

Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung

Working Paper

Author(s): Carosio, Alessandro

Publication date: 2006

Permanent link: https://doi.org/10.3929/ethz-a-006057779

Rights / license: In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in: Bericht / Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie 310-311

This page was generated automatically upon download from the <u>ETH Zurich Research Collection</u>. For more information, please consult the <u>Terms of use</u>. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie

Bericht



Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung Band 1

Alessandro Carosio

September 2008

Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung

Band 1

Alessandro Carosio

Auflage September 2008



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich Institut für Geodäsie und Photogrammetrie

Vorwort

Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung sind Grundlagen in der Ausbildung der Geomatikingenieure.

Der Stoff wird in den zwei Vorlesungen Parameterschätzung I und II im 2. Studienjahr vermittelt. Die vorliegende Publikation in zwei Bänden ist vor allem als Arbeitshilfsmittel für die Studierenden gedacht, die regelmässig die Vorlesungen besuchen und die selbstständig die dazugehörigen Übungen lösen.

Aussenstehende können die zwei Bände ebenfalls als Nachschlagewerk einsetzen, wenn sie mit dem Vermessungswesen vertraut sind und bereits einige mathematische Vorkenntnisse besitzen.

Ein herzlicher Dank verdienen Frau G. Rothenberger und Frau H. Neiger, die das Manuskript bearbeitet haben, Herr W. Schneibel für die graphischen Darstellungen und alle meine Assistierenden, die sich an der redaktionellen Arbeit beteiligt haben.

Zürich, 01. September 2008

Alessandro Carosio

Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung, Band 1

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1.	Einleitung	1
	1.1 Die Entwicklung der Ausgleichungsrechnung	1
	1.2 Aufgaben der Ausgleichungsrechnung	3
	1.3 Messfehler	4
	1.4 Voraussetzungen für eine Ausgleichung	5
	1.5 Anwendungsgebiete	6
	1.6 Ausgleichungsmethoden	6
2.	Rekapitulation aus der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	8
	2.1 Der natürliche Umgang mit unsicheren Grössen	8
	2.2 Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	9
	2.3 Die Wahrscheinlichkeit	10
	2.5 Die Wamscheimenken 2.4 Zufallsvariablen	10
	2.5 Figenschaften der Zufallsvariablen	10
	2.5.1 Allgemeines	11
	2.5.2 Die Verteilungsfunktion	11
	2.5.3 Die Dichtefunktion	12
	2.5.4 Parameter einer Verteilung	12
	2.5.5 Realisierung einer Zufallsvariable	14
	2.6 Wichtige Verteilungs- und Dichtefunktionen	14
	2.6.1 Gauss- oder Normalverteilung	14
	2.6.2 Die $\chi 2$ - Verteilung	16
	2.6.3 Die F-Verteilung	I7 10
	2.6.4 Die t- verteilung	19
	2.7 Menframensionale Zulalisvariablen	22
	2.7.1 Aligementes 2.7.2 Verteilung und Dichte	22
	2.7.3 Kovarianz Korrelationskoeffizient	22
	2.7.4 Die 2-dimensionale Normalverteilung	26
	2.7.5 Die n-dimensionale Normalverteilung	27
	2.7.6 Kofaktoren und Gewichte	29
	2.8 Fehlerfortpflanzung	30
	2.9 Schätzfunktionen	33
	2.9.1 Allgemeines	33
	2.9.2 Eigenschaften der Schätzfunktionen	34
	2.10 Konfidenzintervalle	35
	2.11 Testen von Hypothesen	41
	2.11.1 Allgemeines	41
	2.11.2 Vorgehen	41

			Seite
	2.11.	3 Alternativhypothesen, Fehler 2. Art	44
	2.11.	4 Entscheidungsmöglichkeiten und ihre Wahrscheinlichkeiten	45
3.	Au	ıszug aus der linearen Algebra	47
	3.1	Begriffe und Bezeichnungen	47
	3.2	Rechenoperationen mit Matrizen	49
	3.3	Inversion einer Matrix	52
	3.4	Eigenvektoren und Eigenwerte	53
	3.5	Differentiation von Matrizenfunktionen	54
	3.6	Die numerische Lösung von Gleichungssystemen und die Inversion	
		von Matrizen	55
	3.6.1	Vielfalt der Methoden	55
	3.6.2	Der Austausch-Schritt (Al-Schritt) Die Inversion der Koeffizientenmetrix	50 50
	3.0.3 3.6.4	Die Lösung des Gleichungssystems	59 61
	3.6.5	Rechenkontrolle beim Austauschverfahren	65
	01010		
4.	Da	as mathematische Modell einer Ausgleichung	66
	4.1	Mathematische Modelle im Allgemeinen	66
	4.2	Mathematische Modelle im Vermessungswesen	67
	4.3	Das stochastische Modell	68
	4.4	Das funktionale Modell	70
	4.5	Überbestimmte Systeme	72
	4.6	Ausgleichungsverfahren	72
	4.7	Die Methode der kleinsten Ouadrate	74
	4.7.1	Das Ausgleichungsprinzip	74
	4.8	Die Gauss'schen Begründungen	75
	4.8.1	Erste Gauss'sche Begründung	75
	4.8.2	Zweite Gauss'sche Begründung	78
	4.8.3	Dritte Gauss'sche Begründung	78
	4.9	Ausgleichung korrelierter Beobachtungen	79
	4.9.1	Vorgehen	79
	4.9.2	Korrelationen in der geodatischen Praxis	80
5	Di	e vermittelnde Ausgleichung	84
-•	5.1	Das mathematische Modell der vermittelnden Ausgleichung	84
	5.2	Die Verbesserungsgleichungen	88
	5.2.1	Form der Beobachtungsgleichungen	88
	5.2.2	Linearisierung der Beobachtungsgleichungen	89
	5.2.3	Analytische Linearisierung	89
	5.2.4	Bildung der Verbesserungsgleichungen	90
	5.2.5	Numerische Linearisierung	93
	5.2.6	Eigenschaften der Verbesserungsgleichungen	94

			Seite
	5.3	Die Normalgleichungen	94
	5.3.1	Lösungsidee	94
5.3.2		Das Minimumsprinzip	95
	5.3.3	Die Lösung des Minimumsproblems	95
	5.3.4	Die Lösung in Matrizenform	97
	5.3.5	Die numerische Bildung der Normalgleichungen	99
	5.3.6	Rechenkontrolle bei der Bildung der Normalgleichungen	103
	5.4	Die numerische Lösung des Normalgleichungssystems	104
	5.4.1	Vielfalt der Methoden, Einschränkungen im Kurs	104
	5.5	Schlusskontrolle	105
	5.6	Verfahren für die Berechnung von [pvv]	107
	5.7	Die Kofaktorenmatrix der unbekannten Parameter	111
	5.8	Die Varianzen und Kovarianzen der unbekannten Parameter	113
	5.9	Die Kofaktorenmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen	114
	5.10	Die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen	115
	5.11	Die a posteriori Schätzung der Varianz	119
	5.12	Der Modelltest	123
	5.13	Test der standardisierten Verbesserungen	127
	5.14	Konfidenzintervalle	128
	5.15	Arbeitsanleitung für eine vermittelnde Ausgleichung	129
6.	Di	e vermittelnde Ausgleichung in der Triangulation	133
	6.1	Einführung	133
	6.2	Die unbekannten Parameter	133
	6.3	Distanzmessungen	134
	6.3.1	Das funktionale Modell im Allgemeinen	134
	6.3.2	Das stochastische Modell	135
	6.3.3	Beobachtungs- und Verbesserungsgleichungen	136
	6.4	Richtungsmessungen	140
	6.4.1	Das funktionale Modell im Allgemeinen	140
	6.4.2	Das stochastische Modell	143
	6.4.3	Beobachtungsgleichungen	144
	6.4.4	Verbesserungsgleichungen	144
	6.5	Höhenwinkel und Höhenunterschiede	147
	6.5.1	Das funktionale Modell im Allgemeinen	147
	6.5.2	Das stochastische Modell Bechachtunge und Verhauserungegleichungen	148
	0.3.3	Direkt heebachtete Darameter	150
	0.0	Anwendungsmöglichkeiten	150
	0.0.1 669	Das stochastische Modell	150
	663	Beobachtungs- und Verbesserungsgleichungen	151
	67	Der Ahriss	152
	671	Ein übersichtliches Rechenschema	152
	5.7.1		102

	Seite
6.7.3 Der Distanzabriss	157
6.8 Anwendungsbeispiel 1: Richtungsnetze	159
6.9 Anwendungsbeispiel 2: Lagerung von zwangsfreien Netzen	161
6.10 Anwendungsbeispiel 3: Die Stationsausgleichung	165
6.10.1 Das Problem	165
6.10.2 Das funktionale Modell	166

7.	Fe	hlerellipsen	171
	7.1	Stochastische Eigenschaften mehrdimensionaler Grössen	171
	7.2	Die mittlere Fehlerellipse einer zweidimensionalen Zufallsvariable	172
	7.3	Die mittlere Fehlerellipse als Eigenwertproblem	183
	7.4	Die Fehlerellipsen als zweidimensionale Vertrauensintervalle	190
	7.5	Mittlere Fehler-Ellipsoide und -Hyperellipsoide	195
	7.6	Mehrdimensionale Vertrauensintervalle	197
	7.7	Der mittlere Punktfehler	198
	7.8	Die relative mittlere Fehlerellipse	199
	7.9	Die mittleren Fehlerellipsen in geodätischen Netzen	202
	7.9.1	Berechnungsvorgang für die mittleren Fehlerellipsen	202
	7.9.2	Mittlere Fehlerellipsen a priori und a posteriori	203
	7.9.3	Eigenschaften der mittleren Fehlerellipsen	204
	7.10	Graphische Konstruktion von mittleren Fehlerellipsen	206
8.	Di	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis	215
8.	Di 8.1	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung	215 215
8.	Di 8.1 8.1.1	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines	215 215 215
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis	215 215 215 215 215
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen	215 215 215 215 216
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften	 215 215 215 216 216
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.2	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau	 215 215 215 215 216 216 216 216 216 216 210
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.3	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung	215 215 215 215 216 216 216 216 219
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.4 8.2.4 8.2.5	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung Definitiver Netzentwurf	 215 215 215 216 216 216 219 220 220 220
8.	Di 8.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.4 8.2.5 8.3	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung Definitiver Netzentwurf Lagerung des Netzes	 215 215 215 216 216 216 219 220 220 220 223
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.4 8.2.5 8.3 8.3.1	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung Definitiver Netzentwurf Lagerung des Netzes Beurteilung der geplanten Messanordnung und der erwarteten Ergebnisse Allgemeines	 215 215 215 216 216 216 219 220 220 223 223
8.	Di 8.1 8.1.1 8.2.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.4 8.2.5 8.3 8.3.1 8.3.2	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung Definitiver Netzentwurf Lagerung des Netzes Beurteilung der geplanten Messanordnung und der erwarteten Ergebnisse Allgemeines Präanalyse der Genauigkeit	 215 215 215 216 216 216 219 220 220 223 223 224
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.4 8.2.5 8.3 8.3.1 8.3.2 8.3.3	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung Definitiver Netzentwurf Lagerung des Netzes Beurteilung der geplanten Messanordnung und der erwarteten Ergebnisse Allgemeines Präanalyse der Genauigkeit Präanalyse der Zuverlässigkeit	 215 215 215 216 216 216 219 220 223 223 224 225
8.	Di 8.1 8.1.1 8.1.2 8.2 8.2.1 8.2.2 8.2.3 8.2.4 8.2.5 8.3 8.3.1 8.3.2 8.3.3 8.3.4	e Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis Einleitung Allgemeines Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis Die Planung geodätischer Messanordnungen Eigenschaften Praktische Kriterien für den Netzaufbau Rekognoszierung Definitiver Netzentwurf Lagerung des Netzes Beurteilung der geplanten Messanordnung und der erwarteten Ergebnisse Allgemeines Präanalyse der Genauigkeit Präanalyse der Zuverlässigkeit Voraussetzung für die Anwendung der Genauigkeits- und	 215 215 215 216 216 216 219 220 220 223 223 224 225

Beurteilung der Ergeb	nisse (Messungen und Berechnungen)
Verfahren	
Testorössen	

8.4.1

8.4

8.4.2	Testgrössen	229
8.4.3	Vorgehen bei der Beurteilung der Messungen	230
8.4.4	Beurteilung der Netzzwänge	231

228

228

		Seite
9.	Die bedingte Ausgleichung	234
9.1	Das stochastische Modell	234
9.2 Das funktionale Modell der bedingten Ausgleichung		234
9.3 Minima und Maxima mit Nebenbedingungen (Verfahren von Lagrange)		238
9.4	Die Korrelatennormalgleichungen	240
9.5	Das Rechenschema	242
9.6	Kofaktoren der Widersprüche	245
9.7	Die Berechnung der [pvv]	247
9.8	Schlussprobe	250
9.9	Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit a posteriori	250
9.10	Kofaktoren der Korrelaten	250
9.11	Kofaktoren der Verbesserungen	251
9.12	Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen	252
9.13	Der mittlere Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen;	
	a priori, a posteriori	253
9.14	Der mittlere Fehler an Funktionen der ausgeglichenen Beobachtung	254
0.15	nach der Matrizenmetnode	254
9.15	aus dem Auflösungsschema	255
	aus dem Auriosungssenema	233
10.	Allgemeine Ausgleichungsformen	265
10.1	Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den	265
10.2	undekannten Parametern Redirecte Aussilaishung mit unhalvongton Parametern	205
10.2	Die gussivermittelnde Ausgleichung	213
10.5	Die quasivernintende Ausgleichung	202
11		200
11.	Die Theorie der Zuverlassigkeit im Vermessungswesen	200
11.1	Einieitung	288
11.2	Gegenstand und Definition der Zuverlässigkeit	289
11.3	Intuitive Losungen Des methemetische Medell der Zuwerlässislesit	290
11.4	Das mathematische Modell der Zuverlassigkeit	290
11.3	Zuwerlässigkeit und Test der Verbesserungen	293
11.0	Lokala Zuwarlässigkeitsindikatoron	299
11./	Die Zuverlässigkeit der Koordington (äussore Zuverlässigkeit)	202
11.0	Die Zuverlassigken der Koordinaten (aussere Zuverlassigken)	205
11.9	Daistenung der ausselen Zuverlässigkeit Die Anwendung der Zuverlässigkeitsmodelle	202
11.10		308
12	Koordinatentransformationen	300
12.1	Das Problem im Allgemeinen	300
12.1	Die Helmert-Transformation	310
		210

		Seite
12.3	Die allgemeine lineare Transformation (Affinität)	315
12.4	Maschenweise Affine Transformationen	317
12.5	Transformationen mit Polynomen und anderen Funktionen	320
12.6	Interpolation und Prädiktion im Allgemeinen	321
12.7	Eindimensionale Prädiktionsprobleme	322
12.8	Funktionale Ansätze für die Koordinatenbestimmung	323
12.9	Stochastische Ansätze für die Koordinatenbestimmung	324
12.10	Kombinierte Ansätze für die Koordinatenbestimmung	328
12.1	0.1 Ein Modell der Wirklichkeit	328
12.1	0.2 Phasen-Modelle	328
12.1	0.3 Die Kollokation	328
12.1	0.4 Die Interpolation nach dem arithmetischen Mittel (TRANSINT)	331
12.11	Wahl des Interpolationsverfahrens	340
12.1	1.1 Welche Interpolationsmethode sollen wir verwenden?	340
12.12	Die Ursachen der Koordinatenunterschiede zwischen Plan- und	
	Landeskoordinaten	340
12.13	Das vorhandene Material	341
12.14	Test der Transformation	341
12.15	Schlussfolgerungen	342

13. Robuste Ausgleichung	345
13.1 Allgemeines	345
13.1.1 Einführung	345
13.1.2 Die Analyse der Zuverlässigkeit	345
13.1.3 Die Fehlersuche a posteriori	346
13.1.4 Die robuste Ausgleichung	346
13.1.5 Historischer Überblick	347
13.2 Das stochastische Modell der robusten Ausgleichung	349
13.3 Funktionale Modelle	349
13.3.1 Schätzfunktionen	349
13.4 Die robuste vermittelnde Ausgleichung nach Huber	354
13.4.1 Grundlagen	354
13.4.2 Numerische Lösung	355
13.4.3 Schnelle numerische Verfahren	358
13.5 Modernere funktionale Modelle der BIBER-Schätzer	361
13.6 Kategorien von modernen M-Schätzern	366
13.7 Robuste Ausgleichungsverfahren und Zuverlässigkeit	368

1. Einleitung

1.1 Die Entwicklung der Ausgleichungsrechnung

Die heute allgemein verwendete Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wurde am Anfang des 19. Jahrhunderts fast gleichzeitig und unabhängig von Adrien Marie Legendre in Paris und Carl Friedrich Gauss in Göttingen erfunden.

Die ersten Erfolge des Verfahrens erzielte man in der Ausgleichung astronomischer Beobachtungen. C.F. Gauss selbst verwendete sie aber auch zur Berechnung geodätischer Netze. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte sich die Methode der kleinsten Quadrate als Verfahren für die Ausgleichung aller Triangulationsnetze durch.

Während ihrer bald zweihundertjährigen Geschichte hat die Ausgleichungsrechnung eine wesentliche Entwicklung erfahren.

Die ersten Anwendungen zeigten die Vorteile des Verfahrens für die Koordinatenberechnung in Triangulationsnetzen. Die schwierigen Formulierungen von C.F. Gauss und F. W. Bessel, die die Methode weiterentwickelt hatten, wurden vereinfacht und verständlich dargestellt. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde die Methode der kleinsten Quadrate sukzessiv in die Vermessungspraxis als die Berechnungsmethode für die Triangulation eingeführt. Die Zeit der willkürlichen Verteilung der Messwidersprüche war endgültig abgeschlossen.

Die Entwicklungen im 20. Jahrhundert hatten die Lösung der numerischen Probleme zum Ziel, welche bei der Ausgleichung grosser Netze auftreten.

Erst nach 1950 wurde die Matrizenrechnung zur Lösung der Ausgleichungsprobleme eingesetzt. Dies hat den Zugang zur Theorie wesentlich erleichtert. Insbesondere wurde die Ausgleichung korrelierter Beobachtungen allgemein verständlich.

Die Entwicklung der Informatik hat seit den 60iger Jahren der Ausgleichungsrechnung einen grossen Impuls gegeben, da dadurch der Rechenaufwand endlich kein Problem mehr darstellt. Die heutige Informatik hat die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate allgemein zugänglich gemacht. Sie wird auf allen Stufen der geodätischen Arbeit angewandt: von den Hauptnetzen der Triangulation bis zu den kleinen Aufgaben der Ingenieurvermessung und der Polygonierung für die Amtliche Vermessung.

Die Modelle werden komplexer und allgemeiner, so dass es immer schwieriger wird, ihre Eigenschaften zu beurteilen, und die Hilfe des Computers bei der Interpretation der Resultate unentbehrlich geworden ist.

In diesem letzten Bereich wurden bedeutende Fortschritte dank der immer grösseren Verknüpfung zwischen Ausgleichungsrechnung und mathematischer Statistik erzielt. So wird die Methode der kleinsten Quadrate als Verfahren der Parameterschätzung angesehen und die mathematische Statistik bietet zahlreiche Verfahren für das Testen von Hypothesen, die sich auch für eine automatische Interpretation der Ergebnisse eignen.

Zur Ausgleichungsrechnung gehören aber auch Hilfsmittel für die Analyse der Modelleigenschaften. So ist es möglich, neben den gesuchten Parametern auch ihre Genauigkeit sowie die Genauigkeit anderer abgeleiteter Grössen zu schätzen.

Seit Ende der 60iger Jahre verfügen wir über Verfahren, die uns erlauben zu prüfen, wie zuverlässig die Resultate sein werden, d.h. wie gut eine Ausgleichung allfällige Modellfehler entdecken lässt.

Genauigkeit und Zuverlässigkeit sind wichtige Beurteilungskriterien. Sie spielen bei der Optimierung von Messoperationen eine grosse Rolle.

Die folgenden Kapitel geben einen Überblick über Gedanken und Prinzipien der heutigen Ausgleichungsrechnung und bieten die Grundlagen für den praktischen Einsatz der Verfahren im Vermessungswesen.

1.2 Aufgaben der Ausgleichungsrechnung

Seit der Mittelschule sind wir gewohnt, Probleme mit Hilfe der analytischen Geometrie zu lösen.

Beispiele:

- Bestimme einen Kreis, der 3 gegebene Punkte durchläuft.



- Bestimme die Geraden, die durch einen Punkt **A** gehen und einen vorgegebenen Abstand **d** von einem zweiten Punkt **B** haben.



- Berechne die Fläche eines Dreiecks, wenn die drei Seitenlängen gegeben sind.



Alle diese Aufgaben haben die bemerkenswerte Eigenschaft, ganz genau die Anzahl Informationen zu enthalten, die notwendig sind, um das Problem zu lösen.

Bei vielen Ingenieuraufgaben tauchen hingegen oft Fragen auf, wie z.B.:

- Gegeben sind 5 Punkte, bestimme einen Kreis.
- Gegeben sind 30 Punkte, bestimme eine Parabel.
- Gegeben sind 300 Punkte, bestimme eine Gerade.

Diese Art von Fragen ist sinnvoll, wenn die verfügbaren Informationen nicht unendlich genau sind, und die gesuchten Objekte im Sinne eines Optimierungsprozesses zu bestimmen sind.

Die Ausgleichungsrechnung bietet uns die mathematischen Werkzeuge, um die oben gestellten Aufgaben zu lösen. Die auffälligste Eigenschaft dieser Art Probleme ist die Anzahl der gegebenen Informationen, die für das verwendete mathematische Modell (hier die ebene Geometrie) grösser als notwendig ist.

1.3 Messfehler

In den Ingenieur- sowie in den Naturwissenschaften arbeitet man mit Messungen. Ungenauigkeiten sind in den Messprozessen unvermeidlich. Sie müssen bei den Auswertungen berücksichtigt werden. Die Ursachen von Messfehlern sind vielseitig, ihre Eigenschaften ebenfalls. Es sind drei Fehlerarten zu unterscheiden:

Grobe Fehler	sind eigentliche Irrtümer, die bei einer falschen Abwicklung des Messprozesses entstehen (z.B. falsche Datenübertra- gung, fehlerhafte Ablesung).
Systematische Fehler	sind Fehler, die sich regelmässig auswirken. Man versucht sie durch geeignete Konstruktion der Instrumente, durch Anordnung der Messungen oder rechnerisch zu eliminieren.
Zufällige Fehler	sind unvermeidliche Fehler, die nicht vorhersehbar sind. Sie können als Zufallsvariablen im Sinne der Statistik betrach- tet werden. Im Vermessungswesen treten sehr häufig zufäl- lige Fehler auf, die als normalverteilt angenommen werden können.

In der Ausgleichungsrechnung werden wir uns im ersten Teil nur mit den zufälligen Fehlern beschäftigen. Wir nehmen stillschweigend an, dass die Messungen so organisiert werden, dass keine groben Fehler unentdeckt bleiben. Ebenfalls nehmen wir an, dass die Instrumente keine systematischen Fehler erzeugen.

Die Problematik der groben Fehler und der Modellfehler im Allgemeinen wird im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie in Kapitel 11 behandelt.

1.4 Voraussetzungen für eine Ausgleichung

Nicht alle überbestimmten Probleme eignen sich für eine Ausgleichung. Die Zweckmässigkeit einer Ausgleichung hängt von den Eigenschaften der Beziehungen und von den auftretenden Grössen ab oder genauer gesagt, von der mathematischen Vorstellung, die wir von ihnen haben. Diese Vorstellung nennen wir das mathematische Modell, das eine idealisierte Abstraktion der komplexen Realität ist.

Folgende Voraussetzungen sind für eine Ausgleichung notwendig:

- Funktionales Modell

Modellvorstellungen (Hypothesen) über die mathematische Verknüpfung zwischen den zu bestimmenden Grössen (Modellparameter) und den gemessenen oder erhobenen Grössen untereinander.

- Stochastisches Modell (Statistisches Modell)

Modellvorstellungen (Hypothesen) über das stochastische Verhalten der verfügbaren Grössen (Messungen, andere Zufallsvariablen).

- Überbestimmtes System

Die Anzahl der realisierten Zufallsgrössen (in der Regel Messungen) ist grösser als es für die Bestimmung der Modellparameter im vorgesehenen funktionalen Modell notwendig wäre.

Die obengenannten Voraussetzungen sind selbstverständlich nicht hinreichend. Die Eigenschaften des funktionalen, aber vor allem des stochastischen Modells sind entscheidend, um Schlüsse über die Zweckmässigkeit der Ausgleichung und über die geeignete Ausgleichungsmethode zu ziehen.

1.5 Anwendungsgebiete

Die Ausgleichungsrechnung eignet sich in der Regel für Probleme, in denen Messungen, Erhebungen oder Schätzungen auftreten: z.B. in der Physik, im Ingenieurwesen, in den Naturwissenschaften usw. Anwendungen in der Wirtschaft und allgemein in den Geisteswissenschaften sind ebenfalls geläufig.

Das Vermessungswesen ist ein wichtiges Anwendungsbeispiel.

1.6 Ausgleichungsmethoden

Die auszugleichenden Beobachtungen bilden als Folge der unvermeidbaren Messungsungenauigkeit ein inkonsistentes System, das heisst, ein System von Beobachtungen, das Widersprüche enthält. Die Grundidee der Ausgleichung ist, zweckmässige Korrekturen (Verbesserungen) für die einzelnen Beobachtungen zu bestimmen, um die Widersprüche im mathematischen Modell zu beseitigen.

Wie wählt man die zweckmässigen Verbesserungen unter den unendlich vielen Möglichkeiten, die zu einer widerspruchsfreien Beobachtungsreihe führen?

Es gibt **verschiedene Ausgleichungsprinzipien**, die alle eine gemeinsame Eigenschaft haben: sie suchen und liefern möglichst kleine Verbesserungen. Die Unterschiede liegen in der Interpretation dieser Aussage, die vom Anwendungsbereich abhängig ist.

In dieser Vorlesung wird hauptsächlich die **Methode der kleinsten Quadrate** behandelt. In Kapitel 13 werden als Ergänzung Alternativen aus dem Bereich der Robusten Statistik beschrieben.

Zur Geschichte der M.d.kl.Q. gibt es unzählige Publikationen. Man verweist hier z.B. auf [Wolf, 1977]: C.F. Gauss und die Methode der kleinsten Quadrate; Allg. Verm. Nachrichten (AVN) 1977, Heft 4.

Literaturverzeichnis

- Bencini, P.: Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
- Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
- Dupraz, H.: Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
- Howald, P.: Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
- Pelzer, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

2. Rekapitulation aus der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Der natürliche Umgang mit unsicheren Grössen

Wir arbeiten im täglichen Leben mit verschiedenartigen Grössen, mit welchen wir versuchen, die beobachteten Ereignisse möglichst realistisch zu beschreiben.

Bereits in der Kindheit lernen wir mit unsicheren, genäherten Informationen umzugehen. Wir wissen, dass viele quantitative Angaben nur als Richtwerte gelten und keineswegs eindeutig bestimmt und reproduzierbar sind.

Man unterscheidet deshalb zwei Typen von Grössen:

a) Grössen, die eindeutig bestimmt sind und daher immer zu gleichen Realisierungen führen.

Wir nennen sie deterministische oder funktionale Grössen.

Beispiele:

Preis einer bestimmten SBB-Fahrkarte; die Telefonnummern der ETH Hönggerberg usw.

 b) Grössen, die mehr oder weniger vom Zufall abhängen und daher nicht genau vorhergesagt werden können. Beim Wiederholen des Realisierungsprozesses bekommt man in der Regel verschiedene Ergebnisse. Wir nennen sie stochastische Grössen oder Zufallsgrössen.

Beispiele:

Die Anzahl Briefe, die ich morgen in meinem Briefkasten finden werde; der Dollarkurs in den nächsten Tagen; die Fahrzeit vom Zentrum zum Flughafen.

Mit diesen beiden Arten von Grössen können wir intuitiv sehr gut umgehen. Wir brauchen sie täglich, um uns ein Bild der Welt zu machen, um die Natur besser zu verstehen und um sinnvoll handeln zu können, auch wenn wir nicht über sichere Informationen verfügen.

Viele Eigenschaften von stochastischen Prozessen können wir oft intuitiv erkennen, wenn wir uns gedanklich vorstellen, die Realisierung der Experimente mehrere tausendmal zu wiederholen. Eine solche Betrachtungsweise ist hilfreich und erlaubt, grundsätzliche Fehler frühzeitig zu entdecken.

2.2 Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Um mit Zufallsgrössen arbeiten zu können, wurden Teile der Mathematik entwickelt, die sich mit den Gesetzmässigkeiten befassen, die das Verhalten der Zufallsgrössen beschreiben oder interpretieren lassen. Daraus sind viele nützliche mathematische Werkzeuge entstanden, die wir auch im Vermessungswesen einsetzen können (z.B. Wahrscheinlichkeitstheorie).

Aus den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie wurden verschiedene Arbeitsmethoden entwickelt:

- Die beschreibende Statistik bietet Verfahren an, um die Ergebnisse von Zufallsexperimenten (z.B. Erhebungen, Messungen) übersichtlich darzustellen und dadurch aussagekräftiger zu machen. Die Interpretation wird dabei mit Hilfe von geeigneten Kenngrössen erleichtert.
- Eine andere Arbeitsweise bietet die **analytische Statistik**, mit welcher man Verfahren aufbauen kann, die uns erlauben, aus den Ergebnissen von Zufallsexperimenten Schlüsse zu ziehen, um dann über zukünftige Experimente sinnvolle Vorhersagen zu machen.

Für uns ist die Erkenntnis wichtig, dass sich die Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung sehr stark an der mathematischen Statistik orientiert.

Literatur: z.B. [Maurer, 1980]

2.3 Die Wahrscheinlichkeit

Eine der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit, der durch die Axiome von Kolmogoroff (1933) definiert wird.

Definition:

Die Wahrscheinlichkeit **P(A)** eines Ereignisses **A** bei einem Experiment ist eine eindeutig bestimmte reelle Zahl mit folgenden Eigenschaften:

- Axiom 1: P(A) ist eine nichtnegative Zahl, die höchstens gleich 1 sein kann: $0 \le P(A) \le 1$.
- Axiom 2: Für ein sicheres Ereignis S bei einem Experiment gilt: P(S) = 1. Für äquivalente Ereignisse B und C bei einem Experiment gilt P(B) = P(C).
- Axiom 3: Schliessen sich zwei Ereignisse A und B bei einem Experiment gegenseitig aus, so gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2.4 Zufallsvariablen

Wenn das Ergebnis eines Zufallsexperimentes als Zahl dargestellt werden kann, betrachtet man dieses Resultat als eine Zufallsvariable.

Definition:

Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperimentes genau einen reellen Wert zuordnet.

Beispiel:

Ein Messvorgang kann als Zufallsexperiment betrachtet werden. Die Messung, welche jedem Ergebnis einen reellen Zahlenwert zuordnet, entspricht daher einer Zufallsvariable.

Mit diesen Modellannahmen können wir die Werkzeuge der mathematischen Statistik bei der Lösung von Vermessungsproblemen verwenden.

2.5 Eigenschaften der Zufallsvariablen

2.5.1 Allgemeines

Die wichtigste Eigenschaft einer Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable gewisse Werte annehmen kann. Um diese Wahrscheinlichkeit in anschaulicher und leicht anwendbarer Art darzustellen, verwendet man zwei Funktionen: Die Verteilungs- und die Dichtefunktion.

Die Verteilungsfunktion kann auch für nicht stetige (diskrete) Zufallsvariablen definiert werden, die Dichtefunktion ist hingegen nur für stetige Zufallsvariablen definiert. Für die nichtstetige existiert die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die der Dichte entsprechend, die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen möglichen Werte angibt.

2.5.2 Die Verteilungsfunktion

Definition:

Die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} < \mathbf{x})$$

nennt man die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.



Fig. 1

Eigenschaften:

Wenn $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$, ist $\mathbf{F}(\mathbf{a}) \le \mathbf{F}(\mathbf{b})$ $\mathbf{F}(-\infty) = \mathbf{0}$ $\mathbf{F}(\infty) = \mathbf{1}$ $\mathbf{P}(\mathbf{a} \le \mathbf{X} \le \mathbf{b}) = \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$

2.5.3 Die Dichtefunktion

Definition:

Falls F(x) (Verteilung der Zufallsvariablen X) differenzierbar ist, nennt man

 $\mathbf{F'}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

die Dichte der Verteilung von X oder die Dichtefunktion von X.



Fig. 2

Eigenschaften:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v) dv$$
 (1)

$$\mathbf{F}(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$$
 (2)

$$P(a < x \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(v) dv$$
 (3)

2.5.4 Parameter einer Verteilung

Die Verteilungsfunktion beschreibt vollumfänglich die Eigenschaften einer Zufallsvariablen. (Bei stetigen Zufallsvariablen hat die Dichtefunktion ebenfalls diese Eigenschaft.) Die Arbeit mit der Verteilungs- oder Dichtefunktion ist aber etwas umständlich und nicht immer zwingend notwendig. Um die Analysen zu vereinfachen, werden daher einige Masszahlen (Parameter) definiert, die für viele Betrachtungen genügen und einfacher zu verwenden sind. a) Der Erwartungswert E(X)

Definition:

Der Erwartungswert E(X) ist für eine stetige Zufallsvariable durch die folgende Formel definiert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (4 a)$$

Für eine diskrete Zufallsvariable ist hingegen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \sum_{i} \mathbf{x}_{i} \mathbf{p}(\mathbf{x}_{i}). \tag{4 b}$$

wobei $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass $\mathbf{X} = \mathbf{x}_i$.

Der Erwartungswert wird oft mit μ bezeichnet, wobei $\mu_x = E(X)$.

b) Die Varianz V(X) und die Standardabweichung σ (Streuungsparameter).

Definition 1:

Die Varianz V(X) einer Zufallsvariable X mit $E(X) = \mu_x$ ist:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}\right)^{2}\right)$$

Wenn die Zufallsvariable **X** stetig ist, kann man die Varianz auch wie folgt definieren:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx.$$
 (5)

Definition 2:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

nennt man die Standardabweichung der Zufallsvariablen X.

2.5.5 Realisierung einer Zufallsvariable

Das erhaltene Ergebnis eines Zufallsexperimentes bezeichnet man als Realisierung der dazugehörigen Zufallsvariablen.

Es ist wichtig, die Unterschiede zwischen Zufallsvariablen und Realisierungen zu sehen:

- Zufallsvariablen haben keinen bestimmten Wert; sie werden durch die Verteilungsfunktion, die Dichte und den anderen Parametern beschrieben.
- Die Realisierungen der Zufallsvariablen sind feste Werte, die aus dem durchgeführten Zufallsexperiment entstanden sind. Sie besitzen daher keine Verteilungsoder Dichtefunktion. Man kann mit ihnen rechnen.

2.6 Wichtige Verteilungs- und Dichtefunktionen

2.6.1 Gauss- oder Normalverteilung

Definition 1:

Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
(6)

mit $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$

heisst normalverteilt. μ und σ^2 heissen Parameter dieser Normalverteilung.

Satz 1:

Für die normalverteilte Zufallsvariable X gilt:

$$E(X) = \mu ,$$
$$V(X) = \sigma^2$$

Satz 2:

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^{2}} dv$$
(7)

Literatur: [Kreyszig, 1968], [Maurer, 1980]

Definition 2:

Die Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heisst Standardnormalverteilung. Die entsprechende Verteilungsfunktion ist:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
 (8)

und die Dichtefunktion ist:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad e^{-\frac{x^2}{2}}$$
 (9)

Die Standardnormalverteilung findet man in Tabellenform als Anhang von Statistikbüchern.

Satz 3:

Sei Y normalverteilt mit Parameter μ und σ^2 , dann ist

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \tag{10}$$

standardnormalverteilt.

Mit dieser Transformation kann man aus der tabellierten Verteilung von X die Verteilung von Y berechnen.

2.6.2 Die χ^2 – Verteilung

Definition:

Gegeben seien \mathbf{n} voneinander unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen \mathbf{X}_{i} .

Die Zufallsvariable

 $\chi_n^2 = X_1^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2$

hat eine Verteilung, die χ^2 – Verteilung genannt wird.

 $n\,$ ist der Freiheitsgrad der Zufallsvariablen $\,\chi^2.\,$



Fig. 3

Satz 1:

Der Erwartungswert von χ^2 ist

$$E(\chi_n^2) = n.$$
 (11)

Die Varianz von χ^2 ist

$$V(\chi_n^2) = 2n.$$

Satz 2:

Gegeben sind die normalverteilten unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2 \dots X_n$ mit E $(X_i) = \mu$ und V $(X_i) = \sigma^2$ (für i = 1, ..., n), sowie

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_{i} \qquad (\text{Mittelwert der } \mathbf{X}_{i})$$

und

$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2}$$

(empirische Schätzung der Varianz).

Dann ist

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{n} - \mathbf{1}}{\mathbf{\sigma}^2} \cdot \mathbf{S}^2$$

eine $\,\chi^2-$ verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgrad $\,n-1$.

2.6.3 Die F-Verteilung

Definition:

Gegeben seien zwei unabhängige χ^2 - verteilte Zufallsvariablen. Die erste, χ_m^2 habe den Freiheitsgrad **m**, die zweite, χ_n^2 den Freiheitsgrad **n**. Der Quotient

$$\mathbf{F}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \frac{\frac{\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{m}}^2}{\mathbf{m}}}{\frac{\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{n}}^2}{\mathbf{n}}}$$
(12)

ist ebenfalls eine Zufallsvariable, deren Verteilung \mathbf{F} -Verteilung (oder Fisher-Verteilung) mit den Freiheitsgraden \mathbf{m} und \mathbf{n} genannt wird.



Bemerkung:

Es gibt zwei Spezialfälle von F-verteilten Zufallsvariablen, die besonders zu erwähnen sind:

a) $\mathbf{n} \rightarrow \infty$

da
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\chi_n^2}{n} = 1$$
,
 $n \to \infty$
. ist $F_{m,\infty} = \frac{\chi_m^2}{m}$.

Diese Eigenschaft ist besonders wichtig, da die empirische Schätzungsformel für die Varianz gleich aufgebaut ist.

b) **m** = 1

Die Variable \mathbf{F} ist das Quadrat einer zentrischen normalverteilten Zufallsvariablen, geteilt durch die aus \mathbf{n} Realisierungen geschätzte Varianz.

Es handelt sich um das Quadrat einer t-verteilten Zufallsvariable.

Satz

Gegeben seien X1, X2, ... und Y1, Y2, ... als normalverteilte Zufallsvariable mit

$$E(X_i) = E(Y_i) = \mu$$
 und $V(X_i) = V(Y_i) = \sigma^2$ (für i = 1, ...).

 S_x^2 und S_y^2 seien die empirischen Schätzungen der Varianzen (siehe Kapitel 2.6.2) mit den Freiheitsgraden f_x und f_y .

Dann ist

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{S}_x^2}{\mathbf{S}_y^2}$$

eine F-verteilte Zufallsvariable mit den Freiheitsgraden f_x und f_y .

Da die $f_x S_x^2 / \sigma$ und $f_y S_y^2 / \sigma$ χ_2 -verteilt sind (Kap. 2.6.2), folgt daraus

$$\mathbf{F} = \frac{\frac{\boldsymbol{\chi}_{fx}^2}{f_x}}{\frac{\boldsymbol{\chi}_{fy}}{f_x}} , \qquad (13)$$

und aus der Definition der F-Verteilung ist F F-verteilt mit den Freiheitsgraden f_x und f_y .

2.6.4 Die t-Verteilung

Definition:

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y.

X sei standard-normalverteilt, (d.h. E (X) = 0, V (X) = 1) und Y sei χ^2 -verteilt mit dem Freiheitsgrad f.

Die Verteilung der Zufallsvariable

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{f}}}$$
(14)

nennt man t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad f.



Eigenschaften:

- a) t ist symmetrisch um 0
- b) für f = 1 sind weder Erwartungswert noch Varianz definiert
- c) für f > 1 ist E(T) = 0
- d) für f > 2 ist $V(T) = \frac{f}{f-2}$
- e) für f = 1 heisst die t-Verteilung auch Cauchy-Verteilung
- f) für $\mathbf{f} \rightarrow \infty$ strebt die t-Verteilung gegen die Standard-Normalverteilung

Satz:

Seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$E(X_i) = \mu$$

$$V(X_i) = \sigma^2 \quad (f \text{ ür alle } X \text{ gleich})$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

Dann besitzt die Zufallsvariable

$$Y = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n(n-1)}}}$$
(15)

eine t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad n-1.

NB. Der Nenner ist die Formel für die Schätzung des mittleren Fehlers am Mittel von n direkten Beobachtungen der Grösse X.

Bemerkung:

Wenn wir eine normalverteilte Grösse X betrachten, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Standardabweichung σ von X ist uns bekannt.
 Dann können wir aus X eine Grösse Y herleiten, die standard-normalverteilt ist:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

 b) Die Standardabweichung σ von X ist uns nicht bekannt. Dann müssen wir aus den verfügbaren Realisierungen der Zufallsvariablen zuerst eine nicht fehlerfreie Schätzung S der Standardabweichung von X bestimmen. Erst nachher können wir die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X - \mu}{S}$$

bilden, welche nicht normalverteilt ist, sondern t-verteilt mit dem Freiheitsgrad f.

In beiden Fällen können wir mit einer linearen Transformation die Verteilung von X aus der Tabelle der Verteilung von Y sofort herleiten.

2.7 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

2.7.1 Allgemeines

Wenn in einem Zufallsexperiment zwei oder mehrere Zufallsvariablen bestimmt werden, kann man diese Variablen als Komponenten einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen betrachten.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

2.7.2 Verteilung und Dichte

Definition 1: Die Verteilungsfunktionen

 $F_x(x), F_y(y),$

der Zufallsvariablen X, Y, usw. einzeln betrachtet nennt man Randverteilungen der Komponenten von Z .

Das gemeinsame Verhalten aller Komponenten der mehrdimensionalen Zufallsvariablen wird von der mehrdimensionalen Verteilungsfunktion wiedergegeben.

Definition 2:

Die Funktion F (x, y, ...), für welche

 $F(x, y, ...) = P(X \le x \text{ und } Y \le y \text{ und } ...)$

nennt man Verteilungsfunktion der mehrdimensionalen Zufallsvariable Z.

Definition 3:

Die partielle Ableitung nach allen Variablen der Verteilungsfunktion ist die entsprechende Dichtefunktion der **n**-dimensionalen Zufallsvariable.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots) = \frac{\partial^{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y} \ldots} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots)$$
(16)

Im zweidimensionalen Fall gelten die folgenden Aussagen:

a) Die Verteilungsfunktion kann aus der Dichtefunktion hergeleitet werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \, \mathrm{d}\mathbf{u} \mathrm{d}\mathbf{v}$$
(17)

b) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$

ist die Dichte der Randverteilung in x

c) $f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$

ist die Dichte der Randverteilung in y

d)
$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty} f(u, v) \, du dv = 1$$

e)
$$P(x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(u, v) \, du \, dv$$
 (18)

2.7.3 Kovarianz, Korrelationskoeffizient

Definition 1:

Zwei Zufallsvariablen X und Y heissen unabhängig, falls gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) \bullet \mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y}) . \tag{19}$$

Wenn zwei Zufallsvariablen unabhängig sind, kann die gemeinsame Dichtefunktion ebenfalls als Produkt der Dichte der einzelnen Variablen gebildet werden.

Definition 2:

Die Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y mit den Erwartungswerten μ_x und μ_y ist

$$\sigma_{xy} = \operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{E}\left((X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right). \tag{20}$$

Definition 3:

Der Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen X und Y mit Standardabweichung σ_x , σ_y ist

$$\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{y}}}$$
(21)

Satz 1:

Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig, dann ist

Cov(X, Y) = 0 und $\rho(X, Y) = 0$

Satz 2:

Wenn X und Y normalverteilte Zufallsvariablen mit Cov(X, Y) = 0 (oder $\rho(X, Y) = 0$) sind, folgt daraus, dass X und Y unabhängig sind.

[Kreyszig, 1968]

Definition 4:

Die symmetrische Matrix

heisst die Kovarianzmatrix der **n-**dimensionalen Zufallsvariable

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}.$$

Definition 5:

Der Erwartungswert einer Matrix von Zufallsvariablen ist die Matrix der Erwartungswerte der Matrixelemente

$$\mathbf{E}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \dots \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{x}_{11}) & \mathbf{E}(\mathbf{x}_{12}) & \dots \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}_{21}) & \mathbf{E}(\mathbf{x}_{22}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}.$$
Satz 3:

Die Kovarianzmatrix einer mehrdimensionalen Zufallsvariable $X (x_1, x_2, ...)$ erfüllt die folgende Bedingung:

$$K_{xx} = E\left(\left(X - \mu_x\right)\left(X - \mu_x\right)^T\right)$$
(23)

$$= E(XX^{T}) - \mu_{X}\mu_{X}^{T}$$
(24)

2.7.4 Die 2-dimensionale Normalverteilung

Unter den mehrdimensionalen Verteilungen hat die **2-**dimensionale Normalverteilung für das Vermessungswesen besondere Bedeutung.

Definition:

Eine 2-dimensionale Zufallsvariable Z = (X,Y) heisst normalverteilt, wenn sie die folgende Dichtefunktion besitzt:

$$-b$$

$$f(x,y) = \frac{1}{a} \cdot e$$
(25)

wobei

$$a = 2 \pi \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}$$

$$\mathbf{b} = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{2(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} \left[\left(\frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2 \sigma_{xy} \left(\frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x^2} \right) \left(\frac{\mathbf{y} - \mu_y}{\sigma_y^2} \right) + \left(\frac{\mathbf{y} - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right]$$



Fig. 6

2.7.5 Die n-dimensionale Normalverteilung

Definition:

Eine n-dimensionale Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}...\mathbf{n}) = \frac{\sqrt{\mathbf{Det}\left(\mathbf{K}_{xx}^{-1}\right)}}{\sqrt{(2\pi)^{\mathbf{n}}}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{xx}^{-1}(\mathbf{X}-\mu)}$$
(26)

heisst n-dimensional normalverteilt.

In der Formel sind

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n \end{pmatrix} \quad \text{die mehrdimensionalen Zufallsvariabeln}$$
$$\mathbf{K}_{\mathbf{xx}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots \\ & \sigma_2^2 & \cdots \\ & & & \ddots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{die Kovarianzmatrix der Komponenten und}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{der Vektor der Erwartungswerte } \left[E(X_i) = \mu_i \right]$$

Siehe: [Heinhold/Gaede, Ingenieurstatistik, Oldenbourg Verlag München, Wien 1972]

Bemerkung 1:

Die Dichtefunktion der mehrdimensionalen Normalverteilung ist bestimmt, wenn die Erwartungswerte und die Kovarianzmatrix der Komponenten bekannt sind.

2.7.6 Kofaktoren und Gewichte

Es ist nicht immer notwendig, im Voraus die Varianzen und Kovarianzen der einzelnen Komponenten einer mehrdimensionalen Zufallsvariable zu haben. Manchmal genügt es, die Verhältnisse zwischen den Varianzen und Kovarianzen zu kennen.

Definition 1:

Für eine mehrdimensionale Zufallsvariable $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$

nennt man die Matrix

$$\mathbf{Q}_{xx} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \mathbf{K}_{xx} \tag{27}$$

Kofaktorenmatrix von X.

 σ_0^2 ist eine willkürlich wählbare Konstante.

 $\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ ist die Kovarianzmatrix von \mathbf{X} .

Definition 2:

In der klassischen Ausgleichungsrechnung, d.h. falls man mit unkorrelierten Messungen arbeitet, werden die Genauigkeitsverhältnisse unter den Messungen durch das Gewicht beschrieben.

Die Grösse

$$\mathbf{p}_{i} = \frac{\sigma_{o}^{2}}{\sigma_{i}^{2}}$$
, $i = 1, 2, ...$ (28)

heisst das Gewicht der i-ten Messung. σ_0 ist die einmal freiwählbare Konstante, welche bei der Definition der Kofaktorenmatrix verwendet wurde. Die Definition der Gewichte kann erweitert werden, damit auch der Fall von korrelierten Messungen berücksichtigt werden kann. Man spricht dann von einer Gewichtsmatrix:

$$P_{xx} = Q_{xx}^{-1} = \sigma_0^2 K_{xx}^{-1}$$
(29)

Sind die Messungen nicht korreliert, ist die Gewichtsmatrix eine Diagonalmatrix.

2.8 Fehlerfortpflanzung

Wir sind selten in der Lage direkt die uns interessierenden Grössen zu beobachten. In der Regel verwenden wir erhobene oder gemessene Grössen, um daraus andere herzuleiten. Wenn die Ausgangsgrössen X_i Zufallsvariablen sind, dann sind im Allgemeinen auch die hergeleiteten Grössen Y_j Zufallsvariablen. Auch hier interessieren uns ihre stochastischen Eigenschaften besonders.

Wenn die Beziehung

 $Y_{j} = G_{j} (X_{1}, X_{2}, ..., X_{n})$

ganz allgemein formuliert ist und die Verteilungsfunktionen der X_i beliebige Funktionen sind, muss die gesuchte Verteilung von Y_j aus der Funktion G_j und aus den einzelnen Verteilungsfunktionen F_i der X_i hergeleitet werden, was sehr aufwändig sein kann.

Glücklicherweise treten im Vermessungswesen sehr oft Zufallsvariablen auf, die normalverteilt sind. Die Funktionen G_i der Messungen sind entweder linear oder haben im wahrscheinlichen Bereich der X_i eine sich wenig ändernde Ableitung, so dass man sie praktisch ohne Informationsverlust durch lineare Funktionen ersetzen kann.

Die Verteilung einer Linearkombination von normalverteilten Beobachtungen ist wesentlich einfacher zu berechnen als der allgemeine Fall. Die folgenden Sätze zeigen, wie das Problem zu lösen ist. Satz 1: Jede lineare Funktion

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n + b$$

von normalverteilten Zufallsvariablen X_i ist ebenfalls eine normalverteilte Zufallsvariable.

[Kreyszig, 1968; Sätze 71.1, 71.2]

Bemerkung:

Es genügt, E(Y) und V(Y) zu bestimmen, um die stochastischen Eigenschaften der normalverteilten linearen Funktion Y zu beschreiben, da die Verteilungs- und Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable bestimmt sind, wenn man ihren Erwartungswert und die Varianz kennt.

Satz 2:

Wenn

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + b_n$$

eine lineare Funktion von Zufallsvariablen X_i ist, dann kann der Erwartungswert der Funktion Y wie folgt berechnet werden:

$$E(Y) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \dots + b = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n + b$$
(30)

[Maurer, 1983; 3.36]

Satz 3:

Wenn Z eine lineare Funktion von zwei beliebigen Zufallsvariablen X_1 und X_2 ist, das heisst

$$\mathbf{Z} = \mathbf{a}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{b} ,$$

dann kann die Varianz der Funktion Z wie folgt berechnet werden:

$$V(Z) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + 2a_1a_2 \text{ Cov}(X_1, X_2) \text{ oder:}$$

$$\sigma_z^2 = a_1^2 \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \sigma_{x_2}^2 + 2a_1a_2 \sigma_{x_1x_2}$$
(31)

Diese Beziehung nennt man das **Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz** (FFG). Wenn die Zufallsvariablen normalverteilt und unabhängig sind, das heisst,

 $Cov(X_1, X_2) = 0$, ist in diesem Fall

$$\sigma_{z}^{2} = a_{1}^{2} \sigma_{x_{1}}^{2} + a_{2}^{2} \sigma_{x_{2}}^{2}$$

Auch für eine lineare Funktion mit \mathbf{n} Zufallsvariablen lässt sich die Varianz berechnen. Am einfachsten wird die Beziehung, wenn wir die linearen Funktionen in Matrizenform darstellen.

Satz 4:

Sei Y_1 eine lineare Funktion von n Zufallsvariablen X_i . In Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{X} + \mathbf{b}_1$$

1x1 1xn nx1 1x1

dann ist

$$V(Y_1) = A^T K_{xx} A$$

$$1x1 \qquad 1xn \qquad nxn \qquad nx1$$
(32)

[Conzett, 1985]

Satz 5:

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz lässt sich noch weiter verallgemeinern. Man kann den Fall von m verschiedenen Funktionen Y_j der n Zufallsvariablen X_i wie folgt darstellen:

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{mx1}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_{\mathbf{nx1}} + \mathbf{b}_{\mathbf{mx1}}$$

dann ist

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{xx} \cdot \mathbf{A}$$

mxm mxn nxn nxm (33)

2.9 Schätzfunktionen

2.9.1 Allgemeines

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz erlaubt uns, die stochastischen Eigenschaften von Funktionen von Zufallsvariablen zu bestimmen und wir verwenden geeignete Funktionen von Zufallsvariablen, um die uns interessierenden Grössen möglichst gut zu schätzen.

Da diese gesuchten Grössen oft Parameter von Verteilungen (Erwartungswert, Varianz) sind, und sie als Punkte auf der Zahlengeraden auftreten, spricht man von Parameterschätzung oder Punktschätzung.

So kann ein unbekannter Parameter u aus einer Reihe von Zufallsvariablen X_i geschätzt werden:

$$U = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Solche Schätzfunktionen spielen für die Ausgleichungsrechnung eine wichtige Rolle. Sie werden nach zwei Gesichtspunkten betrachtet:

- a) Anwendung: Die Schätzfunktionen erlauben die Berechnung von Schätzwerten der gesuchten Grössen ausgehend von den verfügbaren Realisierungen von Zufallsvariablen (z.B. aus beobachteten Distanzen möglichst gute Koordinaten bestimmen).
- b) Analyse und Entwicklung von Schätzfunktionen (z.B: Welche Funktionen eignen sich dafür? Wie komme ich zu guten Parameterwerten?)

2.9.2 Eigenschaften der Schätzfunktionen

Definition 1:

Eine Schätzfunktion \mathbf{g} für einen unbekannten Parameter \mathbf{u} heisst erwartungstreu, wenn

und

$$E(U) = E(g(X_1, X_2, ..., X_n)) = u$$
(34)

Definition 2:

Eine Schätzung U für einen Parameter u heisst konsistent, wenn für

 $U = g(X_1, X_2, ..., X_n)$

$$U = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$

$$\lim_{n \to \infty} (U - u)^2 = 0$$
(35)

ist.

Definition 3:

Eine Schätzung für einen Parameter \mathbf{u} heisst wirksam, wenn sie erwartungstreu ist, wenn die Varianz von U endlich ist, und wenn keine andere erwartungstreue Schätzfunktion existiert, für welche U eine kleinere Varianz erhält:

$$E((U - u)^2) = V(U) = Min$$
 (36)

Beispiele:

a) Der Mittelwert \overline{X} einer Messreihe $X_1, X_2, ..., X_n$ von unabhängig, gleichverteilten Zufallsvariablen

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum \mathbf{X}_{i}$$

ist ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für $\mu = E(X_i)$. [Maurer, 1983; 5.1.2] b) Der empirische Median X einer Messreihe $X_1, X_2, ..., X_n$ von unabhängig gleichverteilten Zufallsvariablen ist ein konsistenter Schätzer des Medians

$$\overline{\mu} = \mathbf{X}_{\mathbf{p} = \frac{1}{2}}$$

[Maurer, 1983; 5.1.3]

c)
$$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{i} - \overline{X} \right)^{2}$$

ist ein erwartungstreuer, konsistenter Schätzer für σ^2 .

 d) Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist ein Schätzverfahren. Für normalverteilte Messungen ist sie erwartungstreu, konsistent und wirksam.

2.10 Konfidenzintervalle

Mit Hilfe geeigneter Schätzfunktionen können wir Werte für die uns interessierenden Parameter schätzen.

Die Frage, wie gut diese Werte sind, hat für den Anwender der Schätzfunktionen selbstverständlich grosse Bedeutung. Die einfache Punktschätzung gibt auf diese Frage aber keine Antwort.

Schon bei einer intuitiven Betrachtung möchte man zu dem geschätzten Wert Angaben über den Bereich, in welchem sich der "wahre" gesuchte Parameter mit einer genügend grossen Wahrscheinlichkeit befindet.



Konfidenzintervall

Definition:

Gegeben sei eine Schätzfunktion

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{t}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$$

für einen unbekannten Parameter τ und zwei Werte

$$\hat{T}_{u}(<\hat{T})$$
 und $\hat{T}_{o}(>\hat{T})$

die man untere und obere Konfidenzgrenze nennt. Das Intervall

 (\hat{T}_u, \hat{T}_o)

heisst Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$, wenn die Wahrscheinlichkeit

$$P(\hat{T}_{u} < \tau < \hat{T}_{o}) = 1 - \alpha \qquad (0 < \alpha < 1)$$

ist.

Ein Konfidenzintervall heisst zweiseitig, wenn die Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ symmetrisch um \hat{T} geteilt wird.

Wenn man nur eine Seite von $\hat{\mathbf{T}}$ betrachtet, das heisst nur

$$\hat{T}_{u}$$
 oder \hat{T}_{o}

bestimmt, spricht man von einseitigen Konfidenzintervallen. Die andere Seite bleibt offen, d.h. sie ist $-\infty$ oder $+\infty$.

Beispiel 1:

In der Umgangssprache verwenden wir Ausdrücke, die den Begriff des Konfidenzintervalls beinhalten:

- Die Reparatur wird zwischen 1000 und 1200 Franken kosten (zweiseitiges Konfidenzintervall).
- Sie brauchen eine halbe Stunde, um den Zug "sicher" zu erreichen (einseitiges Konfidenzintervall; es wird nur die obere Grenze angegeben).

Beispiel 2:

Eine Schätzung T ist normalverteilt mit $E(T) = \tau$ und $V(T) = \sigma^2$. Wir möchten das Konfidenzintervall für $\alpha = 5\%$ bestimmen.

Vorgehen: Die Dichtefunktion für die Zufallsvariable T ist dann:





 T_u und T_o sind so zu bestimmen, dass

 $P(T < T_u) = 2,5\%$ und

$$P(T>T_0) = 2,5\%$$
.

Aus der Tabelle für die Normalverteilung folgt: $u = 1.96 \sigma$.

Wenn wir eine Realisierung der Zufallsvariable T haben, können wir auch den umgekehrten Fall lösen:

Wir haben eine Realisierung $\hat{\mathbf{T}}$ der Schätzung. Der gesuchte unbekannte Parameter wird mit der Wahrscheinlichkeit (1- α) im Intervall

$$(\hat{T}_u = \hat{T} - u, \hat{T}_o = \hat{T} + u)$$

enthalten sein.



Konfidenzintervall

Fig. 8

[Maurer, 1980; 5.2.2]

Beispiel 3:

Eine Schätzung T für einen Parameter τ ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n).$$

Bekannt ist, dass die X_i gleich genaue, normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$E(X_i) = \tau$$

sind. Gesucht ist ein zweiseitiges Konfidenzintervall für $\alpha = 5\%$. Die Varianz σ_x^2 der **n** direkten Beobachtungen X_i ist nicht bekannt, so dass sie geschätzt werden muss:

$$s_x^2 = \frac{\sum (X_i - T)^2}{n - 1}$$

Aus s_x können wir eine Schätzung für die Standardabweichung von T herleiten:

$$s_{T} = \frac{s_{x}}{\sqrt{n}}$$

Der Freiheitsgrad dieser Schätzung ist n-1. Da die Varianz von T nicht bekannt, sondern nur geschätzt ist, können wir die Verteilung von T nicht bestimmen. Wir müssen eine Hilfsvariable Z einführen,

$$Z = \frac{T - \tau}{s_{T}}$$

deren Verteilung uns bekannt ist.



Es handelt sich um eine t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad n-1. Aus der Tabelle der t-Verteilung kann man die untere und die obere Intervallgrenze für Z bestimmen und daraus die entsprechenden Werte für T berechnen.

