

# Numerische Simulation von flexiblen Steinschlagschutzsystemen

**Report**

**Author(s):**

Volkwein, Axel

**Publication date:**

2004

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004879843>

**Rights / license:**

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

**Originally published in:**

IBK Bericht 289

# Numerische Simulation von flexiblen Steinschlagschutzsystemen

Axel Volkwein

Institut für Baustatik und Konstruktion  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich  
September 2004



## Vorwort

Strassen und Eisenbahnlinien in gebirgigen Gebieten verlangen oftmals einen Schutz gegen Steinschlag über lange Streckenabschnitte. Solche Schutzsysteme müssen eine gut abschätzbare Sicherheit anbieten und in Herstellung, Montage und Unterhalt kostengünstig sein. In vielen Fällen werden diese Bedingungen am besten durch Stahlnetze erfüllt, die mit Hilfe von Pfosten und Seilen quer durch das Gelände gespannt werden.

Bei dieser Art von Steinschlagschutzsystemen geht es um ein technisch anspruchsvolles Nischenprodukt, an dem Hersteller verschiedener Länder seit einigen Jahren grosses Interesse zeigen. Prominent vertreten ist dabei die Schweiz. So konnten durch die Zusammenarbeit zwischen der Eidgenössischen Forschungsanstalt für Wald, Schnee und Landschaft (WSL) und einem auf die Herstellung solcher Schutzsysteme spezialisierten Schweizer Unternehmen aufwändige experimentelle Einrichtungen gebaut werden.

Es bestand aber auch ein starkes Interesse, mit geeigneten numerischen Simulationswerkzeugen ein besseres Verständnis für die Wirkungsweise solcher Systeme zu erhalten. Dafür dachte man zuerst an die Verwendung allgemein einsetzbarer kommerzieller Finite-Element-Software, die heute bekanntlich sehr ausgereift ist und in der Industrie vielseitig eingesetzt wird. Bald zeigte sich aber, dass das sehr spezielle dynamische Problem in einer für die Praxis auch wirklich nützlichen Art und Weise wohl nur mit eigens dafür entwickelter Software zu lösen sei.

Im Rahmen eines Forschungsprojektes unseres Instituts entwickelte hierfür Herr Dr. Volkwein das auf der Methode der finiten Elemente basierende Computerprogramm FARO (Falling ROcks), bei dem es um die dreidimensionale, hochgradig nichtlineare, dynamische Simulation des Steinauffangprozesses geht.

Auf der Stufe der numerischen Algorithmen müssten verschiedene zum Teil völlig originelle Lösungen entwickelt werden. Sehr im Vordergrund stehen zudem Fragen der Benutzerfreundlichkeit des graphisch-interaktiven Programms, das für den industriellen Einsatz konzipiert ist. Weil die damit erhaltenen Resultate nur experimentell zu verifizieren sind, musste sich Herr Volkwein auch mit der Detailplanung entsprechender Versuchseinrichtungen und mit der Auswertung vieler Experimente auseinandersetzen. Diese bildeten eine ständige Begleitung zum Softwareentwicklungsprozess, der in engem Erfahrungsaustausch mit den anderen Projektpartnern vor sich ging.

Über Problemstellung, Theorie, Software Engineering und experimentelle Verifizierung in Zusammenhang mit diesem Forschungsprojekt berichtet Herr Dr. Volkwein in der vorliegenden Promotionsarbeit.

Im August 2004

Edoardo Anderheggen



## Kurzfassung

Die Leistungsfähigkeit der heutigen flexiblen Steinschlagschutzverbauungen konnte in den letzten Jahren dermassen gesteigert werden, dass eine Weiterentwicklung für noch höhere Energien einen grösseren Aufwand zur Folge hat. Die numerische Simulation von flexiblen Steinschlagschutzverbauungen erlaubt eine effizientere Entwicklung von neuen Barrieren durch eine reduzierte Anzahl von aufwändigen und kostenintensiven Prototypversuchen. Im Rahmen des durchgeführten Forschungsprojekts wurden Verbauungen bestehend aus sog. vierfach verhängten Ringnetzen, auf- bzw. abgespannt durch Stützen und Stahlseile mit integrierten Bremsen, untersucht. Im Unterschied zu den starren Verbauungen können die flexiblen den Steinschlag mit einem langen Bremsweg von 3 – 10m sanft abbremsen. Dies wiederum reduziert die Belastungsspitzen aller Verbauelemente sowie der oftmals sehr teuren Verankerungen.

