Diss. ETH No. 16666

Dynamic Valuations in Incomplete Markets

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Science

presented by
SUSANNE KLÖPPEL
M.Sc. in Mathematics NUIG
Dipl.-Math oec. University of Ulm
born April 18, 1978
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Martin Schweizer, examiner
Prof. Dr. Freddy Delbaen, co-examiner
Prof. Dr. Alexander Schied, co-examiner

2006

Abstract

We study two dynamic approaches to the valuation of contingent claims in an incomplete market. The first is *indifference valuation* where at each time t, an agent determines for a random payoff X a value $p_t(X)$ by the requirement that she is indifferent between buying X for $p_t(X)$ or not doing so, provided she always trades optimally in the basic assets. We assume that the agent's time t preferences are given by a *monetary concave utility functional* (MCUF) U_t, i.e., that $-U_t$ is a (conditional) convex risk measure. The valuation functional $p_t(X)$ is then the *convolution* of U_t and a *market functional* constructed from the underlying financial market with the help of the optional decomposition under constraints. Our main goal is to show that the valuation functional $p_.(\cdot)$ is *time-consistent*, i.e., preserves (in a suitable sense) the ordering of payoffs over time. This is achieved by proving that the market functional is time-consistent and that the convolution of dynamic MCUFs preserves time-consistency. As an auxiliary result, we provide a representation for (conditional) MCUFs in terms of their concave conjugates and via equivalent probability measures. Moreover, we show how our results can be translated to dynamic MCUFs defined via backward stochastic differential equations.

Our second valuation approach is a bit less restrictive. We do not specify a unique value for X, but a whole interval of possible values which is still small enough to be useful in practice. This interval is obtained by taking for valuation those measures Q which yield neither arbitrage opportunities nor *good deals*. The latter are defined as investment opportunities with a (von Neumann-Morgenstern expected) utility which is "too high" in comparison with the maximal utility obtainable by trading in the basic assets. The main difficulty is the precise definition of the set $\mathcal{N}$ of *no-good-deal measures* which is very important for computational and dynamic properties of the *good deal bounds*, i.e., of the boundaries of the interval of possible values. In a Lévy setting, we define $\mathcal{N}$ via a restriction on an appropriate integrand, and we clarify the exact relation between this "local" and an economically more intuitive "global" restriction. The resulting valuation bounds are then time-consistent dynamic MCUFs.

In order to establish the relation between the local and global restrictions, we need to know that the Lévy structure of the underlying market is preserved under an optimal change of measure. This is proved in the last part of this thesis for optimal measures obtained from the *dual* problem of minimizing some f*-divergence* over a set of equivalent local martingale measures. These optimization problems naturally arise in utility maximization, and we establish the Lévy preservation result for the f-divergences corresponding to logarithmic, power and quadratic utility.

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit zwei dynamischen Bewertungsmethoden für Derivate in unvollständigen Märkten. Die erste ist *Indifferenzbewertung*, bei der ein Agent zu jedem Zeitpunkt t den Wert $p_t(X)$ einer zufälligen Auszahlung X dadurch festlegt, dass es ihm gleichgültig ist, ob er X für den Preis $p_t(X)$ kauft oder nicht, sofern er stets optimal in den Basisanlagen handelt. Wir nehmen an, dass die Präferenzen des Agenten zum Zeitpunkt t durch eine *monetäre konkave Nutzenfunktion* (MCUF) U_t gegeben sind, d.h., dass $-U_t$ ein (bedingtes) konvexes Risikomaß ist. Das Bewertungsfunktional $p_t(\cdot)$ entspricht dann gerade der *Faltung* von U_t und einem *Marktfunktional*, welches mit Hilfe der optionalen Zerlegung unter Handelsbeschränkungen aus dem zugrunde liegenden Finanzmarkt konstruiert wird. Unser eigentliches Ziel ist es zu zeigen, dass $p_{.}(\cdot)$ *zeitkonsistent* ist, also (auf eine geeignete Art und Weise) die Ordnung zwischen verschiedenen Auszahlung über die Zeit erhält. Hierzu beweisen wir, dass das Marktfunktional zeitkonsistent ist, und dass bei der Faltung dynamischer MCUFs die Zeitkonsistenz erhalten bleibt. Als Hilfsresultat leiten wir eine Darstellung für (bedingte) MCUFs mit Hilfe der zugehörigen konkav konjugierten Funktion und äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen her. Zusätzlich zeigen wir, wie unsere Resultate auf solche dynamische MCUFs übertragen werden können, die durch stochastische Rückwärtsdifferenzialgleichungen definiert sind.

Die zweite hier betrachtete Methode ist etwas weniger restriktiv. Anstelle eines eindeutigen Wertes für X bestimmen wir ein ganzes Intervall möglicher Werte, welches klein genug ist, um praktischen Nutzen zu haben. Dieses Intervall erhalten wir durch die Verwendung all jener Bewertungsmaße Q, die weder zu Arbitragemöglichkeiten noch zu *good deals* führen. Letztere definieren wir als Auszahlungen mit einem (von Neumann-Morgenstern erwarteten) Nutzen, der im Vergleich mit dem maximal durch Handeln in den Basisanlagen erreichbaren Nutzen "zu hoch" ist. Die eigentliche Schwierigkeit besteht in der genauen Definition der Menge der *no-good-deal-Maße* $\mathcal{N}$. Sie ist maßgebend für die Berechenbarkeit und die dynamischen Eigenschaften der *good-deal bounds*, d.h. der Grenzen des Intervalls der möglichen Werte für X. In einem Lévy-Model definieren wir $\mathcal{N}$ über die Beschränkung eines geeigneten Integranden and klären den genauen Zusammenhang zwischen dieser "lokalen" und einer intuitiveren "globalen" Beschränkung. Die daraus resultierenden good-deal bounds sind zeitkonsistente dynamische MCUFs.

Um eine Beziehung zwischen den lokalen und globalen Beschränkungen herzustellen, benötigen wir, dass die Lévy-Struktur des zugrunde liegenden Marktes bei einem optimalen Maßwechsel erhalten bleibt. Dies wird im letzten Teil der vorliegenden Arbeit für optimale Maße gezeigt, welche das duale Problem der Minimierung einer f-Divergenz über eine Menge von äquivalenten lokalen Martingalmaßen lösen.

Solche Optimierungsprobleme treten bei der Nutzenmaximierung auf, und wir zeigen die Erhaltung der Lévy-Struktur für die f-Divergenzen, welche zu logarithmischen, quadratischen und Potenz-Nutzenfunktionen gehören.