Diss. ETH No. 20766

Rotation Quasimorphisms for Surfaces

A dissertation submitted to the

ETH ZÜRICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

THOMAS HUBER

Dipl. Math. ETH Zürich
born April 2, 1980
citizen of Elgg, ZH

Accepted on the recommendation of:

PROF. MARC BURGER, examiner
DR. DAVID CIMASONI, co-examiner

2012

Abstract

Let S be an oriented hyperbolic surface with basepoint $x \in S$ and set $\Gamma = \pi_1(S, x)$. Let $\rho : \Gamma \to G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ be a holonomy representation into the group G of orientation preserving isometries of the Poincaré disc. The pullback $e_b^\Gamma \in \mathrm{H}_b^2(\Gamma)$ of the bounded Euler class $e_b \in \mathrm{H}_b^2(\mathrm{Homeo}^+(S^1))$ via the composition

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow \mathrm{Homeo}^+(S^1)$$

is invariant under the action of the mapping class group $\mathcal{M}(S)$ of S. The latter group acts on the unit tangent bundle $\mathbb{T}^1 S$ of S by orientation preserving homeomorphisms and the pullback of e_b^Γ to the fundamental group $\pi_1(\mathbb{T}^1 S)$ is invariant under this lifted mapping class group action. We prove that this pulled back class is trivialised by a unique $\mathcal{M}(S)$-invariant homogeneous quasimorphism $\mathrm{Rot} : \pi_1(\mathbb{T}^1 S) \to \mathbb{R}$ which is moreover integral-valued and independent of the choice of hyperbolic metric on S.

For a closed regular curve c on S the integer $\mathrm{Rot}([c'])$ serves as a substitute for the classical rotation number for closed regular planar curves. In particular, we have the following analogon of Whitney's classification result for regular homotopy classes of planar curves: Two closed regular curves c_1, c_2 on S are regularly homotopic if and only if they are homotopic and, moreover, $\mathrm{Rot}([c_1']) = \mathrm{Rot}([c_2'])$. Chillingworth has introduced the related concept of winding numbers for curves and used it to prove an analogous result for non-compact surfaces. But in contrast to the quasimorphism Rot, the definition of the winding number functions involves the choice of a nowhere vanishing vector field on the surface and, for exactly this reason, is not well defined anymore for compact surfaces.

Zusammenfassung

Sei S eine orientierte hyperbolische Fläche, $x \in S$ ein Basispunkt und $\Gamma = \pi_1(S, x)$ deren Fundamentalgruppe. Wir betrachten eine Holonomiedarstellung $\rho : \Gamma \to G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ von Γ mit Werten in der Gruppe G der orientierungserhaltenden Homöomorphismen der hyperbolischen Ebene. Der Pullback $e_b^\Gamma \in \mathrm{H}_b^2(\Gamma)$ der beschränkten Eulerklasse $e_b \in \mathrm{H}_b^2(\mathrm{Homeo}^+(S^1))$ längs der Komposition

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow \mathrm{Homeo}^+(S^1)$$

ist invariant unter der Operation der Abbildungsklassengruppe $\mathcal{M}(S)$ von S. Letztere operiert auf dem Einheitstangentialbündel $\mathbb{T}^1 S$ von S durch orientierungserhaltende Homöomorphismen, und der Pullback von e_b^Γ auf die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{T}^1 S)$ ist invariant unter dieser Operation. Wir beweisen, dass diese Cohomologieklasse durch einen eindeutig bestimmten, $\mathcal{M}(S)$-invarianten homogenen Quasimorphismus $\mathrm{Rot} : \pi_1(\mathbb{T}^1 S) \to \mathbb{R}$ trivialisiert wird, welcher ausserdem auch noch ganzzahlig und unabhängig von der Wahl der hyperbolischen Metrik auf S ist.
Für reguläre geschlossene Kurven c auf S dient die Zahl $\mathrm{Rot}([c'])$ als Ersatz für die klassische Rotationszahl für ebene reguläre geschlossene Kurven. Insbesondere gilt folgendes Analogon von Whitneys Klassifikationsresultat für reguläre Homotopieklassen ebener Kurven: Zwei reguläre geschlossene Kurven c_1, c_2 auf S sind genau dann regulär homotop, wenn sie homotop sind und zusätzlich $\mathrm{Rot}([c_1']) = \mathrm{Rot}([c_2'])$ gilt. Chillingworth hat den verwandten Begriff der Windungszahl für Kurven eingeführt und mit dessen Hilfe ein analoges Resultat für nicht kompakte Flächen bewiesen. Im Gegensatz zum Quasimorphismus Rot fliesst in die Definition der Windungszahl allerdings die Wahl eines nirgends verschwindenden Vektorfeldes auf der Fläche ein. Und aus genau diesem Grund sind Windungszahlen im kompakten Fall nicht mehr wohldefiniert.