Gruppenpuzzle zum Satz von Pythagoras

Author(s):
Hauser, Rainer

Publication date:
2008

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005798536

Gruppenpuzzle zum Satz von Pythagoras

Mentorierte Arbeit Fachdidaktik, ETH Zürich, Frühlingssemester 2008

Autor: Dr. Rainer Hauser
Betreuung: Kristine Barro
Datum: 14. August 2008

1. Einleitung

Diese Arbeit behandelt den Satz von Pythagoras und damit eng verwandte Themen als Gruppenpuzzle. Es werden vier Themen bearbeitet: Das erste Thema setzt sich mit Beweisen des Satzes von Pythagoras auseinander, das zweite Thema beschäftigt sich mit denjenigen Zahlen, die sich als Verhältnisse von Strecken geometrisch konstruieren lassen, die Umkehrung des Satzes von Pythagoras sowie die pythagoreischen Zahlentripel werden im dritten Thema behandelt, und im vierten Thema wird eine Formel für den Abstand von zwei Punkten in einem rechtwinkligen, zweidimensionalen Koordinatensystem gesucht.
Die vorliegende Arbeit führt in den Themenbereich ein, enthält detaillierte Arbeitsaufträge für die Behandlung der vier Themen und schliesst mit einem Rückblick und Ausblick ab, in dem gezeigt wird, in welchen Richtungen der Stoff weiterbehandelt werden kann. Die Aufgaben für das notwendige Einüben und die Wissenssicherung werden skizziert.

1.1. Zielgruppe und Vorwissen

Das Gruppenpuzzle ist für Schülerinnen und Schüler im 8. Schuljahr gedacht. An Vorwissen wird das vorausgesetzt, was an Schweizer Gymnasien üblicherweise auf dieser Stufe bekannt ist. Allgemein wird angenommen, dass in der Klasse das Thema Beweise bereits einmal angesprochen worden ist.
Aus der Arithmetik und Algebra wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler mit Variablen im Körper der reellen Zahlen arbeiten und dabei Gesetze wie das Distributivgesetz anwenden können sowie mit linearen Gleichungen und linearen Funktionen vertraut sind. Weiter sollten sie mit natürlichen Zahlen als Exponenten und mit Quadratwurzeln umgehen können, wobei angenommen wird, dass das Wurzelziehen als Umkehrung des Quadrierens arithmetisch eingeführt worden ist. Schliesslich sollten sie auch wissen, was irrationale Zahlen sind, und dass jede Wurzel aus einer Primzahl irrational ist.
An Vorwissen aus der Geometrie werden Grundkenntnisse über Dreiecke, Rechtecke und Quader sowie über Flächenberechnung, Kongruenz und Zeichnen mit Zirkel und Lineal vorausgesetzt. Speziell wird als bekannt angenommen, dass zwei zerlegungsgleiche Figuren in der Ebene den gleichen Flächeninhalt haben. Zusätzlich wird erwartet, dass sich die Schülerinnen und Schüler mit rechtwinkligen Koordinatensystemen in der Ebene, aber auch im Raum auseinander gesetzt haben und eine Vorstellung davon haben, wie man eine Funktion als Graph darstellt. Um Zahlen als Streckenverhältnisse geometrisch zu konstruieren, wird vorausgesetzt, dass die Ähnlichkeit und die Strahlensätze bekannt sind.

1.2. Lernziele

Leitidee: Der Satz von Pythagoras ist nicht nur einer der bekanntesten Sätze der Mathematik, an den – und insbesondere an dessen Formel – sich selbst Leute erinnern, die sonst alles vergessen haben, was sie in der Schule an Mathematik je gelernt hatten, sondern ist auch eine entscheidende Voraussetzung für die Entwicklung der Mathematik – insbesondere der Analysis – in den letzten vierhundert Jahren, weil dafür die rechtwinkligen Koordinatensysteme mit der einfachen Berechenbarkeit des Abstandes zwischen zwei

Punkten von nicht zu überschätzender Bedeutung sind. Weil er zudem die Arithmetik über die weiter zur Fermat'schen Vermutung führenden pythagoreischen Zahlentripel, die Algebra über die babylonischen Formeln und die Geometrie über die rechtwinkligen Dreiecke miteinander verbindet, eignet er sich sehr gut, um den Schülerinnen und Schülern die Mathematik als ein zusammenhängendes Ganzes zu vermitteln. Aus der Geometrie wissen sie, dass ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Der Satz von Pythagoras besagt, dass die dritte Seite nicht nur geometrisch konstruiert, sondern deren Länge auch berechnet werden kann, falls der eingeschlossene Winkel 90° ist, und schafft dadurch den Bezug zur Arithmetik. Diese Berechnung ist zudem nicht nur möglich, sondern benutzt auch lediglich bereits bekannte mathematische Hilfsmittel.
Durch die Bearbeitung der vier Themen, die von den einzelnen Gruppen behandelt werden, bekommen die Schülerinnen und Schüler auch einen Einblick in die Tätigkeit des Mathematisierens und lernen zu beobachten, entdecken und erfinden oder aber zu argumentieren und beweisen. Weil sie zum Schluss die Erkenntnisse ihrer Expertengruppe den übrigen Mitgliedern ihrer Stammgruppe weitergeben müssen, üben sie auch ihre mündliche Ausdrucksfähigkeit, womit alle vier allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts nach Erich Christian Wittmann abgedeckt sind.

Dispositionsziele: Die Schülerinnen und Schüler kennen den Satz von Pythagoras und erkennen Situationen, in denen er angewendet werden kann. Sie können ihn beweisen, verstehen seine Nützlichkeit bei der Längenmessung in rechtwinkligen Koordinatensystemen und seine Anwendbarkeit im Rahmen der ganzen Zahlen über die pythagoreischen Zahlentripel, verwenden ihn bei Diagonalen sowohl in Rechtecken als auch in Quadern und sehen die Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen nicht ausschliesslich als arithmetische, sondern assoziieren mit ihnen auch geometrische Objekte.

Operationalisierte Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler können im rechtwinkligen Dreieck aus der Länge der Katheten die Länge der Hypotenuse berechnen beziehungsweise allgemeiner aus der Länge von zwei Seiten die Länge der dritten ermitteln. Sie wenden dies sowohl auf die Diagonale in Rechtecken und Quadern wie auch auf die Distanz zwischen zwei Punkten in rechtwinkligen Koordinatensystemen an. Durch die Behandlung der vier Themen haben sie zusätzlich folgende Fertigkeiten erworben:

1. Sie können einen Beweis des Satzes von Pythagoras reproduzieren und jemandem verständlich erklären.
2. Sie können – gegeben eine Einheitsstrecke – eine Strecke mit der Länge $\sqrt{n}$ für jede natürliche Zahl n konstruieren.
3. Sie kennen die zwei bekanntesten pythagoreischen Zahlentripel (3, 4, 5) und (5, 12, 13), können aber auch systematisch weitere finden.
4. Sie können die Formel für den Abstand zweier Punkte in einem Koordinatensystem herleiten und jemandem verständlich erklären.

1.3. Übersicht über das Gruppenpuzzle

Einführungsphase: In den ersten Lektionen wird der Satz von Pythagoras vorgestellt. Weil es schwierig ist, die Behauptung des Satzes selber zu entdecken, wird sie einfach in den Raum gestellt und an Beispielen überprüft. Anschliessend wird das Leben von Pythagoras kurz historisch beleuchtet, und die Lehrperson führt die Regeln des Gruppenpuzzles sowie die vier zu behandelnden Themen ein. Als Vorbereitung auf das selbstständige Arbeiten in der Expertengruppe dient eine Lernaufgabe, mit welcher der Satz von Pythagoras für den Spezialfall des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks bewiesen wird. Zum Schluss werden die Stamm- und Expertengruppen zusammengestellt.

Erarbeitungsphase: Die Mitglieder der verschiedenen Stammgruppen, die das gleiche Thema gewählt haben, treffen sich in den Expertengruppen und bearbeiten die Arbeitsaufträge selbständig, aber gemeinsam. Die vier Aufträge sind so bemessen, dass eine Doppellektion genügt. Weil einzelne Schülerinnen und Schüler jedoch schneller sind als andere, gibt es bei jedem Auftrag eine Zusatzaufgabe, die etwas schwieriger ist und zu weitergehenden Reflexionen anregt.

Vermittlungsphase: Die Experten kehren in ihre Stammgruppe zurück und präsentieren sich gegenseitig das, was sie gelernt haben. Die Lehrperson geht von Stammgruppe zu Stammgruppe, um sich ein Bild zu machen, wie sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig über das Gelernte informieren, und beobachtet, was dabei gut und was nicht so gut abläuft. Für diese Phase sind vier Lektionen vorgesehen.

Phase der Evaluation und Integration: Zum Schluss werden im Sinne einer Wissenssicherung die gelernten Teile zu einem Ganzen zusammengefügt. Dies geschieht in zwei Schritten, in denen einerseits das Wissen gefestigt und andererseits überprüft wird. Die Lehrperson fasst im ersten Schritt übersichtlich das zusammen, was die verschiedenen Expertengruppen erarbeitet haben und wiederholt so das Gelernte, während sie im zweiten Schritt Aufgaben stellt, die während der Lektion begonnen und als Hausaufgaben fertiggestellt werden sollen.

1.4. Bemerkung zur Darstellung

In der vorliegenden Arbeit sind Materialien, die für die Präsentation des Stoffs im Lehrervortrag direkt benutzt werden können oder als Teil der gedruckten Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler vorgesehen sind, eingerahmt dargestellt. Computeranimationen sind keine eingeplant, weil sie nichts zum Verständnis des Themas beitragen würden. Das gilt jedoch nicht grundsätzlich, denn es gibt Beweise des Satzes von Pythagoras und des Kathetensatzes, die auf der Umformung von Dreiecken oder Parallelogrammen in flächengleiche Dreiecke oder Parallogramme basieren, die von einer bewegten Darstellung profitieren würden. Sie sind aber in der vorliegenden Arbeit nicht benutzt worden.

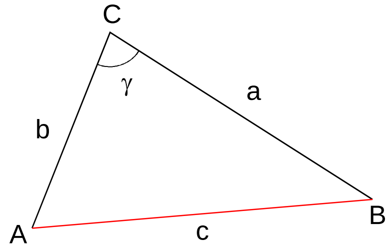
2. Ablauf des Gruppenpuzzles und Materialien

Im Folgenden werden die vier Phasen des Gruppenpuzzles detailliert beschrieben und Materialien für den Lehrervortrag und die Schüleraufträge präsentiert.

2.1. Einführungsphase

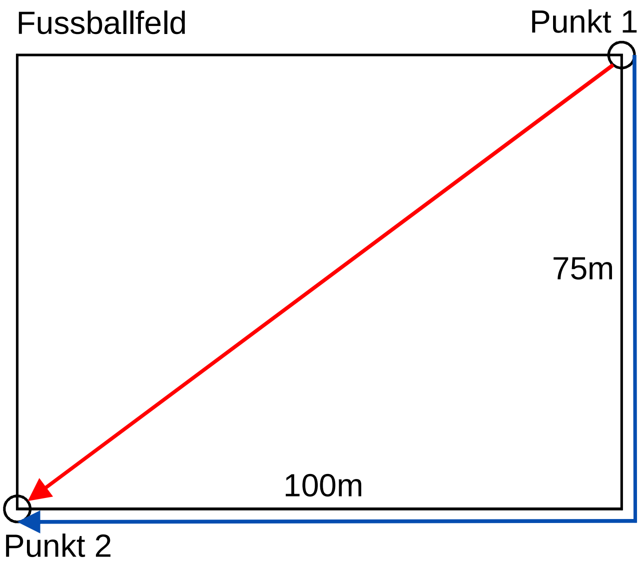
Die Lehrperson stellt das Programm für die kommenden Lektionen vor. Dabei werden die Kenntnisse über Dreiecke, rechte Winkel, Flächenberechnung und Konstruktionen mit Zirkel und Lineal aktiviert, sodass das benötigte Vorwissen zur Verfügung steht. Gleichzeitig werden die Schülerinnen und Schüler daran erinnert, dass man in der Geometrie einerseits konstruiert und misst, andererseits aber auch berechnet.

Informierender Unterrichtseinstieg: In den nächsten paar Lektionen werden wir uns mit dem Satz von Pythagoras beschäftigen und zwar in Form eines Gruppenpuzzles, bei dem ihr in Gruppen den Stoff selber erarbeitet und anschliessend euren Mitschülerinnen und -schülern erklärt. Die Art, wie ihr dabei vorgehen werdet, ist ganz ähnlich wie bei Lernaufgaben. Ihr arbeitet zwar in Gruppen, versucht aber die Arbeitsaufträge erst einmal so weit wie möglich alleine zu erledigen.
Um zu verstehen, was der Satz von Pythagoras sagt, erinnern wir uns an etwas, das ihr früher im Geometrieunterricht gelernt habt. Im letzten Jahr habt ihr Flächen berechnet. Wenn ihr von einem Dreieck die Länge einer Seite und die Länge der darauf senkrecht stehenden Höhe kennt, so könnt ihr den Flächeninhalt berechnen. Im letzten Jahr habt ihr aber auch Dreiecke konstruiert. Wenn beispielsweise zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, so könnt ihr das Dreieck konstruieren. Anders ausgedrückt heisst das, dass die Länge der Seite c durch die drei Grössen a, b und γ eindeutig festgelegt ist. Wir können die Länge der Seite c durch Messung ungefähr bestimmen. Können wir sie aber aus den Grössen a, b und γ auch berechnen? Das wäre natürlich viel eleganter.



Übergang zum Lehrervortrag: Betrachtet einmal die folgende Aufgabe an und stellt euch vor, ihr seid Zuschauer an einem Fussballturnier. Jetzt ist Spielpause, und ihr wisst nicht, ob ihr über das Spielfeld gehen dürft, oder ob das nur den Spielern erlaubt ist. Das Fussballfeld[1] ist 100 Meter lang und 75 Meter breit. Wie viel Zeit könntet ihr einsparen, wenn ihr es diagonal durchquert statt dem Rand entlang zu gehen? Der rote und der blaue Weg bilden zusammen ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem also zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind. Könnt ihr die dritte Seite, die Diagonale des Fussballfeldes, berechnen, wie ihr die Fläche des Fussballfeldes berechnen könnt? Bevor wir uns mit dieser Frage beschäftigen, bestimmen wir diese Länge erst durch Messung.