Z.B. für n = 10: $u_z = 2,23$ $u_T = u_z s_T$

[Conzett, 1985], [Maurer, 1980; 5.2.2]

Tabellen

Vertrauenswahrscheinlichkeit	Irrtumsrisiko α	Koeffizient für ±σ (halbe Intervallbreite)
68.3 %	31.7 %	1.00
95.0 %	5.0 %	1.96
95.4 %	4.6 %	2.00
99.0 %	1.0 %	2.58
99.7 %	0.3 %	3.00
99.9 %	0.1 %	3.29
99.995 %	0.005 %	4.00

Zweiseitige Konfidenzintervalle für die Normalverteilung

Zweiseitige Konfidenzintervalle für die t-Verteilung

f	Halbe Intervallbreite		
	$\alpha = 5 \%$	$\alpha = 1 \%$	
00	1.96	2.58 (= Normalverteilung)	
100	1.98	2.63 (≈Normalverteilung)	
50	2.01	2.68 (≈Normalverteilung)	
30	2.04	2.75	
10	2.23	3.17	
4	2.78	4.60	
3	3.18	5.84	
2	4.30	9.92	
1	12.71	63.66	

2.11 Testen von Hypothesen

2.11.1 Allgemeines

Statistische Tests sind Verfahren, die uns helfen anhand der vorhandenen (ungenauen) Informationen sinnvoll zu entscheiden.

Im Alltag sind wir mit Fragen konfrontiert, die nur einen Ja/Nein-Entscheid zulassen:

Beispiele:

- Kaufe ich das Gerät, oder kaufe ich es nicht?
- Gehe ich in die Ferien, oder gehe ich nicht?
- Sind meine Messungen richtig oder falsch?

Die Informationen, über welche wir verfügen, sind oft vielseitig. Sie enthalten quantitative Angaben, die sich teilweise widersprechen.

Statistische Tests erlauben uns, quantitative ungenaue Angaben über einen komplexen Zustand in Ja/Nein-Entscheide umzuwandeln.

Dafür müssen wir den komplexen Sachverhalt mit den Werkzeugen der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung umschreiben können. Diese Umschreibung, die man Modellierung nennt, erlaubt uns in sehr vielen Fällen, die ursprüngliche Frage durch eine Frage über die Verteilungseigenschaften (Verteilungsparameter) einer Zufallsvariable zu ersetzen. Man spricht dann von einem parametrischen Test.

2.11.2 Vorgehen

Der Entscheid wird von einer mathematisch formulierbaren Hypothese H_0 abhängig gemacht. Diese wird Nullhypothese genannt und beschreibt den erwarteten Fall. Das Testverfahren klärt nun ab, ob man die Nullhypothese annehmen kann, oder ob es Gründe gibt, sie zu verwerfen.

Das Vorgehen teilt sich in zwei Phasen. In der ersten Phase legt man das Vorgehen fest und analysiert die stochastischen Eigenschaften der auftretenden Zufallsvariablen. In der zweiten Phase werden die konkreten Ergebnisse des vorliegenden Falles zahlenmässig ausgewertet.

a) Die Nullhypothese und die Teststatistik:

In der ersten Phase wählt man eine Reihe von Grössen (Zufallsvariablen)

$$X_1$$
 , X_2 , \ldots , X_n ,

die mit der Aussage der Nullhypothese einen Zusammenhang haben, messbar oder bereits gemessen sind, und bekannte stochastische Eigenschaften aufweisen. Danach sucht man eine geeignete Prüfgrösse

$$T = t(X_1, X_2, ..., X_n),$$

die als Funktion der geplanten Messungen berechnet werden kann und für welche die Verteilung unter der Nullhypothese bekannt ist. Diese Prüfgrösse **T** nennt man **Teststatistik.**

Mit Hilfe der Verteilung von T kann man für ein sinnvoll gewähltes Irrtumsrisiko α ein Konfidenzintervall bestimmen, in welchem sich eine allfällige Realisierung der Teststatistik mit Wahrscheinlichkeit (1- α) befinden wird, falls die Nullhypothese zutrifft. Dadurch werden der Annahmebereich des Tests (innerhalb des Konfidenzintervalls) und der Verwerfungsbereich (ausserhalb) festgelegt.

b) Die Realisierung der Teststatistik:

Nach der Durchführung der Messungen oder der Erhebungen verfügt man über Realisierungen der Zufallsgrössen X_i , mit welchen man das Zutreffen der Nullhypothese überprüfen möchte.

Man berechnet aus den Realisierungen der X_i die dazugehörige Realisierung T' der Teststatistik T und prüft, ob T' in den festgelegten Annahmebereich fällt. In diesem Fall wird die Nullhypothese angenommen, andernfalls würde sie verworfen.

Mit diesem Vorgehen nimmt man bewusst in Kauf, dass in gewissen Fällen (mit der Wahrscheinlichkeit α) die Nullhypothese irrtümlicherweise verworfen wird.

Beispiel:

Eine Höhendifferenz wird zweimal unabhängig gemessen. Die Genauigkeit (Standardabweichung $\sigma = 5 \text{ mm}$) der Messungen ΔH_1 und ΔH_2 ist bekannt. Man möchte sich vergewissern, dass kein grober Messfehler begangen wurde.

Man wählt also folgende Nullhypothese: Die Messungen sind normalverteilt mit Varianz σ^2 und es gibt keine groben Fehler.

Als Teststatistik wählen wir die Grösse

$$\mathbf{D} = \Delta \mathbf{H}_1 - \Delta \mathbf{H}_2 \ .$$

Unter der Nullhypothese kennen wir die Verteilungsfunktion für D:

D ist normalverteilt (lineare Funktion von normalverteilten Messungen) mit

E(D) = 0 und $V(D) = 2\sigma^2$.

Nun bestimmen wir für ein Signifikanzniveau den Annahme- und Verwerfungsbereich.



Fig. 10

Die Messungen ergaben für die beiden Höhendifferenzen

 $\Delta \mathbf{H}_1 = 40.585 \mathbf{m}$ und $\Delta \mathbf{H}_2 = 40.554 \mathbf{m}$.

Für den Test mit der Teststatistik

D = 40.585 - 40.554 = 31 mm und $\alpha = 5 \%$

bestimmen wir den Annahmebereich

$$\mathbf{u} = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot 1.96 = 13.8$$

Der Annahmebereich liegt also im Intervall

(-13.8 mm, +13,8 mm).

Weil die Realisierung von **D 31 mm** ergeben hat und damit ausserhalb des Annahmebereichs liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

2.11.3 Alternativhypothesen, Fehler 2. Art

Der stochastische Test stellt die Nullhypothese in den Vordergrund. Sie wird dadurch beim Entscheid bevorzugt.

Mit einem stochastischen Test kann man nicht nachweisen, dass die Nullhypothese stimmt, sondern man kann lediglich feststellen, dass keine Hinweise für eine Ablehnung der Nullhypothese vorliegen.

Beispiel:

Eine typische Aussage: "Die Messungen bestätigen die Stabilität des Bauwerks. Aus der Auswertung konnte keine signifikante Verformung festgestellt werden."

Die Nullhypothese besagte, dass keine Verformung vorliegt, und der Test führte nicht zu ihrer Verwerfung.

Trotzdem ist es möglich, dass eine andere Hypothese gilt (Alternativhypothese), wir aber irrtümlicherweise die Nullhypothese annehmen, weil der Test zu wenig empfindlich war.

Diesen Fehler der falschen Annahme der Nullhypothese nennt man Fehler 2. Art. Seine Wahrscheinlichkeit heisst Irrtumsrisiko 2. Art und wird mit β bezeichnet.

Mit der Problematik der Testempfindlichkeit beschäftigt man sich in der Geodäsie im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie.

Wenn ein Konfidenzintervall im Fall der Nullhypothese festgelegt wurde, kann man für eine bestimmte Alternativhypothese die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art bestimmen.



Fig. 11

Für die Alternativhypothese besteht die Möglichkeit, dass Realisierungen in den Annahmebereich fallen. Die Fläche der Dichtefunktion über dem Annahmebereich ergibt die Wahrscheinlichkeit β , dass ein Fehler 2. Art auftritt.

Bemerkung:

Je enger der Annahmebereich gewählt wird, desto kleiner wird β . Diese steigende Empfindlichkeit des Tests bezahlt man mit einer entsprechenden Vergrösserung von α , das heisst mit einem grösseren Risiko, ein gutes Modell fälschlicherweise zu verwerfen (Fehler 1. Art).

2.11.4 Entscheidungsmöglichkeiten und ihre Wahrscheinlichkeiten

Wirklichkeit Testentscheidung	H ₀ gilt	H ₀ gilt nicht !
H ₀ wird nicht verworfen	richtig ! P = $1-\alpha$	falsch: Fehler 2. Art $P = \beta$
H ₀ wird verworfen	falsch: Fehler 1. Art P = α	richtig ! $P = 1 - \beta$

Die Wahrscheinlichkeit α , dass die Nullhypothese irrtümlicherweise verworfen wird, heisst auch Irrtumsrisiko 1. Art oder Produzentenrisiko. Die Wahrscheinlichkeit β , dass die Nullhypothese irrtümlicherweise angenommen wird, wenn eine bestimmte Alternativhypothese gilt, heisst Irrtumsrisiko 2. Art oder Konsumentenrisiko.

Literaturverzeichnis

Fluri, B. und Riedwyl, H.:	Angewandte multivariate Statistik, 1983, Gustav Fi- scher Verlag, Stuttgart		
Heinhold, J., Gaede, KW.:	Ingenieurstatistik, Oldenbourg Verlag, München, 1972		
Kreyszig, E.:	Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Van- denhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1968		
Maurer, W.:	Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung; Vorle- sungsmanuskript 20 - 012, 1980		

3. Auszug aus der linearen Algebra

3.1 Begriffe und Bezeichnungen

In der Ausgleichungsrechnung spielen Matrizen und lineare Gleichungssysteme eine zentrale Rolle.

Definition 1

Eine **Matrix A** ist eine rechteckige Tabelle von Zahlen, die **Matrixelemente** genannt werden.

Die Anzahl **Zeilen** und **Kolonnen** (Spalten) ergeben die Dimension der Matrix, die bei Bedarf explizit unter der Matrixbezeichnung (Grossbuchstaben) angegeben werden kann. Die Matrixelemente werden mit den entsprechenden Kleinbuchstaben benannt. Ihre Position ist mit einem Doppelindex angegeben, zuerst die Nummer der Zeile und dann die Nummer der Kolonne.

$$\mathbf{A}_{n \cdot m} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1m} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{4}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2m} \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & & \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nm} \end{pmatrix}$$
(1)

Die Elemente einer quadratischen Matrix, welche gleichen Index für Zeile und Kolonne haben, bilden ihre **Diagonale**.

Definition 2 Spezialmatrizen

Die Nullmatrix ist eine Matrix, in welcher aller Elemente Null sind.

Die Einheitsmatrix (E), auch oft Identitätsmatrix (I) genannt, ist eine quadratische Matrix (n = m), in welcher die Diagonalelemente (e_{ii}) gleich 1 und alle anderen Elemente Null sind.

Zwei Matrizen sind **gleich**, wenn sie gleiche Dimensionen haben und alle ihre Elemente paarweise gleich sind.

Eine **Diagonalmatrix** ist quadratisch, hat in der Diagonalen beliebige Zahlenwerte und ausserhalb enthält sie ausschliesslich Nullelemente.

Eine quadratische Matrix heisst **obere Dreiecksmatrix**, wenn unterhalb der Diagonalen alle Elemente Null sind.

Im umgekehrten Fall spricht man von einer unteren Dreiecksmatrix.

Vektoren können als Matrizen mit einer Kolonne betrachtet werden.

$$\mathbf{V}_{\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1} \\ \mathbf{V}_{2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{V}_{n} \end{pmatrix}$$
(2)

Eine Matrix $\mathbf{A}^{T}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})$ heisst Transponierte von $\mathbf{A}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})$, wenn die i-te Kolonne von \mathbf{A} der i-ten Zeile von \mathbf{A}^{T} (für $\mathbf{i} = 1, ..., \mathbf{m}$) entspricht.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{T} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
(3)

Definition 3

Die **Determinante** einer quadratischen Matrix $A(n \cdot n)$ ist eine Zahl, die sich aus den Matrixelementen berechnen lässt.

$$Det(A) = \sum_{\substack{\text{alle möglichen} \\ \text{Permutationen}}} (-1)^k a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$$
(4)

wobei die Werte für (i₁, i₂, ..., i_n) alle möglichen Permutationen der natürlichen Zahlen 1, 2, ... n darstellen. k entspricht der Anzahl Vertauschungen, die die Folge (1, 2, ..., n) in die verwendete Permutation (i₁, i₂, ..., i_n) überführen.

Definition 4

Der **Rang** einer Matrix ist gleich der Anzahl linear unabhängiger Zeilen oder Kolonnen dieser Matrix.

Definition 5

Eine quadratische Matrix ist **singulär**, wenn ihre Determinante Null ist, sonst ist sie **regulär**.

Die **Ordnung** einer quadratischen Matrix ist die Anzahl der Zeilen (= Anzahl der Kolonnen). Rang und Ordnung einer regulären quadratischen Matrix sind gleich.

Die Spur einer quadratischen Matrix A ist die Summe ihrer Diagonalelemente. Die Bezeichnung ist Sp(A).

3.2 Rechenoperationen mit Matrizen

Definition 1

Die Addition und Subtraktion ist für Matrizen gleicher Dimension definiert.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$$
(5)

Die Elemente von C sind die Summe (bzw. die Differenz) der entsprechenden Elemente von A und B.

Bemerkung 1

Für die Addition gilt das kommutative und das assoziative Gesetz:

$$A + B = B + A$$

(A + B) + C = A + (B + C) (6)

Definition 2

Eine Matrix A kann mit einem Skalar λ multipliziert werden, indem alle ihre Elemente a_{ij} mit dem Skalar multipliziert werden.

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A} \tag{7}$$

mit $\mathbf{c}_{ij} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}_{ij}$ für alle i und j

Bemerkung 2

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar gelten das kommutative, das assoziative und das distributive Gesetz:

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \lambda \tag{8}$$

 $\lambda \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{B}$ (9)

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \mathbf{A} + \lambda_2 \cdot \mathbf{A}$$
(10)

Definition 3

Die Multiplikation zwischen zwei Matrizen $A(n \cdot m)$ und $B(m \cdot p)$ ist definiert, wenn die Anzahl Kolonnen der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix ist. Das Produkt ist dann eine Matrix $C(n \cdot p)$. Die Elemente c_{ij} von C sind die Skalarprodukte der i-ten Zeile von A mal die j-te Kolonne von B.

$$C = A \cdot B$$

$$n \cdot p \qquad n \cdot m \cdot m \cdot p$$
(11)

wobei

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$
(12)
$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{1p} \\ b_{21} & & \\ ... & b_{m1} & b_{mp} \end{bmatrix}$$
(13)
$$a_{11} & a_{12} & a_{1m} & c_{11} & c_{12} & c_{1p} \\ a_{21} & & c_{21} & & \\ ... & & ... & c_{n1} & c_{np} \end{bmatrix}$$

Bemerkung 3

Das assoziative und das distributive Gesetz gelten:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \ \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \ \mathbf{m} \cdot \mathbf{q} \ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

$$(14)$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$
(15)

Das kommutative Gesetz gilt nicht.

Satz

Für transponierte Matrizen gelten die folgenden Regeln:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$
(16)

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$
(17)

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \tag{18}$$

Wenn $A = A^{T}$, heisst A eine symmetrische Matrix.

3.3 Inversion einer Matrix

Die Matrix A^{-1} heisst **Inverse** von einer quadratischen Matrix A, wenn

$$A^{-1} \cdot A = E$$

$$n \cdot n \quad n \cdot n \quad n \cdot n \quad (19)$$

Bemerkungen

- Die inverse Matrix existiert nur für reguläre Matrizen.
- Wenn A, B, C regulär sind, gilt

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$
(20)

- Für die reguläre Matrix A gilt

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \tag{21}$$

- Die Inverse einer symmetrischen Matrix ist symmetrisch.
- Die Inverse einer Diagonalmatrix ist ebenfalls diagonal. Die Diagonalelemente sind die Reziproke der ursprünglichen Diagonalelemente.
- Die Inverse einer Dreiecksmatrix ist wiederum dreieckig. Der Typ bleibt erhalten.

3.4 Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition

Eine Matrix A heisst orthogonal, wenn

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \tag{22}$$

Für quadratische orthogonale Matrizen ist dann

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1} \tag{23}$$

Satz (Hauptachsentheorem)

Zu jeder symmetrischen Matrix **M** existiert eine quadratisch orthogonale Matrix **U**, so dass aus **U** und **M** eine Diagonalmatrix **D** berechnet werden kann:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \, \mathbf{U} \tag{24}$$

Dazu gelten folgende Definitionen und Sätze:

- Es gibt eine einzige Matrix **D**.
- Die Diagonalelemente $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ von **D** sind die Eigenwerte von **M**.
- Für jede Matrix **M** sind die Eigenwerte eindeutig bestimmt. Abgesehen von der Reihenfolge gibt es nur eine Reihe Eigenwerte $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.
- Die Kolonnen von U enthalten die normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten, welche entsprechend geordnet sind wie die Eigenwerte in der Diagonalen von D.
- Wenn die Matrix M den Rang r besitzt, dann gibt es r Eigenwerte ≠ 0, die restlichen sind = 0.

Bemerkung

Die orthogonale Matrix U erfüllt (Definition) die Bedingung

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{E} \tag{25}$$

das heisst, die Kolonnenvektoren $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n)$ sind unter sich orthogonal und haben die Länge 1.

Es ist daher:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 1$$
 für $i = j$
0 für $i \neq j$
(26)

3.5 Differentiation von Matrizenfunktionen

Definition

Wenn eine Matrix A Funktionen von einer Variablen X als Elemente enthält, ist

$$\frac{dA}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{da_{11}(x)}{dx} & \frac{da_{12}(x)}{dx} & \dots \\ \frac{da_{21}(x)}{dx} & \dots \end{pmatrix}$$
(27)

Entsprechend werden die partiellen Ableitungen und die Differentiale definiert.

$$\mathbf{dA} = \begin{pmatrix} \mathbf{da}_{11} & \mathbf{da}_{12} & \dots \\ \mathbf{da}_{21} & \dots \end{pmatrix}$$
(28)

Bemerkungen

Es gelten folgende Differentiationsregeln:

- Ist $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, dann ist $\mathbf{dC} = \mathbf{dA} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{dB}$ (29)
- Wenn A eine konstante Matrix und X eine variable Matrix sind, gilt

$$\mathbf{d} \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \right) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} \mathbf{X} \tag{30}$$

- Wenn A eine konstante symmetrische Matrix (n·n) und X ein Vektor (n·1) sind, gilt

$$d (XTAX) = dXT A \cdot X + XTAdX = 2XTAdX$$
(31)

3.6 Die numerische Lösung von Gleichungssystemen und die Inversion von Matrizen

3.6.1 Vielfalt der Methoden

Die Lösung von Gleichungssystemen ist ein klassisches Problem der linearen Algebra und der numerischen Mathematik. Die Mathematiker haben sich weitgehend mit dieser Aufgabe beschäftigt, da man in allen Disziplinen mit solchen Systemen zu tun hat. Man kann die Vielfalt der Methoden nicht mehr aufzählen. Für eine systematische Analyse der bekannten Verfahren zur Auflösung von Gleichungssystemen wird dem Leser empfohlen, die Spezialliteratur der linearen Algebra und der numerischen Mathematik zu konsultieren.

Wir werden uns auf die Behandlung des Austauschverfahrens nach Stiefel beschränken [Stiefel, 1963], dass für die theoretische Herleitungen der Ausgleichungsrechnung besonders geeignet ist.

3.6.2 Der Austausch-Schritt (AT-Schritt)

Gegeben seien lineare Funktionen, wie zum Beispiel:

$$y_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3$$
 (32)

$$y_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3$$
 (33)

Man kann sie in Matrizenform ebenfalls angeben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix}$$
(34)

Die linearen Funktionen beschreiben eine Beziehung zwischen den x_i (unabhängige Variablen) und den y_i (abhängige Variablen). Diese Beziehung kann bei Bedarf umgeformt werden, wenn gewisse x_i , ausgehend aus einigen gegebenen y_i und den restlichen x_i bestimmt werden sollen:

Aus der Gleichung (32) $y_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3$

$$\mathbf{x}_{1} = \frac{1}{\mathbf{a}_{1}} \mathbf{y}_{1} - \frac{\mathbf{b}_{1}}{\mathbf{a}_{1}} \mathbf{x}_{2} - \frac{\mathbf{c}_{1}}{\mathbf{a}_{1}} \mathbf{x}_{3}$$
(35)

Aus der Gleichung (33) $y_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3$

$$y_{2} = \frac{a_{2}}{a_{1}}y_{1} + \left(b_{2} - \frac{a_{2}b_{1}}{a_{1}}\right)x_{2} + \left(c_{2} - \frac{a_{2}c_{1}}{a_{1}}\right)x_{3}$$
(36)

Es ergeben sich also zwei neue Linearformen, charakterisiert dadurch, dass die bisherige unabhängige Variable x_1 nun Funktion geworden ist, während y_1 nun unabhängige Variable wird. Wir sagen kurz, x_1 und y_1 seien ausgetauscht worden, und wir nennen die ganze Operation einen Austausch-Schritt. Die einzige Bedingung, die in diesem Fall erfüllt sein muss, lautet $a_1 \# 0$.

Wir gehen über zu mehreren Linearformen von mehreren Variablen, zum Beispiel in schematischer Schreibweise:

Ausgeschrieben also etwa:

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$

Der Block (37) der Koeffizienten heisst auch Matrix der gegebenen Linearformen.

Es soll nun hier eine beliebige unabhängige Variable mit einer beliebigen abhängigen Variablen ausgetauscht werden. Als Beispiel werde der Austausch von x_3 und y_2 durchgeführt. Die **Pivotkolonne** x_3 und die **Pivotzeile** y_2 kreuzen sich im **Pivotelement** a_{23} ; der Austausch ist möglich, falls dieses Element #0 ist.

Aus diesen Bemerkungen folgt sofort das Schema nach dem Austausch

$$x_{1} \qquad x_{2} \qquad y_{2} \qquad x_{4}$$

$$y_{1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \frac{a_{13}}{a_{23}} & \alpha_{14} \\ \frac{a_{21}}{a_{23}} & -\frac{a_{22}}{a_{23}} & \frac{1}{a_{23}} & -\frac{a_{24}}{a_{23}} \\ \frac{\alpha_{31}}{a_{32}} & \frac{a_{33}}{a_{23}} & \alpha_{34} \end{bmatrix}$$
(38)

wobei

$$\alpha_{11} = \mathbf{a}_{11} - \frac{\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{23}}, \alpha_{12} = \mathbf{a}_{12} - \frac{\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{23}}, \alpha_{14} = \mathbf{a}_{14} - \frac{\mathbf{a}_{24}\mathbf{a}_{13}}{\mathbf{a}_{23}}$$

$$\alpha_{31} = \mathbf{a}_{31} - \frac{\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{33}}{\mathbf{a}_{23}}, \alpha_{32} = \mathbf{a}_{32} - \frac{\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{33}}{\mathbf{a}_{23}}, \alpha_{34} = \mathbf{a}_{34} - \frac{\mathbf{a}_{24}\mathbf{a}_{33}}{\mathbf{a}_{23}}$$
(39)

was man auch explizit nachrechnen kann.



Numerisches Beispiel für den Austausch

Rechenvorschrift

Man kann die Regel für einen solchen AT-Schritt wie folgt zusammenfassen:

- 1. Das Pivotelement geht in seinen reziproken Wert über.
- 2. Die übrigen Elemente der Pivotkolonne sind durch das Pivotelement zu dividieren.
- 3. Die übrigen Elemente der Pivotzeile sind durch das Pivotelement zu dividieren und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.
- Ein Element im Rest der Matrix wird transformiert, indem man das Rechteck aus 4 Elementen bildet, das in der gegenüberliegenden Ecke den Pivot enthält; dann ist die Rechteckregel (41) anzuwenden.

Rechteckregel bei AT



 $q \longrightarrow q' = q - \frac{r \cdot s}{p}$ (41)

In Matrizenform kann man einen AT-Schritt ebenfalls anschaulich beschreiben, ausgehend von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots \\ \mathbf{a}_{21} & \dots & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix}$$
(42)

erhält man nach einem AT-Schritt mit Pivot a_{23} eine neue Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ \dots & & \\ \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix}$$
(43)

Die Elemente der Koeffizientenmatrix sind mit der Rechenvorschrift des AT-Schrittes zu bestimmen.

3.6.3 Die Inversion der Koeffizientenmatrix

Satz

Wenn in einer nxn Matrix M n AT-Schritte berechnet werden, und die Pivotelemente sukzessiv in allen Positionen der Diagonale gewählt werden, erhält man die Inverse M^{-1} von M.

Beweis

M sei eine quadratische Matrix, für welche gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1} \\ \mathbf{y}_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{y}_{n} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_{n} \end{pmatrix}$$
(44)

Nach **n** AT-Schritten mit Pivot in allen Elementen der Diagonale der Matrix **M** erhält man die Matrix \mathbf{M}^* und es gilt dann:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1} \\ \mathbf{X}_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{X}_{n} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{\star} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1} \\ \mathbf{y}_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{y}_{n} \end{pmatrix}$$
(45)

Man kann die zweite Berechnung in die erste einsetzen und erhält:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{\star} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$
(46)

 $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^* = \text{Einheitsmatrix}$ $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^{-1}$

3.6.4 Die Lösung des Gleichungssystems

Satz

Wird die Matrix $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ eines Gleichungssystems mit \mathbf{u} Unbekannten um eine Kolonne durch die Absolutglieder erweitert, erhält man die Lösung des Gleichungssystems in der zusätzlichen Kolonne (wenn man \mathbf{u} AT-Schritte mit Pivotelement sukzessiv in allen Positionen der Diagonale (\mathbf{a}_{ii} , $\mathbf{i} = 1, 2, ... \mathbf{u}$) berechnet).

Beweis

Ein lineares Gleichungssystem mit **u** Unbekannten kann wie folgt geschrieben werden:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + c_i = 0$$
 $i = 1, 2, \dots, u$ (47)

Die linke Seite der Gleichung sind lineare Funktionen in den Unbekannten x_i , welche beim Vorliegen der gesuchten Lösung Null ergeben.

Diese Funktionen können mit dem Austausch-Schema dargestellt werden:

	^x 1	^x ₂	x u+1	
y ₁ =	a ₁₁	a ₁₂	c ₁	
y ₂ =	a 21	a ₂₂	c 2	(48)
•••				
•••				
y _u =	a u 1	a _{u2}	с _и	
			I	

Die Lösung des Gleichungssystems $(x_1, x_2, ..., x_u)$ und $x_{u+1} = 1$ ergeben Nullwerte für die abhängigen Variablen y_i .
Nach u AT-Schritten in der Diagonale erhält man:

Man weiss, dass die gesuchte Lösung entsteht, wenn $y_i = 0$ (i = 1 bis u) und $x_{u+1} = 1$ ist. Daraus ergibt sich:

$$x_i = \gamma_i$$
 (i = 1, 2, ... u),

das heisst, dass die letzte Kolonne die Lösung des Gleichungssystems enthält.

Bemerkung 1

Wenn die AT-Schritte vollständig berechnet werden, erhält man nach den **u** AT-Schritten sowohl die inverse Matrix als auch die Lösung des Gleichungssystems.

Bemerkung 2

Falls man nur an der Lösung des Gleichungssystems interessiert ist, werden nur gewisse Teile der Berechnungen durchgeführt. Man kann z.B. unmittelbar nach dem AT-Schritt die Kolonnen streichen, in welchen die Pivot-Elemente gewählt wurden, da man sie später nicht mehr benötigt (Verfahren nach Gauss-Jordan). Es gibt verschiedene andere, noch günstigere Verfahren.

Bemerkung 3

Wenn das Gleichungssystem eine symmetrische Koeffizientenmatrix besitzt, kann man die Rechenarbeit reduzieren, indem man beachtet, dass die Inverse einer symmetrischen Matrix ebenfalls symmetrisch ist. Während der Berechnung der AT-Schritte sind die Zwischenmatrizen nur in Bezug auf die Absolutbeträge symmetrisch. Man kann von der folgenden Farbregel Gebrauch machen:

- a) die Anfangsmatrix ist schwarz
- b) die Pivotzeilen werden rot gefärbt und bleiben rot
- c) für alle Zwischenmatrizen während dem AT-Verfahren gilt:
 - für Elemente gleicher Farbe gilt die Symmetriebedingung
 (a_{ij} = a_{ji})
 - für Elemente verschiedener Farbe gilt $(a_{ij} = -a_{ji})$

Dadurch kann die Anzahl Berechnungen bei symmetrischen Matrizen ca. auf die Hälfte reduziert werden.

_	abs.	^x 3	^x 2	x ₁
	-262.223	-1.127	1.127	27.883
(50)	103.030	-2.236	10.236	1.127
	-103.030	10.236	-2.236	-1. <u>1</u> 27

In den folgenden Tabellen wird ein numerisches Beispiel vorgeführt:

0.036	-0.040	+0.040	+9.404	
(0.040)	10.190 =	-2.190	+113.629	(51)
(-0.040)	(-2.190)	10.190	-113.629	

-0.004	0.032	+9.855	
0.098	0.215	-11.151	(52)
(-0.215)	9.720 =	-89.204	
	-0.004 0.098 (-0.215)	$\begin{array}{ccc} -0.004 & 0.032 \\ 0.098 & 0.215 \\ \hline & & - \\ (-0.215) & 9.720 \\ \hline & & = \end{array}$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

0.036	-0.003	0.003	10.146	$= x_1$
(-0.003)	0.103	0.022	-9.178	$= x_2^{(53)}$
(0.003)	(0.022)	0.103	9.178	$= x_3$

3.6.5 Rechenkontrolle beim Austauschverfahren

In den seltenen Fällen einer Matrix-Inversion mit dem Austauschverfahren ohne Computer kann man die einzelnen AT-Schritte wie folgt kontrollieren:

Man erweitert das AT-Schema um eine Kolonne σ . Die Elemente σ_i sind so zu wählen, dass die Summe aller Elemente der Zeile (inkl. σ_i) + 1 ergibt. Diese Summe bleibt nach jedem AT-Schritt erhalten, wenn man die σ -Kolonne als Teil der Matrix betrachtet und sie im AT-Schritt mitberücksichtigt.

Literaturverzeichnis

Kirchgraber, U., Marti, J.: Lineare Algebra: Vdf Zürich 1980

Schwarz, H.R.:	Numerische Mathematik, 1986, Teubner, Stuttgart
Stiefel, E.:	Einführung in die numerische Mathematik, 5. erw. Aufl., 1976; B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart
Thompson, E.H.:	Introduction to the algebra of matrices with some applicati ons; Adam Hilger, London, 1969
Zurmühl, R.:	Praktische Mathematik, 5. Auflage, 1965; Springer-Verlag, Berlin/Göttingen
	Matrizen und ihre technische Anwendung, 4. Aufl., 1964; Springer-Verlag, Berlin/Göttingen

4. Das mathematische Modell einer Ausgleichung

4.1 Mathematische Modelle im Allgemeinen

Wir Menschen leben in der Natur und möchten die Gesetzmässigkeit kennen, welche den Naturereignissen zugrunde liegt. Unser Ziel ist die Beschreibung und die Vorhersage des Verhaltens der Natur im weitesten Sinn, damit unser Leben optimal und ohne allzu viele bedrohliche Überraschungen ablaufen kann.

Die Natur ist extrem vielseitig und komplex. Wir haben keine Möglichkeit, die Grundgesetze des Universums vollumfänglich zu begreifen, zu entdecken und anzuwenden. Dies bedeutet aber nicht, dass wir auf unser Ziel, das Verhalten der Natur vorherzusagen, verzichten müssen. Wir brauchen einen Ausweg, der uns erlaubt, zu brauchbaren Ergebnissen zu kommen, auch wenn unser Wissen unvollständig ist oder die verfügbaren Mittel und die Zeit uns nicht erlauben, bis an die Grenzen des menschlichen Wissens zu gelangen.

Wir haben gelernt, die Probleme zu vereinfachen, indem wir Ähnlichkeiten suchen, die uns erlauben, bekannte Gesetzmässigkeiten aus anderen Gebieten auf die neu zu untersuchenden Phänomene zu übertragen. Wir sprechen dann von Modellen oder Analogien. Dadurch lässt sich die komplexe Wirklichkeit vereinfachen und man kann bekannte und vertraute Mittel einsetzen, um die Zusammenhänge zu analysieren.

Besonders interessant sind die Ähnlichkeiten, die uns erlauben, das Verhalten natürlicher Grössen und Vorgänge mit mathematischen Begriffen zu beschreiben. Wenn dies gelingt, können wir vom unerschöpflichen mathematischen Wissen profitieren, das in Jahrtausenden gesammelt wurde und auch die mathematischen Werkzeuge bei der Lösung unserer praktischen Probleme einsetzen. Die Beschreibung in mathematischer Form, die daraus entsteht, nennt man das mathematische Modell.

Ein mathematisches Modell ist die Voraussetzung jedes Ausgleichungsproblems.

4.2 Mathematische Modelle im Vermessungswesen

Die Grössen und Beziehungen, die im Vermessungswesen vorkommen, lassen sich leicht mit mathematischen Formulierungen darstellen. Wir arbeiten daher ganz natürlich mit mathematischen Grössen und verwenden dabei das mathematische Instrumentarium, oft ohne daran zu denken, dass es sich um ein Modell handelt.

So verwenden wir z.B. die analytische Geometrie, um in einem kartesischen Koordinatensystem gesuchte und gemessene Grössen zu beschreiben. Die Erdform können wir als Kugel oder Ellipsoid annehmen.

Der Ingenieur muss sich immer mit der Frage der Qualität der eigenen Aussagen beschäftigen. Er muss wissen, dass er mit Näherungen und Vereinfachungen gearbeitet hat und dass viele Tatsachen vernachlässigt wurden. Die Eigenschaften des verwendeten Modells müssen ihm bekannt sein. Nur so kann er die Qualität der erhaltenen Resultate abschätzen und dafür sorgen, dass die Genauigkeit der Messungen und Erhebungen auf die Güte des Modells abgestimmt sind.

In der Vermessungskunde stellen wir fest, dass nicht alle Grössen, mit welchen wir zu tun haben, eindeutig bestimmt sind. Die gemessenen Werte sind von der zu messenden Grösse abhängig, aber infolge der unvermeidlichen Ungenauigkeit jeder Messung werden sie von einer gewissen Unsicherheit begleitet. Bei der Wiederholung von genauen Messprozessen ergeben sich in der Regel jedes Mal verschiedene Resultate.

Die Mathematik bietet ebenfalls die Möglichkeit, mit unsicheren Grössen zu arbeiten; so verwendet man im Vermessungswesen neben deterministischen oder funktionalen Grössen und Beziehungen auch stochastische Grössen, die uns erlauben die Eigenschaften der Messungen mit Begriffen aus der mathematischen Statistik zu beschreiben.

Man ordnet zum Beispiel eine Zufallsvariable jeder Messung zu. Die Verteilungsfunktion beschreibt dabei das Verhalten der gemessenen Grösse infolge der unvermeidlichen, zufälligen Messfehler.

4.3 Das stochastische Modell

Das stochastische Modell beschreibt die Eigenschaften der Zufallsvariablen, die man den Messungen zugeordnet hat.

Die Verteilungsfunktion (oder die Dichtefunktion) dieser Zufallsvariable gibt vollumfänglich die gewünschten Informationen. Im Vermessungswesen haben wir in der Regel mit Reihen von Messungen zu tun, die sich gut durch normalverteilte Zufallsvariablen modellieren lassen, so dass ihre Kovarianzmatrix genügt, um die Verteilungsfunktion, abgesehen von den unbekannten Erwartungswerten, zu bestimmen.

Im stochastischen Modell einer Ausgleichung prüft man zuerst, ob die Annahme der Normalverteilung für die Messungen sinnvoll ist, und bildet danach die entsprechende Kovarianzmatrix für die Reihe Messungen l_i (i = 1, ..., n)

.

L ist der Vektor der Messungen:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{l}_n \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{K}_{\mathbf{ll}}$ ist die dazugehörige Kovarianzmatrix:

Die Kovarianzmatrix ist symmetrisch. Die Varianzen der einzelnen Messungen (Diagonalelemente) stammen in der Regel aus der Erfahrung: man weiss wie genau ein Instrument ist (Gebrauchsanleitung, frühere Messungen usw.).

Die Bestimmung der Kovarianzen ist in der Regel schwieriger. Man zieht daher vor, so zu messen, dass möglichst kleine Korrelationen zwischen den Messungen entstehen, so dass man daher die Kovarianzen als Null annehmen kann.

Für unabhängige Messungen wird die relative Genauigkeit oft mit dem Gewicht ausgedrückt. Wenn die Varianzen der einzelnen Messungen bekannt sind, lässt sich das Gewicht aus folgender Beziehung herleiten:

$$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}$$

Das Gewicht ist der Quotient zwischen einer willkürlich festgelegten dimensionslosen Referenzvarianz σ_o^2 und die Varianz der betrachteten Messung. Man nennt σ_o die Standardabweichung der Gewichtseinheit.

Für abhängige Grössen wird die relative Genauigkeit mit einer vollständigen Gewichtsmatrix oder mit der Kofaktorenmatrix (Q_{II}) dargestellt.

$$Q_{II} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot K_{xx}$$
$$P = Q_{II}^{-1}$$

Für die Ausgleichung ist das Vorliegen der genauen Werte für Varianzen und Kovarianzen nicht unbedingt notwendig. Es genügt, wenn die Genauigkeitsrelationen zwischen den Messungen vorliegen.

Falls die Varianzen der einzelnen Messungen nicht bekannt sind und nur die Verhältnisse zwischen den Genauigkeiten vorliegen, werden die Gewichte (ev. die Kofaktoren) direkt festgelegt. Zum Beispiel für Beobachtungen, die genau gleich sind, wird das Gewicht 1, für diejenigen, die eine doppelt so grosse Varianz haben, wird das Gewicht 0.5 festgelegt usw.

In diesem Fall aber kennt man die Grösse der verwendeten Standardabweichung der Gewichtseinheit (σ_{o}) nicht. Sie ist in den festgelegten Gewichten implizit enthalten.

4.4 Das funktionale Modell

Zusätzlich zu den gemessenen oder erhobenen Grössen kann man auch andere Informationen im Berechnungsprozess berücksichtigen. Es handelt sich um Beziehungen oder Bedingungen, die die beobachteten Grössen (Beobachtungen) erfüllen würden, wenn sie fehlerfrei wären und unsere Modellvorstellungen zuträfen.

Diese Beziehungen stammen aus unseren theoretischen Kenntnissen (z.B. aus der Geometrie, Physik usw.) und gelten, wenn man es genau betrachtet, nur in der idealisierten Vorstellung eines bestimmten Modells.

Jede Berechnung ist bewusst oder unbewusst auf ein abstraktes funktionales Modell bezogen, dessen Wahl die Resultate der Berechnungen und die Aussagen des Ingenieurs beeinflussen kann. Die Entscheide über das funktionale Modell sind daher eine sehr wichtige Komponente der Arbeit.

Um die funktionalen Beziehungen mathematisch zu formulieren, verwendet man oft neben den beobachteten Grössen auch weitere Parameter (unbekannte Grössen), welche die Aufstellung der Modellgleichungen erleichtern. Manchmal sind die unbekannten Parameter gerade die gesuchten Grössen, z.B. Koordinaten in einem Triangulationsnetz, manchmal sind sie einfach Hilfsgrössen.

Im Allgemeinen sehen die Gleichungen des funktionalen Modells wie folgt aus

Fj $(\underline{L}_1, \underline{L}_2, \dots, \underline{L}_n; \underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_u) = 0$	= 0
---	-----

Mit **j** = 1, 2, ... **m**

wobei \underline{L}_i die Erwartungswerte ("wahre Werte") der Beobachtungen sind

 \underline{X}_i die Erwartungswerte ("wahre Werte") der unbekannten Parameter sind Die Form der Gleichungen des funktionalen Modells bestimmt die Art der Berechnung. Die Anzahl Beobachtungen kann so gross sein, dass im funktionalen Modell mehr Gleichungen entstehen als notwendig, um die Modelleigenschaften zu bestimmen. Wir sprechen in diesem Fall von einem Ausgleichungsproblem.

Zwei Spezialfälle sind insbesondere zu beachten:

a) Es werden keine unbekannten Parameter eingeführt. Das heisst, die Gleichungen des funktionalen Modells enthalten nur die zu beobachtenden Grössen:

$$F_j (\underline{L}_1, \underline{L}_2, ..., \underline{L}_n) = 0$$
 $j = 1, 2, ..., r$

Man spricht dann von einer bedingten Ausgleichung, die Modellgleichungen.

 $F_j(...) = 0$ nennt man Bedingungsgleichungen.

b) Es werden genau so viele unbekannte Parameter eingeführt, die notwendig sind, um das funktionale Modell eindeutig zu beschreiben.

In diesem Fall ist es möglich, jede Messung als Funktion der unbekannten Parameter darzustellen.

$$\underline{\mathbf{L}}_{i} = \mathbf{F} \left(\underline{\mathbf{X}}_{1}, \underline{\mathbf{X}}_{2}, \underline{\mathbf{X}}_{3} \dots \underline{\mathbf{X}}_{u} \right) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Man spricht dann von einer vermittelnden Ausgleichung.

Beide Modelle sowie die Kombinationen beider Modelle sind äquivalent und führen zu den gleichen Ergebnissen. Der Lösungsweg ist unterschiedlich.

4.5 Überbestimmte Systeme

Wenn mehr Beobachtungen vorliegen als zur eindeutigen Bestimmung der Kenngrössen im funktionalen Modell notwendig ist, entstehen infolge der unvermeidbaren Messfehler Widersprüche zwischen beobachteten Grössen und Modellgleichungen. Dies ist nicht überraschend, da die Beziehungen im funktionalen Modell nur für die Erwartungswerte der Beobachtungen gelten.

In der Vermessungspraxis werden immer mehr Grössen als notwendig beobachtet.

Damit kann man:

- sich gegen grobe Fehler schützen
- die Genauigkeit der Ergebnisse steigern
- die erreichte Genauigkeit abschätzen
- die Güte des mathematischen Modells überprüfen

Es wäre ideal, für unsere Berechnung aufgrund der gesuchten Modellparameter die Erwartungswerte der Beobachtungen zu bestimmen. Dies ist aber in der Regel nicht möglich, da wir die Erwartungswerte ("wahre Werte") der Beobachtungen nicht kennen. Wir müssen uns daher mit einem (guten) Schätzverfahren, der Ausgleichung, abfinden.

4.6 Ausgleichungsverfahren

Die Grundidee jeder Ausgleichung ist die folgende:

Die ausgeführten Beobachtungen $(l_1, l_2,...)$ erfüllen die Gleichungen des funktionalen Modells nicht, man bestimmt daher neue Grössen: die ausgeglichenen Beobachtungen $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, ...)$, in denen man die beobachteten Werte so verbessert, dass die Gleichungen des funktionalen Modells erfüllt werden.

$$\overline{\mathbf{l}_1} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1$$
$$\overline{\mathbf{l}_2} = \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_2$$
...

Diese Formulierung ist selbstverständlich nicht hinreichend, um eine Lösung des Ausgleichungsproblems zu erlauben. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten für eine solche Reihe ausgeglichener Beobachtungen.

Die Wahl einer besonders günstigen Lösung unter den vielen möglichen unterscheidet die Ausgleichungsverfahren.

Welche Eigenschaften müssen die Verbesserungen $(v_1, v_2, ...)$ aufweisen, damit man die Lösung als besonders günstig betrachten kann? Es gibt keine allgemein gültige Antwort. Intuitiv kann man lediglich folgendes aussagen:

Wenn die ausgeglichenen Beobachtungen eine gute Schätzung für die Erwartungswerte der Beobachtungen sein sollen, müssen die Beträge der Verbesserungen klein sein.

Im Laufe der Zeit wurden verschiedene Ausgleichungsprinzipien entwickelt. Wir können zum Beispiel erwähnen:

- a) minimale Quadratsumme der Verbesserungen Methode der kleinsten Quadrate nach Gauss;
- b) minimale Summe der Absolutbeträge der Verbesserungen: Laplace;
- c) minimale Maximalabweichung für Verbesserungen: Tschebischeff.

Wesentlich: Je nach Ausgleichungsprinzip erhält man verschiedene Resultate.

4.7 Die Methode der kleinsten Quadrate

4.7.1 Das Ausgleichungsprinzip

Die Grundidee der Ausgleichung, die beobachteten Werte so zu korrigieren, bis sie die Modellgleichungen erfüllen, bleibt unverändert. Um daraus eine eindeutige Lösung zu gewinnen, wird das folgende Ausgleichungsprinzip angewandt:

a) für unkorrelierte, gleich genaue Beobachtungen

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_{i}^{2} = \mathbf{Min}$$

b) für unkorrelierte Beobachtungen

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_{i} \mathbf{v}_{i}^{2} = [\mathbf{p} \mathbf{v} \mathbf{v}] = \mathbf{M} \mathbf{i} \mathbf{n}$$

wobei $p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}$ das Gewicht der i-ten Beobachtung ist.

c) im allgemeinen Fall

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{II}}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{Min}$$

mit folgenden Bezeichnungen:

- $V_{n\cdot 1}$ Vektor der Verbesserungen
- Q Kofaktorenmatrix der Beobachtungen

Die Fälle (a) und (b) sind Spezialfälle der allgemeinen Form (c).

4.8 Die Gauss'schen Begründungen

4.8.1 Erste Gauss'sche Begründung

Wenn die Beobachtungen normalverteilt sind, gibt die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte für die Ergebnisse.

Beispiel

Gegeben:

Eine Grösse <u>l</u>_i wurde **n** mal direkt gemessen. Die dazugehörigen Zufallsvariablen l_i seien normalverteilt mit unbekannter aber gleich grosser Varianz σ^2 , Erwartungswert μ und seien unkorreliert. Die erhaltene Stichprobe der Beobachtungen sei

 $l_1, l_2, ..., l_n$.

Gesucht:

Eine Schätzung X des unbekannten Erwartungswertes μ , für welche die ausgeführten Beobachtungen die maximale Wahrscheinlichkeit erhalten (Maximum-Likelihood-Schätzung).

Lösung: Die Verteilung der Beobachtungen ist

$$\Phi(\mathbf{l}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{l} - \mu)^2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Beobachtung l_1 im kleinen Intervall Δl um l_1 auftritt, ist



Entsprechend kann die Wahrscheinlichkeit für die anderen Beobachtungen der Stichprobe

$$\mathbf{P}_{i} \left| \mathbf{l}_{i} - \frac{\Delta \mathbf{l}}{2} < \mathbf{l}_{i} < \mathbf{l}_{i} + \frac{\Delta \mathbf{l}}{2} \right| = \Phi (\mathbf{l}_{i}) \cdot \Delta \mathbf{l}$$

Da die Beobachtungen unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ganze Stichprobe so auftritt, wie wir sie erhalten haben, das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

 $P(\text{ganze Stichprobe}) = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$

$$= \frac{(\Delta l)^{n}}{\sigma^{n} (2\pi)^{n/2}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2\sigma^{2}} \cdot \left[(l_{1} - \mu)^{2} + (l_{2} - \mu)^{2} + \dots + (l_{n} - \mu)^{2} \right]}$$

Wir suchen eine Schätzung X des unbekannten Parameters μ , für welchen die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der ganzen Stichprobe maximal ist. Dies ist der Fall, wenn die eckige Klammer im Exponent minimal wird, das heisst:

$$(l_1 - x)^2 + (l_2 - x)^2 + \dots + (l_n - x)^2 = Min$$

 $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = Min$
 $\sum v_i^2 = Min$

Das ist das Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate.

Das Beispiel zeigt, wie die Methode der kleinsten Quadrate eine Schätzung mit maximaler Wahrscheinlichkeit wird, wenn die Beobachtungen normalverteilt sind.

4.8.2 Zweite Gauss'sche Begründung

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert Ergebnisse mit minimaler Varianz, wenn der Erwartungswert der Messfehler Null ist, dass heisst, wenn die Bedingung $E(\varepsilon) = 0$ erfüllt ist.

Bemerkung

Falls die Verteilung der Messfehler nicht genau bekannt ist, man aber weiss, dass z.B. positive und negative Fehler gleicher Grössenordnung gleich häufig auftreten, erhält man mit der Methode der kleinsten Quadrate Ergebnisse mit kleinstmöglicher Varianz.

4.8.3 Dritte Gauss'sche Begründung

In den anderen Fällen (Verteilung und Erwartungswert der Fehler nicht genau bekannt) hat die Methode der kleinsten Quadrate trotzdem ihre Begründung. Sie liefert widerspruchsfreie Resultate mit verhältnismässig einfachen Berechnungen.

Bemerkung

Solche Resultate gelten in der Regel als plausibel und nicht willkürlich. Einfache Beispiele sind das arithmetische Mittel oder das gewogene Mittel.

4.9 Ausgleichung korrelierter Beobachtungen

4.9.1 Vorgehen

Das Ausgleichungsprinzip der Methode der kleinsten Quadrate in der allgemeinsten Form

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{Min}$$

ist im Fall von korrelierten Beobachtungen ohne Einschränkung anwendbar. Es ist dabei zu beachten, dass die Kofaktorenmatrix Q_{II} und die daraus herleitbare Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P}\left(=\mathbf{Q}_{II}^{-1}\right)$$

keine Diagonalmatrizen sind. Sie sind symmetrisch und haben ausserhalb der Diagonale Elemente, welche verschieden von Null sind.

Alle Formeln der Ausgleichungsrechnung, welche aus der allgemeinen Minimumbedingung ($V^TPV = Min$.) und für eine beliebige Gewichts- oder Kofaktorenmatrix hergeleitet werden, eignen sich ebenso gut für die Ausgleichung von korrelierten wie unkorrelierten Beobachtungen.

4.9.2 Korrelationen in der geodätischen Praxis

Das Berücksichtigen von Korrelationen ist rechnerisch aufwendig. Wenn die Ursache der Korrelation nur ungenau mathematisch beschreibbar ist, wird sie mit vielen Unsicherheiten verbunden. Dies ist der Grund, warum in der Praxis viel lieber mit unkorrelierten Beobachtungen gearbeitet wird.

Es wird normalerweise alles vorgenommen, um das Messverfahren so zu gestalten und auch die Messgeräte in der Weise zu konstruieren, dass stochastisch unabhängige Beobachtungen entstehen.

So werden zum Beispiel Richtungen in erster und zweiter Fernrohrlage gemessen. Es wird mit gleichen Zielweiten nivelliert. Die elektronisch gemessenen Distanzen werden meteorologisch korrigiert. Höhenwinkel werden nie mit Visuren knapp über dem Boden gemessen. Winkel dürfen nicht in einer Umgebung mit starken horizontalen Temperaturgradienten beobachtet werden.

Alle diese Massnahmen einschliesslich den anderen, die hier nicht erwähnt werden können und die zu den Regeln der Kunst des Vermessungswesen gehören, erlauben in der Regel die Korrelationen zwischen den Messungen so klein zu halten, dass man sie vernachlässigen kann.

Es gibt aber trotzdem Fälle, in welchen man die vorhandenen Korrelationen berücksichtigen muss. Wir können zwei Fälle unterscheiden:

a) Mathematische Korrelation

Die Beobachtungen wurden rechnerisch aus ursprünglich unabhängigen Beobachtungen hergeleitet. Da die mathematischen Funktionen bekannt sind, kann man ohne weiteres mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Kovarianzmatrix der hergeleiteten Beobachtungen bestimmen. So können die Korrelationen streng berücksichtigt werden.

Beispiel:

Die Entfernungen P_1P_2 , P_1P_3 , P_1P_4 sind gemessen worden (unabhängige Beobachtungen). Man benötigt aber die Entfernungen P_2P_3 und P_3P_4 .

Diese Entfernungen können aus den unabhängigen Beobachtungen rechnerisch ermittelt werden. Die hergeleiteten Beobachtungen sind aber nicht mehr unabhängig. Man muss Varianzen und Kovarianzen mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmen.

b) Korrelationen, die aus unbekannten Ursachen im Messprozess entstehen Man spricht oft von physikalischen Korrelationen. Sie zu bestimmen ist viel schwieriger. Eine Schätzung mit Hilfe der Formel der empirischen Varianz und Kovarianz:

$$\sigma_{i}^{2} = \frac{\sum \varepsilon_{i} \varepsilon_{i}}{n}$$
$$\sigma_{j}^{2} = \frac{\sum \varepsilon_{j} \varepsilon_{j}}{n}$$
$$\sigma_{ij}^{2} = \frac{\sum \varepsilon_{i} \varepsilon_{j}}{n}$$

ist nur möglich, wenn man über eine grosse Anzahl (**n**) Messreihen verfügt. Man kann dann mindestens näherungsweise die wahren ε bestimmen und aus der grossen Stichprobe die gesuchten Varianzen und Kovarianzen schätzen. Dies ist aber selten möglich.

In der Praxis muss man sich oft mit unsicheren Näherungen in Form von empirischen Korrelationsfunktionen abfinden.

Beispiel:

In einem bestimmten Punktfeld sind die Punkthöhen alle gleich genau ($\sigma_i = 1 \text{ cm}$) und die Korrelationen zwischen zwei Koten nimmt mit der Distanz ab.

Wir nehmen in diesem Spezialfall an, dass

$$\rho_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^{(km)} + 1}$$

eine brauchbare Schätzung für den Korrelationskoeffizienten sei. Daraus können die Kovarianzen bestimmt werden.

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k}$$

Literaturverzeichnis

- Bencini, P.: Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
- Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
- Dupraz, H.: Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
- Howald, P.: Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
- Pelzer, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

5. Die vermittelnde Ausgleichung

5.1 Das mathematische Modell der vermittelnden Ausgleichung

Im vorherigen Kapitel wurde erklärt, wie die zur Verfügung stehenden Informationen in zwei Gruppen aufgeteilt werden:

- a) das stochastische Modell
- b) das funktionale Modell

Im **stochastischen Modell** werden die Teile der Realität beschrieben, die sich mit den Gedanken der mathematischen Statistik (Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen usw.) darstellen lassen. Für die vermittelnde Ausgleichung sowie für die anderen Ausgleichungsformen werden die Beobachtungen als mehrdimensionale Zufallsvariable zusammengefasst. Dabei wird die dazugehörige Kofaktorenmatrix benötigt. In der Regel können die Beobachtungen als normalverteilte Zufallsvariablen angenommen werden und in den meisten Fällen sind sie sogar unkorreliert.

Das funktionale Modell der vermittelnden Ausgleichung unterscheidet sich von demjenigen der anderen Ausgleichungsformen.

Man kann es wie folgt beschreiben:

- a) u unbekannte Grössen werden festgelegt, mit welchen die Lösung des Problems eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden kann. Die Anzahl u hängt vom Problem und von den Modellvorstellungen ab. Diese u Grössen werden unbekannte Parameter der Ausgleichung genannt.
- b) Die Beziehungen, die gemäss Modellvorstellungen gelten sollen, wenn die Beobachtungen fehlerfrei wären, sind anschliessend zu formulieren. Sie müssen für die vermittelnde Ausgleichung festlegen, wie jede Messung explizit als Funktion der unbekannten Parameter (und nur dieser Parameter) dargestellt wird.

$$\tilde{l}_{i} = F_{i}(\tilde{x}_{1}, \tilde{x}_{2}, \dots, \tilde{x}_{u})$$
 $i = 1 \dots n$ (1)

Wenn **n** Messungen vorliegen oder geplant sind, entstehen somit **n** verschiedene Gleichungen, die gelten sollten, falls die Grössen - mit welchen wir arbeiten - unendlich genau wären (Idee der "wahren Werte").

Die n Gleichungen bilden zusammen mit den Annahmen das funktionale Modell.

Unter diesen Annahmen können wir je nach Problem verschiedenste Aussagen finden. Zum Beispiel:

- Die Erdkrümmung kann vernachlässigt werden (Geometrie der Ebene)
- Die Lichtstrahlen sind Geraden
- Die Lage der Punkte hat sich während der Arbeit nicht verändert
- usw.
- c) Das funktionale und das stochastische Modell werden dann nach dem folgenden Gedankengang verknüpft:

Einige der verwendeten Grössen (die Messungen) kann man nicht als fehlerfreie Konstanten betrachten. Sie verhalten sich infolge der unvermeidlichen Messungenauigkeit wie Zufallsvariablen (stochastisches Modell).

Die Beziehungen, die man für die hypothetischen fehlerfreien Grössen erkannt hat, lässt man ebenfalls für die Zufallsvariablen gelten. Ihre unbekannten Erwartungswerte ersetzen dabei die ursprüngliche, vereinfachende Idee der "wahren" Werte von Messungen und unbekannten Parametern.

$$\mathbf{E}(\mathbf{l}_{i}) = \mathbf{F}_{i}(\widetilde{\mathbf{x}}_{i}, \widetilde{\mathbf{x}}_{2}, \dots, \widetilde{\mathbf{x}}_{u})$$
⁽²⁾

Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate will man optimal geschätzte (ausgeglichene) Werte für Messungen und unbekannte Parameter erhalten. Die Schätzung wird man so aufbauen, dass die erhaltenen ausgeglichenen Werte ebenfalls die oben genannten Gleichungen erfüllen und so ein **widerspruchsfreies System** bilden.

Die Gleichungen des funktionalen Modells kann man daher unverändert für die gesuchten ausgeglichenen Werte übernehmen.

$$\bar{l}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_u)$$
 $i = 1, 2, \dots, n$ (3)

- **Î**_i sind die ausgeglichenen Beobachtungen (oder die "beste" Schätzung für die Erwartungswerte der Zufallsvariablen <u>l</u>_i)
- x_i sind die unbekannten Parameter (oder die "beste" Schätzung für die gesuchten \tilde{x}_i)

Diese Gleichungen werden Beobachtungsgleichungen genannt.

Das Vorgehen wird am praktischen Beispiel 'Vorwärtseinschneiden' erläutert:



Anzahl unbekannte Parameter :2Das Problem ist durch zwei Winkelmessungen bestimmt.

Wahl von 2 unbekannten Parametern :

Zum Beispiel y, x als Koordinaten des Neupunktes (es wäre auch eine andere Wahl möglich).

y_A, x_A ... x_C: seien die Koordinaten der Festpunkte A, B, C.

Mit einfachen geometrischen Betrachtungen kann man die Beobachtungsgleichungen formulieren.

$$\overline{\alpha} = \phi_{AB} - \phi_{AP} = \operatorname{arctg} \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - \operatorname{arctg} \frac{y - y_A}{x - x_A}$$
(4)

$$\overline{\beta}_1 = \operatorname{arctg} \frac{y - y_B}{x - x_B} - \operatorname{arctg} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$\overline{\beta}_2 = \dots$$

$$\overline{\gamma} = \dots$$

Mit den Beziehungen, die die Beobachtungsgleichungen wiedergeben, hat man stillschweigend eine ganze Reihe von Hypothesen unterstellt. Diese Hypothesen beschreiben verbal unser funktionales Modell etwa wie folgt:

- Die Lotrichtungen seien parallel: Es gelte die ebene Geometrie.
 (Ein anderes Modell könnte vorschreiben: die Lotrichtungen zeigen gegen den Erdmittelpunkt; also Kugelgeometrie anwenden).
- Theodolit und Signale seien fehlerlos zentriert. (Die Zentrierungenauigkeit sollte im stochastischen Modell im mittleren Fehler a priori der Messungen berücksichtigt werden).
- Instrumentenfehler seien ohne Einfluss; sie seien durch Messverfahren eliminiert.
- Keine Seitenrefraktion.
- etc.

Zur Terminologie: Beobachtungen **vermitteln** die unbekannten Grössen **y**, **x**; gelegentlich spricht man von vermittelnden Beobachtungen.

5.2 Die Verbesserungsgleichungen

5.2.1 Form der Beobachtungsgleichungen

Jede Beobachtungsgleichung des funktionalen Modells enthält die ausgeglichene Beobachtung als unbekannte Grösse. Die ausgeglichene Beobachtung ist als verbesserte Beobachtung zu verstehen, die sich nicht allzu viel von den Messergebnissen unterscheidet.

$$l_i = l_i + v_i = F_i (x, y, z,)$$
 $i = 1, 2, n$ (5)

x, y, z,	unbel	kannte Parameter
v _i	i-te	Verbesserung
l _i	i-te	Beobachtung (erhaltener Wert aus der Messung)
Ī _i	i-te	ausgeglichene Beobachtung

5.2.2 Linearisierung der Beobachtungsgleichungen

In der Regel enthalten die Beobachtungsgleichungen Funktionen (\mathbf{F}_i), die nicht linear sind. Da aber im Vermessungswesen immer ein günstiges Verhältnis zwischen Messgenauigkeit und vermessenen Objekten besteht, können die nicht linearen Funktionen durch passende lineare ersetzt werden ohne dass dadurch relevante Informationsverluste entstehen.

