{sxo}=-213 \text{ N/mm}^2$  ( $\sigma_{sxo}=-203 \text{ N/mm}^2$ ) und  $\sigma_{sxo}=386 \text{ N/mm}^2$  ( $\sigma_{sxo}=366 \text{ N/mm}^2$ ). Der Einfluss der Zugversteifung ist relativ gering. Gemäss den Modellen beginnt nach der unteren Bewehrung in  $x$ -Richtung die untere Bewehrung in  $y$ -Richtung zu fließen und nicht die obere Bewehrung in  $y$ -Richtung. Entsprechend resultieren zu grosse verallgemeinerte Verzerrungen beim Erreichen der Höchstlast und eine andere Drehrichtung der Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$  nach dem Fließbeginn der zweiten Bewehrungslage. Mit

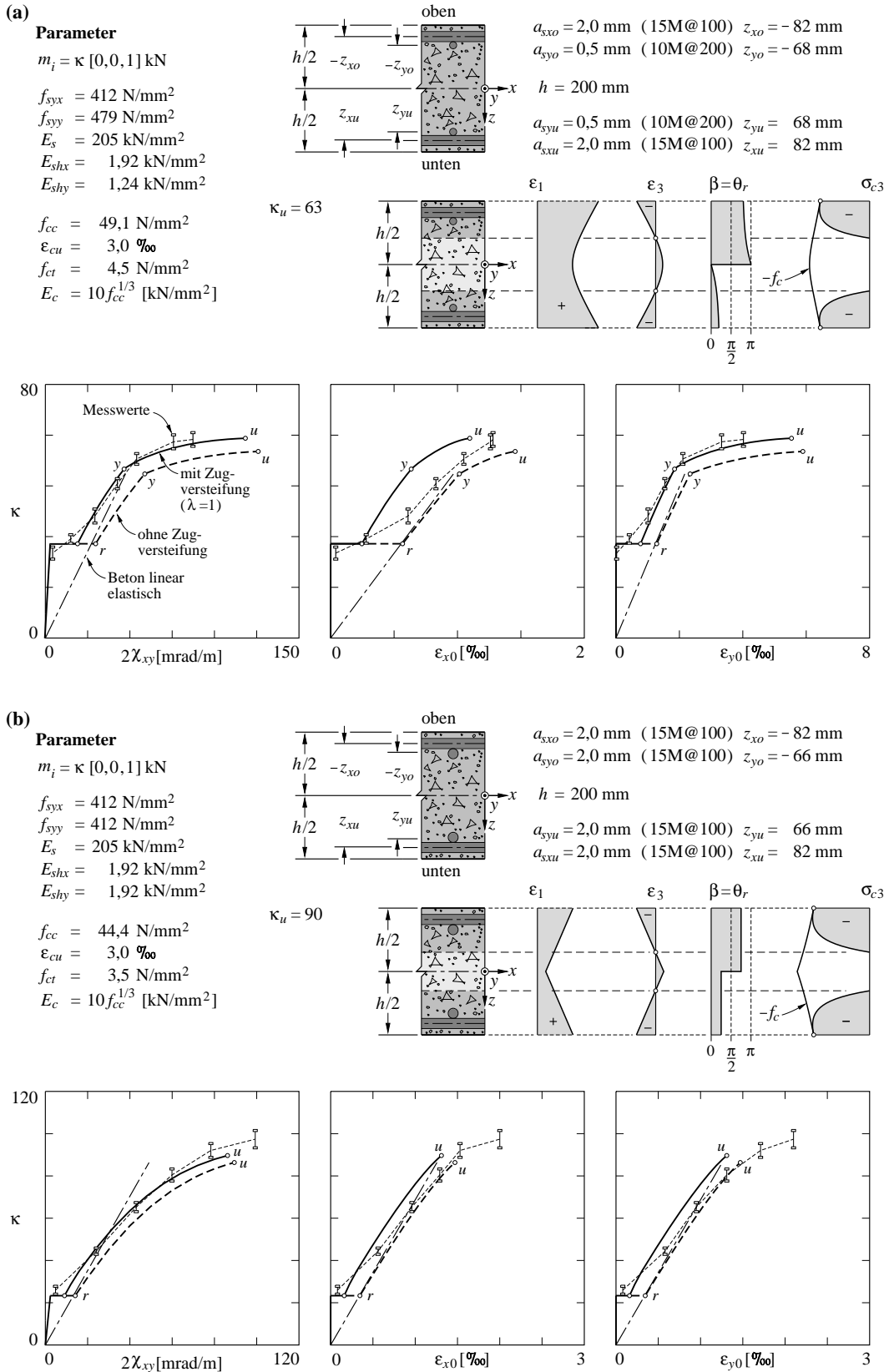


Bild 6.14 – Vergleich mit experimentellen Ergebnissen: (a) Versuch ML8; (b) Versuch ML9 aus [101].



Ausnahme der Krümmung  $\chi_y$  werden die verallgemeinerten Verzerrungen vor dem Fließbeginn der zweiten Bewehrungslage einigermaßen zutreffend erfasst. Die theoretisch sprunghafte Drehung der Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$  unmittelbar nach der Rissbildung am unteren Elementrand erfolgt im Experiment stetig.

Mit einer effektiven Betondruckfestigkeit von  $f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  (gemäß (5.123)) liefert (6.29) unter Berücksichtigung von (6.15) und (6.16) nach entsprechender Minimierung des Lastfaktors einen oberen Grenzwert der Traglast von  $\kappa = 434$ . Die zugehörigen verallgemeinerten Verzerrungen betragen  $\dot{\epsilon}_{0i} = \lambda \cdot [(0,776), (0,321), 1]$  und  $\dot{\chi}_i = \lambda \cdot [(6,390), (2,476), (2 \cdot 3,975)]/\text{m}$ . Die Dehnung der oberen Bewehrungslage in  $x$ -Richtung verschwindet, so dass deren Spannung nicht eindeutig bestimmt ist. Durch Variation der Spannung der Bewehrung in  $x$ -Richtung lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen allerdings nicht erfüllen, so dass es sich um einen oberen Grenzwert der Traglast handelt. Mit derselben effektiven Betondruckfestigkeit liefert (6.114) einen unteren Grenzwert der Traglast von  $\kappa = 430$ . Die Stahlspannung der oberen in  $x$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage beträgt dabei gemäß (6.115)  $\sigma_{sxo} = -359 \text{ N/mm}^2$ , und (6.116) liefert eine Betondruckfeldstärke und -richtung von  $t = 49 \text{ mm}$  und  $\theta = 57,1^\circ$ . Die auf allen sechs in Kapitel 6.2 eingeführten verallgemeinerten Verzerrungen beruhende Traglast liegt also im Intervall  $[430 < \kappa_u < 434]$ . Für eine in  $y$ -Richtung verlaufende verallgemeinerte Fließgelenklinie resultiert gemäß Bild 6.9(b) eine Traglast von  $\kappa_u = 493$ . Beschränkt man bei der Bestimmung eines oberen Grenzwerts der Traglast gemäß (6.29) die kinematischen Größen auf diejenigen einer verallgemeinerten Fließgelenklinie mit variabler Richtung, also  $\dot{\epsilon}_{a0}$ ,  $\dot{\gamma}_{ab0}$ ,  $\dot{\chi}_a$  sowie  $\varphi$ , resultiert ferner  $\kappa = 435$  mit  $\varphi = 32^\circ$ . Die Näherung nach Cookson (6.79) liefert mit  $\sigma_{sxu} = f_{syx}$ ,  $\sigma_{sxo} = -f_{syx}$  und  $\sigma_{syu} = \sigma_{syo} = f_{syy}$   $\kappa = 457$ .

In Bild 6.16 sind die entsprechenden Größen des Versuchs SE7 aus derselben Versuchsserie dargestellt. Bei gleichen Abmessungen und gleicher Bewehrung wie Versuch SE4 wurden beim Versuchskörper SE7 gegenüber den Biegemomenten  $m_x$  grössere Membranschubkräfte  $n_{xy}$  aufgebracht,  $n_i = \kappa \cdot [0, 0, (7,69)] \text{ kN/m}$  und  $m_i = \kappa \cdot [1, 0, 0] \text{ kN}$ .

Die ersten Rissen traten im Versuch bei  $\kappa = 83,4$  auf, wobei der Prüfkörper durch eine unbeabsichtigte Belastung bereits Risse aufwies. Bei  $\kappa = 204$  begann die Bewehrung in  $y$ -Richtung am oberen Elementrand zu fließen. Die Höchstlast  $\kappa_u = 230$  wurde beim Versagen des Betons am oberen Elementrand bei Hauptverzerrungen  $\epsilon_1 = 10,1 \text{ ‰}$  und  $\epsilon_3 = -3,0 \text{ ‰}$  erreicht. Gemäss dem Versuchsbericht beginnen die beiden Bewehrungslagen auf der Unterseite unmittelbar vor dem Erreichen der Höchstlast zu fließen, was aufgrund der gemessenen Randverzerrungen plausibel ist. Die Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$ , welche die Richtung der kleineren Hauptverzerrung am unteren bzw. oberen Elementrand beschreiben, sind in Bild 6.16 (j) in Funktion des Lastfaktors  $\kappa$  aufgetragen. Beide Winkel drehen nach dem Reißen etwas in Richtung der Bewehrung in  $x$ -Richtung mit der grösseren Querschnittsfläche.

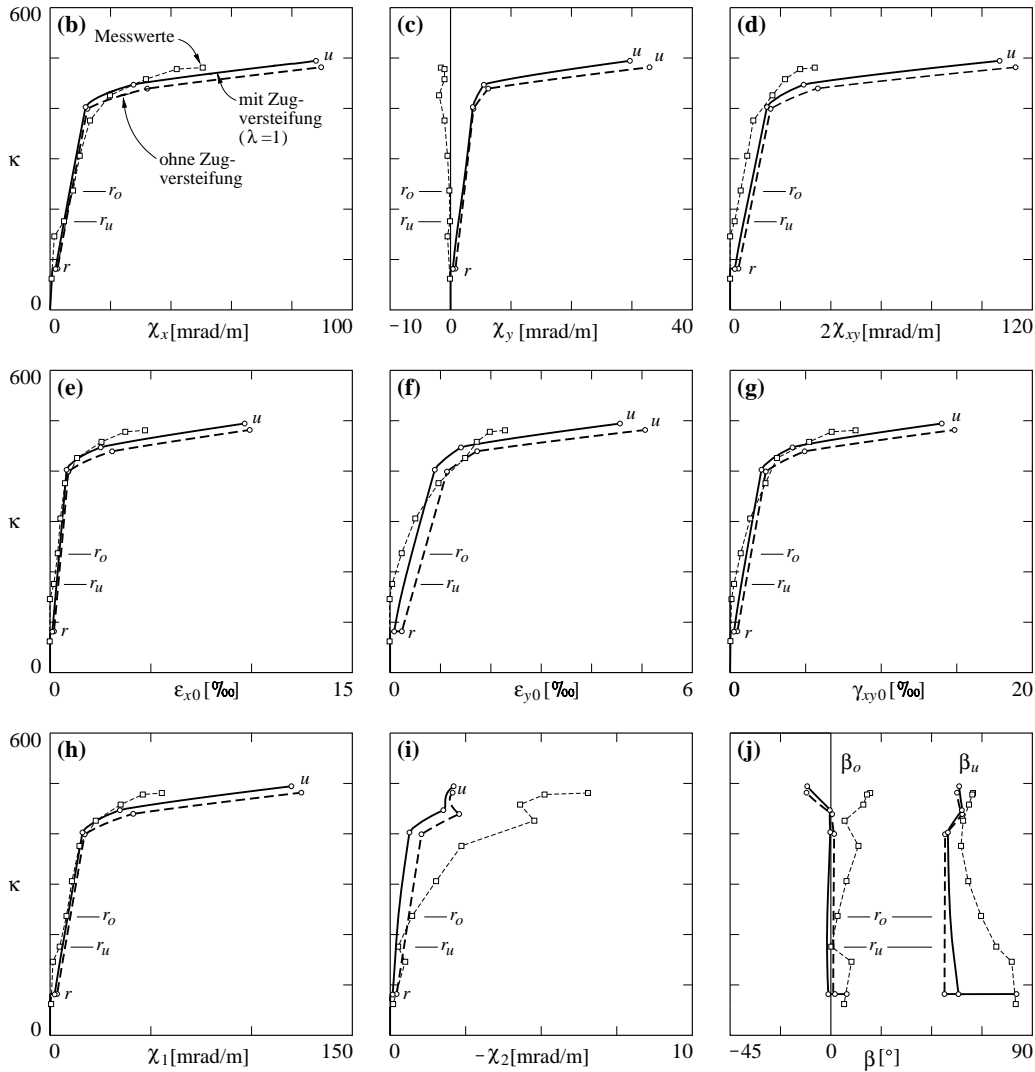
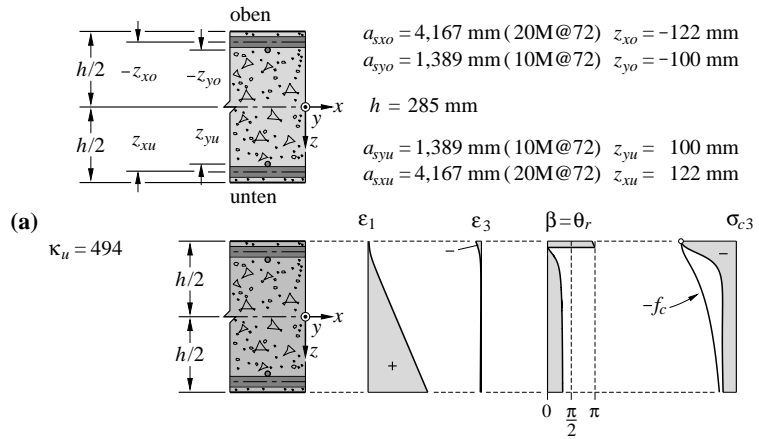
Gemäss Modell  $b_{3,2}$  ( $a_3$ ) erreicht die untere in  $y$ -Richtung verlaufende Bewehrungslage die Fließgrenze bei  $\kappa = 196$  ( $\kappa = 198$ ) und die untere in  $x$ -Richtung verlaufende Bewehrungslage bei  $\kappa = 227$  ( $\kappa = 225$ ). Die Höchstlast beträgt gemäss Modell  $b_{3,2}$  ( $a_3$ )  $\kappa_u = 243$  ( $\kappa_u = 233$ ) und tritt gemäss Bild 6.15(a) beim Versagen des Betons am unteren Elementrand bei einer Hauptdruckspannung  $-\sigma_{c3} = 11,2 \text{ N/mm}^2 = 0,93 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  ( $-\sigma_{c3} = 10,7 \text{ N/mm}^2 = 0,89 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$ ) ein. Die Stahlspannungen der Bewehrungslagen am oberen Elementrand betragen dabei  $\sigma_{sxo} = 77,5 \text{ N/mm}^2$  ( $\sigma_{sxo} = 66,4 \text{ N/mm}^2$ ) und  $\sigma_{syo} = 484 \text{ N/mm}^2$  ( $\sigma_{syo} = 472 \text{ N/mm}^2$ ). Der Einfluss der Zugversteifung ist wiederum relativ gering.

Mit Ausnahme der Krümmung  $\chi_y$  und der Drillung  $\chi_{xy}$  werden die verallgemeinerten Verzerrungen einigermaßen zutreffend erfasst. Die Winkel  $\beta_u$  und  $\beta_o$  stimmen bis zum Fließbeginn der zweiten Bewehrungslage gut mit den Messergebnissen überein. Im Gegensatz zu den Berechnungen dreht der Winkel  $\beta_o$  vor dem Bruch kaum, so dass die obere in  $y$ -Richtung verlaufende Bewehrung die Fließgrenze im Gegensatz zum Versuch nicht erreicht. Trotz der Abweichungen der verallgemeinerten Verzerrungen wird die Höchstlast wiederum zutreffend beschrieben.

Mit einer effektiven Betondruckfestigkeit von  $f_c = 1,6 f_{cc}^{2/3} [\text{N/mm}^2]$  (gemäß (5.123)) liefert (6.29) unter Berücksichtigung von (6.15) und (6.16) nach entsprechender Minimierung des Lastfaktors einen oberen Grenzwert der Traglast von  $\kappa = 227 > \kappa_u$ . Die zugehörigen verallgemeinerten Verzerrungen betragen  $\dot{\epsilon}_{0i} = \lambda \cdot [(0,382), (0,654), 1]$  und  $\dot{\chi}_i = \lambda \cdot [(3,145), (4,752), (2 \cdot 3,868)]/\text{m}$ . Die Dehnung

**Parameter**

- $n_i = \kappa [0,0,2] \text{ kN/m}$
- $m_i = \kappa [1,0,0] \text{ kN}$
- $f_{syz} = 492 \text{ N/mm}^2$
- $f_{syy} = 479 \text{ N/mm}^2$
- $E_s = 205 \text{ kN/mm}^2$
- $E_{shx} = 3,28 \text{ kN/mm}^2$
- $E_{shy} = 2,81 \text{ kN/mm}^2$
- $f_{cc} = 42,2 \text{ N/mm}^2$
- $\epsilon_{cu} = 3,0 \text{ ‰}$
- $f_{ct} = 3,9 \text{ N/mm}^2$
- $E_c = 10 f_{cc}^{1/3} \text{ [kN/mm}^2]$



**Bild 6.15** – Vergleich mit experimentellen Ergebnissen: Versuch SE4 aus [69, 70].

der oberen Bewehrungslage in  $x$ -Richtung verschwindet, so dass deren Spannung nicht eindeutig bestimmt ist. Durch Variation der Spannung der Bewehrung in  $x$ -Richtung lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen allerdings nicht erfüllen, so dass es sich um einen oberen Grenzwert der Traglast handelt. Mit derselben effektiven Betondruckfestigkeit liefert (6.114) einen unteren Grenzwert der Traglast von  $\kappa=225$ . Die Stahlspannung der oberen in  $x$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage beträgt dabei gemäss (6.115)  $\sigma_{sxo}=48 \text{ N/mm}^2$ , und (6.116) liefert eine Betondruckfeldstärke und

-richtung von  $t=93$  mm und  $\theta=37,6^\circ$ . Die auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhende Traglast liegt also im Intervall  $[225 < \kappa_u < 227]$ . Für eine in  $y$ -Richtung verlaufende verallgemeinerte Fliessgelenklinie resultiert gemäss Bild 6.9(b) eine Traglast von  $\kappa_u=325$ . Beschränkt man bei der Bestimmung eines oberen Grenzwerts der Traglast gemäss (6.29) die kinematischen Grössen auf diejenigen einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie mit variabler Richtung, resultiert  $\kappa=227$  mit  $\varphi=51^\circ$ . Die Näherung nach Cookson (6.79) liefert mit  $\sigma_{sxu}=f_{syx}$ ,  $\sigma_{sxo}=-f_{syx}$  und  $\sigma_{syu}=\sigma_{syo}=f_{syy}$  einen Lastfaktor  $\kappa=250$ .

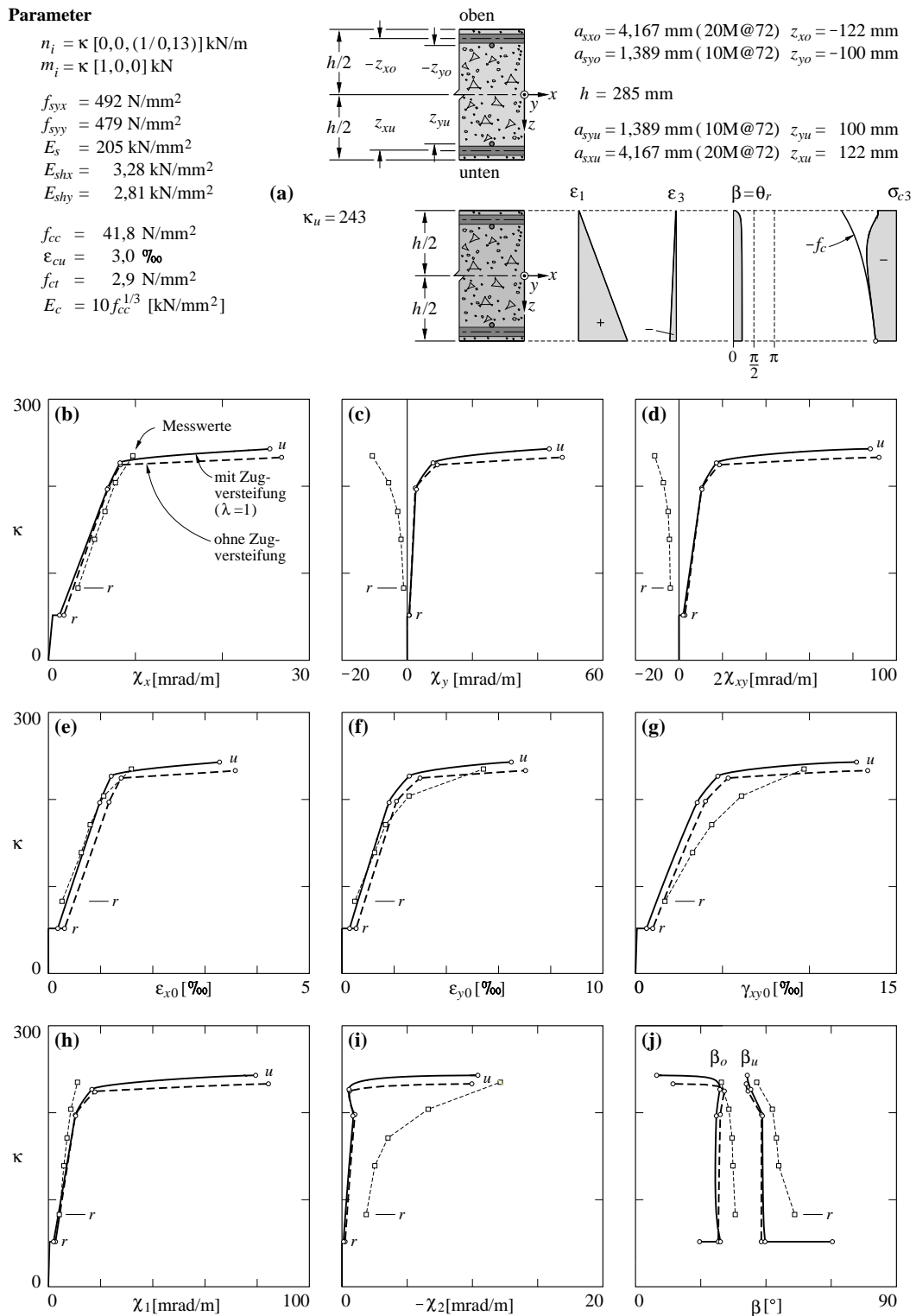
Die Modelle  $b_{3,2}$  und  $a_3$  erfassen die gemessenen Höchstlasten gut. Die berechneten verallgemeinerten Verzerrungen weichen indes von den aus den Messwerten ermittelten Werten etwas ab; dies kann verschiedenen Ursachen zugeschrieben werden. Die in den Modellen vernachlässigte Rissverzahnung in Kombination mit der Dübelwirkung führt zu einer geringeren Richtungsänderung der Hauptverzerrungsrichtung und generell zu einer gewissen Versteifung des Systems. Beim Versuch SE4 (Bild 6.15(j)) ist deren Einfluss deutlich erkennbar; der Winkel  $\beta_u$  dreht nicht sprunghaft ab, sondern verändert sich, da die Rissverzahnung mit zunehmender Rissöffnung abnimmt, mit anwachsender Belastung stetig. Ferner ist die Rissverzahnung in Kombination mit der Dübelwirkung bei Elementen ebener Flächentragwerke durch die Änderung der Rissrichtung über die Elementdicke vermutlich ausgeprägter als bei entsprechenden Elementen unter reiner Membrankraftbeanspruchung. Insbesondere im Bereich kleiner Rissöffnungen ist zu erwarten, dass das Tragverhalten von diesen Mechanismen beeinflusst wird.