Aufgabe



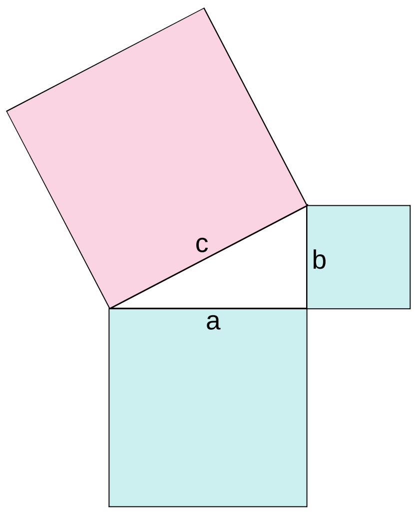
Geschwindigkeit: 4.5 km/h

Wie viel schneller bist du, wenn du direkt vom Punkt 1 zum Punkt 2 statt indirekt um das Fussballfeld herum gehst?

Zeichne das Fussballfeld im Massstab 1: 2500 auf ein Blatt Papier, miss erst die Länge der Diagonale und überlege dir anschliessend, wie man sie berechnen könnte.

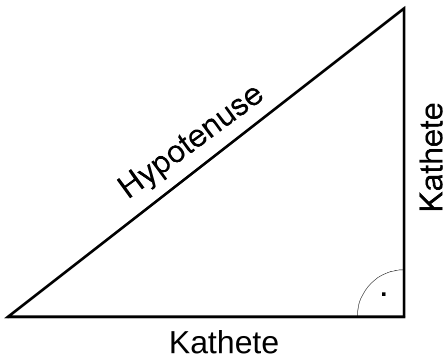
Nachdem die Aufgabe gelöst und die Zeitersparnis von 40 Sekunden bestimmt worden ist, stellt die Lehrperson den Satz von Pythagoras vor und lässt die Schülerinnen und Schüler nachrechnen, dass die 5 cm, die sie im verkleinerten Modell des Fussballfeldes bei der Diagonale gemessen haben, und die einer Länge von 125 Metern entsprechen, nach diesem Satz nicht nur ungefähr, sondern exakt stimmen.

Der Satz von Pythagoras



$a^2 + b^2 = c^2$

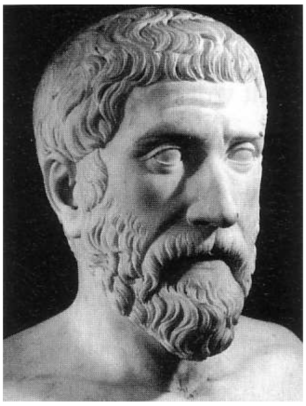
Der Satz von Pythagoras sagt, dass die Summe der Quadrate der beiden Kathetenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck gleich dem Quadrat der Hypotenusenlänge ist.



[1] Gemäss dem Wikipedia-Eintrag http://de.wikipedia.org/wiki/Fussball darf ein Fussballfeld zwischen 45 und 90 Meter breit und zwischen 90 und 120 Meter lang sein, muss aber für Länderspiele gemäss FIFA-Reglement seit 2008 restriktivere Bedingungen erfüllen, dem das hier gewählte Fussballfeld nicht genügt.

Die Behauptung des Satzes von Pythagoras wird an einer zweiten Aufgabe überprüft. Dazu fordert die Lehrerin oder der Lehrer jede Schülerinnen und jeden Schüler auf, zwei Zahlen zwischen 1 und 10 zu wählen, die als Längen der einen Kathete (in cm) benutzt werden, während die Länge der anderen Kathete fest auf 10 cm gesetzt werden soll. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke sollen konstruiert und die Länge der Hypotenuse sowohl gemessen als auch mit dem Taschenrechner aus der Formel $a^2 + b^2 = c^2$ berechnet werden. In der Annahme, dass alle zehn Werte zwischen 1 und 10 in der Klasse mindestens einmal gewählt worden sind, schreibt die Lehrperson die Längen der Hypotenusen als Tabelle an die Wandtafel.
Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass der Satz von Pythagoras es erlaubt, die Länge der dritten Seite aus den Längen der beiden anderen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen, wenn der eingeschlossene Winkel 90° misst.

Anschliessend geht die Lehrerin oder der Lehrer auf die Lebensdaten von Pythagoras ein, erwähnt dabei, dass sich viele Legenden gebildet haben, dass man somit nur wenig wisse, und dass nicht einmal sicher sei, ob Pythagoras überhaupt den nach ihm benannten Satz selber entdeckt oder ihn auf seinen Reisen nach Ägypten und Babylonien nur einfach kennen gelernt habe, weil dort der Satz schon bekannt gewesen und praktisch genutzt worden war. Man gehe aber davon aus, dass er den Satz wenigstens als Erster bewiesen habe.

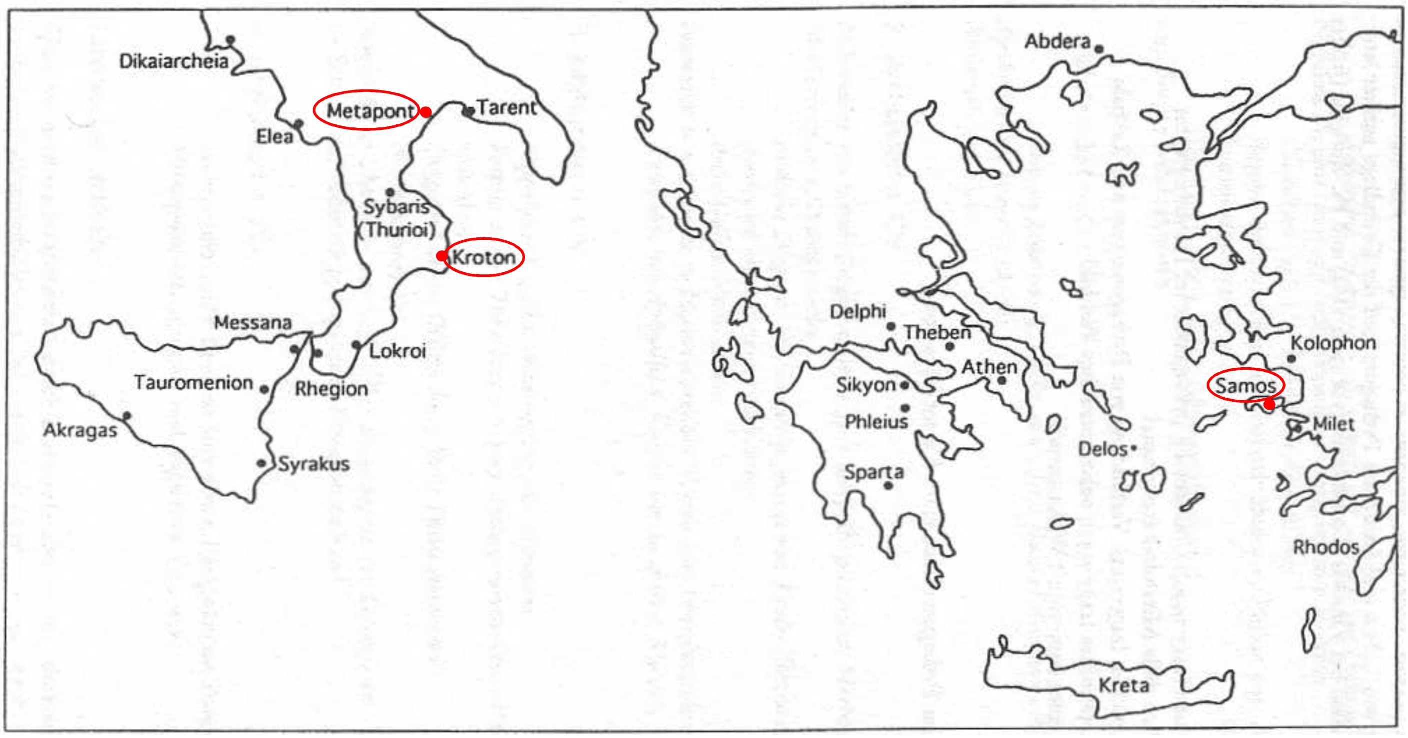


Pythagoras kommt um 570 v.Chr. in Samos zur Welt.

Er reist nach Ägypten (und vermutlich auch nach Babylonien), wo er Bekanntschaft mit den mathematischen, philosophischen und religiösen Lehren dieser Kulturräume macht.

Er gründet in Kroton um 530 v.Chr. eine Schule.

Es kommt zu Spannungen zwischen der Schule von Pythagoras und den Bürgern von Kroton, sodass Pythagoras um 500 v.Chr. nach Metapont zieht, wo er um 480 v.Chr. stirbt.

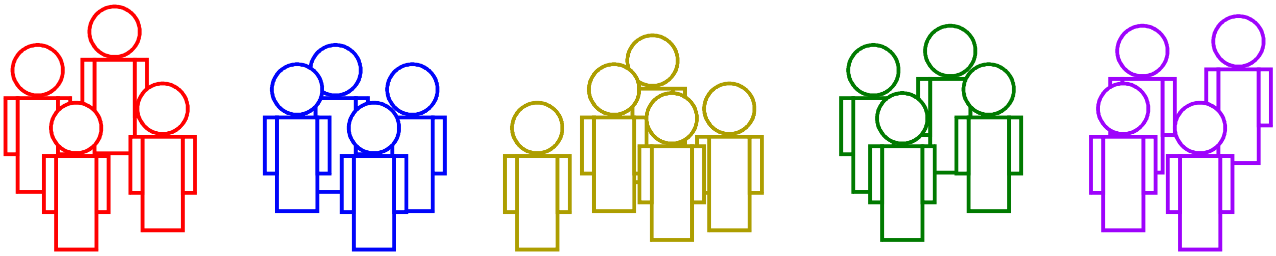


An dieser Stelle werden die Regeln eines Gruppenpuzzles vorgestellt und besprochen. Die Beschreibung wird zudem ausgedruckt im Klassenzimmer aufgehängt, damit sie jederzeit konsultiert werden kann.

Die Regeln eines Gruppenpuzzles

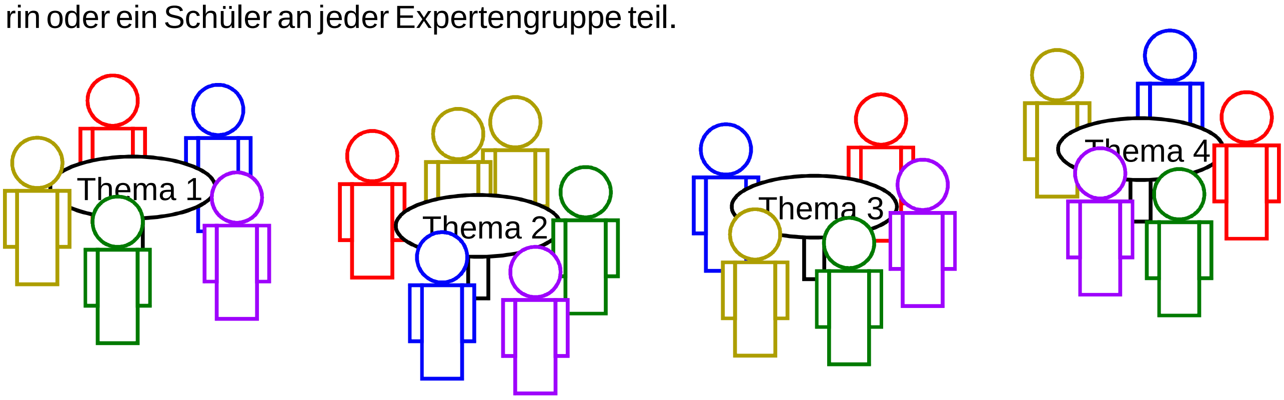
Einteilung in Stammgruppen

Die Klasse wird in Stammgruppen mit vier (höchstens fünf) Schülerinnen und Schüler eingeteilt. Jede Stammgruppe gibt sich einen Namen.



Einteilung in Expertengruppen und Bearbeitung der Arbeitsaufträge

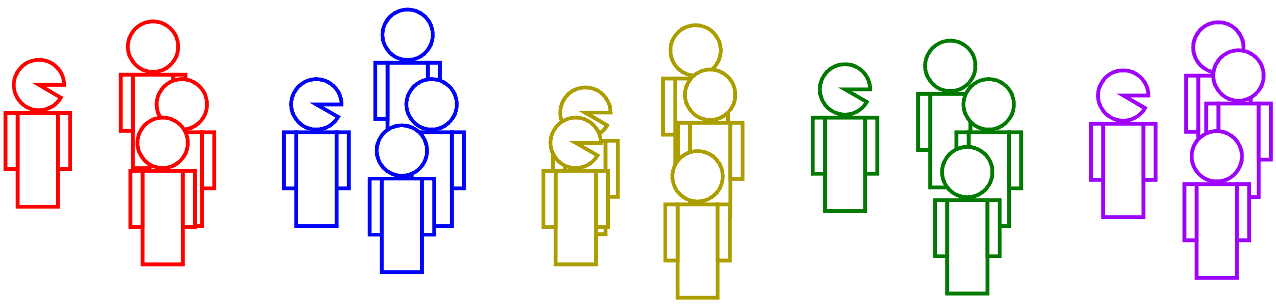
Es werden vier Expertengruppen gebildet, die je einen Arbeitsauftrag bekommen und auf diese Weise ein Thema bearbeiten. Aus jeder Stammgruppe nimmt mindestens eine Schülerin oder ein Schüler an jeder Expertengruppe teil.



Die Expertengruppen erledigen die Arbeitsaufträge, indem jedes Mitglied zwar selbstständig, aber trotzdem gemeinsam und im Kontakt mit den übrigen Mitgliedern die Aufgaben löst und für die spätere Präsentation in der Stammgruppe vorbereitet.

Präsentation in den Stammgruppen

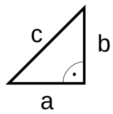
Die Experten kehren in ihre Stammgruppen zurück, erklären ihren Kolleginnen und Kollegen, was sie gelernt haben, und erlernen von diesen auf gleiche Weise die Resultate der drei anderen Expertengruppen.



Als Einstimmung ins selbstständige Arbeiten der nächsten Phase stellt die Lehrperson eine Lernaufgabe, bei der die gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke untersucht werden.

Lernaufgabe: Ein Spezialfall

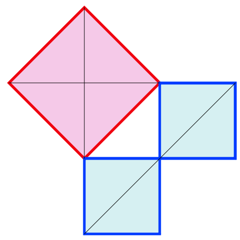
Das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck



Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Katheten gleich lang. Nimm an, sie seien beide eine Einheitsstrecke lang, also gilt $a = b = 1$.

<u>Frage:</u> Kannst du beweisen, dass in diesem Spezialfall der Satz von Pythagoras gilt?

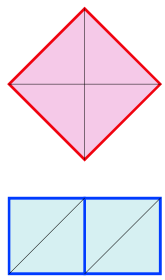
Betrachte die nebenstehende Skizze. Sind die zwei blauen Quadrate zusammen gleich gross wie das rote Quadrat?
Konstruiere die drei Quadrate, schneide sie aus und falte sie entlang den eingezeichneten Linien. Was stellst du fest?