Man linearisiert die Beobachungsgleichungen entweder analytisch oder numerisch mit den bekannten Methoden der Analysis und der numerischen Mathematik.

5.2.3 Analytische Linearisierung

Als analytisches Linearisierungsverfahren eignet sich z.B. die Reihenentwicklung nach Taylor, in welcher man nur die linearen Elemente berücksichtigt.

Man benötigt Näherungswerte (\mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 , \mathbf{z}_0 ,) für die unbekannten Parameter, die nur einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Resultate haben, falls sie in der Umgebung der gesuchten Lösung gewählt worden sind. Dann gilt:

$$x = x_0 + \xi$$

$$y = y_0 + \eta$$

$$z = z_0 + \zeta$$
(6)

und die Beobachtungsgleichung wird

$$\bar{l}_i = l_i + v_i = F_i (x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta,)$$
 (7)

nach Taylor gilt dann:

$$l_{i} + v_{i} = F_{i} (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...) + \frac{\partial F_{i}}{\partial x} (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...) \xi + \frac{\partial F_{i}}{\partial y} (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...) \eta + \frac{\partial F_{i}}{\partial z} (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...) \zeta + ... + R_{2}$$
(8)

Die partiellen Ableitungen sind berechenbar, da man die Beobachtungsgleichungen (das heisst F_i) kennt und sich bekannte Werte ergeben, wenn man die Näherungswerte für die unbekannten Parameter einsetzt.

5.2.4 Bildung der Verbesserungsgleichungen

Mit den folgenden Abkürzungen kann man aus Beobachtungsgleichungen neue lineare Gleichungen herleiten:

Wenn

$$a_{i} = \frac{\partial F_{i}}{\partial x} \quad (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...)$$

$$b_{i} = \frac{\partial F_{i}}{\partial y} \quad (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...)$$

$$c_{i} =$$

$$f_{i} = l_{i} - F_{i} (x_{0}, y_{0}, z_{0}, ...)$$

(9)

ist, ergibt sich

$$v_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \dots - f_i$$
 $i = 1, 2, \dots n$ (10)

was in Matrizenform folgendem entspricht:

$$V = A \cdot X - F$$

$$n.1 \quad n.u \quad u.1 \quad n.1$$
(11)

wobei

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_{1} \\ \mathbf{v}_{2} \\ \cdots \\ \mathbf{v}_{n} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1} & \mathbf{b}_{1} & \mathbf{c}_{1} & \cdots \\ \mathbf{a}_{2} & \mathbf{b}_{2} & \mathbf{c}_{2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n} & \mathbf{b}_{n} & \mathbf{c}_{n} & \cdots \end{vmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_{1} \\ \mathbf{f}_{2} \\ \cdots \\ \mathbf{f}_{n} \end{vmatrix}$$

und

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

ein Gleichungssystem mit n Gleichungen bilden.

Das Absolutglied **F** hat ein negatives Vorzeichen und die einzelnen Komponenten f_i berechnet man als Differenz ("gemessen minus genähert") zwischen Beobachtung und Beobachtungsnäherung (aus Beobachtungsgleichung und Näherungsunbekannte).

Basierend auf den bisherigen Betrachtungen kann man die Verbesserungsgleichungen definieren:

Definition

Die Verbesserungsgleichungen sind die nach den Verbesserungen aufgelösten und in den unbekannten Parametern linearisierten Beobachtungsgleichungen.

Beispiel für die analytische Linearisierung

Aus den Beobachtungsgleichungen (Formel (4)) ist zu berechnen:

$$\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\arctan\frac{y - y_A}{x - x_A} \right) = + \frac{\frac{y - y_A}{(x - x_A)^2}}{1 + \left(\frac{y - y_A}{x - x_A}\right)^2} = \frac{y - y_A}{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \frac{y - y_A}{D_{AP}^2}$$
$$\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\arctan\frac{y - y_A}{x - x_A} \right) = -\frac{x - x_A}{D_{AP}^2}$$
(12)

wobei D_{AP} die Distanz zwischen A und P ist.

Man erhält die Koeffizienten der Verbesserungsgleichung, indem man die Näherungskoordinaten (y_0, x_0) von **P** einsetzt. Für Winkel in Bogenmass gilt:

$$a_{\alpha} = \frac{y_{0} - y_{A}}{D_{AP_{0}}^{2}}$$
$$b = -\frac{x_{0} - x_{A}}{D_{AP_{0}}^{2}}$$

$$D_{\alpha} = -\frac{D_{AP_0}^2}{D_{AP_0}^2}$$

P_o Näherungspunkt für **P**

 $\mathbf{D}_{\mathbf{AP}_{\mathbf{0}}}$ aus Näherungskoordinaten

 $f_{\alpha} = \alpha - \alpha_0$

α gemessener Wert

 α_0 mit Näherungskoordinaten gerechneter Näherungswert

5.2.5 Numerische Linearisierung

Manchmal ist eine analytische Linearisierung unzweckmässig. Mit dem Computer kann man in der Regel nicht automatisch verschiedenartige Funktionen ableiten und auch von Hand sind komplizierte Funktionen zum Ableiten nicht besonders beliebt. Man kann daher, vor allem in Computerprogrammen, die Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen aus den Beobachtungsgleichungen direkt numerisch bestimmen.

$$\mathbf{a}_{i} = \frac{\partial \mathbf{F}_{i}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}_{o}, \mathbf{y}_{o}, \mathbf{z}_{o}, ...) \cong \frac{\mathbf{F}_{i} (\mathbf{x}_{o} + \Delta, \mathbf{y}_{o}, \mathbf{z}_{o}, ...) - \mathbf{F}_{i} (\mathbf{x}_{o}, \mathbf{y}_{o}, \mathbf{z}_{o}, ...)}{\Delta}$$
$$\mathbf{b}_{i} = \frac{\partial \mathbf{F}_{i}}{\partial \mathbf{y}} (....) \cong \frac{\mathbf{F}_{i} (\mathbf{x}_{o}, \mathbf{y}_{o} + \Delta, \mathbf{z}_{o}) - \mathbf{F}_{i} (\mathbf{x}_{o}, \mathbf{y}_{o}, \mathbf{z}_{o}, ...)}{\Delta}$$
(14)

usw.

Bei diesem Verfahren wird immer mit der gleichen Funktion F_i gearbeitet, die nur einmal programmiert werden muss. Kritisch ist die Wahl des Inkrements Δ . Wenn Δ zu gross ist, ist die Approximation schlecht; wenn Δ zu klein gewählt wird, können numerische Probleme (Stellenauslöschung) entstehen. Man muss von Fall zu Fall eine passende Grösse für Δ bestimmen.

5.2.6 Eigenschaften der Verbesserungsgleichungen

Die Verbesserungsgleichungen fassen die Informationen des funktionalen Modells zusammen. Sie genügen aber nicht, um die gestellte Aufgabe eindeutig zu lösen.

In der Tat besteht das lineare Gleichungssystem aus **n** Gleichungen. Die Anzahl der Unbekannten ist aber grösser: Die **n** Verbesserungen und die **u** unbekannten Parameter ergeben $\mathbf{n} + \mathbf{u}$ Unbekannte des Gleichungssystems.

Man kann z.B. die **u** unbekannten Parameter willkürlich wählen, um daraus die entsprechenden Verbesserungen eindeutig zu bestimmen. Das System der Verbesserungsgleichungen hat unendlich viele Lösungen ($\infty^{\mathbf{u}}$).

5.3 Die Normalgleichungen

5.3.1 Lösungsidee

Schon eine intuitive Betrachtung zeigt, dass nicht alle unendlich vielen Lösungen gleich sinnvoll erscheinen. Lösungen mit sehr grossen Verbesserungen bedeuten, dass die Lösung sehr stark von den beobachteten Grössen abweicht und weniger plausibel scheint als eine Lösung, die kleinere Verbesserungen ergibt. Die Methode der kleinsten Quadrate folgt diesem intuitiven Lösungsweg.

Man sucht unter den unendlich vielen Lösungen, die das funktionale Modell (Verbesserungsgleichungen) erfüllen, diejenige, welche "minimale" Verbesserungen ergibt.

5.3.2 Das Minimumsprinzip

Das gewählte Minimumsprinzip wird unter Berücksichtigung des stochastischen Modells (unterschiedliche Genauigkeit der Messungen) wie folgt formuliert:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V} = \mathrm{Minimum}$$
(15)

V ist die **n.1** Matrix (Vektor) der Verbesserungen, Q ist die Kofaktorenmatrix der Messungen, und **P** ihre Gewichtsmatrix.

Wenn die Messungen unkorreliert sind, nimmt die Matrix Q Diagonalgestalt an und die Matrix P (Gewichtsmatrix), welche die Inverse der Kofaktorenmatrix ist,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \tag{16}$$

ist ebenfalls eine Diagonalmatrix. Das Minimumsprinzip kann in solchen Fällen vereinfacht werden zu

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i} v_{i}^{2} = [pvv] = Minimum$$
(17)

5.3.3 Die Lösung des Minimumsproblems

Das Ausgleichungsproblem ist nun als mehrdimensionales Mimimumsproblem zu lösen. Die Variablen sind die **u** unbekannten Parameter und für unabhängige Messungen ist [**pvv**] die Funktion, die minimal sein muss. Man erhält die Lösung durch partielles Ableiten.

$$\frac{\partial \left[\mathbf{pvv} \right]}{\partial \xi} = \mathbf{0} \; ; \; \frac{\partial \left[\mathbf{pvv} \right]}{\partial \eta} = \mathbf{0} \; ; \; \frac{\partial \left[\mathbf{pvv} \right]}{\partial \zeta} = \mathbf{0} \; ; \; \dots \qquad (18)$$

das heisst:

$$\frac{\partial [pvv]}{\partial \xi} = 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \dots 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial \xi}$$
$$= 2p_1 v_1 a_1 + 2p_2 v_2 a_2 + \dots 2p_n v_n a_n$$
$$= 2 [pav] = 0$$
(19)

Entsprechend mit η und ζ .

$$[pav] = 0; [pbv] = 0; [pcv] = 0.$$
 (20)

Wenn die Verbesserungen als Funktionen der Unbekannten (Verbesserungsgleichungen) eingesetzt werden, folgt:

$$p_1 a_1 \left(a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta - f_1 \right) + p_2 a_2 \left(a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta - f_2 \right) + \dots = 0$$
was geordnet und vereinfacht werden kann:

was geordnet und vereinfacht werden kann:

$$[paa]\xi + [pab]\eta + [pac]\zeta - [paf] = 0$$
(21)

Entsprechend wird mit [pbv] und [pcv] verfahren.

Definition:

Man erhält ein Gleichungssystem mit u Gleichungen und u Unbekannten, das Normalgleichungssystem genannt wird, und das die folgende Form aufweist:

$$[paa]\xi + [pab]\eta + [pac]\zeta - [paf] = 0$$

$$[pab]\xi + [pbb]\eta + [pbc]\zeta - [pbf] = 0$$

$$[pac]\xi + [pbc]\eta + [pcc]\zeta - [pcf] = 0$$
(22)

Bemerkung 1

Die Matrix des Gleichungssystems ist **quadratisch** und **symmetrisch**. Falls die Determinante der Matrix von Null verschieden ist, haben wir eine eindeutige Lösung für die Unbekannten. Diese Voraussetzung ist bei korrekt angesetzten Ausgleichungsproblemen immer gegeben. Ist die Determinante null, so haben wir zuviele Unbekannte eingeführt.

Bemerkung 2

Ist [**pvv**] wirklich ein Minimum und nicht etwa ein Maximum? Kriterium: Die zweiten Ableitungen müssen positiv sein. Aus der 1. Ableitung nach ξ ergibt sich die 1. Normalgleichung; diese nochmals nach ξ abgeleitet, gibt [**paa**]. Dieser Ausdruck ist eindeutig positiv; entsprechend für η und ζ . [**pvv**] ist ein **Minimum** (kein Maximum!).

5.3.4 Die Lösung in Matrizenform

Die Minimumbedingung muss in Matrizenform gestellt werden, wenn die Beobachtungen korreliert sind. Der Fall der unabhängigen Beobachtungen kann dann als Spezialfall dieser allgemeinen Lösung angesehen werden.

Die Verbesserungen werden durch die Verbesserungsgleichungen als Funktionen der unabhängigen Variablen dargestellt.

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F}$$

Das Ziel ist, die Lösung X zu finden, für welche

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{Minimum}$$
(23)

Das heisst, für den Lösungsvektor X muss die Beziehung

$$dF(X) = 0^{T} \cdot dx$$

$$d(V^{T}PV) = 0^{T} \cdot dx$$
 (24)
gelten. Sie bedeutet, dass sich die Zielfunktion $(V^T P V)$ in der Umgebung der Lösung nicht ändert, wenn die Komponenten von X im Differentialbereich beliebig variieren.

$$d(V^{T}PV) = dV^{T}PV + V^{T}Pdv$$

= $V^{T}P^{T}dv + V^{T}Pdv$ (da $V^{T}Pdv$ eine 1x1 Matrix ist)
= $2V^{T}Pdv$ (da P symmetrisch ist, ist $P^{T} = P$)
 $V = AX - F$,
 $dv = Adx$

und $d(V^{T}PV) = 2V^{T}PAdx$

$$= 2(AX-F)^{T} PAdx$$

Die Bedingung

Da

ist

$$\mathbf{d}(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}) = \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\bullet} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

ist erfüllt, wenn

$$2V^{T}PA = 0^{T}$$
$$2(AX - F)^{T}PA = 0^{T}$$

das heisst,

$$A^{T}PV = 0$$

$$A^{T}P(AX - F) = 0$$

$$(A^{T}PA)X - A^{T}PF = 0$$
(25)

Diese Matrizengleichung stellt ein lineares Gleichungssystem (Normalgleichungssystem) mit \mathbf{u} Gleichungen und \mathbf{u} Unbekannten dar, aus welchem die gesuchte Lösung hergeleitet werden kann.

5.3.5 Die numerische Bildung der Normalgleichungen

Das Normalgleichungssystem kann gebildet werden, wenn die Verbesserungsgleichung und die Gewichtsmatrix vorliegen:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F} \quad ; \quad \mathbf{P} \tag{26}$$

wobei A und F sowie die Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P}\left(=\mathbf{Q}_{11}^{-1}\right)$$

bekannt sind. Es ergibt sich

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{A}$$
(27)

die Normalgleichungsmatrix und

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{F}$$
(28)

das Absolutglied des Normalgleichungssystems

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Z}$$

Wenn die Matrizenformel zur Bildung der Normalgleichungsmatrix verwendet wird, ist die Anzahl erforderlicher Multiplikationen

$$Anzmult = n^2 \cdot u + n \cdot u^2$$

Als grobe Näherung kann man annehmen, dass die Anzahl Messungen doppelt so gross ist, wie die Anzahl Unbekannten, so dass

Anzmult =
$$6 \cdot u^3$$

Diese grosse Anzahl Operationen kann nicht wesentlich reduziert werden, falls die Messungen korreliert sind und folglich die Gewichtsmatrix vollbesetzt ist. Sind die Messungen jedoch unabhängig (**P** ist dann eine Diagonalmatrix), kann die Anzahl Multiplikationen reduziert werden, indem man die klassische Form der Normalgleichungen verwendet.

Wo $[paa] = \sum_{i} p_{i}a_{i}a_{i}$ ist. Die Anzahl Multiplikationen ist dann:

Anzmult
$$\cong$$
 n \cdot u² \cong 2u³

unter der Voraussetzung, dass die Matrix N symmetrisch ist.

Die Anzahl Multiplikationen kann im Fall der unabhängigen Beobachtungen noch weiter reduziert werden.

Satz 1

Wenn die Messungen unabhängig sind, kann für jede Verbesserungsgleichung der dazugehörige Normalgleichungsanteil gebildet werden.

Die Normalgleichungsmatrix ist dann die Summe der Normalgleichungsanteile.

Beweis

Der Normalgleichungsanteil für die i-te Verbesserungsgleichung ist:

$$N_{i} = \begin{vmatrix} p_{i}a_{i}a_{i} & p_{i}a_{i}b_{i} & \dots \\ p_{i}b_{i}b_{i} & \dots \\ p_{i}b_{i}b_{i} & \dots \end{vmatrix}$$
(30)

dann ist

$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{n} \\
\mathbf{1} \\
\mathbf{N}_{i} = \\
\mathbf{N}_{i$$

Satz 2

Die Absolutglieder des Normalgleichungssystems können ebenfalls anteilmässig gebildet werden.

Bemerkung 1

Die einzelnen Verbesserungsgleichungen in geodätischen Anwendungen enthalten unabhängig von der Gesamtanzahl Beobachtungen und Unbekannten nur eine beschränkte Anzahl u_0 Unbekannte (z.B. 5 oder 6), da die Messungen in der Regel die unbekannten Punkte nur paarweise verbinden. In einer Verbesserungsgleichung sind daher nur u_0 Koeffizienten $\neq 0$.

So sind für die Bildung des symmetrischen Normalgleichungsanteils einer Verbesserungsgleichung N_i nur $(u_0 + 1) \cdot u_0$ Multiplikationen erforderlich. Diese Anzahl ist unabhängig von der Grösse der Arbeit und ist für übliche geodätische Netze in der Ebene gleich 30.

Die Bildung der Normalgleichungsmatrix wird somit ein Rechenprozess mit einem Aufwand proportional zur Anzahl Messungen

$Anzmult = k \bullet n$

Bemerkung 2

Die Matrizendarstellung des Normalgleichungssystems ist sehr gut geeignet für die Beschreibung der Theorie, aber eignet sich nur beschränkt (kleine Systeme, Übungen) als Rechenalgorithmus.

Bemerkung 3

Zur Ausgleichung geodätischer Netze werden daher die Koeffizienten der Verbesserungsgleichungsmatrix in komprimierten Tabellen gespeichert, um das überflüssige Speichern und Rechnen mit Nullen zu vermeiden.

Beispiel

u	0 Koeffiz	_	N		
^a 1 _i	^a 1 _j	^a 1 _k			i ₁
^a 2 _i	^a 2 _j	^a 2 _k			ⁱ 2
		•••			

Nummer der Unbekannten

ⁱ 1	j ₁	^k 1	•••
ⁱ 2	j ₂	k ₂	
	•••		

[H.R. Schwarz. Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichungsrechnung, Zeitschrift für Vermessungswesen 4-1970]

5.3.6 Rechenkontrolle bei der Bildung der Normalgleichungen

Die Rechenkontrollen haben den grössten Teil ihre Bedeutung verloren, da man heute in der Regel mit Hilfe von getesteten Computerprogrammen arbeitet. Man kann **für unabhängige Beobachtungen** in Spezialfällen, die eine Kontrolle der Berechnungen erfordern, wie folgt vorgehen :

Die Verbesserungsmatrix (inkl. Absolutglieder) wird um eine Kolonne **S** erweitert. Die Elemente von **S** werden zeilenweise als Summe der Koeffizienten der Verbesserungsgleichung und des Absolutglieds gebildet.



 $\mathbf{s}_i = \mathbf{a}_{i1} + \mathbf{a}_{i2} + \dots - \mathbf{f}_i$

Bei der Bildung der Normalgleichung wird die Zusatzkolonne genauso wie die anderen Kolonnen behandelt.

[paa]	[pab]	-[paf]	[pas]	(32)
•••				(82)

Bei richtiger Berechnung enthält die letzte Kolonne die Summe der anderen Koeffizienten der entsprechenden Zeilen.

5.4 Die numerische Lösung des Normalgleichungssystems

5.4.1 Vielfalt der Methoden, Einschränkungen im Kurs

Die Lösung des Normalgleichungssystems hat viele Mathematiker beschäftigt, da man oft mit solchen Systemen zu tun hat. Eine systematische Analyse der bekannten Verfahren zur Auflösung der Normalgleichungen würde die Ziele dieses Kurses überschreiten. Man überlässt dem Leser, die Spezialliteratur der linearen Algebra, der numerischen Mathematik und der klassischen Ausgleichungsrechnung zu konsultieren.

Wir werden uns auf die Behandlung des Austauschverfahrens, das im Kapitel 3 beschrieben wurde, beschränken.

Dieses Verfahren ist leicht erlernbar, man kann es leicht einsetzen, es eignet sich für die Handberechnung sowie für die Programmierung und, dies ist die wichtigste Eigenschaft, erlaubt den direkten Beweis von zahlreichen Beziehungen der Ausgleichungsrechnung.

In den folgenden Betrachtungen wird das Austauschverfahren als bekannt vorausgesetzt.

Für die praktische Anwendung (z.B. in der Programmierung) ist eine vertiefte Analyse der numerischen Lösungsverfahren zu empfehlen, da je nach Applikation andere Methoden wesentlich vorteilhafter sein können:

- Dreieckzerlegung nach Cholesky
- Orthogonalisierungsverfahren
- Methode der konjugierten Gradienten
- Verfahren für schwachbesetzte Matrizen
- Iterative Verfahren (z.B. Gauss-Seidel)
- usw.

5.5 Schlusskontrolle

Die unbekannten Parameter, die aus dem Normalgleichungssystem berechnet werden, erfüllen die Minimumbedingungen (**[pvv]** = Minimum) für die Verbesserungen des linearen Modells.

Falls die Linearisierung falsch oder nicht genügend genau (z.B. ungenaue Näherungskoordinaten) war, würde man aus den ursprünglichen nicht linearen Beobachtungsgleichungen andere Verbesserungen erhalten, die **nicht** notwendigerweise die kleinste **[pvv]** ergeben.

Es ist daher notwendig zu prüfen, ob die Verbesserungen aus den Beobachtungsgleichungen näherungsweise gleich sind wie die Verbesserungen aus den (linearisierten) Verbesserungsgleichungen.

$$v_i = F_i(x, y, z...) - l_i$$
 (46)

$$\mathbf{v}'_{\mathbf{i}} = \mathbf{a}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{c}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\zeta} + \dots - \mathbf{f}_{\mathbf{i}}$$
(47)

wobei:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{o} + \boldsymbol{\xi}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{o} + \boldsymbol{\eta}$$

sind.

Bei richtiger und genügend genauer Linearisierung müssen alle

$$\mathbf{v}_{i} \cong \mathbf{v}_{i}^{'}$$

sein, was überprüft werden kann.

Bemerkung 1

Die Beobachtungsgleichung und ihre Linearisierung (Verbesserungsgleichung) sind in erster Näherung gleiche Funktionen in der Umgebung der Näherungslösung. Die Bedingung $v_i = v_i'$ gilt daher nicht nur für die Lösung des Normalgleichungssystems (ξ , η , ...), sondern auch für jede beliebige Zahlenreihe (ξ' , η' ...), sofern die Komponente nicht zu weit von der Näherungslösung entfernt sind. Die Linearisierung kann somit vor der eigentlichen Berechnung überprüft werden.

Bemerkung 2

Wenn nur die Genauigkeit der Näherungskoordinaten überprüft werden muss - da die Berechnung als richtig vorausgesetzt werden kann - (z.B. Computerberechnung), kann man anstatt eines Vergleiches der einzelnen v_i mit den v_i' , eine geeignete Funktion aller v_i mit der entsprechenden Funktion der v_i' vergleichen. Zum Beispiel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}\mathbf{v}_{i}\mathbf{v}_{i} \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \mathbf{p}\mathbf{v}_{i}^{'}\mathbf{v}_{i}^{'} \end{bmatrix}$$

$$Maximum \left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i} - \mathbf{v}_{i}^{'} \end{bmatrix} \right)$$

oder

usw.

Bemerkung 3

Wenn die schlechte Übereinstimmung der Schlusskontrolle aus ungenauen Näherungskoordinaten stammt, ist eine neue Ausgleichung zu berechnen, indem die erhaltenen Koordinaten als neue Näherungswerte verwendet werden (iteratives Vorgehen).

Bemerkung 4

Unstimmigkeiten entstehen, wenn die unbekannten Parameter gerundet werden (z.B. Koordinaten auf Zentimeter usw.). Man muss in den linearen Gleichungen die in gleicher Art korrigierten Parameter verwenden.

5.6 Verfahren für die Berechnung von [pvv]

Der Minimalwert der Zielfunktion **[pvv]**, die als Grundlage für die Berechnung der Ausgleichung diente, kann auf verschiedene Arten berechnet werden. Am naheliegendsten ist die direkte Berechnung aus den Verbesserungen:

$$V = AX - F$$
 aus den Verbesserungsgleichungen

oder

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, ...) - \mathbf{l}_i$$
 aus den Beobachtungsgleichungen

dann ist $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}$ sofort berechenbar.

Für unabhängige Beobachtungen ist dann

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = [\mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{v}] = \sum \mathbf{p}_{i} \mathbf{v}_{i}^{2}$$

Als Alternative gilt:

Satz 1

Der Minimalwert der Zielfunktion $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}$ kann mit folgender Formel berechnet werden

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F}$$
(48)

oder was gleichwertig ist:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X}$$
(49)

Die Bedeutung der einzelnen Matrizen ist aus den früheren Ausführungen bekannt. Zu beachten ist, dass $A^{T}PF$ die Absolutglieder der Normalgleichungen und $A^{T}PA$ die Normalgleichungsmatrix sind.

Die Formel (48) lautet für unabhängige Beobachtungen:

$$[pvv] = [pff] - [paf] \xi - [pbf] \eta - \dots$$
(50)

Die Symbole wurden bei der Bildung der Normalgleichungsmatrix erläutert.

Beweis

$$\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F})^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = (\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})\mathbf{P}\mathbf{V} - \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}$$
$$= \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} - \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{F}$$

da $\mathbf{A}^{T} \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{F}^{T} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X}$ eine 1.1 Matrix sind.

Aus dieser ersten Formel und V = AX - F folgt dann:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{V})$$
$$= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}$$

und da $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ist, ist die zweite Formel ebenfalls bewiesen.

Satz 2

Man kann die Kolonne der Absolutglieder symmetrisch als zusätzliche Zeile im Schema der Normalgleichungen eintragen und das fehlende Diagonalelement (mit Index **u+1**) als logische Ergänzung mit **[pff]** versehen. Dieses letzte Element der Diagonale ergibt nach durchgeführter Inversion mit dem AT-Verfahren die gesuchte **[pvv]**.

Beweis

Im Schema des Austauschverfahrens werden folgende Elemente eingetragen:

	x ₁	x ₂	•••••	1	_
y ₁ =	[paa]	[pab]	••••	-[paf]	
y ₂ =	[pab]	[pbb]		-[pbf]	(51)
y ₃ =					(51)
y _{u+1} =	-[paf]	-[pbf]	••••	[pff]	

Es ist sofort daraus ersichtlich, dass die letzte lineare Funktion (y_{u+1}) den gesuchten Zielwert ergibt, wenn die Lösung $(\xi, \eta, ...)$ eingesetzt wird.

Nach der Inversion (**u** AT-Schritte mit Pivot in deren ersten **u** Diagonalelemente der Matrix) erhält man



da $y_{u+1} = [pvv]$ ist und bei der Lösung $y_1, y_2 \dots$ Null sind, ist dann $\omega = [pvv]$.

Das folgende Beispiel zeigt eine vollständige Berechnung (inklusive Rechenkontrollen) für 3 unbekannte Parameter.

x 1	^x 2	x ₃	1	σ	
27.883	1.127	-1.127	-26.222	-0.661	
1.127	10.236	-2.236	10.303	-18.430	
-1.127	-2.236	10.236	-10.303	+4.430	
-26.222	10.303	-10.303	48.264	-21.042	

0.036	-0.040	+0.040	+0.940	+0.024
0.040	10.1 <u>9</u> 0	-2.190	+11.363	-18.403
-0.040	-2.190	10.190	-11.363	+4.403
-0.940	+11.363	-11.363	23.605	-21.663

0.036	-0.004	0.031	0.985	-0.048
-0.004	0.098	0.215	-1.115	+1.806
-0.031	-0.215	9.7 <u>1</u> 9	-8.920	+0.448
-0.985	+1.115	-8.920	10.934	-1.141

(54)

(53)

(55)

0.036	-0.003	0.003	1.013	-0.049	(56)
-0.003	0.103	0.022	-0.918	1.796	
0.003	0.022	0.103	0.918	-0.046	
-1.013	+0.918	-0.918	2.747	-0.730	

5.7 Die Kofaktorenmatrix der unbekannten Parameter

Satz

Die Inverse der Normalgleichungsmatrix ist die Kofaktorenmatrix der unbekannten Parameter, das heisst

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

Wobei A die Koeffizientenmatrix der Verbesserungsgleichungen und

P die Gewichtsmatrix der Beobachtungen ist.

$$\left(\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathrm{II}}^{-1} = \sigma_{\mathrm{o}}^{2} \mathbf{K}_{\mathrm{II}}^{-1}\right)$$

Beweis

Die unbekannten Parameter bilden die Lösung des Normalgleichungssystems,

$$\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{X}=\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{F}$$

das heisst

$$X = (A^{T}PA)^{-1} A^{T}P \cdot F$$

= $(A^{T}PA)^{-1} A^{T}P \cdot (L - L_{0})$
= $R(L - L_{0})$
= $RL - RL_{0}$

da **RL** eine lineare Funktion der Beobachtungen und **RL** $_0$ eine Konstante ist, kann man das Fehlerfortpflanzungsgesetz anwenden,

$$K_{xx} = RK_{II}R^{T}$$

und da

 $K_{ll} = \sigma_0^2 Q_{ll}$ und $K_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx}$ sind, folgt

$$\sigma_0^2 Q_{xx} = R \left(\sigma_0^2 Q_{11} \right) R^T$$
$$Q_{xx} = R Q_{11} R^T$$
$$R = \left(A^T P A \right)^{-1} A^T P \text{ ist, folgt:}$$

da

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

Aufgrund der Symmetrie $(\mathbf{P}^{T} = \mathbf{P})$, und aus der Definition der Gewichtsmatrix $(\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{II}^{-1})$ folgt:

$$Q_{xx} = (A^{T}PA)^{-1} \cdot A^{T}PA \cdot (A^{T}PA)^{-1}$$
$$= (A^{T}PA)^{-1}$$

5.8 Die Varianzen und Kovarianzen der unbekannten Parameter

Satz

Wenn die Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{xx} berechnet ist und

$$\mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} & \cdots \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

kann man die Standardabweichung der gesuchten Unbekannten $(x_1, x_2,...)$ mit den folgenden Formeln erhalten

$$\sigma_{x1} = \sigma_0 \sqrt{q_{11}}$$
$$\sigma_{x2} = \sigma_0 \sqrt{q_{22}}$$

usw.

Beweis

Die Kovarianzmatrix der unbekannten Parameter ist:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \sigma_{\mathbf{o}}^{2} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{o}}^{2} \mathbf{q}_{11} & \sigma_{\mathbf{o}}^{2} \mathbf{q}_{12} & \cdots \\ \sigma_{\mathbf{o}}^{2} \mathbf{q}_{21} & \sigma_{\mathbf{o}}^{2} \mathbf{q}_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix sind die Varianzen der dazugehörigen Zufallsvariablen. Daraus folgt:

$$\sigma_{\mathbf{x}_{i}} = \sqrt{\mathbf{V}(\mathbf{x}_{i})} = \sqrt{\sigma_{0}^{2} q_{ii}}$$

5.9 Die Kofaktorenmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen

Satz

Die Kofaktorenmatrix

$\boldsymbol{Q}_{\bar{1}\bar{1}}$

der ausgeglichenen Beobachtungen kann mit der folgenden Formel berechnet werden

$$\mathbf{Q}_{\overline{1}\overline{1}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

wobei

Α	die Matrix der Verbesserungsgleichungen und
Q _{xx}	die Kofaktorenmatrix der unbekannten Parameter

sind.

Beweis

aus	$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F}$
und	$\mathbf{F} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$

folgt

$$\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L}_{\mathbf{0}}$$

Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt

$$Q_{\overline{1}\overline{1}} = AQ_{xx}A^{T}$$

5.10 Die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen

Satz 1

Die Kofaktorenmatrix $\, Q_{vv} \,$ der Verbesserungen ist

$$Q_{vv} = Q_{II} - A \left(A^{T} P A\right)^{-1} A^{T}$$

Beweis

Aus den Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F}$$

und aus der Lösung des Normalgleichungssystems

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{F}$$

kann man

$$V = A \left(A^{T}PA\right)^{-1} A^{T}PF - F$$

= HF wobei $H = A \cdot (A^{T}PA)^{-1} A^{T}P - E$
= H (L - L₀)
= HL - H L₀

Da HL_0 eine Konstante ist, folgt mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{II}\mathbf{H}^{T}$$
$$= \left(\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P} - \mathbf{E}\right)\mathbf{Q}_{II}\left(\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P} - \mathbf{E}\right)^{T}$$

Da $\mathbf{Q}_{II} = \mathbf{P}^{-1}$ und $\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{N}$

$$Q_{vv} = (A \cdot N^{-1}A^{T} - Q_{II})(PAN^{-1}A^{T} - E)$$
$$= AN^{-1}A^{T}(PAN^{-1}A^{T} - E) - Q_{II}(PAN^{-1}A^{T} - E)$$
$$= AN^{-1}A^{T}PAN^{-1}A^{T} - AN^{-1}A^{T} - AN^{-1}A^{T} + Q_{II}$$

und da $A^{T}PA = N$

$$Q_{vv} = AN^{-1}A^{T} - AN^{-1}A^{T} - AN^{-1}A^{T} + Q_{II}$$
$$= Q_{II} - A(A^{T}PA)^{-1}A^{T}$$

Satz 2

Die Kofaktorenmatrix Q_{vv} der Verbesserungen kann ebenfalls mit Hilfe von Q_{xx} (Kofaktoren der Unbekannten) oder $Q_{\overline{11}}$ (Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen) berechnet werden.

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{\overline{11}}$$

Beweis

Aus der Formel für die Berechnung von

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$$
 und $\mathbf{Q}_{\mathbf{i}\mathbf{i}}$.

Bemerkung 1

Wenn die Kofaktorenmatrizen der Verbesserungen und der ausgeglichenen Beobachtungen bekannt sind, kann man die Standardabweichungen der einzelnen Verbesserungen und ausgeglichenen Beobachtungen berechnen:

$$\sigma_{v_i} = \sigma_o \sqrt{q_{vv}^{(ii)}}$$
$$\sigma_{\bar{l}_i} = \sigma_o \sqrt{q_{\bar{l}\bar{l}}^{(ii)}}$$

Satz 3

Für jede (i-te) Beobachtung gilt:

$$q_{vv}^{(ii)} = q_{11}^{(ii)} - q_{\bar{1}\bar{1}}^{(ii)}$$

Beweis

Aus der Beziehung

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} - \mathbf{Q}_{\mathbf{I}\mathbf{I}}$$

kann man das i-te Diagonalelement berechnen.

Satz 4

Für jede (i-te) Beobachtung gilt:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}_{i}}^{2} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{l}_{i}}^{2} + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{\mathbf{l}}_{i}}^{2}$$

das heisst, die Standardabweichungen verhalten sich wie die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem σ_{l_i} die Hypothenuse und σ_{v_i} und $\sigma_{\tilde{l}_i}$ die Katheten sind.



Beweis

Aus dem Satz 3 gilt

$$q_{vv}^{(ii)} = q_{ll}^{(ii)} - q_{\bar{l}\bar{l}}^{(ii)}$$
$$\frac{\sigma_{v_i}^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sigma_{l_i}^2}{\sigma_0^2} + \frac{\sigma_{\bar{l}_i}^2}{\sigma_0^2}$$

5.11 Die a posteriori Schätzung der Varianz

Satz 1

Die Spur einer quadratischen Produktmatrix ändert sich nicht, wenn die Faktoren zyklisch permutiert werden.

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \operatorname{Sp}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

axb bxc cxa

Bemerkung 1

Nach der Ausgleichung sind die Verbesserungen für die einzelnen Messungen bekannt, und man möchte damit die tatsächliche Genauigkeit der Messungen berechnen bzw. überprüfen, sofern man sie schon im Voraus gekannt hat. Dies geschieht, indem man σ_0 aus den erhaltenen Verbesserungen schätzt, ohne die Genauigkeitsverhältnisse der Kofaktorenmatrix in Frage zu stellen.

Bemerkung 2

Eine Schätzung kann beliebig aufgebaut werden. Man kann gute oder schlechte Schätzer haben. Um eine Schätzung s_o^2 für σ_o^2 zu erhalten, hat man die Verbesserung V und die Gewichtsmatrix P zur Verfügung. Man wird daher

$$s_0^2 = F(V, P)$$

verwenden.

Eine vorhandene, geeignete Funktion der Verbesserungen ist die Zielfunktion $V^{T}PV$, die minimalisiert wurde:

$$s_0^2 = \frac{V^T P V}{k}$$

Eine solche Schätzung ist geeignet, sofern sie erwartungstreu ist.

Das heisst, k ist so zu wählen, dass die Schätzung s_o^2 für σ_o^2 erwartungstreu wird:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{s}_{o}^{2}\right)=\sigma_{o}^{2}$$

Dies bedeutet

$$\mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}}{\mathbf{k}}\right) = \sigma_{o}^{2}$$

Satz 2

In einer vermittelnden Ausgleichung mit n Beobachtungen und u Unbekannten ist

$$\mathbf{s}_{o}^{2} = \frac{\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}}{\mathbf{n} - \mathbf{u}}$$

eine erwartungstreue Schätzung für $\sigma_{_0}^2.$

Beweis

Da $V^{T}PV$ eine 1 x 1 Matrix ist, ist auch

$$\mathbf{Sp} (\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}) = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}$$

so dass

$$E\left(\frac{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}}{\mathbf{k}}\right) = \frac{1}{k}E\left(\mathrm{Sp}\left(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{k}E\left(\mathrm{Sp}\left(\mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{k}\mathrm{Sp}\left(E\left(\mathbf{P}\right)\cdot E\left(\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{k}\mathrm{Sp}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{K}_{\mathrm{vv}}\right)$$
$$= \sigma_{0}^{2}\cdot\frac{\mathrm{Sp}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_{\mathrm{vv}}\right)}{k}$$

s²₀ ist erwartungstreu, wenn

$$k = Sp (P \cdot Q_{vv}) = konstant$$

Aus 5.10 folgt

$$Sp(PQ_{vv}) = Sp(P \cdot (Q_{II} - A(A^{T}PA)^{-1} A^{T}))$$
$$= Sp(E) - Sp(PA(A^{T}PA)^{-1} A^{T})$$

Aus Satz 1 (Invarianz der Spur bei zyklischer Permutation) folgt:

$$Sp(PQ_{vv}) = Sp(E) - Sp((A^{T}PA)(A^{T}PA)^{-1})$$
$$= Sp(E) - Sp(E)$$
$$uxu$$

= n – u

Die Schätzung ist erwartungstreu, wenn $\mathbf{k} = \mathbf{n} - \mathbf{u}$ ist.

Bemerkung 3

Die Standardabweichungen der unbekannten Parameter kann berechnet werden, wenn man σ_0 kennt. Andernfalls kann zu einer Schätzung übergegangen und anstatt σ_0 s_0 verwendet werden. Als allgemeine praktische Regel gilt:

- Wenn σ_0 bekannt ist, wird σ_0 verwendet.
- Falls σ_0 unbekannt ist (das heisst, wenn die Varianzen der Beobachtungen nur im Verhältnis bekannt waren, siehe Kap. 4.3), wird mit s_0 gearbeitet.
- Wenn σ_0 unsicher ist und uns Gründe veranlassen zu glauben, dass s_0 eine bessere Schätzung darstellt (das ist vor allem in Netzen mit grossem Freiheitsgrad möglich), rechnet man mit s_0 .

Bemerkung 4

Die Schätzung s_0 kann verwendet werden, wenn man bei der Formulierung des stochastischen Modells nur die Genauigkeitsverhältnisse und nicht die einzelnen Varianzen bekannt sind.

In diesem Fall ist nur die Kofaktorenmatrix bekannt, während die Beziehung zu den Kovarianzen unbekannt bleibt.

z.B.

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{4} \\ & & & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

bedeutet, dass die Varianz der ersten zwei Beobachtungen ein Viertel der Varianz der weiteren zwei Messungen ist. Um das zu schreiben, braucht man nicht die Kovarianzmatrix der Beobachtungen zu kennen. Wer so vorgeht, weiss aber nicht wie gross die Konstante σ_0^2 war. Man wird sie nach der Ausgleichung als s_0 schätzen.

5.12 Der Modelltest

In den meisten Fällen sind die Varianzen der einzelnen Messungen bekannt und die Kofaktoren wurden mit Hilfe eines bekannten σ_0 berechnet.

Trotzdem kann man nach der Ausgleichung die Schätzung s_0 für σ_0 bestimmen, um die erhaltenen Werte zu vergleichen (Modelltest). Man bildet den folgenden Quotienten (Testvariable):

$$F = \frac{s_o^2}{\sigma_o^2}$$

Die Beurteilung der Testgrösse \mathbf{F} erlaubt uns, das Ergebnis auf Plausibilität zu prüfen, oder gibt uns Anlass, das angenommene stochastische Modell zu verwerfen.

Die Schätzung s_0 stammt aus einer Schätzfunktion, die aus den Verbesserungen und daher indirekt aus den Messungen (Zufallsvariablen) berechnet wird. Sie ist ebenfalls eine Zufallsgrösse (siehe 3.12). Der Quotient **F** ist daher ebenfalls eine Zufallsgrösse.

Aus der Statistik und aus den getroffenen Annahmen kann man die folgenden Aussagen herleiten:

- 1. Die Quadratsumme von normal-verteilten Grössen ist χ^2 -verteilt.
- 2. Der Quotient zweier χ^2 -verteilten Grössen, die man durch den Freiheitsgrad dividiert, ist F-verteilt.
- 3. Die Beobachtungen 1 sind normalverteilt.
- 4. Die Verbesserungen v sind normalverteilt.
- 5. Für die Testgrösse F gilt:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{s}_{\mathbf{o}}^2}{\sigma_{\mathbf{o}}^2} \quad \text{ist } \frac{\chi_{\mathbf{n}-\mathbf{u}}^2}{\mathbf{n}-\mathbf{u}} \quad \text{verteilt}$$

das heisst:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{s}_{0}^{2}}{\sigma_{0}^{2}}$$
 ist $\mathbf{F}_{n-u, \infty}$ verteilt.

Die Testvariable F ist F-verteilt mit den Freiheitsgraden (n-u) und ∞ .

Mit der Verteilungsfunktion und einem Signifikanzniveau α kann für die Grösse **F** ein Annahme- und ein Verwerfungsbereich bestimmt werden.

Im Anwendungsfall, wenn die Messungen und die Ergebnisse der Ausgleichung vorliegen, kann man die Realisierung der Teststatistik **F** prüfen. Entweder fällt sie in den Annahmebereich, und man sieht daher keine Gründe, um das Modell zu verwerfen, oder sie ist im Verwerfungsbereich und daher muss mit einem Fehlentscheidsrisiko = α das Modell verworfen werden.

Die folgende Tabelle gibt einige Zahlenwerte für die Bestimmung von Annahme- und Verwerfungsbereich.

£	$\alpha = 5 \%$	α = 1 %
1	F _{f,∞}	F _{f,∞}
1	3.84	6.64
2	3.00	4.60
3	2.61	3.77
5	2.22	3.02
10	1.83	2.32
100	1.24	1.36

f ist der Freiheitsgrad

-

 α ist das Signifikanzniveau

Bemerkung 1

Der Erwartungswert der Teststatistik ist:

$$\mathrm{E}\!\left(\mathrm{F}_{\mathrm{n-u},\infty}\right) = 1$$

Der Modelltest sagt aus, ob der realisierte Quotient

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{s}_o^2}{\sigma_o^2}$$

signifikant von 1 abweicht.

Bemerkung 2

Je grösser der Freiheitsgrad wird, desto kleiner wird die Varianz von **F**. Die Schätzung s_o^2 wird mit zunehmender Überbestimmung immer besser. Bei grossen Freiheitsgraden stellt sich aber sehr bald die Frage, ob die Varianzen a priori der Beobachtungen weiterhin als absolut genau betrachtet werden können. In der Praxis wird der globale Modelltest für grosse Netze oft nur als Hinweis und nicht als Entscheidungskriterium betrachtet, da es im Normalfall nicht möglich ist zu wissen, wie genau die Varianzen a priori sind.

Beispiel:

Eine Ausgleichung mit 3 überschüssigen Beobachtungen (f=3) ergibt einen

Quotient
$$F = \frac{s_o^2}{\sigma_o^2} = 2.52$$
.

Ist die Abweichung von 1 signifikant oder nur zufällig?

Antwort: **Zuerst** muss das Signifikanzniveau α festgelegt werden: (α ist das sog. Irrtumsrisiko):

Für $\alpha = 1\%$ ergibt sich: 2.52 < 3.77 $\stackrel{\wedge}{=}$ zufällige Abweichung. Für $\alpha = 5\%$ ergibt sich: 2.52 < 2.61 $\stackrel{\wedge}{=}$ zufällige Abweichung.

5.13 Test der standardisierten Verbesserungen

Die Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen sind a priori Zufallsvariablen, die bei normalverteilten Beobachtungen ebenfalls normalverteilt sind. Ihr Erwartungswert und ihre Varianz betragen

$$\begin{split} \mathbf{E}(\mathbf{v}_{i}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V}(\mathbf{v}_{i}) &= \sigma_{o}^{2} \cdot \mathbf{q}_{vv}^{(ii)} = \sigma_{vi}^{2} \end{split}$$

Definition

Die Grösse

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{vi}}$$

nennt man die standardisierte Verbesserung der i-ten Beobachtung.

Satz

Die standardisierten Verbesserungen sind standardnormalverteilt, das heisst

$$E(w_i) = 0$$
$$V(w_i) = 1$$

Man kann daher die standardisierten Verbesserungen w_i als Testvariablen betrachten, da man ihre Verteilung kennt. Mit einem festgelegten Signifikanzniveau α kann ein Konfidenzintervall bestimmt werden (1. Phase des Tests).

Nach Vorliegen der standardisierten Verbesserungen prüft man, ob die Grössen w_i im Konfidenzintervall sind. In diesem Fall wird das Modell angenommen. Falls ein w_i (Realisierung von w_i) ausserhalb des Konfidenzintervalles fällt, ist ein Fehler zu suchen.

5.14 Konfidenzintervalle

Mit Hilfe der Kofaktorenmatrizen kann man die Kovarianzmatrizen der entsprechenden Grössen bestimmen.

Falls die Standardabweichung der Gewichtseinheit (σ_0) bekannt ist und durch den Modelltest bestätigt wurde, folgt z.B.

$$\mathbf{K}_{xx} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{xx}$$
$$\mathbf{K}_{yy} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{yy}$$

Daraus können Varianzen und Kovarianzen der intressierenden Grössen bestimmt werden.

Da die Unbekannten, Verbesserungen usw. als lineare Funktionen der Beobachtungen normalverteilt sind, kann man mit Hilfe der Normalverteilung und einem Signifikanzniveau α die Grenzen des Konfidenzintervalles ermitteln. Sofern σ_0 als nicht bekannt angenommen werden kann, werden die Kovarianzmatrizen mit s_0 geschätzt.

$$\mathbf{K}_{xx} = \mathbf{s}_{o}^{2} \cdot \mathbf{Q}_{xx}$$
$$\mathbf{K}_{vv} = \mathbf{s}_{o}^{2} \cdot \mathbf{Q}_{vv}$$

usw.

Die Bestimmung der Konfidenzintervalle erfolgt in diesem Fall mit Hilfe der t-Verteilung und des Freiheitsgrades, mit welchem s_0 geschätzt wurde.

5.15 Arbeitsanleitung für eine vermittelnde Ausgleichung

- 1. Problem erfassen. Ausgleichungsproblem ?
- 2. Mathematische Zusammenhänge beschreiben.

Funktionales Modell

Beobachtungen (n) Unbekannte Parameter (u) Beobachtungsgleichungen

Stochastisches Modell

Zufallsgrössen (Beobachtungen usw.) Eigenschaften der Zufallsgrössen (Verteilung, Varianzen, Kovarianzen)

Fehlerfreie Grössen \rightarrow P-Matrix

3. Verbesserungsgleichungen

Beobachtungsgleichung: $\overline{l} = l + v = F(X, Y, Z ...)$ Linearisieren: $\rightarrow v = ax + by + cz + ... - f$

 $\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{F}$

4. Normalgleichungssystem

Die Bedingung $V^{T}PV = Min$ führt zum Normalgleichungssystem

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F}$$

- Normalgleichungsmatrix bilden
- Absolutglieder bilden
- Bei Handberechnung Rechenkontrollen

5. Lösung des Normalgleichungssystems

Inversion der NG-Matrix + Lösung des Gleichungssystems

- z.B. AT-Verfahren, ev. mit Summenkontrolle
- Lösung für die x
- [pvv] zur Kontrolle

6. Berechnung der Verbesserungen

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{F}$$

- Einsetzen der Unbekannten x
- [pvv] bestimmen

7. Schätzung der Varianzen a posteriori

- Schätzung von σ_0

$$\mathbf{s}_{o}^{2} = \frac{\left[\mathbf{pvv}\right]}{\mathbf{n}-\mathbf{u}}$$

 s_0^2 ist die geschätzte Varianz (a posteriori) einer Beobachtung mit Gewicht = 1 d.h. s_0 ist eine Schätzung für σ_0

- Modelltest

8. Schlusskontrolle

- a) $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots)$
- b) $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} \mathbf{F} + \mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} \mathbf{L}_{o}$

9. Nach Bedarf

- Q_{vv} , $Q_{\bar{l}\bar{l}}$ berechnen
- σ_v σ_ī
- Aus $Q_{xx} \rightarrow \sigma_x$
- Konfidenzintervalle
- Aus σ_{vi} und $\,v_i\,$ die standardisierten Verbesserungen

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}}$$

- Test der standardisierten Verbesserungen
- Gewünschte Funktionen der Unbekannten

$$z = Hx \rightarrow Q_{zz} = HQ_{xx}H^{T}$$

- Bencini, P.: Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
- Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
- Dupraz, H.: Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
- Howald, P.: Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
- Pelzer, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

6. Die vermittelnde Ausgleichung in der Triangulation

6.1 Einführung

In Kapitel 5 wurde das vollständige Vorgehen einer vermittelnden Ausgleichung beschrieben. Die theoretischen Grundlagen würden jetzt erlauben, praktisch beliebige Ausgleichungsprobleme zu lösen.

Es ist aber vorteilhaft, einige typische Problemstellungen genauer anzuschauen, damit häufig vorkommende Herleitungen nicht jedes Mal wiederholt werden müssen. Man kann diese typischen Probleme auch als charakteristische Beispiele anschauen, mit welchen die allgemeinen Grundlagen erläutert werden.

Im Kapitel 6 werden einige spezifische Teile einer vermittelnden Ausgleichung gezeigt, die bei der Lösung von Triangulationsproblemen auftreten. Insbesondere werden die Verbesserungsgleichungen mit den dazugehörigen Normalgleichungsanteilen für die üblichen Beobachtungstypen (Distanzen, Richtungen usw.) besonders angeschaut.

6.2 Die unbekannten Parameter

Geodätische Netze werden verwendet, um die Lage von markierten Punkten auf der Erde zu bestimmen. Die Lage von Punkten auf der Erde lässt sich besonders gut mit Koordinaten beschreiben. Oft sind gerade diese Koordinaten (geographische, geozentrische oder Projektionskoordinaten) die gesuchten Grössen der Aufgabe.

Ein geodätisches Netz kann leicht mit Hilfe dieser Punktkoordinaten beschrieben werden, so dass das funktionale Modell einer vermittelnden Ausgleichung in der Regel mit Punktkoordinaten als unbekannte Parameter aufgebaut wird.

Im Folgenden werden wir uns auf den Fall der Projektionskoordinaten beschränken.

Zu den Punktkoordinaten als unbekannte Parameter verwendet man auch zusätzliche Parameter, die von den einzelnen Messverfahren benötigt werden, um die Beziehung zwischen gemessenen Grössen und Koordinatensystem zu erstellen.
6.3 Distanzmessungen

6.3.1 Das funktionale Modell im Allgemeinen

Bei der Ausgleichung von Triangulationsnetzen findet man unter den Beobachtungen direkt gemessene Distanzen.

Die übliche Form der Berechnung von Triangulationsnetzen ist die vermittelnde Ausgleichung im Projektionssystem. Die folgenden Ausführungen beschreiben diesen Fall, bei welchem die schrägen Distanzen, die im Gelände gemessen wurden, vor der Ausgleichung ins Projektionssystem reduziert werden.

Vor der Ausgleichung bereitet man die gemessenen Distanzen vor. Zuerst werden die physikalischen Korrekturen angebracht: Temperatur, Luftdruck, zweite Geschwindigkeitskorrektur usw. Dann werden die geometrischen Reduktionen berechnet: Horizontalprojektion, Reduktion auf Höhe Null, Transformation im Projektionssystem usw., damit die systematischen Fehler auf die folgende Arbeit keinen Einfluss mehr haben. Das Vorgehen ist aus der Vermessungskunde und aus der Landesvermessung bekannt.

Die bereits im Projektionssystem reduzierten Distanzen werden dann als Beobachtungen der vermittelnden Ausgleichung betrachtet.

Im funktionalen Modell bekommen die Netzpunkte der Triangulation rechtwinklige (Landes-) Koordinaten, welche für die noch zu bestimmenden Punkte unbekannte Parameter (oder einfach Unbekannte) der vermittelnden Ausgleichung werden.

Zu den unbekannten Koordinaten treten noch weitere Unbekannte auf, die vom Messprozess abhängen:

a) Eine Massstabsunbekannte wird oft eingeführt, da das Fixpunktnetz (z.B. Landesnetz) lokal nicht bekannte Massstabsfehler aufweist, die sich als systematische Fehler auswirken würden. Es ist ebenfalls möglich, dass die Distanzmessgeräte mit einem unbekannten Massstabsfehler messen (z.B. Frequenzabweichung), den man berücksichtigen will. Dafür kann eine Massstabsunbekannte für jedes Distanzmessgerät eingeführt werden. Die Massstabsunbekannte wird entweder als eigentlicher Massstabsfaktor eingeführt (dimensionslose Zahl ungefähr gleich 1) oder als distanzabhängige Korrektur in sinnvollen Einheiten ausgedrückt, wie z.B. in mm Korrektur pro Kilometer Distanz. b) Manchmal, wenn auch selten, kann die Additionskonstante eines Distanzmessgerätes unbekannt sein. Man kann sie als unbekannter Parameter der vermittelnden Ausgleichung einführen, wenn die Messanordnung eine genügend genaue Bestimmung erlaubt. In der Regel aber wird die Additionskonstante vorgängig bestimmt und kann als bekannte Korrektur bei den Reduktionen berücksichtigt werden.

Man darf nicht vergessen, dass jede zusätzliche Unbekannte die Überbestimmung des Netzes um eine Einheit reduziert, das heisst, die Anzahl notwendige Messungen (Bestimmungsstücke) erhöht sich um 1.

Beispiel:

Ein Punkt kann mit zwei Distanzen aus zwei bekannten Fixpunkten bestimmt werden (Bogenschnitt). Wenn für das Messgerät eine Massstabsunbekannte vorgesehen wird, muss man mindestens drei Distanzen haben, um den Punkt zu bestimmen.

6.3.2 Das stochastische Modell

Die Messfehler der meisten Distanzmessgeräte können als normalverteilte Zufallsgrössen mit Erwartungswert Null betrachtet werden, falls die Reduktionen sorgfältig angebracht wurden.

Damit die Messungen als unabhängig betrachtet werden können, müssen die Messanordnung und der Messvorgang nach der Regel der Kunst geplant werden.

Falls ungenaue Angaben im vorgängigen Reduktionsprozess verwendet werden, das heisst z.B. dass mit ungenauer Temperatur oder ungenauem Luftdruck gearbeitet wird, entstehen systematische Fehler, die sich ähnlich auf mehreren Beobachtungen auswirken und die man als Korrelationen im stochastischen Modell berücksichtigen sollte. Diese Korrelationen sind aber schwer bestimmbar.

Die Standardabweichungen a priori der Messungen sind in der Regel gut bekannt, da die Instrumentenhersteller sie genau untersucht und den Kunden mitgeteilt haben. Sie werden durch eine Varianzfunktion oder eine Funktion für die Standardabweichung (Fehlergesetz) beschrieben.

Elektronische Distanzmessgeräte haben die Standardabweichungsfunktion:

$$\sigma = \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{D} \,, \tag{1}$$

a und **b** sind Gerätekonstanten und **D** die Länge der gemessenen Distanzen sind. Zum Beispiel kann man $\sigma = 5 \text{ mm} + 2 \text{ mm/km}$ angeben, um die Messgenauigkeit eines bestimmten Gerätes zu beschreiben. Bei einer Distanz von 3 km ergibt das eine Standardabweichung (mittlerer Fehler) von 5 mm + 6 mm = 11 mm.

Andere Messgeräte (Messband, Basislatte usw.) haben andere Varianzfunktionen, die man aus der Vermessungskunde kennt.

Da die Genauigkeit der Instrumente ständig steigt, sind die weiteren gemessenen Hilfsgrössen (Temperatur, Luftdruck, Instrumentenhöhe, Signalhöhe usw.) sowie die Zentrierung von Instrument und Reflektor im stochastischen Modell nicht vernachlässigbar. Man muss sie bei der Berechnung der Standardabweichung für die einzelnen Distanzmessungen mitberücksichtigen.

6.3.3 Beobachtungs- und Verbesserungsgleichungen



Fig. 1

Für eine in der Projektionsebene reduzierte Strecke s_{ik} zwischen den Punkten P_i und P_k gilt die untenstehende Beobachtungsgleichung, wenn die Koordinaten der Punkte die unbekannten Parameter im funktionalen Modell sind:

$$\bar{s}_{ik} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}$$

Mit einer Massstabsunbekannten M (als Massstabsfaktor) ist die Beobachtungsgleichung:

$$M \cdot \bar{s}_{ik} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}$$
$$\bar{s}_{ik} = \frac{1}{M} \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}$$

Wenn die Massstabsunbekannte als Distanzkorrektur verwendet wird, sieht die Beobachtungsgleichung wie folgt aus:

$$\bar{s}_{ik} + m \cdot d_{o} = \sqrt{(X_{k} - X_{i})^{2} + (Y_{k} - Y_{i})^{2}}$$
$$\bar{s}_{ik} = \sqrt{(X_{k} - X_{i})^{2} + (Y_{k} - Y_{i})^{2}} - m \cdot d_{o}$$
(2)

wobei \mathbf{d}_0 eine genügend genaue Näherung der gemessenen Strecke in einer passenden Einheit ist. Wenn man zum Beispiel m in mm/km und $\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{s}$ in mm möchte, so muss \mathbf{d}_0 die Einheit km haben. Um die Beobachtungsgleichung (4.2) zu linearisieren, benötigt man Näherungswerte der unbekannten Parameter (X_{ok} , Y_{ok} usw.), so dass:

$$\begin{split} \mathbf{X}_{k} &= \mathbf{X}_{ok} + \mathbf{x}_{k} \\ \mathbf{Y}_{k} &= \mathbf{Y}_{ok} + \mathbf{y}_{k} \\ \mathbf{X}_{i} &= \mathbf{X}_{oi} + \mathbf{x}_{i} \\ \mathbf{Y}_{i} &= \mathbf{Y}_{oi} + \mathbf{y}_{i} \end{split}$$

Die Massstabsunbekannte \mathbf{m} ist klein (Näherungswert = $\mathbf{0}$) und die Beobachtungsgleichung ist bereits linear in \mathbf{m} .

Die Linearisierung nach Taylor der Beobachtungsgleichung (4.2) kann wie folgt geschehen:

$$\begin{split} \sqrt{\left(\mathbf{X}_{ok} - \mathbf{X}_{oi}\right)^{2} + \left(\mathbf{Y}_{ok} - \mathbf{Y}_{oi}\right)^{2}} &= \mathbf{s}_{o} \\ \bar{\mathbf{s}}_{ik} &= \mathbf{s}_{o} - \frac{\left(\mathbf{X}_{ok} - \mathbf{X}_{oi}\right)}{\mathbf{s}_{o}} \cdot \mathbf{x}_{i} \\ &- \frac{\left(\mathbf{Y}_{ok} - \mathbf{Y}_{oi}\right)}{\mathbf{s}_{o}} \cdot \mathbf{y}_{i} \end{split}$$

$$+\frac{\left(\mathbf{X}_{ok}-\mathbf{X}_{oi}\right)}{\mathbf{s}_{o}}\cdot\mathbf{x}_{k}$$
$$+\frac{\left(\mathbf{Y}_{ok}-\mathbf{Y}_{oi}\right)}{\mathbf{s}_{o}}\cdot\mathbf{y}_{k}$$

+ Glieder höherer Ordnung

Daraus entsteht folgende Verbesserungsgleichung:

$$v_{ik} = \frac{X_{oi} - X_{ok}}{s_o} x_i + \frac{Y_{oi} - Y_{ok}}{s_o} y_i + \frac{X_{ok} - X_{oi}}{s_o} x_k + \frac{Y_{ok} - Y_{oi}}{s_o} y_k - d_o \cdot m - (s_{ik} - s_o)$$
(3)

Zu beachten ist noch, dass \mathbf{d}_0 eine Näherung des Abstands $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_k$ ist. Die verwendete Einheit für \mathbf{d}_0 muss mit der Einheit von \mathbf{m} zusammenpassen, damit $\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{m}$ die gleiche Einheit wie \mathbf{v}_{ik} erhält.