Das entwickelte explizite Finite-Element-Programm FARO simuliert in sehr kleinen Zeitschritten den dynamischen Abbremsprozess eines kugelförmigen Steins in einer solchen Verbauung. Damit erhält man eine Offenlegung der dynamischen Vorgänge innerhalb der modellierten Verbauung sowie Aussagen über deren Be- bzw. Auslastung. Die Simulationsergebnisse werden anhand von im Rahmen des Forschungsprojekts durchgeführten Feldversuchen validiert.

Die einzelnen Verbauelemente werden durch diskrete Elemente abgebildet, welche nichtlineares Materialverhalten und durch die verbauungsbedingten grossen Verformungen auch geometrische Nichtlinearitäten aufweisen. Speziell entwickelt wurden dabei Elemente zur Simulation der Netze und der Seile welche diverse Gleitprozesse auch über längere Distanzen abbilden können. Dazu gehören die Ausrichtung der Netze entsprechend ihrer Belastung innerhalb des Ringnetzes, der sog. Vorhängeffekt beim Ausrichten der Netze entlang der Tragseile sowie das Gleiten der Tragseile über Stützenköpfe oder Bodenverankerungen, wenn sich die angehängten Bremsen verlängern. Die Gleitprozesse an den Tragseilen können auch reibungsbehaftet modelliert werden.

Der fallende Stein wird als Starrkörper unter Berücksichtigung von grossen Drehungen im Raum beschrieben. Ein spezieller Kontaktalgorithmus regelt die Interaktion zwischen Stein und Modell der Verbauung respektive den Elementknoten unter Berücksichtigung der dabei auftretenden Reibung. Eine eingeführte sehr dünne elastische Hülle um den Stein herum reduziert nur in der Simulation und nicht in der Realität auftretende Spitzen in der Verzögerungskurve des Steins.

Mit Hilfe des Simulationsprogramms ist es möglich, neue Verbauungen zu entwerfen, bestehende Systeme zu optimieren oder besondere Lastfälle und lokale Anforderungen an eine projektierte Verbauung zu überprüfen. Eine stete Kontrolle der Berechnungsergebnisse mit durchgeführten Versuchen oder realen Steinschlagereignissen verbessert die numerische Modellerstellung und erlaubt eine Plausibilitätsschätzung der Ergebnisse.

## Abstract

Today's flexible rockfall protection barriers have reached a development stage above which a much greater effort is required to extend their rockfall retaining capacity. The numerical simulation of these protection barriers enables a more efficient development of new types due to a reduced number of expensive field tests using prototypes. The barriers analysed within the research project, this thesis is part of, consist of steel posts to which supporting and restraining cables are connected. Special brake elements capable to absorb the energy of the falling rock are integrated into the cables. The rock is caught by steel ring nets spanned by the supporting cables.

These flexible protection systems have gained importance because of their ability to stop a rock gently within a longer braking distance of about 3 - 10 m. This results in a considerable peak-load reduction in all components of the protection system and its foundations.

The specially developed software application FARO simulates the dynamic behaviour of a spherical rock stopped by such a protection barrier in many short time-steps by the central differences method. This enables a detailed view of the dynamics of the modelled barrier and also provides information on its loading and degree of utilisation. The results of the simulations are compared to the field tests carried out within the research project.

The single barrier components are modelled by discrete elements with non-linear material properties. Due to the large displacements to be modelled, geometrical non-linearities are also considered. The elements simulating the net rings and the cables have been newly developed so as to handle different long distance glides. At first, the net rings can arrange themselves according to their loading. Then, so-called curtain effects take place as several net rings glide along the supporting cable. Finally, when the brake elements are lengthened, the cables also glide over the heads of the posts or over the ground plates. All cable and rock related gliding effects can also consider the friction.

The falling rock is modelled as a spherical rigid body considering large three-dimensional displacements and rotations, the latter handled by Euler-parameters. A special contact algorithm is used for modelling the interaction between the rock and the barriers, respectively the nodes of the net elements. Frictional effects have also been taken into account. A thin elastic layer around the rock reduces unwanted spurious peaks in the deceleration curve of the rock.