Zur Erinnerung:
Zwei geometrische Figuren in der Ebene, die sich durch Drehung, Verschiebung und Spiegelung zur Deckung gebracht werden können, sind kongruent (deckungsgleich) und haben den gleichen Flächeninhalt.

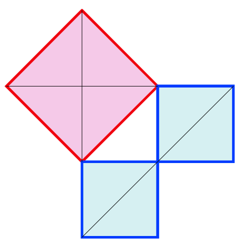
<u>Frage:</u> Wie lang ist die Hypotenuse nach dem Satz von Pythagoras?

Betrachte die nebenstehende Skizze. Das rote Quadrat und das blaue Rechteck haben den gleichen Flächeninhalt, wie du soeben gezeigt hast. Was lässt sich über die Seitenlängen des blauen Rechtecks sagen? Und was lässt sich über die Seitenlänge des roten Quadrates sagen?

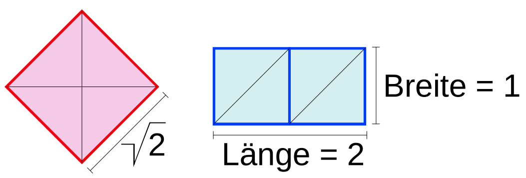


Zur Erinnerung:
Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist Länge mal Breite, und der Flächeninhalt eines Quadrates ist die Seitenlänge im Quadrat.

Lösung:



In der nebenstehenden Figur sind alle acht eingezeichneten Dreiecke kongruent und haben damit den gleichen Flächeninhalt. Die roten Dreiecke gehen durch Drehung um 90° je ineinander über, und die blauen Dreiecke gehen entweder durch Spiegelung oder durch Verschiebung ineinander über. Um zu beweisen, dass die roten und blauen Dreiecke untereinander ebenfalls kongruent sind, genügt es zu zeigen, dass eines der blauen durch Verschiebung in eines der roten Dreiecke überführt werden kann.



Die Fläche des grossen Quadrates ist gleich der Fläche der beiden kleinen Quadrate zusammen, also 2. Somit ist die Länge einer Seite im grossen Quadrat $\sqrt{2}$.

Um die Einteilung der Klasse in die Stamm- und Expertengruppen vorzubereiten, stellt die Lehrperson die vier Themen für die Bearbeitung durch die Expertengruppen in einer Übersichtsfolie vor.

Übersicht über die Arbeitsaufträge für die Expertengruppen

Thema 1: Beweise den Satz von Pythagoras

Wir haben in der Aufgabe, die wir eben bearbeitet haben, mit einer Zerlegung der Flächen der drei Quadrate gezeigt, dass der Satz von Pythagoras für die rechtwinkligen Dreiecke gilt, die gleichschenklig sind.
Auftrag an die erste Expertengruppe: Beweise den Satz von Pythagoras für alle rechtwinkligen Dreiecke und nicht nur für die gleichschenkligen.

Thema 2: Konstruiere Zahlen geometrisch

Diese Aufgabe hat auch gezeigt, dass die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1 die Länge $\sqrt{2}$ hat, und dass wir also mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$ konstruieren können, wenn eine Strecke der Länge 1 gegeben ist.
Auftrag an die zweite Expertengruppe: Konstruiere mit Zirkel und Lineal weitere Strecken, deren Längen die Wurzeln von natürlichen Zahlen sind, und zeige, wie man auf diese Weise alle Wurzeln von natürlichen Zahlen konstruieren kann.

Thema 3: Kehre den Satzes von Pythagoras um und finde pythagoreische Zahlentripel

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist bekanntlich eine irrationale Zahl. Das zeigt, dass ganzzahlige Kathetenlängen zu irrationalen Hypotenusenlängen führen können. Vorher haben wir aber festgestellt, dass es ein rechtwinkliges Dreieck mit den ganzzahligen Seitenlängen 3, 4 und 5 gibt.
Auftrag an die dritte Expertengruppe: Der Satz von Pythagoras hat eine Umkehrung, die beim Bau der ägyptischen Pyramiden angewendet worden ist. Beweise diese Umkehrung und finde weitere rechtwinklige Dreiecke mit Seitenlängen, die ganze Zahlen sind, und die man deshalb pythagoreische Zahlentripel nennt.

Thema 4: Berechne den Abstand von zwei Punkten

Bei der Aufgabe, mit der wir den direkten Weg über das Fussballfeld bestimmt haben, haben wir gesehen, dass man mit dem Satz von Pythagoras den Abstand zwischen zwei Punkten berechnen kann. In rechtwinkligen Koordinatensysteme lässt sich das nutzen.
Auftrag an die vierte Expertengruppe: Finde eine Formel für den Abstand von zwei Punkten in einem rechtwinkligen, zweidimensionalen Koordinatensystem.

Lehrervortrag zur Einführung der vier Arbeitsaufträge: Bevor ich die Einteilung der Klasse in Stamm- und Expertengruppen bekannt gebe, möchte ich die vier Arbeitsaufträge besprechen.
Der Satz von Pythagoras erlaubt uns, aus den Längen von zwei Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck die Länge der dritten Seite zu berechnen. Ihr habt dies soeben für das rechtwinklige Dreieck bewiesen, dessen Katheten gleich lang sind. Das Fussballfeld, das ihr in der ersten Aufgabe betrachtet habt, ist aber nicht gleichschenklig, und wir möchten natürlich sicher sein, dass der Satz für alle rechtwinkligen Dreiecke gilt und nicht nur für diesen Spezialfall. Dies zu beweisen, wird die Aufgabe der ersten Expertengruppe sein.

Wie man eine Strecke mit Zirkel und Lineal verdoppelt, verdreifacht oder allgemein auf die n-fache Länge bringt, wisst ihr. Als wir die Ähnlichkeit und die Strahlensätze besprochen haben, habt ihr auch gelernt, wie man eine Strecke mit Zirkel und Lineal drittelt, fünftelt und allgemein in n gleiche Teile zerteilt. Wir haben damals gesagt, dass auf diese Weise alle positiven rationalen Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Heute habt ihr gesehen, dass sich auch die Wurzel aus 2 und somit mindestens eine irrationale Zahl konstruieren lässt. Die zweite Expertengruppe wird sich damit beschäftigen, wie man weitere Wurzeln aus natürlichen Zahlen und damit noch andere irrationale Zahlen konstruieren kann.
Am Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 haben wir gesehen, dass es rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen gibt. Weil sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, nennt man die Zahlen 3, 4, 5 ein pythagoreisches Zahlentripel. Damit haben die Ägypter vor Jahrtausenden rechte Winkel bei ihren Pyramiden konstruiert. Gibt es neben dem Tripel 3, 4, 5 noch andere solche Zahlentripel? Mit dieser Frage wird sich die dritte Expertengruppe auseinander setzen. Vorher sucht sie aber nach einem Beweis, weshalb die Ägypter mit pythagoreischen Zahlentripel rechte Winkel haben konstruieren können.
Mit dem Satz von Pythagoras kann man die Länge der Diagonalen in einem Rechteck berechnen, wenn man die Seitenlängen kennt. In rechtwinkligen Koordinatensystemen lässt sich dieser Umstand anwenden und zur Berechnung des Abstandes zwischen zwei Punkten benutzen. Die vierte Expertengruppe wird sich damit beschäftigen und eine Formel für zweidimensionale Koordinatensysteme bestimmen.
Was die vier Expertengruppen zu tun haben, werdet ihr in den Arbeitsaufträgen genauer erfahren. Für den Moment genügt es, wenn ihr eine ungefähre Ahnung habt.

Zum Schluss teilt die Lehrperson die Klasse in Stamm- und Expertengruppen ein. Dabei ist darauf zu achten, dass die Stammgruppen leistungsheterogen zusammengesetzt sind, und dass jede Expertengruppe mindestens ein Mitglied enthält, das über die motivationalen und sozialen Kompetenzen verfügt, um zu garantieren, dass die Arbeitsaufträge zielstrebig bearbeitet werden, dass sich die übrigen Gruppenmitglieder weder ablenken noch durch allfällige Schwierigkeiten entmutigen lassen, und dass somit die Gruppenlernziele erreicht werden. Wenn die Gruppeneinteilung abgeschlossen ist, gibt sich jede Stammgruppe einen Namen und trägt diesen zusammen mit den Namen der Mitglieder und dem Thema, das von ihnen in der Expertengruppe bearbeitet wird, in die vorbereitete Tabelle ein.
Vor dem Ende der Lektion fasst die Lehrperson die wichtigsten Punkte betreffend Gruppenpuzzle nochmals zusammen und stellt sicher, dass alle Schülerinnen und Schüler wissen, was sie in der nächsten Phase zu tun haben, damit die für die Erarbeitungsphase vorgesehene Doppellektion nicht durch Unklarheiten unnötig verkürzt wird. Die Lehrperson hängt eine Kopie der Tabelle mit den Stammgruppen und deren Mitglieder sowie das Blatt mit den Regeln des Gruppenpuzzles im Klassenzimmer auf.

2.2. Erarbeitungsphase

Die Experten aus den verschiedenen Stammgruppen treffen sich und erarbeiten selbstständig, aber gemeinsam das von ihnen gewählte Thema, indem sie die Arbeitsblätter mit den Arbeitsaufträgen lesen und lösen. Sie überlegen sich die Aufgaben zuerst selber und beginnen erst dann mit den anderen Mitgliedern der Expertengruppe zu diskutieren, wenn sie auch nach längerem Nachdenken alleine nicht weiterkommen, oder wenn sie mit einem Auftrag fertig sind. Wenn möglich sollte jeder Expertengruppe ein eigener Raum zur Verfügung stehen, damit sie sich nicht gegenseitig stören.
Die Lehrerin oder der Lehrer besucht jede der Expertengruppen mehrmals und beobachtet das Geschehen, greift aber nur dann ein, wenn die Experten auch nach längerer Zeit nicht selber auf die zündende Idee kommen und sich deshalb Frustration breit macht, oder wenn die Gruppe sich in eine Richtung bewegt, die gänzlich ungeeignet ist. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich schon in dieser Phase erste Gedanken darüber machen, wie sie die Resultate in der nachfolgenden Phase den Kolleginnen und Kollegen in ihrer Stammgruppe präsentieren wollen, und sollten diesen Punkt auch mit den anderen Experten besprechen.
Neben den Arbeitsaufträgen für das zugeteilte Thema hat jede Schülerin und jeder Schüler auch ein Blatt mit der Beschreibung des Satzes von Pythagoras als Orientierungshilfe bekommen. Die Arbeitsaufträge selber enthalten einen Lesetext als Einführung, die zu bearbeitenden Aufgaben, eine Schlussbemerkung als Vorbereitung auf die Vermittlungsphase und Zusatzaufgaben für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die vorzeitig mit der Bearbeitung der Aufträge fertig werden. Diese Unterlagen sowie Papier, Schreibutensilien, Taschenrechner, Zirkel und Lineal oder Geodreieck bringen die Schülerinnen und Schüler für die Expertenarbeit während der Erarbeitungsphase mit.

Einteilung in Stammgruppen

Gebt eurer Stammgruppe einen pfiffigen Namen und tragt ihn in die oberste Zeile ein. Die fünf übrigen Zeilen sind für die Namen und Expertenthemen der vier (maximal fünf) Mitglieder eurer Stammgruppe bestimmt.

Gruppenpuzzle Arbeitsaufträge Thema 1: Beweise den Satz von Pythagoras

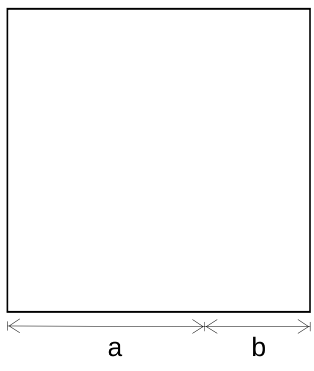
Lernziel

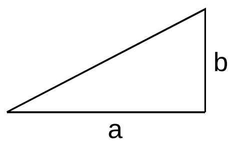
Nach dem Durcharbeiten dieser Arbeitsaufträge hast du mindestens zwei Beweise für den Satz von Pythagoras verstanden und kannst sie jemandem so erklären, dass er sie ebenfalls versteht.

Einführung

Der Satz von Pythagoras sagt, dass die Summe der Quadrate der beiden Kathetenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck gleich dem Quadrat der Hypotenusenlänge ist. Es ist erstaunlich, dass hier eine Beziehung zwischen Längen und Flächen besteht. Was haben die quadratischen Flächen über den Katheten mit der quadratischen Fläche über der Hypotenuse zu tun? Der Satz von Pythagoras stellt eine höchst überraschende Behauptung auf.
Man kann eine Behauptung wie diese an ein paar Dreiecken nachmessen, aber erstens ist eine Messung immer ungenau, und zweitens können wir bei noch so vielen Dreiecken messen, alle bekommen wir nie, denn es sind unendlich viele. Deshalb versuchen wir den Satz von Pythagoras zu beweisen, also eine Begründung zu finden, weshalb dies bei allen rechtwinkligen Dreiecken so sein muss.
In der letzten Stunde hast du mit einer Lernaufgabe bewiesen, dass der Satz von Pythagoras für gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke gilt. Deine Aufgabe ist es jetzt, Beweise zu finden, die auch für diejenigen rechtwinkligen Dreiecke gelten, die zwei verschieden lange Katheten haben.

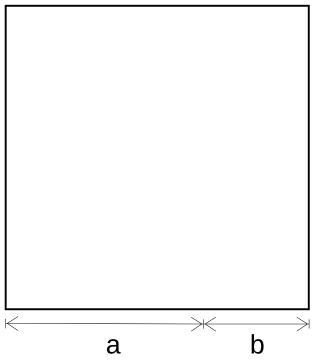
Erster Arbeitsauftrag

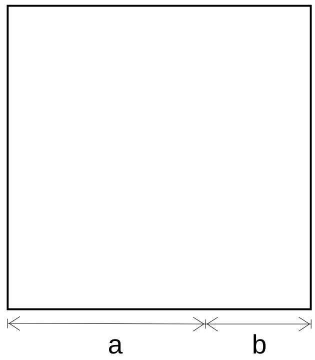




Für den ersten Beweis schneidest du Figuren aus Karton aus, mit denen du experimentieren kannst. Zu diesem Zweck wählst du die Längen der Katheten a und b für ein rechtwinkliges Dreieck so aus, dass a+b etwa 18cm ergibt. Konstruiere anschliessend auf dem beiliegenden Stück Karton **ein** Quadrat mit Seitenlänge a+b und **vier** rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b wie in der nebenstehenden Skizze gezeigt. Dieses Quadrat und die vier Dreiecke schneidest du möglichst genau aus.
Schiebe die vier ausgeschnittenen Dreiecke auf dem ausgeschnittenen Quadrat herum und beobachte, welche Figuren entstehen. Kannst du erreichen, dass die vier Dreiecke so auf dem grossen Quadrat liegen, dass zwei Quadrate unbedeckt bleiben? Und was kannst du über diese beiden Quadrate sagen?
Kannst du jetzt die vier Dreiecke so auf dem grossen Quadrat verteilen, dass ein einziges Viereck unbedeckt bleibt, das auch wie ein Quadrat aussieht? Was kannst du über dieses Viereck sagen, und

wie kannst du nun schliessen, dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt? Damit hast du den ersten Beweis des Satzes von Pythagoras bereits gefunden.
Trage die zwei Anordnungen der vier Dreiecke in die folgenden Figuren ein und beschreibe den Beweis in Worten. Begründe genau, weshalb das Viereck in der einen Figur nicht nur wie ein Quadrat aussieht, sondern auch ein Quadrat ist.