Aus den Verbesserungsgleichungen und den dazugehörigen Gewichten der einzelnen Distanzmessungen ergeben sich die entsprechenden Normalgleichungsanteile.

Man kann die erforderliche Genauigkeit für die Näherungskoordinaten abschätzen, wenn man die linearisierte Funktion mit der Beobachtungsgleichung vergleicht. Für eine Distanzbeobachtung ohne Massstabsunbekannte ist die Beobachtungsgleichung:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \sqrt{\left(\mathbf{X}_{k} - \mathbf{X}_{i}\right)^{2} + \left(\mathbf{Y}_{k} - \mathbf{Y}_{i}\right)^{2}}$$

nach der Linearisierung erhält man die Gleichung:

$$l + v = s_{o} + \frac{X_{oi} - X_{ok}}{s_{o}} \cdot x_{i} + \frac{Y_{oi} - Y_{ok}}{s_{o}} y_{i} + \frac{X_{ok} - X_{oi}}{s_{o}} x_{k} + \frac{Y_{ok} - Y_{oi}}{s_{o}} y_{k}$$

Das folgende Beispiel gibt Informationen über die Wirkung von Ungenauigkeiten im Meter-Bereich der Näherungskoordinaten für eine Distanzbeobachtung von 1 km.

$X_{oi} =$	0 m	$\mathbf{x}_{i} = 0 \mathbf{m}$	X _i =	0 m
Y _{oi} =	0 m	$y_i = 0 m$	Y _i =	0 m
X _{0 k} =	0 m	$x_k = 1 m$	$\mathbf{X}_{\mathbf{k}} =$	1 m
$Y_{ok} =$	1000 m	$y_k = 1 m$	$Y_k = 1$	001 m

Aus der Beobachtungsgleichung ist l + v = 1001.0005 m.

Aus der linearisierten Gleichung ist l + v = 1001.0000 m.

Durch die Linearisierung entsteht somit ein Fehler von 0.5 mm.

6.4 Richtungsmessungen

6.4.1 Das funktionale Modell im allgemeinen

Neben Distanzen werden in geodätischen Netzen Richtungen beobachtet. In der klassischen Triangulation wurden reine Richtungsnetze ausgeglichen, während heute in der Regel Distanzen, Richtungen und Satellitenbeobachtungen kombiniert werden.

Richtungen werden normalerweise in Form von Richtungssätzen gemessen. Winkelbeobachtungen, die heute relativ selten auftreten, können als Spezialfall eines Richtungssatzes (mit zwei Richtungen) behandelt werden. Dadurch kann man sich eine besondere Herleitung von Winkelverbesserungsgleichungen ersparen.

Jede Richtungsmessung verbindet den Stationspunkt mit einem Zielpunkt. Stationsund Zielpunkt sind entweder bekannt (Fixpunkt) oder unbekannt. In diesem Fall werden in der vermittelnden Ausgleichung die entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten des Punktes als unbekannte Parameter des Modells, wie bei der Distanzmessung, auftreten.



Fig. 2

Richtungsmessungen werden in der Regel im Projektionssystem ausgeglichen. Da das schweizerische Projektionssystem konform (winkeltreu) ist, können auf dem Ellipsoid gemessene Richtungen ohne Änderung im Projektionssystem übernommen werden, wenn die Zielweiten nicht zu gross (unter 10 km) sind. In der Regel können die Einflüsse der Lotabweichung und der Stehachsenschiefe vernachlässigt werden. Dies ist der Fall, wenn die Visuren nicht zu steil sind, wenn sorgfältig horizontiert wurde und wenn die Topographie keine extremen Lotabweichungen vermuten lässt.

Andernfalls müssen die gemessenen Richtungen vorgängig (wie die Distanzen) reduziert werden. Man kann nach Bedarf folgende Korrekturen berechnen:

- Wenn die Stehachsenschiefe bestimmt wurde, kann man die gemessenen Richtungen entsprechend korrigieren, um den Horizontierungsfehler zu eliminieren. Einige elektronische Theodolite (z.B. Kern E2 oder Wild T3000) berechnen die Korrekturen automatisch.
- Wenn die Lotabweichung des Ortes bekannt ist, kann man die Richtungskorrektur entsprechend berechnen. So werden die im Gelände (Geoid) gemessenen Richtungen auf das Ellipsoid reduziert.
- Für lange Zielweiten (über 10 km) können die Azimutreduktionen berechnet werden, um die auf dem Ellipsoid gemessenen Richtungen korrekt ins Projektionssystem zu übertragen.

Alle diese vorgängigen Reduktionen werden in der Vermessungskunde und in der Landesvermessung gelehrt.

Die Richtungen (nach den ev. erforderlichen Reduktionen) werden dann als Beobachtungen der vermittelnden Ausgleichung betrachtet.

Neben den Koordinaten der Neupunkte treten bei Richtungsmessungen weitere Unbekannte in Erscheinung, die vom Messprozess abhängen, und die in einfacher Art erlauben, die Beziehung zwischen Koordinatensystem und beobachtete Richtung herzustellen.



Fig. 3

Die Notwendigkeit der Einführung einer zusätzlichen Unbekannten entsteht aus der Tatsache, dass die gemittelten Richtungen eines Satzes auf eine in der Horizontalebene willkürlich orientierte Nullrichtung bezogen sind.

Aus den bekannten oder unbekannten Koordinaten von Stations- und Zielpunkt kann hingegen das ebene Azimut ausgedrückt werden, welches die Richtung bezüglich der XAchse ist.

Der unbekannte Winkel zwischen X-Achse und Nullrichtung des Satzes wird als unbekannter Parameter der vermittelnden Ausgleichung eingeführt. Man nennt ihn die Orientierungsunbekannte des Richtungssatzes.

Zu beachten ist:

Richtung + Orientierungsunbekannte = orientierte Richtung = ebenes Azimut Im funktionalen Modell für die gemittelten und korrigierten Richtungen gelten in der Regel folgende Punkte:

- die ebene Geometrie ist anwendbar
- die restlichen Fehler aus Lotabweichung, Stehachsenschiefe, Seitenrefraktion usw. sind vernachlässigbar
- die Instrumentenfehler sind eliminiert
- die systematischen Exzentrizitätsfehler beim Instrument und beim Signal sind vernachlässigbar

6.4.2 Das stochastische Modell

Wenn nach der Regel der Kunst gemessen wird, können die gemessenen Richtungen als normalverteilt angenommen werden. Die einzelnen Richtungen (Mittel zwischen erster und zweiter Fernrohrlage) können dazu als unkorreliert angenommen werden.

Die gemittelten Richtungen aus verschiedenen Sätzen sind hingegen nur dann unabhängig, wenn alle Sätze vollständig sind. Andernfalls sind Korrelationen zu erwarten. Mehr darüber wird im Kapitel über die Stationsausgleichung berichtet.

Die folgenden Komponenten des zufälligen Fehlers werden bei der Bestimmung des gesamten mittleren Richtungsfehlers (σ_r) berücksichtigt:

- der mittlere Fehler der Zielung und Ablesung (Angaben des Herstellers oder Erfahrungswerte), der als konstant angenommen wird
- der zufällige Anteil des Zentrierungsfehlers von Instrument und Signal (kurze Zielweiten führen dadurch zu grösseren mittleren Richtungsfehlern als lange)
- nach Bedarf andere zufällige Fehler: schlechte Sicht, ungünstige Beleuchtung, Signalerkennbarkeit usw.

6.4.3 Beobachtungsgleichungen

Die mathematische Beziehung zwischen beobachteter Richtung und unbekannten Parametern der vermittelnden Ausgleichung kann wie folgt dargestellt werden:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ik} + \mathbf{Z}_{j} = \operatorname{Azimut}\left(\mathbf{P}_{i}\mathbf{P}_{k}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\mathbf{Y}_{k} - \mathbf{Y}_{i}}{\mathbf{X}_{k} - \mathbf{X}_{i}} + \mathbf{n} \cdot 200^{\mathrm{G}} \left(\mathbf{n} = 1 \text{ oder } 0\right)$$

 \mathbf{r}_{ik} ist die ausgeglichene Richtung von i nach k. \mathbf{Z}_j ist die Orientierungsunbekannte des Richtungssatzes, in welchem \mathbf{r}_{ik} gemessen wurde. Der Zusatzfaktor **n** dient für die Wahl des Quadranten und ist für jede Beobachtung eindeutig bestimmt.

Man kann daher die Beobachtungsgleichung

$$\overline{\mathbf{r}}_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_i}{\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_i} - \mathbf{Z} + \mathbf{n} \cdot 200^{\mathrm{G}}$$
(4)

schreiben.

6.4.4 Verbesserungsgleichungen

Die Beobachtungsgleichung muss zuerst linearisiert werden. Man bestimmt daher Näherungswerte der Unbekannten, so dass:

$$Z_{j} = Z_{oj} + z_{j}$$

$$Y_{i} = Y_{oi} + y_{i}$$

$$X_{i} = X_{oi} + x_{i}$$

$$Y_{k} = Y_{ok} + y_{k}$$

$$X_{k} = X_{ok} + x_{k}$$

Dann ist:

$$\bar{r}_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{Y_{ok} + y_k - (Y_{oi} + y_i)}{X_{ok} + x_k - (X_{oi} + x_i)} - (Z_{oj} + z_j)$$

Die Linearisierung nach Taylor führt zur Verbesserungsgleichung:

$$v_{ik} = -z_j + ax_i + by_i + cx_k + dy_k - f_{ik}$$
 (5)

wobei

$$a = \frac{Y_{ok} - Y_{oi}}{D_0^2} \cdot \rho = \frac{\sin Az_0}{D_0} \cdot \rho$$
$$b = -\frac{X_{ok} - X_{oi}}{D_0^2} \cdot \rho = -\frac{\cos Az_0}{D_0} \cdot \rho$$
$$c = -a$$
$$d = -b$$
$$f_{ik} = r_{ik} + Z_{oj} - \arctan \frac{Y_{ok} - Y_{oi}}{X_{ok} - X_{oi}}$$
$$D_0^2 = (X_{ok} - X_{oi})^2 + (Y_{ok} - Y_{oi})^2$$

Az_0 = Azimut (P_iP_k) aus Näherungskoordinaten

Die Längeneinheiten (Näherungskoordinaten, Distanz, Unbekannte, Koordinatenänderungen) müssen in der gleichen Einheit (z.B. mm) ausgedrückt werden. Da die Ableitungsformel nur für Winkel im Bogenmass gilt, müssen die Koeffizienten mal ρ^{cc} multipliziert werden, wenn die Verbesserung, Richtung und Orientierung in ^{cc} ausgedrückt werden.

$$\rho^{\rm cc} = \frac{2000000}{\pi} \cong 636619.8$$

Die Koeffizienten **a**, **b**, **c**, **d** werden Richtungskoeffizienten genannt. Sie geben die Änderung der ausgeglichenen Richtung an, wenn die dazugehörige Unbekannte um eine Einheit geändert wird.



Fig. 4

Man kann die erforderliche Genauigkeit für die Näherungskoordinaten auch bei der Richtungsverbesserungsgleichung abschätzen, wenn man die linearisierte Funktion mit der Beobachtungsgleichung vergleicht.

$$\vec{\mathbf{r}} = -\mathbf{Z}_{j} + \operatorname{arctg} \frac{\Delta \mathbf{Y}}{\Delta \mathbf{X}}$$
$$\vec{\mathbf{r}} = -\mathbf{Z}_{j} + \mathbf{a}\mathbf{x}_{i} + \mathbf{b}\mathbf{y}_{i} + \mathbf{c}\mathbf{x}_{k} + \mathbf{d}\mathbf{y}_{k} + \operatorname{arctg} \frac{\Delta \mathbf{Y}_{o}}{\Delta \mathbf{X}_{o}}$$

Beispiel:

$$\Delta X_o = 1 \text{km} ; \Delta Y_o = 0 ; Z_j = 0$$

$$y_i = 10\text{m} , x_i , x_k , y_k = 0$$

$$a = 0$$

$$b = -0.636620$$

$$c = 0$$

$$d = 0.636620$$

$$\bar{r} = 6366.20^{\text{cc}} \text{ aus der linearisierten Beobachtungsgleichung}$$

$$\bar{r} = 6365.99^{\text{cc}} \text{ aus der Beobachtungsgleichung}$$

Der Unterschied ist 0.2^{cc}.

6.5 Höhenwinkel und Höhenunterschiede

6.5.1 Das funktionale Modell im allgemeinen

Die Höhenbestimmung in geodätischen Netzen erfolgt in der Regel entweder durch direkte Messung von Höhenunterschieden mittels Nivellement oder indirekt durch Messung von Höhenwinkeln in trigonometrischen Netzen oder in Höhenzügen.

Da die vertikale Ausdehnung geodätischer Netze gegenüber der horizontalen klein ist, kann man annehmen, dass der gegenseitige Einfluss zwischen Lagebestimmung (mit Distanz- und Richtungsmessungen) und Höhenbestimmung (mit Höhenwinkeln und Nivellementen) vernachlässigbar ist. Man kann daher Lage- und Höhenbestimmung völlig trennen, so dass in den meisten Fällen Lagenetz und Höhennetz getrennt ausgeglichen werden.

Die Höhenwinkelmessungen werden in solchen reinen Höhennetzen vorgängig verarbeitet, um Höhenunterschiede zu erhalten. Dabei werden Refraktion, Erdkrümmung usw. berücksichtigt. Besonders zu beachten ist dabei die Bezugsfläche, die im üblichen Höhensystem (Gebrauchshöhen) das Geoid ist.

Falls man in trigonometrischen Netzen vorberechnete Lotabweichungen berücksichtigen will, müssen die Punkthöhen auf das Ellipsoid bezogen werden. Um solche Höhennetze am bestehenden Höhensystem anschliessen zu können, benötigt man genaue Angaben über die Geoidhöhen (über dem Ellipsoid), damit alle Koten in ein einheitliches System transformiert werden können.

Präzisionsnivellemente erfordern oft die Messung der Erdbeschleunigung entlang der Linie, um den Einfluss von Schwereanomalien eliminieren zu können.

Die Einzelheiten werden in den Fachgebieten Höhere Geodäsie und Landesvermessung behandelt.

Für die Ausgleichungsrechnung ist zu beachten, dass die Messungen vorgängig reduziert und in Höhenunterschiede transformiert werden. Diese Höhenunterschiede werden dann als Beobachtungen des Ausgleichungsmodells betrachtet. Die unbekannten Parameter des Modells sind in der Regel die Höhen (über der Bezugsfläche) der Knotenpunkte des Netzes.

Zusätzliche Unbekannte werden selten eingeführt, da die Instrumentenkorrekturen (Lattenmassstab, Zielachsenfehler usw.) entweder mit Eichmessungen im Labor oder durch die Mess- und Rechenverfahren vorgängig eliminiert werden.

6.5.2 Das stochastische Modell

Die hergeleiteten Höhendifferenzen werden als unabhängige normaltverteilte Messungen betrachtet. Die Voraussetzung dafür ist die sorgfältige Elimination der systematischen Fehler im Messprozess. Dies erfordert vor allem für Messungen hoher Präzision wie für das Präzisionsnivellement grosse Aufmerksamkeit.

Die Standardabweichungen $\sigma_{\Delta H}$ der aus dem Nivellement stammenden Höhenunterschiede kann mit

$$\sigma_{\Delta H} = \sigma_{\Delta H_0} \cdot \sqrt{n} \tag{6}$$

berechnet werden.

Dabei ist $\sigma_{\Delta H_0}$ die Standardabweichung des Höhenunterschiedes für eine Instrumentenaufstellung und **n** die Anzahl Aufstellungen.

Da die Zielweiten im Nivellement relativ konstant bleiben, kann man die Genauigkeit des Höhenunterschiedes in Funktion der Linienlängen angeben, so dass

$$\sigma_{\Delta H} = \sigma_{L_0} \cdot \sqrt{L} \tag{7}$$

wird.

σ_{L₀} ist die Standardabweichung für eine Nivellementsstrecke der Längeneinheit (z.B.
1 km) und L die Länge der gemessenen Strecke in der gleichen Einheit.

Für die Höhenunterschiede, die aus dem Höhenwinkel stammen, sind die Ungenauigkeiten aller Komponenten der Berechnung zu berücksichtigen:

- gemessener Höhenwinkel
- aus Koordinaten berechnete oder gemessene Distanz
- Refraktionskoeffizient (κ)
- Instrumenten- und Signalhöhe (I-S)

Man bestimmt die Standardabweichung des Höhenunterschieds aus dem beobachteten Höhenwinkel folgendermassen, wenn die Distanz **D** zwischen Stations- und Zielpunkt aus Koordinaten berechnet wird:

$$\sigma_{\Delta H}^{2} = \sigma_{D}^{2} \cdot \mathbf{tg}^{2} \alpha + \sigma_{\alpha}^{2} \cdot \frac{\mathbf{D}^{2}}{\rho^{2}} + \sigma_{\kappa}^{2} \cdot \frac{\mathbf{D}^{4}}{4\mathbf{R}^{2}} + \sigma_{I}^{2} + \sigma_{S}^{2}$$
(8)

Die auftretenden Grössen mit den dazugehörigen Standardabweichungen sind

D , σ _D	die Distanz aus Koordinaten
α, σ _α	der Höhenwinkel
κ, σ _κ	der Refraktionskoeffizient (κ wird in der Regel 0.13 und σ_{κ} zwischen 0.02 und 0.04 angenommen)
I,S,σ_I,σ_S	die Instrumenten- und Signalhöhe
R	Erdradius

Für Höhenunterschiede, die aus gemessenen Schrägdistanzen und Höhenwinkeln bestimmt werden, kann ebenfalls eine entsprechende Formel hergeleitet werden.

6.5.3 Beobachtungs- und Verbesserungsgleichungen

Die Beziehung zwischen den unbekannten Parametern (Punkthöhen von Stations- und Zielpunkt P_i und P_k) und den beobachteten Grössen ist einfach zu erstellen:

$$l = l + v = H_{k} - H_{i}$$

Eine Linearisierung ist nicht notwendig, da die Funktion der Unbekannten bereits linear ist.

Näherungshöhen (H_{io}, H_{ko}) können trotzdem eingeführt werden, damit keine numerischen Schwierigkeiten entstehen und vor allem, um eventuelle Messfehler früher aufdecken zu können.

So wird die Verbesserungsgleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}_{k} - \mathbf{h}_{i} - \left(\mathbf{l} - \mathbf{H}_{ko} + \mathbf{H}_{io}\right)$$
(9)

wobei

$$H_k = H_{ko} + h_k$$
$$H_i = H_{io} + h_i$$

6.6 Direkt beobachtete Parameter

6.6.1 Anwendungsmöglichkeiten

Je nach Wahl der Parameter im mathematischen Modell kann es gelegentlich vorkommen, dass die Parametergrösse direkt beobachtet werden kann.

So kann z.B. eine Punkthöhe in einem lokalen Höhensystem gleichzeitig unbekannter Parameter H_i des Modells und beobachtete Grösse (Höhenunterschied zwischen Nullpunkt und P_i) sein.

Diese direkten Beobachtungen von Modellparametern können in einer vermittelnden Ausgleichung gleich behandelt werden wie die übrigen Beobachtungen. Man muss eine Beobachtungsgleichung schreiben, um die Beziehung zwischen Beobachtung und Parameter herstellen zu können.

Die wichtigste Anwendung von direkt beobachteten Parametern findet man bei der Lagerung geodätischer Netze, wenn man die Koordinaten der bekannten Punkte als (fiktive) Beobachtungen anstatt als gegebene Grössen betrachtet.

Diese Vorgehensweise erlaubt einen flexibleren Übergang zwischen bekannten Parametern (z.B. fehlerfreie Fixpunktkoordinaten) und unbekannten Parametern (z.B. Neupunktkoordinaten).

Wenn man über gute, aber nicht fehlerfreie Werte für einige Parameter (z.B. Punktkoordinaten aus einer früheren Berechnung) verfügt und man möchte sie bei einer Weiterverarbeitung nicht als fehlerfrei betrachten, kann man diese Parameter als Unbekannte einführen, und die verfügbare Information über ihre Grösse im funktionalen Modell als direkte Beobachtung des entsprechenden Parameters angeben. So können die Genauigkeitsangaben wunschgemäss im stochastischen Modell berücksichtigt werden.

6.6.2 Das stochastische Modell

Da direkt beobachtete Parameter selten aus tatsächlich ausgeführten Messungen stammen, sondern in der Regel rechnerisch hergeleitete Grössen sind, sind diese Beobachtungen nicht stochastisch unabhängig. Wenn die Berechnungen, aus welchen diese Werte stammen, noch zugänglich sind, kann man daraus die dazugehörige Kovarianzmatrix entnehmen. Andernfalls, wenn man die ursprüngliche Kovarianzmatrix nicht mehr erhalten kann, wird sie näherungsweise aufgrund von Erfahrungswerten aufgebaut. Die Varianzen entstehen aus den erwarteten mittleren Fehlern und die Kovarianzen werden entweder Null oder in Funktion, z.B. der Distanz geschätzt.

6.6.3 Beobachtungs- und Verbesserungsgleichungen

Direkt beobachtete Parameter erhalten wie jede Beobachtung eine Beobachtungsgleichung, die besonders einfach ist:

$$\bar{\mathbf{l}}_{\mathbf{x}\mathbf{i}} = \mathbf{l}_{\mathbf{x}\mathbf{i}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}\mathbf{i}} = \mathbf{x}_{\mathbf{i}} \tag{10}$$

Die Funktion der unbekannten Parameter ist eins mal den entsprechenden unbekannten Parameter.

Die Funktion ist bereits linear, so dass eine Linearisierung überflüssig wird. Näherungswerte können, wie bei den beobachteten Höhenunterschieden, vorteilhaft sein, um numerische Probleme (Stellenauslöschung usw.) zu vermeiden, und um eventuelle Messfehler schneller entdecken zu können.

6.7 Der Abriss

6.7.1 Ein übersichtliches Rechenschema

Der Abriss entstand als Schema für die übersichtliche Bearbeitung von Richtungsmessungen in einer Ausgleichung und war früher während den aufwendigen manuellen Berechnungen von Nutzen, um die Zwischenergebnisse klar darzustellen und das Rechnen von Näherungsorientierungen, Absolutgliedern sowie definitiven Orientierungen und Verbesserungen zu erleichtern.

Im Zeitalter des Computers hat der Abriss in der Ausgleichung geodätischer Netze keineswegs an Bedeutung verloren.

Das Schwergewicht liegt aber nicht mehr in der Verwendung als Rechenschema, sondern in der übersichtlichen Darstellung von zusammengehörenden Ergebnissen der Ausgleichung. Da die heutigen geodätischen Netze viele Beobachtungen enthalten und automatisch ausgeglichen werden, ist die Interpretation der Ergebnisse sehr anspruchsvoll geworden und stellt eine der wichtigsten Aufgaben des Ingenieurs dar.

Eine einheitliche Darstellung der Ausgleichungsergebnisse, in welcher die zusammengehörenden Informationen auf einen Blick betrachtet und beurteilt werden können, ist die Voraussetzung für eine wirksame Arbeit.

Der klassische Abriss eignet sich ausgezeichnet auch für diese neue Funktion und wird daher auch bei der Computerberechnung verwendet.

Andere Abrissformen wurden dazu entwickelt, um auch Distanzmessungen und Höhenwinkelmessungen in ähnlicher Art darstellen zu können. Der traditionelle Abriss enthält im gleichen Schema die provisorischen Werte (aus Näherungskoordinaten für die Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen) und die definitiven Werte (aus den ausgeglichenen Koordinaten).

Die Tabelle der definitiven Abrisse enthält die Verbesserungen, wie man sie aus den ausgeglichenen Koordinaten mit den nicht linearen Funktionen der Beobachtungsgleichunngen (Azimute, Distanzen) berechnet hat und ist daher Bestandteil der Schlusskontrolle.

Heute werden getrennte Tabellen für provisorische und definitive Abrisse vorgezogen, damit die enthaltenen Informationen übersichtlicher werden, und oft wird auf die Darstellung des provisorischen Abrisses bei Computerberechnungen sogar verzichtet.

6.7.2 Der Richtungsabriss

Vor der Ausgleichung benötigt man für die einzelnen Richtungssätze eine Näherungsorientierung und die Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen. Die Berechnungen können in einem Abrissschema übersichtlich eingetragen werden.

Das folgende Beispiel zeigt einen Abriss für Richtungen, in welchem die Azimute und die Distanzen aus Näherungskoordinaten berechnet sind.

Provisorischer Abriss

Beobachtungen

Azimute aus Näherungskoordinaten

Punkt	OR/Beob. G/M	Korr. CC/MM	-f CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	WI CC/MM	Azi.aus Koord. (G)	Dist.aus Koord. (M)		
Leusl	0 ₀ = 33.22	136								
Muraz Saasz Klosz Gotsz Selfz Leusz	0.0000 354.3277 344.9810 268.2093 262.7128 19.7208		-2. 3. -2. 0. 5. -190.	3.2 3.0 3.3 3.1 10.2 815.6			33.2212 387.5493 378.2021 301.4307 295.9347 52.9232	1684.449 5060.995 1334.453 2825.107 194.970 2.342		

Mit Näherungskoordinaten (vor der Ausgleichung)

Die Näherungsorientierung (O_0) kann in der Umgebung des noch unbekannten Wertes beliebig gewählt werden. Wenn die Näherungskoordinaten der Punkte gut sind, kann die Näherungsorientierung als gewogenes arithmetisches Mittel wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{O}_{i} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{i} - \mathbf{r}_{i}$$
$$\mathbf{O}_{o} = \frac{\sum \mathbf{p}_{i} \mathbf{O}_{i}}{\sum \mathbf{p}} = \frac{\sum \mathbf{O}_{i} / \sigma_{ri}^{2}}{\sum 1 / \sigma_{ri}^{2}}$$
(11)

Falls die Näherungskoordinaten schlecht sind, muss die schlechte Genauigkeit der Näherungsazimute berücksichtigt werden. Man verwendet daher hauptsächlich die Azimute der langen Visuren, die von ungenauen Koordinaten weniger verfälscht werden.

Falls grobe Fehler in den Messungen befürchtet werden, wären robuste Schätzverfahren besonders geeignet.

Das Absolutglied \mathbf{f}_i der i-ten Richtungsverbesserungsgleichung wird wie folgt berechnet:

$$-f_i$$
= $Az_i - (r_i + O_0)$ (12) r_i beobachtete Richtung O_o N\"aherungsorientierung Az_i N\"aherungsazimut (Station \rightarrow Ziel)

Nach der Ausgleichung benötigt man die Verbesserungen, die man aus den Beobachtungsgleichungen berechnet, um die Schlusskontrolle durchführen zu können. Diese Berechnung kann ebenfalls im Abrissschema anschaulich dargestellt werden.

In den definitiven Abrissen **muss** die Orientierung entweder als gewogenes arithmetisches Mittel berechnet werden

$$\mathbf{O}_{i} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{i} - \mathbf{r}_{i}$$
$$\mathbf{O}_{i} = \frac{\sum \mathbf{O}_{i} / \sigma_{ri}^{2}}{\sum 1 / \sigma_{ri}^{2}}$$

oder man kann sie aus den erhaltenen Unbekannten entnehmen

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_{o} + \mathbf{O}$$

Im Abrissschema sind somit die Verbesserungen aus den (nicht linearen Beobachtungsgleichungen) leicht zu berechnen.

$$\mathbf{v}_{i} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{i} - \left(\mathbf{r}_{i} + \mathbf{O}\right) \tag{13}$$

O ist die ausgeglichene Orientierung

Das Schema kann mit weiteren Informationen erweitert werden. Folgende Kolonnen sind zum Beispiel zu erwähnen:

- Richtungskorrekturen

Azimutreduktionen (Richtungskorrektur für lange Visuren in den Triangulationen höherer Ordnung), Lotabweichungskorrekturen

- Lokales Zuverlässigkeitsmass $(\mathbf{z}_{i} = \mathbf{q}_{vv}^{(ii)} / \mathbf{q}_{ll}^{(ii)})$

Der Quotient der entsprechenden Diagonalelemente in den Matrizen Q_{vv} und Q_{ll} gibt Hinweise über die Netzüberbestimmung.

- Standardisierte Verbesserungen ($w_i = v_i / \sigma_{vi}$)

Die standardisierten Verbesserungen sind als Teststatistik für die Lokalisierung grober Messfehler geeignet.

- Die Einzelorientierungen $(O_i = Az_i - r_i)$

Die einzelnen Orientierungen werden als Zwischenergebnisse vor allem bei manuellen oder interaktiven Berechnungen geschätzt.

Definitiver Abriss

Beobachtungen

Azimute aus den ausgeglichenen Koordinaten

Punkt	OR/Beob.	Korr.	Verb.	M.F.	ZI	WI	Azi.aus Koord.	Dist.aus Koord.
	G/M	CC/MM	CC/MM	CC/MM	%	CC/MM	(G)	(M)
Leus1 	OR = 33.2	2165						
Muraz	0.0000		-1.	3.2	58	-0.4	33.2216	1684.453
Saasz	354.3277		2.	3.0	63	0.8	387.5495	5061.018
Klosz	344.9810		-2.	3.3	54	-0.9	378.2024	1334.449
Gotsz	268.2093		0.	3.1	54	0.2	301.4310	2825.114
Selfz	262.7128		5.	10.2	22*	1.0	295.9349	194.973
Leusz	19.7208		-4.	815.6	21*	0.0	52.9421	2.343

Mit ausgeglichenen Koordinaten

6.7.3 Der Distanzabriss

Distanzbeobachtungen werden ähnlich wie Richtungen in einem Abrissschema dargestellt.

Die provisorischen Abrisse (aus Näherungskoodinaten) liefern die Absolutglieder der Verbesserungsgleichungen.

Provisorischer Abriss

Distanzen aus Näherungskoordinaten

Beobachtete Distanzen Näherungskoordinaten								skoordinaten	
Punkt	OR/Beob. G/M	Korr. CC/MM	-f CC/MM	M.F. CC/MM	ZI WI Azi.aus Koord. Dist.aus Koord % CC/MM (G) (M)				
Shrn1	Distanzen								
Whrnl Flessl Pischl Huerl	3493.883 7207.441 8709.435 10409.096		-4. 14. -4. 17.	7.2 10.6 12.1 13.7			34.5663 73.4501 0.9881 371.0176	3493.880 7207.455 8709.431 10409.113	

Mit Näherungskoordinaten

In den definitiven Abrissen berechnet man die Verbesserungen aus den Beobachtungsgleichungen. Falls eine Massstabsunbekannte in der Ausgleichung bestimmt wurde, ist die entsprechende Korrektur zu berechnen und im Schema einzutragen. Sie wird bei der Berechnung der Verbesserungen berücksichtigt.

$$s_i + Korr + v = s_{koord}$$

daraus folgt

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_{\text{koord}} - \mathbf{Korr} - \mathbf{s}_{\text{i}} \tag{14}$$

s_i: gemessene Distanz
 Korr : Massstabskorrektur
 S_{koord}: Distanz aus ausgeglichenen Koordinaten

Definitiver Abriss

Distanzen aus ausgeglichenen Koordinaten

Beobachtete Distanzen

Punkt	OR/Beob.	Korr.	Verb.	M.F.	ZI	WI	Azi.aus Koord.	Dist.aus Koord.
	G/M	CC/MM	CC/MM	CC/MM	00	CC/MM	(G)	(M)
Shrn1 	Distanze							
Whrn1	3493.883		-2.	7.2	33	-0.5	34.5665	3493.881
Fless1	7207.441		10.	10.6	38	1.5	73.4504	7207.451
Pischl	8709.435		3.	12.1	60	0.3	0.9884	8709.438
Huerl	10409.096		14.	13.7	71	1.2	371.0177	10409.110

Mit ausgeglichenen Koordinaten

6.8 Anwendungsbeispiel 1

Richtungsnetze [Conzett, 1985]

a) Rückwärtseinschneiden (eines Einzelpunktes) mit Richtungen

Zur Veranschaulichung folgender Figur:



Alle Verbesserungsgleichungen sind vom Typ "Standpunkt variabel"

$$v_{1} = -z + a_{1}x + b_{1}y - f_{1} \text{ Gewicht } 1$$

$$v_{2} = -z + a_{2}x + b_{2}y - f_{2} \text{ 1}$$

$$\vdots$$

$$v_{n} = -z + a_{n}x + b_{n}y - f_{n} \text{ 1}$$

$$\mathbf{a}_{1} = \frac{\mathbf{Y}_{i} - \mathbf{Y}_{o}}{\mathbf{D}_{oi}^{2}} \cdot \boldsymbol{\rho} \; ; \; \mathbf{b}_{i} = -\frac{\mathbf{X}_{i} - \mathbf{X}_{o}}{\mathbf{D}_{oi}^{2}} \cdot \boldsymbol{\rho}$$

wobei $P_i(Y_i, X_i)$ die Zielpunkte und P(Y, X) der Neupunkt sind. Y_o und X_o sind die Näherungskoordinaten des Neupunktes.

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit a posteriori:

$$\mathbf{s}_{o} = \sqrt{\frac{[\mathbf{vv}]}{\mathbf{n}-\mathbf{3}}}$$

b) Mehrpunkteinschaltung mit Richtungen

Die nächste Figur zeigt eine Dreipunkteinschaltung als Beispiel.



Alle Gewichte seien 1.

Wir ordnen die Beobachtungen nach folgenden Gesichtspunkten:

Festpunkte

Punkte E:

vorerst ausführlich:

Gew.

$\mathbf{v}_{\mathrm{EF}} = -\mathbf{z}_{\mathrm{E}}$	$-\mathbf{f}_{\mathbf{EF}}$	1
$\mathbf{v}_{\mathbf{E3}} = -\mathbf{z}_{\mathbf{E}}$	$+ a_{E3}^* x_3 + b_{E3}^* y_3 - f_{E3}^*$	1
$v_{E2} = -z_E + a_{E2}^* x_2 + b_{E2}^* y_2$	$-\mathbf{f}_{\mathrm{E}2}$	1
$\mathbf{v}_{\mathbf{ED}} = -\mathbf{z}_{\mathbf{E}}$	$-\mathbf{f}_{ED}$	1

Neupunkte

Als Beispiel Punkt 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1A} &= -\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_{1A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{1A}\mathbf{y}_1 & -\mathbf{f}_{1A} \\ \mathbf{v}_{1B} &= -\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_{1B}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{1B}\mathbf{y}_1 & -\mathbf{f}_{1B} \\ \mathbf{v}_{12} &= -\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{12}\mathbf{y}_1 + \mathbf{a}_{12}^*\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_{12}^*\mathbf{y}_2 & -\mathbf{f}_{12} \\ \mathbf{v}_{13} &= -\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{13}\mathbf{y}_1 & + \mathbf{a}_{13}^*\mathbf{x}_3 + \mathbf{b}_{13}^*\mathbf{y}_3 - \mathbf{f}_{13} \\ \mathbf{v}_{1C} &= -\mathbf{z}_1 + \mathbf{a}_{1C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{1C}\mathbf{y}_1 & -\mathbf{f}_{1C} \end{aligned}$$

6.9 Anwendungsbeispiel 2

Die Lagerung von zwangsfreien Netzen

(aus R. Conzett 1987)

Führen wir bei einem sog. freien Netz alle Koordinaten als unbekannte Parameter ein, so erhalten wir ein singuläres Normalgleichungssystem; denn wir haben unbekannte Parameter eingeführt, die das Problem nicht bestimmen können. Man kann aus Distanzen und Richtungen allein keine Koordinaten bestimmten, wenn man keine Fixpunkte hat. Der Rangdefekt - wir nennen ihn in der Geodäsie Lagerungsdefizit - beträgt 3 (bzw. 4, wenn wir den Massstabsfaktor offen lassen). Durch mindestens 3 bekannte Koordinaten (aber nicht 3 bzw. 4 x-Werte oder 3 bzw. 4 y-Werte!) wird dieser Rangdefekt behoben.

Sind diese Koordinaten bekannte Konstanten, so sind die entsprechenden Normalgleichungskolonnen zu streichen. Wenn wir mehr als 3 bzw. 4 Kolonnen streichen, wird auf das Netz ein Zwang ausgeübt.

Wenn wir diese vorgegebenen Koordinaten nicht als fehlerfreie Konstanten ansehen, können wir sie als fingierte Beobachtungen betrachten und ihnen den Charakter von Realisationen von Zufallsvariablen zuordnen. Nach der eingangs formulierten Theorie liefert dann jede "beobachtete" Koordinate eine Verbesserungsgleichung mit dem Absolutglied null (wenn die Koordinatenwerte als Näherungswerte verwendet werden).

$$\mathbf{A}^{*} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{1} & \mathbf{b}_{1} & \mathbf{c}_{1} & \dots & \mathbf{u}_{1} \\ \mathbf{a}_{2} & \mathbf{b}_{2} & \mathbf{c}_{2} & \dots & \mathbf{u}_{2} \\ \\ \mathbf{a}_{n} & \mathbf{b}_{n} & \mathbf{c}_{n} & \dots & \mathbf{u}_{n} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \\ \cdots & & & & & \\ & & & & & \mathbf{0} \end{vmatrix}; \ \mathbf{P}^{*} = \left| \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{L}|} \right|$$

Die Normalgleichungsanteile dieser fingierten Beobachtungen, die oben durch die Matrix A^{L} dargestellt wurden, also die entsprechenden **[paa]**, **[pab]** ... **[puu]**, ergaben aber - wegen $\mathbf{a} = \mathbf{b} = ... = \mathbf{u} = \mathbf{1}$ (bzw. = 0) - eine Matrix, in der bei unabhängigen fingierten Beobachtungen in der Diagonalen die Gewichte stehen, im allgemeinen Fall aber die inverse Kofaktorenmatrix. Wir nennen diese Matrix Lagerungsmatrix L.



Sie ist eine **u.u**-Matrix. Wir nehmen oben an, dass die Orientierungsunbekannten und allfällige Massstabsfaktoren als letzte unbekannte Parameter genommen worden seien, und dass diese "nicht beobachtet" seien, also das Gewicht null hätten. Dasselbe gilt auch für diejenigen Diagonalglieder, die Neupunkten, also "unbeobachtete Punkten", zugeordnet sind: ihr Gewicht ist null.

Ohne näheren Beweis - es lässt sich aus dem oben gesagten leicht ableiten - sei beigefügt, dass natürlich Korrelationen zwischen den fingierten Beobachtungen ganz analog einzuführen sind: die Lagerungsmatrix wird zur Kofaktorenmatrix der "beobachteten" Parameter.

Was geschieht mit den Absolutgliedern der Normalgleichungen? Der Anteil aus der Gruppe der fingierten Verbesserungsgleichungen, **[paf]**, **[pbf]** ... **[puf]** ist gleich null, weil alle **f** in dieser Gruppe null sind, also werden die Absolutglieder der ursprünglichen Normalgleichungen überhaupt nicht verändert.

Damit haben wir eine ganz einfache Regel für die Lagerung von freien, vermittelnd angesetzten Netzen:

- man bildet die Normalgleichungsmatrix mit allen Koordinatenparametern; diese ist singulär,
- man bildet die Lagerungsmatrix L, indem man die Gewichte der "freien", also nicht durch fingierte Beobachtungen gebundenen Parameter null setzt und für mindestens 3 bzw. 4 Parameter in der entsprechenden Diagonalstelle, das zugeordnete Gewicht einsetzt. Dabei ist zu beachten, dass diese Gewichte mit dem gleichen sigma-null gerechnet werden, wie diejenigen der Beobachtungen,
- die <gelagerten> Normalgleichungen

$$\begin{vmatrix} P & 0 \\ 0 & L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ E \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} A^{T}E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^{T}PL \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (A^{T}PA + L) \end{vmatrix}$$

 durch die Superposition der Lagerungsmatrix auf die (singuläre) Normalgleichungsmatrix wird - wenn man obige Regeln beachtet - die resultierende Normalgleichungsmatrix regulär und kann invertiert werden. Die "gelagerte" reguläre Normalgleichung lautet somit

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{L}\right)\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

 logischerweise erhalten nun die "beobachteten Koordinaten" Verbesserungen, die sich nach den zugeordneten Gewichten richten, allerdings nur dann, wenn die Lagerung überbestimmt ist (denn ohne Überbestimmung entstehen keine Verbesserungen).

Will man einen Punkt als "Festpunkt" deklarieren, so hat er ein kleines Sigma, folglich ein grosses Gewicht und damit nach dem Ausgleichungsprinzip [pvv] = Min. ein kleines v, das praktisch bei höheren Gewichten schnell gegen null geht. Ist die Lagerung überbestimmt (mehr als **3 bzw. 4 Gewichte** \neq **0**), so übt sie einen je nach Gewichtswahl stärkeren oder schwächeren "Zwang" auf die Beobachtungen im Netz aus.

Die Lagerungsmethode ist sehr flexibel und erlaubt, die Unsicherheit der Ausgangskoordinaten in die Netzberechnung einzubeziehen.

Eine abschliessende Bemerkung zum Freiheitsgrad (FG) einer "gelagerten", vermittelnden Ausgleichung:

- Die Grösse FG = n u setzt voraus, dass u gleich der Anzahl der Bestimmungsstücke ist; diejenige Anzahl von fingierten Beobachtungen, die dazu dient, das Lagerungsdefizit zu tilgen, erhöht den FG nicht,
- erst jede fingierte Beobachtung, die bei der Lagerungs als überschüssig einbezogen wird, erhöht den FG um 1,
- man sieht das auch an den Verbesserungen; jede überschüssige Beobachtung erzeugt eine Verbesserung; diese ist dann natürlich auch beim [**pvv**] zu berücksichtigen.

6.10 Anwendungsbeispiel 3

Die Stationsausgleichung

6.10.1 Das Problem

Richtungen werden mit dem Theodolit in mehreren Sätzen gemessen. In jedem Satz wird je einmal in erster und zweiter Fernrohrlage angezielt und abgelesen, damit die Richtungen eines Satzes (Mittel zwischen erster und zweiter Lage) weitgehend frei von systematischen Fehlern werden, und man sie in der Regel als unabhängig betrachten kann.

In der Vermessungskunde wird gezeigt, wie mehrere vollständige Sätze gleich genauer Richtungen gemittelt werden, und wie man die Standardabweichung einer Richtung und des Satzmittels schätzen kann.

In der Praxis entstehen oft unvollständige Richtungssätze, wenn die Sichtweite während der Messung ändert und die Beleuchtung ungünstig wird. Vor allem bei grossen Zielweiten (10 km und mehr) ist dieser Fall üblich.

Es stellt sich daher die Frage, ob man auch unvollständige Richtungssätze mitteln kann, wie man die gemittelten Richtungen berechnet, und wie man die Standardabweichungen der Richtungen und der gemittelten Richtungen schätzen kann.

Selbstverständlich kann man das Problem umgehen, indem man ungleiche Teilsätze getrennt lässt und sie einzeln mit je einer Orientierungsunbekannten in die Ausgleichung einführt. Diese Lösung wird oft verwendet.

Um die Anzahl Messungen zu reduzieren und um die Genauigkeit zu überprüfen, ist die Kombination (Stationsausgleichung) von unvollständigen Richtungssätzen trotzdem wünschenswert.

6.10.2 Das funktionale Modell

Man kann die Stationsausgleichung auf eine vermittelnde Ausgleichung zurückführen, indem man die gesuchten ausgeglichenen Richtungen und die Orientierungen der einzelnen Sätze als Parameter einführt.

Wenn alle Parameter als Unbekannte angesehen werden, ist das Problem unlösbar, da die Gesamtorientierung der Sätze unbestimmt bleibt.

Man muss daher eine willkürliche Annahme treffen, um das Ausgleichungsproblem lösbar zu machen. Es ist zu beachten, dass dadurch kein Zwang auf die Richtungsdifferenzen entsteht.

Man kann zum Beispiel entweder die Orientierung des ersten Satzes als Null wählen oder die erste ausgeglichene Richtung als Nullrichtung betrachten oder die Summe der Orientierungen als gleich Null annehmen, usw.

Diese willkürlichen Annahmen spielen für die Weiterverwendung der ausgeglichenen Richtungen keine Rolle, da die Richtungsmessungen in der Netzausgleichung als frei orientiert betrachtet werden. Man kann daher zu jeder Richtung eines Satzes die gleiche Grösse addieren, ohne dass seine Bedeutung für die Triangulation ändert.

Beispiel [Conzett, 1987]

Aufgabe: Es sind 2 Sätze auf einer Station gemessen worden, wobei beim zweiten Satz eine Richtung fehlt (z.B. wegen aufgekommenen Nebelschwaden).

Lösung: Unbekannte Parameter sind die vier Richtungen (x_1, x_2, x_3, x_4) und zwei Orientierungsunbekannte (z_1, z_2) . Damit das Problem bestimmt ist, wird die Lage der Nullrichtung mit $z_1 = 0$ festgelegt.

Es ergeben sich damit die folgenden Verbesserungsgleichungen:

\mathbf{v}_{11}	=	x ₁					$-l_{11}$
V ₁₂	=		X ₂				$-l_{12}$
V ₁₃	=			X ₃			$-l_{13}$
V ₁₄	=				X ₄		$-l_{14}$
\mathbf{V}_{21}	=	x ₁				$-\mathbf{Z}_2$	$-\mathbf{l}_{21}$
V 22	=		X ₂			$-\mathbf{Z}_2$	$-l_{22}$

oder in Matrizenschreibweise $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}$, mit:

V				A				X l		1						Р			
V ₁₁		1	0	0	0	0				0			1	0	0	0	0	0	0
V ₁₂		0	1	0	0	0		x ₁		75.3243			0	1	0	0	0	0	0
V ₁₃		0	0	1	0	0		X ₂		131.4526			0	0	1	0	0	0	0
v ₁₄	=	0	0	0	1	0	.	X ₃	-	253.5458	;		0	0	0	1	0	0	0
V ₂₁		1	0	0	0	-1		X ₄		105.6438			0	0	0	0	1	0	0
V ₂₂		0	1	0	0	-1		Ζ,		180.9671			0	0	0	0	0	1	0
		0	0	0	1	-1		. 2	•	359.1897			0	0	0	0	0	0	1

Daraus ergibt sich die Normalgleichungsmatrix

A^TPA

2	0	0	0	-1
0	2	0	0	-1
0	0	1	0	0
0	0	0	2	-1
-1	-1	0	-1	3

und ihre Inverse

.6667	.1667	.0000	.1667	.3333
.1667	.6667	.0000	.1667	.3333
.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
.1667	.1667	.0000	.6667	.3333
.3333	.3333	.0000	.3333	.6667

Den Lösungsvektor

.0002
75.3239
131.4526
253.5460
-105.6435

Die Berechnung der Korrelationskoeffizienten zeigt, dass die ausgeglichenen Richtungen in diesem Falle korreliert sind.

1.0000	.2500	.0000	.2500	.5000
.2500	1.0000	.0000	.2500	.5000
.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000
.2500	.2500	.0000	1.0000	.5000
.5000	.5000	.0000	.5000	1.0000

Die willkürlich eingeführte Annahme (im Beispiel $z_1 = 0$) ist für die ausgeglichenen Richtungen unwesentlich, da sie nur eine einheitliche Drehung des Satzes bewirkt, und ein gedrehter Satz bleibt für die Weiterverwendung in der Triangulation gleichwertig.

Die Kofaktorenmatrix, die aus der Stationsausgleichung entsteht, wird ebenfalls von der eingeführten Annahme beeinflusst. Das heisst: man bekommt je nach Anfangsbedingung eine andere Kofaktorenmatrix. Alle so erhaltenen Kofaktorenmatrizen sind aber bei einer Weiterverwendung äquivalent, wenn man sie vollständig berücksichtigt. Störend wirkt nur die Tatsache, dass die Varianzen der ausgeglichenen Richtung von der getroffenen Annahme abhängig sind und bei unsymmetrischen Bedingungen gleichwertige ausgeglichene Richtungen unterschiedliche Varianzen erhalten.

Es stellt sich daher die Frage, ob unter den unendlich vielen äquivalenten Kofaktorenmatrizen eine Hauptäquivalente existiert, die die Varianzen und die Korrelationen zwischen den verschiedenen Richtungen am übersichtlichsten beschreibt und ein Triangulationsnetz möglichst wenig verfälscht, wenn man die Korrelationen in der Ausgleichung vernachlässigt.

Diese Frage hat viele Geodäten beschäftigt. Sie wird von W. Höpcke in [W. Höpcke, Einige Ergänzungen zur Theorie der Richtungsmessungen, Zeitschrift für Vermessungswesen, 3-1969] beschrieben.
Literaturverzeichnis

- Bencini, P.: Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
- Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
- Dupraz, H.: Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
- Howald, P.: Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
- Pelzer, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

7. Fehlerellipsen

7.1 Stochastische Eigenschaften mehrdimensionaler Grössen

In geodätischen Ausgleichungsproblemen werden oft Parameter geschätzt, die gruppenweise zusammengehören und daher als 2-, 3- oder n-dimensionale Grössen angeschaut werden.

Als Beispiel kann man die Koordinaten von Punkten in der Ebene (oder im Raum) erwähnen, die paarweise (oder in Dreiergruppen) zusammengehören. Sie werden in den üblichen Ausgleichungsproblemen der Vermessung mit einem linearen Modell aufgrund von normalverteilten Messungen geschätzt, so dass die so entstandenen Koordinatenpaare normalverteilt sind. Die stochastischen Eigenschaften der geschätzten Parameter sind für die Interpretation der Ergebnisse unentbehrlich und müssen daher immer neben den geschätzten Werten der Parameter beschrieben werden.

Die stochastischen Eigenschaften von zusammengehörenden Zufallsvariablen werden durch ihre 2- oder mehrdimensionale Verteilungsfunktion vollständig wiedergegeben. Die Arbeit mit 2- oder mehrdimensionalen Verteilungen ist aber umständlich, so dass einfachere, aber ebenfalls aussagekräftige Indikatoren vorgezogen werden.

Die bisher verwendeten Kovarianzmatrizen sind ein Beispiel dafür. Sie beschreiben die wesentlichen Eigenschaften von mehrdimensionalen Zufallsvariablen. Bei normalverteilten Variablen, zusammen mit den Erwartungswerten der einzelnen Komponenten, sind sie sogar gleichbedeutend wie die Dichtefunktion. Dank dem Computer kann man mit solchen Matrizen leicht arbeiten, wie die Anwendungen des Fehlerfortpflanzungsgesetzes gezeigt haben. Sie sind aber nicht sehr anschaulich, so dass man sie oft durch einfachere graphisch darstellbare Indikatoren ersetzt oder ergänzt, die vor allem in geometrischen Problemen ebenfalls aussagekräftig sind. Man kann dadurch die Resultate wesentlich leichter interpretieren.

Diese Indikatoren werden für 2-dimensionale Zufallsvariablen mittlere Fehlerellipsen genannt, während man für 3-dimensionale Variablen von Fehlerellipsoiden (oder Hyperellipsoiden im mehrdimensionalen Raum) spricht.

7.2 Die mittlere Fehlerellipse einer zweidimensionalen Zufallsvariable

Die 2-dimensionale Normalverteilung (aus 2.7.4) hat die Dichtefunktion:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{\mathbf{x}}^2\sigma_{\mathbf{y}}^2 - \sigma_{\mathbf{xy}}^2}} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_{\mathbf{x}}^2\sigma_{\mathbf{y}}^2}{\sigma_{\mathbf{x}}^2\sigma_{\mathbf{y}}^2 - \sigma_{\mathbf{xy}}^2}} \left[\left(\frac{\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}}^2}{\sigma_{\mathbf{x}}}\right)^2 - \frac{2\sigma_{\mathbf{xy}}}{\sigma_{\mathbf{x}}\cdot\sigma_{\mathbf{y}}} \left(\frac{\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}\right) \left(\frac{\mathbf{y}-\mu_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{y}-\mu_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}}\right)^2 \right]$$
(1)



Fig. 1

Aus der graphischen Darstellung ist ersichtlich, dass die Linien konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte "Höhenkurven" auf der Dichtefläche bilden. Für die Punkte solcher Linien gilt:

f(x,y) = konstant

Das heisst, zu jeder gegebenen Konstanten (**0 < Konst < Maximum f(x,y**)) kann eine Linie konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte gebildet werden. Um bei 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvariablen eine konstante Dichte zu haben, muss der ortsabhängige Exponent der Dichtefunktion konstant bleiben, das heisst, insbesondere muss

$$\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \left[\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x^2} \right) \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y^2} \right) + \left(\frac{y \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] = k$$

sein.

Satz 1

Die Kurven (gleicher Dichte einer zweidimensionalen Normalverteilung) sind Ellipsen mit Zentrum in (μ_x , μ_y).

Definition

Die Höhenkurve für welche der oben erwähnte Exponent der Dichtefunktion gleich 1 ist, nennt man die mittlere Fehlerellipse der zweidimensionalen Zufallsvariable X(x, y).

Bemerkung

Die Gleichung der mittleren Fehlerellipse ist also

$$\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \left[\left(\frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \left(\frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{\mathbf{y} - \mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{\mathbf{y} - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] = 1$$
(2)

Die mittlere Fehlerellipse berührt die vier Geraden



Fig. 2

Beweis

Man berechnet den Schnitt zwischen der mittleren Fehlerellipse und z. B. der Geraden $y = \mu_y + \sigma_y$:

$$\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \left[\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{\mu_y + \sigma_y - \mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{\mu_y + \sigma_y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] = 1$$
$$\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \left[\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} + 1 \right] = 1$$

$$\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \cdot \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right) + 1 = 1 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$
$$\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right) + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0$$
$$\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\right)^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat zweimal die gleiche Lösung

$$\left(x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y} + \mu_x\right)$$

und die zwei gesuchten Schnittpunkte fallen zu einem Doppelpunkt zusammen, so dass die Tangentenbedingung erfüllt ist.

Die Gerade $y = \mu_y + \sigma_y$ berührt daher die Ellipse in

$$P\left(x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{y}} + \mu_{x}, y = \mu_{y} + \sigma_{y}\right)$$
(3)

Die anderen drei Tangenten-Aussagen können in ähnlicher Art überprüft werden.

Bemerkung

Wenn die Kovarianzmatrix der Koordinaten eines Punktes bekannt ist, kann man die Tangenten der mittleren Fehlerellipse in Richtung der Achsen des Koordinatensystems leicht konstruieren:

$$Q_{xx} = \begin{pmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{xy} & q_{yy} \end{pmatrix}$$
$$\sigma_{y} = \sigma_{o} \cdot \sqrt{q_{yy}}$$
$$\sigma_{x} = \sigma_{o} \cdot \sqrt{q_{xx}}$$



Die Halbachsen **a** und **b** der mittleren Fehlerellipsen können mit der folgenden Formel berechnet werden:



Fig. 4

$$a^{2} = \sigma_{o}^{2} \left(\frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{q_{xx} - q_{yy}}{2}\right)^{2} + q_{xy}^{2}} \right)$$

$$b^{2} = \sigma_{o}^{2} \left(\frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{q_{xx} - q_{yy}}{2}\right)^{2} + q_{xy}^{2}} \right)$$
(4)

Die Richtung ω der grossen Halbachse (a) erfüllt die folgende trigonometrische Gleichung:

$$tg(2\omega) = \frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}}$$
(5)

Dazu gelten folgende Zusatzbedingungen:

Das Vorzeichen von q_{xy} ist gleich wie das Vorzeichen von sin (2 ω) und das Vorzeichen von $q_{xx} - q_{yy}$ ist gleich wie das Vorzeichen von cos (2 ω). Eine eindeutige Lösung für ω kann daher im Bereich $0 \le \omega \le +200$ berechnet werden.

Definition

Die Standardabweichung σ_r eines Punktes **P** in einer beliebig vorgegebenen Richtung **R** ist die Standardabweichung der Orthogonalprojektion des Punktes **P** auf **R**.



Fig. 5

Bemerkung

Die Position von **P'** auf **R** kann durch die Distanz \mathbf{r} (= **OP'**) angegeben werden.

$$r = y \sin \omega + x \cos \omega$$

In Matrizenform

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}$$

wobei

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sin \omega \\ \cos \omega \end{pmatrix} , \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

wenn die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^2 & \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \\ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 \end{pmatrix}$$

bekannt ist, kann die Varianz σ_r^2 des Punktes **P** in Richtung **R** berechnet werden.

Da

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} \sin \omega + \mathbf{x} \cos \omega = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}$$

ist, folgt σ_r^2 mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$\sigma_{\rm r}^2 = {\bf T}^{\rm T} {\bf K}_{\rm xx} \cdot {\bf T}$$

= $\sigma_{\rm y}^2 \sin^2 \omega + 2\sigma_{\rm xy} \sin \omega \cos \omega + \sigma_{\rm x}^2 \cos^2 \omega$ (6)

Eine Gerade R (Richtung R) und ein Zufallspunkt P mit der dazugehörigen mittleren Fehlerellipse seien gegeben. Die Tangenten an die mittlere Fehlerellipse von P senkrecht zu R schneiden auf R eine Strecke heraus, deren Länge $2\cdot\sigma_r$ beträgt.



Fig. 6

Bemerkung

Die Standardabweichungen eines Punktes P in Richtung R kann als Vektor mit Betrag σ_r ausgehend von $\,P\,$ dargestellt werden.



180

Fig. 7

Definition

Der geometrische Ort der Orthogonalprojektionen eines Punktes Q auf die Tangenten einer Kurve K heisst die Fusspunktkurve von K bezüglich Q

A, B, C, D sind Punkte der Fusspunktkurve von K bezüglich Q



Fig. 8

Die Vektoren der Standardabweichung von P in allen Richtungen beschreiben eine Kurve um P, welche die Fusspunktkurve der mittleren Fehlerellipse von P bezügliche deren Mittelpunkt (P) ist.

Beweis



Fig. 9

Für jede beliebige Richtung **R** können mit Hilfe des 5. Satzes zwei Standardabweichungsvektoren konstruiert werden. Die dadurch entstandenen Punkte A_1 und A_2 sind Orthogonalprojektionen von **P** auf 2 Tangenten der mittleren Fehlerellipse und daher 2 Punkte der Fusspunktkurve der Ellipse bezüglich **P**. Die Konstruktion kann in allen beliebigen Richtungen wiederholt werden, so dass die Fusspunktkurve der der mittleren Fehlerellipse entsteht.

7.3 Die mittlere Fehlerellipse als Eigenwertproblem

Nach dem Hauptachsentheorem (Kap. 3.4) existiert zu jeder symmetrischen Matrix \mathbf{M} eine orthogonale Matrix \mathbf{U} , so dass aus \mathbf{U} und \mathbf{M} eine Diagonalmatrix \mathbf{D} berechnet werden kann:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{U} \tag{7}$$

wobei **D** die eindeutig bestimmte Diagonalmatrix der Eigenwerte und **U** die Matrix der normierten Eigenvektoren sind. Die orthogonale Matrix **U** erfüllt (Definition) die Bedingung $\mathbf{U}^{T} \mathbf{U} = \mathbf{E}$ das heisst, die Kolonnenvektoren $(\mathbf{u}_{1}, \mathbf{u}_{2}, ..., \mathbf{u}_{n})$ sind unter sich orthogonal und haben Länge 1. Es ist daher:

$$\mathbf{u}'_{i} \cdot \mathbf{u}'_{j} = \mathbf{1}$$
 für $\mathbf{i} = \mathbf{j}$
 $\mathbf{0}$ für $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$

Im zweidimensionalen Fall kann die orthogonale Matrix U als Drehmatrix des Koordinatensystems angesehen werden.

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{\omega} & \sin \boldsymbol{\omega} \\ \cos(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{100}) & \sin(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{100}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{\omega} & \sin \boldsymbol{\omega} \\ -\sin \boldsymbol{\omega} & \cos \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}$$
(8)

Die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix sind daher bestimmt, wenn die erforderliche Drehung (ω) des Koordinatensystems für die Hauptachsentransformation bestimmt ist.

