

Diss. ETH No. 15785

# Efficient Computation of Feedback Controllers for Constrained Systems

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY (ETH)  
ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

Pascal Grieder  
Dipl. El.-Ing. ETH Zürich  
born 28.2.1977  
citizen of Basel, BS

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Manfred Morari, examiner  
Prof. Dr. Komei Fukuda, co-examiner  
Dr. Jan Maciejowski, co-examiner

2004

# Abstract

One of the important problems in control theory is the computation of stabilizing controllers for dynamical systems subject to constraints on states and inputs. *Receding Horizon Control* (RHC), provides a very powerful framework to deal with this type of problem and has thus received great interest by both industry and academia. In RHC an objective function is specified and the input sequence which minimizes the objective and enforces constraint satisfaction over a finite prediction horizon is computed for the current state. Subsequently, only the first input of that sequence is applied to the system. At the next time step, the state is measured again and the procedure is repeated. One of the key problems with RHC is the inherent computational complexity of the optimization problem at hand which generally restricts the application of RHC to relatively slow processes.

This problem has been alleviated to some degree by the recent introduction of *multi-parametric programming* to control theory. Thereby, the RHC optimization problem is solved off-line for all possible initial states. In multi-parametric programming the analytical solution to this infinite-dimensional problem is obtained by solving a finite dimensional optimization problem. The solution then takes the form of a piecewise affine state feedback law which can be easily implemented on-line by the use of lookup tables. This scheme greatly decreases the cost of applying RHC to industrial systems and makes the on-line computation of the optimal input sequence significantly simpler. However, multi-parametric programming also suffers from a serious drawback: the size of the lookup table may grow exponentially with system size and complexity of the control objective. Therefore the application of multi-parametric programming in practice is restricted to cases where simple mathematical models of physical systems are available. The aim of this thesis is to mitigate this drawback.

When applying multi-parametric programming to control problems, three aspects,

which influence the overall complexity can be identified: the speed at which the lookup table is computed, the number of entries in the lookup table and the time which is required to find the correct entry in the lookup table. All three levers for complexity reduction are addressed in this thesis and the contributions herein enable the reduction of the overall complexity by orders of magnitude.

Specifically, various schemes to speed up the explicit controller computations are introduced. A combination of dynamic programming, infinite-time optimal control and efficient polytope reduction techniques yields controller computation algorithms which are significantly faster than prior schemes.

Novel methods to analyze PWA systems with a focus on stability and set invariance are presented. Special attention is placed on PWA systems which are subject to bounded additive disturbances. These analysis schemes are subsequently used in various complexity reduction schemes. The proposed methods yield controllers of very low complexity by imposing 'simple' control objectives.

In addition, various post-processing schemes are introduced to simplify the feedback controllers a posteriori. The proposed schemes reduce the necessary storage space and are able to significantly reduce the time which is required to perform the set membership test online.

Finally the MPT toolbox is presented. The MPT toolbox for MATLAB contains all of the algorithms presented in this thesis as well as a wide range of additional algorithms and tools developed by the academic community.

# Zusammenfassung

Eines der wichtigsten Probleme der Regelungstechnik ist die Berechnung stabilisierender Regler für dynamische Systeme, dessen Zustände und Eingänge nur eine begrenzte Wertemenge annehmen dürfen. *Receding Horizon Control* (RHC) ist eine sehr mächtige Methode, um Probleme dieser Art zu lösen und hat folglich ein weitreichendes Interesse in Forschung und Industrie gefunden. Bei RHC wird eine Zielfunktion festgelegt und die Eingangssequenz, welche diese Funktion minimiert, wird für den momentanen Zustandswert berechnet. Danach wird der erste Wert der Eingangssequenz via Aktuator dem System auferlegt. Zum nächsten Zeitpunkt wird der Zustandswert neu eruiert, und die Prozedur wird wiederholt. Eines der Schlüsselprobleme mit RHC ist die inhärente Komplexität der notwendigen Berechnungen. Dies limitiert die Anwendungsmöglichkeit von RHC auf relativ langsam ablaufende Prozesse.

Dieser Nachteil wurde zu einem gewissen Grad mit der Einführung von *multi-parametric programming* in die Regelungstechnik wettgemacht. Es wurde ermöglicht, RHC Optimierungsprobleme für alle Initialzustände off-line zu lösen. In multi-parametric programming wird die unendlich dimensionale Lösung dieses Problems berechnet, indem ein endlich dimensionales Optimierungsproblem gelöst wird. Die Lösung zu diesem Problem ist eine abschnittsweise affine Zustandsrückführung, welche mit Hilfe eines 'Look-Up Tables' implementiert werden kann. Dieser Lösungsansatz macht den Einsatz von optimaler Regelung billiger und effizienter, als dies mittels on-line Optimierung der Fall wäre. Die Methode hat jedoch auch einen signifikanten Nachteil: die Grösse des Look-Up Tables wächst exponentiell mit der Komplexität des Regelproblems. Deswegen können multi-parametric programming Methoden nur angewendet werden, wenn ein relativ einfaches mathematisches Modell des Systems vorliegt. Das Ziel dieser Dissertation ist es, diesen Nachteil so weit wie möglich zu eliminieren.

Wenn multi-parametric programming im Rahmen der Regelungstechnik angewendet wird, gibt es drei Aspekte welche die Komplexität beeinflussen: die Geschwindigkeit mit der das Look-Up Table berechnet werden kann, die Anzahl der Einträge im Look-Up Table und die Zeit die nötig ist, um den korrekten Eintrag im Look-Up Table zu finden.

Alle drei Aspekte werden in dieser Dissertation behandelt, so dass dessen Kombination die Problemkomplexität um mehrere Grössenordnungen reduziert.

Konkret werden mehrere Methoden vorgestellt, um die Berechnung der Zustandsrückführungsregler zu beschleunigen. Im Vergleich zu bisherigen Methoden beschleunigt eine Kombination von *dynamic programming*, *infinite-time optimal control* und effizienter Umgang mit Polytopen die Reglerberechnung erheblich.

Neue Methoden um abschnittsweise affine Systeme zu analysieren werden vorgestellt. Der Fokus liegt hierbei auf Stabilitätsanalyse und Invarianz von Zustandsmengen. Die Analysemethoden werden benutzt um Regler von niedriger Komplexität zu berechnen. Die vorgeschlagenen Methoden liefern einfache Regler durch einfache Zielsetzungen.

Des weiteren werden zwei Methoden vorgestellt, um die Reglerkomplexität a posteriori zu verringern. Die beiden Methoden reduzieren den nötigen Speicherplatz und beschleunigen die Zeit, in der die optimale Zustandsrückführung identifiziert werden kann.

Am Schluss wird die MPT Toolbox präsentiert. Diese Toolbox für MATLAB beinhaltet sämtliche Algorithmen, welche in dieser Dissertation vorgestellt wurden sowie etliche Standardfunktionen der Forschungsgebiete Regelungstechnik und Computational Geometry.