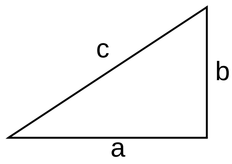


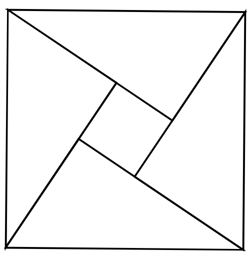


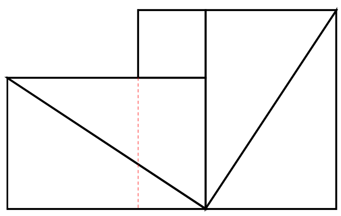
Dieser Beweis stammt möglicherweise von Pythagoras selber, scheint aber bereits vor über zweitausend Jahren auch in China bekannt gewesen zu sein.

Zweiter Arbeitsauftrag

Betrachte die beiden folgenden Figuren und überlege dir, weshalb auch hier ein Beweis für den Satz von Pythagoras steckt. Trage alle bekannten Längen vom Dreieck auf der rechten Seite in diese beiden Figuren ein und überlege dir, ob das Viereck in der Mitte der linken Figur ein Quadrat ist und, falls ja, wie gross seine Seitenlänge ist. Beschreibe auch diesen Beweis in Worten.







Diesen Beweis hat der indische Mathematiker Bhaskara Atscharja, der im 12. Jahrhundert lebte, in seinem Buch mit dem Titel “Stirnjuwel der Lehrmeinungen” beschrieben.

Reflexion

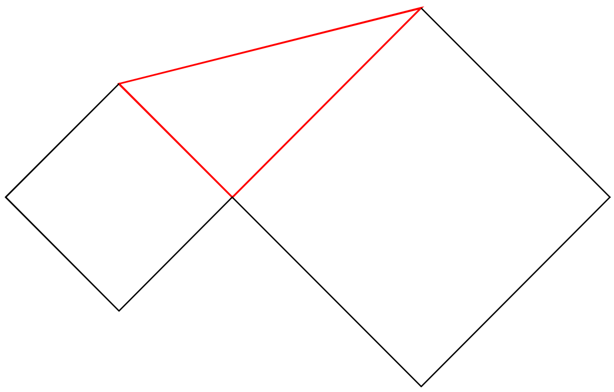
Der zweite Beweis, den du eben erarbeitet hast, ist ein Zerlegungsbeweis, denn er nimmt ein Quadrat mit der Seitenlänge c und zerlegt es so in Teilstücke, dass aus ihnen die Fläche von zwei Quadraten mit den Seitenlängen a und b entsteht, wenn man sie entsprechend zusammensetzt. Schau jetzt noch einmal den ersten Beweis an. Zerlegt er auch eine Figur? Was ist der Unterschied? Er geht anders vor, und man bezeichnet ihn als Ergänzungsbeweis. Die vier Dreiecke, die du aus Karton geschnitten hast, ergänzen einerseits die beiden Quadrate mit den Seitenlängen a und b und andererseits das Quadrat mit der Seitenlänge c zu demselben Quadrat mit der Seitenlänge a+b, das du ebenfalls aus Karton ausgeschnitten hast.

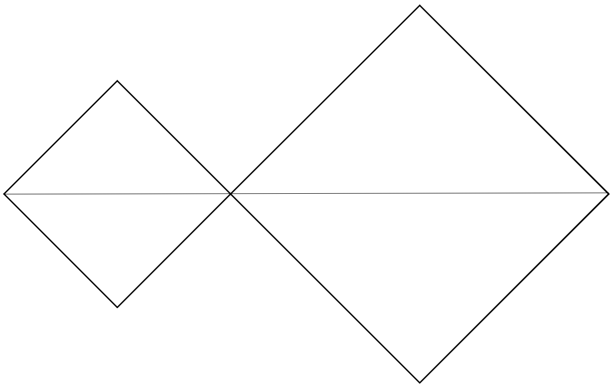
Zum Schluss

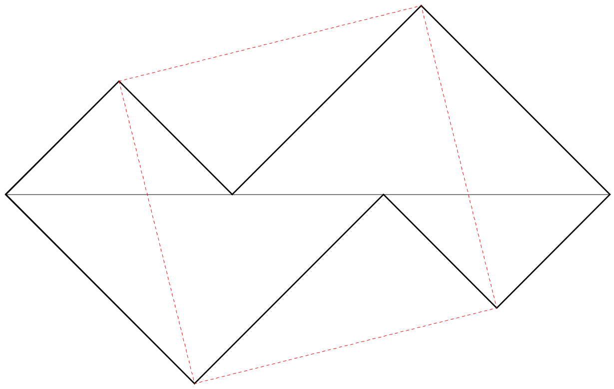
Du hast jetzt zwei Beweise des Satzes von Pythagoras gesehen. Diese beiden Beweise zu verstehen, ist dir möglicherweise nicht ganz leicht gefallen. Schreibe auf, welche Punkte dir besonders Schwierigkeiten bereitet haben, und über welche Fragen ihr in der Expertengruppe lange diskutiert habt.
Falls du anschliessend noch Zeit hast, oder falls die anderen Experten noch nicht ganz so weit sind und du auf sie wartest, so kannst du noch einen dritten Beweis für den Satz von Pythagoras kennen lernen. Man schätzt übrigens, dass es etwa 400 verschiedene Beweise dieses Satzes gibt.

Zusatzauftrag

Beginne mit der nebenstehenden Figur und überlege dir, wie sie einerseits mit dem Satz von Pythagoras und andererseits mit den beiden Figuren unten zusammenhängt. Wie kommst du von der Figur unten links zur Figur unten rechts? Und wie kommst du von dort weiter zu einem Beweis des Satzes von Pythagoras? Wodurch unterscheiden sich die schwarze Figur und das rot gestrichelte Viereck unten rechts? Und ist dieses Viereck ein Quadrat?







Der Beweis, der in diesen Figuren steckt, findet man in einem Mathematiklehrbuch des deutschen Mathematikers Heinrich Winter.

Gruppenpuzzle Arbeitsaufträge Thema 2: Konstruiere Zahlen geometrisch

Lernziel

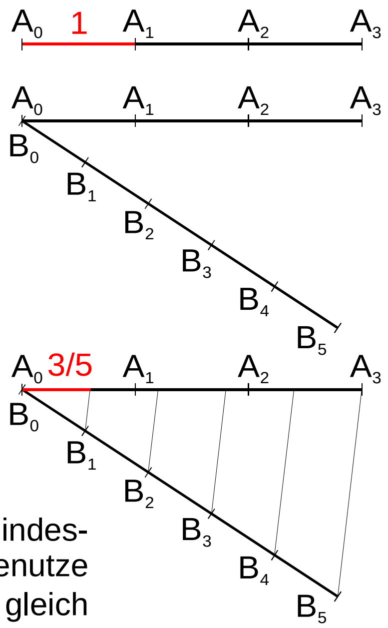
Wenn du diese Arbeitsaufträge erledigt hast, kannst du für jede natürliche Zahl n mit Zirkel und Lineal eine Strecke konstruieren, die $\sqrt{n}$ mal so lang ist wie eine vorgegebene Einheitsstrecke.

Einführung

Hast du den Ausdruck “die Quadratur des Kreises” schon einmal gehört? Man bezeichnet heute damit allgemein ein unlösbares Problem, aber ursprünglich meinte er die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. In den letzten zwei Jahrtausenden ist intensiv nach einer Lösung gesucht worden, bis im Jahre 1882 der deutsche Mathematiker Ferdinand von Lindemann beweisen konnte, dass dies gar nicht möglich ist. Sein Beweis hat etwas damit zu tun, welche Streckenverhältnisse man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, und damit wirst du dich jetzt beschäftigen.

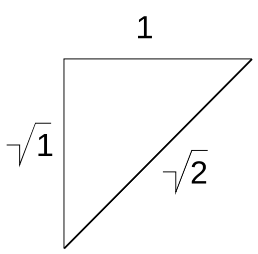
Bei gegebener Einheitsstrecke $\overline{A_0A_1}$ weisst du, wie du eine Strecke konstruierst, die m mal so lang ist, und wie du die Einheitsstrecke in n gleiche Teile teilst. Zusammen kannst du also eine Strecke mit der rationalen Länge m/n wie in der nebenstehenden Figur am Beispiel von 3/5 illustriert mit Zirkel und Lineal konstruieren.

In der Lernaufgabe der letzten Lektion hast du gezeigt, dass man mit einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck auch Strecken mit der irrationalen Länge $\sqrt{2}$ konstruieren kann. Im ersten Arbeitsauftrag lernst du nun, wie du auf ähnliche Weise die Wurzel aus jeder natürlichen Zahl konstruieren kannst.



Erster Arbeitsauftrag

Du kannst also nicht nur jede positive rationale, sondern auch mindestens eine irrationale Zahl mit Zirkel und Lineal konstruieren. Benutze den Satz von Pythagoras und die Tatsache, dass du $\sqrt{3}$ aus $\sqrt{2}$ gleich konstruieren kannst, wie du $\sqrt{2}$ in der Figur unten aus $\sqrt{1}$ konstruiert hast, um $\sqrt{3}$ zu bekommen. Wenn du weiter $\sqrt{4}$ auf gleiche Art aus $\sqrt{3}$, anschliessend $\sqrt{5}$ ebenso aus $\sqrt{4}$ konstruierst und so fortfährst, dabei aber immer die bereits konstruierten Strecken benutzt, so entsteht eine Figur, die man Wurzelspirale nennt.



Zeichne die Wurzelspirale von $\sqrt{1}$ bis $\sqrt{17}$ mit Zirkel und Lineal. Wähle 3 cm für die Länge der Einheitsstrecke und beginne in der Mitte des Papiers. Wenn du mit der Wurzelspirale fertig bist, miss ein paar der Strecken und rechne mit dem Taschenrechner nach, wie genau du gezeichnet hast. (Überprüfe vor allem auch die letzte Strecke, welche die Länge $\sqrt{17}$ hat.) Mit der Wurzelspirale hast du eine Methode gefunden, mit der du bei 1 beginnend der Reihe nach die Wurzel aus jeder natürlichen Zahl konstruieren kannst.

Zweiter Arbeitsauftrag

Die Wurzelspirale ist keine sehr effiziente Methode, um die Wurzel einer grossen natürlichen Zahl zu konstruieren, und besonders exakt ist sie auch nicht, weil du in jedem Schritt beim Zeichnen kleine Ungenauigkeiten machst, wie du vermutlich bei deiner eigenen Wurzelspirale festgestellt hast.
Um zu $\sqrt{17}$ zu kommen, musst du aber gar nicht bei 1 beginnen. Schau deine Wurzelspirale an und suche rechtwinklige Dreiecke, die du auch direkt hättest konstruieren können, weil du zwei Seiten mit Zirkel und Lineal aus der Einheitsstrecke bekommen kannst. Konstruiere $\sqrt{17}$ jetzt nochmals auf diesem Weg, wobei du die Einheitslänge wie im letzten Arbeitsauftrag als 3 cm wählst, und miss nach, wie genau du diesmal gezeichnet hast. Vermutlich warst du nicht nur um einiges schneller, sondern auch um einiges genauer.
Überleg dir, woran das lag, dass du die Wurzel aus 17 auf diese Weise hast konstruieren können. Geht das auch für andere Zahlen? Kannst du beispielsweise $\sqrt{50}$ oder $\sqrt{65}$ so bekommen? Schreibe eine Regel auf, mit der man feststellen kann, für welche natürliche Zahl n die Wurzel aus n mit dieser Methode bestimmt werden kann.
Lässt sich deine Regel erweitern? Kannst du etwa aus der Tatsache, dass 13=9+4 ist, eine einfache Konstruktion für $\sqrt{13}$ ableiten? Konstruiere $\sqrt{13}$, passe deine Regel an und schreibe sie in Worten auf.

Reflexion

Du fragst dich vielleicht, weshalb es wichtig ist, dass man eine Zahl als Länge einer Strecke mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Mathematiker suchen manchmal nach Antworten auf Fragen, deren praktischer Nutzen nicht immer klar ist. So hat Gauss bewiesen, dass ein reguläres Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, während ein reguläres Siebeneck nicht konstruiert werden kann. Manchmal zeigt sich der praktische Nutzen auch erst viel später. Wenn deine Eltern über eine sicher verschlüsselte Leitung von einem Computer zu Hause aus die Zahlungsaufträge an ihre Bank übermitteln können, so ist das nur möglich, weil Mathematiker sich vor Jahrhunderten mit Eigenschaften von Primzahlen beschäftigt haben, die damals auch keinen praktischen Nutzen hatten, sondern einfach nur interessant für diese Mathematiker waren.