Bemerkung

Man kann das Hauptachsentheorem an der Kovarianzmatrix eines Punktes P(X, Y) anwenden.

$$\mathbf{K}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Es existiert (mindestens) eine orthogonale Matrix U, so dass

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{xx}}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$$

eine Diagonalmatrix wird.

Es gibt in der Ebene eine geeignete orthogonale Koordinatentransformation (Rotation ohne Massstabsänderung), die erlaubt die Koordinaten eines Zufallspunktes P(x,y) in P(u,v) so zu transformieren, dass u und v stochastisch unabhängig sind.

Das heisst, es gibt eine geeignete Transformationsmatrix \mathbf{U}^{T} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

für welche die Kovarianzmatrix der Koordinaten K_{uu} die Diagonalform annimmt. Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist:

$$\mathbf{K}_{uu} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{xx} \mathbf{U}$$

und für die angegebenen Matrizen

$$\mathbf{K}_{uu} = \begin{pmatrix} \sigma_{u}^{2} & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_{v}^{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und } \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{cos} \omega & \mathbf{sin} \omega \\ -\mathbf{sin} \omega & \mathbf{cos} \omega \end{pmatrix} \qquad (9)$$

ist

$$\mathbf{K}_{uu} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \cos^2 \omega + \sigma_{xy} \sin 2\omega + \sigma_y^2 \sin^2 \omega & -\frac{1}{2} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \sin 2\omega + \sigma_{xy} \cos 2\omega \\ -\frac{1}{2} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \sin 2\omega + \sigma_{xy} \cos 2\omega & \sigma_y^2 \cos^2 \omega - \sigma_{xy} \sin 2\omega + \sigma_x^2 \sin^2 \omega \end{bmatrix}$$
(10)

Die neuen Koordinaten u, v des Punktes P sind unabhängig, wenn

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2\right)\sin 2\omega + \sigma_{xy}\cos 2\omega = 0$$

das heisst, wenn

$$\frac{\sin 2\omega}{\cos 2\omega} = tg2\omega = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

In diesem Fall sind σ_u^2 und σ_v^2 gleich den Eigenwerten der ursprünglichen Kovarianzmatrix K_{xx} und auch der Varianzen des Punktes **P** in Richtung der Eigenvektoren.

Die Richtungen der Eigenvektoren sind die Richtungen der maximalen bzw. minimalen Varianz von \mathbf{P} , sie sind daher die Richtungen der Halbachsen der mittleren Fehlerellipse. Die Standardabweichungen von \mathbf{P} in Richtung der Hauptachsen sind die Halbachsen \mathbf{a} und \mathbf{b} der mittleren Fehlerellipse.

Beweis 1. Teil

Die Funktion, die σ_u^2 ergibt, ist

$$\sigma_{u}^{2} = \sigma_{x}^{2}\cos^{2}\omega + \sigma_{xy}\sin^{2}\omega + \sigma_{y}^{2}\sin^{2}\omega$$

Die Funktion σ_u^2 erreicht ein Maximum oder ein Minimum, wenn ihre Ableitung Null wird, das heisst:

$$\frac{d(\sigma_u^2)}{d\omega} = -2\sigma_x^2 \cos\omega \sin\omega + 2\sigma_{xy}\cos2\omega + 2\sigma_y^2 \sin\omega\cos\omega$$
$$= -\sigma_x^2 \sin2\omega + 2\sigma_{xy}\cos2\omega + \sigma_y^2 \sin2\omega$$
$$= -(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\sin2\omega + 2\sigma_{xy}\cos2\omega = 0$$

Die Ableitung von σ^2_u nach ω ist gleich 0, wenn

$$tg2\omega = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Diese ist die gleiche Drehung des Koordinatensystems, die zu den neuen stochastisch unabhängigen Koordinaten (\mathbf{u}, \mathbf{v}) geführt hat.

Beweis 2. Teil

Die zweite Ableitung der Funktion σ_u^2 gibt an, ob die Drehung ein Maximum oder ein Minimum ist.

$$\frac{d^2(\sigma_u^2)}{d\omega^2} = -2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\cos 2\omega - 4\sigma_{xy}\sin 2\omega$$

Die Richtung ω erfüllt die trigonometrische Gleichung

$$tg2\omega = \frac{\sin 2\omega}{\cos 2\omega} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

welche 2 um 200 gon verschiedene Lösungen $2\omega_1$ und $2\omega_2$ hat. Für welche gilt

$$tg2\omega_1 = tg2\omega_2 = \frac{\sin 2\omega_1}{\cos 2\omega_1} = \frac{\sin 2\omega_2}{\cos 2\omega_2}$$

wobei

$$\sin 2\omega_1 = -\sin 2\omega_2$$
$$\cos 2\omega_1 = -\cos 2\omega_2$$

Für die Lösung ω_1 , bei welcher das Vorzeichen von $\sin 2\omega$ gleich dem Vorzeichen von σ_{xy} ist, und das Vorzeichen von $\cos 2\omega$ gleich dem Vorzeichen von $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ ein Maximum ist. Sie entspricht daher der Richtung der grossen Halbachse der mittleren Fehlerellipse. ω_2 ist dann die Richtung der kleinen Halbachse.

Beweis 3. Teil

Aus dem Hauptachsentheorem ist:

$$\mathbf{K}_{uu} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{xx} \mathbf{U}$$

eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1,\,\lambda_2$ von $\,K_{xx}\,$ als Diagonalelemente, so dass

$$\begin{pmatrix} \sigma_{u}^{2} & 0\\ 0 & \sigma_{v}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1} & 0\\ 0 & \lambda_{2} \end{pmatrix}$$
 (11)

Die Eigenwerte einer $2 \cdot 2$ Matrix können in eine geschlossene Formel abgeleitet werden. Sie sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix K_{xx} , das heisst, sie erfüllen die Gleichung

$$Det(K_{xx} - \lambda \cdot E) = 0$$
 (12)

Siehe [Schwarz, Numerische Mathematik, Teubner Stuttgart 1986]

$$\mathbf{Det}\begin{pmatrix} \sigma_x^2 - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left(\sigma_{x}^{2}-\lambda\right)\left(\sigma_{y}^{2}-\lambda\right)-\sigma_{xy}^{2}=0$$

Die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)\lambda + \sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 = \mathbf{0}$$

hat die Lösungen

$$\lambda_{1} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4}} \left(\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} \right)^{2} - \left(\sigma_{x}^{2} \sigma_{y}^{2} - \sigma_{xy}^{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4}} \left(\sigma_{x}^{2} - \sigma_{y}^{2} \right)^{2} + \sigma_{xy}^{2}}$$

$$\lambda_{2} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4}} \left(\sigma_{x}^{2} - \sigma_{y}^{2} \right)^{2} + \sigma_{xy}^{2}}$$

$$\lambda_{1,2} = \sigma_{0}^{2} \cdot \left(\frac{q_{xx} + q_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \left(q_{xx} - q_{yy} \right)^{2} + q_{xy}^{2} \right)$$
(13)

Bemerkung 3

Die Beziehungen, in welchen Varianzen und Kovarianzen auftreten, gelten auch für die Kofaktoren. Man muss die folgenden Substitutionen in den Formeln vornehmen:

$$\sigma_{x}^{2} = \sigma_{o}^{2} \cdot \mathbf{q}_{xx}$$

$$\sigma_{y}^{2} = \sigma_{o}^{2} \cdot \mathbf{q}_{yy}$$

$$\sigma_{xy}^{2} = \sigma_{o}^{2} \cdot \mathbf{q}_{xy}$$
(14)

7.4 Die Fehlerellipsen als zweidimensionale Vertrauensintervalle

Die mittleren Fehlerellipsen und ihre Vergrösserungen (um einen Faktor \mathbf{k}) begrenzen ein Gebiet in der Koordinatenebene, in welcher eine Realisierung des dazugehörigen normalverteilten Zufallspunktes $\mathbf{P}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ sich befinden kann. Da die Dichtefunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ der zweidimensionalen Zufallsvariable bekannt ist, (wenn man die mittlere Fehlerellipse kennt), kann man die Wahrscheinlichkeit \mathbf{W} bestimmen, mit welcher eine Realisierung von \mathbf{P} sich innerhalb der Ellipse befindet.

$$W = \iint f(x, y) \, dxdy \tag{15}$$
über die

Ellipse



Fig. 10

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung des Zufallspunktes **P** (\mathbf{X} , \mathbf{Y}) sich innerhalb der eigenen, um den Faktor \mathbf{k} vergrösserten Fehlerellipse befindet (Achsen: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}$), ist:

$$W = 1 - e^{-\frac{1}{2}k^2}$$
(16)

Einige typische Fälle können in der folgenden Tabelle gelesen werden.

k	W
1	0.3935
2	0.8647
2.4477	0.95
3	0.9889
3.0349	0.99

Beweis

Im allgemeinen hat man für einen Zufallspunkt **P** (**X**,**Y**) nicht verschwindende Varianzen und Kovarianzen $(\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_{xy})$, so dass die Fehlerellipsen in der Ebene beliebig orientiert sein können. Da immer eine Koordinatentransformation existiert (Hauptachsentheorem), die zu unkorrelierten Koordinaten (**u**, **v**) führt, kann man den Beweis vereinfachen und die Koordinatenachsen auf die Hauptachse der Fehlerellipse legen, somit werden σ_{uv} und μ_u, μ_v gleich Null.

Die dazugehörige zweidimensionale Normalverteilung hat die folgende Dichtefunktion:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\mathbf{u}}\sigma_{\mathbf{v}}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{u}^{2}}{\sigma_{\mathbf{u}}^{2}} + \frac{\mathbf{v}^{2}}{\sigma_{\mathbf{v}}^{2}}\right)}$$
(17)

Die Gleichung der mittleren Fehlerellipse ist dann

$$\frac{\mathbf{u}^2}{\sigma_{\mathbf{u}}^2} + \frac{\mathbf{v}^2}{\sigma_{\mathbf{v}}^2} = 1$$
(18)

Die Gleichung einer um k vergrösserten Fehlerellipse ist dann

$$\frac{\mathbf{u}^2}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{u}}^2} + \frac{\mathbf{v}^2}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{v}}^2} = \mathbf{k}^2$$

Die Gleichung kann ebenfalls parametrisch geschrieben werden

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{u}} \cos \alpha$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}} \sin \alpha$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{W} = \iint \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{d} \mathbf{u} \mathbf{d} \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi\sigma_{\mathrm{u}}\sigma_{\mathrm{v}}} \iint \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{u}^{2}}{\sigma_{\mathrm{u}}^{2}} + \frac{\mathbf{v}^{2}}{\sigma_{\mathrm{v}}^{2}}\right)} \mathbf{d} \mathbf{u} \mathbf{d} \mathbf{v}$$
(19)
über die
Ellipse Ellipse

kann mit Hilfe der Variablen α und k einfacher geschrieben werden:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2\pi\sigma_{\rm u}\sigma_{\rm v}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{k} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{k}^2} \Delta \, \mathbf{d}\mathbf{k} \, \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}$$

Die Differentiale nach den ursprünglichen Variablen (**dudv**) sind mit Hilfe der Funktionaldeterminate durch die neuen (**dk** $d\alpha$) zu ersetzen.

$$dudv = \Delta \cdot dkd\alpha$$

wobei

$$\Delta = \text{Det} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha} \\ \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{k}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \text{Det} \begin{vmatrix} \sigma_{\mathbf{u}} \cos \alpha & -\mathbf{k} \sigma_{\mathbf{u}} \sin \alpha \\ \sigma_{\mathbf{v}} \sin \alpha & \mathbf{k} \sigma_{\mathbf{v}} \cos \alpha \end{vmatrix}$$

so dass

$$\Delta = k \sigma_u \sigma_v \cos^2 \alpha + k \sigma_u \sigma_v \sin^2 \alpha = k \sigma_u \sigma_v$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2\pi\sigma_{u}\sigma_{v}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{k} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{k}^{2}} \cdot \mathbf{k}\,\sigma_{u}\sigma_{v}\,\mathbf{d}\mathbf{k}\mathbf{d}\alpha$$

Da das innere Integral unabhängig von α ist, kann man es extrahieren:

$$W = \frac{1}{2\pi\sigma_{u}\sigma_{v}}\int_{0}^{k} e^{-\frac{1}{2}k^{2}} \cdot k \sigma_{u}\sigma_{v} dk \cdot \int_{0}^{2\pi} d\alpha$$
$$W = \frac{1}{2\pi\sigma_{u}\sigma_{v}} \left(\sigma_{u}\sigma_{v}\left(-e^{-\frac{1}{2}k^{2}}\right) \left|k\right|_{0}^{k} \left((\alpha) \left|2\pi\right|_{0}^{2\pi}\right)\right)$$
$$W = -e^{-\frac{1}{2}k^{2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}k^{2}}$$
(20)

Bemerkung

Wenn die Standardabweichung σ_0 nicht bekannt ist, und die Wahrscheinlichkeitsbetrachtung aufgrund des a posteriori Wertes s_0 erfolgt, verwendet man ebenfalls die Fehlerellipse. Die Konfidenzintervalle müssen aber mit Hilfe der mehrdimensionalen t-Verteilung bestimmt werden. Dies führt zu einer Vergrösserung der Vertrauensellipsen in Funktion des Freiheitsgrades.

Die folgende Tabelle zeigt einige Werte [Conzett, 1977]:

k	f	W
6.1	2	95
3.4	5	95
2.9	10	95
2.45	œ	95
14	2	99
5.2	5	99
3.9	10	99
3.03	œ	99

7.5 Mittlere Fehler-Ellipsoide und -Hyperellipsoide

Die bisherigen Ableitungen wurden 2-dimensional für die unbekannten Parameter X, Y dargestellt. Die gleichen Überlegungen lassen sich auf 3 oder mehr Unbekannt verallgemeinern. Der 3-dimensionale Fall führt zu einem mittleren Fehlerellipsoide und kann anschaulich beschrieben werden.

Wenn man eine 3-dimensionale normalverteilte Zufallsvariable P(X,Y,Z) betrachtet und die dazugehörige Kovarianz oder Kofaktorenmatrix sowie die Erwartungswerte kennt, ist:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \sigma_{\mathbf{x}}^2 & \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \\ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \sigma_{\mathbf{y}}^2 & \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}} \\ \sigma_{\mathbf{x}\mathbf{z}} & \sigma_{\mathbf{y}\mathbf{z}} & \sigma_{\mathbf{z}}^2 \end{vmatrix} = \sigma_{\mathbf{o}}^2 \begin{vmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} & \mathbf{q}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \mathbf{q}_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \mathbf{q}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} & \mathbf{q}_{\mathbf{y}\mathbf{z}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{x}\mathbf{z}} & \mathbf{q}_{\mathbf{y}\mathbf{z}} & \mathbf{q}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}} \end{vmatrix}$$

Die Gleichung des mittleren Fehlerellipsoides ist

$$(X-\mu)^{T}K_{xx}^{-1}(X-\mu) = 1$$
(21)

Die Achsen des mittleren Fehlerellipsoides sind 3 Vektoren im Raum mit folgenden Eigenschaften:

- \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sind orthogonal.
- Wenn das Koordinatensystem (**x**, **y**, **z**) in Richtung der Ellipsoidachsen gedreht wird, werden die Komponenten der 3-dimensionalen Zufallsvariable im neuen Koordinatensystem unkorreliert.

- Die Richtung der grössten Halbachse (a) ist die Richtung der grössten Varianz für die 3-dimensionale Zufallsvariable.
- Die Richtung der zweitgrössten Halbachse (\vec{b}) ist die Richtung der grössten Varianz in der Ebene senkrecht zu (\vec{a}) .
- Die Richtung der dritten Halbachse ist die Richtung senkrecht zu (\vec{a}) und zu (\vec{b}) (sie ist die Richtung der kleinsten Varianz).

Bemerkung

Das Hauptachsentheorem kann an einer 3-dimensionalen Kovarianzmatrix angewandt werden. Man kann immer mindestens eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix Λ bestimmen, die die folgende Beziehung erfüllen wird:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{xx}}\mathbf{U}$$

Die Diagonalelemente von Λ sind die Eigenwerte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ von K_{xx} und die Kolonnen von U sind die dazugehörigen Eigenvektoren $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ von K_{xx} .

Satz

Wenn die Eigenwerte und die Eigenvektoren nach dem Wert der Eigenwerte $(\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3)$ geordnet werden, sind die Halbachsen (a, b, c) des mittleren Fehlerellipsoides bestimmt.

Die Quadrate der Halbachsen sind die Eigenwerte der K_{xx} -Matrix

$$a^{2} = \lambda_{1}$$

$$b^{2} = \lambda_{2}$$

$$c^{2} = \lambda_{3}$$

(22)

Die Richtung der einzelnen Halbachsen im Raum ist gleich der Richtung der entsprechenden Eigenvektoren.

7.6 Mehrdimensionale Vertrauensintervalle

Wie im 2-dimensionalen Fall können 3-dimensionale Zufallsvariablen mit Hilfe des Fehlerellipsoides anschaulich beschrieben werden.

So bildet analog das um k vergrösserte Fehlerellipsoid ein Vertrauensintervall.

Aus der Dichtefunktion der 3-dimensionalen Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit **W**, dass eine Realisierung der Zufallsvariable innerhalb des Ellipsoides fällt, berechnet werden

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \frac{\sqrt{\text{Det}K_{xx}^{-1}}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T K_{xx}^{-1}(X-\mu)}$$

$$W = \iiint f(x, y, z) \quad dxdydz$$

über dem Ellipsoid

In ähnlicher Weise kann das Problem im n-dimensionalen Raum gelöst werden.

7.7 Der mittlere Punktfehler

Definition

Der mittlere Punktfehler σ_p ist durch die folgende Beziehung definiert:

$$\sigma_{p}^{2} = \sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} = \sigma_{o}^{2} \left(\mathbf{q}_{xx} + \mathbf{q}_{yy} \right)$$
(24)

Satz

Der mittlere Punktfehler ist invariant bei einer Drehung des Koordinatensystems.

Beweis

Man drehe das Koordinatensystem (x,y), um einen Winkel α , um neue Koordinaten (x', y') zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}$$

Das heisst,

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$
$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist

$$\mathbf{K}_{\mathbf{x}'\mathbf{x}'} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T}$$

das heisst,

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha$$
$$\sigma_{y'} = \sigma_x^2 \sin^2 \alpha - 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \alpha$$

Die Summe der beiden Gleichungen gibt

$$\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{25}$$

Der mittlere Punktfehler bleibt also nach der Drehung des Koordinatensystems unverändert.

Bemerkung 1

Die Varianzen und Kovarianzen der Komponenten einer mehrdimensionalen Grösse sind koordinatenabhängig, sie sind bezüglich einer Koordinatentransformation nicht invariant.

Bemerkung 2

Die mittleren Fehlerellipsen (bzw. Ellipsoide usw.) sind invariant bezüglich einer Koordinatentransformation.

7.8 Die relative mittlere Fehlerellipse

Die mittlere Fehlerellipse beschreibt anschaulich die stochastischen Eigenschaften von Koordinatenpaaren. Als Beispiele wurden bisher als Zufallsvariablen Punktkoordinaten in der Ebene oder im Raum verwendet. Mittlere Fehlerellipsen können aber für beliebige Paare von Zufallsvariablen bestimmt werden.

Man ist oft interessiert zu wissen, wie genau die relative Lage zwischen zwei Punkten ist.



Das heisst, man möchte wissen, wie sich die Zufallsvariablen

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$$
$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1$$

stochastisch verhalten.

Definition

Die mittlere Fehlerellipse der Koordinatendifferenzen von zwei Zufallspunkten in der Ebene nennt man relative mittlere Fehlerellipse dieser zwei Punkte.

Vorgehen

Die relativen mittleren Fehlerellipsen für die Verbindung der Punkte P_1 und P_2 beispielsweise erhält man aus der Untermatrix $Q_{xx}^{(12)}$. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz $FQ_{xx}F^{T}$ auf die Koordinatendifferenzen Δx und Δy angewendet, ergibt

mit $\underline{\Delta} \mathbf{x} = \underline{\mathbf{x}}_2 - \underline{\mathbf{x}}_1$ $\underline{\Delta} \mathbf{y} = \underline{\mathbf{y}}_2 - \underline{\mathbf{y}}_1$ und

$$\mathbf{F}_{2.4} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{Q}_{xx}^{(12)} = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_{x_1x_1} & \mathbf{q}_{x_1y_1} & \mathbf{q}_{x_1x_2} & \mathbf{q}_{x_1y_2} \\ \mathbf{q}_{x_1y_1} & \mathbf{q}_{y_1y_1} & \mathbf{q}_{y_1x_2} & \mathbf{q}_{y_1y_2} \\ \mathbf{q}_{x_1x_2} & \mathbf{q}_{y_1x_2} & \mathbf{q}_{x_2y_2} \\ \mathbf{q}_{x_1y_2} & \mathbf{q}_{y_1y_2} & \mathbf{q}_{x_2y_2} & \mathbf{q}_{y_2y_2} \end{vmatrix}$$

Mit der Matrix

$$\mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x}} & \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{y}} \\ \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{y}} & \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{y} \Delta \mathbf{y}} \end{vmatrix} \qquad \qquad \begin{aligned} \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x}} &= \mathbf{q}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1} & -2\mathbf{q}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} & +\mathbf{q}_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2} \\ \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{y} \Delta \mathbf{y}} &= \mathbf{q}_{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1} & -2\mathbf{q}_{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2} & +\mathbf{q}_{\mathbf{y}_2 \mathbf{y}_2} \\ \mathbf{q}_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{y}} &= \mathbf{q}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1} & -\mathbf{q}_{\mathbf{y}_1 \mathbf{x}_2} & -\mathbf{q}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_2} & +\mathbf{q}_{\mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2} \end{aligned}$$

lassen sich analog zu Q_{xx} Funktionen von Δx , Δy bearbeiten. Sinngemäss lässt sich die mittlere relative F.E. für das Punktepaar zeichnen, die bei entsprechender Interpretation den Distanz- und den Querfehler zwischen den beiden Punkten gibt. Die Berechnung der Elemente der mittleren relativen F.E. erfolgt analog mit dem Eigenwertproblem oder den Formeln und auf Matrix angewendet.



F₁₂, F₁₃ ... : rel. m.F.E.

7.9 Die mittleren Fehlerellipsen in geodätischen Netzen

7.9.1 Berechnungsvorgang für die mittleren Fehlerellipsen

Sei Q_{xx} die Inverse der Normalgleichungsmatrix eines vermittelnd ausgeglichenen Triangulationsnetzes und x_i , y_i die Koordinaten des i-ten Neupunktes, so ergibt sich die Fehlerellipse dieses Punktes aus dem Eigenwertproblem der entsprechenden Untermatrix $Q_{p_ip_i}$ oder explizit aus den auf diese Untermatrix angewendeten Formeln.



Die relativen mittleren Fehlerellipsen werden analog berechnet. Zuerst werden die Kofaktoren der entsprechenden Koordinatendifferenzen bestimmt und daraus entsteht die dazugehörige relative mittlere Fehlerellipse.

7.9.2 Mittlere Fehlerellipsen a priori und a posteriori

Für die Berechnung der mittleren Fehlerellipsen werden also die Kofaktoren benötigt, die man aus der Inversen der Normalgleichungsmatrix (Matrix Q_{xx}) entnehmen kann.

Die Kofaktoren bestimmen die Form der Ellipsen (Richtung der Achsen, Halbachsenverhältnis). Sie sind von den vorgesehenen Beobachtungen und von den angenommenen Gewichten (**P**-Matrix) abhängig. Nicht aber von den gemessenen Werten, da um die Matrix

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

zu berechnen, die Messwerte nicht benötigt werden.

Um die Grössen der Halbachsen zu bestimmen, benötigt man neben den Kofaktoren der unbekannten Parameter auch den mittleren Fehler der Gewichtseinheit σ_0 . Falls σ_0 als bekannt vorausgesetzt werden kann, sind die mittleren Fehlerellipsen auch vor der Messkampagne berechenbar.

Man spricht in diesem Fall von mittleren Fehlerellipsen a priori, da sie ohne Zugriff auf die gemessenen Werte bestimmt werden. Es genügt, wenn die geplanten Messungen und ihre Genauigkeit festgelegt sind.

Man berechnet daher die mittleren Fehlerellipsen a priori bei der Planung von Messanordnungen und man kann vor den Messungen im Feld verschiedene Varianten vergleichen.

Wenn σ_0 nicht genügend genau bekannt ist, kann man die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse mit dem geschätzten Werte s_0 nach der Ausgleichung der ausgeführten Messungen berechnen. Man spricht dann von mittleren Fehlerellipsen a posteriori. Die Form der Ellipsen a posteriori ist gleich wie die Form der Ellipsen a priori. Sie sind nur um den Faktor s_0 / σ_0 grösser.

7.9.3 Eigenschaften der mittleren Fehlerellipsen

Die mittleren Fehlerellipsen sind anschauliche Indikatoren, die die Beurteilung einer Messanordnung ermöglichen. Die folgenden Eigenschaften sind dabei zu beachten:

- Die einzelnen mittleren Fehlerellipsen (m.F.E.) ergeben die Lagegenauigkeit der geschätzten Punkte in beliebigen Richtungen in Bezug auf das Fixpunktsystem.
- Die Informationen, die aus der m.F.E. gewonnen werden, stimmen nur unter der Voraussetzung, dass das mathematische Modell stimmt (keine groben Fehler usw.).
- Die relative Lage zwischen zwei Neupunkten kann mit Hilfe der mittleren Fehlerellipsen nur bestimmt werden, falls die Punkte stochastisch unabhängig sind. In der Regel stammen die Koordinaten aus den gleichen Messungen, so dass die Korrelationen zu berücksichtigen sind.



Fig. 11

In solchen Fällen muss man die relativen m.F.E. berechnen.

- Fixpunkte haben verschwindende m.F.E. ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).
- Stark zusammenhängende Punkte, wie z.B. Zentren und Exzentren haben gleiche m.F.E.
- M.F.E. sind von den beobachteten Werten unabhängig (abgesehen vom generellen Vergrösserungsfaktor s_0 / σ_0 der m.F.E. a posteriori).
- Ein grober Fehler in den Messungen kann daher durch Betrachten der m.F.E. nicht entdeckt werden. Bei der m.F.E. a posteriori verursacht ein grober Messfehler eine Vergrösserung aller Ellipsen des Netzes.
- Bei der Bestimmung von Punkten in allgemeinen Triangulationsnetzen werden kreisförmige m.F.E. angestrebt. In Netzen mit spezieller Zielsetzung können andere Ellipsenformen vorteilhafter sein.
- Die Grösse der m.F.E. und der relativen m.F.E. ist von der Lagerung (Fixpunktwahl) abhängig.
- Die Grösse der m.F.E. ist von den Annahmen im mathematischen Modell (Massstabsfaktoren und andere unbekannte Parameter, Genauigkeitsannahmen der Instrumente usw.) abhängig.
- Beim Variantenvergleich gilt nicht notwendigerweise, dass kleinere Ellipsen eine bessere Variante bedeuten. Nur wenn das mathematische Modell stimmt, sind die mittleren Fehlerellipsen richtig.
7.10 Graphische Konstruktion von mittleren Fehlerellipsen

Die mittleren Fehlerellipsen sind eine wertvolle Hilfe bei der Beurteilung einer Messanordnung. Sie unterstützen den Ingenieur beim Bewerten eines Netzes. Die einfachen Methoden dieses Abschnittes erlauben eine rasche Schätzung der mittleren Fehlerellipsen aufgrund der Netzgeometrie und der mittleren Fehler a priori der Beobachtungen und können auch bei der Feldrekognoszierung eingesetzt werden.

Die Anwendung dieser Verfahren muss sich grundsätzlich auf die Einzelpunkteinschaltung beschränken.

Natürlich kann man bei mehreren Neupunkten hierarchisch vorgehen, indem man nach freier Wahl Punkt um Punkt einschaltet. Das Ergebnis wird aber ungenau, da zu viele Vernachlässigungen vorgenommen werden müssen.

In solchen Fällen berechnet man besser die Elemente der Fehlerellipsen mit dem Computer. Die Ausgleichungsprogramme berechnen diese Elemente aufgrund der vorgesehenen Messungen und Genauigkeiten des Modells.

Die folgenden Bemerkungen und Sätze aus der Geometrie dienen als Grundlagen.

Bemerkung

Wenn der Punkt P(x,y) mit zwei unabhängigen normalverteilten Beobachtungen bestimmt ist, kann man mit Hilfe der linearisierten Beobachtungsgleichungen und der mittleren Fehler der Beobachtungen zwei unabhängige Konfidenzstreifen um P konstruieren, die zusammen ein Parallelogramm bilden.



Definition

Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Sehnen einer Ellipse, die parallel zu einer Geraden g sind, heisst zu g konjugierter Durchmesser der Ellipse.

Satz 1

Die Durchmesser sind Geraden durch das Zentrum.



Satz 2

Die Berührungspunkte der zwei zu \mathbf{g} parallelen Tangenten der Ellipse sind die Endpunkte des zu \mathbf{g} konjugierten Durchmessers.



Satz 3

Wenn ein Durchmesser d_1 einer Ellipse konjugiert zu einem zweiten Durchmesser d_2 ist, ist d_2 ebenfalls zu d_1 konjugiert. d_1 und d_2 heissen konjugierte Durchmesser.

Satz 4

Die mittlere Fehlerellipse von P berührt die Parallelogrammseiten und die linearisierten Beobachtungsgleichungen bilden im Parallelogramm zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse.



Vorwärtseinschneiden ohne überschüssige Beobachtungen

Die Figur zeigt vorerst ein einfaches **Vorwärtseinschneiden** des Punktes **P** von den Festpunkten **A** und **B** aus. Massstab der Netzanlage z.B. 1:25 000; Massstab der Punktumgebung z.B. 1:1.

Mit Hilfe der Standardabweichungen der zu beobachtenden Azimute (AP) und (BP) rechne man die mittleren Querabweichungen σ_{q_A} und σ_{q_B} und zeichne die Parallelstrahlen zu (AP) und (BP).

Das sind nach früheren Erkenntnissen konjugierte Durchmesser der m.F.E., die damit gezeichnet werden kann.





Einem beliebigen Paar konjugierter Richtungen, z.B. **PC** und **PD** entspricht ein Paar Festpunkte **C** und **D**, deren Abstände \overline{PC} und \overline{PD} man aus den Querabweichungen der entsprechenden Tangenten ermittelt. Das Paar **C**, **D** ist bezüglich der m.F.E. in **P** dem Paar **A**, **B** vollständig äquivalent. Diese Eigenschaft benützen wir im nächsten Abschnitt.



Vorwärtseinschneiden mit 3 äusseren Richtungen

In der Figur entsprechen die Punkte **A**, **B**, **P** und die m.F.E. **F**_{AB} der Figur. Als 3. Punkt tritt **C** dazu. Wir rechnen σ_{q_c} wie früher und zeichnen das entsprechende Band ein. Aus der m.F.E. **F**_{AB} entnehmen wir den Abstand $\sigma_{q_{AB}}$ der Tangente parallel **PC**. Senkrecht zu PC haben wir nun zwei mittlere Fehler, die zu voneinander unabhängigen Messungen, der Messung (**CP**) und der fingierten Messung aus der Kombination (**AP**) und (**BP**), gehören.

Ihre "Addition" geschieht nach dem speziellen (Gauss'schen) Fehlerfortpflanzungsgesetz für unabhängige Messungen, bei dem dann die Gewichte addiert werden (vgl. gewogenes Mittel):

$\mathbf{p}_{\mathbf{m}} = \mathbf{p}_{\mathbf{AB}} + \mathbf{p}_{\mathbf{c}}$	
$\frac{\sigma_o^2}{\sigma_{q_m}^2} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{q_{AB}}^2} + \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{q_c}^2}$	
	Beispiel:
$\sigma_{q_m}^2 = \frac{\sigma_{q_{AB}}^2 \cdot \sigma_{q_c}^2}{\sigma^2 + \sigma^2}$	
$O_{q_{AB}} + O_{q_c}$	$\sigma_{q_{AB}} = 2.3 \text{cm}$; $\sigma_{q_c} = 1.9 \text{cm}$
	$\sigma_{q_m}=1.45<\sigma_{q_c}$, $\sigma_{q_{AB}}$

Man beachte, dass die konjugierte Richtung zu **PC** unverändert bleibt, somit kann man die neue m.F.E. \mathbf{F}_{ABC} so zeichnen, wie wenn die beiden konjugierten Richtungen mit ihren Querabweichungen aus zwei unabhängigen Messungen entstanden wären.

Rückwärtseinschneiden

Man hat vorerst zwischen Richtungs- und Winkelbeobachtungen zu unterscheiden.

Einfacher ist der Fall der Winkelbeobachtungen. Mit

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c}} \cdot \frac{\gamma}{\rho} \qquad \text{wird}$$
$$\mathbf{\sigma}_{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c}} \frac{\mathbf{\sigma}_{\gamma}}{\rho}$$

Nach der Figur kann aus jeder Winkelmessung die Breite des sogenannten mittleren Querabweichungsbandes berechnet werden. Für die Richtung dieses (Tangenten-) Bandes ist in der Figur die bekannte einfache Konstruktion angegeben.



Die Kombination der einzelnen Bänder zu Ellipsen und deren "Addition" ergibt sich aus dem vorangehenden Abschnitt.

Für **Richtungsbeobachtungen** lässt sich **keine** einfache strenge graphische Lösung angeben.

Kombiniertes Einschneiden

Jede Richtung (innere und äussere) führt auf ein mittleres Querabweichungsband. Die sukzessive "Addition" dieser Fehlerellipsen führt auf die resultierende Fehlerellipse. Die Fehlerbänder von Distanzmessungen sind entsprechend senkrecht zu den Verbindungslinien zu zeichnen und analog auszuwerten.

Literaturverzeichnis

Bencini, P.:	Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geo- desia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
Conzett, R.:	Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
Dupraz, H.:	Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
Gotthardt, E.:	Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
Grossmann, W.:	Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
Höpcke, W.:	Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
Howald, P.:	Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
Koch, K.R.:	Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Model- len, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
Pelzer, H.:	Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
Wolf, H.:	Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968
	Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwen- dung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

8. Die Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis

8.1 Einleitung

8.1.1 Allgemeines

Die Ausgleichungsrechnung wird seit zwei Jahrhunderten in der Geodäsie benutzt. Der enorme Rechenaufwand für die Auflösung von grossen Normalgleichungssystemen hat aber lange Zeit die Anwendung für grössere Arbeiten eingeschränkt. In den sechziger Jahren entstanden aber die ersten Ausgleichungsprogramme, welche die aufwendige Rechenarbeit übernahmen, so dass jetzt Netze mit mehreren Hunderten oder Tausenden von Neupunkten und Tausenden von Messungen in kurzer Zeit ausgeglichen werden können. Im Ausgleichungsprogramm LTOP können z.B. mehr als 1000 Lageneupunkte resp. 1000 Höhenneupunkte mit Tausenden von Messungen berechnet werden. Die meisten kantonalen Vermessungsämter und private Geometerbüros, die mit Ausgleichungsproblemen beschäftigt sind, sei es für die Fixpunktebestimmung oder für spezielle Absteckungsnetze, verfügen heute über solche Programme.

8.1.2 Ablauf einer gewöhnlichen geodätischen Arbeit in der Praxis

Eine Punktbestimmung wird in folgende Schritte unterteilt:

- Vorbereitung
- Netzaufbau (Plan der Messungen) : Büroentwurf
 - Rekognoszierung
 - definitiver Netzentwurf
- Versicherung der Neupunkte und Kontrolle der bestehenden Punkte
- Messung
- Auswertung: Berechnung der Näherungskoordinaten
 - freie Ausgleichung
 - Beurteilung der Messungen
 - Beurteilung der Anschlusspunkte
 - definitive Ausgleichung
- Aktenanfertigung

Alle diese Etappen müssen mit der gleichen Sorgfalt ausgeführt werden, wenn die Triangulation als Ganzes gut werden und gut bleiben soll.

In der Folge werden vor allem die Planung und die Beurteilung der Resultate besprochen.

8.2 Die Planung geodätischer Messanordnungen

8.2.1 Eigenschaften

Ein Triangulationsnetz wird durch eine geeignete Kombination von Satellitenbeobachtungen, Richtungs-, Distanz- und Höhenwinkelmessungen gebildet, mit dem Ziel, Koordinaten von Punkten neu zu bestimmen (oder zu kontrollieren). Das Netz muss so konzipiert sein, dass die Anforderungen bezüglich **Nachbargenauigkeit, Zuverlässigkeit** und **Genauigkeit** erfüllt sind.

Die erwähnten Anforderungen sind in den Vorschriften mehr oder weniger explizit formuliert.

In der Schweiz ist die Erstellung der Triangulation (LFP 1-2) seit Jahren abgeschlossen. Im Rahmen der Erneuerung oder der Nachführung werden kleinere oder grössere Triangulationsnetze neu gemessen. In den 90er Jahren wurde ein neuer Referenzrahmen für die Landesvermessung (LV95) bestimmt. Dank hochgenauer Satellitenbeobachtungen ist eine absolute Genauigkeit im Zentimeterbereich erzielt worden. In den nächsten Jahren wird man sukzessiv die ganze Vermessung der Schweiz im neuen Rahmen integrieren.

In jedem Fall ist der Anschluss an die bestehende Triangulation zu gewährleisten. Die Anschlusspunkte können nicht als fehlerlos betrachtet werden und weisen oft lokale Zwänge auf, die manchmal nicht eliminiert werden können. Diesem Umstand muss beim Netzaufbau Rechnung getragen werden. Hier wird nämlich sehr grosses Gewicht auf die Nachbargenauigkeit gelegt.

Der erste Entwurf einer Messanordnung erfolgt intuitiv aus der Erfahrung oder aus stark vereinfachten Entwurfskriterien.

8.2.2 Praktische Kriterien für den Netzaufbau

a) Lagenetz

In der Regel soll ein Punkt aus mindestens 6 Elementen bestimmt werden. Direkte Verbindungen zwischen den Nachbarpunkten sind anzustreben.



Wo direkte Verbindungen zwischen benachbarten Punkten nicht möglich sind, sollen sie indirekt hergestellt werden. Dazu dienen:









Satellitenbeobachtungen, die gleichzeitig ausgeführt werden und die gleichen Satellitensignale empfangen, bieten ebenfalls eine ausgezeichnete Verbindung der Stationspunkte und gewährleisten dadurch eine gute relative Genauigkeit.

Distanzpaare

In diesen Beispielen ist ersichtlich, dass diese Verbindungen die Nachbargenauigkeit zwischen dem Neupunkt 104 und dem nächst liegenden Triangulationspunkt (TP) 105 gewährleisten. Sollte zwischen TP 105 und den übrigen Anschlusspunkten ein Zwang von wenigen cm auftreten, so wird mit dieser Netzkonfiguration dafür gesorgt, dass dieser Zwang verteilt wird.

Bei Verlegungen und Punktgruppen (Hochzielpunkt/Bodenpunkt, Zentrum/Exzentrum, etc.) muss die Beziehung in jedem Falle erstellt und unabhängig kontrolliert werden.

b) Höhennetz

Die trigonometrische Höhenübertragung soll auf direktem Weg mit möglichst kurzen Visuren erfolgen. In der Regel soll die Höhe eines TP aus mindestens drei Höhendifferenzen bestimmt werden. Die Höhenwinkel sollen gegenseitig gemessen werden; einseitige Beobachtungen sind nur für Punkte zulässig, auf denen nicht stationiert werden kann. Höhenwinkel über 2 km sollen nur in Ausnahmefällen gemessen werden. Auch sollen bodennahe Visuren wegen der Probleme der Refraktion möglichst vermieden werden. Satellitenbeobachtungen sind nur unter Berücksichtigung der Geoidundulation zu verwenden. Das Höhennetz ist im Allgemeinen vom Lagenetz unabhängig. Triangulationspunkte in der Nähe von Höhenfixpunkten sollen mit Nivellement bestimmt werden.

8.2.3 Rekognoszierung

Ziel der Rekognoszierung ist es, die Standorte der Neupunkte unter Berücksichtigung des Büroentwurfes festzulegen und die möglichen Visuren festzuhalten. Dabei ist nach folgenden Kriterien vorzugehen:

- Die TP müssen langfristig dauerhaft versichert werden. Wo immer möglich, müssen die Punkte im öffentlichen Areal liegen.
- Die Benützbarkeit soll für die nachfolgenden Vermessungen gewährleistet sein (Anschlussmöglichkeiten für Polygonzüge).
- Es sollen die Visuren zu möglichst allen benachbarten TP frei sein oder der freie Horizont muss Satellitenbeobachtungen mit guter Konfiguration ermöglichen.

Gleichzeitig wird der Zustand der bestehenden Punkte beurteilt.

Für jeden TP ist ein Protokoll auszufüllen, welches eine Lageskizze enthält und alle möglichen Visuren festhält. Dazu gehören auch Angaben über die zukünftige Punktversicherung, die Eigentumsverhältnisse, Ausholzarbeiten, Zufahrtsmöglichkeiten, etc.

8.2.4 Definitiver Netzentwurf

Auf Grund der Rekognoszierung und der Kriterien zum Netzaufbau wird der definitive Netzentwurf für das Lage- und das Höhennetz erstellt. Er enthält alle zu messenden Elemente und dokumentiert die vorgesehene Lagerung.

Es werden nur die nach den erwähnten Kriterien notwendigen Elemente und nicht alle möglichen Visuren dargestellt. Diese Auswahl ist sehr wichtig und muss sehr sorgfältig überlegt und beurteilt werden.

8.2.5 Lagerung des Netzes

Wenn das neue Netz als Bestandteil der Landestriangulation betrachtet wird, ist zu beachten, dass die neubestimmten Punkte mit allen bestehenden Triangulationspunkten der unmittelbaren Umgebung verbunden werden. Die Koordinaten dieser Triangulationspunkte sind bekannt und können als konstante Grössen in der Ausgleichung eingeführt werden. Wenn die bestehenden Triangulationspunkte fehlerfrei oder näherungsweise fehlerfrei sind, stimmt das mathematische Modell der Ausgleichung und die berechneten Koordinaten werden optimal in das bestehende Netz integriert.

Oft weisen die Anschlusspunkte Koordinatenfehler auf. Die Ursachen können verschieden sein:

- Rutschungen
- ungenaue Messungen
- ungenaue Berechnungen
- usw.

Je nach Fehlerursache, Betrag des Fehlers oder Ziele der Arbeit, muss man entscheiden, ob die Koordinaten des ungenauen Anschlusspunktes neu berechnet werden sollen oder ob man die lokalen Zwänge in Kauf nimmt und die Koordinaten trotzdem als Konstanten betrachtet. Diesem Umstand muss beim Netzaufbau Rechnung getragen werden, damit trotz allfälliger Zwänge die Nachbargenauigkeit nicht zu stark beeinträchtigt wird.

Die Art, mit welcher die Beziehung zwischen Koordinatensystem und Messungen hergestellt ist, wird Lagerung des Netzes genannt.

Man unterscheidet verschiedene Arten von Lagerungen:

a) Echte freie Netze

Alle Punkte des Netzes sind unbekannt. Die Messungen erlauben daher nicht, Koordinaten zu berechnen. Die Normalgleichungsmatrix ist singulär. Eine Lösung solcher Probleme ist dank Erweiterungen in der Algebra singulärer Matrizen möglich. Man sucht z.B. die Lösung mit minimaler Varianz der Unbekannten. Einzelheiten können hier nicht behandelt werden.

b) Zwangsfreie Netze

In der Schweiz spricht man auch von freien Netzen, Netzen mit minimaler Lagerung oder freier Ausgleichung. Die Eigenschaft der zwangsfreien Netze ist die minimale Verknüpfung zwischen Messungen und Koordinatensystem, so dass Koordinaten eindeutig berechnet werden können, aber die Koordinaten der Fixpunkte keinen Einfluss auf die Verbesserungen, auf die Varianzschätzung und auf die normierten Verbesserungen w_i haben.

Mit Hilfe von zwangsfreien Ausgleichungen kann man den Einfluss der Messfehler und der Zwänge trennen. Typische Fälle von zwangsfreien Netzen:



Reines Richtungsnetz, Lagerung mit zwei Fixpunkten



Netz mit Richtungen und Distanzen, Lagerung mit zwei Fixpunkten, eine Massstabsunbekannte muss eingeführt werden.

Andere Varianten sind ein Fixpunkt und ein festgehaltenes Azimut (wenn auch Distanzen gemessen wurden) und viele andere Kombinationen, je nach Bedarf.

c) Gezwängte Netze

Die Koordinaten der bekannten Punkte werden als fehlerfrei angenommen. Sie sind Konstanten in der Ausgleichung.

Bei stimmendem Modell erhält man dadurch die gewünschten Koordinaten der Neupunkte mit realistischen Fehlerellipsen usw.

Falls die Fixpunkte ungenau sind, entstehen Zwänge, die sich auf die ausgeglichenen Messungen, Verbesserungen und Varianzschätzungen auswirken. Man kann nicht mehr gut unterscheiden zwischen Koordinaten- und Messfehlern. Manchmal verwendet man die Einzwängung als Verfahren, um Fixpunktfehler über das ganze Netz zu verteilen. Heute zieht man in der Regel vor, diese Fehler in einem zwangsfreien Netz zu bestimmen, um sie nachträglich mit Interpolationsverfahren zu verteilen [5].

d) Koordinatenbeobachtungen

Mit Hilfe fingierter Koordinatenbeobachtungen (siehe direkt beobachtete Parameter, Kap. 6) kann man eine gewisse Unsicherheit der Koordinaten der Anschlusspunkte im stochastischen Modell berücksichtigen. Dadurch kann ein stetiger Übergang zwischen freien und gezwängten Netzen geschaffen werden.

8.3 Beurteilung der geplanten Messanordnung und der erwarteten Ergebnisse

8.3.1 Allgemeines

Ziel der Ausgleichung ist es, die Koordinaten und Höhen der Punkte zu erhalten und den Nachweis zu erbringen, dass die gestellten Anforderungen bezüglich Genauigkeit und Zuverlässigkeit erfüllt sind. Die Genauigkeit wird mit Indikatoren wie mittleren Fehlern, mittleren Fehlerellipsen, Standardabweichungen, Varianzen etc. überprüft. Die Zuverlässigkeit hat erst 1968 mit der Anwendung der Theorie von Baarda [1] in geodätischen Netzen einen mathematischen Ausdruck gefunden.

8.3.2 Präanalyse der Genauigkeit

Nach der Rekognoszierung im Gelände weiss man, welche Messungen möglich sind. Daraus kann man einen ersten Netzentwurf skizzieren und die bekannten und zu bestimmenden Punkte sowie die vorgesehenen Messungen in einem Plan zeichnen.

Um Fehlerellipsen für die gesuchten Punkte zu berechnen, benötigt man nur die Kofaktorenmatrix Q_{xx} der unbekannten Parameter (Koordinaten) und die frei gewählte Konstante σ_0 .

Die Q_{xx} -Matrix kann vor den eigentlichen Messungen berechnet werden. Man benötigt nur

- die Näherungskoordinaten der Punkte
- die vorgesehenen Messungen mit ihrer Genauigkeit

Daraus kann man die Matrix der Verbesserungsgleichungen **A** und die Gewichtsmatrix **P** bilden und mit der bekannten Beziehung:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

können wir die Varianzen der unbekannten Parameter, die mittleren Fehlerellipsen sowie relative mittlere Fehlerellipsen bestimmen.

Eine solche Ausgleichung ohne Absolutglieder (für welche man keine Messwerte benötigt) nennt man Präanalyse oder Ausgleichung a priori. Sie erlaubt die Überprüfung einer vorgesehenen Messanordnung, insbesondere kann man damit kontrollieren, ob die zu bestimmenden Punkte genügend genau sein werden.

8.3.3 Präanalyse der Zuverlässigkeit

a) Einfache Zuverlässigkeitsindikatoren

Ebenfalls vor der Messung kann die Zuverlässigkeit der geplanten Messanordnung geprüft werden. Man kann in der Präanalyse kontrollieren, wie gut die Überbestimmung des Netzes ist und auch wie leicht allfällige grobe Messfehler entdeckt werden können.

Im Folgenden wird das Problem nur angedeutet, da die Zuverlässigkeitstheorie im zweiten Teil der Vorlesung behandelt wird.

Die einfachste Grösse, die berechnet werden kann, um die Zuverlässigkeit der Messanordnung zu überprüfen, ist der lokale Zuverlässigkeitsindikator

$$\mathbf{z}_{i} = \frac{\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}}{\mathbf{q}_{11}^{(ii)}}$$

der für jede Beobachtung als Quotient zwischen den entsprechenden Diagonalelementen der Kofaktorenmatrizen der Verbesserungen und der Beobachtungen berechnet werden kann.

Neben dem lokalen Zuverlässigkeitsindikator verwendet man die Indikatoren der inneren Zuverlässigkeit, die für jede Messung angeben, wie klein ein grober Messfehler sein darf, damit man ihn noch (genügend wahrscheinlich) findet.

Die Folgen von unentdeckten groben Messfehlern auf die gesuchten Parameter sind ebenfalls von Bedeutung. Sie werden von den Indikatoren der äusseren Zuverlässigkeit angegeben.

Beide Indikatoren werden im Kapitel über die Zuverlässigkeitstheorie beschrieben. Trotz ihrer grossen praktischen Bedeutung werden sie daher hier nicht weiter behandelt.

 z_i ist eine dimensionslose Zahl, deren Wert zwischen 0 und 1 resp. 0 und 100% liegt. Die Summe aller z_i entspricht gerade der Anzahl der Freiheitsgrade (oder Überbestimmungen) des Netzes. Die einzelnen Werte geben deshalb an, wie sich die Überbestimmungen auf die Beobachtungen verteilen.

Die z_i hängen im Wesentlichen von der Netzgeometrie und der Gewichtswahl ab. Sie lassen sich deshalb schon vor den Messungen, wie die Fehlerellipsen, auf Grund des Netzentwurfes und der mittleren Fehler a priori an den Beobachtungen berechnen.

b) Interpretation der Indikatoren

Die Indikatoren zi geben eine gute Information über die Zuverlässigkeit des Netzes.

Das lokale Zuverlässigkeitsmass z_i kann für Netze ohne besondere Anforderungen z.B. wie folgt interpretiert werden:

Zi	=	0%	die Messung ist nicht kontrolliert
Zi	=	25%	die Messung ist genügend kontrolliert
Zi	=	100%	die Messung ist perfekt kontrolliert, wie z.B. eine
			Beobachtung zwischen zwei Festpunkten.

In einem guten Triangulationsnetz sollten die z_i zwischen ca. 25% und ca. 60% liegen. Häufigere Werte über 70-80% können bedeuten, dass das Netz zu stark überbestimmt ist und noch optimiert werden sollte. Werte unter 25% können nur in Ausnahmefällen akzeptiert werden.

c) Beurteilung des Netzaufbaus

Es geht also darum, zuerst die ausser Toleranz liegenden Werte zu suchen und dann gegebenenfalls die nötigen Massnahmen zu treffen. Die unbefriedigenden Werte weisen auf eine lokale Netzschwäche hin, z.B.:

- Richtung Bodenpunkt Hochzielpunkt nicht genügend kontrolliert
- Exzentrumsbeziehung nicht gegenseitig gemessen
- Distanz durch parallaktischen Winkel zu schwach kontrolliert
- Messung im Netz zu wenig kontrolliert
- Netz mit polygonalem Charakter
- Kurze Visur durch lange schwach oder ungenügend kontrolliert

Die Ursache für toleranzüberschreitende Werte kann in einer ungeeigneten Wahl der Standardabweichung der Messungen liegen. Im Normalfall wird aber auf Netzschwächen hingedeutet, die allenfalls Ergänzungsmessungen erfordern. Zur Behebung der oben erwähnten Schwächen können folgende Massnahmen getroffen werden:

- einen Hilfspunkt in der Nähe des BP wählen und ähnliche Messungen wie auf dem BP wiederholen
- Exzentrumsbeziehungen gegenseitig messen
- Parallaktische Winkel nochmals unabhängig von der Satzmessung messen und separat in die Ausgleichung einführen
- übergreifende Distanzen oder Richtungen messen
- zusätzliche mögliche Messungen einführen
- Hilfspunkt zur Überbrückung einer Netzschwäche einführen
- in polygonartigen Netzen Distanzen hin und zurück messen

Um solche nachträgliche Massnahmen vermeiden zu können, sollte man eine a priori Berechnung durchführen, d.h. eine Berechnung gemäss Netzentwurf ohne Messungen. Eine solche wird für Neutriangulationsnetze verlangt, für kleinere Netze ist sie aber meist nicht notwendig. Wenn der Netzentwurf konsequent nach den bisher bekannten Kriterien erstellt ist, werden die Toleranzwerte meistens eingehalten.

8.3.4 Voraussetzung für die Anwendung der Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsindikatoren

Die Indikatoren geben nur dann eine richtige Aussage, wenn das zugrundeliegende stochastische Modell realistisch ist, d.h. wenn die Wahl der Standardabweichungen a priori für die Messungen den tatsächlichen Verhältnissen angepasst ist. Unrealistische Annahmen für eine Messung oder eine Messgruppe können die Beurteilung verfälschen. Wird z.B. eine Distanz als Hinmessung mit einer grösseren Standardabweichung als dem der Rückmessung eingeführt, so kann die Rückmessung schwach oder nicht kontrolliert sein.

8.4 Beurteilung der Ergebnisse (Messungen und Berechnungen)

8.4.1 Verfahren

Die Beurteilung von Triangulationsergebnissen muss folgendes umfassen:

- Prüfung der Genauigkeit und Zuverlässigkeit des gemessenen Netzes
- Entdeckung allfälliger Messfehler
- Lokalisierung allfälliger Netzzwänge

Genauigkeit und Zuverlässigkeit müssen nach erfolgten Messungen und abgeschlossener Fehlersuche überprüft werden. Dies unabhängig von den allfälligen Präanalysen, da die definitive Messanordnung wahrscheinlich leicht von der geplanten abweichen wird.

Die **Genauigkeit** kann mit Hilfe der mittleren Fehlerellipsen a priori (aus σ_0) oder, wenn Gründe vorliegen, mit den mittleren Fehlerellipsen a posteriori (aus s_0) beurteilt werden.

Die **Zuverlässigkeit** kann z.B. mit Hilfe der Indikatoren z_i anhand der definitiven Berechnung, d.h. bei der definitiven Netzlagerung beurteilt werden. Die Indikatoren der inneren und äusseren Zuverlässigkeit, die in der Praxis ebenfalls verwendet werden, können hier nur erwähnt werden (siehe später Zuverlässigkeitstheorie).

Die **Beurteilung der Messung** erfolgt mit Hilfe der Testgrösse w_i und des Indikators g_i aus der zwangsfreien Ausgleichung.

Die allgemeinen Modelleigenschaften können mit dem Modelltest (Test auf F-Verteilung) der Grösse

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{s_o^2}}{\sigma_o^2}$$

geprüft werden.

Die **Netzzwänge** lassen sich mittels Verschiebungsvektoren der TP aus der freien Ausgleichung für kleine Netze oder aus einer Helmert-Transformation für grössere Netze beurteilen.

8.4.2 Testgrössen

Die standardisierte Verbesserung \mathbf{w}_i , welche für jede Beobachtung gerechnet wird, beschreibt das Verhältnis zwischen der Verbesserung und ihrem mittleren Fehler. \mathbf{w}_i ist eine dimensionslose Zahl.

$$\mathbf{w}_{i} = \frac{\mathbf{v}_{i}}{\sigma_{vi}}$$

Im Zähler steht die betreffende Verbesserung, im Nenner deren Standardabweichung. Für die Triangulation und die Basispunkte wird der kritische Grenzwert in der Regel auf 3.0 - 3.5 gesetzt, was beim Freiheitsgrad 1 einem Irrtumsrisiko 1. Art von weniger als 1% entspricht und mit der bisherigen Praxis übereinstimmen dürfte.

Die vermutliche Grösse eines groben Fehlers g_i ist der Quotient aus Verbesserung und lokalem Zuverlässigkeitsmass.

$$\mathbf{g}_{i} = \frac{-\mathbf{v}_{i}}{\mathbf{z}_{i}}$$

Er gibt mit entgegengesetztem Vorzeichen an, wie gross ein grober Fehler an der betreffenden Beobachtung sein müsste, um die auftretenden Widersprüche zu erklären. Dieser Indikator wird für Distanzen, Satellitenbeobachtungen und Höhendifferenzen in mm, für die Richtungen in Sekunden angegeben.

Die beiden Testgrössen geben einen Hinweis über die Qualität der Messungen und können somit nur a posteriori berechnet werden.

Die standardisierte Verbesserung w_i kann nach Festlegung der Testgrenze (z.B. 3.0) wie folgt interpretiert werden:

 $w_i < 3.0$ die Messung wird als modellkonform betrachtet

 $3.0 < w_i$ ein Fehler in der Messung ist zu befürchten

Die vermutliche Grösse eines groben Fehlers g_i gibt nur einen Hinweis über die Grössenordnung und das Vorzeichen eines möglichen Fehlers.

Als ersten Schritt nach der Erfassung der Daten wird empfohlen, eine oder mehrere Berechnungen mit allen Punkten als Festpunkte durchzuführen. Dadurch können ganz grobe Fehler, wie Identifikations-, Meter- oder Gonfehler besser entdeckt und eliminiert werden. Dazu ist es vorteilhaft, möglichst gute Näherungskoordinaten zu verwenden.

8.4.3 Vorgehen bei der Beurteilung der Messungen

Da allfällige Zwänge zwischen den Anschlusspunkten die normierten Verbesserungen w_i stark beeinflussen können, soll die Beurteilung der Messungen in einem freien oder minimal gelagerten Netz erfolgen.

Ein Messfehler verursacht auch grosse w_i auf den Nachbarmessungen. Im Allgemeinen wird der Fehler bei der Messung auftauchen, die das grösste w_i erhält, d.h. man wird zuerst die Messung mit dem grössten w_i untersuchen.

Falls kein Fehler entdeckt werden konnte, schreitet man zum zweitgrössten w_i usw. Bei grösseren Netzen ist es empfehlenswert, den Wert der w_i graphisch im Netzplan aufzutragen. So können die lokal zusammenhängenden w_i besser entdeckt werden. Bei der Höhenausgleichung sollten die Höhendifferenzen (Hin- und Rückmessung) nicht mehr gemittelt werden, um realistische Zuverlässigkeitsindikatoren zu erhalten. Die Verbesserungen sowie die entsprechenden Indikatoren werden für die Hin- und die Rückmessungen separat gerechnet. Früher wurden die Mittelwerte ausgeglichen, wodurch die Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse grösstenteils eliminiert werden konnten. Beim jetzigen Vorgehen wirken also diese Einflüsse voll auf die Messungen und können grössere w_i verursachen, auch wenn keine eigentlichen Messfehler vorhanden sind. Um diesen Effekt zu mindern, sollte der mittlere Fehler a priori für Höhenwinkel sowie die Unsicherheit am Refraktionskoeffizienten erhöht werden.

Die neuen Standardwerte der Landestopographie für gewöhnliche Höhennetze sind die folgenden:

 $\sigma_{H\ddot{o}henwinkel} = 10cc$ $\sigma_{Refraktion} = 0.06$

Dies vor allem bei flachen oder knapp über den Boden führenden Visuren oder in Berggebieten, wo Lotstörungen vorkommen.

8.4.4 Beurteilung der Netzzwänge

Nach Abschluss der freien Ausgleichung soll die Qualität der Anschlusspunkte beurteilt werden (siehe Kap. 8.1.2). Dies erfolgt am besten anhand einer Helmerttransformation, bei der die Koordinaten aus der freien Netzausgleichung als Lokalkoordinaten in das Globalsystem der Anschlusspunkte transformiert werden [5]. Als Passpunkte können wenige Punkte verwendet werden, welche aber als zuverlässig betrachtet werden können.

In einem Vektorplan werden die Differenzen zwischen den bisherigen und den transformierten Koordinaten dargestellt. Für kleinere Netze können auch die Vektoren aus der freien Netzausgleichung direkt aufgezeichnet werden. Unter Berücksichtigung der topographischen Verhältnisse, der alten und neuen Netzpläne und allfälliger weiterer Akten, sowie aus der Erfahrung der Nachführung im betreffenden Gebiet soll der Vektorplan beurteilt werden. Unter dem Gesichtspunkt der Nachbargenauigkeit sind vor allem die Vektordifferenzen zwischen benachbarten Punkten ausschlaggebend.

