

Diss. ETH No. 20041

**FENCHEL-NIELSEN COORDINATES FOR MAXIMAL
REPRESENTATIONS**

A dissertation submitted to

ETH ZÜRICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

TOBIAS STRUBEL
Dipl. Math. ETH Zürich

born 9. June 1981

citizen of Zürich ZH

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Marc BURGER, examiner
Prof. Dr. Olivier GUICHARD, co-examiner

2011

Zusammenfassung

Höhere Teichmüllertheorie befasst sich mit dem Studium von Räumen von Darstellungen der Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche in gewisse Lie Gruppen. Ein Zweig der höheren Teichmüllertheorie ist das Studium von solchen Darstellungen in Hermitesche Liegruppen G mit maximaler Toledozahl.

In dieser Arbeit konstruieren wir Koordinaten für den Raum der Darstellungen mit maximaler Toledozahl in die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Diese Koordinaten verallgemeinern Fenchel-Nielsen Koordinaten auf dem Teichmüllerraum. Dabei spielt die Zerlegung der zugrundeliegenden Fläche in Teilstücke (sogenannte Hosen) und das Studium der Darstellung der Fundamentalgruppe davon eine herausragende Rolle. Die resultierenden Koordinaten sind wie im klassischen Fall Längen- und Twistparameter. In unserem Fall sind dies Matrizen aus $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, die noch gewisse Relationen zu erfüllen haben.

Die Koordinaten nutzen wir für zwei Anwendungen: wir können zeigen, dass die Limeskurve zu einer maximalen Darstellung in gewissen Fällen auch für nicht-geschlossene Flächen stetig ist. Ausserdem zählen wir Zusammenhangskomponenten von maximalen Darstellungen für nicht geschlossene Flächen.

Darüberhinaus präsentieren wir die Konstruktion von Doppelverhältnissen für maximale Darstellungen. Dies ist eine gemeinsame Arbeit mit Tobias Hartnick. Wir konstruieren ein Doppelverhältnis auf Quadrupeln im Shilovrand eines beschränkten symmetrischen Gebiets, das durch gewisse Funktorialitätseigenschaften eindeutig charakterisiert ist. Mit Hilfe dieses Doppelverhältnis und der Limeskurve kann man einer maximale Darstellung ein striktes Doppelverhältnis im Sinne von Labourie zuordnen. Daraus ergeben sich gewisse Konsequenzen, wie zum Beispiel die Eigentlichkeit der Wirkung der Abbildungsklassengruppe auf dem Raum der maximalen Darstellungen.

Abstract

Higher Teichmüller theory is concerned with the study of spaces of representations of the fundamental group of an orientable surface into certain Lie groups. One branch of higher Teichmüller theory is the study of representations into Hermitian Lie group with maximal Toledo invariant.

In this text we give coordinates for the space of representations with maximal Toledo invariant into the symplectic group $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. These coordinates generalize Fenchel-Nielsen coordinates on Teichmüller space. The decomposition of the given surface into pieces (so called pairs of pants) and the study of the fundamental group of pairs of pants plays an important role. Our coordinates are, as in the classical case, length and twist parameters, which are here matrices from $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, which have to satisfy some relations.

We use these coordinates for two applications: we can show that the limit curve associated with a maximal representation is continuous for a class of maximal representations of the fundamental group of a non-closed surface. Furthermore we count connected components of spaces of maximal representations of non-closed surfaces.

Finally we present results obtained in joint work with Tobias Hartnick. We construct a cross ratio on quadruples on the Shilov boundary of a bounded symmetric domain of tube type which is uniquely characterized by their behavior under products, a functoriality condition and some normalization. We use this cross ratio and the limit curve for a maximal representation to associate a strict cross in the sense of Labourie to maximal representations. The cross ratio can be used to deduce some consequences, e.g. the properness of the action of the mapping class group on the space of maximal representations.