Bei beiden Versuchen ergeben sich gegenüber den Messergebnissen auf der Oberseite deutlich geringere Verzerrungen, so dass die obere in  $y$ -Richtung verlaufende Bewehrungslage die Fliessgrenze im Gegensatz zu den Versuchen nicht erreicht. Ursache dafür könnte eine Abnahme der Betonsteifigkeit gegen den oberen Elementrand hin sein, welche infolge des Betonierens in horizontaler Lage wahrscheinlich ist. Der auf der Unterseite oberflächennaher Stäbe auftretende höhere Luftporengehalt könnte diesen Effekt durch eine Schwächung des Verbunds allenfalls noch verstärkt haben. Die Modelle sind bezüglich des Tragverhaltens auf die Wahl der Spannungs-Verzerrungsbeziehung des Betons nicht sehr empfindlich, so dass diese kaum als Erklärung der Abweichungen in Frage kommt. Da die Bewehrungsstäbe am Elementrand an Stahlbleche geschweisst wurden, welche an einer Schweisschablone befestigt waren, können allenfalls auch schweissbedingte Eigenspannungszustände der Bewehrungsstäbe zu Abweichungen bezüglich der Modelle führen. Da die aus den Randverzerrungen unter Berücksichtigung von (6.2) berechneten Bewehrungsdehnungen bei dem auf den Fliessbeginn zurückzuführenden markanten Steifigkeitsabfall der Spannungs-Verzerrungscharakteristiken am Elementrand etwa den Fliessdehnungen entsprechen, ist dieser Einfluss aber vermutlich eher von untergeordneter Bedeutung.

Der mit Hilfe des Sandwichmodells berechnete untere Grenzwert der Traglast unterschätzt die gemessene Höchstlast jeweils etwas, was auf die relativ konservativ angenommene effektive Betondruckfestigkeit zurückgeführt werden kann. Die basierend auf einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie fester Richtung ermittelte Traglast überschätzt sowohl die auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhende Traglast als auch die gemessene Höchstlast teils erheblich. Der obere Grenzwert der auf einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie variabler Richtung beruhenden Traglast stellt indes einen oberen Grenzwert dar, der die auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhende Traglast nur geringfügig überschätzt. Die Näherung von Cookson überschätzt diesen Wert jeweils etwas.

## 6.8 Zusammenfassung

Das gerissene Verhalten von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke lässt sich mit den auf dem (angepassten) Gerissenen Scheibenmodell und dem klassischen Druckfeldmodell basierenden Modellen  $b_{3,2}$  bzw.  $a_3$  beschreiben, wobei ersteres die Zugversteifung berücksichtigt. Ausser einer verfeinerten Beschreibung erlaubt das Modell  $b_{3,2}$  damit Ermittlung der Dehnungslokalisierung der Bewehrung in Rissnähe, womit die Gefahr eines Zerreißens der Bewehrung untersucht werden kann. Ausserdem lassen sich mit diesem Modell die Rissabstände und -breiten abschätzen. Die Berech-



**Bild 6.16** – Vergleich mit experimentellen Ergebnissen: Versuch SE7 aus [69, 70].

nungsergebnisse sind bezüglich der Wahl der Spannungs-Verzerrungsbeziehung des Betons nicht empfindlich. Da der Beton in der Regel das Versagen bestimmt, sind allerdings die Betondruckfestigkeit und vor allem die Betonbruchstauchung  $-\varepsilon_{cu}$  für die Höchstlast und die zugehörigen verall-

gemeinerten Verzerrungen wesentliche Parameter. Während sich die verallgemeinerten Spannungen bei gegebenen verallgemeinerten Verzerrungen direkt bestimmen lassen, erfordert der umgekehrte Weg eine iterativ-numerische Berechnung. Der Beton wird zu diesem Zweck in  $m > 10$  Schichten mit konstantem Spannungszustand unterteilt.

Bei einer plastischen Modellierung gelingt es in der Regel nicht, Fliessbedingungen in der allgemeinen Form  $Y(n_i, m_i) = 0$  anzugeben, so dass man sich weiterer Vereinfachungen bedient. Beschränkt man die kinematischen Freiheitsgrade auf diejenigen einer Fliessgelenklinie, gelangt man für reine Biege- und Drillmomentenbeanspruchungen ( $n_i = 0$ ) zu den Normalmomenten-Fliessbedingungen. In vielen Fällen liefert diese eine Traglast, welche die Traglast bei Berücksichtigung aller sechs verallgemeinerten Verzerrungen nur geringfügig übersteigt. Bei bezüglich der Bewehrungsrichtungen grossen Drillmomentenbeanspruchungen und grossen Bewehrungsgehalten wird diese und auch die in Versuchen gemessene Höchstlast allerdings zum Teil erheblich überschätzt. Um die Membrankräfte einzubeziehen werden – dem gleichen Konzept folgend – verallgemeinerte Fliessgelenklinien betrachtet, welche vier kinematische Freiheitsgrade aufweisen. Im Gegensatz zu den Normalmomenten-Fliessbedingungen gelingt es allerdings nicht, explizite Fliessbedingungen anzugeben. Eine weitere Reduktion der kinematischen Freiheitsgrade durch die Betrachtung von verallgemeinerten Fliessgelenklinien mit fester Richtung und auch die von Cookson eingeführten Näherungen liefern keine für die praktische Anwendung befriedigenden Lösungen. Nichtsdestotrotz tragen beide Betrachtungen zu einem besseren Verständnis der entsprechenden Zusammenhänge bei.

Unter Berücksichtigung aller sechs verallgemeinerten Verzerrungen lassen sich mit Hilfe des kinematischen Grenzwertsatzes der Traglastverfahren durch numerische Lösung des entsprechenden Optimierungsproblems obere Grenzwerte der Traglast gewinnen, welche die Traglast nur geringfügig überschätzen oder dieser gleich sind.

Das auf dem statischen Grenzwertsatz der Traglastverfahren abgestützte Sandwichmodell erlaubt einerseits eine Bemessung der Bewehrungsquerschnittsflächen sowie die Prüfung der Betonabmessungen; andererseits liefert es einen unteren Grenzwert der auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhenden Traglast. Explizite Beziehungen werden für eine reine Drillmomentenbeanspruchung  $m_{xy}$ , sowie eine Beanspruchung durch Biegemomente  $m_x$  und Membranschubkräfte  $n_{xy}$  angegeben, welche die Höchstlast der betrachteten Versuche gut erfassen ( $x$  und  $y$  bezeichnen dabei die Richtungen einer orthogonalen Bewehrung).

Allgemein sind die Ergebnisse einer ideal plastischen Berechnung bezüglich der Wahl der effektiven Betondruckfestigkeit nicht sehr empfindlich. In Zweifelsfällen lässt sich dies anhand einer Sensitivitätsanalyse überprüfen.

## 7 Zusammenfassung und Folgerungen

### 7.1 Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Abhandlung wird die Modellierung des Tragverhaltens von Stahlbeton im ebenen Spannungszustand und deren Anwendung auf Elemente ebener Stahlbeton-Flächentragwerke behandelt. Die zur Erfassung der verschiedenen Aspekte des Tragverhaltens diskutierten und (weiter-)entwickelten Modelle basieren auf klaren baustatischen Grundlagen und weisen im Hinblick auf die praktische Anwendung verschiedene Detaillierungsgrade auf. Die behandelten Modelle liefern die Grundlage für die Bemessung bzw. Beurteilung des Tragwiderstands sowie die Bestimmung der Verformungen von (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereichen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke

Der erste Teil der Abhandlung (Kapitel 2 bis 4) umfasst die wichtigsten Grundlagen und Konzepte der Baustatik, relevante Aspekte des Werkstoff- und Verbundverhaltens (einschliesslich deren Modellierung) sowie einige generelle Überlegungen zur Modellbildung im Betonbau.

Gegenstand des Kapitels 2 ist eine eingehende Darstellung der für diese Abhandlung relevanten Grundlagen der Baustatik. Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeiten wird dabei die Dualität der mit statischen bzw. kinematischen Grössen formulierten Beziehungen sowohl in der Elastizitätstheorie als auch in der Plastizitätstheorie hervorgehoben. Ausserdem wird auf die Zusammenhänge der beiden grundlegenden Theorien hingewiesen. Einen weiteren Schwerpunkt des Kapitels bilden die aus der Sicht des Ingenieurs äusserst wertvollen Vereinfachungen und Näherungsverfahren. Die Zusammenhänge werden jeweils anhand einfacher Beispiele verdeutlicht. Das Kapitel 2 dient ausserdem der Definition einiger Fachausdrücke. Im Kapitel 3 werden die für die Abhandlung relevanten Eigenschaften des Bewehrungsstahls und Betons sowie deren Zusammenwirken in einem etwas weiter gefassten Kontext anhand einfacher Modellvorstellungen erörtert. Kapitel 4 umfasst einige allgemeine Bemerkungen zur Modellbildung im Betonbau, insbesondere zur Anwendung plastischer Modelle.

Im zweiten Teil der Abhandlung (Kapitel 5) werden Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stahlbeton im homogenen ebenen Spannungszustand behandelt.

Nach einer Darstellung der übergeordneten Voraussetzungen und Idealisierungen (Kapitel 5.1) werden in Kapitel 5.2 auf einem ideal plastischen Werkstoffverhalten basierende Modelle behandelt. Dabei werden die Fliessbedingungen für Stahlbeton mit zwei (und drei) schiefwinkligen Bewehrungslagen formuliert, welche die bekannten Fliessbedingungen für eine orthogonale Bewehrung als Spezialfall enthalten. Ferner werden die entsprechenden Fliessflächen eingehend diskutiert. Unter der Prämisse, dass alle Bewehrungslagen beim Erreichen der Traglast auf Zug fliessen, werden darauf basierend Bemessungsbeziehungen für zwei (und drei) schiefwinklige Bewehrungslagen dargestellt. Den Abschluss des Teils zur plastischen Modellierung bildet eine Diskussion der zur Behandlung schiefwinkliger Bewehrungslagen oft verwendeten äquivalenten orthogonalen Bewehrung. Im Anschluss wird das Tragverhalten im ungerissenen Zustand untersucht (Kapitel 5.3), wobei das Hauptaugenmerk den Umlagerungen der inneren Kräfte infolge einer Vorspannung sowie dem Schwinden und Kriechen des Betons gilt; entsprechende Modellvorstellungen werden vorgestellt. Den Ausgangspunkt der Modellierung des gerissenen Verhaltens (Kapitel 5.4) bildet eine Darstellung des in [63] skizzierten allgemeinen Vorgehens zur Formulierung von Modellen, welche von verzahnten Rissen mit vorgegebener Richtung ausgehen; aus verschiedenen Erwägungen wird dieses Vorgehen allerdings nicht weiterverfolgt. Die beiden im Anschluss ausführlich behandelten Modelle, das klassische Druckfeldmodell [5, 75, 112] (Kapitel 5.4.2) und das Gerissene Scheibenmodell [63, 64]

(Kapitel 5.4.3), basieren auf der Grundvoraussetzung spannungsfreier fiktiver Risse, welche frei drehbar sind. Beim klassischen Druckfeldmodell wird zusätzlich von einem verschwindend kleinen Rissabstand ausgegangen, womit die Zugversteifung vernachlässigt wird. Sowohl das klassische Druckfeldmodell als auch das Gerissene Scheibenmodell werden zur Behandlung beliebiger schiefwinkliger Bewehrungslagen erweitert. Bei der Darstellung des Gerissenen Scheibenmodells wird insbesondere die Ermittlung des Abstands der fiktiven Risse ausführlich diskutiert, präzisiert und weiter ausgearbeitet. Basierend auf den beiden Modellen zur Beschreibung des gerissenen Verhaltens widmet sich Kapitel 5.4.4 dem Festlegen der effektiven Betondruckfestigkeit bei der plastischen Modellierung. Eine in [64] entwickelte Näherung wird dabei in leicht angepasster Form für die Behandlung von schiefwinkligen Bewehrungslagen erweitert. In Kapitel 5.5 werden alle in Kapitel 5 behandelten Modellvorstellungen anhand eines Beispiels einander gegenübergestellt und eingehend diskutiert. Bei dieser Gelegenheit wird das Gerissene Scheibenmodell angepasst, um gewissen Inkonsistenzen, welche bei geringen Stahlspannungen auftreten, zu eliminieren. Ausserdem wird der Einfluss von vorspann- und schwindbedingten Eigenspannungen auf das Tragverhalten anhand der vorgelegten Modellierung exemplarisch aufgezeigt.

Im dritten Teil der Abhandlung (Kapitel 6) werden Modelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke behandelt.

Als grundlegende kinematische Hypothese wird vorausgesetzt, dass Normalen zur Mittelebene in der verformten Lage senkrecht zur verformten Mittelfläche verlaufende Geraden bilden. Folglich werden Querkräfte als verallgemeinerte Reaktionen aufgefasst, welche weder einen Einfluss auf den Tragwiderstand noch die Verformungen ausüben. In jeder zur Mittelebene parallelen Schicht herrscht damit ein ebener Spannungszustand, so dass die Modellbildung basierend auf den Modellen des Kapitels 5 erfolgen kann. Nach einer Darstellung der grundlegenden kinematischen und statischen Beziehungen (Kapitel 6.2) werden in Kapitel 6.3 auf einem ideal plastischen Werkstoffverhalten basierende Modelle erörtert. In der Regel gelingt es dabei nicht, auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen basierende allgemein gültige Fliessbedingungen zu formulieren, so dass weitere Vereinfachungen nötig sind. Eine Möglichkeit besteht darin, die kinematischen Freiheitsgrade auf diejenigen von Fliessgelenklinien und verallgemeinerten Fliessgelenklinien zu beschränken, womit ein oberer Grenzwert der auf allen sechs verallgemeinerten Verzerrungen beruhenden Traglast resultiert. Nach einer Darstellung der auf der Betrachtung von Fliessgelenklinien basierenden Normalmomenten-Fliessbedingungen sowie entsprechender Bemessungsbeziehungen (Kapitel 6.4.2), werden verallgemeinerte Fliessgelenklinien in ebenen Stahlbeton-Flächentragwerken betrachtet (Kapitel 6.4.3). Dabei werden Beiträge in [31, 32, 88] aufgegriffen, präzisiert und ergänzt. Verallgemeinerte Fliessgelenklinien berücksichtigen gegenüber den Fliessgelenklinien zusätzlich Verschiebungsinkremente parallel zu ihnen, womit sowohl Membrannormal- als auch Membranschubkräfte einen Beitrag zur inkrementellen Dissipationsenergie leisten. Eine explizite Formulierung entsprechender Fliessbedingungen gelingt allerdings nicht. Wird die Richtung der verallgemeinerten Fliessgelenklinie vorgegeben, womit eine zusätzliche kinematische Bindung eingeführt wird, lassen sich die Fliessfläche sowie die Fliessbedingungen einiger Regime angeben. Den Abschluss der Diskussion von auf verallgemeinerten Fliessgelenklinien beruhenden Fliessbedingungen bildet die Erörterung einer in [31] vorgeschlagenen Näherungslösung. Kapitel 6.4.4 enthält eine Weiterentwicklung des auf dem statischen Grenzwertsatz der Traglastverfahren basierenden Sandwichmodells [18, 122] zur Bemessung ebener Stahlbeton-Flächentragwerke. Die Hebelarme der inneren Kräfte werden dabei korrekt erfasst und auch Fälle berücksichtigt, bei welchen aus Gründen der Tragsicherheit weniger als drei Bewehrungslagen erforderlich sind. Für die Fälle einer reinen Drillmomentenbeanspruchung sowie einer Beanspruchung durch Membranschubkräfte und Biegemomente (jeweils bezüglich der Richtungen einer orthogonalen Bewehrung) werden darauf basierend Bemessungsbeziehungen und Beziehungen zur Ermittlung eines unteren Grenzwerts der Traglast angegeben.

Kapitel 6.5 enthält eine kurze Erläuterung der auf Kapitel 5.3 fussenden Beschreibung des ungerissenen Verhaltens. In Kapitel 6.6 werden basierend auf dem klassischen Druckfeldmodell und dem Gerissenen Scheibenmodell Modelle zur Beschreibung der gesamten Last-Verformungscharakteristik von Elementen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke erarbeitet. Die für die Ermittlung der verallgemeinerten Betonspannungen erforderliche Integration erfolgt dabei gemäss [47], indem der

Beton in Schichten mit einem konstanten Spannungszustand unterteilt wird. Mit dem auf dem Gerissenen Scheibenmodell beruhenden Modell lassen sich insbesondere der Tragwiderstand und das Verformungsvermögen realistisch beurteilen; ausserdem können die Rissabstände und -breiten abgeschätzt werden.

In Kapitel 6.7 werden die Ergebnisse der betrachteten Modelle mit Messergebnissen von zwei Versuchen an Plattenelementen mit einer reinen Drillmomentenbeanspruchung (bezüglich der Richtungen einer orthogonalen Bewehrung) und zwei Versuchen mit einer Beanspruchung durch Membranschubkräfte und ein Biegemoment (bezüglich der Richtungen einer orthogonalen Bewehrung) verglichen. Die auf dem klassischen Druckfeldmodell und dem Gerissenen Druckfeldmodell beruhenden Modelle zeigen entsprechend dem Detaillierungsgrad bezüglich des Tragwiderstands eine gute Übereinstimmung. Während die verallgemeinerten Verzerrungen der erstgenannten beiden Versuche ebenfalls gut mit den Messwerten korrelieren, trifft dies bei den beiden letztgenannten nicht in gleichem Masse zu; mögliche Erklärungen werden diskutiert. Die Höchstlast wird mit dem Sandwichmodell in allen vier Versuchen gut erfasst. Die kinematisch restriktivere Normalmomenten-Fliessbedingung überschätzt die Höchstlast der beiden Versuche unter reiner Drillmomentenbeanspruchung erheblich. Bei den beiden Versuchen mit einer Beanspruchung durch Membranschubkräfte und ein Biegemoment wird die Höchstlast durch Betrachtung verallgemeinerter Fliessgeleitenlinien nur geringfügig überschätzt. Wird deren Richtung hingegen in Richtung einer Bewehrungslage vorgegeben, so wird die Höchstlast teilweise erheblich überschätzt.

## 7.2 Folgerungen

Die Beurteilung des Tragwiderstands sowie eine entsprechende Bemessung des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand können mit Hilfe einer plastischen Modellierung gemäss Kapitel 5.2 erfolgen. Die dazu benötigte effektive Betondruckfestigkeit kann Kapitel 5.4.4 entnommen werden. Vereinfacht kann von einer von der Beanspruchung unabhängigen effektiven Betondruckfestigkeit gemäss (5.138) in Kombination mit einer Beschränkung der Betondruckfeldrichtung gemäss Kapitel 5.4.4 ausgegangen werden, mit welcher allerdings der Tragwiderstand bei hohen Schubspannungen überschätzt wird.

Im ungerissenen Zustand kann der Beitrag der Bewehrung in der Regel vernachlässigt werden. Durch die Bewehrung behinderte Schwinddehnungen des Betons verursachen einen Eigenspannungszustand, der eine Umlagerung der inneren Kräfte bewirkt und insbesondere die Risslast reduziert.

Das (angepasste) Gerissene Scheibenmodell ermöglicht eine eingehende Analyse des Tragwiderstands und der Verformungen des Stahlbetons mit beliebigen Bewehrungslagen im ebenen Spannungszustand. Ausser bei einer überwiegend in Bewehrungsrichtung wirkenden reinen Zugbeanspruchung wird das Verformungsvermögen in der Regel durch den Bruch des Betons bestimmt. Beim klassischen Druckfeldmodell wird die Zugversteifung vernachlässigt, womit der Tragwiderstand etwas unterschätzt und das Verformungsvermögen etwas überschätzt wird. Bis zum Fliessbeginn kann näherungsweise von einem linear elastischen Verhalten des Betons ausgegangen werden.

In (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereichen ebener Stahlbeton-Flächentragwerke sind die senkrecht zur Mittelebene wirkenden Normal- und Schubspannungen gegenüber den anderen Spannungskomponenten in der Regel klein, so dass in jeder zur Mittelebene parallelen Ebene von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen werden kann. Entsprechend lassen sich die Modelle des Kapitels 5 direkt übertragen.

Bei einer auf dem Kapitel 5.2 basierenden plastischen Modellierung gelingt es nicht, allgemeingültige Fliessbedingungen zu formulieren. Mit dem in Kapitel 6.4.4 weiterentwickelten Sandwichmodell steht indes ein einfaches Modell zur Bemessung von ebenen Stahlbeton-Flächentragwerken zur Verfügung. Für die Bemessung von Elementen unter einer reinen Drillmomentenbeanspruchung sowie einer Beanspruchung durch Membranschubkräfte und ein Biegemoment (jeweils bezüglich der Richtungen einer orthogonalen Bewehrung) können direkt die in Kapitel 6.4.4 angegebenen Bezie-



hungen verwendet werden. Die auf dem Sandwichmodell basierenden unteren Grenzwerte der Traglast dieser beiden speziell betrachteten Fälle stimmen mit den Ergebnissen der betrachteten Versuche gut überein. Bei verschwindenden Membrankräften kann die kinematisch restriktivere Normalmomenten-Fliessbedingung verwendet werden; für grosse Drillmomentenbeanspruchungen und hohe Bewehrungsgehalte resultieren dabei allerdings Traglasten, die die Höchstlasten erheblich überschätzen. Insbesondere für derartige Fälle wird deshalb empfohlen, das Sandwichmodell zu verwenden. Mit Hilfe einer nichtlinearen Optimierung lässt sich basierend auf dem kinematischen Grenzwertsatz eine gute Näherung der Traglast bzw. die Traglast selbst ermitteln. Die Traglast ist gegenüber der Wahl der effektiven Betondruckfestigkeit in der Regel unempfindlich; dies lässt sich in Zweifelsfällen mit einer Sensitivitätsanalyse untersuchen.

Gesamte Last-Verformungscharakteristiken von Elementen ebener Flächentragwerke lassen sich für eine monotone Belastungs- oder Verformungserhöhung mit den in Kapitel 6.6 erarbeiteten, auf dem (angepassten) Gerissenen Scheibenmodell bzw. dem klassischen Druckfeldmodell beruhenden Modellen ermitteln. Mit dem (angepassten) Gerissenen Scheibenmodell wird die Zugversteifung erfasst, womit ausser einer verfeinerten Abbildung des Tragverhaltens einerseits die Lokalisierung der Stahldehnungen in Rissnähe erfasst und damit die Gefahr eines Zerreißens der Bewehrung untersucht werden kann und andererseits die Rissabstände und -breiten abgeschätzt werden können.

