

DISS. ETH NO. 19561

MEAN-VARIANCE PORTFOLIO OPTIMISATION:  
TRADING CONSTRAINTS AND  
TIME CONSISTENCY

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by  
CHRISTOPH JOHANNES CZICHOWSKY

Dipl. Math. ETH  
born April 22, 1982  
citizen of Germany

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Martin Schweizer      examiner  
Prof. Dr. Jan Kallsen              co-examiner  
Prof. Dr. H. Mete Soner          co-examiner

2011

# Abstract

This thesis studies *mean-variance portfolio selection (MVPS)* and *mean-variance hedging (MVH)* in a general semimartingale model under constraints and develops a time-consistent formulation for MVPS as a dynamic optimisation problem. The constraints are formulated via predictable correspondences; trading strategies are restricted to lie in a closed convex set  $C(\omega, t)$  which may depend on the state  $\omega$  and time  $t$  in a predictable way.

To obtain a solution for the constrained MVH problem, we establish the closedness in  $L^2$  of the space  $G_T$  of all gains from trade (i.e. the terminal values of stochastic integrals with respect to the price process of the underlying assets). This is a first contribution which allows us to subsequently tackle the problem in a systematic and unified way, and to obtain more information on the structure of the solution by convex duality tools.

It turns out that the closedness of  $G_T$  in  $L^2$  is related to the closedness, in the semimartingale topology  $\mathcal{S}(P)$ , for spaces of stochastic integrals with constrained ( $C$ -valued) integrands, and we provide necessary and sufficient conditions for the latter to hold. Applications to utility maximisation and superreplication under constraints often bring up spaces of stochastic integrals that are predictably convex. We show that such a space is closed in  $\mathcal{S}(P)$  if and only if it is a space of stochastic integrals of  $C$ -valued integrands, where  $C$  is a predictable correspondence with closed and convex values.

If the constraints are given by closed cones, MVPS viewed as a *static* optimisation problem reduces to solving a particular MVH problem. Treating the latter as a stochastic optimal control problem allows us to characterise the value function by the maximal solutions of two coupled backward stochastic differential equations (BSDEs) and to describe the optimal strategy locally as the pointwise minimiser of the drift rates.

Viewed as a *dynamic* optimisation problem, MVPS is time inconsistent in the sense that it does not satisfy Bellman's optimality principle and the usual dynamic programming approach fails. We propose a time-consistent formulation of this problem, which is based on a local notion of optimality. To justify the continuous-time formulation, we prove that it is the continuous-time limit of that in discrete time. This exploits that we establish a global description of the locally optimal strategy in terms of the structure condition and the Föllmer–Schweizer decomposition of the mean-variance tradeoff.

# Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit *Mean-Variance Portfolio Selection (MVPS)* und *Mean-Variance Hedging (MVH)* in einem allgemeinen Semimartingalmodell unter Handelseinschränkungen und entwickelt eine zeitkonsistente Formulierung von MVPS als ein dynamisches Optimierungsproblem. Die Einschränkungen werden durch previsible Korrespondenzen beschrieben; es werden nur Strategien zugelassen, die in einer abgeschlossenen konvexen Menge  $C(\omega, t)$  liegen, die vom Zustand  $\omega$  und Zeitpunkt  $t$  auf eine previsible Art abhängen kann.

Um eine Lösung für das eingeschränkte MVH-Problem zu erhalten, zeigen wir zunächst die  $L^2$ -Abgeschlossenheit des Raums  $G_T$  aller Handelserträge (d.h. aller Endwerte von stochastischen Integralen bezüglich des Preisprozesses der zugrundeliegenden Anlagen). Dies ist eine erste Neuerung, die im Folgenden erlaubt das Problem auf eine systematische und einheitliche Weise anzugehen und mehr Informationen über die Struktur der Lösung mittels konvexer Dualität zu erhalten.

Es zeigt sich, dass die  $L^2$ -Abgeschlossenheit von  $G_T$  mit der Abgeschlossenheit in der Semimartingaltopologie  $\mathcal{S}(P)$  von Räumen von stochastischen Integralen mit eingeschränkten ( $C$ -wertigen) Integranden zusammenhängt, und wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen für letztere Abgeschlossenheit. Anwendungen in der Nutzenmaximierung und Superreplikation unter Einschränkungen führen oft zu Räumen von stochastischen Integralen, die previsible-konvex sind. Wir zeigen, dass ein solcher Raum genau dann in  $\mathcal{S}(P)$  abgeschlossen ist, wenn er ein Raum stochastischer Integrale von  $C$ -wertigen Integranden ist, wobei  $C$  eine previsible Korrespondenz mit abgeschlossenen und konvexen Werten ist.

Falls die Einschränkungen durch abgeschlossene Kegel gegeben sind, reduziert sich MVPS, als ein *statisches* Optimierungsproblem verstanden, auf ein bestimmtes MVH-Problem. Wenn wir letzteres als ein stochastisches Kontrollproblem auffassen, können wir die zugehörige Wertfunktion durch die maximalen Lösungen von zwei gekoppelten stochastischen Rückwärtsdifferentialgleichungen charakterisieren und die optimale Strategie als die punktweisen Minimierer der Driftraten beschreiben.

Als *dynamisches* Optimierungsproblem ist MVPS zeitinkonsistent im Sinne, dass es Bellmans Optimalitätsprinzip nicht erfüllt und daher der

übliche dynamische Programmierungsansatz versagt. Wir schlagen deshalb eine zeitkonsistente Formulierung des Problems vor, die auf einem lokalen Optimalitätsbegriff beruht. Um die zeitstetige Formulierung zu rechtfertigen, zeigen wir, dass sie der zeitstetige Grenzwert derer in diskreter Zeit ist. Dies beruht auf einer globalen Beschreibung der lokal optimalen Strategie mittels der Structure Condition und der Föllmer–Schweizer Zerlegung des Mean-Variance Tradeoff.