Auf Grund dieser Beurteilung werden die Festpunkte für die definitive Lageberechnung gewählt. Kann ein Anschlusspunkt nicht als Festpunkt eingeführt werden, so soll er als Neupunkt behandelt werden, sofern er geometrisch genügend bestimmt ist. Nach der definitiven Ausgleichung dürfen diese Koordinaten allerdings nur dann übernommen werden, wenn sie die Kriterien für die Nachbargenauigkeit und Zuverlässigkeit erfüllen und der Zustand der Versicherung regelkonform ist. Liegt keine genügende geometrische Bestimmung vor, so werden diese Punkte als Festpunkte eingeführt und der mittlere Fehler a priori für die entsprechenden Beobachtungen stark erhöht. In Ausgleichungsmodellen, bei denen die Koordinaten der Festpunkte als Beobachtungen eingeführt werden können, sollen bei zwängenden Punkten die mittleren Fehler a priori der Koordinaten entsprechend erhöht werden.

Falls keine freie Ausgleichung durchgeführt wurde oder möglich ist, kann die Beurteilung der Netzzwänge (und der Messungen) mit dem herkömmlichen Auftrag der Verbesserungen und allenfalls den fehlerzeigenden Figuren auf dem Netzplan (siehe [4]) erfolgen.

Literaturverzeichnis

- [1] Baarda W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, 2/5, 1986.
- [2] Gubler E. : Statistische Tests und andere Ergänzungen in LTOP. Rechenzentrum L+T, Zwischenbericht Nr. 16, Januar 1986.
- [3] RAV: Projekt 700.5: Fixpunkte, Schlussbericht 1986 (E. Gubler, H. Dupraz, R. Ammann).
- [4] Triangulation: Netzaufbau und Resultatbeurteilung. H. Chablais. Weiterbildungskurs für Geometerkandidaten, ETHZ, März 1987.
- [5] Carosio A.: Robuste Ähnlichkeitstransformation und Interpolation nach dem arithmetischen Mittel, VPK 6/1982.
- [6] Chablais H.: Ausgleichung geodätischer Netze in der Praxis. Referat im Rahmen der Vorlesung "Informatik im Vermessungswesen", 28.6.1988.

9. Die bedingte Ausgleichung

9.1 Das stochastische Modell

Die stochastischen Eigenschaften der Beobachtungen wurden für die vermittelnde Ausgleichung eingehend beschrieben. Alle Aussagen behalten auch bei den anderen Ausgleichungsformen ihre Gültigkeit und werden hier nicht wiederholt.

Die Informationen des stochastischen Modells werden für die Berechnung in den Gewichts-, Kofaktoren- oder Kovarianz-Matrizen zusammengefasst.

9.2 Das funktionale Modell der bedingten Ausgleichung

Das funktionale Modell einer Ausgleichung kann in verschiedenen Formen dargestellt werden. Es stützt sich auf die vorhandenen theoretischen Kenntnisse über das Problem (geometrische Beziehungen, physikalische Gesetze usw.). So kann man für eine Reihe beobachteter Grössen Beziehungen formulieren, die die Beobachtungen erfüllen müssten, wenn sie fehlerfrei wären. Um diese Beziehungen zu formulieren, werden manchmal zusätzliche Parameter eingeführt (unbekannte Grössen), die die Aufstellung der Modellgleichungen erleichtern.

Wenn man die Bedeutung der gemessenen Grössen kennt, kann man im Allgemeinen eine Reihe von Gleichungen schreiben, die die Beobachtungen und die unbekannten Parameter erfüllen sollten (Kap. 4.4):

$$F_{j}\left(\underline{L}_{1}, \underline{L}_{2}, \dots, \underline{L}_{n}; \underline{X}_{1}, \underline{X}_{2}, \dots, \underline{X}_{u}\right) = 0$$
(1)

mit **j** = 1, 2, ... **m**

wobei \underline{L}_i Erwartungswerte ("wahre Werte") der Beobachtungen sind,

 \underline{X}_i die Erwartungswerte ("wahre Werte") der unbekannten Parameter sind.

Man spricht von einer bedingten Ausgleichung, wenn alle Gleichungen des funktionalen Modells nur Beobachtungen enthalten, das heisst, wenn keine zusätzlichen unbekannten Parameter benötigt werden:

$$F_{j}\left(\underline{L}_{1}, \underline{L}_{2}, \dots, \underline{L}_{n}\right) = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, r \qquad (2)$$

Die r Gleichungen nennt man Bedingungsgleichungen.

Auch diese Beziehungen beschreiben die Eigenschaften eines bestimmten funktionalen Modells, entsprechend den Beobachtungsgleichungen der vermittelnden Ausgleichung.

Setzt man in die formulierten Bedingungen (2) an Stelle der Erwartungswerte \underline{L}_i die realisierten Beobachtungswerte l_i ein, so sind die Bedingungen im Allgemeinen nicht erfüllt, sondern führen zu Widersprüchen w_i:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{j}}(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2 \dots \mathbf{l}_n) = \mathbf{w}_{\mathbf{j}}$$

Damit man ein widerspruchsfreies System erhält, müssen diese Widersprüche durch Korrekturen an den Beobachtungswerten beseitigt werden. Diese Korrekturen heissen wie früher Verbesserungen.

Jede überschüssige Messung führt auf eine Bedingung. Es gibt nur soviel unabhängige Bedingungen, wie es überschüssige Messungen gibt. Das Ausgleichungsprinzip wird ähnlich wie bei der vermittelnden Ausgleichung formuliert.

Man sucht ausgeglichene Beobachtungen

$$\overline{\mathbf{l}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{l}_{\mathbf{i}} + \mathbf{v}_{\mathbf{i}}$$

die die Bedingungsgleichungen widerspruchsfrei erfüllen.

$$F_{j}\left(\overline{I}_{1}, \overline{I}_{2} \dots \overline{I}_{i} \dots \overline{I}_{n}\right) = 0 \quad ; \quad j = 1 \dots r$$
(3)

Wenn die Anzahl \mathbf{r} der Bedingungsgleichungen kleiner als die Anzahl \mathbf{n} der Beobachtungen ist, sind unendlich viele Lösungen für die Verbesserungen zu erwarten, die die Bedingungsgleichungen (3) erfüllen.

Wir suchen unter diesen beliebig vielen möglichen Lösungen diejenige, die **[pvv]** zu einem Minimum macht.

Die Verbesserungsbedingungsgleichungen

Wie in der vermittelnden Ausgleichung beim Übergang von den Beobachtungsgleichungen zu den Verbesserungsgleichungen werden jetzt die Bedingungsgleichungen linearisiert. (4) zeigt eine Taylorentwicklung der Bedingungsgleichungen, bei der die ausgeglichenen Beobachtungen aus den gemessenen Werten entwickelt werden:

$$F_{j}(\hat{l}_{1},\hat{l}_{2},...,\hat{l}_{n}) = F_{j}(l_{1}+v_{1}, l_{2}+v_{2},...,l_{n}+v_{n}) =$$

$$F_{j}(l_{1},l_{2},...,l_{n}) + \frac{\partial F_{j}}{\partial \hat{l}_{1}} | \cdot v_{1} + \frac{\partial F_{j}}{\partial \hat{l}_{2}} | \cdot v_{2} + ... \frac{\partial F_{j}}{\partial \hat{l}_{n}} - | \cdot v_{n} + Gl. h. 0.= 0$$
(4)

Mit den Abkürzungen

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{1}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_{k}}\Big|_{\mathbf{I}} = \mathbf{a}_{k}; \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{2}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_{i}}\Big|_{\mathbf{I}} = \mathbf{b}_{i}; \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{r}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_{n}}\Big|_{\mathbf{I}} = \mathbf{r}_{n}$$
(5)

entstehen bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung die in den Verbesserungen v linearen Beziehungen

Mit Matrizen geschrieben, heisst das:

9.3 Minima und Maxima mit Nebenbedingungen (Verfahren von Lagrange)

Aus der Differentialrechnung ist das Extremumproblem mit Nebenbedingungen bekannt. Gegeben ist eine Funktion von mehreren Variablen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n)$$

Gesucht sind Minima (oder Maxima) dieser Funktion unter der einschränkenden Bedingung, dass

$$G_{1}(x_{1}, x_{2}, \dots x_{n}) = 0$$

$$G_{2}(x_{1}, x_{2}, \dots x_{n}) = 0$$

....

$$G_{r}(x_{1}, x_{2}, \dots x_{n}) = 0$$

ist.

Satz

Minima und Maxima von F können mit dem folgenden Verfahren von Lagrange bestimmt werden.

Die Lösung kann in drei Schritten erreicht werden:

- a) Es werden r neue zusätzliche Variablen (k₁, k₂, ..., k_r) als Unbekannte eingeführt, die Korrelaten genannt werden.
- b) Man bildet aus $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ und aus allen $G_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine neue Funktion Ω , die man Prinzipalfunktion nennt:

$$\Omega = F(x_1, x_2, ...) - 2k_1G_1(x_1, x_2, ...) - 2k_2G_2(x_1, x_2, ...).$$

c) Ein Gleichungssystem wird aus der Prinzipalfunktion hergeleitet, indem man die partiellen Ableitungen der Funktion Ω nach allen Variablen (inkl. Korrelaten) gleich Null setzt.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_1} = 0$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_2} = 0$$

•

Nebenbedingungen

9.4 Die Korrelatennormalgleichungen

Wir haben unter 9.2 festgestellt, dass derjenige V-Vektor zu suchen ist, der $V^{T}PV$ zu einem Minimum macht, wobei die Verbesserungsbedingungsgleichungen als Nebenbedingungen einzuhalten sind.

Nach dem Lagrange'schen Verfahren bildet man somit die folgende Prinzipalfunktion:

$$\Omega = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V} - \underbrace{\mathbf{2} \mathbf{K}_{1,\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{B} \mathbf{V}_{\mathrm{r},1} \mathbf{W} \right)}_{1.1}; \ \mathbf{K}^{\mathrm{T}} = \left| \mathbf{k}_{1}, \mathbf{k}_{2}, \dots \mathbf{k}_{\mathrm{r}} \right|$$
(7)

Mit dem Differential

$$d\Omega = 2dV^{T}PV - 2dV^{T}B^{T}K = 2dV^{T}(PV - B^{T}K) = 0$$

erhält man das gesuchte Minimum.

Wegen $dV^T \neq 0$ muss gelten $PV = B^T K$.

Daraus folgen die sog. Korrelatengleichungen

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}.$$
 (8)

Setzt man dieses v in die Verbesserungsbedingungsgleichungen (6) ein, so ergeben sich die sog. Korrelatennormalgleichungen

$$\underline{\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}+\mathbf{W}}=\mathbf{0}.$$
(9)

Die Normalgleichungsmatrix \mathbf{BQB}^{T} kann wie folgt ausgeschrieben werden, wenn die Beobachtungen unabhängig sind:

$$\mathbf{BQB}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} \left[\frac{\mathbf{aa}}{\mathbf{p}}\right] & \left[\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{p}}\right] & \cdots & \left[\frac{\mathbf{ar}}{\mathbf{p}}\right] \\ \left[\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{p}}\right] & \left[\frac{\mathbf{bb}}{\mathbf{p}}\right] & \cdots & \left[\frac{\mathbf{br}}{\mathbf{p}}\right] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \left[\frac{\mathbf{ar}}{\mathbf{p}}\right] & \cdots & \left[\frac{\mathbf{rr}}{\mathbf{p}}\right] \end{vmatrix}$$

wie man sich mit Hilfe des Falk'schen Schemas leicht überzeugt.

Löst man (9) nach k auf und setzt

$$\mathbf{K} = -\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{W}$$
(10)

in (8) ein, so werden die Verbesserungen v als lineare Funktion der Widersprüche w dargestellt:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \mathbf{W}$$
(11)
9.5 Das Rechenschema

Die Koeffizientenmatrix der Korrelatennormalgleichungen sind im folgenden Schema für die Matrizenmultiplikationen zu berechnen, wenn man manuell mit einem Taschenrechner arbeitet. Das wird sehr selten der Fall sein.

Bei manuellen Berechnungen sind dazu Rechenkontrollen zweckmässig. Dafür dient die $n \ge 1$ Matrix S, in welcher Summenelemente

$$s_i = a_i + b_i + \dots$$

enthalten sind.

Nach den Multiplikationen befinden sich in **BQS** die Zeilensummen der Korrelatennormalgleichungen (Kontrolle für $(BQ) \cdot B^{T}$) und in $S^{T}Q$ die Kolonnensummen von **BQ** (Kontrolle von $B \cdot Q$).



Für unkorrelierte Beobachtungen Q_{II} und P sind Diagonalmatrizen. So kann die Berechnung der Korrelatengleichungen wesentlich vereinfacht werden.

Am Beispiel von drei Bedingungsgleichungen zeigt das folgende Schema die erforderlichen Berechnungen.

k ₁	k ₂	k ₃	W		σ
$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{p}}\right]$	w ₁		σ1
$\left[\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	w ₂		σ₂
$\left[\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{b}\mathbf{c}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{c}\mathbf{c}}{\mathbf{p}}\right]$	W ₃		σ_3
w ₁	w ₂	W ₃	0		σ_4

Die Symbole sind die gleichen, die man bei der vermittelnden Ausgleichung verwendet hat:

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{p_i}$$

Besonders zu beachten sind die Absolutglieder der Korrelatennormagleichungen: sie sind w_i und müssen nicht wie in der vermittelnden Ausgleichung berechnet werden (**[pal]**, **[pbl]** usw.)

Die σ Kolonne enthält σ_i Werte, die man so wählt, dass die Zeilensumme +1 wird (Kontrolle des AT-Verfahrens.)

Die Lösung des Normalgleichungssystems kann mit dem bekannten Austauschverfahren erfolgen. Dadurch erhalten wir die unbekannten Korrelaten \mathbf{k}_i und die Inverse der Korrelatennormalgleichungen.

Die Korrelatengleichungen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$$

oder für unkorrelierte Beobachtungen:

$$p_{1}v_{1} = a_{1}k_{1} + b_{1}k_{2} + c_{1}k_{3} + \dots$$

$$p_{2}v_{2} = a_{2}k_{1} + b_{2}k_{2} + c_{2}k_{3} + \dots$$

$$p_{3}v_{3} = a_{3}k_{1} + b_{3}k_{2} + c_{3}k_{3} + \dots$$
....

liefern dann die Verbesserungen und die gesuchten ausgeglichenen Beobachtungen.

9.6 Kofaktoren der Widersprüche

Die Kofaktorenmatrix der Widersprüche kann aus den Bedingungsgleichungen hergeleitet werden.

Satz

Die Kofaktorenmatrix der Widersprüche einer bedingten Ausgleichung ist

$$\mathbf{Q}_{ww} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^{T}$$

das heisst, sie ist die Matrix der Korrelatennormalgleichungen.

Beweis

Die Widersprüche sind Funktionen der Beobachtungen. Die Funktionen sind der linke Teil der Bedingungsgleichungen.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{w}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \left(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n \right) \\ \mathbf{G}_2 \left(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n \right) \\ \cdots \\ \mathbf{G}_r \left(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n \right) \end{bmatrix}$$

Nach Linearisierung mit Hilfe von Näherungswerten $(l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, ..., l_n^{(0)})$, die ohne weiteres die gemessenen Grössen sein können, erhält man

$$W = \begin{vmatrix} G_1(l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \dots, l_n^{(0)}) \\ G_2(l_1^{(0)}, \dots \end{pmatrix} \\ \dots \\ G_r(l_1^{(0)}, \dots \end{pmatrix} \end{vmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \vdots \\ \Delta l_n \end{bmatrix} = G_0 + B \Delta L$$

Mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz kann man die gesuchte Kofaktorenmatrix berechnen. Da die Kofaktorenmatrix der Messungen Q_{II} ist, und da

$$\mathbf{l}_{i} = \mathbf{l}_{i}^{(0)} + \Delta \mathbf{l}_{i}$$

ist, haben die Δl_i ebenfalls die Kofaktorenmatrix $Q_{ll},$ so dass

$$\mathbf{Q}_{ww} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{II} \mathbf{B}^{T}$$

hergeleitet werden kann.

9.7 Die Berechnung der [pvv]

Die $[\mathbf{pvv}]$ oder für korrelierte Beobachtungen $\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\mathbf{PV}$ können auf verschiedene Arten berechnet werden.

a) Direkte Berechnung aus V und P

Es ist die naheliegendste Methode. Sie wird sogar erleichtert, wenn man für die Berechnung der Verbesserungen zuerst

$$\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$$

bestimmt und erst dann $QB^{T}K$.

b) Berechnungen aus Korrelaten und Widersprüchen

Satz 1

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{W} = -\sum_{i=1}^{r} \mathbf{W}_{i}\mathbf{k}_{i}$$

Beweis

da

(Korrelatengleichungen)

dann folgt

$$V^{T}PV = K^{T}BP^{-1}PV$$
$$= K^{T}BV$$
$$= -K^{T}W$$

 $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V} = \left(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}$ $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}$

da	$\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$	(Verbesserungsbedingungs-
und	$\mathbf{BV} = -\mathbf{W}$	gleichungen)

c) Aus den Widersprüchen und aus der Kofaktorenmatrix der Widersprüche

Satz 2

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{ww}}^{-1}\mathbf{W}$$

Beweis

Die Korrelaten stammen aus dem Normalgleichungssystem:

$$(\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\mathbf{K} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W}$$

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}$$

folgt

und da (Satz 1)

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1} \mathbf{W}$$

$$= \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathrm{ww}}^{-1} \mathbf{W}$$

d) Aus der Pseudonormalgleichung

Im Folgenden stellen wir (6.9) und (6.16) als lineares Schema dar:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W} \\ -\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{0} \end{vmatrix} (= 0)$$

also ausgeschrieben:

	\mathbf{k}_1	\mathbf{k}_2	•••	k _r	1
y 1					\mathbf{w}_1
y 2					W ₂
•					•
•					•
•					•
y r					Wr
$-\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}$	\mathbf{W}_1	W ₂	•••	Wr	0

Nach **r** Austauschschritten zwischen **y** und **k** erscheint, wegen $y_i = 0$, unter dem Lösungsvektor, in der letzten, nicht ausgetauschten Zeile -(pvv).



Die r + 1-te Gleichung im Schema ist in den Koeffizienten symmetrisch zu den Absolutgliedern, deshalb auch hier (vgl. vermittelnde Ausgleichung) der Name **Pseudonormalgleichung.**

9.8 Schlussprobe

Mit den v rechnet man die ausgeglichenen Beobachtungen \overline{I} . Diese müssen die Bedingungsgleichungen

$$F_{j}(\bar{l}_{1}, \bar{l}_{2} ... \bar{l}_{n}) = 0 ; \bar{l}_{i} = l_{i} + v_{i}$$

erfüllen. Damit sind die Koeffizienten und Absolutglieder kontrolliert.

9.9 Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit a posteriori

In 5. wurde das Problem für die vermittelnde Ausgleichung behandelt. Es besteht kein Grund, das dort erhaltene Resultat nicht für die bedingte Ausgleichung zu übernehmen.

$$s_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$$

Es sei nochmals betont, dass dieser Wert s_0 eine Schätzung darstellt, deren Güte vom Freiheitsgrad r abhängig ist.

9.10 Kofaktoren der Korrelaten

Satz

Die Kofaktorenmatrix der Korrelaten ist

$$\mathbf{Q}_{kk} = \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbf{Q}_{ww}^{-1}$$

Beweis

Aus Korrelatennormalgleichungen

$$\mathbf{K} = -\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{W}$$

Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt

$$\mathbf{Q}_{kk} = \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^{T}\right)^{-1}\mathbf{Q}_{ww}\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^{T}\right)^{-1}\right)^{T}$$

Weil $\mathbf{Q}_{ww} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{II}\mathbf{B}^{T}$ (aus 7.6) und $(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{II}\mathbf{B}^{T})^{-1}$ symmetrisch ist, folgt

$$\mathbf{Q}_{kk} = \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

9.11 Kofaktoren der Verbesserungen

Satz

Die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen ist

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{II} \mathbf{B}^{T} \mathbf{Q}_{kk} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{II}$$

Beweis

Aus Korrelatengleichungen

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_{II}\mathbf{B}^{T}\mathbf{K}$$

Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt unmittelbar

$$\mathbf{Q}_{vv} = \left(\mathbf{Q}_{II}\mathbf{B}^{T}\right)\mathbf{Q}_{kk}\left(\mathbf{Q}_{II}\mathbf{B}^{T}\right)^{T}$$

9.12 Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen

Satz

Die Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen lassen sich mit folgender Formel berechnen:

$$Q_{\overline{11}} = Q_{11} - Q_{11}B^{T}Q_{kk}BQ_{11}$$
$$= Q_{11} - Q_{vv}$$

Beweis

$$\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V} ; \mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\mathbf{K}} ; \underline{\mathbf{K}} = -(\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\underline{\mathbf{W}}$$

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W}$$

$$\underline{\mathbf{V}} = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{L}}) = \mathbf{F}(\mathbf{L}_{0}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{L}_{0})$$
Taylorentwicklung von (2)

Aus diesen Grundlagen lässt sich entwickeln:

$$\overline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}} - QB^{T} (BQB^{T})^{-1} B \underline{\underline{L}} + konst.$$

$$\overline{\underline{L}} = (\underline{\underline{E}} - QB^{T} (BQB^{T})^{-1} B) \underline{\underline{L}} + konst.$$

$$Q_{\overline{1}\overline{1}} = (\underline{\underline{E}} - QB^{T} (BQB^{T})^{-1} B) Q_{11} (\underline{\underline{E}} - B^{T} (BQB^{T})^{-1} BQ) ; abgek.Q_{11} = Q$$

$$= Q - QB^{T} (BQB^{T})^{-1} BQ$$

$$- QB^{T} ()^{-1} BQ$$

$$+ QB^{T} ()^{-1} \underline{\underline{B}QB^{T} (BQB^{T})}^{-1} BQ$$

$$= Q_{11} - Q_{11} B^{T} (BQ_{11} B^{T})^{-1} BQ_{11} = \underline{Q_{11}} - Q_{11} B^{T} Q_{kk} BQ_{11}$$
(25)

9.13 Der mittlere Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen; a priori, a posteriori

Dieser Begriff ist klar zu unterscheiden vom m.F. einer Beobachtung a posteriori. **(26)** zeigt eine Gegenüberstellung der verschiedenen Begriffe:

m. F. der Beob.
$$\mathbf{l}_i$$
 a priori: $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{l}_i} = \boldsymbol{\sigma}_o \sqrt{\mathbf{q}_{\mathbf{l}_i \mathbf{l}_i}}$
m. F. der Beob. \mathbf{l}_i a posteriori: $\mathbf{s}_{\mathbf{l}_i} = \mathbf{s}_o \sqrt{\mathbf{q}_{\mathbf{l}_i \mathbf{l}_i}}$
m. F. der ausgeglichenen Beob. \mathbf{l}_i :
a priori: $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{l}_i} = \boldsymbol{\sigma}_o \sqrt{\mathbf{q}_{\mathbf{l}_i \mathbf{l}_i}}$
a posteriori : $\mathbf{s}_{\mathbf{l}_i} = \mathbf{s}_o \sqrt{\mathbf{q}_{\mathbf{l}_i \mathbf{l}_i}}$
(26)

Da in (26) beide Glieder ausschliesslich positive Diagonalglieder haben, folgt

$$q_{\bar{l}_i\bar{l}_i} < q_{l_il_i}$$

Damit ist allgemein bewiesen, dass für alle unsere Ausgleichungen der mittlere Fehler der ausgeglichenen Beobachtung kleiner ist als der m.F. der Originalbeobachtung.

Man soll aber diesen Genauigkeitsgewinn nicht überschätzen, sondern im einzelnen Fall studieren. Völlig abwegig - aber immer wieder praktiziert - ist es, a posteriori-Werte der m.F. ausgeglichener Beobachtungen mit den a priori-Werten der entsprechenden Originalbeobachtungen zu vergleichen und etwa zu folgern, die Ausgleichung hätte keinen Genauigkeitsgewinn gebracht!

Zwischen allen entsprechenden a priori und a posteriori Werten der Varianzen besteht ein konstantes Verhältnis, das im Modelltest untersucht wird.

9.14 Der mittlere Fehler an Funktionen der ausgeglichenen Beobachtung nach der Matrizenmethode

Im Allgemeinen treten mehrere Funktionen g_i der ausgeglichenen Beobachtungen auf.

$$\mathbf{G}_{1.m}^{\mathrm{T}} = \left| \mathbf{g}_{1}(\bar{\mathbf{I}}), \mathbf{g}_{2}(\bar{\mathbf{I}}) \dots \mathbf{g}_{m}(\bar{\mathbf{I}}) \right|$$

oder, linearisiert und in einem Vektor zusammengefasst:

$$\begin{split} \mathbf{G}_{m,1} &= \begin{vmatrix} \mathbf{g}_{1}\left(\overline{\mathbf{i}}\right) \\ \mathbf{g}_{2}\left(\overline{\mathbf{i}}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{m}\left(\overline{\mathbf{i}}\right) \\ \mathbf{g}_{m}\left(\overline{\mathbf{i}}\right) \\ &= \mathbf{G}_{m,1}^{0} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \\ \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{m,n} \\ &= \mathbf{G}_{0} + \prod_{m,n} \left(\overline{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_{0}\right) \\ &= \mathbf{G}_{m,1} \\ &= \mathbf{G}_{0} \\ &=$$

$$\mathbf{Q}_{gg} = \Gamma \mathbf{Q}_{\overline{11}} \Gamma^{\mathrm{T}} = \Gamma \mathbf{Q}_{11} \Gamma^{\mathrm{T}} - \Gamma \mathbf{Q}_{11} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{kk} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{11} \Gamma^{\mathrm{T}}$$
(27)

Typisch für diese Methode ist, dass die $Q_{\overline{1}}$ Matrix auftritt, die nach (25) zu berechnen ist.

9.15 Der mittlere Fehler an Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen aus dem Auflösungsschema

Satz

Eine symmetrische Matrix M sei in Untermatrizen unterteilt:



Wenn F nicht singulär ist, erhält man nach Berechnung von r-AT-Schnitten mit Pivot in der Diagonalen von F die folgende Matrix:

M _(.r) =	F ⁻¹	-F ⁻¹ • H ^T
	H∙F ⁻¹	G-HF ⁻¹ · H

Beweis

Aus der Definition des AT-Verfahrens kann man die Behauptung leicht überprüfen.

Bemerkung

Falls man nach einer bedingten Ausgleichung Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen berechnen möchte und dazu noch die Standardabweichungen oder die Kovarianzmatrix dieser Funktionen benötigt, kann man wie folgt vorgehen.

Gegeben sind die Bedingungsgleichungen

$$G_{i}(\bar{1}_{1}, \bar{1}_{2}, ...) = 0$$
 $i = 1, 2, ... r$

und die anderen Funktionen

$$F_{j}(\bar{l}_{1}, \bar{l}_{2}, ...)$$
 $j = 1, 2, ... m$

die man berechnen will.

Nach Linearisierung erhalten wir

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$\Gamma \cdot \mathbf{V} + \Gamma_{o} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{1} \\ \mathbf{f}_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{f}_{m} \end{pmatrix}$$

Aus den jetzt bekannten Matrizen **B**, Q_{II} , **W**, Γ bilden wir die folgende zusammengesetzte Matrix:

	BQ _I B ^T	W	BQ _{II} Г
=	w ^T	0	000
	Г Q_{II} В^Т	0 0 0	Γ ℚ _∥ Γ ^ͳ

M =

k ₁	k ₂	k3	W		
$\left[\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{p}}\right]$	W1	$\left[\frac{a\gamma_1}{p}\right]$	$\left[\frac{a\gamma_2}{p}\right]$
$\left[\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{b}\mathbf{b}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{b}\mathbf{c}}{\mathbf{p}}\right]$	W ₂	$\left[\frac{b\gamma_1}{p}\right]$	$\left[\frac{b\gamma_2}{p}\right]$
$\left[\frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{b}\mathbf{c}}{\mathbf{p}}\right]$	$\left[\frac{\mathbf{c}\mathbf{c}}{\mathbf{p}}\right]$	W3	$\left[\frac{c\gamma_1}{p}\right]$	$\left[\frac{c\gamma_2}{p}\right]$
W ₁	W ₂	W ₃	0	0	0
$\left[\frac{a\gamma_1}{p}\right]$	$\left[\frac{b\gamma_1}{p}\right]$	$\left[\frac{c\gamma_1}{p}\right]$	0	$\left[\frac{\gamma_1\gamma_1}{p}\right]$	$\left[\frac{\gamma_1\gamma_2}{p}\right]$
$\left[\frac{a\gamma_2}{p}\right]$	$\left[\frac{b\gamma_2}{p}\right]$	$\left[\frac{c\gamma_2}{p}\right]$	0	•••	$\begin{bmatrix} \underline{\gamma_2 \gamma_2} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$

Für unkorrelierte Beobachtungen kann die Matrix **M** auch gemäss folgender Tabelle gebildet werden:

Das ist eine Erweiterung des Auflösungsschemas für die Korrelatennormalgleichungen.

Man kann auf dieser Matrix zweimal den Satz über das AT-Verfahren in Teilmatrizen anwenden.

Nach **r** AT-Schritten mit Pivot in der Diagonale der Teilmatrix ($\mathbf{BQ}_{II}\mathbf{B}T$) von **M** erhält man:



In der rechten unteren Ecke der ausgetauschten Matrix **M** erhält man die Kofaktorenmatrix der gesuchten Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen.



260

Tab.

Ein einfaches Beispiel:

Stationsausgleichung aus Winkeln nach der Sektorenmethode:



Gemessen: $\alpha_1 \dots \alpha_5$ $(\sigma_{\triangleleft} \text{ a priori : } 2^{cc})$

 σ_δ

Gesucht:

Bedingungsausgleichungen :

 $\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 - 400 = 0 \quad w_1 = 3^{cc}$ $\overline{\alpha}_4 + \overline{\alpha}_5 - \overline{\alpha}_3 \qquad = 0 \quad w_2 = 2^{cc}$

Gesuchte Funktionen :

$$\delta' = \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_4$$
$$\delta^* = 400 - \overline{\alpha}_1 - \overline{\alpha}_5$$



Schema der Korrelatennormalgleichungskoeffizienten:

	\mathbf{k}_1	\mathbf{k}_2	W	d'	d*	S	
DOD ^T	1.5	-0.5	3	0.5	-0.5	-3	
RGR ——•	-0.5	2.5	2	1	-1	-3	
	3	2	0	-	-	-4	
CODT	0.5	1	-	1.5	-	-	
GQB [*] ——•	-0.5	-1	-	-	1.5	+1	
	0.67	0.33	-2	-0.33	+0.33	+2	
	-0.33	2.33	3	1.17	-1.17	-4	
	2	3	-6	-1	+1	2	
	+0.33	1.17	-1	1.33	+0.17	-1	
	-0.33	-1.17	1	0.17	1.33	0	
	0.72	0.14	-2.43	-0.5	+0.5	+2.57	
	0.14	0.43	-1.29	-0.5	+0.5	+1.71	
	2.43	1.28	-9.85	-2.5	+2.5	+7.14	
	0.50	0.50	-2.49	0.75	0.75	0.99	
	-0.50	-0.50	2.49	0.75	0.75	-2.01	
$= a \text{ post.:} + \sqrt{\frac{9.85}{2}} = 2.2 \left(\text{Modelltest } (S = 95\%): \frac{2.2^2}{2^2} < 3.0 \right)$ $k_1 = -2.43$ $k_2 = -1.29 \right\} \rightarrow \text{Schema Korrelatengleichungen}$ $\sigma_{\delta'} = \sigma_{\delta} = \sigma_{\sqrt{q_{\delta\delta}}} = 2\sqrt{0.75} = 1.\frac{c}{7}$							
 δ, l und Schlusskontrolle sind nicht ausgeführt, weil die Original- beobachtungen 1 nicht in das Beispiel eingeführt werden. 							

Schema für Austauschverfahren

Literaturverzeichnis

- Bencini, P.: Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
- Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
- Dupraz, H.: Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
- Howald, P.: Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
- Pelzer, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

10. Allgemeine Ausgleichungsformen

10.1 Vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen zwischen den unbekannten Parametern

Einführungsbeispiel



In Fig. 1 ist ein Triangulationsnetz dargestellt, das vermittelnd ausgeglichen werden soll. Aus Gründen, die hier nicht zu erörtern sind, soll die Distanz $\overline{23}$ einen bestimmten Wert annehmen, der als fehlerlos vorgegeben sei. Die Distanz $\overline{23}$ wird deshalb als **Konstante** und nicht als Beobachtung eingeführt. Zum üblichen funktionalen Modell der vermittelnden Ausgleichung (**n** Beobachtungsgleichungen) kommt somit eine Bedingungsgleichung zwischen den unbekannten Parametern dazu, wobei s_{23} als vorgegebene Konstante aufzufassen ist:

$$s_{23} = \sqrt{\left[\left(x_{3}^{0} + \xi_{3}\right) - \left(x_{2}^{0} + \xi_{2}\right)\right]^{2} + \left[\left(y_{3}^{0} + \eta_{3}\right) - \left(y_{2}^{0} + \eta_{2}\right)\right]^{2}}$$
(2)

Diese Bedingungsgleichung (8.2) wird wie die Beobachtungsgleichungen in den Unbekannten der vermittelnden Ausgleichung mit Taylor linearisiert:

$$s_{23} = s_{23}^0 - \frac{\Delta x_{23}^0}{s_{23}^0} \xi_2 - \frac{\Delta y_{23}^0}{s_{23}^0} \eta_2 + \frac{\Delta x_{23}^0}{s_{23}^0} \xi_3 + \frac{\Delta y_{23}^0}{s_{23}^0} \eta_3$$

oder

$$-\frac{\Delta x_{23}^{0}}{s_{23}^{0}}\xi_{2} - \frac{\Delta y_{23}^{0}}{s_{23}^{0}}\eta_{2} + \frac{\Delta x_{23}^{0}}{s_{23}^{0}}\xi_{3} + \frac{\Delta y_{23}^{0}}{s_{23}^{0}}\eta_{3} + w = 0$$
(3)

Die Bedeutung der Symbole dürfte klar sein. $\mathbf{w} = \mathbf{s}_{23}^0 - \mathbf{s}_{23}$, ergibt sich hier als Differenz zwischen genäherter und vorgeschriebener Distanz.

Die Bedingung (3) stellt eine Nebenbedingung dar, die zwischen den Variablen beim Minimieren der [pvv] einzuhalten ist.

Allgemeine Theorie

Das folgende lineare System von **n** Verbesserungsgleichungen wird nun um $\mathbf{r} < \mathbf{u}$ lineare Bedingungen zwischen den Unbekannten erweitert; $\mathbf{r} + \mathbf{n} \ge \mathbf{u}$,

$$\mathbf{v}_{1} = \mathbf{a}_{1}\xi + \mathbf{b}_{1}\eta + \mathbf{c}_{1}\zeta + \dots - \mathbf{f}_{1}$$

$$\mathbf{v}_{2} = \mathbf{a}_{2}\xi + \mathbf{b}_{2}\eta + \mathbf{c}_{2}\zeta + \dots - \mathbf{f}_{2}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_{n} = \mathbf{a}_{n}\xi + \mathbf{b}_{n}\eta + \mathbf{c}_{n}\zeta + \dots - \mathbf{f}_{n}$$

$$\mathbf{0} = \alpha_{1}\xi + \beta_{1}\eta + \gamma_{1}\zeta + \dots + \mathbf{w}_{1}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{0} = \alpha_{r}\xi + \beta_{r}\eta + \gamma_{r}\zeta + \dots + \mathbf{w}_{r}$$
(4)

Dasselbe in Matrizen:

Um die Funktion [pvv] zu minimieren, wird wie in (9.4) die Zielfunktion aufgestellt:

$$\Omega = V^{\mathrm{T}} P V + 2K_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \left(C X + W_{\mathrm{c}} \right)$$
(6)

Bei der Bildung des Differentials ist der Vektor der unbekannten Parameter x die Variable:

$$d\Omega = 2dV^{T}PV + 2dX^{T}C^{T}K_{c} = 0$$

$$V = AX - F ; dV = AdX ; dV^{T} = dX^{T}A^{T} ;$$

$$\frac{1}{2}d\Omega = dX^{T}A^{T}P(AX - F) + dX^{T}C^{T}K_{c} = 0$$

$$dX^{T}[A^{T}PAX - A^{T}PF + C^{T}K_{c}] = 0$$

Oder zusammen mit der 2. Gleichung von (5)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{C}} & + & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} & = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{X} & + & \mathbf{W}_{\mathrm{C}} & = \mathbf{0} \end{array}$$
 (7)

Man erkennt, dass das um die Korrelaten erweiterte Normalgleichungssystem in der 1. Zeile durch die Bedingungen in der 2. Zeile zu einem vollständigen Normalgleichungssystem ergänzt wird.

Um den bekannten Normalgleichungscharakter zu betonen, kann man über die neuen Bezeichnungen auch ein übliches Normalgleichungssystem hinschreiben. Die Auflösung gibt neben dem \mathbf{k} -Anteil die gesuchte Lösung \mathbf{x} .

$$\mathbf{N}_{u+r,u+r}^{\prime} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{x}^{\prime} = \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{K}_{c} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{w}^{\prime} = \begin{vmatrix} -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{F} \\ \mathbf{W}_{c} \end{vmatrix}$$
(8)

$$N'x'+w'=0$$
 (9)

Dieses System - als Zahlenschema gedacht - unterscheidet sich in keiner Weise von einem früher behandelten Normalgleichungssystem. Im Lösungsvektor **x'** sind allerdings nur die ersten **u** Komponenten "echte" Parameter zur Ermittlung der Verbesserungen.

Berechnung von V^TPV

Wenn die Verbesserungen aus den Unbekannten berechnet sind, kann man die $V^T P V$ direkt berechnen.

Die folgenden Beziehungen können ebenfalls verwendet werden:

$$V^{T}PV = (X^{T}A^{T} - F^{T})PV = X^{T}A^{T}PV - F^{T}PV$$
$$= X^{T}(A^{T}PAX - A^{T}PF) - F^{T}PV$$

Mit Zeile 1 von (7) und mit (5) wird

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{c}} - \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F})$$
$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{F} - \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{W}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{c}}$$

Daraus kann die Methode der Pseudonormalgleichung ebenfalls überprüft werden.

Schlussprobe

Mit der Schlussprobe muss geprüft werden, ob die berechneten Parameter die Beobachtungs- und Bedingungsgleichungen erfüllen.

Die Schlussergebnisse sind in die nicht linearen Gleichungen einzusetzen.

Schätzung der Varianz a posteriori

Auch in der vermittelnden Ausgleichung mit Bedingungen kann die Standardabweichung σ_0 a posteriori geschätzt werden.

Die Berechnung des Freiheitsgrades erfolgt mit Hilfe der Anzahl Beobachtungen, der unbekannten Parameter und der Bedingungen.

Es leuchtet ein, dass durch jede Bedingung zwischen den unbekannten Parametern der Freiheitsgrad um eins erhöht wird, könnte man doch mit jeder Bedingung einen Parameter aus den Beobachtungsgleichungen eliminieren.

Für den Modelltest und die Fehlerbetrachtungen berechnet man

$$s_{0} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-(u-r)}}$$
(10)

- **n** : Anzahl Beobachtungen
- **u** : Anzahl Unbekannte
- r: Anzahl Bedingungen

Vorgehen

Die folgenden Rechenschritte charakterisieren die vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungen:

- a) Die unbekannten Parameter werden gewählt.
- b) Die Beobachtungsgleichungen sind so zu schreiben, wie in der vermittelnden Ausgleichung.

$$\vec{l}_i = l_i + v_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_u)$$
 $i = 1, 2, \dots, n$

c) Die Bedingungsgleichungen die dazu erfüllt sein müssen, sind entsprechend zu schreiben (NB Bedingungen zwischen den Unbekannten).

$$G_{j}(x_{1}, x_{2}, ..., x_{u}) = 0$$
 $j = 1, 2, ...r$

d) Die Gleichungen werden linearisiert. Daraus entstehen die Verbesserungsgleichungen und die linearen Bedingungsgleichungen.

$$V = AX - F$$
$$0 = CX + W_c$$

e) Die Normalgleichungen werden gebildet.



Man kann das Schema für das AT-Verfahren daraus bilden und allenfalls die Pseudonormalgleichung anfügen.

Α ^Τ ΡΑ	ст	-A ^T PF
С	0	w _c
-F ^T PA	w _c ^T	F ^T PF

Q _{xx}	(A ^T PA) ⁻¹ C ^T Q _{kk}	x
symmetrisch	- Q _{kk}	K _c
-x ^T	-К <mark>т</mark>	[pvv]

Nach $(\mathbf{u+r})$ AT-Schritten mit Pivot im oberen Teil der Diagonalen erhält man

Die Herleitungen sind z.B. in [Höpke, 1980; Seite 128] zu lesen.

10.2 Bedingte Ausgleichung mit unbekannten Parametern

Einführungsbeispiel



Fig. 2

In Fig. 2 wird eine Knotenpunktberechnung dargestellt. Führt man im Knotenpunkt **P** die Koordinaten **x**, **y** und für den Richtungssatz in **P** die Orientierungsunbekannte **0** ein, so lassen sich für jeden der 3 Polygonzüge drei **Bedingungsgleichungen** formulieren:

Zug 1 -P:

$$\varphi_1 + \overline{\beta}_{11} + \overline{\beta}_{12} + \overline{\beta}_{13} + \dots + \overline{\beta}_{1k_1} - k_1 \cdot 200^g = \mathbf{o} + \overline{\mathbf{r}}_1$$
$$\mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{s}}_{11} \cos \overline{\alpha}_{11} + \overline{\mathbf{s}}_{12} \cos \overline{\alpha}_{12} + \dots = \mathbf{x}$$
$$\mathbf{y}_1 + \overline{\mathbf{s}}_{11} \sin \overline{\alpha}_{11} + \dots = \mathbf{y}$$

Zug 2 -P:

$$\varphi_{2} + \overline{\beta}_{21} + \overline{\beta}_{22} + \dots = \mathbf{0} + \overline{\mathbf{r}}_{2}$$

$$\mathbf{x}_{2} + \overline{\mathbf{s}}_{21} \cos \overline{\alpha}_{21} + \overline{\mathbf{s}}_{22} \cos \overline{\alpha}_{22} + \dots = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y}_{2} + \overline{\mathbf{s}}_{21} \sin \overline{\alpha}_{21} + \dots = \mathbf{y}$$

Zug 3 -P:

$$\phi_{3} + \beta_{31} + \beta_{32} + \dots = \mathbf{0} + \mathbf{r}_{3}$$

$$\mathbf{x}_{3} + \mathbf{s}_{31} \cos \overline{\alpha}_{31} + \dots = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y}_{3} + \mathbf{s}_{31} \sin \overline{\alpha}_{31} + \dots = \mathbf{y}$$

ferner:

$$\overline{\alpha}_{11} = \varphi_1 + \overline{\beta}_{11}; \quad \overline{\alpha}_{12} = \overline{\alpha}_{11} + \overline{\beta}_{12} - 200^g = \varphi_1 + \overline{\beta}_{11} + \overline{\beta}_{12} - 200^g$$

$$\overline{\alpha}_{ik} = \varphi_i + \sum_{j=1}^k \overline{\beta}_{ij} - (k-1) \cdot 200^g$$
(14)

Diese Gleichungen (8.13) mit (8.14) stellen einerseits Bedingungsgleichungen zwischen den ausgeglichenen Beobachtungen dar, andererseits enthalten sie die unbekannten Parameter x, y, o. Hat man im Anfangspunkt statt einem (fehlerlosen) Anschlussazimut einen mehrfachen Richtungsanschluss, so wird φ_1 zu einer fingierten Beobachtung.

(13)

Trotz dieser "Mischform" verläuft alles weitere wie früher:

a) für die unbekannten Parameter werden Näherungen x_0 , y_0 , o_0 und 'verkürzte' Werte ξ , η , ζ eingeführt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi; \ \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \eta; \ \mathbf{o} = \mathbf{o}_0 + \zeta; \tag{15}$$

b) Die Gleichungen (13) und (14) werden mit Taylor entwickelt, wobei für die ausgeglichenen Beobachtungen die gemessen Werte, für die unbekannten Parameter die N\u00e4herungswerte als "Mittelpunkte" der Taylor-Entwicklung genommen werden.

Die linearisierten Gleichungen seien für den 1. Zug formuliert:

$$-\mathbf{v}_{r_{1}} + \mathbf{v}_{11} + \dots + \mathbf{v}_{12} + \dots + -\zeta + \mathbf{w}_{11} = \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{s}_{11} \sin \alpha_{11} \mathbf{v}_{11} - \mathbf{s}_{12} \sin \alpha_{12} \mathbf{v}_{12} + \dots \cos \alpha_{11} \mathbf{v}_{s_{11}} + \dots - \zeta + \mathbf{w}_{12} = \mathbf{0}$$

$$+ \mathbf{s}_{11} \cos \alpha_{11} \mathbf{v}_{11} + \mathbf{s}_{12} \cos \alpha_{12} \mathbf{v}_{12} + \dots \sin \alpha_{11} \mathbf{v}_{s_{11}} + \dots - \eta + \mathbf{w}_{13} = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{0} \]_{\mathbf{0}} = \mathbf{1} + \mathbf{0} + \mathbf{0$$

$$w_{11} = [\beta_1] + \phi_1 - r_1 - \phi_0 - k_1 \cdot 200^g ;$$

$$w_{12} = [s \cos\alpha] + (x_1 - x_0)$$

$$w_{13} = [s \sin\alpha] + (y_1 - y_0)$$

Die Koeffizienten in den Verbesserungsgleichungen entsprechen vollständig denjenigen des früher dargstellten einfachen Polygonzuges.

Allgemeine Theorie

Die Gleichungen des funktionalen Modells können folgendermassen geschrieben werden:

$$F_j(\overline{L}, X) = 0$$
 $j = 1, ..., r$

Nach der Linearisierung kann man sie in Matrizenform darstellen:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{1}} + \mathbf{A}_{\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{u}} \mathbf{X}_{\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{1}} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
(17)

Die Widersprüche entstehen aus den Bedingungsgleichungen nach Einsetzen der beobachteten Werte und der Näherungsunbekannten

$$W_{j} = F_{j}(L, X_{0})$$

Das stochastische Modell wird in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen zusammengefasst.

$$\mathbf{K}_{\mathrm{II}} = \sigma_0^2 \,\mathbf{Q}_{\mathrm{II}} = \sigma_0^2 \,\mathbf{P}^{-1}$$

In diesen **r** Gleichungen stecken **n** unbekannte Verbesserungen **v** und **u** unbekannte Parameter **x** . Das Gleichungssystem ist wegen $\mathbf{r} < \mathbf{n} + \mathbf{u}$ unterbestimmt. Mit Hilfe der Minimumsbedingungen $\mathbf{v}^{T}\mathbf{P}\mathbf{v}$, bzw. $\mathbf{v}^{T}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}$ setzen wir folgende Prinzipalfunktion $\mathbf{\Omega}$ mit der Nebenbedingung (8.17) an:

$$\Omega = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{2k}^{\mathrm{T}} (\mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w}) \quad ;$$

wobei zu beachten ist, dass nun einerseits $V_{n,1}$, aber auch $X_{u,1}$ unabhängige Variablen sind. Das Minimum ergibt sich aus:

$$\frac{1}{2} d\Omega = d\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - d\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} - d\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} = \mathbf{0}$$
(18)

oder

$$\mathbf{d}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{k})-\mathbf{d}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

Wegen

$$dv \neq 0$$
; $dx^T \neq 0$ (Variabeln!) ergibt sich

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} \; ; \; \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

In (17) eingesetzt, erhalten wir mit $\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^{T}\mathbf{k}$

$$BQB^{T} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} = 0$$

$$A^{T} \cdot \mathbf{k} = 0$$
(19)

Analog zur vermittelnden Ausgleichung mit Bedingungen tritt auch hier zum erweiterten Normalgleichungssystem (1. Zeile in (19)) eine symmetrische Ergänzung auf.
Das Gleichungssystem lässt sich im regulären Fall lösen und daraus erhält man die unbekannten Parameter X und die Korrelaten K.

Die Verbesserungen sind ebenfalls unmittelbar danach berechenbar:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$$

Berechnung von $V^{T}PV$

V^TPV lässt sich aus Verbesserungen und aus den Gewichten direkt rechnen.

Satz 1

Die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$$

Beweis

$$V^{T}PV = (QB^{T}K)^{T} P(QB^{T}K)$$
$$= K^{T}BQ \cdot P \cdot QB^{T}K$$
$$= K^{T}BQB^{T}K$$

da
$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$$
 ist.

Satz 2

 $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$

Beweis

Aus Satz 1 gilt:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$$

aus (19) ist aber

$$BQB^{T}K = -(AX + W)$$

Daher ist:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{W})$$
$$= -\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{W} - \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}$$
$$= -\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{W} - (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$$

und da $\mathbf{A}^{T}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ist (19) und $\mathbf{V}^{T}\mathbf{P}\mathbf{V}$ eine 1x1 Matrix ist, folgt:

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = -\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}$$

Schätzung der Varianz a posteriori

$$s_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{r - u}}$$
(20)

Die **u** unbekannten Parameter reduzieren den Freiheitsgrad. Man könnte in (17) jede Unbekannte mit Hilfe einer Bedingungsgleichung eliminieren.

Vorgehen

Die folgenden Rechenschritte charakterisieren die bedingte Ausgleichung mit Unbekannten:

- a) Die unbekannten Parameter werden gewählt.
- b) Die r Bedingungsgleichungen haben die Form:

$$G_{K}\left(\bar{l}_{i}, x_{j}\right) = 0$$

das heisst, in jeder Gleichung können beliebig viele Beobachtungen und Unbekannte auftreten.

c) Die Bedingungsgleichungen sind zu linearisieren mit Hilfe der beobachteten Werte und von Näherungswerten der Unbekannten.

$$\mathbf{BV} + \mathbf{AX} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

- d) Die Kofaktorenmatrix der Beobachtungen ist zu bilden.
- e) Die Normalgleichungen sind zu bilden, indem \mathbf{r} zusätzliche Parameter \mathbf{k}_i (Korrelaten) eingeführt werden. Daraus entsteht das folgende Normalgleichungssystem:



Die Korrelaten k und die Unbekannten x_j können dadurch bestimmt werden. Aus $V = QB^TK$ kann man die Verbesserungen bestimmen.

f) Die Inverse der Normalgleichungsmatrix enthält die Kofaktoren der Korrelaten und der anderen Unbekannten:

BQB ^T	Α	-1	Q _{KK}	$(BQB^T)^{-1}AQ_{XX}$
		=		
A ^T	0			- Q _{XX}
L				_

Die Herleitungen sind z.B. in [Höpke, 1980; Seite 161] zu lesen.

10.3 Die quasivermittelnde Ausgleichung



Einführungsbeispiel: Trigonometrisches Nivellement

Fig. 3

Man misst auf einer 'freien' Station F nach vorne auf P_{i+1} (Vorblick) und nach rückwärts auf P_i (Rückblick) je Distanz und Höhenwinkel. Wird dieses Beobachtungskonzept längs 'Nivellments' linien angewendet und werden diese Linien zu einem Netz verflochten, so ergeben sich bei der Netzausgleichung folgende vereinfacht ohne (E – R) und (I – S) - dargestellten funktionalen Verknüpfungen

$$\overline{\mathbf{D}}_{i+1} \sin \overline{\beta}_{i+1} - \overline{\mathbf{D}}_{i} \sin \overline{\beta}_{i} = \mathbf{H}_{i+1} - \mathbf{H}_{i}$$

Allgemeiner geschrieben sieht das funktionale Modell wie folgt aus:

$$G_i(\overline{l}_k, \overline{l}_j, \dots) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_u)$$

mit der Besonderheit, dass jede Messung nur ein einziges Mal in einer Gleichung auftritt. Das Problem kann in zwei Arten gelöst werden.

Lösung 1

Die Gleichungen können auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$F_i(x_1, x_2, \dots) - G_i(\overline{l}_k, \dots) = 0$$

Es handelt sich um eine bedingte Ausgleichung mit Unbekannten.

Lösung 2

Es werden fingierte Messungen eingeführt.

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{i}}' = \mathbf{G}_{\mathbf{i}} \left(\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{k}}, \ \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{j}}, \ \dots \right)$$

Die dazugehörige Kofaktorenmatrix kann mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet werden.

Das funktionale Modell wird dadurch in eine vermittelnde Ausgleichung umgewandelt.

Man kann beide Lösungen am Einführungsbeispiel anwenden.

Einführungsbeispiel (Lösung 1)

$$H_{i+1} - H_i = \overline{D}_{i+1} \sin \overline{\beta}_{i+1} - \overline{D}_i \sin \overline{\beta}_i$$

In die übliche Form gebracht, heisst das

$$\mathbf{F}_{i,i+1} = \overline{\mathbf{D}}_{i} \sin \overline{\beta}_{i} - \overline{\mathbf{D}}_{i+1} \sin \overline{\beta}_{i+1} - \mathbf{H}_{i} + \mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{0}$$
(36)

 $D_i D_{i+1} \beta_i \beta_{i+1} \dots$ sind Messgrössen, $H_i H_{i+1} \dots$ unbekannte Parameter, wobei das Netz mindestens durch ein vorgegebenes h_i 'gelagert' sein muss.

Das funktionale Modell entspricht nach (36) einer bedingten Ausgleichung mit unbekannten Parametern. Die Linearisierung mit Näherungswerten und verkürzten Parametern x_i bzw. x_{i+1} für H_i bzw. H_{i+1} ergibt

$$\mathbf{D}_{i}\cos\beta_{i}\mathbf{v}_{\beta_{i}} + \sin\beta_{i}\mathbf{v}_{D_{i}} - \mathbf{D}_{i+1}\cos\beta_{i+1}\mathbf{v}_{\beta_{i+1}} - \sin\beta_{i+1}\mathbf{v}_{D_{i+1}} - \mathbf{x}_{i} + \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{w} = 0 \quad (37)$$

Das ist eine Zeile der folgenden vollständigen Verbesserungsbedingungsgleichungen

$$\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

des Netzes.

Mit der entsprechenden Kovarianzmatrix der Beobachtungen steht der Lösung nichts mehr entgegen.

Gemäss (19) erhalten wir ein Normalgleichungssystem

$$\begin{vmatrix} BQB^{T} & A \\ A^{T} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k \\ x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

von $(\mathbf{r} + \mathbf{u})$ Gleichungen. \mathbf{r} ist dabei die Anzahl der 'gemessenen' $\Delta \mathbf{H}$, \mathbf{u} die Anzahl der erfassten Punkte \mathbf{P}_i , ohne die fest vorgegebenen.

Der Aufwand, (r + u) Normalgleichungen aufzulösen, lässt sich folgendermassen reduzieren (Lösung 2):

Wir fassen in (36) zusammen:

$$\overline{\mathbf{D}}_{i}\sin\overline{\beta}_{i} - \overline{\mathbf{D}}_{i+1}\sin\overline{\beta}_{i+1} = \overline{\Delta}\mathbf{h}_{i}^{i+1} = \overline{\Delta}\mathbf{h}_{i}$$
(38)

 Δh_i wird als fingierte Messung behandelt. Wesentlich für die quasi-vermittelnde Ausgleichung ist, dass die beteiligten Originalmessungen nur einmal, d.h. in keinen anderen Δh_i vorkommen.

Die Gleichung (36) bekommt damit die einfache Form

$$\overline{\Delta}\mathbf{h}_{i} - \mathbf{H}_{i} + \mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{0} \tag{39}$$

oder mit

$$\overline{\Delta}\mathbf{h}_{i} = \Delta\mathbf{h}_{i} + \mathbf{v}_{\Delta hi}$$
 wobei $\Delta \mathbf{h}_{i}$ der gemessene Wert bedeutet.

Mit Näherungen für $\mathbf{H}_{i} = \mathbf{H}_{i}^{o} + \mathbf{x}_{i}$ erhält man

$$\mathbf{v}_{\Delta \mathbf{h}_{i}} = \mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{w}$$
(40)

Das ist die Form einer vermittelnden Ausgleichung, die auf u Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

führt, also ganz wesentlich weniger aufwendig zu lösen ist als die allgemeine Lösung mit $\mathbf{n} + \mathbf{u}$ Normalgleichungen.

Q ergibt sich aus dem FFG, das auf die Gleichung (38) angewendet wird.

$$\Delta \mathbf{h}_{i} = \mathbf{D}_{i} \mathbf{sin} \boldsymbol{\beta}_{i} - \mathbf{D}_{i+1} \mathbf{sin} \boldsymbol{\beta}_{i+1}$$

linearisiert heisst

$$\mathbf{d}(\Delta \mathbf{h}_{i}) = \mathbf{D}_{i} \cos\beta_{i} d\beta_{i} + \sin\beta_{i} d\mathbf{D}_{i} - \mathbf{D}_{i+1} \cos\beta_{i+1} d\beta_{i+1} - \sin\beta_{i+1} d\mathbf{D}_{i+1}$$

$$\mathbf{d}(\Delta \mathbf{h}_{i}) = \mathbf{f}_{1,4}^{\mathrm{T}} \frac{\mathbf{d}\mathbf{l}_{i}}{_{4,1}^{\mathrm{i}}}$$
(41)

$$\mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{h}_{i}\Delta \mathbf{h}_{i}} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathrm{LL}}^{i} \mathbf{f} \qquad \text{mit} \qquad (42)$$

$$\mathbf{Q}_{LL}^{i} = \frac{1}{\sigma_{0}^{2}} \begin{vmatrix} \sigma_{\beta_{i}}^{2} & & \\ & \sigma_{D_{i}}^{2} & \\ & & \sigma_{\beta_{i+1}}^{2} \\ & & & \sigma_{D_{i+1}}^{2} \end{vmatrix}$$
(43)

Alles Weitere ist bekannt.

Als abschliessende Frage: Wie erhalte ich die Verbesserungen an den Originalbeobachtungen aus den errechneten $v_{\Delta h_i}\,?$

Gleichung (41): $d(\Delta h_i) = f^T dl_i$ kann interpretiert werden als

$$\mathbf{v}_{\Delta hi} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_{i}$$
$$\mathbf{f}_{1.4}^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_{i} - \mathbf{v}_{\Delta h_{i}} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1.4}_{1.1} \mathbf{1.1}$$

oder

Das ist eine Verbesserungsbedingungsgleichung einer bedingten Ausgleichung mit bekanntem Widerspruch ($-v_{\Delta h_i}$).

Also ergibt sich aus den Korrelatengleichungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_{II}^{i} \mathbf{f} \mathbf{k} = \mathbf{Q}_{II}^{i} \mathbf{f} \left(\mathbf{f}^{T} \mathbf{Q}_{II}^{i} \mathbf{f}\right)^{-1} \mathbf{v}_{\Delta \mathbf{h}_{i}}$$
(44)

Auch die m.F. der ausgeglichenen Originalmessungen lassen sich jetzt entsprechend der Theorie der bedingten Ausgleichung errechnen.

Literaturverzeichnis

- Bencini, P.: Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988
- Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung ETHZ, nicht veröffentlicht
- Dupraz, H.: Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1985
- Gotthardt, E.: Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung; 3. Auflage, 1969; Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Berlin, New York, 1980
- Howald, P.: Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géomètre 1988
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980
- Pelzer, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer Stuttgart 1985
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung; Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976

11. Die Theorie der Zuverlässigkeit im Vermessungswesen

11.1 Einleitung

Die Notwendigkeit, sich gegen die Folgen von Messfehlern zu schützen, ist gut bekannt. Jeder Student kennt seit den ersten Stunden der Vermessungsausbildung die Aussage:

'Eine Messung ist keine Messung'

Dieses Zitat beschreibt schon einen grossen Teil der Zuverlässigkeitstheorie. Für jeden Geometer ist es unerlässlich, dass die Messanordnung eine genügend grosse Anzahl von überschüssigen Messungen enthält, damit eine Kontrolle gewährleistet ist.

Das Problem ist also nicht neu, aber in den letzten Jahren wurde eingehend nach neuen Lösungen gesucht, die auch die praktische Arbeit des Geometers zu beeinflussen beginnen.

Der holländische Professor W. Baarda, Begründer der modernen Zuverlässigkeitstheorie in der Geodäsie, publizierte 1968 ein bemerkenswertes Werk über die Methoden, ein geodätisches Netz zu prüfen. Darin wird zum ersten Mal ein mathematisches Modell der Zuverlässigkeit verwendet.