Die Wahl der Modellvorstellung hängt von der im Rahmen der Gesamtaufgabe geforderten und erreichbaren Genauigkeit und Aussagekraft der Ergebnisse ab. Für Fragen des Tragwiderstands stellen die plastischen Modelle leistungsstarke Hilfsmittel dar, welche eine direkte Beurteilung des Tragwiderstands ohne aufwendige nichtlineare Berechnungen sowie eine entsprechende Bemessung erlauben. Eine realistische Beurteilung des Verformungsvermögens zwecks Überprüfung der Anwendungsgrenzen plastischer Modelle kann anhand des (angepassten) Gerissenen Scheibenmodells bzw. des darauf basierenden Modells für Elemente ebener Flächentragwerke vorgenommen werden. Bei Fragen der Verformungen im Gebrauchszustand kann in der Regel von einem linear elastischen Werkstoffverhalten ausgegangen werden, wobei die Rissbildung und die zeitabhängigen schwind- und kriechbedingten Verformungen des Betons zu berücksichtigen sind. Häufig reicht dafür das klassische Druckfeldmodell bzw. das darauf basierende Modell für Elemente ebener Flächentragwerke aus; eine Berücksichtigung der Zugversteifung ist bei geringen Bewehrungsgehalten in Betracht zu ziehen.

### 7.3 Ausblick

Abschliessend werden einige Anregungen für weiterführende Arbeiten zusammengestellt:

- Gegenwärtig stehen relativ wenige gut dokumentierte Versuche an Elementen ebener Flächentragwerke unter allgemeinen Beanspruchungen durch Membrankräfte sowie Biege- und Drillmomenten zur Verfügung, um entsprechende Modellvorstellungen zu verifizieren. Ausserdem beschränken sich die zurzeit vorliegenden Versuche auf spezielle Kombinationen der verallgemeinerten Spannungen. Zusätzliche experimentelle Untersuchungen sind vor allem bezüglich des Betonverhaltens erforderlich. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Betonbruchstauung von Interesse, welche das Verformungsvermögen massgeblich beeinflusst. Bei der Untersuchung des Einflusses verschiedener Werkstoffbeziehungen erscheint es dabei zweckmässig, anhand der aus den Randverzerrungen bestimmten verallgemeinerten Verzerrungen der Experimente rechnerisch die verallgemeinerten Spannungen zu bestimmen und diese den experimentell gemessenen Grössen gegenüberzustellen.
- Bei den in Kapitel 6.6 entwickelten Modellen werden die Querkräfte als verallgemeinerte Reaktionen aufgefasst. Um in der Umgebung von konzentrierten Krafteinleitungen die Gefahr eines querkräftbedingten Versagens zu untersuchen, könnten die Modelle gestützt auf die Arbeit von Jäger [56] weiterentwickelt werden. Auf die Verformungen haben die Querkräfte in der Regel nur einen geringen Einfluss.

- Die Abhandlung beschränkt sich auf Elemente ebener Stahlbeton-Flächentragwerke konstanter Dicke. Die im Kapitel 6 behandelten Modelle könnten weiterentwickelt werden, um das Tragverhalten gevouteter und gekrümmter Stahlbeton-Flächentragwerke zu beschreiben. Unter anderem liesse sich dadurch auch die Frage beantworten, bis zu welchen Krümmungsradien die in dieser Abhandlung betrachteten Modellvorstellungen genügend genaue Ergebnisse liefern.
- Die Abhandlung beschränkt sich auf eine monotone Belastungs- bzw. Verformungserhöhung. Um zyklische Beanspruchungen zu erfassen, wie sie beispielsweise unter Erdbebeneinwirkung auftreten, stellt sich insbesondere die Frage nach dem Verhalten des Betons (vor allem der Betondruckfestigkeit) bei zunehmender Rissbildung in verschiedener Richtung und der damit einhergehenden Gefügezerstörung. Ausserdem wäre das Verbundverhalten unter derartigen Verhältnissen experimentell zu untersuchen, um die beiden Verbundschubspannungsniveaus des Zuggurtmodells entsprechend zu kalibrieren.
- Eine mögliche Fortsetzung der Untersuchungen ist die Modellierung von Stahlbetonfaltwerken, wie Brückenoberbauten mit offenen und geschlossenen dünnwandigen Querschnitten oder Kernen von Betonskelettbauten, welche vorwiegend durch Membrankräfte, aber auch durch Biege- und Drillmomente (sowie Querkräfte) beansprucht werden. Während die (hinsichtlich Geometrie und Einwirkungen) kontinuierlichen Bereiche mit Hilfe des Sandwichmodells bemessen werden können, sind entsprechende diskontinuierliche Bereiche mit verfeinerten Modellen zu untersuchen. Hierzu eignen sich insbesondere Spannungsfelder und entsprechende Fachwerkmodelle.

Vielversprechend erscheint in diesem Zusammenhang die Weiterentwicklung der Stringermodelle [12, 84, 123], bei denen ebene Stahlbeton-Flächentragwerke mit reiner Membrankraftbeanspruchung in Stringer und Scheiben unterteilt werden, wobei erstere nur Kräfte in ihrer Richtung übertragen können (siehe Kapitel 6.3) und letztere einen Zustand reiner Schubmembrankräfte aufweisen. Damit lassen sich statisch zulässige Spannungszustände generieren, anhand welcher eine auf dem statischen Grenzwertsatz der Traglastverfahren basierende Bemessung vorgenommen werden kann. Würden den Stringern das Zuggurtmodell und den Scheiben das (angepasste) Gerissene Scheibenmodell zugrunde gelegt, könnten ausserdem die Verformungen (einschliesslich Rissabständen und -breiten) ermittelt und der Tragwiderstand geprüft werden. Eine derartige Modellierung könnte sich insbesondere auch zur einfachen Modellierung von Stahlbetonschalen eignen, indem diese als Faltwerke approximiert werden.

- Ein auf den Modellen dieser Abhandlung basierendes nichtlineares Finite-Elemente-Programm würde eine realistische Beurteilung des Tragwiderstands und der Verformungen von ebenen Stahlbetontragwerken im Gebrauchszustand erlauben. Spezifische Anwendungen wären beispielsweise die Beurteilung der Tragsicherheit bestehender Plattentragwerke, bei welchen der sogenannte Gewölbeeffekt, also die Membrankräfte infolge behinderter Verformung in der Mittelebene, berücksichtigt werden, oder die Untersuchung der Stabilität schlanker Brückenstege. Ferner könnten die Stahlspannungen im Gebrauchszustand bestimmt und darauf gestützt Fragen der Ermüdung behandelt werden.



## Anhang A – Beispiel zum Verfahren von Rayleigh-Ritz

Gegeben sei der in Bild 2.9 dargestellte elastisch gebettete einfache Balken mit konstanter Biegesteifigkeit  $EI$  und einer in Feldmitte wirkenden Einzellast  $Q$ . Der Bettungsmodul der elastischen Bettung werde mit  $k$  bezeichnet. Die Querschnitte seien in der verformten Lage eben und senkrecht zur verformten Stabachse stehend, mithin werden Schubverzerrungen vernachlässigt, und die Querkräfte entsprechen verallgemeinerten Reaktionen. Nachfolgend wird von der Summationskonvention Gebrauch gemacht;  $( )'$ ,  $( )''$ , etc. bezeichnen einfache, zweifache, etc. Ableitung nach der Variablen  $x$ .

Mit dem Biegemoment  $M(x)$ , der Querkraft  $V(x)$  und der Reaktion der elastischen Bettung  $p(x)$  lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$M''(x) + p(x) = 0 \quad (\text{A1})$$

mit den statischen Randbedingungen für eine Trägerhälfte

$$M(0) = 0 \quad \text{und} \quad V(l/2) = M'(l/2) = Q/2 \quad (\text{A2})$$

Auf Grund der eingeführten kinematischen Bindungen ergeben sich mit der Durchbiegung  $w(x)$ , der Verlängerung der Federn der elastischen Bettung  $e(x)$  und der Krümmung  $\chi(x)$  die Verträglichkeitsbedingungen

$$\chi(x) + w''(x) = 0 \quad \text{und} \quad e(x) + w(x) = 0 \quad (\text{A3})$$

mit den kinematischen Randbedingungen für eine Trägerhälfte

$$w(0) = 0 \quad \text{und} \quad w'(l/2) = 0 \quad (\text{A4})$$

Das Werkstoffverhalten wird mit den Beziehungen

$$M(x) = EI \cdot \chi(x) \quad \text{und} \quad p(x) = k \cdot e(x) \quad (\text{A5})$$

beschrieben.

Für die Ermittlung einer Näherungslösung mit Hilfe des Satzes vom Minimum des Gesamtpotentials wird die Durchbiegungsfunktion  $w(x)$  durch eine  $n$ -gliedrige Reihe von bezüglich  $x=l/2$  symmetrisch verlaufenden Sinusfunktionen ersetzt, welche jeweils bei  $x=0$  verschwinden, und folglich die kinematischen Randbedingungen (A4) erfüllen

$$w_k(x, w_j) = \sum_{j=1}^n w_j \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] = w_j \varphi_j(x) \quad (\text{A6})$$

Für das Gesamtpotential folgt

$$\begin{aligned} \Phi(w_j) &= \int_0^l \frac{EI}{2} \left( w_k''(x, w_j) \right)^2 dx + \int_0^l \frac{k}{2} \left( w_k(x, w_j) \right)^2 dx - Q w_k(l/2) \\ &= w_j w_m \left( \frac{EI}{2} \int_0^l \varphi_j''(x) \varphi_m''(x) dx + \frac{k}{2} \int_0^l \varphi_j(x) \varphi_m(x) dx \right) - Q w_j \varphi_j(l/2) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

(2.89) liefert

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_j} = w_m \left( EI \int_0^l \varphi_j''(x) \varphi_m''(x) dx + k \int_0^l \varphi_j(x) \varphi_m(x) dx \right) - Q \varphi_j(l/2) = 0 \quad (\text{A8})$$

und da die Ansatzfunktionen  $\varphi_j(x)$  orthogonal sind, resultiert für die  $n$  unbekanntenen Verschiebungen  $w_j$  direkt

$$w_j = \frac{Q \varphi_j(l/2)}{EI \int_0^l (\varphi_j''(x))^2 dx + k \int_0^l (\varphi_j(x))^2 dx} \quad (\text{A9})$$

Für  $j=1, 3, 5, \dots$  bzw.  $j=2, 4, 6, \dots$  beträgt  $\varphi_j(l/2) = 1$  bzw.  $-1$ ; mithin gilt  $\varphi_j(l/2) = (-1)^{j-1}$ . Nach dem Auswerten der Integrale resultiert somit folgende Näherung für die Durchbiegungsfunktion

$$w_k(x) = \frac{2Ql^3}{EI\pi^4} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^4 + \beta} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{kl^4}{EI\pi^4} \quad (\text{A10})$$

Für  $n \rightarrow \infty$  entspricht dies der exakten Lösung. Für die Durchbiegung in Feldmitte  $f_k$ , das Biegemoment  $M_k$  und die zugehörige Belastung  $q_k$  resultieren unter Ausnützung von (A3) und (A5)

$$\begin{aligned} f_k &= w_k(l/2) = \frac{2Ql^3}{EI\pi^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)^4 + \beta} \\ M_k(x) &= -EI w_k'' = \frac{2Ql}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-1)^2 (-1)^{j-1}}{(2j-1)^4 + \beta} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] \\ q_k(x) &= -M_k'' + k w_k = \frac{2Ql}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \frac{(2j-1)^2 (-1)^{j-1}}{(2j-1)^4 + \beta} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

Die residualen Lasten (Gleichgewichtsverletzungen) ergeben sich somit zu

$$q_r(x) = M_k''(x) + p_k(x) = -q_k(x) \quad \text{und} \quad Q_r(x) = M_k'(l/2) - \frac{Q}{2} = -\frac{Q}{2} \quad (\text{A12})$$

Die Potentialgrößen betragen

$$U_k = U_k^* = \Phi_k^* = \frac{1}{2} Q f_k, \quad H_k = -Q f_k \quad \text{sowie} \quad \Phi_k = -\frac{1}{2} Q f_k \quad (\text{A13})$$

$Q$  stellt eine verallgemeinerte Last und  $f$  die korrespondierende verallgemeinerte Verschiebung dar. Da die Kraft  $Q$  vorgeschrieben wird, verschwindet das komplementäre Potential der äusseren Kräfte  $H^* = 0$ . Wird nicht die Kraft  $Q$  sondern die Mittendurchbiegung  $f$  vorgeschrieben, so erhält man für die als korrespondierende Reaktion aufgefasste Kraft  $Q_k$  aus der ersten Beziehung (A11)

$$Q_k = \frac{f EI \pi^4}{2l^3} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)^4 + \beta} \right]^{-1} \quad (\text{A14})$$

Einsetzen in die zweite und dritte Beziehung (A11) liefert das zugehörige Biegemoment und die zugehörige Belastung. Die Potentialgrößen betragen in diesem Fall

$$U_k = U_k^* = \Phi_k = \frac{1}{2} f Q_k, \quad H_k^* = -f Q_k, \quad \Phi_k^* = -\frac{1}{2} f Q_k \quad \text{sowie} \quad H_k = 0 \quad (\text{A15})$$

Für die Ermittlung einer Näherungslösung mit Hilfe des Satzes vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials wird die Reaktion der elastischen Bettung  $p(x)$  durch eine  $n$ -gliedrige Reihe von bezüglich  $x=l/2$  symmetrisch verlaufenden Sinusfunktionen ersetzt.

$$p_s(x, p_j) = \sum_{j=1}^n p_j \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] = p_j \varphi_j(x) \quad (\text{A16})$$

Mit der Gleichgewichtsbedingungen (A1) resultiert unter Berücksichtigung der statischen Randbedingungen (A2) das Biegemoment

$$M_s(x, p_j) = \frac{Qx}{2} + p_j \psi_j(x) \quad \text{für} \quad [0 \leq x \leq l/2] \quad (\text{A17})$$

$$\text{mit} \quad \psi_j(x) = \frac{l^2}{(2j-1)^2 \pi^2} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right]$$

Das komplementäre Gesamtpotential  $\Phi_s^*(p_j)$ , welches infolge  $H^* = 0$  der Ergänzungsenergie  $U_s^*(p_j)$  entspricht, beträgt somit

$$\begin{aligned} \Phi_s^*(p_j) = U_s^*(p_j) &= 2 \int_0^{l/2} \frac{M_k^2(x, p_j)}{2EI} dx + 2 \int_0^{l/2} \frac{p_k^2(x, p_j)}{2k} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{Q^2}{4} \int_0^{l/2} x^2 dx + Q p_j \int_0^{l/2} x \psi_j(x) dx + p_j p_m \int_0^{l/2} \psi_j(x) \psi_m(x) dx \right) + \dots \\ &\quad \dots \frac{p_j p_m}{k} \int_0^{l/2} \varphi_j(x) \varphi_m(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

(2.80) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s^*}{\partial p_j} &= \frac{1}{EI} \left[ Q \int_0^{l/2} x \psi_j(x) dx + 2 p_m \int_0^{l/2} \psi_j(x) \psi_m(x) dx \right] + \dots \\ &\quad \dots \frac{2 p_m}{k} \int_0^{l/2} \varphi_j(x) \varphi_m(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

und da die Ansatzfunktionen  $\varphi_j(x)$  und die Funktionen  $\psi_j(x)$  orthogonal sind, resultiert für die  $n$  unbekannt Reaktionen  $p_j$  direkt

$$p_j = \frac{-\frac{Q}{EI} \int_0^{l/2} x \psi_j(x) dx}{\frac{2}{EI} \int_0^{l/2} (\psi_j(x))^2 dx + \frac{2}{k} \int_0^{l/2} (\varphi_j(x))^2 dx} \quad (\text{A20})$$

Nach dem Auswerten der Integrale resultiert für die Reaktion  $p(x)$  die Näherung

$$p_s(x) = \frac{-2Q\beta}{l} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^4 + \beta} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] \quad (\text{A21})$$

Für  $n \rightarrow \infty$  entspricht dies der exakten Lösung. Rückeinsetzen in (A17) und (A18) liefert das Biegemoment und das komplementäre Gesamtpotential

$$M_s(x) = \frac{Qx}{2} - \frac{2Ql\beta}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2 [(2j-1)^4 + \beta]} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] \quad [0 \leq x \leq l/2] \quad (\text{A22})$$

$$\Phi_s^* = U_s^* = U_s = \frac{Q^2 l^3}{EI \pi^4} \left[ \frac{\pi^4}{96} - \sum_{j=1}^n \frac{\beta}{(2j-1)^4 [(2j-1)^4 + \beta]} \right]$$

Aus (A3) und (A5) folgen unter Berücksichtigung der kinematischen Randbedingungen (A4) die zugehörige Durchbiegung sowie die Durchbiegung in Feldmitte  $f_s$

$$w_s(x) = \frac{Ql^3}{48EI} \left\{ 3 \frac{x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 - \frac{96\beta}{\pi^4} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^4 [(2j-1)^4 + \beta]} \sin \left[ \frac{(2j-1)\pi x}{l} \right] \right\}$$

für  $[0 \leq x \leq l/2]$  (A23)

$$f_s = w_s(l/2) = \frac{Ql^3}{48EI} \left\{ 1 - \frac{96\beta}{\pi^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)^4 [(2j-1)^4 + \beta]} \right\}$$

Die residuale Durchbiegung ergibt sich folglich zu

$$w_r(x) = w(x) - w_k(x) \quad (\text{A24})$$

wobei  $w(x)$  die Durchbiegung der exakten Lösung ( $n \rightarrow \infty$ ) bezeichnet.

Das Gesamtpotential beträgt  $\Phi_s = -Qf_s/2$  und das Potential der äusseren Kräfte  $H = -Qf_k$ . Wird nicht die Kraft  $Q$  sondern die Mittendurchbiegung  $f$  vorgeschrieben, so erhält man für die als korrespondierende Reaktion aufgefasste Kraft  $Q_s$  aus der zweiten Beziehung (A23)

$$Q_s = \frac{f 48EI}{Ql^3} \left\{ 1 - \frac{96\beta}{\pi^4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)^4 [(2j-1)^4 + \beta]} \right\}^{-1} \quad (\text{A25})$$

Einsetzen in die erste Beziehung (A22) und die erste Beziehung (A23) liefert das zugehörige Biegemoment und die Durchbiegung. Die Potentialgrössen betragen in diesem Fall

$$U_s = U_s^* = \Phi_s = \frac{1}{2} f Q_s, \quad H_s^* = -f Q_s, \quad \Phi_s^* = -\frac{1}{2} f Q_s \quad \text{sowie} \quad H_s = 0 \quad (\text{A26})$$

### Exakte Lösung

Die Ermittlung der exakten Lösung kann alternativ direkt mit Hilfe der Deformations- oder dem dazu dualen Vorgehen der Kraftmethode erfolgen. Bei der Deformationsmethode dient die Durchbiegung  $w(x)$  als primäre Unbekannte. Einsetzen von (A3) und (A5) in (A1) bringt die Differentialgleichung

$$w'''' + 4\lambda^4 w = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (\text{A27})$$

für deren Ermittlung. Die zugehörigen Randbedingungen betragen gemäss (A2) und (A4) unter Verwendung von (A3)<sub>1</sub> und (A5)<sub>1</sub>

$$w(0) = w''(0) = w'(l/2) = 0 \quad \text{und} \quad -EIw''''(l/2) = -\frac{k}{4\lambda^4} w''''(l/2) = Q/2 \quad (\text{A28})$$

Die Gleichgewichtsbedingung (A1) liefert eine Gleichung für zwei unbekannte Funktionen, nämlich  $M(x)$  und  $p(x)$ ; das System ist somit statisch unbestimmt. Bei der Kraftmethode wird zweckmässigerweise die Bettungsreaktion als überzählige Grösse  $x_1(x)=p(x)$  verwendet. Elimination der Durchbiegung  $w(x)$  aus den beiden Verträglichkeitsbedingungen (A3) bringt die erforderliche Verträglichkeitsbeziehung

$$\chi(x) = e''(x) \tag{A29}$$

Durch Einsetzen der Werkstoffbeziehungen (A5) in die Gleichgewichtsbeziehung (A1) und Berücksichtigung von (A29) resultiert schliesslich die Differentialgleichung

$$\frac{EI}{k} x_1'''' + x_1 = 0 \tag{A30}$$

zur Bestimmung der überzähligen Grösse. Aus (A2) und (A4) resultieren unter Berücksichtigung von (A3)<sub>2</sub>, (A5) sowie (A30) die zugehörigen Randbedingungen

$$x_1(0) = x_1'(0) = x_1'(l/2) = 0 \quad \text{und} \quad x_1''(l/2) = \frac{QEI}{2k} \tag{A31}$$

Alternativ lassen sich (A27) und (A28) mit dem Satz vom Minimum des Gesamtpotentials gewinnen. Betrachtet man unter Ausnützung der Symmetrie nur den halben Träger, beträgt das entsprechende Gesamtpotential unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbeziehungen (A3)

$$\Phi = \frac{EI}{2} \int_0^{l/2} (w''(x))^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^{l/2} (w(x))^2 dx - \frac{Q}{2} w(l/2) \tag{A32}$$

und dessen erste Variation

$$\delta\Phi = EI \int_0^{l/2} w''(x) \delta w''(x) dx + k \int_0^{l/2} w(x) \delta w(x) dx - \frac{Q}{2} \delta w(l/2) \tag{A33}$$

Nach zweifacher partieller Integration des ersten Summanden resultiert daraus unter Berücksichtigung von (2.61) sowie der Tatsache, dass sowohl die Durchbiegung  $w(x)$  als auch die virtuelle Durchbiegung  $\delta w(x)$  die kinematischen Randbedingungen (A4) erfüllen

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \left( -EIw'''(l/2) - \frac{Q}{2} \right) \delta w'(l/2) + (-EIw'''(0)) \delta w'(0) + \dots \\ & \dots \int_0^{l/2} (EIw''''(x) + kw(x)) \delta w(x) dx = 0 \end{aligned} \tag{A34}$$

Da (A34) für beliebige Variationen  $\delta w(x)$  gilt, müssen gemäss dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Klammerausdrücke einzeln verschwinden, womit (A34) die Differentialgleichung (A27) sowie die statischen Randbedingungen (A28)<sub>2</sub> und (A28)<sub>4</sub> liefert.

Der Satz vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials liefert entsprechend (A30) und (A31). Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung (A1) beträgt das komplementäre Gesamtpotential

$$\Phi^* = U^* = \frac{1}{2EI} \int_0^{l/2} (M(x))^2 dx + \frac{1}{2k} \int_0^{l/2} (M''(x))^2 dx \tag{A35}$$

und dessen erste Variation



$$\delta\Phi^* = \delta U^* = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} M(x) \delta M(x) dx + \frac{1}{k} \int_0^{l/2} M''(x) \delta M''(x) dx \quad (\text{A36})$$

Nach zweifacher partieller Integration des zweiten Summanden resultiert daraus unter Berücksichtigung von (2.66) sowie der Tatsache, dass sowohl die Biegemomente  $M(x)$  als auch die virtuellen Biegemomente  $\delta M(x)$  die statischen Randbedingungen (A2) erfüllen und  $\delta Q=0$  ist

$$\begin{aligned} \delta\Phi^* = \int_0^{l/2} \left[ \frac{M(x)}{EI} + \frac{M''''(x)}{k} \right] \delta M(x) dx - (M''(0)) \delta M'(l/2) - \dots \\ \dots (M''(l/2)) \delta M(l/2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A37})$$

Da (A37) für beliebige Variationen  $\delta M(x)$  gilt, müssen gemäss dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Klammerausdrücke einzeln verschwinden. Wird der erste Klammerausdruck zweimal abgeleitet und in allen drei Ausdrücken mit Hilfe von (A1) das Biegemoment  $M(x)$  durch die Bettungsreaktion  $p(x)=x_1(x)$  ersetzt, resultieren wiederum die Differentialgleichung (A30) und die kinematischen Randbedingungen (A31)<sub>1</sub> und (A31)<sub>3</sub>.

