

Diss. ETH No. 16022

# Scattering of Magnetic Edge States

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF  
TECHNOLOGY ZÜRICH  
(ETH Zürich)

for the degree of  
Doctor of Natural Sciences

presented by  
Christoph Buchendorfer  
Dipl. Phys. ETH  
born April 8, 1973  
German citizen

accepted under the recommendation of  
Prof. Dr. Gian Michele Graf, examiner  
Prof. Dr. Stefan Teufel, co-examiner

2005

# Abstract

We consider a charged particle following the boundary of a two-dimensional domain because a homogeneous magnetic field is applied. We develop the basic scattering theory for the corresponding quantum mechanical edge states and approximate the scattering operator up to errors of the order of the inverse square root of the magnetic field which is the small parameter in the problem. The main result is that the scattering operator attains a nontrivial limit for large magnetic fields that preserves the Landau bands of the asymptotic half plane system. The corresponding scattering phases depend in a simple way on the geometry of the boundary curve and on data of the half plane problem where the boundary is straight. We interpret the phases in terms of the action of classical trajectories in the classical limit of large quantum numbers.

We then generalize our method in order to construct approximations to the scattering operator at arbitrary order in the small parameter by means of *Space Adiabatic Perturbation Theory*. The longitudinal degree of freedom (along the boundary) obeys effective dynamics imposed by the transverse degree of freedom (perpendicular to the boundary) which in turn is enslaved to the longitudinal degree of freedom and follows it adiabatically. The longitudinal motion is described by an effective Hamiltonian from which the scattering phases can be inferred. We develop a modified version of *Space Adiabatic Perturbation Theory*, that

is adapted to the scattering problem, and give an explicit algorithm for computing the scattering phases at arbitrary order. We demonstrate how the formalism is applied in a detailed calculation of the subleading contribution to the scattering phase.

# Zusammenfassung

Ein geladenes Teilchen in der Nähe des Randes eines zweidimensionalen Gebietes, welches einem zum Gebiet senkrechten homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist, wird sich entlang dieses Randes bewegen. Wir entwickeln zunächst die grundlegende Streutheorie für die entsprechenden quantenmechanischen Randzustände und approximieren anschliessend den Streuoperator bis auf Fehler von der Ordnung der inversen Wurzel des Magnetfeldes. Als Hauptresultat erhalten wir, dass der Streuoperator einen nichttrivialen Grenzwert im Limes grosser Magnetfelder besitzt, der die Landau-Bänder des asymptotischen Halbebenenproblems invariant lässt. Die entsprechenden Streuphasen hängen auf einfache Weise von der Geometrie der Randkurve und von Eigenschaften des Halbebenenproblems, bei dem der Rand gerade ist, ab; in führender Ordnung sind sie aber unabhängig vom Magnetfeld. Im klassischen Limes grosser Quantenzahlen lassen sich diese Phasen durch die Wirkung klassischer Cyclotronorbits interpretieren.

Mit Hilfe von *Space Adiabatic Perturbation Theory* lässt sich der Streuoperator noch genauer analysieren. Die Dynamik des longitudinalen Freiheitsgrades entlang des Randes wird im Wesentlichen durch den transversalen Freiheitsgrad senkrecht zum Rand induziert. Dies äussert sich in einem effektiven Hamiltonian für die Bewegung entlang des Randes. Der transversale Freiheitsgrad hingegen folgt dem longitudinalen Freiheitsgrad adiabatisch. Wir

entwickeln eine abgewandelte Version der *Space Adiabatic Perturbation Theory*, die optimal auf das vorliegende Streuproblem zugeschnitten ist. Sie ermöglicht es uns, den Streuoperator in beliebiger Ordnung der inversen Wurzel des Magnetfeldes zu approximieren. Wir formulieren ein explizites Rekursionsschema zur Berechnung der Streuphasen in beliebiger Ordnung. Abschliessend leiten wir zusätzlich zur führenden, vom Magnetfeld unabhängigen Ordnung die nächste Ordnung der Streuphase in einer detaillierten Beispielrechnung her.