11.2 Gegenstand und Definition der Zuverlässigkeit

Die Ausdrücke 'Zuverlässigkeit' und 'zuverlässig' werden in der Vermessung, vom qualitativen Standpunkt aus, im gleichen Sinn wie in der Umgangssprache verwendet, das heisst, mit der Bedeutung von "vertrauenswürdig", "kontrolliert", "sicher". Etwas genauer ausgedrückt: eine geodätische Arbeit ist zuverlässig, wenn man in der Lage ist, allfällige Modellfehler entdecken zu können.

Dank der Theorie von Baarda und späteren Arbeiten liess sich die Zuverlässigkeit mit Werten beschreiben und hat sich von einem subjektiven zu einem praktisch einsetzbaren, objektiven Kriterium verwandelt.

Um den folgenden mathematischen Teil zu verstehen, ist es unerlässlich, genau zu beschreiben, was Gegenstand der Zuverlässigkeit ist und diese wenigstens teilweise zu definieren.

Die Zuverlässigkeit ist nicht, wie man oft glaubt, eine Eigenschaft der reinen Messanordnung (Netzgeometrie).

Die Zuverlässigkeit ist eine Eigenschaft der folgenden drei Elemente:

- Der Struktur des geodätischen Netzes mit dem funktionalen und dem stochastischen Modell.
- Der Alternativhypothese (eventuelle Fehler des Modells) mit den Anforderungen an die Arbeit (Grösse des Fehlers an der Grenze des Annehmbaren).
- Des statistischen Tests, mit dem man das Modell nach der Ausführung der Messungen und Berechnungen testet. (Mit dem Test wählt man auch das Niveau α des Fehlers erster Art).

Mit diesen Vorbemerkungen kann die Zuverlässigkeit folgendermassen definiert werden:

Definition

Das Zusammenwirken der drei oben beschriebenen Elemente ist zuverlässig, wenn der Test mit einer genügenden Wahrscheinlichkeit $(1-\beta)$ die Fehler des Modells, die an der Grenze des Annehmbaren liegen, anzeigen.

11.3 Intuitive Lösungen

Die heutigen mathematischen Lösungen unterscheiden sich nicht wesentlich von den früher gebrauchten, intuitiven Methoden. Der Unterschied besteht in der Tatsache, dass man früher um jeden Preis mühselige Berechnungen vermeiden musste. Anstatt die genaue Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit welcher kleine Fehler durch statistische Methoden entdeckt werden können, benutzte man Mustermessanordnungen, die sich auf Grund von Erfahrungen als zuverlässig erwiesen. Die Zuverlässigkeit neuer Netze war gewährleistet durch Regeln, die die Verwendung vorgegebener Mustermessanordnungen vorschrieben.

Als Beispiel kann man die alte Instruktion für die Triangulation 4. Ordnung der schweizerischen Grundbuchvermessung von 1919 nennen. In dieser Instruktion berücksichtigte man bereits die Tatsache, dass die Zuverlässigkeit von der Messanordnung, vom Test und von den Anforderungen an die Arbeit abhängt. Richtlinien für die Messanordnung, vorgeschriebene Kontrolltests und anforderungsabhängige Toleranzschranken wurden verwendet, um die Zuverlässigkeit des Systems zu sichern.

Man kann leicht bemerken, dass in dieser früheren Methode die drei Elemente der modernen Definition klar zu erkennen sind.

Das Charakteristische dieser intuitiven Methoden ist der Verzicht auf eine mathematische exakte Abgrenzung zwischen einem zuverlässigen und einem nicht zuverlässigen Messsystem.

11.4 Das mathematische Modell der Zuverlässigkeit

Nach dem Aufstellen der Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsforderungen und der Alternativhypothese wählt man das Netz, das heisst die auszuführenden Messungen sowie die Messgeräte. Man wählt auch die Berechnungsmethode und bestimmt insbesondere die Variablen und den statistischen Test, der am Ende der Arbeit zur Prüfung des mathematischen Modells dient.



Fig. 1 Reihenfolge der Rechnungsoperationen

Demnach ist es möglich, die Eigenschaften der Testvariablen zu analysieren, für den Fall, dass das mathematische Modell korrekt ist (keine groben Fehler z.B.).

In dieser Phase bestimmt man den Annahme- oder Verwerfungsbereich für die Testvariable. Gewöhnlich wird die Grenze zwischen den beiden Bereichen in Funktion von α (Risiko eines Fehlers erster Art) berechnet.



Fig. 2 Annahmebereich für die statistische Variable

In einer zweiten Phase analysiert man den Einfluss jedes eventuellen Modellfehlers auf die Testvariable.

Die eventuellen Fehler, die man in die Berechnung einbeziehen will, werden in der Alternativhypothese beschrieben.

Die nächsten Seiten beschränken sich auf grobe Fehler in den Messungen, um die Berechnungen zu vereinfachen. Aber die Überlegungen können leicht an andere Hypothesen angepasst werden. Der gegenseitige Einfluss von mehreren Fehlern des Modells wird ausgeschlossen.

Ein grober Fehler Δl_i der i-ten Messung wird einen Einfluss auf die Testvariable haben, er wird vor allem eine Änderung des Erwartungswertes und der Verteilung verursachen.



Fig. 3 Risiko eines Fehlers zweiter Art

Derjenige Teil der Verteilung, der sich im früher festgelegten Annahmebereich befindet, ist wichtig, denn er erlaubt die Berechnung der Wahrscheinlichkeit β_{λ} die Realisierung der Testvariable im Annahmebereich zu erhalten, obwohl das Modell falsch ist. Es handelt sich um das Risiko des Fehlers zweiter Art. So bestimmt man für jede Beobachtung die Wahrscheinlichkeit $(1-\beta)$ mit welcher ein grober Fehler, der an der Grenze des Annehmbaren liegt, gefunden werden könnte. Wenn diese Wahrscheinlichkeit für alle Beobachtungen genügend gross ist, ist das System zuverlässig.

In der Literatur zieht man es oft vor, umgekehrt vorzugehen. Man gibt das maximale Risiko β_0 an, das noch zumutbar ist und berechnet daraus die Grösse ∇l_i der groben Fehler, die für jede Beobachtung mit Wahrscheinlichkeit β_0 entgehen können. Wenn alle ∇l_i genügend klein sind, d.h. wenn sie innerhalb einer annehmbaren Grösse liegen, ist das System zuverlässig.

Diese Grenzwerte $\nabla \mathbf{l}_i$ für die groben Fehler jeder Beobachtung nennt man Indikatoren der **inneren Zuverlässigkeit** der Beobachtungen.

Mit diesen Indikatoren der inneren Zuverlässigkeit ist es möglich, den Einfluss ∇x_i , ∇y_i zu berechnen, den die Grenzfehler ∇l_i auf alle Koordinaten des Netzes haben. Die grössten Werte, die für jeden Punkt erhalten werden, heissen Indikatoren der **äusseren Zuverlässigkeit**.

Die Anwendungen des mathematischen Modells der Zuverlässigkeit sind in den folgenden Kapiteln so beschrieben, wie man sie in der Literatur und in der Praxis findet.

11.5 Das Zuverlässigkeitsmodell von W. Baarda

Die erste mathematische Lösung, die auf dem Gebiet der Geodäsie vorgeschlagen wurde /Baarda 1968/, basiert auf dem Fisher-Test mit einem Niveau α für die Annahme oder die Verwerfung des Modells. Ausgehend von s₀ (der mittlere Fehler der Gewichtseinheit a posteriori) und σ_0 (der gleiche mittlere Fehler a priori) berechnet man, nach der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die folgende Testvariable:

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{s}_{o}^{2}}{\sigma_{o}^{2}} \tag{1}$$

Deren Verteilung ist für ein stimmendes Modell (Nullhypothese H_0 bekannt (Fisherverteilung). Der Freitheitsgrad f (= n - u) von s_0 wird der Ausgleichung entnommen, während für σ_0 der Freiheitsgrad ∞ angenommen wird. Jetzt untersucht man die Testvariable F^* , welche aus einer Alternativhypothese H_i stammt. Die untersuchte Alternative ist die allfällige Verfälschung einer Beobachtung der Ausgleichung. Die Alternativhypothese wird im Folgenden der Nullhypothese gegenübergestellt.

Wenn die i-te Beobachtung durch einen groben Fehler ΔI_i verfälscht ist, das heisst

$$l_i^* = l_i + \Delta l_i$$
(2)

sind s_0^* und F^* auch verfälscht und ihr veränderter Erwartungswert ist

$$E(\underline{F}^*) = E(\underline{F}) + \frac{\lambda}{f} = 1 + \frac{\lambda}{f}$$
(3)

Man kann die Formel beweisen und λ bestimmen.

Für die vermittelnde Ausgleichung

R

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_{o}) = \mathbf{A}\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{o}) - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_{o}) = (\mathbf{A}\mathbf{R} - \mathbf{E})(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{o})$$

wobei

$$= (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}$$

Wenn der Beobachtungsvektor verfälscht wird, ist

 $\mathbf{l}^* = \mathbf{l} + \mathbf{\Delta} \mathbf{l}$

wobei

dann ist

 $V^* = V + \Delta V$

 $\Delta \mathbf{l}^{\mathrm{T}} = (0, 0, ..., \Delta \mathbf{l}_{\mathrm{i}}, 0, ..., 0)$

und $\Delta V = (AR - E)\Delta I$

Im Modelltest wird dann:

$$\mathbf{F^{\star}} = \frac{\mathbf{V}^{\star \mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}^{\star}}{\mathbf{f} \cdot \sigma_{o}^{2}}$$

wobei f der Freiheitsgrad des Netzes ist.

$$\mathbf{E}(\mathbf{F}^*) = \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{V}^{*\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}^*}{\mathbf{f} \cdot \sigma_o^2}\right)$$

und da:

$$\mathbf{V}^{*\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V}^{*} = (\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V})^{\mathrm{T}} \mathbf{P} (\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V})$$
$$= \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{V} + 2 \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \Delta \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \Delta \mathbf{V}$$

und

$$\mathbf{E}(\mathbf{2V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\Delta\mathbf{V}) = \mathbf{0}$$
 weil $\mathbf{E}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}$ sind,

ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{F}^*) = \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{V}}{\mathbf{f}\cdot\sigma_{o}^{2}}\right) + \left|\frac{\Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\Delta\mathbf{V}}{\mathbf{f}\cdot\sigma_{o}^{2}}\right|$$
$$= \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{s}_{o}^{2}}{\sigma_{o}^{2}}\right) + \frac{\lambda}{\mathbf{f}}$$

wobei

$$\lambda = \frac{\Delta \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \Delta \mathbf{V}}{\sigma_{\mathrm{o}}^{2}}$$

Für unkorrelierte Beobachtungen gilt [Conzett, 1981]:

$$\lambda = \frac{\Delta l_i^2}{\sigma_o^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}}{\mathbf{q}_{ll}^{(ii)\,2}} = \left(\frac{\Delta l_i}{\sigma_i}\right)^2 \cdot \frac{\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}}{\mathbf{q}_{ll}^{(ii)}} \tag{4}$$

Der allgemeine Fall (korrelierte Beobachtungen) kann ebenfalls hergeleitet werden [Conzett, 1981]:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \Delta V^T P \Delta V$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \Delta I^T \left(P A \left(A^T P A \right)^{-1} A^T - E \right) P \left(A \left(A^T P \right)^{-1} A^T P - E \right) \Delta I$$

$$\left(P A \left(\underbrace{A^T P A}_{Q_{xx}} \right)^{-1} A^T - E \right) P \left(A \left(\underbrace{A^T P A}_{Q_{xx}} \right)^{-1} A^T P - E \right)$$

$$= P A \underbrace{Q_{xx}}_{E} A^T P A Q_{xx} A^T P - P A Q_{xx} A^T P - P A Q_{xx} A^T P + P$$

$$= \underbrace{P A Q_{xx}}_{E} A^T P - P A Q_{xx} A^T P - P A Q_{xx} A^T P + P$$

$$= \underbrace{P A Q_{xx}}_{=0} A^T P - P A Q_{xx} A^T P - P A Q_{xx} A^T P + P$$

$$= P \left(E - A Q_{xx} A^T P \right) = P \left(Q_{11} - A Q_{xx} A^T \right) P = P Q_{yy} P$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_0^2} \Delta I^T P Q_{yy} P \Delta I$$

Die Verteilung der Testgrösse **F** für normalverteilte Beobachtungen (ohne groben Fehler) ist die Fisher-Verteilung. Die Verteilung von \mathbf{F}^* ist, im Gegensatz dazu, die nicht zentrale Fisher-Verteilung mit λ/f als Verschiebungsparameter (oder Nichtzentralitätsparameter).



Fig. 4 Dichte der Wahrscheinlichkeit der Variablen F und F*

Für jeden eventuellen groben Fehler Δl_i ist es möglich, vorgängig zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit (1- β) er entdeckt werden kann, wenn die Grösse

$$\mathbf{F} = \mathbf{s}_o^2 / \sigma_o^2$$

mit der (zentralen) Fisher-Verteilung getestet wird. Für den Test wählt man eine feste Grenze F_{Max} (die aus dem Risiko α eines Fehlers 1. Art hergeleitet wird).

Man kann danach die Zuverlässigkeit berechnen, indem man für jede Beobachtung den grössten noch verkraftbaren groben Fehler Δl_{imax} festlegt und die Wahrscheinlichkeit (1- β) berechnet, mit welcher man einen solchen Fehler entdecken kann. Als gleichwertige Alternative ist das umgekehrte Vorgehen ebenfalls anwendbar. Man berechnet die Grösse eines groben Fehlers ∇l_i , so dass der Test ihn mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit (1- β_0) entdecken kann [Baarda, 1968], [Just, 1979].

$$\frac{\nabla \mathbf{l}_{i}}{\sigma_{li}} = \sqrt{\lambda(\alpha, \beta, \mathbf{f})} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{q}_{ll}^{(ii)}}{\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}}}$$
(5)





f

Die Wahl, den Fisher-Test als Kontrollmethode zu gebrauchen, hat den Vorteil der Vereinfachung der Theorie, aber auch den Nachteil, dass nur die grossen Δl_i entdeckt werden können, wenn der Freiheitsgrad des Netzes sich vergrössert. Aufgrund dieser Tatsache ist es ratsam, bei der Anwendung dieser Methode die grossen Netze in kleinere Teilnetze zu zerlegen.

11.6 Zuverlässigkeit und Test der Verbesserungen

In grossen Netzen ziehen es die Praktiker vor, die Resultate zu testen, indem sie die Verbesserungen kontrollieren. Die Verbesserungen sind Zufallsvariablen (lineare Funktionen der Beobachtungen) mit Normalverteilung, Erwartungswert = 0 und Standardabweichung

$$\sigma_{vi} = \sigma_0 \cdot \sqrt{q_{vv}^{(ii)}}$$
(6)

 σ_0 ist die Standardabweichung der Gewichtseinheit,

 $\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}$ das Diagonalelement der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen.

Dividiert man die Verbesserungen durch die entsprechenden σ_{vi} , so erhält man die standardisierten Verbesserungen.

$$\underline{\mathbf{w}}_{i} = \frac{\underline{\mathbf{v}}_{i}}{\sigma_{\mathbf{v}_{i}}} \tag{7}$$

mit Normalverteilung, Erwartungswert = 0 und $\sigma_w = 1$. So ist es möglich, jede Messung mit dem dazugehörigen w_i zu testen, indem man im Voraus den Grenzwert w_{max} (zum Beispiel auf dem Niveau $\alpha = 5$ %) bestimmt, mit welchem über die Annahme oder Verwerfung des Modells entschieden wird.

Die Korrelationen zwischen den Verbesserungen erlauben es nicht, den Wert α für das gesamte Netz direkt zu berechnen, wenn man den Test für jede Messung wiederholt. Eine Lösung für dieses Problem wird durch die Methoden der multivariaten Statistik [Carosio, 1983] angeboten, die hier nicht näher beschrieben werden.

Um sich auf einfache Berechnungen zu beschränken, verzichtet man auf die Wahl von α für das gesamte Netz, und wählt auf Grund von Erfahrungen einen Wert α_0 für den Test einer einzelnen Messung oder sogar direkt den Grenzwert w_{max} (z.B. 2 oder 3, das heisst zwei oder drei Mal die Standardabweichung von w). Nach der Bestimmung des Grenzwertes w_{max} kann man auf folgende Art überprüfen, ob jede Messung im Netz genügend kontrolliert ist.

Falls bei der i-ten Messung ein grober Fehler Δl_i vorhanden ist, wird die dazugehörige standardisierte Verbesserung w_i in w_i^* verändert. Da die w_i^* ebenfalls von den zufälligen Fehlern beeinflusst werden, ist w_i^* auch eine Zufallsvariable (normalverteilt mit Varianz 1). Der Erwartungswert ist nicht mehr **0**, er wird vom groben Fehler Δl_i verändert.

Der Einfluss eines groben Fehlers Δl_i der i-ten Messung auf die Variable w_i kann mit der folgenden Formel berechnet werden (für unkorrelierte Beobachtungen) [Linkwitz, 1960]:

$$\delta_{i} = -\frac{\Delta I_{i}}{\sigma_{vi}} \cdot \frac{\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}}{\mathbf{q}_{ll}^{(ii)}} = -\frac{\Delta I_{i}}{\sigma_{li}} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}}{\mathbf{q}_{ll}^{(ii)}}}$$
(8)



Fig. 5 Dichte der Wahrscheinlichkeit der Variablen w und w*

 δ_i ist das Zentrum der Normalverteilung von w_i^* , da die entsprechende Messung durch einen groben Fehler Δl_i verfälscht wurde.

$$\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}$$
 und $\mathbf{q}_{ll}^{(ii)}$

sind die entsprechenden Diagonalelemente der Kofaktorenmatrizen der Verbesserungen und der Messungen.

 σ_{li} ist die Standardabweichung (mittlerer Fehler) der Messung und

$$\sigma_{\rm vi} = \sqrt{\frac{q_{\rm vv}^{\rm (ii)}}{q_{\rm ll}^{\rm (ii)}}} \cdot \sigma_{\rm li} \tag{9}$$

ist die Standardabweichung der Verbesserung. Die Figur 5 zeigt die Wahrscheinlichkeit β , mit der der grobe Fehler Δl_i durch den Test nicht angezeigt wird. β kann mit der Funktion der Normalverteilung berechnet werden.

In gleicher Weise wie beim Zuverlässigkeitsmodell von Baarda kann man auch hier die Formulierung umkehren und berechnen, wie gross der grobe Fehler Δl_i werden muss, damit das Risiko, dass der Fehler entgeht, noch annehmbar ist. Das annehmbare Risiko β muss vorgegeben sein (z.B. $\beta = 5\%$) und der so hergeleitete grobe Fehler wird mit ∇l_i bezeichnet. Man spricht von innerer Zuverlässigkeitsindikatoren, welche für jede Messung die kleinsten groben Fehler, die man mit genügender Wahrscheinlichkeit noch entdecken kann, angeben.

11.7 Lokale Zuverlässigkeitsindikatoren

Die genaue Berechnung der Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten groben Fehler aufzuspüren, ist nicht immer nötig. Manchmal möchte man nur die Zuverlässigkeit einiger Netzvarianten miteinander vergleichen. In diesen Fällen empfiehlt es sich, auf die Anwendung der vollständigen Formeln des mathematischen Modells der Zuverlässigkeit zu verzichten, um sich auf die Geometrie der Netze zu konzentrieren. Dies ist sinnvoll unter der Annahme, dass die Resultate auf jeden Fall mit einer wirksamen Methode getestet werden (der gleiche Test für alle Varianten), und dass die Anforderungen an die Arbeit nicht ändern. Die geometrische Komponente in den Formeln der Zuverlässigkeit ist gegeben durch

$$z_{i} = \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ll}^{(ii)}}$$
(10)

z_i wird lokaler Zuverlässigkeitsindikator der Beobachtung i genannt.

 $\mathbf{q}_{vv}^{(ii)}$ ist das i-te Diagonalelement der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen.

 $q_{II}^{(ii)}$ ist das gleiche Element der Kofaktorenmatrix der Beobachtungen.

Der Indikator z_i ist leicht zu berechnen, wenn man über die Diagonale der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen verfügt. Für die vermittelnde Ausgleichung ist das in Matrizenform:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$
(11)

- **Q**_{vv} ist die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen.
- **Q**_{II} ist die Kofaktorenmatrix der Beobachtungen.
- $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ ist die Kofaktorenmatrix der Unbekannten.
- A ist die Matrix der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen.

Mit z_i ist es möglich, die Zuverlässigkeiten der Netze zu vergleichen, indem man sich auf einfache, als zuverlässig anerkannte Anordnungen stützt. So kann man sogar Schlüsse über die Zuverlässigkeit komplexer Netze ziehen.

Grenzwerte für z_i können als objektive Zuverlässigkeitskriterien in technischen Normen oder in Vorschriften der amtlichen Vermessung verwendet werden.

 z_i kann zwischen 0 und 1 variieren (das heisst von 0 % - 100 %), $z_i = 0$ zeigt an, dass eine Beobachtung unkontrolliert ist, $z_i = 0.5$ den Fall einer doppelten Messung und $z_i = 1$ den Fall einer unendlich gut kontrollierten Messung.

Der lokale Zuverlässigkeitsindikator gewährleistet die Zuverlässigkeit der Messarbeit nur, wenn nach der Durchführung der Messungen und der Berechnungen die Resultate nach den Regeln der Kunst und mit der nötigen Sorgfalt geprüft werden.

11.8 Die Zuverlässigkeit der Koordinaten (äussere Zuverlässigkeit)

Die bisherigen Ausführungen haben als Ziel die Berechnung der Zuverlässigkeit der einzelnen Beobachtungen (innere Zuverlässigkeitsindikatoren ∇l_i).

Die Vermessungsarbeit bezweckt aber in der Regel die Bestimmung von anderen hergeleiteten Parametern (in der Regel Koordinaten), die das eigentliche Resultat darstellen und in Zukunft wiederverwendet werden. Für die Anwender eines Vermessungswerkes ist es letzten Endes irrelevant, wie gut die einzelnen Messungen kontrolliert sind. Wichtig für ihn ist zu wissen, wie zuverlässig die Koordinaten (und die anderen Parameter) sind.

Die unbekannten Parameter einer vermittelnden Ausgleichung werden mit der folgenden Formel berechnet:

$$(X - X_0) = (A^T P A)^{-1} A^T P (L - L_0) = R (L - L_0)$$

In dieser Formel repräsentiert der Vektor L die Beobachtungen (Azimute, Richtungen, Distanzen usw.), die Matrix A spiegelt die Geometrie des Messnetzes wieder, während die Matrix P die Messgenauigkeit angibt. Die Matrizen A und P sind von vornherein bekannt; zur Bestimmung des Vektors L müssen die Messungen durchgeführt werden. Der Vektor X enthält die Unbekannten (Koordinaten, Orientierungsunbekannten usw.) und L_0 sind die Näherungen der Beobachtungen, die aus den Näherungsunbekannten X_0 berechnet wurden.

Man kann dann den Einfluss auf die Koordinaten allfälliger grober Messfehler bestimmen, indem man, für jede Beobachtung getrennt, den Einfluss eines Fehlers ∇l_i (innerer Zuverlässigkeitsindikator der i-ten Beobachtung gemäss Kap. 4.5) auf die Koordinaten berechnet.

Wird der Vektor $\mathbf{L} - \mathbf{L}_0$ durch einen Vektor $\nabla \mathbf{L}$ ersetzt, welcher ausser der i-ten Komponente (= $\nabla \mathbf{l}_i$) lauter Nullen enthält, so kann der Einfluss eines groben Fehlers $\nabla \mathbf{l}_i$ auf die Koordinaten aller Punkte ermittelt werden. Dieser Einfluss wird durch die Verschiebungsvektoren \mathbf{N}_{iA} und \mathbf{N}_{iB} der auszugleichenden Punkte A, B umschrieben, deren Koordinaten im Vektor N ($\Delta \mathbf{y}_A, \Delta \mathbf{x}_A, \Delta \mathbf{y}_B, \Delta \mathbf{x}_A$) enthalten sind. Natürlich wäre es auch möglich, den Einfluss auf die anderen Unbekannten (z.B. Orientierungs-unbekannte) zu berechnen.

Zu beachten ist, dass der Vektor ∇L nur einen einzigen Term ungleich Null enthält, da man angenommen hat, dass nur ein grober Fehler ∇I_i auftreten kann.



Mit den (**n-1**) verbleibenden ∇l_i kann analog vorgegangen werden. Man erhält so für jeden unbekannten Punkt ein Bündel von **n** Vektoren. Wegen der Linearität des Gleichungssystems verursacht ein grober Fehler von – ∇l_i einen Vektor, der demjenigen von + ∇l_i entgegengesetzt ist. Jedem zusätzlichen Punkt entsprechen demzufolge 2 **n** Vektoren.



Fig. 6 Einfluss der groben Fehler ∇l_i auf die Koordinaten

Selbstverständlich gilt das, was bis jetzt anhand von planimetrischen Beispielen gezeigt wurde, analog auch für die Höhenmessung. In diesem Fall handelt es sich jedoch um ein eindimensionales Problem, bei welchem die Verschiebungsvektoren N in Richtung der **Z**-Achse zeigen.

11.9 Darstellung der äusseren Zuverlässigkeit

Die Indikatoren $\nabla \mathbf{l}_i$ der inneren Zuverlässigkeit lassen sich am einfachsten in numerischer Form in der Abrisstabelle darstellen. Da zu jeder Beobachtung ein $\nabla \mathbf{l}_i$ -Wert berechnet wird, muss dafür nur eine zusätzliche Kolonne in der Tabelle vorgesehen werden.

Die Auswirkung der ∇l_i auf die Koordinaten ergibt für jeden Punkt 2 n Vektoren. Eine tabellarische Darstellung ist für eine so grosse Anzahl Werte nicht mehr realisierbar. Auch eine graphische Darstellung der 2 n Vektoren scheint wenig sinnvoll, da Hunderte von Vektoren ebenfalls schwer zu interpretieren sind.

Es stellt sich die Frage, wie die grosse Anzahl Vektoren mit möglichst wenig Informationsverlust zusammengefasst werden kann.

Für die Anwendungen der Landesvermessung sowie der amtlichen Vermessung können drei Lösungsvarianten vorgeschlagen werden:

a) Der Zuverlässigkeitskreis

Nach der Bestimmung der **n**-Einflussvektoren der einzelnen $\nabla \mathbf{l}_i$ (mit positiven Vorzeichen) bestimmt man den grössten Vektor (∇y , ∇x) unter den **n** berechneten.

Radius =
$$\sqrt{\nabla y^2 + \nabla x^2}$$

um den dazugehörigen Neupunkt enthält alle **2n** möglichen Einflussvektoren und kann daher als guter Indikator für die Zuverlässigkeit der Koordinaten betrachtet werden.



Fig. 7 Der Zuverlässigkeitskreis

Als Zusatzinformation können die Nummern der Beobachtung, die für die Bestimmung des Kreisradius massgebend waren sowie die Richtung des grössten Vektors dienen.

Die Zuverlässigkeitskreise sind vom verwendeten Koordinatensystem unabhängig.

b) Die orientierten Zuverlässigkeitsrechtecke

Die Zuverlässigkeitskreise erlauben nicht mehr zu erkennen, ob die Vektoren der Fehlereinflüsse auf die Koordinaten eine besondere Orientierung haben. Um diesen Nachteil zu beheben, kann man den Kreis durch ein Rechteck ersetzen. Der grösste Vektor gibt die Richtung der grossen Seite des Rechtecks (Azimut von NA) und dessen halbe Länge (NA) an. Die kleine Seite des Rechtecks (halbe Länge NB) wird so bestimmt, dass alle Vektoren der Fehlereinflüsse im Rechteck enthalten sind. NB stammt aus dem Vektor mit der grössten zu NA senkrechten Komponente.

Wie die Zuverlässigkeitskreise sind die orientierten Rechtecke vom Koordinatensystem unabhängig.

Tabellarisch können die Zuverlässigkeitsrechtecke mit 3 Werten (NA, NB, Azimut von NA) angegeben werden.

Die Beobachtungen, die für die Bestimmung von NA bzw. NB massgebend waren, sollten mit dem Rechteck angegeben werden. Dadurch kann die Beurteilung wesentlich erleichtert werden.



Fig. 8 Das Zuverlässigkeitsrechteck

c) Die nach den Trägheitsachsen orientierten Rechtecke

Es gibt Sonderfälle, in welchen die Rechtecke, die nach dem grössten Einflussvektor orientiert sind, eine unstetige Funktion der Beobachtungen erhalten. Das heisst, dass eine kleine Beobachtungsänderung zu einer sprunghaften Änderung der Orientierung des Rechtecks führen kann.

Um diese Eigenschaft zu beseitigen, kann man das Rechteck anstatt nach dem grössten Vektor nach den Trägheitsachsen orientieren. Die halben Seitenlängen sind dann so zu bestimmen, dass die Einflussvektoren im Rechteck enthalten sind [Wicki, 1991].

Da die befürchtete Unstetigkeit hauptsächlich in konstruierten Beispielen auftritt (genau symmetrische Figuren), wurde diese dritte Variante vorläufig nicht weiter verfolgt.



Fig. 9 Nach den Trägheitsachsen orientiertes Zuverlässigkeitsrechteck

11.10 Die Anwendung der Zuverlässigkeitsmodelle

Die Berechnung der in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten Zuverlässigkeitsindikatoren ist ziemlich einfach, aber die Wiederholung für die Punkte eines Netzes und für mehrere Varianten erfordert trotzdem einen beträchtlichen Arbeitsaufwand.

Es ist also offensichtlich, dass die praktische Anwendung dieser Methoden an einen Computer (gross oder klein), für den man sich auch entsprechende Programme verschaffen kann, gebunden ist.

Literaturverzeichnis

Bencini, P.:	Nozioni sulle applicazioni della teoria degli errori alla geodesia				
	operativa, Istituto geografico militare, Firenze 1988				
Conzett, R.:	Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung I 1985, Vorlesung				
	ETHZ, nicht veröffentlicht				
Dupraz, H.:	Théorie des erreurs 2, EPFL, Département de génie rural et géo-				
	mètre 1985				
Gotthardt, E.:	Einführung in die Ausgleichungsrechnung; 2. Auflage, 1978; Her-				
	bert Wichmann Verlag, Karlsruhe				
Grossmann, W.:	Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 3. Auflage, 1969; Sprin-				
	ger-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York				
Höpcke, W.:	Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung; Walter de Gruyter Ber-				
	lin, New York, 1980				
Howald, P.:	Théorie des erreurs 1, EPFL, Département de génie rural et géo-				
	mètre 1988				
Koch, K.R.:	Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen,				
	Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1980				
Pelzer, H.:	Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Kon-				
	rad Wittwer Stuttgart 1985				
Wolf, H.:	Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate;				
	Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968				
	Ausgleichungsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung;				
	Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1976				

12. Koordinatentransformationen

12.1 Das Problem im allgemeinen

Gegeben ist die Lage von Punkten in einem Koordinatensystem, gesucht sind die Koordinaten der gleichen Punkte in einem anderen.

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_{\mathbf{y}} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

In der klassischen Geodäsie ist die Höhenbestimmung von der Lagebestimmung getrennt, so dass auch das Transformationsproblem in Lage (2 Dimensionen) und Höhe getrennt werden kann.

a) Wenn die Funktionen F_x und F_y bekannt sind, sind die Lösungen einfach.

Beispiele:	Geographische Koordinaten	\rightarrow	Landeskoordinater	
	Projektion A	\rightarrow	Projektion B	

Es handelt sich um eine wohldefinierte Koordinatentransformation.

b) Wenn die Funktionen \mathbf{F}_x und \mathbf{F}_y unbekannt sind und wir zuwenig Angaben besitzen, um sie zu bestimmen, ist das Problem unlösbar.

Beispiel: Man möchte räumliche Koordinaten, doch man besitzt nur eine gewöhnliche photographische Aufnahme.

c) In der Regel wird das Problem zwischen den zwei Extremfällen gestellt. Die Funktion ist in der Art bekannt, aber einige Koeffizienten (allgemein Parameter genannt) sind noch zu bestimmen.

Dafür verfügt man über einige Punkte, die sowohl im Ausgangskoordinatensystem als auch im Zielkoordinatensystem bekannt sind. Das Ausgangskoordinatensystem nennt man oft Lokalkoordinatensystem, während das Zielkoordinatensystem Global-Koordinatensystem genannt wird. Die Punkte, die in beiden Koordinatensystemen (global und lokal) bekannt sind, nennt man Passpunkte oder auch Stützpunkte. Die Lösung solcher Probleme wird in zwei Phasen geteilt:

 In der ersten Phase berechnet man die unbekannten Parameter der Transformationsfunktion mit Hilfe der verfügbaren Informationen, insbesondere der Koordinaten der Punkte, die in beiden Koordinatensystemen bekannt sind.

Da normalerweise diese Parameter nicht deterministisch bestimmbar sind, schätzt man sie im Sinne eines Optimierungsverfahrens mit einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

- In der zweiten Phase transformiert man die Koordinaten aller Punkte, die im Ausgangskoordinatensystem bekannt sind in Koordinaten des angestrebten Systems.

Die Funktion \mathbf{F} ist selbstverständlich massgebend für die Eigenschaften der Transformation und da es unendlich viele Funktionen gibt, gibt es auch unendlich viele verschiedene Transformationen.

Bevor man sich mit der Frage beschäftigt, welche Funktionen in einem bestimmten Fall besonders geeignet sind, ist es zweckmässig sich mit den Eigenschaften von einigen typischen Transformationen zu befassen, die man in der Geodäsie oft verwendet.

12.2 Die Helmert-Transformation

In vielen Fällen möchte man eine Transformation haben, die keine Verzerrungen verursacht. Man möchte also, dass die geometrischen Figuren auch nach ausgeführter Koordinatentransformation ihre Form behalten (d.h. die Winkel, das Längen-verhältnis, die Parallelitätseigenschaften usw. sollen unverändert bleiben). Man spricht dann von einer Ähnlichkeitstransformation.

Der allgemeinste Fall einer solchen Transformation ist die Helmert-Transformation, in welcher die transformierten Koordinaten aufgrund einer Translation, einer Drehung und einer Streckung (Massstab) bestimmt werden.



 y_0 , x_0 , m, ω sind die Transformationsparameter, welche im ganzen Bereich konstant bleiben. Bei einer solchen Transformation ist besonders zu bemerken, dass die Funktion mit einer einfachen Substitution linear in den Parametern wird.

Für

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \cos \boldsymbol{\omega}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{m} \cdot \sin \boldsymbol{\omega}$$

wird

$$\mathbf{Y'_i} = \mathbf{y_o} + \mathbf{ay} + \mathbf{bx}$$

 $\mathbf{X'_i} = \mathbf{x_o} - \mathbf{by} + \mathbf{ax}$

Die Parameter \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 , \mathbf{a} , \mathbf{b} werden mit einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate so bestimmt, dass die transformierten Koordinaten aller Passpunkte möglichst gut mit ihren bekannten Globalkoordinaten zusammenpassen.

Das heisst, wenn

$$Y_i + v_{y_i} = Y'_i = y_o + ay_i + bx_i$$

 $X_i + v_{x_i} = X'_i = x_o - by_i + ax_i$

ist, werden y_0 , x_0 , a, b so bestimmt, dass die Summe der $v_{x_i}^2$ und der $v_{y_i}^2$ aller Passpunkte minimal wird.

Eigenschaften

- Die Streckung (Massstab) ist in allen Richtungen und an allen Orten gleich (konforme Abbildung, Ähnlichkeitstransformation).
- Die Form der Figuren im lokalen Koordinatensystem bleibt nach der Transformation unverändert.
- In der Regel werden die Korrelationen zwischen den fingierten Koordinatenbeobachtungen vernachlässigt.

- Die transformierten Koordinaten werden als lineare Funktion der Koordinaten im lokalen System berechnet.
- Man kann mit den Landeskoordinaten direkt rechnen. Aus numerischen Gründen (Anzahl Stellen) ist es zu empfehlen, die Koordinaten zu kürzen (Translation).
 Beispiel:

Anstatt mit (620'143.355, 230'861.222) zu arbeiten, rechne man mit (143.355, 861.222), wenn alle Punkte sich in der Nähe von (620'000, 230'000) befinden.

- Eine vorgängige Translation der Ursprünge beider Koordinatensysteme (global und lokal) auf die Koordinaten der Schwerpunkte der Passpunkte vereinfacht die Berechnung derart, dass die Helmert-Transformation "von Hand" berechnet werden kann.
- Die Helmert-Transformation hat vier Parameter.
- Zwei Passpunkte sind mindestens notwendig, um die vier Parameter zu bestimmen.
- Wenn nur zwei Passpunkte vorliegen (Minimalfall), werden die transformierten Koordinaten der zwei Passpunkte gleich wie die gegebenen Globalkoordinaten sein, so dass die Verbesserungen v_y und v_x verschwinden. Die Ausgleichung ist nicht kontrolliert.
- Wenn mehr als zwei Passpunkte vorliegen, werden die transformierten Koordinaten der Passpunkte nicht gleich wie ihre Globalkoordinaten (Filterung).

Anwendungsbereich

- Vergleich von Triangulationsresultaten (Varianten, Deformationsmessungen usw.).
- Vorstufe für komplexere Interpolationsverfahren (wo oft die Voraussetzung gilt, dass globales und lokales Koordinatensystem ungefähr gleich im Raum liegen sollen).
- usw.

Die Berechnung der Parameter

Die Beobachtungsgleichungen

$$Y_i + V_{y_i} = Y_o + ay + bx$$

 $X_i + V_{x_i} = X_o - by + ax$

erlauben die vier unbekannten Parameter Y_0 , X_0 , a, b mit Hilfe einer vermittelnden Ausgleichung zu bestimmen.

Da die Beobachtungsgleichungen linear sind, können die Verbesserungsgleichungen direkt hergeleitet werden:

$$V_{y_i} = Y_0 + ay + bx - Y_i$$
$$V_{x_i} = X_0 - by + ax - X_i$$

Wenn die Anzahl Passpunkte grösser als 2 ist, wird die Bedingung

$$\sum (V_x^2 + V_y^2) = Minimum$$

verwendet, um das Normalgleichungssystem zu bilden. In Matrizenform:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Z}$$

wobei N die Koeffizientenmatrix des Normalgleichungssystem ist:

Y	X _o	a	b
n	0	[y _i]	$\begin{bmatrix} x_i \end{bmatrix}$
0	n		$-\begin{bmatrix}\mathbf{y}_i\end{bmatrix}$
		$\left[x_{i}^{2}+y_{i}^{2}\right]$	0
			$\left[x_{i}^{2}+y_{i}^{2}\right]$
X der Vektor der unbekannten Parameter

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{Y}_{\mathrm{o}}, \mathbf{X}_{\mathrm{o}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$$

Z der Vektor der Absolutglieder

$$\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \left(\left[\mathbf{Y}_{\mathrm{i}} \right], \left[\mathbf{X}_{\mathrm{i}} \right], \left[\mathbf{y}_{\mathrm{i}} \mathbf{Y}_{\mathrm{i}} \right] + \left[\mathbf{x}_{\mathrm{i}} \mathbf{X}_{\mathrm{i}} \right], \left[\mathbf{x}_{\mathrm{i}} \mathbf{Y}_{\mathrm{i}} \right] - \left[\mathbf{y}_{\mathrm{i}} \mathbf{X}_{\mathrm{i}} \right] \right)$$

Das Gleichungssystem vereinfacht sich wesentlich, wenn der Ursprung beider Koordinatensysteme (global und lokal) auf den Schwerpunkt der Passpunkte verschoben wird.

Da in diesem Fall die Summen

$$[\mathbf{x}_i], [\mathbf{y}_i], [\mathbf{X}_i], [\mathbf{Y}_i]$$

gleich null werden.

In jedem Fall liefert die Lösung des Gleichungssystems die gesuchten Transformationsparameter.

12.3 Die allgemeine lineare Transformation (Affinität)

Die Helmert-Transformation hat vier Parameter und ist eine lineare Funktion der Lokalkoordinaten.

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{y}_{\mathbf{0}} + \mathbf{a}\mathbf{y} + \mathbf{b}\mathbf{x}$$

 $\mathbf{X'} = \mathbf{x_0} - \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{a}\mathbf{x}$

Man kann diese spezielle lineare Funktion allgemeiner schreiben, wenn man auf die Bedingung der Ähnlichkeit verzichtet. Man kommt dann zu folgenden Abbildungsgleichungen:

$$Y' = a + by + cx$$

 $X' = d + ey + fx$

Diese allgemeinste lineare Transformation ist die bekannte affine Transformation, die uns aus der projektiven Geometrie bekannt ist.

Die sechs Parameter (a, b, c, d, e, f) sind in der Regel unbekannt und werden mit einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Beobachtungsgleichungen sind

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i + \mathbf{v}_{\mathbf{y}_i} &= \mathbf{Y}' = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{y}_i + \mathbf{c}\mathbf{x}_i \\ \\ \mathbf{X}_i + \mathbf{v}_{\mathbf{x}_i} &= \mathbf{X}' = \mathbf{d} + \mathbf{e}\mathbf{y}_i + \mathbf{f}\mathbf{x}_i \end{aligned}$$

wobei die (y_i, x_i) die Lokalkoordinaten der einzelnen Passpunkte und die (Y_i, X_i) die dazugehörigen Globalkoordinaten sind, die als Beobachtungen für die transformierten Koordinaten wie bei der Helmert-Transformation angeschaut werden.

Eigenschaften

- Die Affinität hat sechs Parameter.
- Es sind mindestens drei Passpunkte notwendig, um die sechs Parameter zu bestimmen.
- Wenn nur drei Passpunkte vorliegen (Minimalanzahl), werden die transformierten Koordinaten der drei Passpunkte gleich wie die gegebenen Globalkoordinaten, so dass die Verbesserungen v_y und v_x verschwinden. Die Ausgleichung ist nicht kontrolliert.
- Wenn mehr als drei Passpunkte vorliegen, werden die transformierten Koordinaten der Passpunkte nicht gleich wie ihre Globalkoordinaten (Filterung).
- Die transformierten Koordinaten werden (wie bei der Helmert-Transformation) als **lineare Funktion der Koordinaten im lokalen System** berechnet.
- Man kann mit den Landeskoordinaten direkt rechnen. Eine vorgängige Translation (Koordinatenkürzung) ist aber aus numerischen Gründen empfohlen.
- Geometrische Eigenschaften der Affinität:
 - Aus der projektiven Geometrie wissen wir, dass
 - Geraden Geraden bleiben.
 - Parallele Geraden parallel bleiben.
 - Kegelschnitte ihren Typ behalten (Ellipsen bleiben Ellipsen usw.).
 - usw.

Man kann die affine Transformation in Komponenten zerlegen:

- Zwei Translationen (y₀, x₀).
- Eine Rotation (ω).
- Zwei richtungsabhängige Massstabsparameter $(\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{m}_{\max})$ mit der Richtung, in welcher \mathbf{m}_{\max} gilt (\mathbf{m}_{\min} wirkt in der dazu senkrechten Richtung).
- Einige Folgen davon
 - Die Form der Figuren bleibt nicht erhalten.
 - Die Winkel werden verzerrt.
 - Kreise werden Ellipsen.

Anwendungsbereiche

- Elimination von Verformungen, die Hauptrichtungen aufweisen (Papierverzug z.B.).
- Interpolationsverfahren mit maschenweise affinen Transformationen in einem triangulierten Gebiet.

12.4 Maschenweise Affine Transformationen



Das ganze Gebiet wird einmal in Dreiecksmaschen unterteilt. Die Knoten sind in der Regel Punkte, für welche sowohl Landeskoordinaten als auch lokale Koordinaten vorliegen. In besonderen Fällen können auch mit einem geeigneten Verfahren vorgängig interpolierte Punkte als Knoten verwendet werden. Für jedes Dreieck wird eine lineare Transformation so festgelegt, dass die Eckpunkte, die in beiden Koordinatensystemen vorliegen, genau diese Werte durch die Transformation erhalten. Die so bestimmte Affinität wird für alle Punkte des Dreiecks (innere und Randpunkte) verwendet.

Dieses Vorgehen hat folgende Vorteile:

• Jede Masche ist ein klar abgetrenntes Gebiet, in welchem die Transformation ausschliesslich von den Koordinaten der Eckpunkte abhängig ist.

- Lokale Verdichtungen wirken sich nur innerhalb der eigenen Masche aus.
- Bei Bedarf können lokale Verbesserungen in Teile von Maschen angebracht werden, wenn man sie mit transformierten Punkten begrenzt.
- Mit dieser linearen Transformation kann man jede komplexe Transformation approximieren (transformierte Punkte als fiktive Passpunkte).
- Die Transformation ist stetig, als lineare Funktion umkehrbar und leicht zu berechnen.

Als Nachteil kann hier die Richtungsunstetigkeit einer punktweise transformierten Linie beim Übergang von Masche zu Masche erwähnt werden.

Anwendung

Die Einführung einer neuen Landesvermessung (LV 95) bedingt, während längerer Zeit mit zwei verschiedenen Referenzen (Bezugsrahmen) zu arbeiten. Während dieser Zeit möchte man ein Transformationsverfahren haben, das eine Umrechnung der Koordinaten von einem System ins andere erlaubt.

$$(\mathbf{Y}_{\mathrm{LK}},\mathbf{X}_{\mathrm{LK}}) \leftrightarrow (\mathbf{Y}_{95},\mathbf{X}_{95})$$

Es wird während mehreren Jahren Gebiete geben, wo schon neue Landeskoordinaten bis zu den Detailpunkten existieren, während angrenzend dazu noch die bisherigen Koordinaten gelten. An diesen Randgebieten soll die Transformation erlauben, im gewünschten Bezugsrahmen (LV03 oder LV95) zu arbeiten.

Die Qualität der Transformation wird von der Dichte der Passpunkte (Punkte mit geodätisch bestimmten Koordinaten in beiden Systemen) abhängen und lokal sehr unterschiedlich sein.

Solange die Abstände unter den Passpunkten noch gross sind, muss der Ingenieur jede Anwendung der Transformation sorgfältig beurteilen. Nach einer genügenden Verdichtung wird die Qualität der Transformation so gut sein, dass transformierte Koordinaten und geodätisch bestimmte Koordinaten im Gebrauch als gleichwertig betrachtet werden können. Der frühere Bezugsrahmen (LV03) könnte dann ohne Bedenken in den neueren vollständig transformiert werden. Man benötigt für die Praxis eine einfachere mathematische Transformation, welche die ideale Transformation approximiert und während längerer Zeit beide Systeme verknüpft.

Folgende Anforderungen sind zu erfüllen:

- Die Punkte der bestehenden Landesvermessung (LV03), die in der LV95 neu bestimmt wurden, müssen hin und zurück die genauen Koordinatenwerte ergeben.
- Punkte in unmittelbarer Nähe müssen gleich transformiert werden (stetige Transformation).
- Das Verfahren muss einmal festgelegt werden, für die ganze Schweiz gelten (Norm), und solange in einem Gebiet nicht systematisch neu gemessen wird, muss die Transformation unverändert bleiben.
- Wo das neue Landessystem systematisch durch neue geodätische Messungen verdichtet wurde, soll die Transformation sukzessiv lokal verbessert werden können.
- Koordinaten, die einmal transformiert wurden, sollen jederzeit ohne Qualitätsverlust zurücktransformiert werden können.
- Die Berechnung muss einfach sein und wenig Rechenaufwand verursachen (PC, Geometerbüro).

Nach dem Vergleich verschiedener Alternativen hat sich die maschenweise Affine Transformation als die geeignetste für die Übertragung von der LV03 in die LV95 erwiesen.

12.5 Transformationen mit polynomen und anderen Funktionen

Eine lineare Abbildung einer Ebene in einer Ebene hat sechs frei wählbare Parameter, und so können wir drei Passpunkte durch die Transformation zur Übereinstimmung bringen.

In ausgedehnten Gebieten mit vielen Passpunkten und unregelmässigen Abweichungen zwischen Lokal- und Globalkoordinaten ist eine lineare Transformation zu wenig anpassungsfähig. Man kann die Anzahl frei bestimmbarer Parameter erhöhen, indem man Polynome höheren Grades oder andere Funktionen mit vielen Koeffizienten verwendet. So kann man jede beliebige Anzahl Passpunkte in Übereinstimmung bringen.

Wenn die gewählte Funktion vorgängig bekannte mathematische Zusammenhänge wiedergibt und die Anzahl Passpunkte genügend gross ist, um die Funktionsparameter zu bestimmen und zu **kontrollieren**, ist eine solche Methode zweckmässig.

Beispiel: Bestimmung von Projektionsparametern.

Wenn hingegen Polyonome oder andere Funktionen zur Approximation unbekannter Zusammenhänge verwendet werden, ist grosse Vorsicht am Platz, da die Eigenschaften solcher Funktionen nicht sofort ersichtlich sind.

Beispiel:



Polynom dritten Grades im eindimensionalen Fall

Wenn man solche Funktionen zur Approximation verwenden will, müsste man die Eigenschaften der Funktion im Anwendungsbereich analysieren. Die Methoden haben wir in der Mittelschule gelernt (Kurvendiskussion), was aber in mehrdimensionalen Fällen sehr aufwendig werden kann.

Man findet Abhilfe beim Computer, indem man die erhaltene Funktion numerisch abtastet (Testgitter) und die Ergebnisse für eine visuelle Analyse graphisch darstellen lässt.



12.6 Interpolation und Prädiktion im allgemeinen

Bei der Interpolation werden in den geodätischen Anwendungen, die uns interessieren, Probleme gestellt, die in der Form gleich aussehen wie die Probleme, die bei den Transformationen beschrieben werden. Die Betrachtungsweise ist hingegen eine andere. Zu den Unterschieden kann man sagen, dass bei den Transformationen das Funktionale im Vordergrund steht, während bei der Interpolation das Stochastische in der Regel besonders betont wird.

Interpolation und Extrapolation sind geläufige Begriffe; sie werden im Gesamtbegriff Prädiktion zusammengefasst.



12.7 Eindimensionale Prädiktionsprobleme

Aus einigen erhobenen Werten der abhängigen Variable sind interpolierte oder extrapolierte Werte gesucht.

Extreme Beispiele

- a) Diagramm des Heizölverbrauchs nach der Aussentemperatur.
- b) Lotto-Zahlen.
- c) Der Betrag in unserer Telefonrechnung.

Voraussetzung für eine Prädiktion ist ein Zusammenhang zwischen den gesuchten Werten und den bekannten Stützwerten. Der Zusammenhang kann funktional oder stochastisch (Korrelation) sein.

Die Genauigkeit der Stützwerte ist ebenfalls von Bedeutung bei der Prädiktion. Weit reichende Korrelation und kleine Genauigkeit lassen eine Filterung als zweckmässig erkennen.

Man kann sich unendlich viele Prädiktionsverfahren konstruieren. Das Problem ist, das geeignete für die vorhandenen Daten zu wählen.

12.8 Funktionale Ansätze für die Koordinatenbestimmung

Es gibt Fälle, in welchen man die mathematischen Zusammenhänge zwischen Koordinaten im globalen und lokalen System kennt. Man weiss, wie die Global- und die Lokalkoordinaten entstanden sind und alle Informationen sind noch vorhanden.

Beispiele

- a) Die Lokal- und Globalkoordinaten stammen aus zwei verschiedenen, aber bekannten Ausgleichungen.
- b) Die Projektionsabbildungen sind bekannt und man weiss, mit welchen Parametern die Transformationen zu berechnen sind.

Die naheliegendste und beste Lösung in solchen Fällen ist die Berechnung der Koordinaten mit Hilfe des korrekten mathematischen Modells.

Vorteile:

- Die mathematischen und physikalischen Eigenschaften werden individuell behandelt.
- Die Genauigkeit kann besser geschätzt werden.
- Systematische Einflüsse werden eliminiert.

Nachteile:

- Der Aufwand kann sehr gross werden.
- Oft sind nicht alle mathematischen Zusammenhänge bekannt oder es ist schwer, sie zu gewinnen.

Vor jeder Anwendung eines Prädiktionsverfahrens muss man sich fragen, ob mindestens Teile des Prozesses funktional bekannt sind. Es ist oft zweckmässig, diese bekannten Teile vorgängig zu berücksichtigen. Manchmal unterscheiden sich zwei Koordinatensätze der gleichen Punkte, weil die dazugehörigen Koordinatensysteme stark verschoben und verdreht sind. Man kann in solchen Fällen mit einer vorgängigen Helmert-Transformation die Koordinatensysteme in ungefähre Übereinstimmung bringen.

Im Folgenden werden wir annehmen, dass die Global- und Lokalkoordinaten sich nur wenig unterscheiden, weil grosse funktionale Unterschiede zwischen den beiden Systemen vorgängig eliminiert werden können.

12.9 Stochastische Ansätze für die Koordinatenbestimmung

Wenn man die mathematischen Zusammenhänge zwischen den zwei Koordinatensystemen nicht kennt, d.h. wenn keine funktionalen Transformationen die Passpunkte zur genauen Übereinstimmung gebracht haben, bleibt nichts anderes übrig, als die Koordinatendifferenzen zwischen den transformierten und bekannten Koordinaten der Passpunkte als Zufallsvariablen zu betrachten.

Wenn diese zu korrigierenden Koordinatendifferenzen unter sich korreliert sind, können wir Korrekturen auch für Punkte schätzen, die nur im Lokalkoordinatensystem bekannt sind (zu prädizierende Punkte). Es gibt unendlich viele Verfahren, daher folgen nur einige Beispiele.

Beispiel 1

Inversionsfreie Prädiktion

Es handelt sich um einfache Verfahren, in welchen man die Korrekturen der zu prädizierenden Punkte als gewogenes Mittel der bekannten Korrekturen der Passpunkte berechnet.

$$\Delta \mathbf{X}^* = \frac{\sum \mathbf{p}_i \Delta \mathbf{X}_i}{\sum \mathbf{p}_i}$$
$$\Delta \mathbf{Y}^* = \frac{\sum \mathbf{p}_i \Delta \mathbf{Y}_i}{\sum \mathbf{p}_i}$$

Die Feststellung, dass Nachbarpunkte ähnliche Korrekturen haben werden (starke Korrelation), wird bei der Wahl der Gewichte berücksichtigt. Die Gewichte werden als Funktion der Distanz S_i zwischen dem zu prädizierenden Punkt und jedem Passpunkt gewählt.

z.B.

$$p_i = \frac{1}{S_i^{\lambda}} \qquad (\lambda \text{ ist eine Konstante})$$

Wenn eine Filterung gewünscht wird, d.h. wenn man die Globalkoordinaten der Passpunkte mit Hilfe der Nachbarpasspunkte noch etwas verbessern wird, kann man

$$\mathbf{p_i} = \frac{1}{\mathbf{S_i^{\lambda}} + \mathbf{C}} \qquad (\lambda \text{ und } \mathbf{C} \text{ sind Konstanten})$$

einsetzen. [Wolf, 1983]

Beispiel 2

Die Methode HELVEC, die von L. Barraud nach dem Prinzip der inversionsfreien Prädiktion aufgebaut wurde. Die Konstante λ wurde gleich zwei eingesetzt. Es ist keine Filterung vorgesehen ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$) [Simos-Rapin, 1986]

Beispiel 3

Die Interpolation nach dem arithmetischen Mittel

Diese Lösung, die eine Erweiterung des inversionsfreien Prädiktionsverfahrens darstellt, ist im Bundesamt für Landestopographie in den 80er Jahren entwickelt worden. Sie ist im Computer-Programm TRANSINT enthalten (siehe Anhang 1).

Beispiel 4

Interpolation nach kleinsten Quadraten (QUINT)

Diese Interpolationsmethode, die von K. Kraus entwickelt wurde, orientiert sich an der Kollokationsmethode und stützt sich auf ein strenges Ausgleichungsprinzip: die Minimalisierung des mittleren Fehlers der interpolierten Werte. Die Methode nimmt Bezug auf den Begriff der Korrelation zwischen den Stützpunkten. Die Anfangsabweichungen betrachtet man als Summe von zwei Komponenten: die erste als rein zufällige und die zweite als systematische.

Das Ziel der Methode ist die Schätzung der systematischen Komponente (zu interpolierender Wert) in allen Punkten des Gebietes aufgrund der bekannten Abweichungen der Stützpunkte.

Die Korrelation \mathbf{r}_{ij} zwischen zwei Punkten \mathbf{P}_i und \mathbf{P}_j ist Funktion der Distanz \mathbf{d}_{ij} zwischen den Punkten und ist durch eine Gauss'sche Glockenkurve beschrieben:

$$\mathbf{r_{ij}} = \mathbf{C}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{c}^2} \cdot \mathbf{d_{ij}^2}$$

Die zwei Funktionsparameter sind vom Anwender zu wählen:

- Der erste Parameter C(0) wiedergibt die Korrelation zwischen zwei sehr nahen Punkten. Wenn dieser Wert sich 1 n\u00e4hert, bedeutet dies, dass der zuf\u00e4llige Anteil (Rauschen, noise) sehr klein ist. Eine Filterung ist nicht erw\u00fcnscht. Kleinere Werte von beispielsweise C(0) = 0.5 bedeuten, dass die Korrelation
 - sehr naher Punkte höchstens **0.5** erreicht und daher der zufällige Anteil relativ gross ist.

Der zweite Parameter c beeinflusst die Form der Kurve. Er ist in direktem Zusammenhang mit dem Interpolationsradius R, definiert als Distanz zwischen zwei Punkten, für welchen die Korrelation 0.0001 ist. Es handelt sich um die Distanz, ab welcher sich die Stützpunkte praktisch nicht mehr auswirken.

Wenn die Korrelation festgelegt worden ist, können die Koordinaten eines Punktes P_j mit der folgenden Formel interpoliert werden:

$$DX_{j} = \left(r_{j1} \dots r_{jn}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{1n} \\ r_{21} & & \\ & 1 & \\ r_{n1} & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} DX_{1} \\ DX_{2} \\ \vdots \\ DX_{n} \end{pmatrix}$$

$Mit \mathbf{r_{j1}} \mathbf{r_{j2}} \dots \mathbf{r_{jn}}$:	Korrelationen zwischen den zu transformierenden
		Punkten und den Stützpunkten
r _{ik}	:	Korrelation zwischen den Stützpunkten \mathbf{P}_i und \mathbf{P}_k
DX _i , DY _i	:	Koordinatenunterschiede auf dem Stützpunkt P_i

Für die Berechnung der **DY**_j verwendet man die gleiche Formel.

Diese sehr gute, statistisch begründete Methode ist vielseitig und flexibel einsetzbar. Sie verbirgt aber einige Schwierigkeiten, da die Wahl der Parameter heikel ist und ihre geometrische Bedeutung nicht sofort sichtbar ist. Die Erfahrung zeigt, dass verschiedene Anwender unterschiedliche Resultate aus den gleichen Eingabedaten erhalten. Man muss daher die Resultate sehr aufmerksam analysieren. [Dupraz, 1986]

12.10 Kombinierte Ansätze für die Koordinatenbestimmung

12.10.1 Ein Modell der Wirklichkeit

In der Regel ist die Beziehung zwischen den zwei Koordinatensystemen weder rein funktional noch rein stochastisch. Es ist daher oft zweckmässig, die zwei Ansätze zu kombinieren.

12.10.2 Phasen-Modelle

Der naheliegendste Weg ist die Unterteilung der Transformation in Phasen, um die verfügbaren Informationen individuell anzuwenden.

So kann man z.B. in einer ersten Phase mit einer (Helmert-)Transformation die beiden Koordinatensysteme in gute Übereinstimmung bringen.

In einer zweiten Phase können die klein gewordenen Koordinatenunterschiede analysiert werden, und man wird sie gegebenenfalls mit einem stochastischen Ansatz interpolieren.

12.10.3 Die Kollokation

Die Kollokation nach der Methode der kleinsten Quadrate ist eine Erweiterung der üblichen Ausgleichungsmodelle und bietet die Möglichkeit, funktionale Transformation und stochastische Prädiktion in einem Ansatz zu kombinieren.

Die Unterschiede zwischen Vermittelnder Ausgleichung und Kollokation können wie folgt dargestellt werden.

a) Vermittelnde Ausgleichung

Die Beobachtungsgleichungen

$$\widetilde{\mathbf{l}}_{i} = \mathbf{l}_{i} + \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{i} = F_{i}(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}}, ...)$$

gelten als genau bekannt und es wird vorausgesetzt, dass die "wahren Werte" der Beobachtungen

$$\widetilde{l}_i$$
 oder $l_i + \widetilde{\epsilon}_i$

und die "wahren Werte" der unbekannten Parameter die Gleichungen erfüllen.