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (A30) lautet

$$w(x) = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (\text{A38})$$

Bestimmen der Konstanten mit Hilfe der Randbedingungen (A31) und Einsetzen in (A38) liefert schliesslich unter Berücksichtigung von  $\text{Ch}\lambda x = (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})/2$  und  $\text{Sh}\lambda x = (e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})/2$  die exakte Lösung für  $[0 \leq x \leq l/2]$

$$w(x) = \frac{Q\lambda}{k} \cdot \frac{1}{\cos \lambda l + \text{Ch}\lambda l} \left[ (\alpha + \beta) \cos \lambda x \text{Sh}\lambda x - (\alpha - \beta) \sin \lambda x \text{Ch}\lambda x \right] \quad (\text{A39})$$

mit

$$\alpha = \sin\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \text{Sh}\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \quad \text{und} \quad \beta = \cos\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \text{Ch}\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \quad (\text{A40})$$

Die Durchbiegung in Feldmitte  $f=w(0)$  beträgt

$$f = \frac{Q\lambda}{2k} \cdot \frac{\text{Sh}(\lambda l) - \sin(\lambda l)}{\text{Ch}(\lambda l) + \cos(\lambda l)} \quad (\text{A41})$$

für das Biegemoment folgt mit (A3)<sub>1</sub> und (A5)<sub>1</sub>

$$M(x) = \frac{Q}{2\lambda} \cdot \frac{1}{\cos \lambda l + \text{Ch}\lambda l} \left[ (\alpha + \beta) \sin \lambda x \text{Ch}\lambda x - (\alpha - \beta) \cos \lambda x \text{Sh}\lambda x \right] \quad (\text{A42})$$

und für die Querkraft ergibt sich

$$V(x) = Q \cdot \frac{1}{\cos \lambda l + \text{Ch}\lambda l} \left[ \beta \cos \lambda x \text{Ch}\lambda x - \alpha \sin \lambda x \text{Sh}\lambda x \right] \quad (\text{A43})$$

## Anhang B – Fließbedingungen für drei Bewehrungslagen

Beim mit Bewehrungslagen in  $x$ -,  $n$ - und  $m$ -Richtung versehenen Beton im ebenen Spannungszustand ergeben sich mit

$$z_x = \rho_x f_{syx}, \quad z_n = \rho_n f_{syn} \quad \text{und} \quad z_m = \rho_m f_{sym} \quad (\text{B1})$$

und den Winkeln  $\psi_n$  und  $\psi_m$ , zwischen der  $x$ - und  $n$ - bzw.  $m$ -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn;  $0 < \psi_n, \psi_m < \pi$ ) die folgenden Fließbedingungen der 15 Fließregime

$$Y_1 = (\tau_{xy} - z_n \sin \psi_n \cos \psi_n - z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)^2 - \dots \\ (z_x + z_n \cos^2 \psi_n + z_m \cos^2 \psi_m - \sigma_x) \cdot (z_n \sin^2 \psi_n + z_m \sin^2 \psi_m - \sigma_y) = 0 \quad (\text{B2})$$

$$Y_2 = (\tau_{xy} - z_n \sin \psi_n \cos \psi_n - z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)^2 - \dots \\ (f_c - z_n \sin^2 \psi_n - z_m \sin^2 \psi_m + \sigma_y) \cdot (z_m \sin^2 \psi_n + z_n \sin^2 \psi_m - \sigma_y) = 0 \quad (\text{B3})$$

$$Y_3 = \left[ (\tau_{xy} - z_n \sin \psi_n \cos \psi_n)(1 + \cot^2 \psi_m) - \cot \psi_m (\sigma_x + \sigma_y + f_c - z_x - z_n) \right]^2 - \dots \\ \left[ \sigma_x + f_c - z_x - z_n \sin^2 \psi_n (\cot^2 \psi_n - \cot^2 \psi_m) - \sigma_y \cot^2 \psi_m \right] \cdot \dots \\ \left[ (f_c + \sigma_y) \cot^2 \psi_m - \sigma_x + z_x + z_n \sin^2 \psi_n (\cot^2 \psi_n - \cot^2 \psi_m) \right] = 0 \quad (\text{B4})$$

$$Y_4 = \left[ (\tau_{xy} - z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)(1 + \cot^2 \psi_n) - \cot \psi_n (\sigma_x + \sigma_y + f_c - z_x - z_m) \right]^2 - \dots \\ \left[ \sigma_x + f_c - z_x - z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) - \sigma_y \cot^2 \psi_n \right] \cdot \dots \\ \left[ (f_c + \sigma_y) \cot^2 \psi_n - \sigma_x + z_x + z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) \right] = 0 \quad (\text{B5})$$

$$Y_5 = (\tau_{xy} - z_n \sin \psi_n \cos \psi_n + z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)^2 - \dots \\ (f_c - z_n \sin^2 \psi_n + z_m \sin^2 \psi_m + \sigma_y) \cdot (z_n \sin^2 \psi_n - z_m \sin^2 \psi_m - \sigma_y) = 0 \quad (\text{B6})$$

$$Y_6 = \left[ (\tau_{xy} - z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)(1 + \cot^2 \psi_n) - \cot \psi_n (\sigma_x + \sigma_y + f_c + z_x - z_n) \right]^2 - \dots \\ \left[ \sigma_x + f_c + z_x - z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) - \sigma_y \cot^2 \psi_n \right] \cdot \dots \\ \left[ (f_c + \sigma_y) \cot^2 \psi_n - \sigma_x - z_x + z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) \right] = 0 \quad (\text{B7})$$

$$Y_7 = \left[ (\tau_{xy} - \cot \psi_m (f_c / 2 + \sigma_y)) \right]^2 - \left[ f_c / (2 \sin \psi_m) + z_n \sin^2 \psi_n (\cot \psi_n - \cot \psi_m) \right]^2 = 0 \quad (\text{B8})$$

$$Y_8 = \left[ \tau_{xy} (\cot \psi_m - \cot \psi_n) + \sigma_y \cot^2 \psi_n - \sigma_x - f_c / 2 (\cot \psi_n \cot \psi_m + 1) \right]^2 - \dots \\ (z_x + f_c / (2 \sin \psi_n \sin \psi_m))^2 = 0 \quad (\text{B9})$$

$$Y_9 = \left[ (\tau_{xy} - \cot \psi_n (f_c / 2 + \sigma_y)) \right]^2 - \left[ f_c / (2 \sin \psi_n) + z_m \sin^2 \psi_m (\cot \psi_m - \cot \psi_n) \right]^2 = 0 \quad (\text{B10})$$

$$Y_{10} = \left[ (\tau_{xy} + z_m \sin \psi_n \cos \psi_n)(1 + \cot^2 \psi_n) - \cot \psi_n (\sigma_x + \sigma_y + f_c - z_x + z_m) \right]^2 - \dots$$

$$\left[ \sigma_x + f_c - z_x + z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) - \sigma_y \cot^2 \psi_n \right] \cdot \dots \quad (B11)$$

$$\left[ (f_c + \sigma_y) \cot^2 \psi_n - \sigma_x + z_x - z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) \right] = 0$$

$$Y_{11} = (\tau_{xy} + z_n \sin \psi_n \cos \psi_n - z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)^2 - \dots \quad (B12)$$

$$(f_c + z_n \sin^2 \psi_n - z_m \sin^2 \psi_m + \sigma_y) \cdot (z_m \sin^2 \psi_m - z_n \sin^2 \psi_n - \sigma_y) = 0$$

$$Y_{12} = \left[ (\tau_{xy} + z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)(1 + \cot^2 \psi_n) - \cot \psi_n (\sigma_x + \sigma_y + f_c + z_x + z_m) \right]^2 - \dots$$

$$\left[ \sigma_x + f_c + z_x + z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) - \sigma_y \cot^2 \psi_n \right] \cdot \dots \quad (B13)$$

$$\left[ (f_c + \sigma_y) \cot^2 \psi_n - \sigma_x - z_x - z_m \sin^2 \psi_m (\cot^2 \psi_m - \cot^2 \psi_n) \right] = 0$$

$$Y_{13} = \left[ (\tau_{xy} + z_n \sin \psi_n \cos \psi_n)(1 + \cot^2 \psi_m) - \cot \psi_m (\sigma_x + \sigma_y + f_c + z_x + z_n) \right]^2 - \dots$$

$$\left[ \sigma_x + f_c + z_x - z_n \sin^2 \psi_n (\cot^2 \psi_n - \cot^2 \psi_m) - \sigma_y \cot^2 \psi_m \right] \cdot \dots \quad (B14)$$

$$\left[ (f_c + \sigma_y) \cot^2 \psi_m - \sigma_x - z_x - z_n \sin^2 \psi_n (\cot^2 \psi_n - \cot^2 \psi_m) \right] = 0$$

$$Y_{14} = (\tau_{xy} + z_n \sin \psi_n \cos \psi_n + z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)^2 + \dots \quad (B15)$$

$$(f_c + z_n \sin^2 \psi_n + z_m \sin^2 \psi_m + \sigma_y) \cdot (z_n \sin^2 \psi_n + z_m \sin^2 \psi_m + \sigma_y) = 0$$

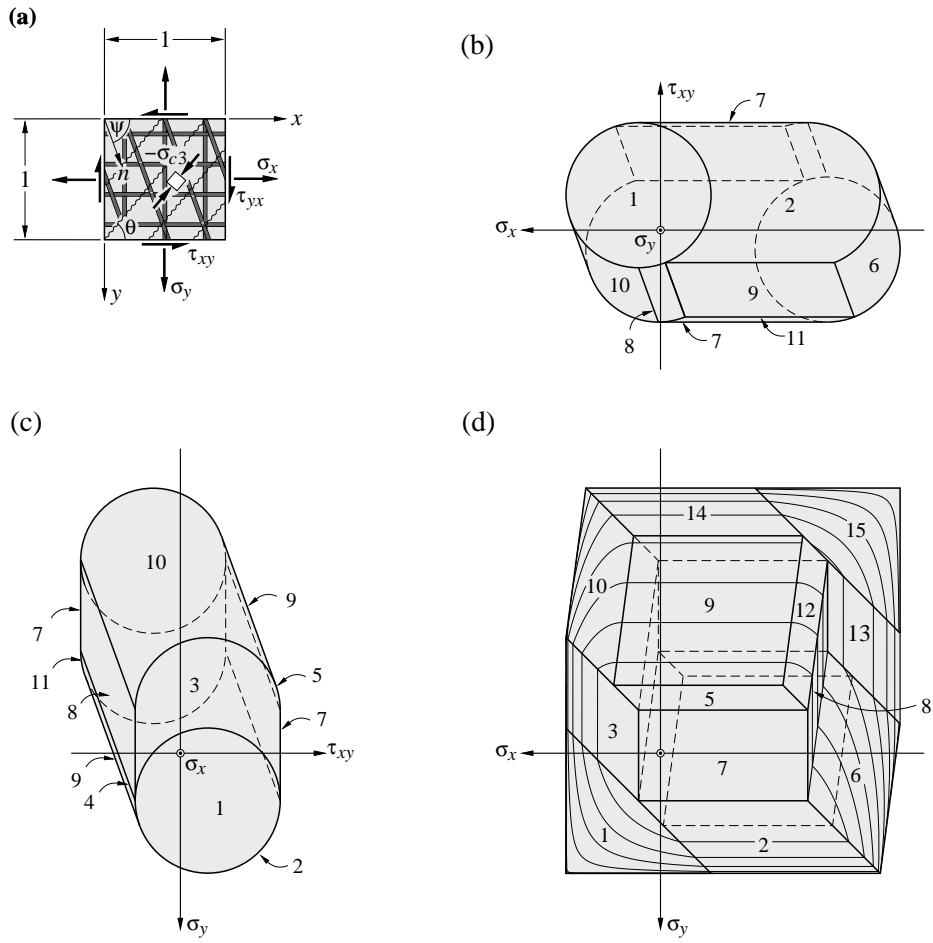
$$Y_{15} = (\tau_{xy} + z_n \sin \psi_n \cos \psi_n + z_m \sin \psi_m \cos \psi_m)^2 - \dots \quad (B16)$$

$$(f_c + z_n \cos^2 \psi_n + z_m \cos^2 \psi_m + \sigma_x) \cdot (f_c + z_n \sin^2 \psi_n + z_m \sin^2 \psi_m + \sigma_y) = 0$$

Die Spannungen an der Fließgrenze, welche die einzelnen Fließregime charakterisieren, können der Tab. B1 entnommen werden. Bild B1 zeigt die aus 15 Abschnitten zusammengesetzte Fließfläche bei dem durch eine dritte Bewehrungslage ergänzten orthogonal bewehrten Stahlbeton.

Regime		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Beton	$-\sigma_{c3}$	a	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$	$f_c$
	$\sigma_{c1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a
Bewehrung	$\sigma_{sx}$	$f_y$	a	$f_y$	$f_y$	a	$-f_y$	a	$\pm f_y$	a	$f_y$	a	$-f_y$	$-f_y$	a	$-f_y$
	$\sigma_{sn}$	$f_y$	$f_y$	$f_y$	a	$f_y$	a	$\pm f_y$	a	a	a	$-f_y$	a	$-f_y$	$-f_y$	$-f_y$
	$\sigma_{sy}$	$f_y$	$f_y$	a	$f_y$	$-f_y$	$f_y$	a	a	$\pm f_y$	$-f_y$	$f_y$	$-f_y$	a	$-f_y$	$-f_y$

**Tab. B1** – Beton- und Bewehrungsspannungen der einzelnen Regime (a: Spannung im aplastischen Bereich)



**Bild B1** – Fließfläche bei drei Bewehrungslagen: (a) Bezeichnungen; (b) Ansicht; (c) Seitenansicht; (d) Grundriss.



## Anhang C – Fließflächenabschnitte bei zwei schiefen Bewehrungslagen

Nachfolgend werden die einzelnen Fließregime beschrieben. Sämtliche Fließflächenabschnitte sind Regelflächen, welche durch eine quadratische Form

$$\Gamma(x_k) = a_{kj}x_kx_j + b_kx_k + c = 0 \quad [a_{kj} = a_{jk}] \quad (C1)$$

beschrieben werden, wobei  $x_k$  drei orthogonale Koordinatenrichtungen bezeichnet. Deren Hauptachsen  $\xi_m = [x, y, z]$  sind durch die orthonormierten Eigenvektoren  $e_{xi}$ ,  $e_{yi}$  und  $e_{zi}$  der symmetrischen Koeffizientenmatrizen  $a_{kj}$  bestimmt. Unter Verwendung der Eigenwerte  $\mu_m$  und der entsprechenden Eigenvektoren der symmetrischen Koeffizientenmatrix  $a_{kj}$  lässt sich (C1) in die Form

$$\Gamma(\xi_m) = \mu_m \xi_m + d = 0 \quad (C2)$$

überführen. Wird (C2) für  $d \neq 0$  durch  $d$  geteilt, resultiert die Normalform von (C1); für  $d=0$  ist (C2) bereits die Normalform von (C1).

### Regime 1

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi \\ \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi \\ \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	$e_{xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 1, 0], \quad e_{yi} = [0, 0, 1], \quad e_{zi} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0]$
Normalform		$\frac{x^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0$
Fläche		elliptischer Kegel

### Regime 2

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - f_c / 2 \\ \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	$e_{xi} = [0, 1, 0], \quad e_{yi} = [0, 0, 1], \quad e_{zi} = [1, 0, 0]$
Normalform		$\frac{4x^2}{f_c^2} + \frac{4y^2}{f_c^2} = 1$
Fläche		Kreiszyylinder mit Radius $r = f_c / 2$

**Regime 3**

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi - f_c / 2 \\ \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - f_c / 2 \\ \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	$e_{xi} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \sin \psi \cos \psi}} [-\sin \psi, -\cos \psi, \cos \psi + \sin \psi]$ $e_{yi} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \sin \psi \cos \psi}} [-\sin \psi, \cos \psi, \cos \psi - \sin \psi]$ $e_{zi} = \frac{1}{\sqrt{\cos^4 \psi + \sin^2 \psi}} [\cos^2 \psi, \sin^2 \psi, \sin \psi \cos \psi]$
Normalform		$x^2 \frac{4(1 + \sin \psi \cos \psi)}{f_c^2} + y^2 \frac{4(1 - \sin \psi \cos \psi)}{f_c^2} = 1$
Fläche		elliptischer Zylinder mit den Halbachsen $a_x = \frac{f_c}{2\sqrt{1 + \sin \psi \cos \psi}} \text{ und } a_y = \frac{f_c}{2\sqrt{1 - \sin \psi \cos \psi}}$

**Regime 4**

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_c / 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	$e_{xi} = \frac{1}{\sin \psi} [0, -\sin \psi \cos \psi, \sin^2 \psi], \quad e_{yi} = [0, 1, 0],$ $e_{zi} = \frac{1}{\sin \psi} [0, \sin^2 \psi, \sin \psi \cos \psi]$
Normalform		$\frac{4x^2}{f_c^2} = 1$
Fläche		paralleles Ebenenpaar

**Regime 5**

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_x f_{syx} + \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi - f_c / 2 \\ \rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - f_c / 2 \\ \rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	identisch mit Regime 3
Normalform		identisch mit Regime 3
Fläche		identisch mit Regime 3

**Regime 6**

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - f_c / 2 \\ -\rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	identisch mit Regime 2
Normalform		identisch mit Regime 2
Fläche		identisch mit Regime 2

**Regime 7**

Hauptachsen	Ursprung	$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_x f_{syx} - \rho_n f_{syn} \cos^2 \psi - f_c \\ -\rho_n f_{syn} \sin^2 \psi - f_c \\ -\rho_n f_{syn} \sin \psi \cos \psi \end{bmatrix}$
	Basisvektoren	identisch mit Regime 1
Normalform		identisch mit Regime 1
Fläche		identisch mit Regime 1





## Anhang D – Kriechen und Schwinden des Stahlbetons im ebenen Spannungszustand

Wird der Beton gemäss Kapitel 3.3.6 als linear visko-elastischer alternder Werkstoff idealisiert, lauten dessen Werkstoffbeziehungen gemäss (3.32) unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingung (5.68)

$$\varepsilon_i(t) = f_{clij} E_c(t_0) \left[ J(t, t_0) \sigma_{c0i} + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_{ci}(\tau)}{\partial \tau} J(t, \tau) d\tau \right] + \varepsilon_{csi}(t) \quad (D1)$$

mit der Nachgiebigkeitsmatrix des ungerissenen Betons  $f_{clij} = c_{clij}^{-1}$ , wobei die zeitunabhängige Betonsteifigkeitsmatrix  $c_{clij}$  mit  $E_c = E_c(t_0)$  ermittelt wird.  $\sigma_{c0i}$  bezeichnet die Betonspannung im Alter  $t_0$  und lässt sich mit (5.57)<sub>1</sub> bestimmen. Durch Einsetzen der Werkstoffbeziehungen der Bewehrung (5.72) und des Betons (D1) in die Gleichgewichtsbeziehungen (5.71) resultiert

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) - \sigma_{pdi} - \Delta \sigma_{preli}(t) - (c_{sij} + c_{pij}) \varepsilon_{csj}(t) = \\ \left[ (c_{sik} + c_{pik}) f_{clkj} E_c(t_0) J(t, t_0) + \delta_{ij} \right] \sigma_{c0j} + \dots \\ \dots \int_{t_0}^t \left[ (c_{sik} + c_{pik}) f_{clkj} E_c(t_0) J(t, \tau) + \delta_{ij} \right] \frac{\partial \sigma_{cj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (D2)$$

ein System von drei nichtlinearen inhomogenen Volterra-Integralgleichungen für die unbekannte Betonspannung  $\sigma_i(t)$ . Multipliziert man (D2) mit  $c_{clik} f_{lkj} [1/E_c(t_0)]$ , resultiert

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ei}(t, t_0) = \left[ a_{ij} J(t, t_0) + \frac{1}{E_c(t_0)} (\delta_{ij} - a_{ij}) \right] \sigma_{c0j} + \dots \\ \dots \int_{t_0}^t \left[ a_{ij} J(t, \tau) + \frac{1}{E_c(t_0)} (\delta_{ij} - a_{ij}) \right] \frac{\partial \sigma_{cj}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (D3)$$

mit

$$a_{ij} = (c_{sik} + c_{pik}) f_{lkj} \quad (D4)$$

und den fiktiven elastischen Betonverzerrungen

$$\varepsilon_{ei}(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} c_{clik} f_{lkj} \left[ \sigma_j(t) - \sigma_{pdj} - \Delta \sigma_{prelj}(t) - (c_{sjl} + c_{pjl}) \varepsilon_{csl}(t) \right] \quad (D5)$$

Einführen der durch die linearen Transformationen

$$\varepsilon_{ei}(t, t_0) = b_{ij} \cdot \varepsilon_{ej}^*(t, t_0) \quad , \quad \sigma_{c0i} = b_{ij} \cdot \sigma_{c0j}^* \quad \text{und} \quad \sigma_{ci}(t) = b_{ij} \cdot \sigma_{cj}^*(t) \quad (D6)$$

definierten Vektoren  $\varepsilon_{ei}^*$ ,  $\sigma_{c0i}^*$  und  $\sigma_{ci}^*(t)$ , wobei sich  $b_{ij}$  aus den Eigenvektoren von  $a_{ij}$  zusammensetzt, und Multiplizieren von (D6) mit  $b_{ij}^{-1}$  liefert

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ei}^*(t, t_0) = & \left[ \Lambda_{ij} J(t, t_0) + \frac{1}{E_c(t_0)} (\delta_{ij} - \Lambda_{ij}) \right] \sigma_{c0j}^* + \dots \\ & \dots \int_{t_0}^t \left[ \Lambda_{ij} J(t, \tau) + \frac{1}{E_c(t_0)} (\delta_{ij} - \Lambda_{ij}) \right] \frac{\partial \sigma_{cj}^*(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (D7)$$

wobei  $\Lambda_{ij} = b_{ik}^{-1} a_{kl} b_{kj}$  eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von  $a_{ij}$  als Diagonalelementen ist. Somit ist das Gleichungssystem (D3) entkoppelt, und (D7) lässt sich wie folgt schreiben

$$\varepsilon_{eg}^*(t, t_0) = \left[ \lambda_g J(t, t_0) + \frac{1 - \lambda_g}{E_c(t_0)} \right] \sigma_{c0}^* + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_c^*(\tau)}{\partial \tau} \left[ \lambda_g J(t, \tau) + \frac{1 - \lambda_g}{E_c(t_0)} \right] d\tau \quad (D8)$$

$\lambda_g$  ( $g = 1, 2, 3$ ) bezeichnet die Eigenwerte von  $a_{ij}$ . Definiert man die ideelle Nachgiebigkeit<sup>1</sup>

$$J_{id}(t, t_0, \lambda) = \lambda J(t, t_0) + \frac{1 - \lambda}{E_c(t_0)} \quad (D9)$$

folgt aus (D8)

$$\varepsilon_{eg}^*(t, t_0) = J_{id}(t, t_0, \lambda_g) \sigma_{c0}^* + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_c^*(\tau)}{\partial \tau} J_{id}(t, \tau, \lambda_g) d\tau \quad (D10)$$

Aufgrund der Definition von  $a_{ij}$  ist  $0 \leq \lambda_k \leq 1$ . Wird keine Bewehrung eingelegt, verschwinden alle Eigenwerte. Bei einer bzw. zwei Bewehrungslagen verschwinden zwei bzw. ein Eigenwert; bei drei und mehr Bewehrungslagen sind alle Eigenwerte positiv. Analog zur Relaxationsfunktion  $R(t, t_0)$  lässt sich die ideelle Relaxationsfunktion  $R_{id}(t, t_0, \lambda)$  mit Hilfe der Beziehung

$$1 = R_{id}(t, t_0, \lambda_g) J_{id}(t, t_0, \lambda_g) + \int_{t_0}^t \frac{R_{id}(\tau, t_0, \lambda_g)}{\partial \tau} J_{id}(t, \tau, \lambda_g) d\tau \quad (D11)$$

numerisch aus der ideellen Nachgiebigkeitsfunktion  $J_{id}(t, t_0, \lambda)$  ermitteln. Mithin lassen sich die transformierten Betonspannungen mit

$$\sigma_{cg}^*(t) = R_{id}(t, t_0, \lambda_g) \varepsilon_{eg}^*(t_0, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \varepsilon_{eg}^*(\tau, t_0)}{\partial \tau} R_{id}(t, \tau, \lambda_g) d\tau \quad (D12)$$

bestimmen. Die gesuchten Betonspannungen folgen anschliessend aus (D6)<sub>3</sub>, die Verzerrungen aus (D1) und die Stahlspannungen durch Rückeinsetzen in die entsprechenden Werkstoffbeziehungen.