The use of the software provides the possibility to develop new barrier types or to optimise existing ones. Additionally, special load cases that cannot be reproduced in field tests can be checked, as well as special geometrical boundary conditions of a barrier projected to be built at a certain location. For the projecting engineer, the steady comparison of computational results with performed field tests or real rockfall events helps to improve his built finite-element-models and the assessment of the computer simulation.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Flexible Steinschlagschutzverbauungen . . . . .	2
1.2	Forschung und Entwicklung im Bereich der flexiblen Steinschlagschutzverbauungen . . . . .	3
1.2.1	Berechnung und numerische Analyse . . . . .	5
1.3	Einordnung und Abgrenzung dieser Arbeit . . . . .	6
1.3.1	Inhalt der Arbeit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Numerische Methoden zur Simulation dynamischer Prozesse</b>	<b>9</b>
2.1	Nichtlineare dynamische Analyse . . . . .	9
2.2	Methode der finiten Differenzen . . . . .	10
2.2.1	Ablauf des Zeitintegrationsalgorithmus . . . . .	11
2.2.2	Stabilität des Differenzenverfahrens . . . . .	12
2.2.3	Energieverlauf . . . . .	15
2.2.4	Lagerung von Knoten . . . . .	15
2.2.4.1	Lagerung einzelner Freiheitsgrade . . . . .	16
2.2.5	Dämpfung . . . . .	16
2.3	Statische Berechnungen . . . . .	17
2.3.1	Beschleunigung der Lösungsfindung . . . . .	18
2.4	Geometrische Beschreibung von Körpern im Raum . . . . .	20
2.4.1	Charakteristische Parameter eines dreidimensionalen Starrkörpers . . . . .	20
2.4.2	Räumliche Rotationen . . . . .	21
2.4.2.1	Alternative mathematische Beschreibungen von räumlichen Rotationen . . . . .	23
2.4.2.2	Räumliche Rotation mittels Euler-Parameter (Quaternionen) . . . . .	25
2.4.3	Beschreibung der Kinetik . . . . .	27
2.4.3.1	Drehgeschwindigkeit . . . . .	28
2.4.3.2	Drehbeschleunigung . . . . .	30
2.4.4	Starrkörperdynamik . . . . .	30
2.4.4.1	Kinetische Energie . . . . .	30
2.4.4.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	32
2.4.5	Zeitintegration räumlicher Rotationen . . . . .	33

<b>3</b>	<b>Simulation von Verbauelementen mit diskreten Elementen</b>	<b>35</b>
3.1	Ringnetze . . . . .	36
3.1.1	Aufbau der Ringnetze . . . . .	36
3.1.2	Tragverhalten der Netzringe . . . . .	36
3.1.2.1	Biegeverformung . . . . .	39
3.1.2.2	Normalkraftbelastung . . . . .	41
3.1.3	Anforderungen an ein finites Ringelement . . . . .	41
3.1.4	Bereits entwickelte Modelle von Ringelementen . . . . .	42
3.1.4.1	Modellierung von ASM-Ringen nach Nicot . . . . .	42
3.1.4.2	Modellierung von Rocco-Ringen nach Grassl . . . . .	43
3.1.5	Entwicklung eines diskreten 4-Knoten-Ringmodells . . . . .	44
3.1.5.1	Mechanisches Modell . . . . .	45
3.1.5.2	Simulation des Zugstabverhaltens . . . . .	46
3.1.5.3	Simulation des Biegetragverhaltens . . . . .	47
3.1.5.4	Kalibrierung des Modells . . . . .	48
3.2	Seile . . . . .	52
3.2.1	Begriffsklärung . . . . .	52
3.2.2	Anforderungen an ein finites Seilelement . . . . .	53
3.2.3	Alternative Seilelemente . . . . .	53
3.2.4	Getroffene Annahmen . . . . .	54
3.2.5	Seilmodell mit gleitenden Zwischenknoten . . . . .	54
3.2.6	Last-Verformungs-Charakteristik eines Seils . . . . .	56
3.2.7	Vorspannung und minimaler Seildurchhang . . . . .	56
3.2.8	Reibungseffekte beim Gleiten von Knoten . . . . .	58
3.2.8.1	Umsetzung der Gleitreibung . . . . .	58
3.2.8.2	Grösse der Reibungskraft . . . . .	59
3.2.9	Zusätzliche Seilbelastung an Umlenkpunkten . . . . .	60
3.3	Bremsen . . . . .	61
3.3.1	Modellierung der Bremsen . . . . .	62
3.4	Stützelemente . . . . .	63
3.4.1	Mechanisches Modell . . . . .	63
3.4.2	Elementeigenschaften . . . . .	64
3.4.2.1	Materialverhalten . . . . .	64
3.4.2.2	Mögliche Versagenszustände . . . . .	65
3.4.2.3	Dynamisches Verhalten . . . . .	66
3.4.3	Einseitig eingespannte Stützen für Niedrigenergiesysteme . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Numerische Simulation des Steins</b>	<b>71</b>
4.1	Modellierung . . . . .	71
4.2	Kontakt mit der Steinschlagverbauung . . . . .	72
4.2.1	Getroffene Annahmen und Auswahl des Kontaktberechnungsverfahrens . . . . .	72
4.2.2	Formulierung eines reibungsfreien Kontaktgesetzes . . . . .	73
4.2.2.1	Ansatz auf Lageebene . . . . .	75
4.2.2.2	Ansatz auf Geschwindigkeitsebene . . . . .	76
4.2.2.3	Ansatz auf Energieebene . . . . .	77