Die Parameter **x**, **y**, ... und die ausgeglichenen Beobachtungen werden so geschätzt, dass sie die Beobachtungsgleichung erfüllen. Das heisst:

$$\widetilde{l}_{i} = l_{i} + v_{i} = F_{i}(x, y, ...)$$

und die gewichtete Summe der Quadrate der Verbesserungen minimal wird

$$\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{V} = \sum \mathbf{p}\mathbf{p}\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{i}\mathbf{n}$$

Zu beachten sind die Funktionen F_i . Sie werden als bekannt vorausgesetzt.

b) Kollokationsmodell

Die funktionalen Zusammenhänge sind nur näherungsweise bekannt, so dass die wahren Werte die Beobachtungsgleichungen nicht genau erfüllen würden.

$$\begin{split} \widetilde{\mathbf{l}}_i &\approx F_i\big(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}}, ...\big) \\ \widetilde{\mathbf{l}}_i &= \mathbf{l}_i + \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \widetilde{\mathbf{s}}_i + F_i\big(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}}, ...\big) \end{split}$$

Die Schätzung der Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate wird so durchgeführt, dass

$$\mathbf{l}_{i} = \mathbf{s}_{i} + \mathbf{n}_{i} + \mathbf{F}_{i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots)$$

erfüllt sind und

$$n^{T}P_{nn}n + s^{T}P_{ss}s = Min$$

Die Lösung des Kollokationsproblems

Die Beobachtungsgleichungen werden linearisiert und können in Matrizenform geschrieben werden

$$Ax + s + n = w$$

die Gewichts- und Kovarianzmatrizen müssen bestimmt werden

$$P_{ss} = C_{ss}^{-1}$$
$$P_{nn} = C_{nn}^{-1}$$
$$C_{zz} = C_{nn} + C_{ss}$$

das heisst, C_{ss} und C_{nn} müssen bekannt sein.

Zuerst werden die unbekannten Parameter des funktionalen Modells bestimmt

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{w}$$

und dann werden die Signale (systematische Korrekturen) und das Rauschen (Zufallskorrektur, Verbesserung) berechnet

$$\mathbf{s} = -\mathbf{C}_{ss}\mathbf{C}_{zz}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{w})$$
$$\mathbf{n} = -\mathbf{C}_{nn}\mathbf{C}_{zz}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{w})$$

Man kann dann beliebig viele neue s' Werte prädizieren, wenn man die Kovarianzmatrix $C_{s's}$ zwischen den Passpunkten und den Neupunkten bestimmt:

$$\mathbf{s}' = -\mathbf{C}_{\mathbf{s}'\mathbf{s}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{w})$$

[Höpke, 1980], [Conzett, 1987]

12.10.4 Die Interpolation nach dem arithmetischen Mittel (TRANSINT)

Anwendungsbereich

Das Problem der Einpassung neuer Netze in die bestehende Triangulation höherer Ordnung stellt sich nach jeder Messung eines selbständigen Netzes.

Traditionell erreicht man die Lösung durch Einzwängen des Netzes bei der Ausgleichung: Die Koordinaten aller Punkte der übergeordneten Netze werden als fest betrachtet. Diese Lösung hat sich in der Praxis durchgesetzt, da sie weniger Rechenaufwand erfordert als alle Alternativmöglichkeiten.

Das Einzwängen der Netze führt aber nur zu befriedigenden Resultaten, wenn die als fest angenommenen Punkte tatsächlich mit den Messungen der Ausgleichung übereinstimmen oder beim Vorhandensein einiger Zwänge, wenn das eingezwängte Netz sehr homogen ist und somit eine regelmässige Verteilung der Widersprüche entsteht. Da in der Praxis diese Bedingungen nicht leicht einzuhalten sind, haben explizite Interpolationsverfahren im letzten Jahrzehnt an Bedeutung gewonnen, weil sie die Restzwänge unabhängig vom Netzaufbau regelmässig verteilen. [Carosio, 1980]

Die häufigste Applikation ist die Einpassung neuer Triangulationsnetze in das bestehende Fixpunktsystem. Das neue Triangulationsnetz (lokales System) ist mit den heutigen genauen Messgeräten gemessen und zwangsfrei ausgeglichen, die Ungenauigkeiten betragen daher wenige (1-2) cm. Die Fixpunkte (globales System) hingegen sind eine Erbschaft aus der Vergangenheit und enthalten oft örtliche systematische Fehler (im Dezimeterbereich); sie dürfen aber oft aus organisatorischen und wirtschaftlichen Gründen nicht geändert werden. Die Interpolationsmethode sollte die folgenden Bedingungen einhalten:

- die interpolierten Passpunkte müssen die Globalkoordinaten behalten
- die Zwischenpunkte sind homogen und ohne Überkorrekturen zu interpolieren
- die Berechnung muss schnell und preisgünstig durchgeführt werden können
- die Modellparameter sollten eine anschauliche Bedeutung haben

Im Bundesamt für Landestopographie wurde 1982 das Programm TRANSINT mit einem einfachen Verfahren, der sogenannten Interpolation nach dem arithmetischen Mittel, entwickelt, das weitgehend die gewünschten Eigenschaften aufweist.

Das mathematische Modell

Voraussetzungen

Wenn ein neues Netz mit zahlreichen Punkten zwangsfrei ausgeglichen wird, erhalten die Netzpunkte im Koordinatensystem der Berechnung (lokales System) neue Koordinaten. Um das neue Netz in eine bestehende Triangulation einzupassen, werden geeignete Punkte festgelegt, von denen man die Koordinaten in der bestehenden Triangulation (globales System) bereits kennt und die man, meist aus wirtschaftlichen Gründen, unverändert behalten will. Diese Punkte werden Passpunkte genannt. Da für die Passpunkte lokale und globale Koordinaten vorliegen, sind die entsprechenden Inkremente **DX** und **DY**, für welche

$$\begin{split} \mathbf{Y}_{lok} + \mathbf{D}\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_{gl} \\ \mathbf{Y}_{lok} + \mathbf{D}\mathbf{X} &= \mathbf{X}_{gl} \end{split}$$

gilt, aus den bekannten Global- und Lokalkoordinaten der Passpunkte direkt berechenbar.

Die Interpolationsfunktion berechnet darauf von den Inkrementen der Passpunkte ausgehend passende Korrekturen **DY**, **DX** auch für die anderen Punkte des lokalen Netzes und liefert dann ihre gesuchten Globalkoordinaten.

Die Interpolationsfunktion

Man kann die Interpolationsfunktion für die vorgesehenen Applikationen weitgehend frei aufbauen. Nur die vier erwähnten Bedingungen sollen eingehalten werden. Es ist daher zweckmässig mit ganz einfachen Funktionen zu beginnen, und dann durch sukzessive Verbesserung zu einer voll befriedigenden Interpolationsfunktion zu gelangen. Bereits das allgemeine arithmetische Mittel

$$DY_{p} = \frac{\sum p_{i} \cdot DY_{i}}{\sum p_{i}}$$
$$DX_{p} = \frac{\sum p_{i} \cdot DX_{i}}{\sum p_{i}}$$

liefert bei einem geeigneten Gewichtsansatz wie z.B.

$$p_i = \frac{1}{d_i^2}$$

gute Koordinaten für die interpolierten Punkte und befriedigt die gestellten Bedingungen, wenn die Passpunktdichte ungefähr konstant ist (\mathbf{d}_i ist die Distanz zwischen Neupunkt und i-tem Passpunkt) und wenn die Lokal- und Globalkoordinaten sich wertmässig nur wenig unterscheiden. Falls die zwei Koordinatensysteme stark voneinander abweichen, kann man sie mit einer Helmert-Transformation vorgängig anpassen.



Bekannte Abweichungen für die Passpunkte und interpolierte Werte für die Zwischenpunkte

Das allgemeine arithmetische Mittel kann wie eine vermittelnde Ausgleichung in Matrizenform dargestellt werden:

$$\mathbf{D}\mathbf{Y}_{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{DX}_{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \mathbf{X}$$

wo

A^T = (1, 1, ... 1) ein Vektor mit Einheitskomponenten,
P die Diagonalmatrix der Gewichte

und

DY bzw. DX die Vektoren der Inkremente aller Passpunkte sind.

Ein Schönheitsfehler entsteht, wenn mehrere Passpunkte sich an einem Ort treffen (z.B. wenn mehrere Exzentren vorliegen). Diese mehrfachen Passpunkte würden dann ein Übergewicht bekommen und die Homogenität der Interpolation stören. Um dies auch zu berücksichtigen, kann man eine Korrelationsmatrix **R** zwischen den Passpunkten einführen:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \dots & \mathbf{r}_{1n} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \dots & \mathbf{r}_{2n} \\ \mathbf{r}_{n1} & \mathbf{r}_{n2} & \dots & \mathbf{r}_{nn} \end{vmatrix}$$

Zur Berechnung der einzelnen Korrelationskoeffizienten \mathbf{r}_{ij} wurden zahlreiche Netze untersucht, um eine geeignete Korrelationsfunktion zu bilden. Die folgende Formel hat sich als gute Näherung für die üblichen Applikationen erwiesen:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0.9} \cdot \mathbf{e}^{-\ln(1.8) (d_{ij}/d_o)^2}$$

wobei d_{ij} die Distanz zwischen dem i-ten und j-ten Passpunkt und die Konstante d_0 die Distanz zwischen zwei Passpunkten ist, für welche die Korrelation $\mathbf{r} = 0.5$ gesetzt wird. Aus der Formel können die Werte der folgenden Tabelle berechnet werden, die das Variieren der Korrelation in Funktion der Distanz zeigen:

d _{ij} [/] d _o	rij
0	0.90
0.5	0.78
1	0.50
2	0.09
3	0.005
4	0.0001

Da in Triangulationsnetzen mit Maschenweite $= \mathbf{d}_0$ in der Praxis festgestellt werden kann, dass die Werte der Tabelle eine recht gute Näherung für die Korrelation zwischen den ausgeglichenen Koordinaten darstellen, bekommt der Parameter \mathbf{d}_0 eine anschauliche Bedeutung. Er kann als mittlere Maschenweite der Netze angegeben werden, aus welchen die Passpunkte ursprünglich bestimmt wurden.

Selbstverständlich gilt diese Bedeutung nur unter der Voraussetzung, dass die Herkunftsnetze keine wesentlichen systematischen Fehler enthalten, was z.B. bei neuen Netzen der Fall ist. Bei der Interpolation von neuen Triangulationen in alten, systematisch verfälschten Fixpunktnetzen muss d_0 einfach als Distanz zwischen den Passpunkten gelten, bei welchen die Korrelation **0.5** ist. Sie muss empirisch durch die Betrachtung der graphischen Darstellung der Koordinatenänderungen der Passpunkte bestimmt werden. d_0 wird dann so klein gewählt, dass um d_0 entfernte oder nähere Passpunkte tatsächlich sehr ähnliche Änderungsvektoren aufweisen. Ganz unterschiedliche Änderungsvektoren dürfen nur zwischen Passpunkten, die mehr als **2**· d_0 voneinander entfernt sind, auftreten.

Die Korrelationsmatrix ist nach der Festlegung von d_0 bestimmt und daraus berechnet man die entsprechende vollständige Gewichtsmatrix:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{d}}^{1/2} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{d}}^{1/2}$$

 $\mathbf{P}_{\mathbf{d}}$ ist die Diagonalmatrix der Gewichte, die für das allgemeine arithmetische Mittel verwendet wurde.

Die Matrizenformeln des allgemeinen arithmetischen Mittels können für diese allgemeinere Lösung unverändert übernommen werden:

$$\mathbf{D}\mathbf{Y}_{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{T}\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{Y}$$
$$\mathbf{D}\mathbf{X}_{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{T}\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{X}$$

Zu bemerken ist nur, dass im vorliegenden Fall die Matrix \mathbf{P} keine Diagonalmatrix ist.

Die gesuchten Korrekturen für die interpolierten Punkte sind, wie aus der Formel ersichtlich ist, lineare Funktionen der Koordinateninkremente der Passpunkte, d.h.

$$DY_p = c_1 \cdot dy_1 + c_2 \cdot dy_2 + \dots + c_n \cdot dy_n$$
$$DX_p = c_1 \cdot dx_1 + c_2 \cdot dx_2 + \dots + c_n \cdot dx_n$$

in jedem Fall $\sum c_i = 1$

Die Koeffizienten c_i sind in der Regel, wie es auch sinnvoll ist, positiv und führen daher zu keinen Überkorrekturen. Nur in Spezialfällen, wenn man stark korrelierte Passpunkte sehr unterschiedlich gewichtet, werden einige c_i negativ. Um dies zu vermeiden, werden die dazugehörigen Passpunkte bei der Interpolation nicht berücksichtigt. Die übrigen c_i erhalten, nach Neubildung der inversen Korrelationsmatrix und anschliessender Neuberechnung, die gewünschten positiven Werte ($c_i \ge 0$). So bleiben auch in extremen Fällen die geforderten funktionalen Eigenschaften der Interpolation erhalten.

Die numerische Lösung und das Programm

Das Verfahren ist im Programm TRANSINT der Landestopographie realisiert. Da geometrische Transformationen und Interpolationen organisatorisch sehr ähnliche Verfahren sind, schien es daher zweckmässig, beide Operationen in einem einzigen Programm zu kombinieren.

Eine Ähnlichkeitstransformation oder eine Interpolation oder beide hintereinander, können durch entsprechende Angaben in den Programmoptionen berechnet werden.

Gemeinsame Eingabedaten sind

- das File der Globalkoordinaten (Passpunkte)
- das File der Lokalkoordinaten (Passpunkte und Neupunkte)
- die Liste der Passpunkte

Die Berechnung erfolgt dann vollautomatisch, und es wird ein File der transformierten oder interpolierten Punkte erzeugt zur Weiterverwendung in anderen Computerprogrammen. Ein Papierausdruck mit den notwendigen Angaben wird ebenfalls bereitgestellt.

Für die Ähnlichkeitstransformation sind zusätzlich einige Modellparameter anzugeben. Die wichtigsten:

- Anzahl Unbekannte (um zu wählen zwischen Translation, Translation-Rotation und Helmert-Transformation)
- Die Transformationsparameter, wenn man sie vorgeben will, sonst werden sie durch Ausgleichung berechnet (Normalfall)
- Der Parameter k f
 ür die robuste Ausgleichung (f
 ür k = 0, was anstelle von k→∞ zu setzen ist, wird eine gew
 öhnliche Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgef
 ührt)

Für die Interpolation wird ein einziger Modellparameter benötigt: Die Netzmaschenweite d_0 des globalen Netzes (für neue Netze 3. Ordnung ca. 3000-5000 m, für 4. Ordnung ca. 500-1000 m, für Polygonnetze 50-100 m usw.), welche bei der Bildung der Korrelationsmatrix verwendet wird. Die numerische Lösung für die Interpolation sieht die folgende Reihenfolge von Operationen vor:

- Nur einmal für die ganze Interpolation
 - Bilden der Korrelationsmatrix gemäss Formel (6)
 - Inversion der Korrelationsmatrix
 - Bilden der Vektoren der Passpunktinkremente (**DY** und **DX**) für **Y** und **X** getrennt aus Formel (1)
- Für jeden zu interpolierenden Punkt
 - Bilden des Gewichtsvektors P_d gemäss Formel (3)
 - Berechnen des Vektors C aus

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{d}}^{1/2} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{d}}^{1/2} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{P}$$

Prüfen, ob kein c_i negativ ist. Wenn mindestens ein c_i negativ ist, wird für den Passpunkt, bei welchem c_i am kleinsten ist, das Gewicht auf Null gesetzt und die Inverse der Korrelationsmatrix durch einen Austauschschritt [Stiefel, 1963] entsprechend reduziert. Das Verfahren wird wiederholt, bis alle c_i die Bedingung c_i≥0 erfüllen. Dann folgt die Berechnung von

$$\mathbf{D}\mathbf{Y}_{\mathbf{p}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}\mathbf{Y}$$
 und $\mathbf{D}\mathbf{X}_{\mathbf{p}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}\mathbf{X}$

12.11 Wahl des Interpolationsverfahrens

12.11.1 Welche Interpolationsmethode sollen wir verwenden?

Die Vielseitigkeit der Anwendungen von geometrischen Transformationen und Interpolationsverfahren in der Geodäsie erlaubt keine allgemein gültige Antwort auf diese Frage.

Auch wenn der Anwendungsbereich auf die Transformation von digitalisierten Plankoordinaten im Landessystem beschränkt wird, bleiben zuviele mögliche Varianten und Kombinationen von Varianten zu analysieren. Wir können uns daher nur mit Entscheidungskriterien befassen. Die Wahl erfordert eine eingehende Untersuchung des vorhandenen Materials.

12.12 Die Ursachen der Koordinatenunterschiede zwischen Plan- und Landeskoordinaten

Die gegenseitige Abhängigkeit der Abweichungen zwischen Plan- und Landeskoordinaten bildet die Grundlage für die Wahl des Interpolations- oder Transformationsverfahrens.

Es lohnt sich, einige mögliche Ursachen von Abweichungen einzeln zu analysieren, um die Auswirkungen festzustellen.

a) Nur zufällige und stochastisch unabhängige Fehler (z.B. ungenaue Digitalisiereinrichtung)

Verfahren: nur Helmert-Transformation.

- b) Nur systematische Fehler infolge ungenauer Triangulationspunkte
 - Verfahren: (Transformation blattweise) und Interpolation im ganzen Gebiet. Die Koordinatenkreuze dürfen nicht als Passpunkte verwendet werden.
- c) Nur Papierverzug

Verfahren: Interpolation mit Koordinatenkreuzen als Passpunkte. Transfor mation ins Landessystem.

Die Wirklichkeit wird uns selbstverständlich eine Summe von verschiedenen Ursachen zeigen und daher sind wir gezwungen, Kompromisslösungen anzuwenden.

Eine sorgfältige Analyse der Fehlerursachen im Plan und der bekannten Koordinaten im Landessystem wie auch im lokalen System ist unerlässlich.

12.13 Das vorhandene Material

Das Transformationsvorgehen muss nicht nur an die Art der Ungenauigkeiten im Plan und in den Koordinaten angepasst werden.

Eine wesentliche Rolle spielen auch die zugänglichen Zusatzinformationen, die gegebenenfalls mitberücksichtigt werden könnten, wie zum Beispiel: Koordinaten der Polygonpunkte, Koordinaten von Detailpunkten und Originalmessungen.

12.14 Test der Transformation

Bei der Verwendung von komplexen Transformations- oder Interpolationsfunktionen ist ein Test der Funktionseigenschaften unerlässlich.

Das Vorgehen ist einfach und erlaubt, unerwünschte Eigenschaften der Funktion sofort zu erkennen. Man bildet neben den Dateien der Passpunkte im Global- und Lokalkoordinatensystem auch ein genügend dichtes Gitter von Punkten im lokalen System, die man transformieren lässt. In einer graphischen Darstellung kann man sehen, ob die Verschiebungsvektoren den Erwartungen entsprechen oder nicht.

12.15 Schlussfolgerungen

Die Verwendung von Transformations- und Interpolationsverfahren in der vorgesehenen Applikation: die Gewinnung von Landeskoordinaten aus digitalisierten Plankoordinaten ist ein Näherungsverfahren, das sicher schlechter ist als eine Neuberechnung, und wesentlich schlechter als eine Neuvermessung des Gebietes.

Die Ergebnisse sollten aber keineswegs schlechter werden als die heute vorhandenen Unterlagen. Bei einer geschickten Wahl des Vorgehens kann sogar die vorhandene "absolute" Genauigkeit deutlich verbessert werden.

Auch wenn zurzeit keine entsprechenden Konzepte erarbeitet wurden, ist es denkbar, dass eine sukzessive Katastererneuerung mit einer Reihenfolge und einer Kombination von Transformationen, Neuberechnungen, Neuvermessungen usw. ein langfristiger vorteilhafter Weg sein könnte.

Literaturverzeichnis

Robuste Ausgleichung. VPK 11-1979. Carosio, A.: Carosio, A.: Anwendung von Interpolationsverfahren in der Landestriangulation. VPK 10-1980. Robuste Ähnlichkeitstransformation und Interpolation nach dem Carosio, A.: arithmetischen Mittel. VPK 6-1982. Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Zürich, 1976 (Vorlesung). Conzett, R.: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung II. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, 1987 (Vorlesung). Dupraz, H., Etude de Transformations géométriques pour la mensuration cadastrale. EPFL. 7.1984. Durussel, R., Rapin, B.: Dupraz, H.: Les Transformations géométriques. EPFL. Précision et fiabilité, interpolation et transformation. 10.1986. (Tagungsunterlagen). Engelhardt, H.: Die Überführung der Soldner-Koordinaten in das Gauss-Krüger Koordinatensystem. Karlsruhe (ca. 1980). Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Springer, Berlin, 1969. Hein, G.W. Zur Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit verschiedener Interpound Lenze, K .: lations- und Prädiktionsmethoden. ZfV 11-1979. Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung. de Gruyter, Berlin, 1980. Huber, P.J.: Robust Estimation of a Location Parameter. Ann. Math. Statis., 1964. Huber, P.J.: Robust Estimation. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstehorie und Verw. Gebiete, 10-1968. Huber, P.J.: Robust Regression: Asymptotics, concjectures and Monte Carlo. Ann. Math. Statist., 1/5, 1973. Kraus, K.: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. ZfV 9-1970. Kraus, K .: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Phogorammetrie. Bildmessung und Luftbildwesen 1-1972. Kraus, K.: QUINT Programmbeschreibung. Stuttgart, 1972. Untersuchung zur Genauigkeit der Interpolation nach kleinsten Kraus, K.: Quadraten. ZfV 5-1974. Linkwitz, K.: Über die Systematik verschiedener Formeln der Ausgleichungsrechnung. ZfV 5-1960.

- Schaub, E.: Benützeranleitung TRANSINT. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Juni 1992.
- Schneider, D.: QUINT Programmbeschreibung (Version L+T). Bulletin des RZ-Landestopographie Nr. 2, 1979.
- Simos-Rapin, B.: Transformations géométriques la méthode HELVEC EPFL. Précision et fiabilité, interpolation et transformation. 10.1986 (Tagungsunterlagen).
- Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik. Teubner, Stuttgart, 1963.
- Walter, M.: Compensation d'observations médiates par la méthode robuste. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Bericht Nr. 37, 1980.
- Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung. Dümmler, Bonn, 1975.
- Wolf, H.: Neues Altes in der Ausgleichungsrechnung. VPK 7-1983.

13. Robuste Ausgleichung

13.1 Allgemeines

13.1.1 Einführung

Seit mehr als hundert Jahren wird über die statistischen Eigenschaften der geodätischen Beobachtungen gesprochen und über die Tatsache, dass das für die Auswertung bereitgestellte Material die Hypothese der Normalverteilung nicht vollständig befriedigt. In jeder Einführung in die Ausgleichungsrechnung werden die groben Fehler erwähnt, die nicht normalverteilt sind. Die meisten Definitionen solcher Fehler beziehen sich auf ihren Betrag und ihre Ursache, z.B."Grobe Fehler sind vorhanden, wenn die Messungswidersprüche beträchtlich grösser sind als...zu erwarten war [...] Sie beruhen meistens auf fehlerhaften Ablesungen [....] Unachtsamkeit oder Übermüdung".

Die Feststellung, dass die Beobachtungen fast, jedoch nicht vollständig normalverteilt sind, hat praktische Folgen, die lange vernachlässigt worden sind. Man hat sich darauf beschränkt, ganz allgemein geeignete Messanordnungen vorzuschreiben, die die Entdeckung der groben Fehler erlauben und danach zur Wiederholung der "falschen" Messungen führen. Solche allgemeinen, von jeher aktuellen Vorschriften wurden in den letzten zwei Jahrzehnten eingehend untersucht. Mehrere Lösungsansätze sind das Ergebnis einer regen Forschungstätigkeit.

13.1.2 Die Analyse der Zuverlässigkeit

Ziel solcher Verfahren ist die Zuverlässigkeit des vorgesehenen Messsystems zu überprüfen und dadurch optimale Messanordnungen und Berechnungsmethoden zu planen.

Sowohl die Triangulationsnetze als auch die Aufnahmen der Katastervermessung haben keinen sehr hohen Überbestimmungsgrad (in günstigen Fällen gibt es doppelt so viele Beobachtungen wie Unbekannten), so dass die Zuverlässigkeitsbetrachtungen eine wichtige Rolle spielen. Die eingehende Prüfung der graphischen Netzdarstellung ist in der Geodäsie bis heute das gebräuchlichste Vorgehen, um sich über die Zuverlässigkeit einer Messanordnung zu vergewissern. Die Kombination von Distanzmessungen mit Richtungen und Satellitenbeobachtungen sowie die Ausgleichung immer grösserer Netze mit den verschiedensten Unbekannten (Lotabweichungen, Massstabsfaktoren usw.) machen ein empirisches Urteil zunehmend schwieriger und haben die Entwicklung numerischer Verfahren begünstigt (siehe auch die entsprechenden Publikationen [Gerber, 1974], [Baarda, 1968], [Carosio, 1983]).

13.1.3 Die Fehlersuche a posteriori

Es handelt sich hier um Methoden, die die Eliminierung des Einflusses allfälliger grober Fehler auf die Ergebnisse bewirken sollen. Sehr oft werden nicht befriedigende Beobachtungen mittels statistischer Tests gesucht, daraufhin entfernt und wenn möglich wiederholt. Diese Suche basiert meistens auf einer Prüfung der standardisierten Verbesserungen, der geometrischen Bedingungen (z.B. Winkelsumme eines Dreiecks) oder auf mehr empirischen Methoden wie eine graphische Eintragung der Verbesserungen im Netzplan [Kraus, 1975], [Carosio, 1983].

Alle diese Verfahren bezwecken, zu einer Reihe von Messungen zu kommen, die dem klassischen Modell entsprechen. Die Aussortierung der "falschen Messungen" enthält aber einige willkürliche Komponenten, so dass die Verfahren an mathematischer Strenge einbüssen.

13.1.4 Die robuste Ausgleichung

Es gibt jedoch eine zweite Möglichkeit, der bis in letzter Zeit auch in der Geodäsie grössere Aufmerksamkeit geschenkt worden ist: nämlich der Entwicklung von Ausgleichungsverfahren, *robuste Ausgleichungen* genannt, die weniger sensibel auf grobe Fehler reagieren als die Methode der kleinsten Quadrate, so dass wirklichkeitsnahe Resultate erzielt werden können, auch wenn sich unter den Messungen noch einige grobe Fehler befinden, das heisst, wenn die Normalverteilung nicht ganz zutrifft. Den dazu nötigen *robusten Schätzfunktionen* haben die Statistiker seit einiger Zeit ihre Aufmerksamkeit gewidmet. Manche Autoren verwenden die Bezeichnung "nicht parametrische Schätzungen". Einige Überlegungen zu diesen Möglichkeiten bilden das Thema des vorliegenden Kapitels.

13.1.5 Historischer Überblick

Ursprung der Normalverteilung

Man werfe einen Blick auf den Ursprung der Normalverteilungshypothese für Messfehler [Huber, 1968]. Gauss stellt fest, dass die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten unmöglich ist, ohne die Verteilungsfunktion der Fehler zu kennen, und sagt aus, dass er diese unbekannte Verteilung durch den umgekehrten Weg gesucht hat: Das einfache arithmetische Mittel ist im einfachsten Ausgleichungsfall allgemein als gute Schätzung anerkannt. Eine derartige Schätzung liefert das wahrscheinlichste Resultat für Fehler X, dessen Wahrscheinlichkeit proportional zu einer Exponentialfunktion vom Typus $e^{-h^2x^2}$ ist, [Gauss, 1821]. Mit anderen Worten: Es wird (als Axiom) angenommen, dass im Falle von mehrfachen direkten Beobachtungen (mit gleichem Gewicht) das einfache arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Wert für die gesuchte Grösse liefert, und von dieser Annahme ausgehend wird die Normalverteilungsfunktion hergeleitet [Dore, 1960].

Um die Normalverteilung der Messfehler zu begründen, werden oft zu didaktischen Zwecken empirische Versuche durchgeführt. Sie haben jedoch für die Ausgleichungsrechnung wenig Bedeutung, da die aus einer begrenzten Anzahl Beobachtungen erhaltenen Histogramme keine signifikanten Angaben über die Häufigkeit grösserer Fehler erlauben. Diese aber ist gerade ausschlaggebend für die Wahl der Ausgleichungsmethode.

Erste Versuche mit Alternativhypothesen

Das unten stehende Beispiel zeigt, dass nicht immer das arithmetische Mittel als beste Schätzung für eine mehrfach beobachtete Grösse gegolten hat. In gewissen französischen Gegenden wurde, um den mittleren Ertrag einer Liegenschaft zu bestimmen, folgende Methode angewandt:

"Man betrachtet den Ertrag der letzten zwanzig Jahre, subtrahiert das beste und das schlechteste Jahr und teilt den Rest durch 18" (Zitat eines Anonymen 1821 aus [P.J. Huber, 1968]).

Newcomb wich ebenfalls von der klassischen Hypothese ab, indem er die Verwendung der folgenden Dichtefunktion anregte (1886):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\begin{array}{cc} -x^2 \\ \frac{-x^2}{2\sigma_1^2} \\ \frac{p_i}{\sigma_1} e \end{array} + \ldots + \frac{p_m}{\sigma_m} e \end{array} \right)$$

Diese Funktion bedeutet, dass die dazu gehörigen statistischen Variablen X aus m verschiedenen Untermengen Ω stammen, in denen normalverteilte X mit Standardabweichung σ_i enthalten sind. Die Konstanten p_i ergeben die Wahrscheinlichkeit, mit der eine statistische Variable X aus Ω_i stammt. Die Konstanten p_i sind so zu wählen, dass $\Sigma p_i = 1$ ist (i = 1, 2...m). Eine solche Dichtefunktion berücksichtigt die Feststellung, dass grosse Fehler häufiger sind, als dies die Normalverteilung erwarten lässt. Wegen den sehr arbeitsintensiven Rechnungen, die daraus folgen, ist aber damit kein Fortschritt erzielt worden.

Die Entwicklungen der letzten Jahrzehnte

Erst in den letzten vierzig Jahren wurde das Problem wirksam erfasst und es wurden praktisch verwendbare Alternativen entwickelt. Als Initiator gilt Tukey mit seiner Statistiker-Forschungsgruppe in Princeton, der das Problem populär zu machen begann. In den letzten Jahrzehnten haben überdies die Studien von Peter J. Huber in Zürich und Berkeley zu einem bemerkenswerten Fortschritt der Verfahren geführt.

13.2 Das stochastische Modell der robusten Ausgleichung

Die Hypothese der Normalverteilung für die beobachteten Grössen gilt im Prinzip noch. Sie wird nur etwas abgeschwächt. Sie ist nicht mehr eine absolute Voraussetzung.

Die Messfehler werden als stochastische Grössen mit Verteilung:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{1} - \mathbf{\varepsilon})\mathbf{\Phi} + \mathbf{\varepsilon}\mathbf{H}$$

 Φ ist die Normalverteilung, **H** die unbekannte Verteilung der groben Fehler und ϵ die geringe Wahrscheinlichkeit, mit der grobe Fehler auftreten.

Das heisst: Die Beobachtungen sind fast normalverteilt, und die angenommenen mittleren Fehler stimmen beinahe für alle Messwerte. Es gibt jedoch Beobachtungen, die dem Grundmodell nicht entsprechen (grobe Fehler). Ihre Verteilung ist unbekannt.

13.3 Funktionale Modelle

13.3.1 Schätzfunktionen

Sie sind die mathematischen Abbildungen zwischen den beobachteten Grössen L_i und den ausgeglichenen Werten (unbekannte Parameter, ausgeglichene Beobachtungen usw.).

Wenn die mathematischen Beziehungen vorliegen, die das Problem charakterisieren, geht es nun darum, die Funktionen zu finden, die die ausgeglichenen Beobachtungen oder andere Unbekannten liefern.
$$\overline{\mathbf{L}}_{i} = \mathbf{g}_{i} \left(\mathbf{L}_{1}, \mathbf{L}_{2}, \dots \mathbf{L}_{n} \right)$$
$$\overline{\mathbf{X}}_{i} = \mathbf{x}_{i} \left(\mathbf{L}_{1}, \mathbf{L}_{2}, \dots \mathbf{L}_{n} \right)$$

Die Schätzfunktion g_i und x_i wird robust sein, wenn sie gute Werte für L_i und X_i auch bei nicht ganz normalverteilten Beobachtungen ergeben. Solche robuste Schätzfunktionen können in verschiedenen Arten aufgebaut werden. Hier werden als Beispiel drei wichtige Gruppen erwähnt [Huber, 1968], [Kanani, 2000]:

a) M-Schätzer (Maximum-Likelihood-Typ)

Eine geeignete Funktion $\rho(x)$ einer reellen Variablen wird gewählt und die Funktion

 $\overline{L}_i = g_i(L)$ gesucht, so dass

$$\sum \rho(\overline{L}_i - L) = Min$$

Der Spezialfall $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ führt zum uns bekannten Verfahren der Methode der kleinsten Quadrate, wo die ausgeglichenen Beobachtungen so bestimmt werden, dass

$$\sum \rho\left(\overline{L}_{i} - L_{i}\right) = \sum \left(\overline{L}_{i} - L_{i}\right)^{2} = [vv] = Min$$

ist. Durch eine günstige Wahl von $\rho(\mathbf{x})$ erhält man die gewünschten Eigenschaften bezüglich der Empfindlichkeit auf grobe Fehler.

b) L-Schätzer (Linearkombinationen von Ordnungsstatistiken)

Im einfachsten Fall, nämlich die mehrfach direkt beobachtete Grösse, werden die **n** Beobachtungen so geordnet, dass

$$L_1 \le L_2 \le L_3 \le \dots \le L_n$$

ist.

Man nennt die L_i i-te Ordnungsstatistik der Stichprobe (L_1 , L_2 ..., L_n) [Bachmann, 1973], [David, 1981].

Die Schätzfunktion für $\overline{L}: g(L_i)$ ist vom Typ

$$\overline{L} = g(L) = \sum a_i \cdot L_i$$
 wo $\sum a_i = 1$

Ihre Bedeutung zeigt sich in einigen Beispielen

Beispiel 1:

Es wird

$$a_i = \frac{1}{n}$$

für alle i gewählt. Daraus folgt:

$$\overline{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \mathbf{L}_{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_{i}$$

das heisst, das einfache arithmetische Mittel.

Beispiel 2:

Wenn $a_1 = a_n = 1/2$ und ansonsten $a_i = 0$ gewählt wird, ist

$$\overline{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_n}{2}$$

Das heisst: $\overline{\mathbf{L}}$ wird so gewählt, dass der absolute Betrag der grössten Verbesserung zu einem Minimum wird. Es ist eine Ausgleichung nach Tschebyscheff. $\overline{\mathbf{L}}$ ist mit einer solchen Schätzung sehr empfindlich auf grobe Fehler (wenig robust). **Beispiel 3**: Für $a_1 = a_n = 0$ und

$$a_i = \frac{1}{n-2}$$

(wenn 1 < i < n) erhält man ein *robustes arithmetisches Mittel*

$$\overline{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots + \mathbf{L}_{n-1}}{n-2}$$

Andere Schätzfunktionen können auf den Grundlagen des Rang-Tests entstehen [Kreiyszig, 1968], [Huber, 1972].

Alle erwähnten Methoden führen, nach Annahme von einigen sehr allgemeinen Bedingungen, zu asymptotisch normalen Schätzungen, so dass in der Praxis, wenn der Freiheitsgrad genügend gross und das Netz gut ist, die ausgeglichenen Beobachtungen als normalverteilt betrachtet werden können. Damit sind alle üblichen Beurteilungsverfahren verwendbar.

c) Schätzer mit hohem Bruchpunkt

In der Literatur der robusten Statistik (u.a. [Hampel, 1986] wird als quantitatives Mass für die Robustheit eines Schätzers der *Bruchpunkt* verwendet. Dieser gibt den grösstmöglichen Anteil an (beliebig grossen) Ausreissern an, der in einer Stichprobe enthalten sein darf, bevor der Schätzer 'zusammenbricht', d.h. völlig unzuverlässig wird. Für das arithmetische Mittel ist der Bruchpunkt **0**. [Hampel und andere, 1986], [Wicki, 1992].

Der Median

Ein Erwartungswertschätzer mit hervorragenden Bruchpunkteigenschaften ist der Median. Man kann ihn verwenden, wenn **n** direkte Beobachtungen des gesuchten Parameters vorliegen.

Gegeben sind **n** Beobachtungen $(l_1, l_2, ..., l_n)$ mit gleichen Erwartungswerten und Varianz.

Die Beobachtungen können aufsteigend geordnet werden:

$$\mathbf{l}_{(1)} \leq \mathbf{l}_{(2)} \leq \dots \leq \mathbf{l}_{(n)}$$

Der Medianschätzer ist dann

oder

 $\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l}_{\left(\frac{\mathbf{n}+1}{2}\right)}$ falls **n** ungerade

$$\bar{\mathbf{l}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{l}_{\left(\frac{n}{2}\right)} + \mathbf{l}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)$$
 falls **n** gerade

Mit dem Median erhält man eine gute Schätzung von \overline{I} , auch wenn

 $\frac{1}{2}(n-1)$ falls n ungerade $\frac{1}{2}n-1$ falls n gerade

Beobachtungen beliebig verfälscht sind. Für $n \rightarrow \infty$ strebt der Anteil der Messungen, die beliebig falsch sein dürfen, gegen n/2. Der Median hat also einen Bruchpunkt von 0.5.

13.4 Die robuste vermittelnde Ausgleichung nach Huber

13.4.1 Grundlagen

Als eine überaus interessante Anwendung in der Geodäsie erweist sich die robuste vermittelnde Ausgleichung [Huber, 1972].

M-Schätzer werden als besonders geeignete Schätzfunktionen für die Unbekannten der Ausgleichung betrachtet, vor allem wegen der Ähnlichkeit mit der Methode der kleinsten Quadrate und wegen der ähnlichen Wirksamkeit. Es handelt sich hierbei darum, eine Funktion ρ (v) zu wählen und danach die Unbekannten zu bestimmen, so dass

$$\sum_{\rho}(\mathbf{v}) = \sum_{\rho}(\overline{\mathbf{L}}_{\mathbf{l}} - \mathbf{L}_{\mathbf{l}}) = \min$$

ist. P. J. Huber schlägt vor, die folgende stetige und konvexe Funktion zu verwenden:

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{2} \qquad \qquad \text{für} \qquad |\mathbf{v}| < \mathbf{k}$$
$$= \mathbf{k} \cdot |\mathbf{v}| - \frac{1}{2} \mathbf{k}^{2} \qquad \qquad \text{für} \qquad |\mathbf{v}| \ge \mathbf{k}$$

wobei **k** eine Konstante ist. In geodätischen Netzen mit nicht besonders grosser Überbestimmung kann $\mathbf{k} = \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{L}$ gewählt werden (eventuell $\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{L}$).

N.B. Die vorgeschlagene Schätzung ist für $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ identisch mit derjenigen der Methode der kleinsten Quadrate.



13.4.2 Numerische Lösung

Ausgangsdaten dafür sind wie bei der gewöhnlichen vermittelnden Ausgleichung **n** lineare Verbesserungsgleichungen, die aus **n** Beobachtungen entstanden sind:

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z + ... - f_i$$
 $i = 1, 2, ... n$
 $\sum \rho(v_i) = min$

erfüllen. Da die v_i - Funktion der Unbekannten sind, kann das Minimum-Problem durch das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \sum \rho \left(\mathbf{v}_{i} \right)}{\partial x} = 0 \qquad \qquad \frac{\partial \sum \rho \left(\mathbf{v}_{i} \right)}{\partial y} = 0 \qquad \dots$$

mit ebenso vielen Gleichungen wie Unbekannten gelöst werden.

Unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{\partial \Sigma \rho \left(v_{i} \right)}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

ist, kann die Differenzierung für jede Verbesserungsgleichung unabhängig stattfinden. Sie bildet den entsprechenden Normalgleichungsanteil.

Für die vorgeschlagene Funktion $\rho(v)$ müssen drei Fälle unterschieden werden:

a) $v \leq -k$

dann ist

$$\rho(v) = -kv - \frac{1}{2}k^2 = -k(ax + by + cz + ... - f) - \frac{1}{2}k^2$$

Nach der Differenzierung nach x, y, z... entsteht folgender Anteil für das Normalgleichungssystem

0, 0,	– ak
	– bk
	– ck
allos null	
	•••••
	•••••

d.h. kein Anteil für die Koeffizienten der Unbekannten und für die Absolutglieder
– ak, – bk, usw.

b) -k < v < k

ist
$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{y} + \dots - \mathbf{f})^2$$

Durch Quadrieren und Differenzieren entsteht der bekannte Normalgleichungsanteil wie bei der Methode der kleinsten Quadrate.

aa ba ca	ab bb cb	ac bc cc	- af - bf - cf
••••••	•••		
•••••	•••		•••••

c) $v \ge k$

Analog zu a) wird folgender Anteil gebildet:

0, 0,	ak
	bk
	ck
alles null	
	•••••

Die Addition der Normalgleichungsanteile ergibt das Normalgleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Unbekannten der robusten vermittelnden Ausgleichung sind.

Weil man nicht im Voraus weiss, in welchem der drei Intervalle die v_i sich befinden, sind einige Iterationen nötig. Begonnen wird mit der Annahme, dass für alle Beobachtungen $-\mathbf{k} < \mathbf{v} < \mathbf{k}$ ist. Nach einigen Wiederholungen wird für jede Verbesserungsgleichung bekannt sein, zu welcher Gruppe sie gehört. Die letzte Iteration ergibt dann die gewünschten Unbekannten.

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Unbekannten kann wie folgt geschätzt werden:

$$\hat{\mathbf{K}}_{xx} = \left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-\mathbf{r}}\right)^2 \cdot \frac{\sum_{\mathbf{n}-\mathbf{f}} \mathbf{v}^2 + \sum_{\mathbf{f}} \mathbf{k}^2}{\mathbf{n}-\mathbf{f}} \cdot \mathbf{Q}_{xx}^{(1)}$$

wo $\hat{\mathbf{K}}_{xx}$ die zu schätzende Varianz-Kovarianz-Matrix, **n** die Anzahl Verbesserungsgleichungen, **u** die Anzahl Unbekannten, **r** die Anzahl Verbesserungen, die nicht im Intervall (-**k**, **k**) enthalten sind, und $\mathbf{Q}_{xx}^{(1)}$ die Kofaktoren-Matrix der entsprechenden Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (1. Iteration) sind.

13.4.3 Schnelle numerische Verfahren

Die bisher geschilderte numerische Lösung, die direkt aus dem Schätzverfahren hergeleitet wird, ist rechenaufwendig.

Das Verfahren ist iterativ:

1. Iteration Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

i-te Iteration Zuteilung der Verbesserungen der dazugehörigen Intervalle

(-∞, -k), (-k, k), (k, +∞)
Bildung der neuen Normalgleichungen
Lösung des Systems usw.
Wiederholen, bis alle Verbesserungen dem richtigen Intervall zugeteilt sind.

Jede Iteration enthält die Lösung eines Gleichungssystems. Die Rechenzeit wird gross.

Eine wesentliche Beschleunigung kann erreicht werden, wenn man folgendes beachtet:

Satz 1

Die robuste Ausgleichung ergibt die gleichen Unbekannten, wenn, anstatt die Normalgleichungen zu verändern, die Beobachtungen derart modifiziert werden, dass nach der Ausgleichung

$$|v_i| = k$$

für die Verbesserungen, die ausserhalb des Intervalls (-k, k) fallen würden.

Aus der Beziehung

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{f}$$

entsteht für unkorrelierte Beobachtungen

$$\mathbf{v}_{i} = -\mathbf{p}_{1}\mathbf{q}_{vv}^{(i1)}\mathbf{f}_{1} - \dots - \mathbf{z}_{i}\mathbf{f}_{i} - \dots - \mathbf{p}_{n}\mathbf{q}_{vv}^{(in)}\mathbf{f}_{n}$$

und da $\mathbf{f}_i = \mathbf{l}_i - \mathbf{l}_0$, kann man für eine grosse positive Verbesserung ($\mathbf{v}_i > \mathbf{k}_i$) die Beobachtung so modifizieren:

$$l_{imod} = l_i - \frac{v_i \cdot k_i}{z_i}$$
 das heisst $f_{imod} = f_i - \frac{v_i \cdot k_i}{z_i}$

und man erhält

$$v_{imod} = k_i$$

Für eine stark negative Verbesserung ($v_i < -k_i$) ist eine Korrektur mit umgekehrten Vorzeichen anzubringen.

Falls mehrere Beobachtungen angepasst werden müssen, ist ein iteratives Verfahren vorzusehen, bis alle Verbesserungen der modifizierten Beobachtungen $+\mathbf{k}$ (bzw. $-\mathbf{k}$) geworden sind.

Der Vorteil der geschilderten Lösung ist naheliegend, die Normalgleichungsmatrix bleibt unverändert und nur eine Matrixinversion ist zu berechnen. Nur falls man die Linearisierung anpassen muss, sind die Verbesserungsgleichungen neu zu bilden, und die Inverse der Normalgleichungsmatrix muss berechnet werden.

Die so erhaltenen Unbekannten können in die Verbesserungsgleichungsmatrix eingeführt werden, um die effektiven Verbesserungen zu erhalten.

Satz 2

Die robuste Ausgleichung ergibt die gleichen Unbekannten, wenn anstatt die Verbesserungsgleichungen zu verändern, die mittleren Fehler der entsprechenden Beobachtungen derart vergrössert werden, dass nach der Ausgleichung

$$|\mathbf{v}_i| = \mathbf{k}_i$$

für die Beobachtungen, die sonst eine Verbesserung ausserhalb des Intervalls ($-\mathbf{k_i}, \mathbf{k_i}$) hätten. Dabei ist zu bemerken, dass eine Vergrösserung des mittleren Fehlers zu einer Reduktion des Gewichtes, zu einer Vergrösserung des Betrages der Verbesserung und zu einer noch stärkeren Vergrösserung des Grenzwertes $\mathbf{k_i}$ führt.

$$k_{neu} = \frac{\sigma_i \mod}{\sigma_i} \bullet k$$

Mit einem iterativen Verfahren kann man die Gewichte nach der folgenden Regel sukzessiv verändern:

 $\mathbf{p}_{i \mod} = \mathbf{p}_{i} \cdot \frac{\mathbf{k}_{i}}{|\mathbf{v}_{i}|} \qquad \text{für } |\mathbf{v}_{i}| \le \mathbf{k}_{i}$

Das Vorgehen ist zu wiederholen, bis es keine Verbesserung mehr mit

$$|\mathbf{v}_i| > \mathbf{k}_i$$

gibt.

13.5 Modernere funktionale Modelle der BIBER-Schätzer

Das Verfahren von Huber begrenzt den Einfluss der Verbesserungen.

Die Zielfunktion (auch Verlustfunktion genannt) der Methode der kleinsten Quadrate

$$\sum \frac{1}{2} pv^2 = \min$$

wird ersetzt durch

$$\sum \rho \left(\sqrt{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} \right) = \min$$

und neu erhält man die Lösung für eine vermittelnde Ausgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mathbf{p}_{i}} \mathbf{a}_{ij} \Psi\left(\sqrt{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_{i}\right) = 0 \qquad j = 1, \dots \mathbf{u}$$

 ψ (v) nennt man die Einflussfunktion der Verbesserungen wobei

$$\psi(\mathbf{v}) = \rho'(\mathbf{v})$$

die Ableitung der Zielfunktion ist.

Der Schätzer nach Huber hat folgende Funktionen:



Verlustfunktion und Einflussfunktion für den Schätzer nach P. Huber

Ab einer Grösse $\mathbf{k} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{\sigma}_1$ bleibt der Einfluss der Verbesserung konstant. In geodätischen Netzen ist die Überbestimmung nicht sehr gross und man weiss, dass bei schwacher Überbestimmung bereits kleine Verbesserungen gefährlich sein können. Es wäre daher vorteilhaft, wenn die Grenze der Einflussfunktion von der Standardabweichung der Verbesserung abhängig wäre.

Geeignet ist eine Grenze

$$\mathbf{k} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{vi}$$

mit σ_v Standardabweichung der Verbesserung und c = konstant (z.B. 2.5 oder 3.0). Diese Grenze bedeutet, dass der Einfluss der standardisierten Verbesserung w_i begrenzt wird.



Verlustfunktion und Einflussfunktion für eine moderne, robuste Ausgleichung

Das Verfahren entspricht einer robusten Ausgleichung nach Schweppe, die neben der Grösse der Verbesserung auch die geodätische Messanordnung berücksichtigt.

Dieses Verfahren ist unter der Bezeichnung BIBER-Schätzer von F. Wicki entwickelt worden und ist in der schweizerischen Software LTOP implementiert. Sie wird in der Praxis eingesetzt und hat sich in der Ausgleichung heterogener Netze bewährt.

Beispiel einer robusten Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer

Man berechne die folgende Einzelpunkteinschaltung mit 6 Beobachtungen



	Y	X
201	521810.400	181081.550
202	521860.880	182309.700
203	523010.920	181895.080

Auf dem Neupunkt 900 wurden folgende Grössen gemessen:

Station	Ziel	Richtungen	Distanzen
900	201	228.58 10	869.40
	202 203	345.22 70 82.03 70	672.78 717.24

angenommene mittlere Fehler 7^{cc} und 7 mm.

	Y	X
900	522900.002	181799.998

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate führt zu

Falls die Distanz 900-202 um 1 m verfälscht und in die Ausgleichung mit dem Wert 673.78 eingeführt wird, ergibt dieselbe nach der Methode der kleinsten Quadrate

	Y	X
900	522900.268	181799.694

Die Lage des Punktes 900 wird somit um ca. 41 cm verfälscht.

Ganz anders verhält sich die robuste Ausgleichung (mit c = 2.5). Mit den gleichen Beobachtungen wird

	Y	X
900	522900.010	181799.982

Der grobe Fehler hat einen sehr kleinen Einfluss auf das Resultat (weniger als 1 cm).

Station	Ziel	Richtungen (cc)	Distanzen (mm)
900	201	11	4
	202	- 1	- 989
	203	- 32	2

Die daraus berechneten Verbesserungen lassen den hier künstlich erzeugten Fehler sofort erkennen.

Die robuste Ausgleichung verkraftet einen Distanzfehler von einem Meter ohne wesentliche Verfälschung der Ergebnisse.

Varianzschätzung a posteriori für den BIBER-Schätzer (Varianz für die Gewichtseinheit)

$$S_{o}^{2} = \frac{1}{\beta} \frac{\sum_{i=1}^{i} p_{i} v_{i}^{2} + c^{2} \sum_{i=1}^{n} z_{i}}{n-u}$$

 $\sum_{k=1}^{k}$ ist die Summe der Verbesserung des Intervalls (-k,k)

ist die Summe der Verbesserung ausserhalb des Intervalls (-k,k)

ist die Konstante der robusten Ausgleichung (Einflussbegrenzung)

 z_i ist die partielle Redundanz $z_i = \sigma_{vi}^2 / \sigma_{li}^2$

 \sum^{a}

с

n–u ist die Überbestimmung (Anzahl Messungen minus Anzahl Unbekannte)

β ist ein Koeffizient zur Erhaltung der Erwartungstreue des Schätzers

$$\beta_{1} = \mathbf{E}_{\Phi} \left| \sigma_{0}^{2} \cdot \mathbf{z}_{i} \Psi_{c}^{2} \left(\frac{\widetilde{\mathbf{v}}_{i}}{\sigma_{0} \sqrt{\mathbf{z}_{i}}} \right) \right|$$
$$\beta = \frac{1}{n} \sum \beta_{1}$$

13.6 Kategorien von modernen M-Schätzern

Die modernen Verfahren der robusten Schätzer wurden ursprünglich für Regressionsprobleme entwickelt und daraus ist die Terminologie entstanden.

Huber-Schätzer

Die robuste Ausgleichung nach Huber begrenzt den Einfluss der Verbesserungen



Huber

 $\sum \Psi_{\rm c} \left(\frac{{\bf v}_{\rm i}}{\sigma_{\rm i}} \right) {\bf x}_{\rm i} = 0$

Dadurch bewirken Beobachtungen mit grossen x_i -Werten stark auf die Ausgleichungsresultate.

Schätzer nach Mallows

Um das zu vermeiden, hat Mallows [Mallows, 1975] vorgeschlagen, die Beobachtungen mit einem zusätzlichen Gewicht zu versehen, in welchem die "Distanz" vom Schwerpunkt der Beobachtungen berücksichtigt wird.



Damit werden alle Beobachtungen, die aussergewöhnlich entfernt sind, vom Mittelpunkt der anderen Messungen in ihrer Wirkung begrenzt.

Schätzer nach Schweppe

Eine andere Alternative, um die Wirkung der Hebelarmpunkte (leverage points) zu reduzieren, wird von Schweppe vorgeschlagen. Der Einfluss der Verbesserungen wird in Funktion der Grösse der Verbesserung und der Position der Beobachtung auf der X-Achse gesteuert.



Schweppe

$$\sum \psi_{c} w_{i} \left(\frac{v_{i}}{\sigma_{1}} \right) \cdot x_{i} = 0$$

 $\mathbf{w}_i = zus$ ätzliche Gewichte

Während bei der Methode von Huber eine falsche Beobachtung mit einer stark abweichenden X-Koordinate zu einer falschen Regressionsgeraden führt, sind die Methoden von Mallows und Schweppe auch in diesem Fall robust.

Das Modell der schweizerischen Landesvermessung [Wicki, 1992] ist ein Spezialfall der robusten Regression nach Schweppe.

Die balancierte Ausgleichung von Kampmann

G. Kampmann schlägt vor, zuerst die Konfiguration durch Bestimmung neuer Gewichte auszubalancieren, damit alle Beobachtungen die gleiche partielle Redundanz erhalten. Bei diesem Verfahren wird eine Methode der robusten Ausgleichung angewandt (z.B. Norm L1). Diese Methode ist jener von Schweppe sehr ähnlich.

13.7 Robuste Ausgleichungsverfahren und Zuverlässigkeit

Robuste Ausgleichungsmodelle nehmen von Anfang an in Kauf, dass die Beobachtungen nicht genau normalverteilt sind, und dass grobe Fehler oder sonst stark abweichende Messwerte vorhanden sein können. Das Ausgleichungsmodell erfordert im Prinzip keine besondere Analyse a posteriori der Beobachtungen.

Die Definition der Zuverlässigkeit, die man für die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, stützt sich auf die Wahrscheinlichkeit, mit welcher allfällige grobe Fehler gefunden werden. Da bei robusten Verfahren keine groben Fehler gesucht werden, kann keine Wahrscheinlichkeit für das Finden berechnet werden. Die herkömmliche Definition der Zuverlässigkeit ist daher nicht mehr anwendbar. Der Begriff der inneren Zuverlässigkeit hat keine Bedeutung. Trotzdem besteht eine Beziehung zwischen allfälligen groben Fehlern und geschätzten Parametern (Koordinaten usw.). Es ist interessant zu wissen, wie gross die Verfälschung der Koordinaten sein kann, wenn eine Messung grob falsch ist.

Man kann den Einfluss eines unendlich grossen Messfehlers $\Delta_i(\Delta_i \rightarrow \infty)$ auf die Koordinaten und anderen Parameter berechnen.

Die Einflussfunktion $\psi(\mathbf{v})$ ergibt den Einfluss der Verbesserung auf die Ausgleichungsresultate. In den bisher geschilderten Modellen ist

$$\psi(\mathbf{v}_{i}) = \mathbf{v} \quad \text{für} \quad | \mathbf{v}_{i} | \leq \mathbf{k}_{i}$$
$$\psi(\mathbf{v}_{i}) = \mathbf{k} \quad \text{für} \quad | \mathbf{v}_{i} | > \mathbf{k}_{i}$$

Ein unendlich grosser Fehler hat einen Einfluss wie eine Beobachtung, für welche

$$|\mathbf{v}_i| = \mathbf{k}_i$$

In anderen Worten, ein Fehler $\Delta_i \rightarrow \infty$ in der robusten Ausgleichung hat die gleiche Wirkung wie ein Fehler

 $\nabla_{i}^{*} = \frac{k_{i}}{z_{i}}$ $z_{i} = \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{11}^{(ii)}}$

wobei

das lokale Zuverlässigkeitsmass ist.

Für das Modell der schweizerischen Landesvermessung, bei welchem die standardisierte Verbesserung w_i einen beschränkten Einfluss hat, ist

$$\mathbf{k}_{i} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{vi}$$

Man ist so in der Lage, für jede Beobachtung den kleinsten groben Fehler ∇l_i (reduzierter grober Fehler) zu bestimmen, der sich wie ein unendlich grosser Fehler in einer Ausgleichung ohne zufälligen Fehler auswirkt. Man kann also für jede Beobachtung den Einfluss eines unendlich grossen Fehlers auf die Erwartungswerte berechnen, der in der Ausgleichung berechneten oder später hergeleiteten Grössen.

Dies erlaubt in ähnlicher Art wie beim Modell der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate Indikatoren der äusseren Zuverlässigkeit für die Koordinaten zu berechnen.

Die Ergebnisse bei der robusten Berechnung ∇X , ∇Y wären so mit den entsprechenden Indikatoren der M.d.k.Q. nur vergleichbar, wenn im zweiten Fall das Risiko $\beta = 50\%$ gewählt wird und damit die Verteilung des zufälligen Messfehlers ausschaltet.

Um auch bei den üblichen Risikogrenzen ($\beta = 5\%$, 1% usw.) vergleichbare ∇X , ∇Y zu erhalten, muss man auch im robusten Modell den Einfluss der zufälligen Fehler berücksichtigen. Dies wurde mit einer empirisch festgelegten Vergrösserung der Einflussgrenze eines unendlich groben Fehlers auf die Ausgleichung erzielt, um den folgenden reduzierten groben Fehler jeder Beobachtung zu erhalten.

$$\nabla 1_i^* = \frac{\delta^* \cdot \sigma_{vi}}{z_i}$$

mit dem Verschiebungsfaktor

$$\delta^* = \mathbf{c} + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{w}}$$

 τ_w wird so bestimmt, dass die Verschiebung des Erwartungswertes der standardisierten Verbesserung wird bei der M.k.Q. gleich wie der Verschiebungsfaktor bei der entsprechenden robusten Ausgleichung wird.

Literaturverzeichnis

W. Baarda:	A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Delft 1968
W.K. Bachmann:	Estimation stochastique de la précision des mesures. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik. Fachblatt 4-73
A. Carosio:	Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme. IGP-Mittei- lungen 35, 7/83, Dissertation, 158 Seiten
A. Carosio:	Robuste Ausgleichung. Vermessung, Photogrammetrie, Kultur- technik. 11/79, S. 293-297
A. Carosio:	Moderne Methoden der Parameterschätzung in der Praxis. Robuste Ausgleichung. XIII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, 1317. März 2000, Technische Universität München
H.A. David:	Order Statistics. Wiley and Sons Inc., New York 1981
P. Dore:	Geodesia e Topografia Bologna, 1960
C.F. Gauss:	Göttingsche gelehrte Anzeigen. 1821
P. Gerber:	Das Durchschlagsnetz zur Gotthard-Basislinie. Schweizerische Bauzeitung Nr. 13, 1974
W. Grossmann:	Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Berlin 1969
F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseuw, W.A. Stahel:	Robust Statistics, The Approach Based on Influence Function. Wiley and Sons, New York 1986
P.J. Huber:	Robust Estimation of a Location Parameter. Zürich 1963

P.J. Huber:	Robust Estimation. Zürich 1968
P.J. Huber:	Robust Regression. Zürich 1972
P.J. Huber:	Robust Statistics. Wiley and Sons, New York 1981
E. Kanani:	Robust Estimators for Geodetic Transformations and GIS, Disser- tation Nr. 13521, IGP-Mitteilungen Nr. 70, ETH Zürich, Mai 2000
K. Kraus:	Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler. Allgemeine Vermessungsnachrichten Nr. 1, 1975
E. Kreyszig:	Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Göttingen 1968
K. Linkwitz:	Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichung. München 1960
E. Stiefel:	Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart 1963
F. Wicki:	Robuste Schätzverfahren für die Parameterschätung in geodäti- schen Netzen, Dissertation Nr. 12894, IGP-Mitteilungen Nr. 67, 11/98