Wird anstelle von (D1) das Verfahren nach Trost (5.74) verwendet, resultiert beim analogen Vorgehen an Stelle von (D10)

---

<sup>1</sup> Chiorino, M.A., Creazza, G., Mola, F., and Napoli, P., "Analysis of Aging Viscoelastic Structures with n-Redundant Elastic Restraints", *Proceedings, Fourth RILEM International Symposium on Creep and Shrinkage of Concrete, 'Mathematical Modelling'*, Z.P. Bazant (ed.), Northwestern University, Evanston, 1986, pp. 623–644.

$$\varepsilon_{eg}^*(t, t_0) = J_{id}(t, t_0, \lambda_g) \sigma_{c0g}^* + J_{alt,id}(t, t_0, \lambda_g) (\sigma_{cg}^*(t) - \sigma_{c0g}^*) \quad (D13)$$

mit

$$J_{alt,id}(t, t_0, \lambda) = \lambda J_{alt}(t, t_0) + \frac{1 - \lambda}{E_c(t_0)} \quad (D14)$$

woraus die transformierten Betonspannungen direkt folgen

$$\sigma_{cg}^*(t) = \sigma_{c0g}^* + \frac{\varepsilon_{eg}^*(t, t_0) - J_{id}(t, t_0, \lambda_g) \sigma_{c0g}^*}{J_{alt,id}(t, t_0, \lambda_g)} \quad (D15)$$



## Literatur

- [1] Alvarez, M., *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 236 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1998, 182 pp.
- [2] Argyris, J.H., “Energy Theorems and Structural Analysis – A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations”, *Aircraft Engineering*, V. 26, 1954, pp. 347–356, 383–387, 394, V. 27, 1955, pp. 42–58, 80–94, 125–134, 145–158.
- [3] Attard, M.M., and Setunge, S., “Stress-Strain Relationship of Confined and Unconfined Concrete”, *ACI Materials Journal*, V. 93, No. 5, 1996, pp. 1–11.
- [4] Bachmann, H., *Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 13 (Dissertation), ETH Zürich, Juris, Zürich 1967, 188 pp.
- [5] Baumann, T., “Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken”, *Bauingenieur*, Jg. 47, H. 10, 1972, pp. 367–377.
- [6] Bažant, Z.P., “Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the ASCE, V. 102, No. EM2, 1976, pp. 331–344.
- [7] Bažant, Z.P., “Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method”, *ACI Journal Proceedings*, V. 69, No. 3, 1972, pp. 212–217.
- [8] Bažant, Z.P., and Gambarova, G.P., “Rough Cracks in Reinforced Concrete”, *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the ASCE, V. 106, No. ST4, 1980, pp. 819–842.
- [9] Bažant, Z.P., and Kim, S.-S., “Approximate Relaxation Function for Concrete”, *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the ASCE, V. 105, No. ST12, 1979, pp. 2695–2705.
- [10] Bažant, Z.P., and Wittmann, F.H. (ed.), *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982, 363 pp.
- [11] Bažant, Z.P., *Scaling of Structural Strength*, 2nd edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005, 327 pp.
- [12] Blaauwendraad, J., and Hoogenboom, P.C.J., “Stringer Panel Model for Structural Concrete Design”, *ACI Structural Journal*, V. 93, No. 3, 1996, pp. 295–305.
- [13] Bleich, H., “Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes”, *Der Bauingenieur*, Jg. 13, H. 19/20, 1932, pp. 261–267.
- [14] Bræstrup, M.W., “Dome Effect in RC Slabs: Rigid-Plastic Analysis”, *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the ASCE, V. 106, No. ST6, 1980, pp. 1237–1253.
- [15] Bræstrup, M.W., “Yield-line Theory and Limit Analysis of Plates and Slabs”, *Magazine of Concrete Research*, V. 22, No. 71, 1970, pp. 99–106.
- [16] Bræstrup, M.W., and Morley, C.T., “Dome Effect in RC Slabs: Elastic-Plastic Analysis”, *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the ASCE, V. 106, No. ST6, 1980, pp. 1255–1262.

- [17] *Brockhaus – Die Enzyklopädie: in 30 Bänden*, 21. Auflage, Online-Ausgabe, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, 2005.
- [18] Brøndum-Nielsen, T., “Optimum Design of Reinforced Concrete Shells and Slabs”, *Proceedings*, IASS Pacific Symposium on Hydromechanically Loaded Shells (Part I, Honolulu, 1971), University Press of Hawaii, 1971, pp. 190–200.
- [19] Burns, C., Seelhofer, H., and Marti, P., *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 134, No. 7, 2008, pp. 1262–1264. Diskussionsbeitrag zum Artikel: Gilbert, R.I., “Tension Stiffening in Lightly Reinforced Concrete Slabs”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 133, No. 6, 2007, pp. 899–903.
- [20] Burtscher, S.L., and Kollegger, J., “Size-Effect Experiments on Concrete in Compression”, *Structural Concrete*, Journal of the fib, V. 4, No. 4, 2003, pp. 163–174.
- [21] Busch, D., Harte, R., Krätzig, W.B., und Montag, U., “Der 200 m Naturzugkühlturm Niederaussen aus Hochleistungsbeton”, *Beton- und Stahlbetonbau*, Jg. 96, H. 12, 2001, pp. 782–791.
- [22] Busch, D., Harte, R., Krätzig, W.B., and Montag, U., “New Natural Draft Cooling Tower of 200 m of Height”, *Engineering Structures*, V. 24, No. 12, 2002, pp. 1509–1521.
- [23] CEB Comité Euro-International du Béton, *CEB-FIP Model Code 1990*, Bulletin d’Information, No. 213/ 214, Lausanne, 1993, 437 pp.
- [24] Chen, W.F., “Double Punch Test for Tensile Strength of Concrete”, *ACI Journal Proceedings*, V. 67, No. 12, 1970, pp. 993–995.
- [25] Chen, W.F., and Drucker, D.C., “Bearing Capacity of Concrete Blocks or Rock”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the ASCE, V. 95, No. 4, 1969, pp. 955–978.
- [26] Chen, W.F., and Han, D.J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer, New York, 1988, 606 pp.
- [27] Chen, W.F., *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Developments in Geotechnical Engineering 7, Elsevier, Amsterdam, 1975, 638 pp.
- [28] Chiorino, M.A., “A Rational Approach to the Analysis of Structural Effects due to Creep”, *ACI Special Publication SP-227*, ‘Shrinkage and Creep of Concrete’, Gardner, J.N., and Weiss, J., (eds.), Michigan, 2005, pp. 107–142.
- [29] Clark, L.A., “The Provision of Tension and Compression Reinforcement to Resist In-plane Forces”, *Magazine of Concrete Research*, V. 28, No. 94, 1976, pp. 3–12.
- [30] Collins, M.P., “Investigating Stress-Strain Characteristics of Diagonally Cracked Concrete”, *Final Report*, IABSE Colloquium ‘Plasticity in Reinforced Concrete’, Copenhagen 1979, IABSE, V. 29, Zurich, 1979, pp. 27–34.
- [31] Cookson, P.J., “A General Yield Criterion for Orthogonally Reinforced Concrete Slab Elements”, *Final Report*, IABSE-Colloquium ‘Plasticity in Reinforced Concrete’, Copenhagen, IABSE V. 29, Zurich, 1979, 43–50.
- [32] Cookson, P.J., “Generalized Yield Lines in Reinforced Concrete Slabs”, *Journal of Structural Mechanics*, V. 7, No. 1, 1979, pp. 62–82.
- [33] Courant, R., und Hilbert, D., *Methoden der Mathematischen Physik*, 4. Auflage, Springer, Berlin, 1993, 545 pp.
- [34] Craemer, H., “Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente im Eisenbetonbau.”, *Beton und Eisen*, Jg. 28, H. 13 und 14, 1929, pp. 254–257, 269–272.

- [35] Dahl, K.K.B., *A Constitutive Model for Normal and High Strength Concrete*, Aftelingen for Bærende Konstruktioner, Serie R No. 287, Technical University Denmark, Lyngby, 1992, 56 pp.
- [36] Dahl, K.K.B., *A Failure Criterion for Normal and High Strength Concrete*, Aftelingen for Bærende Konstruktioner, Serie R No. 286, Technical University Denmark, Lyngby, 1992, 62 pp.
- [37] Drucker, D.C., Greenberg, H.J., and Prager, W., “The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain”, *Journal of Applied Mechanics*, V. 18, 1951, pp. 371–378.
- [38] Drucker, D.C., Prager, W., and Greenberg, H.J., “Extended Limit Design Theorems for Continuous Media”, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, V. 9, No. 4, 1952, pp. 18–28.
- [39] Ehlers, G., “Ein neues Konstruktionsprinzip.”, *Der Bauingenieur*, Jg. 11, H. 8, 1930, pp. 125–132.
- [40] Foster, S.J., and Marti, P., “FE Modelling of RC Membranes Using the CMM Formulation”, *Proceedings, 5th World Congress on Computational Mechanics (WCCM)*, July 17–20, 2002, Vienna, Austria, Mang, H.A., Rammersdorfer, F.G., and Eberhardsteiner, J. (eds.).
- [41] Fréney, J.W., “Theory and Experiments on the Behaviour of Cracks in Concrete Subjected to Sustained Shear Load”, *Heron*, V. 35, No. 1, 1990, 80 pp.
- [42] Fürst, A., und Marti, P., *Versuche an Trägern mit Unterspannung aus vorfabrizierten, vorgespannten Betonzuggliedern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 243, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1999, 108 pp.
- [43] Fürst, A., *Vorgespannte Betonzugglieder im Brückenbau*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 267 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2001, 124 pp.
- [44] Gupta, A.K., “Combined Membrane and Flexural Reinforcement in Plates and Shells”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 112, No. 3, 1986, pp. 550–557.
- [45] Gvozdev, A.A., “Sur le calcul par la méthode des lignes de rupture des dalles en béton armé pour une disposition quelconque des armatures”, *CEB Bulletin d’Information*, No. 56, Paris, 1966, pp. 152–155.
- [46] Gvozdev, A.A., “The Determination of the Value of the Collapse Load for Statically Indeterminate Systems Undergoing Plastic Deformation”, *International Journal of Mechanical Sciences*, V. 1, No. 1, 1960, pp. 322–335. (Englische Übersetzung von Haythornthwaite, R.M.; ursprünglich in *Proceedings ‘Conference on Plastic Deformations’*, 1936, Akademiia Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 1938, pp. 19–38 veröffentlicht)
- [47] Hand, F.R., Pecknold, D.A., and Schnobrich, W.C., “Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells”, *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the ASCE, V. 99, No. ST7, 1973, pp. 1491–1505.
- [48] Hill, R., “On the State of Stress in a Rigid-Plastic Body at the Yield Point”, *The Philosophical Magazine*, Series 7, V. 42, No. 331, 1951, pp. 868–875.
- [49] Hillerborg, A., “Armering av elasticitetsteoretiskt beräknade platter, skivor och skal”, *Betong*, Årg. 38, Nr. 2, 1953, pp. 101–109.
- [50] Hofmann, H., “Kraftwerk Birsfelden”, *Das Werk*, V. 44, 1957, pp. 38–48.
- [51] Hussein, A., and Marzouk, H., “Behavior of High-Strength Concrete Under Biaxial Stresses”, *ACI Materials Journal*, V. 97, No. 1, 2000, pp. 27–36.



- [52] Hussein, A., *Behaviour of High-Strength Concrete under Biaxial Loading*, PhD Thesis, Faculty of Engineering and Applied Science, Memorial University of Newfoundland, St. Johns, 1998, 245 pp.
- [53] Imran, I., and Pantazopoulou, S.J., “Experimental Study of Plain Concrete under Triaxial Stress”, *ACI Materials Journal*, V. 93, No. 6, 1996, pp. 589–601.
- [54] Ingerslev, A., “The Strength of Rectangular Slabs”, *Journal of the Institution of Structural Engineers*, V. 1, No. 1, 1923, pp. 3–14.
- [55] Jäger, T., und Marti, P., *Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten*, Institut für Baustatik und Konstruktion, Bericht Nr. 294, ETH Zürich, vdf-Hochschulverlag, Zürich, 2005, 362 pp.
- [56] Jäger, T., *Zum Querkraftwiderstand und Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 305 (Dissertation), ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, 2007, 114 pp.
- [57] Janas, M., and Sawczuk, A., “Influence of Position of Lateral Restraints on Carrying Capacity of Plates”, *CEB Bulletin d’Information*, No. 58, 1966, pp. 164–189.
- [58] Jansen, D.C., and Shah, S.P., “Effect of Length on Compressive Strain Softening on Concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, V. 123, No. 1, 1997, pp. 25–35.
- [59] Jensen, B.C., “Lines of Discontinuity for Displacements in the Theory of Plasticity of Plain and Reinforced Concrete”, *Magazine of Concrete Research*, V. 27, No. 92, 1975, pp. 143–150.
- [60] Johansen, K.W., “Bruchmomente der kreuzweise bewehrten Platten”, *IVBH Abhandlungen*, V. 1, 1932, pp. 277–296.
- [61] Johansen, K.W., *Brudlinieteorier*, Doctoral Thesis, Technical University Denmark, 1943, 191 pp. (Englische Übersetzung: *Yield-Line Theory*, Cement and Concrete Association, London, 1962, 181 pp.)
- [62] Kaliszky, S., *Plastizitätslehre – Theorie und technische Anwendung*, (Übersetzung aus dem Ungarischen), Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure (VDI), Düsseldorf, 1984, 495 pp.
- [63] Kaufmann, W., and Marti, P., “Structural Concrete: Cracked Membrane Model”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 124, No. 12, 1998, pp. 1467–1475.
- [64] Kaufmann, W., *Strength and Deformation of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 234 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1998, 147 pp.
- [65] Kemp, K.O., “A Lower Bound Solution to the Collapse of an Orthotropically Reinforced Slab on Simple Supports”, *Magazine of Concrete Research*, V. 14, No. 41, 1962, pp. 79–84.
- [66] Kemp, K.O., “The Yield Criterion for Orthotropically Reinforced Concrete Slabs”, *International Journal of Mechanical Sciences*, V. 7, No. 11, 1965, pp. 737–746.
- [67] Kenel, A., Nellen, P., Frank, A., and Marti, P., “Reinforcing Steel Strains Measured by Bragg Grating Sensors”, *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, V. 17, No. 4, 2005, pp. 423–431.
- [68] Kenel, A., und Marti, P., *Faseroptische Dehnungsmessung an einbetonierten Bewehrungsstäben*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 271, ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, 2001, 93 pp.
- [69] Khalifa, J., *Limit Analysis and Design of Reinforced Concrete Shell Elements*, PhD Thesis, University of Toronto, Toronto, 1986, 314 pp.

- [70] Kirschner, U., *Investigating the Behaviour of Reinforced Concrete Shell Elements*, PhD Thesis, University of Toronto, Toronto, 1986, 83 pp.
- [71] Koiter, W.T., “Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with a Singular Yield Surface”, *Quarterly of Applied Mathematics*, V. 11, No. 3, 1953, pp. 350–354.
- [72] Kollegger, J., “Algorithmus zur Bemessung von Flächentragwerkelementen unter Normalkraft- und Momentenbeanspruchung”, *Beton- und Stahlbetonbau*, V. 86, No. 5, 1991, pp. 114–119.
- [73] Kollegger, J., und Mehlhorn, G., *Experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Druckfestigkeit des gerissenen Stahlbetons bei einer Querkzugbeanspruchung*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 413, Beuth, Berlin, 1990, 132 pp.
- [74] Krätzig, W.B., und Başar, Y., *Tragwerke Band 3 – Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*, Springer, Berlin, 1997, 402 pp.
- [75] Kupfer, H., “Erweiterung der Mörsch’schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsenergie”, *CEB Bulletin d’Information*, No. 40, 1964, pp. 44–57.
- [76] Kupfer, H., *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1973, pp. 1–105.
- [77] Kuuskoski, V., *Ueber die Haftung zwischen Beton und Stahl*, Dissertation, Technische Hochschule Helsinki, Valtioneuvoston kirjapaino, Helsinki, 1950, 203 pp.
- [78] Kuyt, B., “Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken”, *Beton- und Stahlbetonbau*, Jg. 59, H. 7, 1964, pp. 158–163.
- [79] Laffranchi, M., *Zur Konzeption gekrümmter Brücken*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht No. 245 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1999, 124 pp.
- [80] Lampert, P., *Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 26 (Dissertation), ETH Zürich, Zürich, 1970, 189 pp.
- [81] Leitz, H., “Die Drillungsmomente bei kreuzweise bewehrten Platten”, *Die Bautechnik*, Jg. 3, H. 51, 1925, pp. 717–719.
- [82] Leitz, H., “Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegezustand”, *Die Bautechnik*, Jg. 1, H. 16/17, 1923, pp. 155–157, 163–167.
- [83] Lertsrisakulrat, T., Watanabe, K., Matsuo, M., and Niwa, J., “Experimental Study on Parameters in Localization of Concrete Subjected to Compression”, *Journal of Materials, Concrete Structures, Pavements*, JSCE, V. 50, No. 669, 2001, pp. 309–321.
- [84] Lundgren, H., *Cylindrical Shells: Volume 1 – Cylindrical Roofs*, Danish Technical Press, Institution of Danish Civil Engineers, Copenhagen, 1949, 360 pp.
- [85] Maekawa, K., Pimanmas, A., and Okamura, H., *Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete*, Spon Press, London, 2003, 721 pp.
- [86] Maier, J., *Tragfähigkeit von Stahlbetonscheiben*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 169 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1988, 93 pp.
- [87] Maillart, R., “Aktuelle Fragen des Eisenbetonbaus”, *Schweizerische Bauzeitung*, Bd. 111, Nr. 1, 1938, pp. 1–5.

- [88] Marti P., *Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 104 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1980, 176 pp.
- [89] Marti, P., “Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design”, *ACI Structural Journal*, V. 82, No. 1, 1985, pp. 46–56.
- [90] Marti, P., “Design of Concrete Slabs for Transverse Shear”, *ACI Structural Journal*, V. 87, No. 2, 1990, pp. 180–190.
- [91] Marti, P., “Dimensioning and Detailing”, *Colloquium Report*, IABSE Colloquium ‘Structural Concrete’, Stuttgart 1991, IABSE V. 62, 1991, pp. 411–443.
- [92] Marti, P., “How to treat Shear in Structural Concrete”, *ACI Structural Journal*, V. 96, No. 3, 1999, pp. 408–414.
- [93] Marti, P., “Kraftfluss in Stahlbetonplatten”, *Beton- und Stahlbetonbau*, Jg. 98, H. 2, 2003, pp. 85–93.
- [94] Marti, P., “Modelling of Structural Concrete”, *Colloquium Report*, fib Symposium ‘Keep Concrete Attractive’, Budapest, May 23–25, 2005, pp. 471–481.
- [95] Marti, P., “Strength and Deformations of Reinforced Concrete Members under Torsion and Combined Actions”, *CEB Bulletin d'Information*, No. 146, ‘Shear, Torsion and Punching’, 1982, pp. 97–138.
- [96] Marti, P., “Über die Bedeutung von Gleichgewichtsbetrachtungen im Massivbau”, *Schweizer Ingenieur und Architekt*, Jg. 102, Nr. 7, 1983, pp. 184–185.
- [97] Marti, P., “Verbundverhalten von Spanngliedern mit Kunststoff-Hüllrohren”, *Festschrift Prof. Jörg Schneider zum 60. Geburtstag*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Publikation SP-001, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 143–150.
- [98] Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., and Sigrist, V., “Tension Chord Model for Structural Concrete”, *Structural Engineering International (SEI)*, IABSE, V. 8, No. 4, 1998, pp. 287–298.
- [99] Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., und Sigrist, V., *Tragverhalten von Stahlbeton*, IBK Publikation SP-008, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1999, 301 pp.
- [100] Marti, P., and Meyboom, J., “Response of Prestressed Concrete Elements to In-Plane Shear Forces”, *ACI Structural Journal*, V. 89, No. 5, 1992, pp. 503–513.
- [101] Marti, P., Leesti, P., and Khalifa, W.U., “Torsion Tests of Reinforced Concrete Slab Elements”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 113, No. 5, 1987, pp. 994–1011.
- [102] Marti, P., Mojsilović, N., and Foster, S.J., “Bemessung orthogonal bewehrter Betonkörper (Dimensioning of Orthogonally Reinforced Concrete Solids)”, *Betonbau in der Schweiz (Structural Concrete in Switzerland)*, The first fib-Congress, Schweizer Gruppe des fib, Osaka, Japan, Oct. 13–19, 2002, pp. 18–23.
- [103] Marti, P., Sigrist, V., and Alvarez, M., “Mindestbewehrung von Betonbauten”, *Forschungsbericht*, Bundesamt für Strassen, Forschungsauftrag Nr. 82/95, 1997, 55 pp.
- [104] Marti, P., Ullner, R., Faller, M., Czaderski, C., and Motavalli, M., “Temporary Corrosion Protection and Bond of Prestressing Steel”, *ACI Structural Journal*, V. 105, No. 1, 2008, 51–59.
- [105] Marti, P., und Thürlimann, B., “Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit”, *Beton- und Stahlbetonbau*, Jg. 72, H. 1, 1977, pp. 7–12.