Zum Schluss

Du hast jetzt gesehen, wie man bei gegebener Einheitsstrecke nicht nur jede rationale Zahl, sondern auch die irrationalen Zahlen, die Wurzel einer natürlichen Zahl sind, mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Du hast erst die Wurzelspirale kennen gelernt, mit der man theoretisch die Wurzel jeder natürlichen Zahl konstruieren könnte, und anschliessend Methoden gefunden, mit denen man die Wurzel für gewisse natürliche Zahlen schneller erreicht. Diese Aufgaben sind dir möglicherweise nicht ganz leicht gefallen. Schreibe auf, welche Punkte dir

besonders Schwierigkeiten bereitet haben, und über welche Fragen ihr in der Expertengruppe lange diskutiert habt.
Falls du anschliessend noch Zeit hast, oder falls die anderen Experten noch nicht ganz so weit sind und du auf sie wartest, so kannst du noch einen dritten Auftrag bearbeiten, bei dem du weitere Möglichkeiten kennen lernst, um Zahlen mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Zusatzauftrag

Im letzten Arbeitsauftrag hast du gesehen, wie du die Zerlegung einer natürlichen Zahl in zwei geeignete Summanden benutzen kannst, um die Wurzel daraus in einem Schritt statt mit der Wurzelspirale in mehreren Schritten zu konstruieren. Diese Methode lässt sich aber nur auf einen Teil der natürlichen Zahlen anwenden. Doch was macht man, falls sie für eine Zahl nicht geht?
Um $\sqrt{15}$ zu konstruieren, kannst du, weil 10=9+1 gilt, mit $\sqrt{10}$ beginnen und wie bei der Wurzelspirale $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ und so weiter bis $\sqrt{15}$ bestimmen. Weil du im letzten Arbeitsauftrag gesehen hast, wie sich 13=9+4 benutzen lässt, um $\sqrt{13}$ zu bekommen, kannst du auch mit $\sqrt{13}$ beginnen und von dort in Einerschritten zu $\sqrt{15}$ gehen. Kann man das vereinfachen? Kannst du beispielsweise die Tatsache, dass 15=16-1 gilt, ausnutzen, um $\sqrt{15}$ in einem Schritt zu gewinnen? Das geht, und auf die gleiche Weise bekommst du auch $\sqrt{24}$. Jetzt ist es nicht mehr schwierig, um aus 21=25-4 auch noch die Wurzel aus 21 in einem Schritt zu konstruieren. Du kannst also nicht nur die Addition benutzen, um die Wurzel einer natürlichen Zahl effizient zu bestimmen, sondern auch die Subtraktion.
Wenn du keinen Weg findest, um in einem Schritt zum Ziel zu kommen, bleibt dir nichts anderes übrig als zu schauen, ob du es vielleicht in zwei Schritten schaffst. Bei 57 beispielsweise hilft 57=49+4+4 als mögliche Aufteilung. Konstruiere $\sqrt{57}$ auf diese Weise.

In der Einleitung zu diesen Arbeitsaufträgen wurde in Erinnerung gerufen, wie man bei gegebener Einheitsstrecke eine Strecke der Länge m/n mit Zirkel und Lineal konstruiert, und du hast dich jetzt intensiv damit auseinander gesetzt, wie man dasselbe mit der Wurzel einer natürlichen Zahl macht. Es gibt aber noch andere Zahlen als rationale Zahlen und Wurzeln aus natürlichen Zahlen. Wie steht es dort mit der Konstruierbarkeit mittels Zirkel und Lineal? Wie lässt sich zum Beispiel die Wurzel aus einer rationalen Zahl m/n konstruieren?
Wie kannst du 3/5 so umformen, dass du mit dem, was du schon weisst, die Wurzel aus 3/5 mit geometrischen Mitteln bestimmen kannst? Welche Umformungen, die den Wert nicht verändern, sind bei Brüchen erlaubt?

$$\sqrt{3/5}$$

Gruppenpuzzle Arbeitsaufträge Thema 3: Kehre den Satz von Pythagoras um und finde pythagoreische Zahlentripel

Lernziel

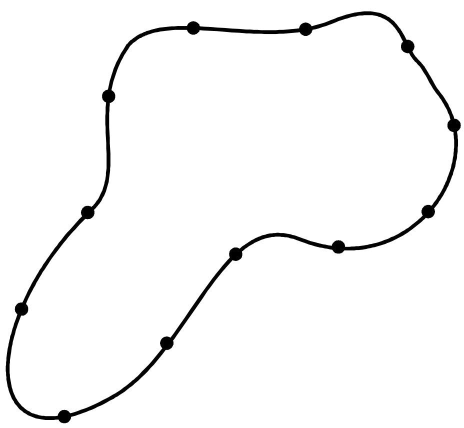
Wenn du mit diesen Arbeitsaufträgen fertig bist, kannst du beweisen, dass die Umkehrung des Satzes von Pythagoras gilt, und kennst eine Methode, um so genannte pythagoreische Zahlentripel zu finden.

Einführung

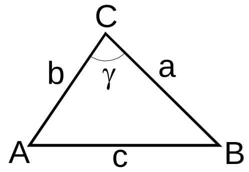
Als die Ägypter vor über 4000 Jahren ihre berühmten Pyramiden bauten, mussten sie sehr sorgfältig vorgehen und exakte rechte Winkel konstruieren, damit die Steinblöcke genau zusammenpassten. Kleinste Abweichungen hätten beispielsweise bei der Cheops-Pyramide, die eine Seitenlänge von über 200 Meter hat, den Bau verunmöglicht. Die Frage ist, wie sie es schafften, derart präzise rechte Winkel zu bekommen.
Das hat etwas mit pythagoreischen Zahlentripel zu tun, wie du im ersten Arbeitsauftrag feststellen wirst. Als pythagoreische Zahlentripel bezeichnet man drei natürliche Zahlen a, b und c, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen und somit Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sein können.
Beim rechtwinkligen Dreieck, bei dem beide Katheten eine Einheitslänge lang sind, hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{2}$, wie du in der Lernaufgabe der letzten Stunde gesehen und bewiesen hast. Nicht alle Kathetenlängen, die natürliche Zahlen sind, führen also zu ganzzahligen Hypotenusenlängen. Rechtwinklige Dreiecke mit drei ganzzahligen Seitenlängen sind die Ausnahme. Im zweiten Arbeitsauftrag findest du eine Methode, mit der du unendlich viele davon berechnen kannst.

Erster Arbeitsauftrag

Die erste Aufgabe löst ihr gemeinsam in der Expertengruppe. Einer von euch findet in den Unterlagen einen Seilring mit zwölf Knoten, die alle denselben Abstand von ihren Nachbarn haben. Haltet drei Knoten dieses Seilrings so fest, dass ihr ein Dreieck aufspannt, und variiert das Dreieck, dass es einmal spitzwinklig und einmal stumpfwinklig ist. Haltet jetzt die Knoten so fest, dass die drei Seitenlängen 3, 4 und 5 Knotenabstände sind. In diesem Dreieck erfüllen die Seitenlängen die Formel $3^2 + 4^2 = 5^2$ des Satzes von Pythagoras, wie ihr leicht nachrechnen könnt, und es sieht auch rechtwinklig aus, aber ist es das wirklich? Es stellt sich also die Frage, ob die Umkehrung des Satzes von Pythagoras



gilt: Wenn ein Dreieck mit den Seiten a, b und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt, so ist es auch rechtwinklig. Wie kannst du das beweisen?
Rufe dir dazu in Erinnerung, welche Angaben nötig sind, um ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig zu konstruieren. Es genügen einerseits alle drei Seiten (SSS) und andererseits zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS):
Betrachte das Dreieck ABC mit a=3, b=4 und c=5.
Betrachte das Dreieck A'B'C' mit a'=3, b'=4 und γ'=90°.
1. Berechne im Dreieck A'B'C' die Seite c'.
2. Warum sind die Dreiecke ABC und A'B'C' kongruent?
3. Was folgt daraus für den Winkel γ?
Schreibe die Begründung auf, weshalb die beiden Dreiecke kongruent sind, und weshalb daraus folgt, dass die Umkehrung des Satzes von Pythagoras stimmt.



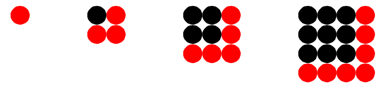
$a^2 + b^2 = c^2$

Zweiter Arbeitsauftrag

Ein Zahlentripel (a,b,c) mit natürlichen Zahlen a, b und c heisst *pythagoreisch*, wenn es die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt. Das Tripel (3,4,5) hast du schon kennen gelernt. Gibt es aber noch andere? Was passiert beispielsweise, wenn du diese drei Zahlen verdoppelst? Gibt das wieder ein pythagoreisches Zahlentripel? Und was passiert, wenn du sie verdreifachst, verzehnfachst oder mit irgendeiner natürlichen Zahl multiplizierst?
Weil Vielfache von pythagoreischen Zahlentripel wieder pythagoreische Zahlentripel sind, genügt es, nach so genannten *primitiven* pythagoreischen Zahlentripel zu suchen, bei denen der grösste gemeinsame Teiler der drei Zahlen 1 ist. Das Tripel (3,4,5) ist so ein primitives pythagoreisches Zahlentripel. Gibt es aber noch andere? Kannst du eines durch Ausprobieren finden?
Es ist gar nicht so leicht, nur durch Ausprobieren solche Tripel zu finden. Es wäre einfacher, wenn wir eine Methode hätten, mit der man sie systematisch finden kann. Solche Methoden gibt es. Eine davon benutzt eine interessante Eigenschaft der Quadratzahlen.
Wenn du die ungeraden Zahlen mit 1 beginnend der Reihe nach zusammenzählst, so ist das Resultat bei jedem Schritt eine Quadratzahl. Die erste ungerade Zahl 1 ist selber eine Quadratzahl. Zählen wir zu 1 die nächste ungerade Zahl 3, so gibt das 1+3=4, und das ist wieder eine Quadratzahl. Zählen wir zu 1+3 die nächste ungerade Zahl 5, so gibt das 1+3+5=9, und auch das ist eine Quadratzahl.
Schau die folgenden Beispiele an und überlege dir, weshalb es immer eine Quadratzahl gibt, wenn du die ungeraden Zahlen der Reihe nach zusammenzählst. Die schwarzen und roten Punkte unten rechts helfen dir dabei. Die Anzahl rote Punkte ist 1 in (a), 3 in (b), 5 in (c) und 7 in (d). Welche Figur käme als nächstes? Zeichne sie und überprüfe, dass sie 9 rote und 16 schwarze Punkte hat.

Beispiele:		q1	u	q2
1 = 1	0 + 1 = 1	0	1	1
1 + 3 = 4	1 + 3 = 4	1	3	4
1 + 3 + 5 = 9	4 + 5 = 9	4	5	9
1 + 3 + 5 + 7 = 16	9 + 7 = 16	9	7	16
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25	16 + 9 = 25	16	9	25

(a) (b) (c) (d)



Damit hast du das erste pythagoreische Zahlentripel gefunden. Es ist das Tripel (3,4,5), das wir schon kennen, denn $3^2=9$ rote plus $4^2=16$ schwarze Punkte gibt zusammengezählt $5^2=25$ Punkte. Auf diese Weise kannst du aber weitere pythagoreische Zahlentripel finden. Führe entweder die Figur mit den roten und schwarzen Punkten oder die Tabelle mit den Zahlen q1 (kleinere Quadratzahl), u (nächste ungerade Zahl) und q2 (grössere Quadratzahl) weiter, bis du ein zweites pythagoreisches Zahlentripel gefunden hast.
Schreibe das nächste pythagoreische Zahlentripel auf, das du auf diese Weise findest, und beschreibe in Worten, wie man weitere Tripel bestimmen kann. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele primitive pythagoreische Zahlentripel berechnen.

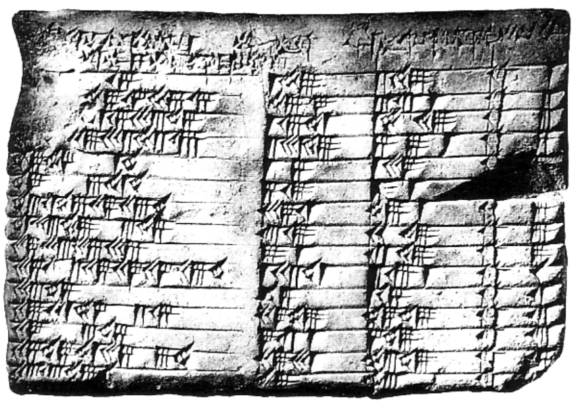
Reflexion

So, wie die Ägypter vor Jahrtausenden mit Seilringen rechte Winkel konstruiert haben, ist es ein Trick, und Tricks haben den Nachteil, dass man nicht so recht weiss, weshalb sie funktionieren. Die Mathematik hat aus diesem Trick eine Methode gemacht, von der man nicht nur weiss, weshalb sie funktioniert, sondern auch, wie man Seilringe mit anderen Zahlentripeln konstruieren kann, die ebenfalls rechte Winkel liefern.

Zum Schluss

Du hast erst gesehen, wie die Ägypter vor Jahrtausenden rechte Winkel konstruiert haben, um ihren Pyramiden und Tempeln die perfekte Form zu geben, hast anschliessend die Umkehrung des Satzes von Pythagoras bewiesen, der erst die Begründung liefert, weshalb der Seiltrick der Ägypter funktioniert, und hast zum Schluss eine Methode gefunden, mit der du primitive pythagoreische Zahlentripel systematisch bestimmen kannst. Den Beweis für die Umkehrung des Satzes von Pythagoras zu verstehen und die Methode für pythagoreische Zahlentripel zu finden ist dir möglicherweise nicht ganz leicht gefallen. Schreibe auf, welche Punkte dir besonders Schwierigkeiten bereitet haben, und über welche Fragen ihr in der Expertengruppe lange diskutiert habt.
Falls du anschliessend noch Zeit hast, oder falls die anderen Experten noch nicht ganz so weit sind und du auf sie wartest, so kannst du noch einen dritten Auftrag bearbeiten, bei dem du eine zweite Methode kennen lernst, um pythagoreische Zahlentripel zu finden.

Zusatzauftrag



Die altbabylonische Tontafel mit dem Namen Plimpton 322 enthält pythagoreische Tripel, von denen man nicht genau weiss, wozu sie dienten. Wegen der Anordnung auf der Tafel geht man jedoch davon aus, dass die folgenden Formeln, die man deshalb *babylonische Formeln* nennt, benutzt worden waren:

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$$

Sind m und n natürliche Zahlen, und ist m grösser als n, so sind auch a, b und c natürliche Zahlen, die $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, und damit ein pythagoreisches Zahlentripel bilden. Kannst du durch Einsetzen in die babylonischen Formeln überprüfen, dass das stimmt?

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$$

Lass dich durch die vierten Potenzen, die beim Quadrieren und anschliessenden Ausmultiplizieren entstehen, nicht abschrecken. Die Rechnung ist nicht schwierig.
Mit den babylonischen Formeln kannst du ebenfalls systematisch unendlich viele pythagoreische Zahlentripel berechnen, indem du bei 1 beginnend die natürlichen Zahlen m und n so wählst, dass m immer grösser als n ist. Trage ein paar davon zusammen mit den daraus abgeleiteten Werten von a, b und c in der folgenden Tabelle ein.

Nummer	m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

Mit den babylonischen Formeln bekommst du auch pythagoreische Zahlentripel, die nicht primitiv sind, wie etwa (6, 8, 10). Zudem ist die erste Zahl nicht immer kleiner als die zweite. Wir betrachten die drei Tripel (3, 4, 5), (4, 3, 5) und (8, 6, 10) aber als dasselbe Tripel.
Hast du mit dieser Methode – abgesehen von solchen Tripel, die wir als gleich betrachten – noch pythagoreische Zahlentripel gefunden, die du mit der Methode im zweiten Arbeitsauftrag nicht gefunden hast? Wenn ja, weshalb ist das so? Was unterscheidet die Zahlentripel, die sich nur mit der zweiten Methode finden lassen, von denen, die du schon mit er ersten Methode gefunden hast? Und was unterscheidet die beiden Methoden, dass sie nicht genau dieselben Tripel liefern?

