DISS. ETH NO. 23624

Algebraic Twists of Modular Forms and Sums over Primes to Squarefree Moduli

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Benny Löffel

MSc ETH Mathematik

born on 10.07.1987
citizen of Worben BE

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Emmanuel Kowalski, examiner
Prof. Dr. Étienne Fouvry, co-examiner

2016

Abstract

In this thesis, we consider the question of whether Fourier coefficients of modular forms correlate with functions of algebraic origin. For a big class of cusp forms f, we show that there is no correlation with many algebraic functions often encountered in number theory. This question was studied before by É. Fouvry, E. Kowalski und Ph. Michel in [22] and our results are a generalisation of the ones in [22].

For a squarefree number q, we consider the correlation sums

$$\mathcal{S}(f, K; q) = \sum_{n<Pq} \rho_f(n) K(n),$$

also called "algebraic twists", where the $\rho_f(n)$'s denote the Fourier coefficients of the cusp form f, $P > 0$ is a parameter and K denotes a function of algebraic origin defined modulo q. Examples of such functions K for which we can prove the non-correlation include Dirichlet characters to the modulus q, $K(n) = \chi(n)$, as well as Hyper-Kloosterman sums

$$K(n) = \mathrm{Kl}_m(n; q) = q^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{\substack{x_1,\dots,x_m \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \\ x_1 \cdots x_m = n}} e\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{q}\right).$$

These functions share the property that they can be written as a product of trace functions and we show in general that for every such product K,

$$\mathcal{S}(f, K; q) \ll_{f,\delta,P,\mathrm{cond}(K)} q^{1-\delta}$$

for all $\delta < \frac{1}{16}$, where $\mathrm{cond}(K)$ denotes the conductor of K.

As an application, we consider sums over primes and show the upper bound

$$\sum_{\substack{p<Pq \\ p \text{ prime}}} K(p) \ll_P q^{1-\frac{\eta}{2}}$$

for all $\eta < \frac{1}{24}$, K as above.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit gehen wir der Frage nach, wann Fourierkoeffizienten von Modulformen mit Funktionen algebraischen Ursprungs korrelieren. Wir zeigen für eine grosse Klasse von Spitzenformen f, dass viele in der Zahlentheorie verwendete Funktionen nicht mit den Fourierkoeffizienten von f korrelieren. Diese Frage wurde zuvor bereits von É. Fouvry, E. Kowalski und Ph. Michel in [22] untersucht und unsere Ergebnisse stellen eine Verallgemeinerung der in [22] enthaltenen Resultate dar.

Konkret betrachten wir für eine quadratfreie Zahl q die Korrelationssummen

$$\mathcal{S}(f,K;q)=\sum_{n<Pq}\rho_f(n)K(n),$$

welche auch als “algebraische Verdrehungen” (“algebraic twists” auf Englisch) bezeichnet werden. Dabei bezeichnen die $\rho_f(n)$'s die Fourierkoeffizienten der Spitzenform f, $P>0$ ist ein Parameter und K ist eine Funktion algebraischen Ursprungs, welche modulo q definiert ist. Beispiele solcher Funktionen K, für welche wir die Nicht-Korrelation zeigen können, sind Dirichlet-Charaktere zum Modulus q, $K(n)=\chi(n)$ oder Hyper-Kloostermansummen

$$K(n)=\mathrm{Kl}_m(n;q)=q^{-\frac{m-1}{2}}\sum_{\substack{x_1,\dots,x_m\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times\\ x_1\cdots x_m=n}}e\left(\frac{x_1+\cdots+x_m}{q}\right).$$

Diesen Funktionen ist gemeinsam, dass sie als Produkt von Spurfunktionen geschrieben werden können. Wir zeigen allgemein für alle solche Produkte von Spurfunktionen K, dass

$$\mathcal{S}(f,K;q)\ll_{f,\delta,P,\mathrm{cond}(K)}q^{1-\delta}$$

für alle $\delta<\frac{1}{16}$ gilt, wobei $\mathrm{cond}(K)$ den Führer von K bezeichnet.

Als Anwendung davon betrachten wir Summen über Primzahlen und beweisen die obere Schranke

$$\sum_{\substack{p<Pq\\ p\text{ prime}}}K(p)\ll_P q^{1-\frac{\eta}{2}}$$

für $\eta<\frac{1}{24}$ und für gewisse Funktionen K algebraischen Ursprungs, welche modulo q definiert sind. Für $K(n)=\mathrm{Kl}_2(na,q)$ stellt dies in gewissen Fällen eine Verbesserung eines Ergebnisses (Lemma 6.1 in [16]) von H. Iwaniec, W. Luo und P. Sarnak dar.