- [106] Melan, E., “Der Spannungszustand eines ‘Mises-Hencky’schen’ Kontinuums bei veränderlicher Belastung”, *Sitzungsberichte*, Akademie der Wissenschaften in Wien – Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. IIa, Bd. 147, H. 1/2, 1938, pp. 73–87.
- [107] Menn, C., *Stahlbetonbrücken*, 1. Auflage, Springer, Berlin, 1986, 533 pp.
- [108] Meyboom, J., and Marti, P., *Experimental Investigation of Shear Diaphragms in Reinforced Concrete Slabs*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 263, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2001, 165 pp.
- [109] Meyboom, J., *Limit Analysis for Concrete Slabs*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht No. 276 (Dissertation), ETH Zürich, vdf-Hochschulverlag, Zürich, 2002, 116 pp.
- [110] Millard, S.G., and Johnson, R.P., “Shear Transfer across Cracks in Reinforced Concrete due to Aggregate Interlock and to Dowel Action”, *Magazine of Concrete Research*, V. 36, No. 126, 1984, pp. 9–21.
- [111] Millard, S.G., and Johnson, R.P., “Shear Transfer in Cracked Reinforced Concrete”, *Magazine of Concrete Research*, V. 37, No. 130, 1985, pp. 3–15.
- [112] Mitchell, D., and Collins, M. P., “Diagonal Compression Field Theory – A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion”, *ACI Structural Journal*, V. 71, No. 8, 1974, pp. 396–408.
- [113] Morley, C.T., “On the Yield Criterion of an Orthogonally Reinforced Concrete Slab Element”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, V. 14, No. 1, 1966, pp. 33–47.
- [114] Müller, P. *Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 83 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1978, 160 pp.
- [115] Muttoni, A., *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 176 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1990, 158 pp.
- [116] Muttoni, A., Schwartz, J. und Thürlimann, B., *Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern*, Birkhäuser, Basel, 1996, 145 pp.
- [117] Nakamura, H., and Higai, T., “Compressive Fracture Energy and Fracture Zone Length of Concrete”, *Modeling of Inelastic Behavior of RC Structures Under Seismic Loads*, Shing, P.B. (ed.), ASCE, 2001, pp. 471–487.
- [118] Neville, A.M., *Properties of Concrete*, 4th edition, Pearson, Higher Education, 1996, 864 pp.
- [119] Nielsen, J., “Vridningsarmerede Jernbetonplader”, *Nordisk Betong*, Årg. 1, Nr. 1, 1957, pp. 57–76.
- [120] Nielsen, M.P., “Yield Condition for Reinforced Concrete Shells in the Membrane State”, *Proceedings IASS Symposium ‘Non-Classical Shell Problems’*, Warschau, 1963, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964, pp. 1030–1040.
- [121] Nielsen, M.P., *Limit Analysis and Concrete Plasticity*, 2nd edition, CRC Press, New York, 1999, 908 pp.
- [122] Nielsen, M.P., *Limit Analysis of Concrete Slabs*, Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No. 26, Danish Contribution No. 22, Copenhagen, 1964, 167 pp.
- [123] Nielsen, M.P., *On the Strength of Reinforced Concrete Discs*, The Danish Academy of Technical Sciences, Copenhagen, 1969, 261 pp.

- [124] *Norm SIA 260 – Grundlagen der Projektierung von Tragwerken*, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein (SIA), Zürich, 2003, 44 pp.
- [125] Ottosen, N.S., “A Failure Criterion for Concrete”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the ASCE, V. 103, No. EM4, 1977, pp. 527–535.
- [126] Poincaré, H., *Science et Méthode*, Flammarion, E., (ed.), Bibliothèque de Philosophie Scientifique, Paris, 1920, 314 pp.
- [127] Prager, W., *Probleme der Plastizitätstheorie*, Birkhäuser, Basel, 1955, 100 pp.
- [128] Pruijssers, A.F., “Theoretical and Experimental Analysis of the Behaviour of Cracked Concrete under Monotonic and Cyclic Shear Load”, *Heron*, V. 33, No. 4, 1988, 72 pp.
- [129] Rajendran, S., and Morley, C.T., “A General Yield Criterion for Reinforced Concrete Slab Elements”, *Magazine of Concrete Research*, V. 26, No. 89, 1974, pp. 212–220.
- [130] Raphael, J.M., “Tensile Strength of Concrete”, *ACI Journal Proceedings*, V. 81, No. 3, 1984, pp. 158–165.
- [131] Rehm, G., *Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138, Ernst und Sohn, Berlin, 1961, 59 pp.
- [132] Richart, F.E., Brandtæg, A., and Brown, R.L., *A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses*, Engineering Experiment Station, Bulletin No. 185, University of Illinois Bulletin, V. 26, No. 12, 1928, 102 pp.
- [133] Ritz, W., “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, V. 135, Berlin, 1909, pp. 1–61.
- [134] Rogge, A., *Materialverhalten von Beton unter mehrachsiger Beanspruchung*, Dissertation, Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, München, 2003, 200 pp.
- [135] Rosenblüth, E., “Shell Reinforcement Not Parallel to Principal Stresses”, *ACI Journal Proceedings*, V. 52, No. 9, 1955, pp. 61–71.
- [136] Rüsç, H., “Research Towards a General Flexural Theory for Structural Concrete”, *ACI Journal Proceedings*, V. 57, No. 7, 1960, pp. 1–28
- [137] Rüsç, H., *Festigkeit und Verformung von unbewehrtem Beton unter konstanter Dauerlast: Versuchsergebnisse für zentrische und exzentrische Belastung*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 198, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1968, 86 pp.
- [138] Sargin, M., *Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete*, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo Ontario, 1971, 167 pp.
- [139] Sassone, M., and Chiorino, M.A., “Design Aids for the Evaluation of Creep Induced Structural Effects”, *ACI Special Publication SP-227, ‘Shrinkage and Creep of Concrete’*, Gardner, J.N., and Weiss, J., (eds.), Michigan, 2005, pp. 239–255.
- [140] Save, M., “A Consistent Limit-Analysis Theory for Reinforced Concrete Slabs”, *Magazine of Concrete Research*, V. 19, No. 58, 1967, pp. 3–12.
- [141] Sayir, M., “Zur Fliessbedingung der Plastizitätstheorie”, *Ingenieur-Archiv*, Bd. 39, H. 6, 1970, pp. 414-432.
- [142] Sayir, M., und Ziegler, H., “Der Verträglichkeitssatz der Plastizitätstheorie und seine Anwendung auf räumlich un stetige Felder”, *Zeitung für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, Bd. 20, H. 1, 1969, pp. 78–93.
- [143] Sayir, M.B., Dual, J., und Kaufmann, S., *Ingenieurmechanik 3 – Dynamik*, Teubner, Wiesbaden, 2005, 278 pp.

- [144] Schlaich, J., Schäfer, K., and Jennewein, M., “Toward a Consistent Design of Structural Concrete”, *PCI Journal*, V. 32, No. 3, 1987, pp. 74–150.
- [145] Schwyzer, H., “Statische Untersuchung der aus ebenen Tragflächen zusammengesetzten räumlichen Tragwerke”, *Dissertation* Nr. 220, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1920, 206 pp.
- [146] Seelhofer, H., und Marti, P., “Bemessung schief bewehrter Betonplatten (Dimensioning of skewly reinforced concrete plates)”, *Betonbau in der Schweiz (Structural Concrete in Switzerland)*, The second fib-Congress, Naples and fib-CH Betontag 2006, Zürich, Schweizer Gruppe des fib, SIA, Zürich, 2006, pp. 12–17.
- [147] Shield, R.T., “On Coulomb’s Law of Failure in Soils”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, V. 4, No. 1, 1955, pp. 10–16.
- [148] Shima, H., Chou, L.-L., and Okamura, H., “Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete”, *Journal of the Faculty of Engineering*, The University of Tokyo, V. 39, No. 2, 1987, pp. 133–194.
- [149] Sigrist, V., *Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 210 (Dissertation), ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1995, 159 pp.
- [150] Symonds, P.S., “Shakedown in Continuous Media”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, V. 18, 1951, pp. 85–89.
- [151] Symonds, P.S., and Prager, W., “Elastic-Plastic Analysis of Structures Subjected to Loads Varying Arbitrarily Between Prescribed Limits”, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, V. 17, 1950, pp. 315–323.
- [152] Thoma, K., *Stochastische Betrachtung von Modellen für vorgespannte Zugelemente*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 287 (Dissertation), ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, 2004, 118 pp.
- [153] Thürlimann, B., “Schubbemessung bei Querbiegung”, *Schweizerische Bauzeitung*, Jg. 95, Nr. 26, 1977, pp. 478–481.
- [154] Trost, H., “Auswirkung des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton”, *Beton- und Stahlbetonbau*, Jg. 62, H. 10, 1967, pp. 230–238.
- [155] Ullner, R., *Verbundverhalten von Litzenspanngliedern mit nachträglichem Verbund*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 308 (Dissertation), ETH Zürich, vdf Hochschulverlag, Zürich, 2008, 259 pp.
- [156] v. Mises, R., “Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, Bd. 8, H. 3, 1928, pp. 159–185.
- [157] van Mier, J.G.M., *Fracture Processes of Concrete*, CRC Press, London, 1997, 448 pp.
- [158] van Mier, J.G.M., *Strain Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions*, Doctoral Thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 1984, 349 pp.
- [159] Vecchio, F.J., and Collins, M.P., “Compression Response of Cracked Reinforced Concrete”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 119, No. 12, 1993, pp. 3590–3610.
- [160] Vecchio, F.J., and Collins, M.P., “Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear”, *Final Report*, IABSE Colloquium ‘Advanced Mechanics of Reinforced Concrete’, Delft 1981, IABSE V. 34, 1981, pp. 211–225.
- [161] Vecchio, F.J., and Collins, P., “The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear”, *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 2, 1986, pp. 219–231.

- [162] Walraven, J., and Stroband, J., “Shear Friction in High-Strength Concrete”, *ACI Special Publication SP-149, ‘High Performance Concrete’*, Malhotra, V.M., (ed.), American Concrete Institute, Farmington Hill, 1994, pp. 311–330.
- [163] Walraven, J., Frénay, J., and Pruijssers, A., “Influence of Concrete Strength and Load History on the Shear Friction Capacity of Concrete Members”, *PCI Journal*, V. 32, No. 1, 1987, pp. 66–84.
- [164] Walraven, J.C., *Aggregate Interlock: a Theoretical and Experimental Analysis*, Doctoral Thesis, Technical University Delft, Delft University Press, Delft, 1980, 197 pp.
- [165] Walraven, J.C., and Reinhardt, H.W., “Theory and Experiments on the Mechanical Behaviour of Cracks in Plain and Reinforced Concrete Subjected to Shear Loading”, *Heron*, V. 26, No. 1A, 1981, 68 pp.
- [166] Willam, K.J., and Warnke, E.P., “Constitutive Model for Triaxial Behaviour of Concrete”, *Proceedings, IABSE Seminar on ‘Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses’*, Bergamo, IABSE V. 19, Zürich, 1974, pp. 174–186.
- [167] Wolfensberger, R., *Traglast und optimale Bemessung von Platten*, Institut für Baustatik und Konstruktion, IBK Bericht Nr. 2 (Dissertation), ETH Zürich, Zürich, 1964, 119 pp.
- [168] Xie, J., Elwi, A.E., and MacGregor, J.G., “Mechanical Properties of Three High-Strength Concretes Containing Silica Fume”, *ACI Materials Journal*, V. 92, No. 2, 1995, pp. 1–11.
- [169] Ziegler, H., “Bemerkungen zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, Bd. 11, H. 2, 1960, pp. 157–163.
- [170] Ziegler, H., “On The Theory of the Plastic Potential”, *Quarterly of Applied Mathematics*, V. 19, No. 1, 1961, pp. 39–44.
- [171] Ziegler, H., “Zum plastischen Potential in der Bodenmechanik”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, Bd. 20, H. 5, 1969, pp. 659–675.
- [172] Ziegler, H., *Vorlesungen über Mechanik*, 2. Auflage, Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften 29, Birkhäuser, Basel, 1977, 445 pp.
- [173] Zweidler, S., “Adaptive Tragwerke”, *Masterarbeit*, Studiengang Bauingenieurwissenschaften, ETH Zürich, 2008, 49 pp.

## Bezeichnungen

### Lateinische Grossbuchstaben

$A$	Betonzylinder-Querschnittsfläche
$\delta A$	virtuelle Arbeit
$\delta A^*$	virtuelle Ergänzungsarbeit
$\delta A_a$	virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte
$\delta A_a^*$	virtuelle Ergänzungsarbeit der äusseren Kräfte
$A_c$	Bruttoquerschnittsfläche
$A_i$	Arbeit der inneren Kräfte
$A_i^*$	Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte
$\delta A_i$	virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
$\delta A_i^*$	virtuelle Ergänzungsarbeit der inneren Kräfte
$A_{i0}$	spezifische Arbeit der inneren Kräfte
$\delta A_{i0}$	virtuelle spezifische Arbeit der inneren Kräfte
$A_n$	auf eine Einheitsfläche bezogene Summe der in $n$ -Richtung projizierten Kontaktstrecken $a_n$ zwischen Zuschlagkorn und Zementmatrix
$A_p$	Querschnittsfläche des Spannstahls
$A_s$	Bewehrungsquerschnittsfläche
$A_t$	auf eine Einheitsfläche bezogene Summe der in $t$ -Richtung projizierten Kontaktstrecke $a_t$ zwischen Zuschlagkorn und Zementmatrix
$C_{1..4}$	Konstanten
$\dot{D}$	inkrementelle Dissipationsenergie
$D_{max}$	Durchmesser des Grösstkorns
$D_0$	spezifische Dissipationsenergie
$\dot{D}_0$	spezifische inkrementelle Dissipationsenergie
$E$	Elastizitätsmodul
$E_c$	Elastizitätsmodul von Beton
$E_c'$	Elastizitätsmodul von Beton bei der Entlastung
$E_c(t_0)$	Elastizitätsmodul von Beton im Alter $t_0$
$E_{c0}$	Elastizitätsmodul von Beton im Alter von 28 Tagen
$E_p$	Elastizitätsmodul von Spannstahl (bei Litzen fiktiver Elastizitätsmodul)
$E_s$	Elastizitätsmodul von Stahl
$E_{sh}$	Verfestigungsmodul von Stahl
$EI$	Biegesteifigkeit
$G$	Schubmodul
$G_F$	spezifische Bruchenergie (bei einer Zugbeanspruchung; bezogen auf die Rissfläche)
$G_{Fc}$	spezifische Bruchenergie (bei einer Druckbeanspruchung; bezogen auf das Volumen der Bruchzone)
$G_{Fcl}$	lokal nach dem Erreichen der Bruchstauchung in der Bruchzone dissipierte Energie pro Volumeneinheit
$H$	Potential der Lasten; Funktion
$H_k$	Potential der Lasten bei einem kinematischen Ansatz
$H_s$	Potential der Lasten bei einem statischen Ansatz
$H^*$	komplementäres Potential der Reaktionen
$\delta H$	virtuelles Potential der Lasten
$\delta H^*$	virtuelles komplementäres Potential der Reaktionen
$I$	Funktion
$J(t, t_0)$	Nachgiebigkeitsfunktion
$J_{alt}(t, t_0)$	Nachgiebigkeitsfunktion mit Berücksichtigung der Alterung
$J_{alt, id}(t, t_0)$	ideelle Nachgiebigkeitsfunktion mit Berücksichtigung der Alterung



Bezeichnungen

$J_{id}(t, t_0)$	ideelle Nachgiebigkeitsfunktion
$K$	Kompressionsmodul
$M$	Biegemoment
$M_{B0}$	Biegemoment an der Stelle B infolge eines Eigenspannungszustands
$M_k$	Biegemoment bei einem kinematischen Ansatz
$M_s$	Biegemoment bei einem statischen Ansatz
$M_t$	Biegemoment einer Plattendiskontinuität
$M_u$	Fliessmoment
$N$	Normalkraft; Bildpunkt auf dem Mohr'schen Kreis
$\Delta N$	Normalkraftänderung
$N_t$	Stringerkraft
$Q$	Einzellast; Pol Mohr'scher Kreise
$Q_a, Q_b$	Einzellast an der Stelle a bzw. b
$Q_k$	Einzelkraft; verallgemeinerte Last; Einzellast bei einem kinematischen Ansatz
$Q_r$	residuale Last bei einem kinematischen Ansatz
$Q_s$	Einzellast bei einem statischen Ansatz
$\delta Q_k$	virtuelle Einzelkraft
$R$	Reaktion
$R(t, t_0)$	Relaxationsfunktion
$R_{id}(t, t_0)$	ideelle Relaxationsfunktion
$R_k$	Reaktion
$\delta R$	virtuelle Reaktion
$\delta R_k$	virtuelle Reaktion
$\Delta R_k$	Änderung der Relaxationsfunktion
$R_0$	Reaktion in der Gleichgewichtslage
$RH$	relative Luftfeuchtigkeit
$S$	Oberfläche eines (materiellen) Systems
$S_k$	verallgemeinerte Spannung
$S_t$	Oberflächenanteil eines (materiellen) Systems mit vorgeschriebenen Oberflächenspannungen
$S_v$	Oberflächenanteil eines (materiellen) Systems mit vorgeschriebenen Oberflächenverschiebungen
$T$	Bildpunkt auf dem Mohr'schen Kreis
$U$	Formänderungsenergie
$U^*$	Ergänzungsenergie
$\delta U^*$	virtuelle Ergänzungsenergie
$U_k$	Formänderungsenergie bei einem kinematischen Ansatz
$U_k^*$	Ergänzungsenergie bei einem kinematischen Ansatz
$U_s$	Formänderungsenergie bei einem statischen Ansatz
$U_s^*$	Ergänzungsenergie bei einem statischen Ansatz
$U_0$	spezifische Formänderungsenergie
$\delta U_0$	virtuelle spezifische Formänderungsenergie
$U_0^*$	spezifische Ergänzungsenergie
$\delta U_0^*$	virtuelle spezifische Ergänzungsenergie
$U_{0d}$	deviatorischer Anteil der spezifischen Formänderungsenergie
$U_{0h}$	hydrostatischer Anteil der spezifischen Formänderungsenergie
$V$	Volumen; Querkraft
$V_d$	Querkraft eines Bewehrungsstabs (infolge Dübelwirkung)
$V_t$	Querkraft einer Plattendiskontinuität (in z-Richtung wirkend)
$X$	Bildpunkt auf dem Mohr'schen Kreis
$X_k$	unbekannte verallgemeinerte Kraft oder Reaktion (überzählige statische Grösse)
$\delta X_k$	Variation einer verallgemeinerten Kraft oder Reaktion
$Y$	Fliessfunktion; Bildpunkt auf dem Mohr'schen Kreis
$Y'$	Fliessfunktion

$Y_c, Y_c'$	Betonfliessbedingungen der Näherung nach Cookson für eine verallgemeinerte Fließgelenklinie
$Y_{c1}, Y_{c2}$	Fliessfunktionen des Betons im ebenen Spannungszustand
$Y_k$	Fliessfunktion
$Y_{kj}$	Fliessfunktionen der Fliessbedingung von Coulomb
$Y_M$	Fliessfunktionen zur Modifikation der Fliessbedingung von Coulomb
$Y_{Mk}$	Fliessfunktionen zur Modifikation der Fliessbedingung von Coulomb
$Y_{s1}, Y_{s2}$	Fliessfunktionen einer Bewehrungslage

## Lateinische Kleinbuchstaben

$a$	Seitenlänge; Koordinatenrichtung; Abstand von zwei Diskontinuitätsebenen
$a_i$	Vektor zur Beschreibung der Fliessbedingung einer Bewehrungslage im $\sigma_x$ - $\sigma_y$ - $\tau_{xy}$ -Raum
$a_{kj}$	Feldoperator der Verträglichkeitsbedingung; Koeffizientenmatrix einer quadratischen Form; Transformationsmatrix der kinematischen Grössen; symmetrischer Tensor
$a_n$	Längen der in $n$ -Richtung projizierten Kontaktstrecke zwischen Zuschlagkorn und Zementmatrix
$a_{nn}$	Element der Tangentensteifigkeitsmatrix der Rissverzahnung
$a_{nt}$	Element der Tangentensteifigkeitsmatrix der Rissverzahnung
$a_{sk}$	Querschnittsfläche einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage bezogen auf die Breite
$a_{sxo}$	bezogene Querschnittsfläche der oberen Bewehrung in $x$ -Richtung
$a_{sxu}$	bezogene Querschnittsfläche der unteren Bewehrung in $x$ -Richtung
$a_{syo}$	bezogene Querschnittsfläche der oberen Bewehrung in $y$ -Richtung
$a_{syu}$	bezogene Querschnittsfläche der unteren Bewehrung in $y$ -Richtung
$a_t$	Längen der in $t$ -Richtung projizierten Kontaktstrecke zwischen Zuschlagkorn und Zementmatrix
$a_m$	Element der Tangentensteifigkeitsmatrix der Rissverzahnung
$a_n$	Element der Tangentensteifigkeitsmatrix der Rissverzahnung
$a_x, a_y, a_{xy}$	Komponenten eines beliebigen symmetrischen Tensors
$a_x, a_y$	Ellipsenhalbachsen
$a_{1,2}$	Eigenwerte der Koeffizientenmatrix einer quadratischen Form; Eigenwerte eines beliebigen symmetrischen Tensors
$a_{1...5}$	Koeffizienten einer algebraischen Gleichung 4. Grades
$a_1, a_{11}$	erste bzw. zweite Grundinvariante eines beliebigen symmetrischen Tensors
$b$	Koordinatenrichtung
$b_{kj}$	Feldoperator der Gleichgewichtsbedingung; Transformationsmatrix der statischen Grössen; symmetrischer Tensor
$b_{1,2}$	Eigenwerte der Koeffizientenmatrix einer quadratischen Form
$c$	Kohäsion (Parameter der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb); Druckzonendicke
$c'$	fiktive Kohäsion (Parameter der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb)
$c_{clij}$	Steifigkeitsmatrix des ungerissenen Betons im ebenen Spannungszustand
$c_k, c_k'$	Druckzonenhöhen in $k$ -Richtung bei einem positiven bzw. negativen plastischen Moment
$c_{kj}$	Steifigkeitsmatrix ( $k, j = a, b$ )
$c_{kilm}$	Steifigkeitsmatrix
$c'_{kilm}$	transformierte Steifigkeitsmatrix
const	konstante Grösse (Konstante)
$c_{pij}$	Steifigkeitsmatrix der vorgespannten Bewehrung
$c_{sij}$	Steifigkeitsmatrix der schlaffen Bewehrung

## Bezeichnungen

$c_x, c_y$	Druckzonenhöhen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$c_{1,2}$	Parameter
$c_{1ij}$	Untermatrix der Steifigkeitsmatrix eines ungerissenen Stahlbeton-Flächentragwerkselements
$c_{12ij}$	Untermatrix der Steifigkeitsmatrix eines ungerissenen Stahlbeton-Flächentragwerkselements
$c_{2ij}$	Untermatrix der Steifigkeitsmatrix eines ungerissenen Stahlbeton-Flächentragwerkselements
$c_{22ij}$	Untermatrix der Steifigkeitsmatrix eines ungerissenen Stahlbeton-Flächentragwerkselements
$c_{lij}$	Steifigkeitsmatrix des ungerissenen Stahlbetons im ebenen Spannungszustand
$c_{livij}$	Steifigkeitsmatrix des ungerissenen Stahlbetons im ebenen Spannungszustand ohne die vorgespannte Bewehrung
$c_{IIij}(\theta_r)$	Steifigkeitsmatrix des gerissenen Betons im ebenen Spannungszustand
$d$	Dicke einer kinematischen Diskontinuität; Konstante
$d_v$	Abstand zwischen den beiden Scheibenmittelebenen bei der Näherung des Sandwichmodells
$e$	Federverlängerung der elastischen Bettung
$e_{kj}$	Verzerrungsdeviator (Tensor); orthonormierte Basis
$e'_{kj}$	transformierte orthonormierte Basis
$e_{xi}, e_{yi}, e_{zi}$	orthonormierte Eigenvektoren
$e_I, e_{II}, e_{III}$	Grundinvarianten des Verzerrungsdeviators
$f$	Mittendurchbiegung
$f(a)$	Verschiebungsfunktion
$f(t-t_0)$	normierte Zeitfunktion zur Beschreibung des Kriechmasses
$f_c$	einachsige Betondruckfestigkeit; effektive Betondruckfestigkeit
$f_{cc}$	Betonzylinderdruckfestigkeit
$f_{ck}$	charakteristischer Wert der Betonzylinderdruckfestigkeit (5 %-Fraktilwert)
$f_{ct}$	Betonzugfestigkeit
$f_{c0}$	Betondruckfestigkeit gemäss (3.56) mit $\varepsilon_1 = 0$
$f_{c3}$	Betondruckfestigkeit im Triaxialversuch
$f_k$	Mittendurchbiegung bei einem kinematischen Ansatz
$f_{kj}$	Nachgiebigkeitsmatrix ( $k, j = a, b$ )
$f_{kjlm}$	Nachgiebigkeitsmatrix
$f_{pu}$	Spannstahlzugfestigkeit
$f_{py}$	Spannstahlflussgrenze
$f_s$	Mittendurchbiegung bei einem statischen Ansatz
$f_{su}$	Stahlzugfestigkeit
$f_{sy}$	Stahlflussgrenze
$f_{syk}$	Flussgrenze einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage ( $k = x, y, n, m$ )
$f_t$	einachsige Zugfestigkeit
$f_{tm}$	einachsige Zugfestigkeit der modifizierten Fließbedingung von Coulomb
$f_y$	Fließgrenze
$f_{lij}$	Nachgiebigkeitsmatrix des ungerissenen Stahlbetons im ebenen Spannungszustand
$f_{IIij}(\theta_r)$	Nachgiebigkeitsmatrix des gerissenen Stahlbetons im ebenen Spannungszustand
$g$	gleichmässig verteilte Eigenlast; Hilfsfunktion
$g'$	Hilfsfunktion
$g(a)$	Verschiebungsfunktion
$g_{ij}, g'^2_{ij}$	Hilfstensoren
$g_{kj}$	Koeffizientenmatrix einer quadratischen Form
$g_1, g_2$	Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $g_{kj}$ einer quadratischen Form
$h$	Zylinderhöhe; Dicke eines ebenen Stahlbeton-Flächentragwerkselements
$h_b$	Höhe der Bruchzone
$h_i$	Vektor der Hilfsgrössen $h_x, h_y$ und $h_{xy}$