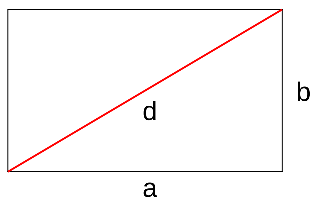
Gruppenpuzzle Arbeitsaufträge Thema 4: Berechne den Abstand von zwei Punkten

Lernziel

Nach der Bearbeitung dieser Arbeitsaufträge kannst du eine Formel angeben, mit der sich der Abstand von zwei Punkten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aus ihren Koordinaten berechnen lässt.

Einführung

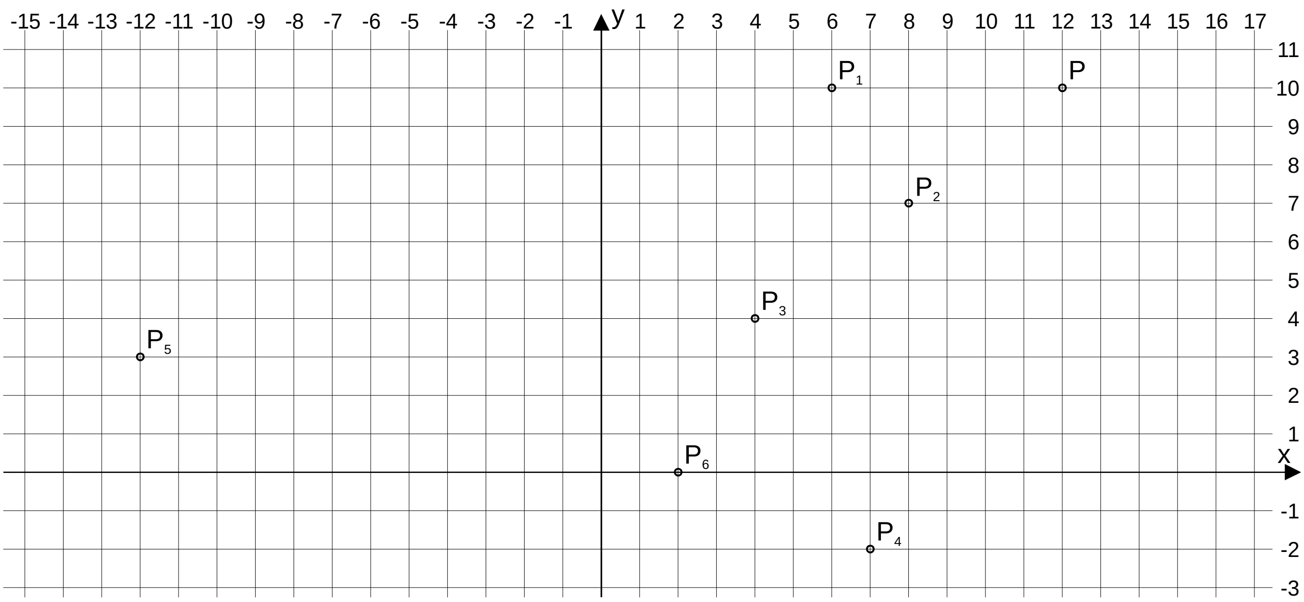
Der Satz von Pythagoras sagt, wie man aus den Kathetenlängen im rechtwinkligen Dreieck die Länge der Hypotenuse berechnet. Weil die beiden Seiten eines Rechtecks zusammen mit einer Diagonale ein rechtwinkliges Dreieck bilden, lässt sich dieser Satz auch zur Berechnung der Länge der Diagonale im Rechteck benutzen. Diese Tatsache lässt sich weiter auf die Berechnung des Abstandes zweier Punkte in rechtwinkligen, zweidimensionalen Koordinatensystemen anwenden. Eine Formel dafür zu finden ist deine Aufgabe.



$d^2 = a^2 + b^2$

Erster Arbeitsauftrag

Bestimme die Abstände des Punktes P von den sechs Punkten P_1, ..., P_6 im folgenden Koordinatensystem und trage sie in der Tabelle unten ein. (Tipp: Die Distanzen lassen sich allein aus den Koordinaten der Punkte berechnen.)



$\overline{PP_1}$ =	$\overline{PP_2}$ =	$\overline{PP_3}$ =	$\overline{PP_4}$ =	$\overline{PP_5}$ =	$\overline{PP_6}$ =

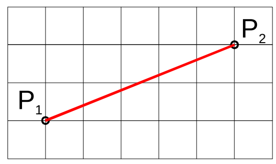
Landkarten wie diejenige auf der nächsten Seite legen auch ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wie du es eben in der Aufgabe benutzt hast, über die abgebildete Landschaft. Man kann damit einen Punkt auf der Erde mit zwei Zahlen festlegen. Wenn du in der Beispielkarte den Punkt mit den beiden Koordinaten 685 und 239 finden sollst, ist das einfach. Wende jetzt das, was du vorhin im Koordinatensystem gemacht hast, auf diese Landkarte an und bestimme auf eine Kommastelle genau die Koordinaten der beiden rot markierten Punkte in der Karte. Zeichne weiter ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen Hypotenuse diese beiden Punkte verbindet und dessen Katheten parallel zu den Koordinatenlinien liegen. Berechne zum Schluss die Längen der beiden Katheten aus den Koordinaten der beiden rot markierten Punkte. Damit kannst du den Abstand dieser beiden Punkte mit dem Satz von Pythagoras ausrechnen. Miss nach und überprüfe, ob das, was du berechnet hast, auch stimmt.

Zweiter Arbeitsauftrag

Bestimme den Abstand folgender Punktepaare (auf eine Kommastelle genau):

(0,0) (0,325)	(-50,-50) (-50,144)	(134,216) (134,347)
(0,0) (a,0)	(-50,-50) (70,-50)	(134,216) (234,291)
(0,0) (100,75)	(-50,-50) (50,25)	(12,58) (136,423)
(100,100) (100,b)	(-120,-120) (-64,-120)	(-113,-24) (544,18)
(100,100) (200,175)	(-120,-120) (-20,-45)	(-113,24) (544,-18)

Die Lösungen findest du unten auf der letzten Seite dieser Arbeitsaufträge. Kontrolliere die Ergebnisse, die du bekommen hast. Überlege dir, wie du zu deinen Resultaten gekommen bist. Hast du anders gerechnet, wenn die Koordinaten negative Zahlen enthielten, oder hast du immer die gleichen Rechnungen ausgeführt? Und was hat du bei den Koordinaten mit Variablen getan?



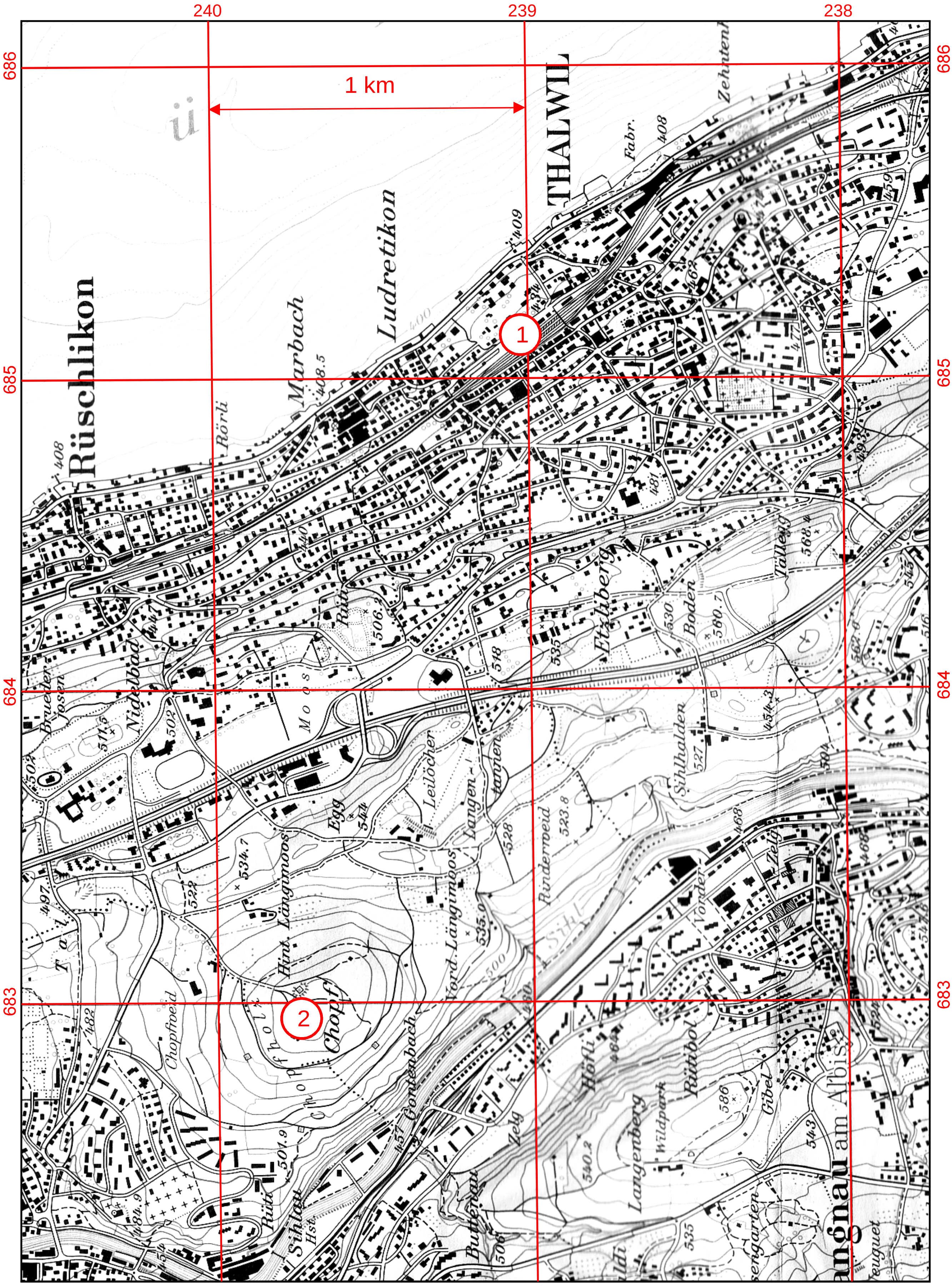
(x_1, y_1) (x_2, y_2)

Was ändert sich an deinen Rechenschritten, wenn du den Abstand des Punktes (20,30) vom Punkt (15,20) statt dem Abstand des Punktes (15,20) vom Punkt (20,30) bestimmst? Und was ändert sich, wenn du statt dem Abstand der Punkte (10,15) und (20,30) den Abstand (110,215) und (120,230) berechnest?

In den obigen Beispielen hast du den Abstand der Punkte (0,0) und (a,0) bestimmt. Einer der Werte war eine Variable. Kannst du auch den Abstand der Punkte (0,0) und (x_2,y_2) angeben, und denjenigen der Punkte $(x_1,0)$ und $(x_2,0)$? Kannst du zum Schluss noch den Abstand des Punktes (x_1,y_1) vom Punkt (x_2,y_2) finden und ihn nur mit den vier Werten x_1, y_1, x_2 und y_2 ausdrücken? Überprüfe deine Lösung an ein paar Beispielen.

Reflexion

Es ist dir sicher auch schon passiert, dass du die x- und die y-Koordinate verwechselt hast. In der Kartographie, also der Lehre von der Herstellung der Landkarten, ist man sich bewusst, wie leicht dies passieren kann. Deshalb hat man die Koordinaten bei den Landeskarten der Schweiz in nord-südlicher Richtung im Bereich von 50 bis 350 und in ost-westlicher Richtung im Bereich von 450 bis 850 gewählt. Somit gibt es in der Schweiz nur einen Punkt mit den Koordinaten (239,685) oder (685,239). Du findest ihn in der Karte auf der nächsten Seite.



Thema 4 Arbeitsaufträge zum Satz von Pythagoras Seite 3

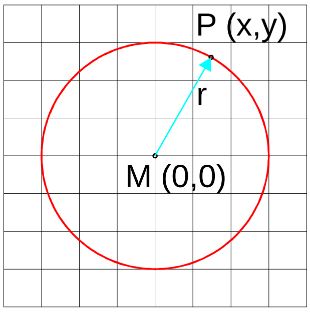
Zum Schluss

Du hast verstanden, wie man aus den Koordinaten von zwei Punkten ihren Abstand berechnen kann, hast eine Formel dafür gefunden und hast gesehen, wie man dies auf die Distanzberechnung in Landkarten anwenden kann. Diese allgemeine Formel zu finden ist dir möglicherweise nicht ganz leicht gefallen. Schreibe auf, welche Punkte dir besonders Schwierigkeiten bereitet haben, und über welche Fragen ihr in der Expertengruppe lange diskutiert habt.

Falls du anschliessend noch Zeit hast, oder falls die anderen Experten noch nicht ganz so weit sind und du auf sie wartest, so kannst du noch einen dritten Auftrag bearbeiten, bei dem du die gefundene Formel für den Abstand zweier Punkte auf Kreise anwendest.

Zusatzauftrag

Jede Gerade in der Ebene lässt sich bekanntlich in einem Koordinatensystem durch die Gleichung ax + by + c = 0 mit Koeffizienten a, b und c darstellen. Die Gleichung x - y = 0 beispielsweise ist die Winkelhalbierende, die den ersten und dritten Quadranten teilt. Mit Gleichungen kann man also gewisse Punktmengen beschreiben. Kennst du noch andere Punktmengen ausser Geraden, und kannst du sie ebenfalls mit einer Gleichung oder Ungleichung festlegen? Der Kreis ist eine Punktmenge, die du kennst, aber gibt es dafür auch eine Gleichung?



Zeichne einen Kreis mit Radius 10 um den Nullpunkt (0,0). Liegt der Punkt (0,7) auf dem Kreis, oder liegt er innerhalb oder ausserhalb der Kreisfläche? Und wie steht es mit den Punkten (6,8), (11,5) und (3,7)? Wie kannst du das herausfinden?

Welchen Abstand hat in der nebenstehenden Figur der Punkt P mit den Koordinaten (x,y) vom Mittelpunkt des Kreises mit den Koordinaten (0,0), wenn der Radius r gleich 10 ist? Wie kannst du das mit der Formel, die du im letzten Arbeitsauftrag gefunden hast, ausdrücken? (Tipp: Die Punkte auf dem Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt M sind durch eine bestimmte Eigenschaft charakterisiert. Welche Eigenschaft ist das?)

