

DISS. ETH NO. 23130

MARKET MODELS BEYOND THE STANDARD SETUP

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

MARIO ŠIKIĆ

univ. dipl. mat.

University of Ljubljana

born on 18. 10. 1982

citizen of Croatia

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Halil Mete Soner examiner

Prof. Dr. Martin Schweizer co-examiner

Prof. Dr. Patrick Cheridito co-examiner

2015

Abstract

In the present thesis two problems of mathematical finance are studied. Both of these problems have to do with understanding models with nonstandard friction. The first problem is about market models with transaction costs that are not assumed to be convex, for example fixed transaction costs. The second problem is about optimal trading in a market where the information about the whole evolution of the stock price process is not available to the trader.

We start with the axiomatization of discrete time financial market models. This is done in a spirit of axiomatization of risk measures. A market model is an abstract map between L^0 spaces and satisfies additional properties of locality and upper-semicontinuity. We first show the representation result, i.e. that the wealth in this axiomatic framework can be described ω -wise. We define a no-arbitrage condition and derive its consequences, e.g. that it implies closure of the set of superhedgable claims. Finally, we extend the theory to vector valued market models.

Next, we discuss the concavity assumption on the market and study the implications. First, the representation result can be strengthened, yielding an upper-semicontinuous representation map. We finish this part of the work with a discussion of duality theory.

In the second part of the thesis we discuss mean-variance portfolio optimization in a market model without transaction costs. As a departure from the standard framework we consider the friction of not having access to full information about the evolution of the stock price process. We solve the mean-variance portfolio optimization problem in discrete time for market models with independent increments. This set of market models includes time discretizations of the Black-Scholes and the Bachelier models. Using dynamic programming approach, we obtain an explicit expression for the optimal strategy for the mean-variance portfolio optimization problem in the form of a recursion equation. We also do numerical analysis of the solution.

Finally, we show how this problem can be solved in continuous time by first solving a time discretization problem and proving that the continuous time solution is a limit of those. The main example is the Bachelier model, where we obtain an explicit solution.

Kurzfassung

In dieser Doktorarbeit werden zwei finanzmathematische Probleme behandelt. Jedes dieser Probleme hat mit dem Verständnis von Modellen mit Marktreibungen zu tun. Im ersten Problem werden Marktmodelle mit Transaktionskosten behandelt, die nicht notwendigerweise konvex sind. Ein Beispiel hierfür sind fixe Transaktionskosten. Im zweiten Problem geht es um das optimale Handeln in Marktmodellen, in denen der Händler nicht die gesamte Informationsstruktur des Aktienkursprozesses zur Verfügung hat.

Wir beginnen mit der Axiomatisierung von Finanzmarktmodellen in diskreter Zeit. Dies geschieht in Anlehnung an der Axiomatisierung von Risikomassen. Ein Marktmodell ist eine abstrakte Abbildung zwischen L^0 -Räumen, die zusätzliche Eigenschaften, wie Lokalität und Oberhalbstetigkeit, erfüllt. Als erstes beweisen wir den Darstellungssatz, der besagt, dass der Wohlstand punktweise in ω beschrieben werden kann. Wir definieren ein Arbitragekonzept und studieren dessen Konsequenzen, wie zum Beispiel die Abgeschlossenheit der Menge der superreplizierbaren Eventualforderungen. Zum Schluss erweitern wir die Theorie auf vektorwertige Marktmodelle.

Als nächstes diskutieren wir die Konkavitätsannahme eines Marktmodelles und studieren dessen Implikationen. Der Darstellungssatz kann verschärft werden indem die Darstellungsabbildung oberhalbstetig wird. Wir beenden diesen Teil der Arbeit mit einer Diskussion der Dualitätstheorie.

Im zweiten Teil der Doktorarbeit diskutieren wir das Mean-Variance Optimierungsproblem in einem Marktmodell ohne Transaktionskosten aber mit einer Marktreibung. Diese zugrundeliegende Marktreibung beinhaltet, dass der Händler nicht den gesamten Aktienkursprozess zum Handeln zur Verfügung hat. Wir lösen das Mean-Variance Anlage Optimierungsproblem in diskreter Zeit in Marktmodellen mit unabhängigen Inkrementen. Diese Marktmodelle beinhalten insbesondere die Zeitdiskretisierungen vom Black-Scholes- und Bacheliermodell. Mittels dynamischer Programmierung erhalten wir einen expliziten Ausdruck für die optimale Strategie in Form einer Rekursionsgleichung. Eine numerische Analyse der Lösung wird ebenfalls gemacht.

Zum Schluss zeigen wir, wie dieses Problem in stetiger Zeit gelöst werden kann indem zuerst das zeitdiskretisierte Problem gelöst und im Anschluss gezeigt wird, dass die Lösung in stetiger Zeit dem Grenzwert der zeitdiskretisierten Lösungen entspricht. Die Berechnungen werden am Bacheliermodell vorgeführt, wobei wir explizite Lösungen erhalten.