$h_{kj}$	Parameter zu Bestimmung der Hauptrichtungen eines Tensors 2. Stufe; Koeffizientenmatrix einer quadratischen Form
$h_x, h_y, h_{xy}$	Hilfsgrößen
$h_0$	bezogene Bauteildicke
$h_1, h_2$	Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $h_{kj}$ einer quadratischen Form
$k$	Federsteifigkeit; Parameter der modifizierten Fließbedingung von Coulomb; positiver Parameter
$k'$	positiver Parameter
$k_E$	Parameter zur Abschätzung des Elastizitätsmoduls des Betons
$k_j$	Parameter der Bemessungsbeziehungen des Sandwichmodells
$k_o, k_u$	Parameter der Bemessungsbeziehungen des Sandwichmodells
$k_\sigma$	Parameter in der Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons
$l$	Länge
$l_b$	Verbundlänge
$m$	Anzahl Litzen in einem Hüllrohr; Anzahl Betonschichten mit einem konstanten Spannungszustand
$m_a, m_b$	Biegemoment in $a$ - bzw. $b$ -Richtung
$m_{ab}$	Drillmomente ( $m_{ab} = m_{ba}$ ) bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung
$m_{au}$	plastisches Biegemoment in $a$ -Richtung einer positiven Fließgelenklinie ( $m_{au} \geq 0$ )
$m'_{au}$	plastisches Biegemoment in $a$ -Richtung einer negativen Fließgelenklinie ( $m'_{au} \geq 0$ )
$m_{ca}$	Betonbiegemoment in $a$ -Richtung
$m_i$	Tensor der Biegemomente (Voigt'sche Notation) ( $m_i = [m_x, m_y, m_{xy}]$ )
$\tilde{m}_i$	Abkürzung ( $\tilde{m}_i = m_i - m_{si}$ )
$\tilde{m}_x$	Abkürzung ( $\tilde{m}_x = m_x - m_{sx}$ )
$\tilde{m}_y$	Abkürzung ( $\tilde{m}_y = m_y - m_{sy}$ )
$\tilde{m}_{xy}$	Abkürzung ( $\tilde{m}_{xy} = m_{xy} - m_{sxy}$ )
$m_{ci}$	Betonmomententensor (Voigt'sche Notation)
$m_{ku}$	positives plastisches Moment in $k$ -Richtung ( $m_{ku} \geq 0$ )
$m'_{ku}$	negatives plastisches Moment in $k$ -Richtung ( $m'_{ku} \geq 0$ )
$m_n, m_t$	Biegemoment in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$m_n^{(a)}, m_t^{(a)}$	Biegemoment in $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich a
$m_n^{(b)}, m_t^{(b)}$	Biegemoment in $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich b
$m_{nt}$	Drillmomente ( $m_{nt} = m_{tn}$ ) bezüglich der $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$m_{nt}^{(a)}, m_{nt}^{(b)}$	Drillmomente bezüglich der $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich a bzw. b
$m_{nu}, m'_{nu}$	positives bzw. negatives plastisches Moment in $n$ -Richtung
$m_{sa}$	Bewehrungsbiegemoment in $a$ -Richtung
$m_{si}$	Bewehrungsmomententensor (Voigt'sche Notation)
$m_{syi}$	Bewehrungsmomententensor bei $\sigma_{sk} = f_{syk}$ (Voigt'sche Notation)
$m_x, m_y$	Biegemoment in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$m_{xu}, m_{yu}$	positives plastisches Moment in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$m'_{xu}, m'_{yu}$	negatives plastisches Moment in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$m_{xy}$	Drillmomente ( $m_{xy} = m_{yx}$ ) bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$m_\xi, m_\eta$	Biegemoment in schiefen Koordinatenrichtungen $\xi$ bzw. $\eta$
$m_{\xi\eta}$	Drillmomente bezüglich schiefer Koordinatenrichtungen $\xi$ und $\eta$ ( $m_{\xi\eta} = m_{\eta\xi}$ )
$m_1, m_2$	Hauptmomente
$n$	Grad der statischen Unbestimmtheit; Koordinatenrichtung; Wertigkeit $n = E_s/E_c$
$n_a, n_b, n_{ab}$	Membrankräfte bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung ( $n_{ab} = n_{ba}$ )
$n_F$	Anzahl Grundmechanismen beim Traglastverfahren bei Stabtragwerken
$n_i$	Membrankrafttensor (Voigt'sche Notation) ( $n_i = [n_x, n_y, n_{xy}]$ )
$\tilde{n}_i$	Abkürzung ( $\tilde{n}_i = n_i - n_{si}$ )
$n_{ca}$	Betonmembrannormalkraft in $a$ -Richtung
$n_{cab}$	Betonmembranschubkraft bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung
$n_{ci}$	Membrankrafttensor des Betons (Voigt'sche Notation)
$n_{cox}, n_{coy}$	Betonmembrannormalkräfte in $x$ - bzw. $y$ -Richtung des oberen Druckfelds im Sandwichmodell

## Bezeichnungen

$n_{coxy}$	Betonmembranschubkraft bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung des oberen Druckfelds im Sandwichmodell
$n_{cux}, n_{cuy}$	Betonmembrannormalkräfte in $x$ - bzw. $y$ -Richtung des unteren Druckfelds im Sandwichmodell
$n_{cuxy}$	Betonmembranschubkraft bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung des unteren Druckfelds im Sandwichmodell
$n_K$	Anzahl möglicher Fließgelenke beim Traglastverfahren bei Stabtragwerken
$n_k$	Einheitsnormalenvektors einer Ebene; Wertigkeit des Stahls einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung ( $n_k = E_k / E_c$ )
$n_{kj}$	Richtungskosinusse
$n_n, n_t$	Membrannormalkräfte in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$n_{nt}$	Membranschubkraft bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung ( $n_{nt} = n_{tn}$ )
$n_n^{(a)}, n_t^{(a)}$	Membrannormalkräfte in $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich a
$n_{nt}^{(a)}$	Membranschubkraft bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung im Bereich a
$n_n^{(b)}, n_t^{(b)}$	Membrannormalkräfte in $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich b
$n_{nt}^{(b)}$	Membranschubkraft bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung im Bereich b
$n_s$	Wertigkeit des schlaffen Bewehrungsstahls ( $n_s = E_s / E_c$ )
$n_{sa}$	Bewehrungsmembrannormalkraft in $a$ -Richtung
$n_{sab}$	Bewehrungsmembranschubkraft bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung
$n_{si}$	Bewehrungsmembrankrafttensor (Voigt'sche Notation)
$n_{sk}$	Zugkraft einer fließenden Bewehrung in $k$ -Richtung ( $n_{sk} = a_{sk} f_{syk}$ )
$n_{syi}$	Bewehrungsmembrankrafttensor $\sigma_{sk} = f_{syk}$ (Voigt'sche Notation)
$n_{vi}$	Membrankrafttensor infolge Querkraft im Sandwichmodell (Voigt'sche Notation)
$n_x, n_y$	Membrannormalkräfte in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$n_{xy}$	Membranschubkraft bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung ( $n_{xy} = n_{yx}$ )
$\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_{xy}$	Abkürzungen ( $\tilde{n}_x = n_x - n_{sx}$ , $\tilde{n}_y = n_y - n_{sy}$ bzw. $\tilde{n}_{xy} = n_{xy} - n_{sxy}$ )
$n_{xo}, n_{yo}$	Membrannormalkräfte in $x$ - bzw. $y$ -Richtung der oberen Scheibe im Sandwichmodell (Näherung)
$n_{xyo}$	Membranschubkraft bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung der oberen Scheibe im Sandwichmodell (Näherung)
$n_{xu}, n_{yu}$	Membrannormalkräfte in $x$ - bzw. $y$ -Richtung der unteren Scheibe im Sandwichmodell (Näherung)
$n_{xyu}$	Membranschubkraft bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung der unteren Scheibe im Sandwichmodell (Näherung)
$n_{0v}$	Membrannormalkraft in Hauptquerkrafttrichtung infolge Querkraft
$p$	Bettungsreaktion
$p_j$	verallgemeinerte Bettungsspannung
$p_k$	Bettungsreaktion bei einem kinematischen Ansatz
$p_s$	Bettungsreaktion bei einem statischen Ansatz
$p_t$	in $t$ -Richtung wirkende Streckenkraft eines Stringers
$p_z$	Stützkraft
$q$	gleichmässig verteilte Last
$q_a, q_b$	auf den Beton wirkende Volumenkraft in $a$ - bzw. $b$ -Richtung infolge Verbund
$q_k$	Volumenkraft; verteilte Last bei einem kinematischen Ansatz; Volumenkraft in $k$ -Richtung
$\delta q_k$	virtuelle Volumenkraft
$q_r$	residuale Lasten bei einem kinematischen Ansatz
$q_s$	verteilte Last bei einem statischen Ansatz
$q_x, q_y, q_z$	Volumenkräfte in $x$ -, $y$ - bzw. $z$ -Richtung
$q_1, q_2$	gleichmässig verteilte Lasten
$r$	Kreisradius; Anzahl Bewehrungslagen
$r_k$	Reaktion
$\delta r_k$	virtuelle Reaktion
$r_{Q1}, r_{Q2}$	Ellipsenhalbachsen
$r_{w1}, r_{w2}$	Ellipsenhalbachsen

$s_{kj}$	Spannungsdeviator (Tensor)
$s_r$	Rissabstand
$s_{rk}$	Rissabstand in $k$ -Richtung
$s_{rk0}$	maximalen Rissabstand in $k$ -Richtung bei einer reinen Zugbeanspruchung in $k$ -Richtung und lediglich einer in dieser Richtung verlaufenden Bewehrungslage
$s_{rmin}$	minimaler Rissabstand
$s_{r0}$	maximaler Rissabstand
$s_\xi, s_\eta$	Abkürzungen ( $s_\xi = \rho_x f_{syx} \sin \psi - \sigma_\xi$ und $s_\eta = \rho_n f_{syx} \sin \psi - \sigma_\eta$ )
$s_I, s_{II}, s_{III}$	Invarianten des Spannungsdeviators
$t$	Koordinaterichtung; Scheibendicke; Zeit; Abkürzung $t = \tan \alpha_o$ ; Dicke eines einachsigen Betondruckfelds
$t_i(\alpha)$	Vektor zur Transformation des Spannungs- und Verzerrungstensors in der Voigt'schen Notation ( $t_i(\alpha) = [\cos^2 \alpha, \sin^2 \alpha, -\sin \alpha \cos \alpha]$ )
$t_k$	Oberflächenspannung
$\delta t_k$	virtuelle Oberflächenspannung
$t_{k0}$	beliebige Bezugoberflächenspannung
$t_o$	Dicke des oberen Betondruckfelds im Sandwichmodell
$t_{ox}, t_{oy}$	Dicke eines zusätzlichen Betondruckfelds in $x$ - bzw. $y$ -Richtung im Sandwichmodell
$t_s$	Alter des Betons beim Einsetzen des Schwindens
$t_u$	Dicke des unteren Betondruckfelds im Sandwichmodell
$t_0$	Alter des Betons bei der Erstbelastung (Einsetzen des Kriechens)
$u$	Verschiebung
$u_b$	Verschiebung innerhalb der Bruchzone
$u_c$	Betonverschiebung
$u_{ca}, u_{cb}$	Betonverschiebung in $a$ - bzw. $b$ -Richtung
$u_k$	Verschiebung
$\delta u_k$	virtuelle Verschiebung
$\dot{u}_a, \dot{u}_b$	(plastische) Verschiebungsinkremente in $a$ - bzw. $b$ -Richtung
$\dot{u}_n, \dot{u}_t$	(plastische) Verschiebungsinkremente in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$\dot{u}_{ok}$	beliebiger kinematisch zulässiger Verschiebungszustand
$u_r$	relative Verschiebung der Rissufer parallel zur Rissfläche
$u_s$	Stahlverschiebung
$\dot{u}_{uk}$	mit der Traglast verträglicher Verschiebungszustand
$u_x, u_y, u_z$	Verschiebung in $x$ -, $y$ - bzw. $z$ -Richtung
$u_{x0}, u_{y0}$	Verschiebung der Mittelebene (= Bezugsfläche) in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$v$	vorgeschriebene Oberflächenverschiebung
$v_a, v_b$	Querkräfte bezüglich der $a$ - bzw. $b$ -Richtung
$v_k$	vorgeschriebene Oberflächenverschiebung
$\delta v_k$	virtuelle vorgeschriebene Oberflächenverschiebung
$v_n, v_t$	Querkräfte bezüglich der $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$v_n^{(a)}, v_t^{(a)}$	Querkräfte bezüglich der $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich a
$v_n^{(b)}, v_t^{(b)}$	Querkräfte bezüglich der $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich b
$v_x, v_y$	Querkräfte bezüglich der $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$v_0$	Hauptquerkraft
$w$	Verschiebung; Durchbiegung
$\delta w$	virtuelle Verschiebung
$w_a, w_b$	Verschiebung an der Stelle a bzw. b
$w_k$	Verschiebung, verallgemeinerte Verschiebung
$\dot{w}_k$	(plastisches) Verschiebungsinkrement; verallgemeinertes (plastisches) Verschiebungsinkrement
$w_{kj}$	Verschiebung an der Stelle $k$ infolge einer Einheitslast an der Stelle $j$
$w_r$	residuale Verschiebung bei einem statischen Ansatz; relative Verschiebung der Rissufer senkrecht zur Rissfläche (Rissbreite)
$w_0$	Verschiebung
$x, y, z$	Koordinatenrichtungen

## Bezeichnungen

$x_k$	Koordinatenrichtungen ( $x_k = x, y, z$ )
$x_1$	überzählige Kraftgrösse
$x_{1k}, x_{2k}$	Verbundlängen eines Risselements mit teilweise verschieblichem Verbund
$\Delta z$	Dicke einer Betonschicht mit konstantem Spannungszustand
$z_a, z_b$	äquivalente Stahlspannungen der äquivalenten orthogonalen Bewehrung
$z_k$	$z$ -Ordinate einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung
$z_m$	äquivalente Stahlspannung der Bewehrung in $m$ -Richtung
$z_n$	äquivalente Stahlspannung der Bewehrung in $n$ -Richtung
$z_x$	äquivalente Stahlspannung der Bewehrung in $x$ -Richtung
$z_{xo}$	$z$ -Ordinate der oberen Bewehrung in $x$ -Richtung
$z_{xu}$	$z$ -Ordinate der unteren Bewehrung in $x$ -Richtung
$z_{yo}$	$z$ -Ordinate der oberen Bewehrung in $y$ -Richtung
$z_{yu}$	$z$ -Ordinate der unteren Bewehrung in $y$ -Richtung

## Griechische Grossbuchstaben

$\Gamma(x_k)$	quadratische Form
$\Gamma'(\xi_k)$	Normalform einer quadratischen Form
$\Delta$	Länge
$\Lambda_{ij}$	Diagonalmatrix mit Eigenwerten der Matrix $a_{ij}$ als Diagonalelemente
$\Phi$	Gesamtpotential
$\Delta\Phi$	Gesamtpotentialsänderung
$\delta\Phi$	virtuelles Gesamtpotential
$\Phi^*$	komplementäres Gesamtpotential
$\delta\Phi^*$	virtuelles komplementäres Gesamtpotential
$\Phi_k$	Gesamtpotential bei einem kinematischen Ansatz
$\Phi_k^*$	komplementäres Gesamtpotential bei einem kinematischen Ansatz
$\Phi_s$	Gesamtpotential bei einem statischen Ansatz
$\Phi_s^*$	komplementäres Gesamtpotential bei einem statischen Ansatz

## Griechische Kleinbuchstaben

$\alpha$	Winkel; Lastparameter; Abkürzung; Richtungswinkel des Betondruckfelds bezüglich der $a$ -Richtung einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie; Konstante
$\alpha_o, \alpha_u$	Richtungswinkel des Betondruckfelds bezüglich der $a$ -Richtung einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie am oberen bzw. unteren Elementrand
$\alpha_O$	Winkel der Hauptrichtungen der Koeffizientenmatrix $g_{kj}$
$\alpha_w$	Winkel der Hauptrichtungen der Koeffizientenmatrix $h_{kj}$
$\alpha_x, \alpha_y$	Hilfsgrössen
$\beta$	Richtungswinkel der kleineren Hauptverzerrung $\varepsilon_3$ des Verzerrungstensors (positiv im Gegenuhrzeigersinn; $[0 \leq \beta \leq \pi]$ ); Abkürzung
$\beta_c$	Richtungswinkel der kleineren Betonhauptverzerrung $\varepsilon_3$ des Verzerrungstensors (positiv im Gegenuhrzeigersinn; $[0 \leq \beta \leq \pi]$ )
$\beta(t-t_s)$	normierte Zeitfunktion des Schwindens
$\gamma$	Schiebung
$\dot{\gamma}$	(plastisches) Schiebungsinkrement
$\gamma_{ab}$	Schiebungen bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung ( $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$ )
$\dot{\gamma}_{ab}$	(plastisches) Schiebungsinkrement bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung ( $\dot{\gamma}_{ab} = \dot{\gamma}_{ba}$ )
$\gamma_{cab}$	Betonschiebungen bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung
$\dot{\gamma}_{ab0}$	(plastisches) Schiebungsinkrement der Mittelebene bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung ( $\dot{\gamma}_{ab0} = \dot{\gamma}_{ba0}$ )
$\gamma_m$	mittlere Schiebung bei Stabtragwerken

$\dot{\gamma}_{max}$	(plastisches) maximales Schiebungsinkrement
$\gamma_{nt}$	Schiebung bezüglich $n$ - und $t$ -Richtung ( $\gamma_{nt} = 2 \epsilon_{nt}$ )
$\gamma_{nt0}$	Schiebung in der Mittelebene (= Bezugsebene) bezüglich $n$ - und $t$ -Richtung
$\gamma_{xy}$	Schiebung bezüglich $x$ - und $y$ -Richtung ( $\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy}$ )
$\dot{\gamma}_{xy}$	(plastisches) Schiebungsinkrement bezüglich $x$ - und $y$ -Richtung
$\gamma_{xy0}$	Schiebung in der Mittelebene (= Bezugsebene) bezüglich $x$ - und $y$ -Richtung
$\dot{\gamma}_{xy0}$	(plastisches) Schiebungsinkrement der Mittelebene (= Bezugsebene) bezüglich $x$ - und $y$ -Richtung
$\dot{\delta}$	Verschiebungsinkrement einer kinematischen Diskontinuität
$\dot{\delta}_a$	Verschiebungsinkrement einer (verallgemeinerten) Fliessgelenklinie
$\dot{\delta}_b$	Schlupf
$\dot{\delta}_{ba}$	Schiebungsinkrement einer verallgemeinerten Fliessgelenklinie
$\dot{\delta}_{br}$	Schlupf am Riss
$\dot{\delta}_{b1}$	Schlupf an den Stellen, an welchen der Stahl die Fliessgrenze gerade erreicht
$\dot{\delta}_i$	Verschiebungsinkrementenvektor einer kinematischen Diskontinuität
$\delta_{kj}$	Kronecker-Symbol ( $\delta_{kj} = 1$ für $k = j$ , $\delta_{kj} = 0$ für $k \neq j$ )
$\epsilon$	Verzerrung
$\epsilon_a, \epsilon_b$	Dehnungen in $a$ - und $b$ -Richtung
$\dot{\epsilon}_a, \dot{\epsilon}_b$	(plastische) Dehnungsinkremente in $a$ - und $b$ -Richtung
$\dot{\epsilon}_{a0}$	(plastische) Dehnungsinkremente der Mittelebene in $a$ -Richtung
$\epsilon_c$	Betondehnung
$\epsilon_{ca}, \epsilon_{cb}$	Betondehnungen in $a$ - und $b$ -Richtung
$\epsilon_{ci}$	Tensor der mittleren Betondehnungen (Voigt'sche Notation)
$\epsilon_{ck}$	Betondehnung in $k$ -Richtung
$\epsilon_{cu}$	Betonbruchdehnung
$\epsilon_{cu3}$	Betonbruchdehnung im Triaxialversuch
$\epsilon_{cs}(t)$	Schwinddehnung des Betons
$\epsilon_{csi}(t)$	Betonschwindverzerrungstensor (Voigt'sche Notation)
$\epsilon_{cskj}(t)$	Betonschwindverzerrungstensor
$\epsilon_{cs,\infty}(t_s)$	Endschwindmass
$\epsilon_{c\sigma}$	spannungsabhängige Betonverzerrung
$\epsilon_{c\sigma 0}$	im Alter $t_0$ aufgebraute vorgeschriebene spannungsabhängige Betonverzerrung
$\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}, \epsilon_{c3}$	Hauptverzerrungen des Betons
$\epsilon_e$	elastischer Anteil einer Dehnung
$\epsilon_{ei}$	Tensor der fiktiven elastischen Verzerrung (Voigt'sche Notation)
$\epsilon_{ei}^*$	transformierter Tensor der fiktiven elastischen Verzerrung (Voigt'sche Notation)
$\epsilon_{ekj}$	reversibler (elastischer) Anteil des Verzerrungstensors
$\epsilon_i$	Verzerrungstensor in Voigt'scher Notation $\epsilon_i = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]$
$\dot{\epsilon}_i$	Tensor der Verzerrungsinkremente in Voigt'scher Notation $\dot{\epsilon}_i = [\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}, \dot{\gamma}_{xy}]$ – Verzerrungsinkrementenvektor
$\dot{\epsilon}_k$	(plastische) Hauptverzerrungsinkremente [ $k = 1, 2, 3$ ]
$\epsilon_{kj}$	Verzerrungstensor
$\delta \epsilon_{kj}$	Tensor der virtuellen Verzerrungen
$\epsilon_{kj}'$	transformierter Verzerrungstensor
$\dot{\epsilon}_{kj}$	Tensor der (plastischen) Verzerrungsinkremente
$\epsilon_{kv}$	Dehnung in $k$ -Richtung nach dem Vorspannen
$\epsilon_m$	Hauptverzerrungen ( $m = 1, 2, 3$ ); mittlere Längsdehnung
$\epsilon_n, \epsilon_t$	(mittlere) Verzerrungen in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$\dot{\epsilon}_n, \dot{\epsilon}_t$	(plastische) Verzerrungsinkremente in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$\epsilon_{nkj}$	Tensor der spannungsunabhängigen Verzerrungen
$\epsilon_{n0}, \epsilon_{t0}$	Verzerrungen der Mittelebene (= Bezugsebene) in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$\dot{\epsilon}_{okj}$	Tensor der (plastischen) Verzerrungsinkremente eines beliebigen kinematisch zulässigen Verschiebungszustands
$\epsilon_p$	plastischer Anteil einer Dehnung