Welchen Abstand hat der Punkt P mit den Koordinaten (x,y) vom Mittelpunkt des Kreises mit den Koordinaten (0,0), wenn der Kreisradius r ist? Kannst du das mit einer Gleichung, die du aus der Formel für den Abstand zweier Punkte herleitest, darstellen? Wenn du die Gleichung gefunden hast, so hast du die allgemeine Gleichung für einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (0,0) gefunden. Hast du auch noch Lust, die Gleichung für den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (a,b) zu finden?

Lösungen für die Abstandsberechnungen im zweiten Arbeitsauftrag:

(0,0) (0,325)	325	(-50,-50) (-50,144)	194	(134,216) (134,347)	131
(0,0) (a,0)	a	(-50,-50) (70,-50)	120	(134,216) (234,291)	125
(0,0) (100,75)	125	(-50,-50) (50,25)	125	(12,58) (136,423)	385.5
(100,100) (100,b)	b-100	(-120,-120) (-64,-120)	56	(-113,-24) (544,18)	658.3
(100,100) (200,175)	125	(-120,-120) (-20,-45)	125	(-113,24) (544,-18)	658.3

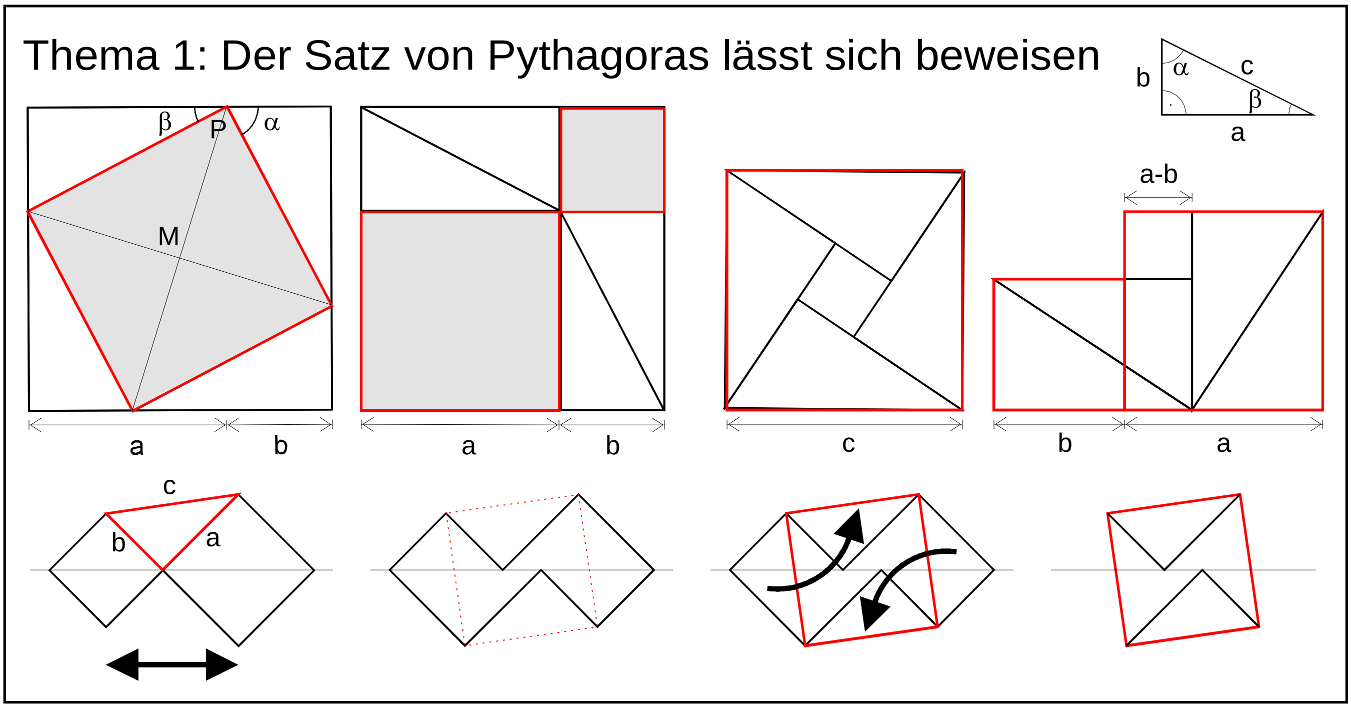
Wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Arbeit in den Expertengruppen abgeschlossen haben, überlegen sie sich als Hausaufgabe auf die nächste Lektion, die für die Vermittlungsphase vorgesehen sind, wie sie den Stoff, den sie gelernt haben, ihren Kolleginnen und Kollegen in der Stammgruppe weitergeben wollen.

2.3. Vermittlungsphase

Die Expertinnen und Experten präsentieren ihre Erkenntnisse in den Stammgruppen. Jede Stammgruppe sollte, wie schon jede Expertengruppe in der Erarbeitungsphase, einen eigenen Raum zur Verfügung haben, um das Gelernte weitergeben und ungestört diskutieren zu können. Eine Wandtafel ist nützlich, aber nicht notwendig, weil sich die vier oder höchstens fünf Personen in der Stammgruppe gut auch mit Papier und Bleistift an einem Tisch gegenseitig informieren können. Sollten nicht genügend freie Zimmer zur Verfügung stehen, müssten sich die bis zu sechs Stammgruppen im Schulzimmer verteilen.
Die Vermittlung ist nicht als ein reiner Vortrag der Expertinnen und Experten gedacht, sondern beinhaltet auch, dass die übrigen Mitglieder der Stammgruppe Aufgaben aus den Arbeitsaufträgen der Expertengruppen lösen oder diese gar ganz durcharbeiten. Sie sollten dabei jedoch weniger Zeit brauchen, als die Expertinnen und Experten brauchten, weil diese ihren Kolleginnen und Kollegen Teilschritte erklären oder ihnen auf andere Weise helfen können.
Auch in dieser Phase besucht die Lehrperson die verschiedenen Gruppen immer wieder und beobachtet die Vermittlung des Stoffes. Sie greift nur ein, wenn ihr dies unumgänglich scheint, merkt sich aber, falls sie irgendwelche Unklarheiten oder Fehlvorstellungen entdeckt, um sie in der nächsten Phase zu thematisieren. Sie stellt zudem sicher, dass sie jede Expertin und jeden Experten mindestens einmal bei der Präsentation sieht, um sich ein vollständiges Bild über die Vermittlungskompetenzen der Klasse zu machen.

2.4. Phase der Evaluation und Integration

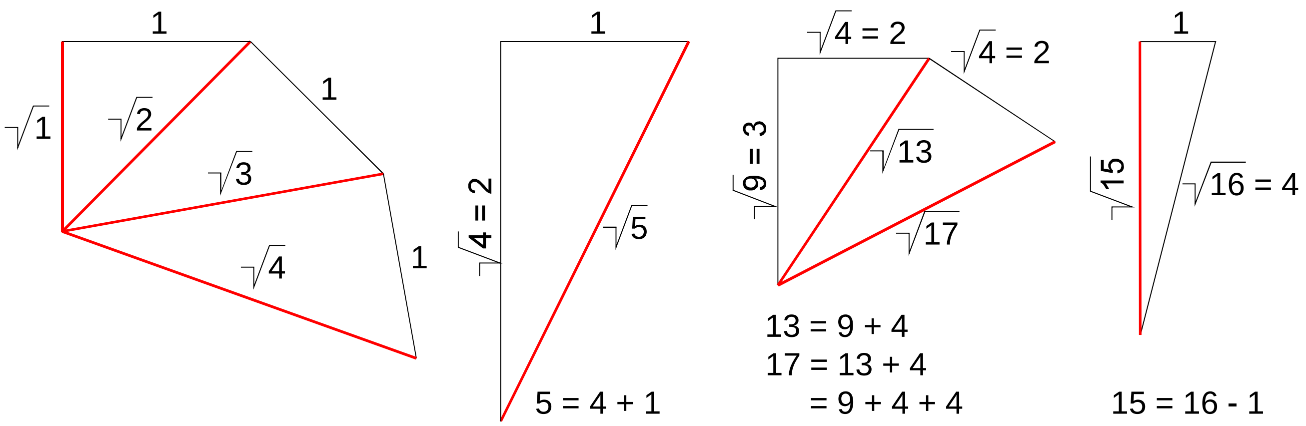
Die Lehrperson fasst die Erkenntnisse der vier Expertengruppen zusammen und wiederholt, was diese entdeckt haben. Die Zusatzaufgaben werden zusammen mit den anderen Arbeitsaufträgen besprochen.



Beim ersten Thema bespricht die Lehrperson die drei Beweise. Vorher soll aber der Unterschied zwischen einem Zerlegungsbeweis und einem Ergänzungsbeweis angesprochen und diskutiert werden.
Im ersten Beweis kann auf zwei verschiedene Arten gezeigt werden, dass das Viereck in der linken Figur ein Quadrat mit Seitenlänge c ist. Das folgt einerseits daraus, dass die Winkel beim Punkt P gleich α und β

aus dem ursprünglichen Dreieck sind und der Winkel des Vierecks wegen der Winkelsumme somit 90° sein muss, andererseits aber auch aus Symmetrieüberlegungen, weil das Viereck bei Drehung um 90° mit Zentrum M in sich übergeht. Bei der rechten Figur kann darauf hingewiesen werden, dass dies eine geometrische Darstellung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, falls diese bekannt ist. Damit wird wieder betont, dass Geometrie und Algebra eng miteinander verbunden sind.
Im zweiten Beweis wird gezeigt, dass das Viereck in der Mitte der linken Figur ein Quadrat mit Seitenlänge a-b ist. (Dass die Winkel in diesem Viereck 90° sind, folgt daraus, dass sie zusammen mit dem rechten Winkel des Dreiecks einen Winkel von 180° ergeben.)
Der dritte Beweis aus dem Zusatzauftrag kann am besten durch Flächenumformungen erklärt werden. Erst wird der untere Teil gespiegelt und anschliessend werden zwei Dreiecke um eine ihrer Ecken gedreht, sodass ein Viereck entsteht. Dass die Dreiecke wirklich kongruent sind und durch Drehung ineinander übergehen, folgt daraus, dass zwei ihrer Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind. Aus denselben Überlegungen folgt aber auch, dass das Viereck ein Quadrat mit der Seitenlänge c sein muss.

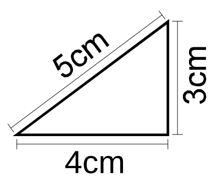
Thema 2: Die Wurzel jeder natürlichen Zahl lässt sich konstruieren



Bei der Besprechung des zweiten Themas wird in Erinnerung gerufen, dass jede natürliche und jede rationale Zahl bei gegebener Einheitsstrecke konstruiert werden kann. Anschliessend wird gezeigt, wie auch die Wurzel aus jeder natürlichen Zahl konstruierbar ist. Weil man jedoch nicht immer bei 1 beginnen und die ganze Wurzelspirale zeichnen möchte, wird an ein paar Beispielen diskutiert, wie man vorgehen würde, wenn man die Wurzel einer natürlichen Zahl einfacher konstruieren wollte. (Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von Quadratzahlen darstellen, wobei die trivialste Aufteilung diejenige in lauter Einer ist.) Zum Schluss wird besprochen, wie man eine rationale Zahl unter einer Wurzel erweitert, um im Nenner ein Quadrat zu bekommen. So wird aus $\sqrt{3/5}$ erst $\sqrt{15/25}$ und dann $\sqrt{15} / 5$, was mit den bereits bekannten Mitteln konstruiert werden kann.

Thema 3: Es gibt unendlich viele pythagoreische Zahlentripel

Das bekannteste Beispiel ist (3, 4, 5), aber es gibt mehr:



3	4	5	11	60	61	8	15	17
5	12	13	13	84	85	20	21	29
7	24	25	15	112	113	12	35	37
9	40	41	17	144	145	28	45	53

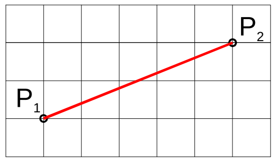
Zum dritten Thema wird – ausgehend wieder vom Seilring und dessen Anwendung beim Bau ägyptischer Pyramiden – erst die Umkehrung des Satzes von Pythagoras besprochen. Dass ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wenn entweder alle drei Seiten oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, wissen die Schülerinnen und Schüler aus dem Geometrieunterricht. Wenn also ein

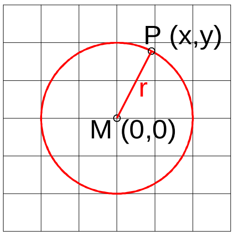
Dreieck gegeben ist, dessen drei Seiten bekannt sind und $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, und wenn ein anderes Dreieck gegeben ist, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt ist, wobei die zwei Seiten gleich sind wie die beiden Seiten a und b des ersten Dreiecks und der eingeschlossene Winkel 90° beträgt, sodass die Länge der dritten Seite wegen dem Satz von Pythagoras ebenfalls gleich wie die Seite c des ersten Dreiecks sein muss, so müssen die beiden Dreiecke kongruent sein.
Damit ist gezeigt, dass und wie man mit pythagoreischen Zahlentripel rechte Winkel konstruieren kann, so wie es die Ägypter getan haben. Pythagoreische Zahlentripel findet man mit den zwei Methoden aus den Arbeitsaufträgen, wobei die erste Methode nur Tripel findet, bei denen die grösste Zahl um Eins grösser als die mittlere Zahl ist. Es gibt aber pythagoreische Zahlentripel, bei denen das nicht der Fall ist.

Thema 4: Der Abstand zweier Punkte und die Kreisgleichung

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

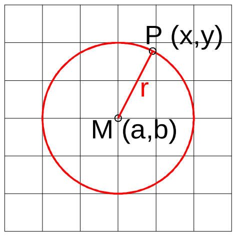
$P_1 = (x_1, y_1)$
$P_2 = (x_2, y_2)$





$$\overline{MP} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



$$\overline{MP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

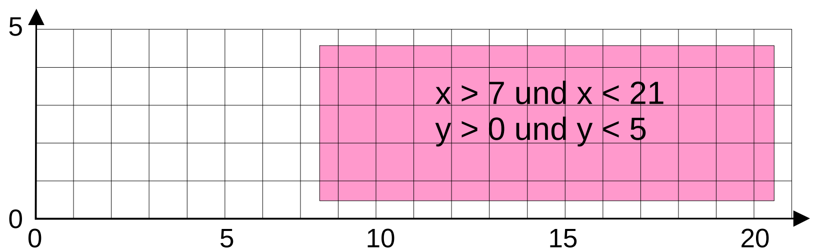
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Das vierte und letzte Thema, bei dem eine Formel für den Abstand von zwei Punkten im rechtwinkligen, zweidimensionalen Koordinatensystem gefunden wurde, ist wichtig für den weiteren Mathematikunterricht und soll deshalb ausführlich besprochen und geübt werden.
Die Kreisgleichung für Kreis um den Nullpunkt des Koordinatensystems, die im Zusatzauftrag gesucht worden ist, ergibt sich direkt aus der Formel für den Abstand zweier Punkte, weil jeder Punkt P mit den Koordinaten (x,y), der auf der Kreislinie liegt, den Abstand r vom Nullpunkt haben muss. Die allgemeine Kreisgleichung mit Mittelpunkt (a,b) kann entweder ebenfalls aus dieser Formel oder aber durch eine Koordinatentransformation (eine Translation) eingeführt werden. (Die Lehrperson sollte erklären, weshalb man die Kreisgleichung normalerweise in der Form ohne Wurzelzeichen benutzt.)

Als kleiner Exkurs wird an dieser Stelle ein Punkt erwähnt, der bei diesem Thema in den Unterlagen unter Reflexion aufgebracht worden ist. Weil Schülerinnen und Schüler auch in diesem Alter noch ab und zu die x- und y-Koordinate verwechseln, ist es für sie leicht nachvollziehbar, weshalb bei den Schweizer Landkarten ein Nullpunkt gewählt worden ist, der dies verhindert. (Bei Schiessübungen der Artillerie könnten solche Verwechslungen verheerende Folgen haben.)

Vertauschte Koordinaten

Weil sich die möglichen Werte der x- und y-Koordinate im roten Gebiet nicht überschneiden, gibt es nur einen Punkt in diesem Gebiet, der einem Zahlenpaar wie beispielsweise (3,11) entspricht.



In der Phase der Evaluation und Integration diskutiert die Lehrerin oder der Lehrer mit den Schülerinnen und Schülern auch das Gruppenpuzzle selber, bespricht mit ihnen die in der Erarbeitungs- und in der Vermittlungsphase gemachten Beobachtungen, lässt sie ihre Eindrücke und sowohl positiven wie auch negativen Erfahrungen erzählen und beantwortet Fragen. Ziel dieses Meinungsaustausches ist einerseits die beiderseitige Rückmeldung dessen, was in einem eventuell nächsten Gruppenpuzzle anders gemacht werden könnte, und andererseits das Aufdecken von allfälligen Missverständnissen und Fehlvorstellungen, die sich in den Expertengruppen gebildet haben könnten.

Anschliessend werden die Hausaufgaben bekannt gegeben, mit denen – im Sinne einer Lernkontrolle und Wissenssicherung – überprüft wird, wie gut der vermittelte Stoff verstanden worden ist. Falls die für die Phase der Evaluation und Integration vorgesehene Lektion noch nicht zu Ende ist, können die Schülerinnen und Schüler schon damit beginnen.
Folgende Aufgaben eignen sich für die ersten drei Themen:

1. Zeichne für einen der beiden besprochenen Beweise des Satzes von Pythagoras eine Skizze, beschreibe ihn in Worten und begründe, weshalb daraus folgt, dass der Satz für alle rechtwinkligen Dreiecke gilt.
2. Konstruiere eine Strecke der Länge $\sqrt{18}$ mit Zirkel und Lineal unter der Annahme, dass die Einheitsstrecke 5 cm misst.
3. Finde zwei verschiedene pythagoreische Zahlentripel (a, b, c) und rechne mit dem Taschenrechner nach, dass sie die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Aufgaben für das vierte Thema:

Aufgaben:

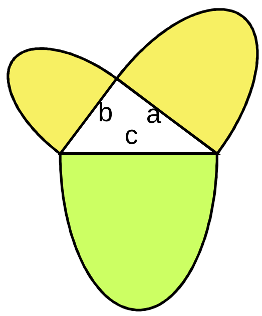
1. Berechne den Abstand der Punkte mit den Koordinaten (6, 3) und (9, 7).
2. Berechne den Abstand der Punkte mit den Koordinaten (3, 1) und (3, 8).
3. Berechne den Abstand der Punkte mit den Koordinaten (-3, -2) und (5, 4).
4. Trage die Punkte mit den Koordinaten (-3, -2) und (5, 4) in einem Koordinatensystem ein, verschiebe beide Punkte um 5 nach oben und um 9 nach rechts, bestimme die neuen Koordinaten und berechne den Abstand der beiden verschobenen Punkte.
5. Berechne den Abstand der Punkte mit den Koordinaten (10, 12) und (31,45) auf eine Kommastelle genau.
6. Berechne den Abstand eines Punktes mit den Koordinaten (10.7, -3.8) von einem Punkt mit den Koordinaten (-2.9, -7.3) auf zwei Kommastellen genau.
7. Berechne die Länge der Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s.
8. Berechne die Länge der zweiten Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, wenn die andere Kathete 5 cm und die Hypotenuse 13 cm lang ist.
9. Beweise, dass es kein pythagoreisches Tripel mit zwei gleichen Zahlen gibt.

Lösungen der Aufgaben für das vierte Thema:

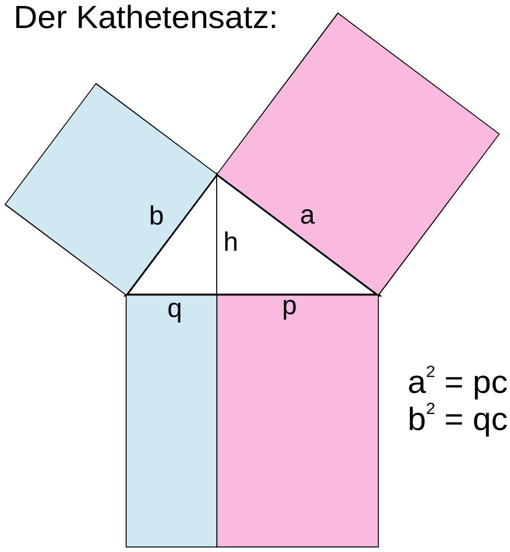
1. Der Abstand ist 5.
2. Der Abstand ist 7. (Beachte, dass die x-Koordinaten der beiden Punkte gleich sind.)
3. Der Abstand ist 10.
4. Der Abstand ist 10 wie in der Aufgabe 3, weil die Verschiebung beider Punkte um den gleichen Vektor den Abstand nicht ändert. Die neuen Koordinaten sind (6,3) und (14,9).
5. Der Abstand ist 39.1 gemäss Formel.
6. Der Abstand ist 14.04 gemäss Formel.
7. Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s ist $\sqrt{3} / 2 \cdot s$.
8. Die andere Kathete ist 12 cm lang.
9. Die Hypotenuse kann nicht gleich lang sein wie eine Kathete, weil die andere Kathete sonst Länge 0 hätte, was keine natürliche Zahl ist. Die beiden Katheten können aber auch nicht gleich lang sein, weil sonst die Länge der Hypotenuse $\sqrt{2}$ mal die Länge einer der Kathete wäre, womit entweder die Hypotenuse oder die Katheten keine ganzzahlige Länge haben können.

2.5. Ausblick

Im Folgenden wird der Rahmen abgesteckt, in dem eine weiterführende Behandlung des mit der Satzgruppe des Pythagoras eng verwandten Stoffes erfolgen könnte.
In der vorliegenden Arbeit ist der Zugang zu diesem Themenkreis über den Satz von Pythagoras gewählt worden, obwohl der Kathetensatz ein allgemeineres Resultat geliefert hätte. Weil dessen Beweis aber schwieriger zu verstehen ist, erschien der hier benutzte Einstieg geeigneter für die Zielgruppe.
Als Nachfolgethemen nach dem Gruppenpuzzle sind Katheten- und Höhensatz aber sicher naheliegende Kandidaten. Der Kathetensatz verfeinert den Satz von Pythagoras, indem das Hypotenusenquadrat weiter unterteilt wird. Der Höhensatz kann als "Quadratur des Rechtecks" eingeführt werden. Weil der Satz des Pythagoras nicht nur für die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, sondern für beliebige drei Figuren über den Seiten gilt, solange diese ähnlich sind, kann man so über die Möndchen von Hippokrates auf die Quadratur des Kreises zu sprechen kommen (Baptist 1998).
Das Thema der pythagoreischen Zahlentripel kann als Anlass benutzt werden, um die Fermat'sche Vermutung zu thematisieren. Pierre de Fermat (1601 - 1665) hatte 1637 die Vermutung geäussert, dass es für n>2 keine natürlichen Zahlen a, b und c gebe, die $a^n + b^n = c^n$ erfüllen. Das Thema eignet sich an dieser Stelle wegen fehlenden Vorkenntnissen kaum für mehr als einen interessanten Exkurs, der sich aber trotzdem lohnt, weil so die Satzgruppe des Pythagoras einen Bezug zu einem Ergebnis der modernen Forschung bekommt, was die Mathematik als lebendige Wissenschaft zeigt[2].



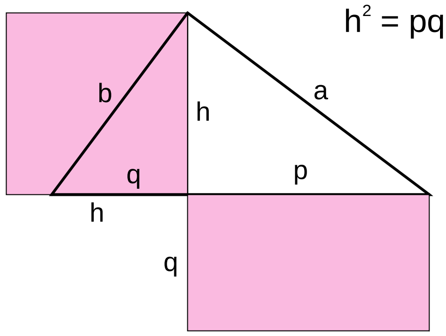
Der Kathetensatz:



$a^2 = pc$
$b^2 = qc$

Der Höhensatz:

$h^2 = pq$



3. Schlussbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit ist ein Gruppenpuzzle zur Einführung in den Themenbereich um den Satz von Pythagoras beschrieben worden. Die vier Expertengruppen bearbeiten vier Themen: Der Beweis dieses Satzes, die geometrische Konstruierbarkeit von Zahlen, die Umkehrung des Satzes mit der Anwendung über die pythagoreischen Zahlentripel auf die antike Baukunst und der Abstand zweier Punkte im zweidimensionalen, rechtwinkligen Koordinatensystem. Ansätze zur weiterführenden Behandlung des Themenkreises sind angegeben worden.

3.1. Reflexion

Die folgenden Überlegungen haben die Entwicklung dieses Gruppenpuzzles bestimmt:

1. Es ist schwierig, die Schülerinnen und Schüler den Satz von Pythagoras geführt selber entdecken zu lassen, denn erstens haben einige von ihnen bereits davon gehört und teils richtige, teils aber auch falsche Vorstellungen davon, was er aussagt, und zweitens ist der Zusammenhang zwischen den Längen der Dreiecksseiten und den Quadraten alles andere als offensichtlich. Deshalb schlägt

[2] Die Fermat'sche Vermutung gehört (vor allem auch in Laienkreisen) zu den berühmtesten mathematischen Fragen. Simon Singh hat seine Geschichte im Buch *Fermats letzter Satz*, das 1997 auf englisch und 1998 auf deutsch erschienen ist, äusserst spannend erzählt.

diese Arbeit einen anderen Weg ein. Die Aussage des Satzes wird postuliert, dann wird aber das Unerwartete betont, dass Seitenlängen durch diesen Satz mit irgendwelchen Flächen, die auf den ersten Blick gar nichts mit dem Dreieck zu tun haben, verbunden sind.

2. Die Einbettung des Gelernten in das Vorwissen und die breite Verknüpfung des Neuen mit der bereits Bekannten ist gemäss moderner Lehr-Lern-Psychologie für das spätere Abrufen aus dem Gedächtnis und für den Wissenstransfer von grosser Bedeutung. In dieser Beziehung ist die Thematik um den Satz von Pythagoras ein höchst dankbares Feld, denn es erlaubt, die traditionelle Zirkel-und-Lineal-Geometrie mit Zahlentheorie, Algebra, analytischer Geometrie und Analysis zu verbinden. Die Bearbeitung des Stoffes in Form eines Gruppenpuzzles erlaubt es, das Thema im Sinne des operativen Prinzips zu behandeln und dabei alle vier allgemeinen Lernziele nach Wittmann (1. Mathematisieren, 2. Beobachten, Entdecken, Erfinden, 3. Argumentieren, Beweisen, 4. mündliche und schriftliche Ausdrucksfähigkeit) abzudecken.
3. Die vier Themen sind absichtlich verschieden gewählt worden. Es hätten auch vier verschiedene Gruppen von Beweisen des Satzes von Pythagoras untersucht werden können. Beweisen ist in der Altersstufe der Zielgruppe jedoch problematisch. Hans Niels Jahnke geht im Artikel “Proofs and Hypotheses” (ZDM Mathematics Education 39, 2007, Seiten 79-86) allgemein auf die didaktischen Seiten des mathematischen Beweisens und auf die Abstraktion von der Empirie ein.
4. Die Arbeitsaufträge für die vier Themen sind so gestaltet, dass auch leistungsschwächere Lernende einen Teil davon selbstständig lösen können. Weil die Mitglieder der Expertengruppen die Aufträge zwar selbstständig, aber doch gemeinsam bearbeiten, profitieren die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler zudem auch bei den Teilen der Aufträge, die sie allein nicht bewältigen könnten, von ihren leistungsstärkeren Kolleginnen und Kollegen.

3.2. Quellenangaben

- Christoph Riedweg, *Pythagoras: Leben, Lehre, Nachwirkung*, Verlag C.H.Beck, 2002
- Alfred Hoehn & Martin Huber, *Pythagoras: Erinnern Sie sich?* Verlag Orell Füssli, 2005
- Anna Maria Fraedrich, *Die Satzgruppe des Pythagoras*, B.I. Wissenschaftsverlag, 1994
- Peter Baptist, *Pythagoras: und kein Ende?* Lesehefte Mathematik, Klett Verlag, 1998
- Christoph J. Scriba & Peter Schreiber, *5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer Verlag, 2001
- Elisabeth Barth, Friedrich Bart, Gert Krumbacher & Konrad Ossiander, *Anschauliche Geometrie 9*, Oldenburg Schulbuchverlag, 3. Auflage, 1997
- Urs Kirchgraber & Kristine Barro, Vorlesung *Geometrieunterricht*, ETH Zürich, 2007
- Detlef Gronau, *Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik*, Karl-Franzens-Universität Graz, 2008, http://www.uni-graz.at/~gronau/Gm.pdf
- http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vorlesungen/Pythago/Pythagoras.html

Die Regeln für das Gruppenpuzzle sind der Beschreibung von JIGSAW I in *Pädagogische Psychologie* von Marcus Hasselhorn und Andreas Gold (Verlag Kohlhammer, 2006) entnommen worden.

Bildquellen:
Portrait Seite 5: Peter Baptist, *Pythagoras: und keine Ende?* Lesehefte Mathematik, Klett Verlag, 1998
Karte Seite 5: Christoph Riedweg, *Pythagoras: Leben, Lehre, Nachwirkung*, Verlag C.H.Beck, 2002
Tontafel Seite 19: Alfred Hoehn & Martin Huber, *Pythagoras: Erinnern Sie sich?* Verlag Orell Füssli, 2005
Karte Seite 23: Bundesamt für Landestopographie, Landeskarten der Schweiz 1:25’000, Albis 1111, 1982