## Bezeichnungen

$\Delta \varepsilon_{pk}$	Dehnungsdifferenz zwischen einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage und dem umgebenden Beton
$\varepsilon_{pkj}$	irreversibler (plastischer) Anteil des Verzerrungstensors
$\varepsilon_{pu}$	Spannstahlbruchdehnung
$\varepsilon_{pv}$	Spannstahldehnung beim Verfestigungsbeginn
$\varepsilon_{ri}$	Tensor der mittleren rissbedingten Verzerrungen
$\varepsilon_s$	Stahldehnung
$\varepsilon_{sk}$	Stahldehnung in $k$ -Richtung
$\dot{\varepsilon}_{sk}$	(plastisches) Stahldehnungsinkrement in $k$ -Richtung
$\varepsilon_{sky}$	Stahldehnung beim Fließbeginn einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung
$\varepsilon_{sr}$	Stahldehnung am Riss
$\varepsilon_{su}$	Stahlbruchdehnung
$\varepsilon_{sv}$	Stahldehnung beim Verfestigungsbeginn
$\varepsilon_{sy}$	Stahldehnung beim Fließbeginn
$\varepsilon_{vi}$	Verzerrungstensor (Voigt'sche Notation) nach dem Vorspannen
$\dot{\varepsilon}_{ukj}$	Tensor der (plastischen) Verzerrungsinkremente des mit der Traglast verträglichen Verschiebungszustands
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	(mittlere) Verzerrungen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y$	(plastische) Verzerrungsinkremente in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$	Verzerrungen der Mittelebene (= Bezugsebene) in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\dot{\varepsilon}_{x0}, \dot{\varepsilon}_{y0}$	(plastische) Verzerrungsinkremente der Mittelebene in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\varepsilon_{xy}$	(mittlere) Schubverzerrung bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$	Dehnungen
$\varepsilon_{\sigma kj}$	Tensor der spannungsabhängigen Verzerrungen
$\Delta \varepsilon_{0,5}$	Zugversteifung bei $\lambda = 0,5$
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Hauptverzerrungen
$\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$	(plastische) Hauptverzerrungsinkremente
$\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$	Grundinvarianten des Verzerrungstensors
$\dot{\varepsilon}_I$	1. Grundinvariante der Tensors der (plastischen) Verzerrungsinkremente
$\zeta$	dimensionsloser Parameter ( $\zeta = M_{E0}/M_u$ bzw. $\zeta = -n_{ca}/(f_c h)$ )
$\zeta_c$	Betrag der auf die Bruchdehnung bezogenen kleineren Betonhauptverzerrung ( $\zeta_c = -\varepsilon_3/\varepsilon_{cu}$ )
$\zeta_k$	auf die Fließdehnung bezogene Dehnung einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage ( $\zeta_k = \varepsilon_k/\varepsilon_{syk}$ )
$\zeta_o, \zeta_u$	Abkürzungen der Bemessungsbeziehungen des Sandwichmodells
$\eta$	schiefe Koordinatenrichtung; dimensionsloser Lastparameter ( $\eta = Q_b l / M_u$ )
$\eta_k$	verallgemeinerte Verzerrung
$\dot{\eta}_k$	verallgemeinertes (plastisches) Verzerrungsinkrement
$\theta$	Winkel; Richtungswinkel der kleineren Betonhauptspannung $\sigma_{c3}$ bezüglich der $x$ -Richtung (positiv im Gegenuhrzeigersinn; $[0 \leq \theta < \pi]$ )
$\theta_{Bpl}, \theta_{Fpl}$	plastische Rotation an der Stelle B bzw. F
$\theta_m$	Richtungswinkel der kleineren Betonhauptspannung bezüglich der $x$ -Richtung in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen
$\theta_o$	Richtungswinkel des oberen Betondruckfelds im Sandwichmodell bezüglich der $x$ -Richtung
$\theta_r$	Richtungswinkel der fiktiven Risse bezüglich der $x$ -Richtung
$\theta_t$	Richtungswinkel einer kinematischen Diskontinuität bezüglich der $x$ -Richtung
$\theta_u$	Richtungswinkel des unteren Betondruckfelds im Sandwichmodell bezüglich der $x$ -Richtung
$\theta_v$	Richtungswinkel des Betondruckfelds bezüglich der Mittelebene im Sandwichmodell
$\theta_3$	Richtungswinkel der Betonhauptdruckrichtung bezüglich der $x$ -Richtung
$\kappa$	Lastfaktor; verallgemeinerte Last
$\kappa_o$	oberer Grenzwert der Traglast

$\kappa_s$	unterer Grenzwert der Traglast
$\kappa_u$	Traglast
$\kappa_1, \kappa_2$	Lagrange'sche Multiplikatoren
$\lambda$	positiver Faktor im Fliessgesetz; Parameter zur Beschreibung des Rissabstandintervalls $[0,5 \leq \lambda \leq 1]$ ; Konstante
$\lambda', \lambda''$	positiver Faktor im Fliessgesetz
$\lambda_g$	Eigenwert des symmetrischen Tensors $a_{ij}$
$\lambda_{kj}$	positiver Faktor im Fliessgesetz
$\lambda_m$	positiver Faktor im Fliessgesetz
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	dimensionslose Hilfsgrössen
$\mu$	Reibungsbeiwert
$\mu(t, t_0)$	Alterungsbeiwert
$\mu_x, \mu_y$	Abkürzungen
$\mu_x, \mu_y, \mu_{xy}$	Komponenten des Tensors der positiven plastischen Momente
$\mu'_x, \mu'_y, \mu'_{xy}$	Komponenten des Tensors der negativen plastischen Momente
$\nu$	Querdehnzahl
$\nu_c$	Querdehnzahl des Betons
$\xi$	Koordinatenrichtung; schiefe Koordinatenrichtung; dimensionsloser Lastparameter $\xi = Q_a l / M_u$ ; Parameter in der Spannungs-Verzerrungsbeziehung des Betons
$\xi_k$	Hauptachsenrichtungen
$\xi_o$	Abkürzung ( $\xi_o = \sin\theta_o \cos\theta_o$ )
$\xi_u$	Abkürzung ( $\xi_u = \sin\theta_u \cos\theta_u$ )
$\rho$	Bewehrungsgehalt ( $\rho = A_s / A_c$ )
$\rho_k$	Bewehrungsgehalt der Bewehrungslage in $k$ -Richtung ( $k = x, y, n, m, z$ )
$\sigma$	Spannung
$\sigma_a, \sigma_b$	Normalspannungen in $a$ - bzw. $b$ -Richtung
$\sigma_{ca}, \sigma_{cb}$	Betonnormalspannungen $a$ - und $b$ -Richtung
$\Delta\sigma_{ca}$	Normalspannung des antimetrischen Anteils der Betonspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen
$\sigma_{car}$	Betonnormalspannung in $a$ -Richtung am Riss
$\sigma_{cbr}$	Betonnormalspannung in $b$ -Richtung am Riss
$\sigma_{ci}$	Betonspannungstensor (Voigt'sche Notation) ( $\sigma_{ci} = [\sigma_{cx}, \sigma_{cy}, \tau_{cxy}]$ )
$\sigma_{ci}^*$	transformierter Betonspannungstensor (Voigt'sche Notation)
$\Delta\sigma_{ck}$	Änderung der Betonnormalspannung in $k$ -Richtung infolge der Verbundspannungen einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage
$\Delta\sigma_{ckm}$	Änderung der Betonnormalspannung in $k$ -Richtung infolge der Verbundspannungen einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen
$\sigma_{cnr}$	Betonnormalspannung in $n$ -Richtung am Riss
$\Delta\sigma_{cs}$	Normalspannung des symmetrischen Anteils der Betonspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen
$\sigma_{ctr}$	Betonnormalspannung in $t$ -Richtung am Riss
$\sigma_{cvi}$	Tensor der Betonspannungen (Voigt'sche Notation) nach dem Vorspannen
$\sigma_{cx}, \sigma_{cy}$	Betonnormalspannungen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\sigma_{cxm}, \sigma_{cym}$	Betonnormalspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\sigma_{c0i}$	Tensor der im Alter $t_0$ aufgetragenen Betonspannungen (Voigt'sche Notation)
$\sigma_{c0i}^*$	transformierter Tensor der im Alter $t_0$ aufgetragenen Betonspannungen (Voigt'sche Notation)
$\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3}$	Betonhauptspannungen
$\sigma_{c1m}$	Betonhauptspannung in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen
$\sigma_{c1r}, \sigma_{c3r}$	Betonhauptspannungen am Riss
$\sigma_i$	Spannungstensor in Voigt'scher Notation $\sigma_i = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]$ bzw. im ebenen Spannungszustand $\sigma_i = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$
$\sigma_i'$	gemäss (5.139) definierter Spannungstensor

## Bezeichnungen

$\sigma_k$	Kontaktnormalspannung zwischen einem Zuschlagkorn und der Zementmatrix
$\sigma_{kj}$	Spannungstensor
$\delta\sigma_{kj}$	Tensor der virtuellen Spannungen
$\sigma_{kj}^*$	beliebiger nicht verträglicher Spannungstensor
$\sigma_{kj}'$	transformierter Spannungstensor
$\sigma_m$	Hauptspannungen ( $m = 1, 2, 3$ )
$\sigma_n, \sigma_t$	Normalspannungen in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$\sigma_n^{(a)}, \sigma_t^{(a)}$	Normalspannungen in $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich a
$\sigma_n^{(b)}, \sigma_t^{(b)}$	Normalspannungen in $n$ - bzw. $t$ -Richtung im Bereich b
$\sigma_{pi}$	Tensor der äquivalenten Stahlspannung aller vorgespannten Bewehrungslagen (Voigt'sche Notation)
$\sigma_{pkd}$	äquivalente Stahlspannung einer vorgespannten Bewehrungslage in $k$ -Richtung bei der Dekompression
$\sigma_{pvi}$	Tensor der initialen äquivalenten Spannstahlspannungen (Voigt'sche Notation)
$\sigma_{pkv}$	initiale Spannstahlspannung einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung
$\Delta\sigma_{reli}(t)$	Tensor der äquivalenten Spannungsänderungen der vorgespannten Bewehrungslagen infolge Relaxation
$\Delta\sigma_{relk}(t)$	Spannungsänderung einer in $k$ -Richtung verlaufenden vorgespannten Bewehrungslage infolge Relaxation
$\sigma_s$	Stahlspannung
$\sigma_{si}$	Tensor der äquivalenten Stahlspannungen aller Bewehrungslage (Voigt'sche Notation)
$\sigma_{sk}$	Stahlspannung einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung
$\sigma_{skj}$	Spannungstensor eines beliebigen statisch zulässigen Spannungszustands
$\sigma_{ckr}$	Stahlspannung einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung am Riss
$\sigma_{skv}$	Stahlspannung einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung nach dem Vorspannen
$\sigma_{smin}$	minimale Stahlspannung zwischen zwei benachbarten Rissen
$\sigma_{sr}$	Stahlspannung am Riss
$\sigma_{ukj}$	Spannungstensor der Traglast
$\sigma_{vi}$	Tensor der äusseren Spannungen (Voigt'sche Notation) beim Vorspannen
$\sigma_x, \sigma_y$	Normalspannungen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\sigma_\xi, \sigma_\eta$	Normalspannungen in schiefen Koordinaten $\xi$ und $\eta$
$\sigma_0$	mittlere Hauptspannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Grundinvarianten des Spannungstensors
$\tau$	Schubspannung; Zeit
$\tau_{ab}$	Schubspannung bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung
$\tau_b$	Verbundschubspannung
$\Delta\tau_{ca}$	Schubspannung des antimetrischen Anteils der Betonspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen
$\tau_{cab}$	Betonschubspannung bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung
$\tau_{cabr}$	Betonschubspannung bezüglich der $a$ - und $b$ -Richtung am Riss
$\tau_{bk}$	Verbundschubspannungen einer in $k$ -Richtung verlaufenden Bewehrungslage
$\tau_{bl}$	lokale Verbundschubspannung
$\tau_{bmax}$	maximale Verbundschubspannung
$\tau_{b0}, \tau_{b1}$	Verbundschubspannungen gemäss dem Zuggurtmodell
$\tau_{cntr}$	Betonschubspannung bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung am Riss
$\tau_{cxy}$	Betonschubspannung bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\tau_{cxy m}$	Betonschubspannungen in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\tau_d$	nominelle durch Dübelwirkung über einen Riss übertragene Schubspannung
$\tau_k$	Kontakt Schubspannung zwischen Zuschlagkorn und Zementmatrix
$\tau_{nt}$	Schubspannung bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung
$\tau_{nt}^{(a)}$	Schubspannung bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung im Bereich a
$\tau_{nt}^{(b)}$	Schubspannung bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung im Bereich b

$\tau_{ntr}$	nominelle über einen Riss übertragene Schubspannung bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung
$\tau_{ntru}$	maximale über einen Riss übertragene nominelle Schubspannung bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung
$\tau_{xy}$	Schubspannung bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\tau_{xy,max}$	maximale Schubspannung bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\tau_{xyu}$	Traglast-Schubspannung bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\tau_{zx}, \tau_{zy}$	Schubspannung bezüglich der $z$ - und $x$ - bzw. $z$ - und $y$ -Richtung
$\tau_{\xi\eta}$	Schubspannungen bezüglich schiefer Koordinatenrichtungen $\xi$ und $\eta$ ( $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ )
$\tau_0$	nominelle Schubspannung
$\varphi$	Winkel; Winkel der inneren Reibung
$\varphi'$	fiktiver Winkel der inneren Reibung
$\varphi(t, t_0)$	Kriechmass
$\varphi_a$	Richtungswinkel der äquivalenten orthogonalen Bewehrung bezüglich der $x$ -Richtung
$\varphi_k(x)$	Ansatzfunktionen
$\varphi_u, \varphi'_u$	Richtungswinkel der positiven bzw. negativen Fließgelenklinie bezüglich der $x$ -Richtung
$\varphi_0$	Winkel der Hauptquerkrafttrichtung bezüglich der $x$ -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn)
$\varphi_1$	Winkel der Hauptrichtungen bezüglich der $x$ -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn)
$\varphi_{1m}$	Winkel der Hauptrichtungen der Biege- und Drillmomente bezüglich der $x$ -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn)
$\varphi_{\infty}(t_0)$	Endkriechmass
$\chi$	Krümmung
$\dot{\chi}_a$	(plastisches) Krümmungsinkrement in $a$ -Richtung
$\chi_n, \chi_t$	Krümmungen in $n$ - bzw. $t$ -Richtung
$\chi_{nt} = \chi_{tm}$	Drillungen bezüglich der $n$ - und $t$ -Richtung
$\chi_x, \chi_y$	Krümmungen in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y$	(plastisches) Krümmungsinkrement in $x$ - bzw. $y$ -Richtung
$\chi_{xy} = \chi_{yx}$	Drillungen bezüglich der $x$ - und $y$ -Richtung
$\dot{\chi}_{xy} = \dot{\chi}_{yx}$	(plastisches) Drillungsinkrement
$\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2$	(plastische) Hauptkrümmungsinkremente
$\psi$	Richtungswinkel schiefer Koordinaten
$\psi_k$	Richtungswinkel einer Bewehrungslage bezüglich der $x$ -Richtung (positiv im Uhrzeigersinn; $[0 \leq \psi_k < \pi]$ ) ( $k = x, y, n, m$ )
$\psi_k(x)$	Ansatzfunktion
$\omega$	Konstante
$\omega_k$	mechanischer Bewehrungsgehalt ( $\omega_k = \rho_{pk} f_{pyk} / f_{cc}$ )
$\omega_x, \omega_y$	Hilfsgrößen
$\dot{\omega}_a$	(plastisches) Rotationsinkrement einer (verallgemeinerten) Fließgelenklinie
$\dot{\omega}_a, \dot{\omega}_b, \dot{\omega}_E$	(plastisches) Rotationsinkrement an der Stelle $a, b$ bzw. $E$
$\dot{\omega}_{ml}$	verallgemeinerte Verzerrung an der Stelle $m$ beim $l$ -ten Grundmechanismus

### Sonderbezeichnungen

$\emptyset$	Stabdurchmesser; Zylinderdurchmesser
$\emptyset_k$	Stabdurchmesser einer Bewehrungslage in $k$ -Richtung
$0$	Hauptquerkrafttrichtung
1, 2, 3	Hauptrichtungen
I, II	charakteristische Richtungen



## Sachverzeichnis

- adjungierte Feldoperatoren, 14
- Alterungsbeiwert, 67
- äquivalente orthogonale Bewehrung, 110
- äquivalente Stahlspannung, 96
  
- Baustatik, 1
- Befreiung, 12
- Bemessung, 81
- Berechnungsmodell, 85
- Betonbruchstauchung, 56
- Betondruckfestigkeit, einachsige, 55
- Betti, Satz von, 18
- Beziehungen,
  - statische, 9
  - kinematische, 7
- Biegemoment, 144
- Bindung,
  - kinematische, 26
  - statische, 26
- Boltzmann, Superpositionsprinzip von, 64
- Bruchenergie, spezifische, 57
- Bruchzone, 57
  
- Castigliano, Satz von, 23
  
- Deformationsmethode, 27
- Differentialgleichung des verschieblichen Verbunds, 70
- Diskontinuität, 48
  - kinematische, 48
  - statische, 48
- diskretes System, 32
- Dissipationsenergie,
  - inkrementelle spezifische, 35
  - spezifische, 34
- Drillmoment, 144
- Dübelwirkung, 78
  
- effektive Festigkeit, 87
- Eigenspannungszustand, 10
- Eingrenzung, 86
- Einspielsatz, 89
- Elastizitätsmodul, 18
  - des Betons, 56
  - des Betonstahls, 53
  - des Spannstahls, 54
- Endkriechmass, 64
- Endschwindmass, 64
- Engesser, Satz von, 24
- Entflechtung, 86
- Ergänzungsenergie, spezifische, 16
  
- Faltwerk, 1
- finites Element, 32
- Fliessbedingung, 33
- Fliessfläche, 33
  
- Fließgelenklinie, 150
  - verallgemeinerte, 157
- Fliessgesetz, 35
- Fliessgrenze
  - des Betonstahls, 53
  - des Spannstahls, 54
- Formänderungsenergie, spezifische, 15
  
- Gebrauchstauglichkeit, 81
- Gerissenes Scheibenmodell, 121
- Gesamtpotential, 20
  - komplementäres, 22
- Grenzwertbetrachtung, 86
- Grenzwertlinie, 89
- Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie,
  - kinematischer, 46
  - statischer, 45
  
- Hauptquerkraft, 146
  
- Kapazitätsbemessung, 83
- kinematische Hypothese, 26
- klassisches Druckfeldmodell, 118
- Knoten, 32
- Kompressionsmodul, 18
- kontragrediente Transformation, 32
- Koordinaten, schiefe, 96
- Kraft,
  - äussere, 6
  - eingeprägte, 6
  - innere, 6
  - konservative, 20
- Kraftmethode, 27
- Kriechen, 64
- Kriechmass, 64
  
- Last,
  - verallgemeinerte, 27
  - residuale, 29
- Lastfall, 84
- Lokalisierung, 75
  
- Massstabeffekt, 55
- Maxwell,
  - duale Aussage des Satzes von, 25
  - duale Aussage des verallgemeinerten Satzes von, 23
  - Satz von, 25
  - verallgemeinerter Satz von, 24
- Membrankräfte, 144
- Membrannormalkräfte, 144
- Membranschubkräfte, 144
- Methode der Finiten Elemente, 32
- Modell, wissenschaftliches, 84
- Modifizierte Fliessbedingung von Coulomb, 36
  
- Nachgiebigkeitsfunktion, 64
- Nachgiebigkeitskoeffizient, 25
- Normalmomenten-Fliessbedingungen, 150

- Plattendiskontinuität, 148
- Plattenquerkräfte, 144
- Potential,
  - der Lasten, 20
  - der Reaktionen, 22
  - plastisches, 35
- Prinzip,
  - der virtuellen Arbeiten, 11
  - der virtuellen Kräfte, 13
  - der virtuellen Verschiebungen, 12
  - von d' Alembert, 15
  - von Saint-Venant, 93
- Querdehnzahl, 18
  - des Betons, 56
- Randbedingung,
  - statische, 9
  - kinematische, 7
- Rayleigh-Ritz, Verfahren von, 28
- Reaktion, 6
  - verallgemeinerte, 26
- Reaktionsprinzip, 6
- Relaxation, 64
- Relaxationsfunktion, 66
- Risselement, 71
- Rissverzahnung, 61
- Robustheit, 81
- Sandwichmodell, 164
- Satz,
  - vom Minimum des Gesamtpotentials, 21
  - vom Minimum des komplementären Gesamtpotentials, 22
- Schlupf, 69
- Schnittkörper, 6
- Schnittkörperdiagramm, 6
- Schnittprinzip, 6
- Schubmodul, 18
- Schwinden, 63
- Spannung, 9
  - verallgemeinerte, 26
- Spannungsfeld, diskontinuierliches, 48
- Spannungskomponenten,
  - schiefe, 96
- Spannungszustand, 9
  - statisch zulässiger, 10
  - virtueller, 13
- Statik, 1
- Steifigkeitskoeffizient, 25
- Stringer, 147
- Strukturmechanik, 1
- Stützkraft, 147
- sukzessive Approximation, 86
- System, konservatives (materielles) 50
- Traglast, 45
- Traglastverfahren, 45
- Tragsicherheit, 81
- Tragsystem, 85
- Tragwerk, 85
- Tragwerksmodell, 85
- Trost, Verfahren nach, 67
- Überprüfung, 81
- Verbundumfang, 70
- Verhalten, duktiler, 83
- Versagensankündigung, 81
- Verschiebung, 7
  - residuale, 30
  - verallgemeinerte, 28
- Verschiebungsfeld, 7
  - infinitesimales, 7
- Verschiebungsinkrement, verallgemeinertes, 40
- Verschiebungszustand, 7
  - kinematisch zulässiger, 7
  - virtueller, 12
- Verträglichkeitssatz, 46
- Verzerrung, 7
  - spannungsabhängige, 17
  - spannungsunabhängige, 17
  - verallgemeinerte, 26
- Verzerrungsinkrement, 34
  - verallgemeinertes, 40
- Verzerrungszustand, 7
  - ebener, 7
- Voigtsche Notation von Tensoren, 14, 95
- Werkstoffverhalten,
  - elastisches, 16
  - ideal plastisches, 16, 18
  - isotropes, 16, 18
  - linear elastisches, 17
  - plastisches, 33
- Zugfestigkeit,
  - des Betons, 58
  - des Betonstahls, 53
  - des Spannstahls, 54
- Zuggurtmodell, 72
- Zugversteifung, 71
- Zustand
  - I, 82
  - II, 82
  - III, 82
- Zwängung, 10