4.2.2.4	Vergleich der Ansätze . . . . .	77
4.2.3	Kombination mit mehreren Knoten . . . . .	79
4.2.3.1	Optimierung des Kontaktalgorithmus . . . . .	81
4.2.4	Berücksichtigung von Reibungseffekten . . . . .	82
4.2.5	Einführung einer elastischen Grenzsicht . . . . .	84
4.2.6	Einbezug des Untergrunds in den Kontakt . . . . .	86
4.2.7	Erweiterung des Kontaktgesetzes auf nicht-kugelförmige Steine . . . . .	87
4.2.7.1	Beispiel für eine nicht kugelförmige Steinform . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Umsetzung der numerischen Modelle im Programm FARO</b>	<b>91</b>
5.1	Programmkonzept . . . . .	92
5.2	Graphische Benutzeroberfläche . . . . .	94
5.3	Numerische Simulation . . . . .	95
5.3.1	Aufbau der Eingabedatei . . . . .	95
5.4	Modellierungsdetails . . . . .	96
5.4.1	Modellkomponenten . . . . .	96
5.4.1.1	Knoteneigenschaften . . . . .	96
5.4.1.2	Elementeigenschaften . . . . .	98
5.4.1.3	Definition des Steins . . . . .	98
5.4.2	Berechnungsdetails . . . . .	99
5.4.2.1	Dynamische Berechnung . . . . .	99
5.4.2.2	Kontaktalgorithmus . . . . .	99
5.4.2.3	Statische Ruhelage . . . . .	99
5.4.2.4	Elementvorspannung . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Verifizierung der Finite-Element-Simulation</b>	<b>103</b>
6.1	Simulation der Versuche am Versuchsstand für Bauwerkskomponenten . . . . .	103
6.1.1	Modelliertes System . . . . .	103
6.1.2	Unverschiebliche Lagerung . . . . .	105
6.1.2.1	Versuchsergebnisse . . . . .	105
6.1.2.2	Simulationsergebnisse . . . . .	107
6.1.3	Verschiebliche Lagerung . . . . .	107
6.1.3.1	Einsatz von Bremsen . . . . .	107
6.2	Simulation einer realen Verbauung . . . . .	111
6.2.1	Simuliertes System . . . . .	111
6.2.1.1	Systemdaten . . . . .	111
6.2.1.2	Getroffene Annahmen und Modellierung . . . . .	112
6.2.2	Ergebnisse . . . . .	113
6.3	Einfluss verschiedener Modellierungsdetails . . . . .	115
6.3.1	Berücksichtigung der statischen Ruhelage . . . . .	115
6.3.1.1	Wahl der Parameter . . . . .	116
6.3.2	Dämpfungskoeffizienten . . . . .	116
6.3.3	Schäkel zwischen Netz und Seilen . . . . .	117
6.3.4	Berücksichtigung der Seilbiegespannungen . . . . .	118
6.3.5	Reibungskoeffizienten . . . . .	118
6.3.5.1	Reibung zwischen Stein und Verbauung . . . . .	118

6.3.5.2	Seilreibung . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>121</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	121
7.2	Einsatzmöglichkeiten des Simulationsprogramms . . . . .	123
7.3	Mögliche Erweiterungen . . . . .	125
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>

# Tabellenverzeichnis

3.1	Charakteristische Ringparameter für die Netzringe <i>Rocco 5, 7, 12, 19/3/300</i>	50
4.1	Relevante Grössen für die Berechnung der Kontaktkraft zwischen einem Knoten und dem Stein basierend auf der Methode der zentralen Differenzen	75
4.2	Über die Zeit integrierte und dadurch von temporären Abweichungen bereinigte Energiewerte für die genaue und approximierte Berechnung der Kontaktkräfte . . . . .	82
4.3	Zusätzliche benötigte Grössen für die Berechnung der Kontaktkraft zwischen einem Knoten und dem Stein unter Berücksichtigung eingeleiteter Momente . . . . .	88
5.1	Kommandozeilenparameter bei Verwendung von FARO im Batchbetrieb . .	96
6.1	Einfluss der Berücksichtigung des statischen Netzdurchhangs vor der dynamischen Steinschlaganalyse am im Versuchsrahmen unverschieblich gelagerten Ringnetz <i>Rocco 7/3/300</i> bei einer Fallhöhe des Steins von $h = 5.5m$	115
6.2	Einfluss der Parameter zur Berechnung des statischen Netzdurchhangs am im Versuchsrahmen unverschieblich gelagerten Ringnetz . . . . .	116
6.3	Einfluss der Reibung zwischen Stein und Ringnetz bei einem unverschieblich am Versuchsrahmen gelagerten Netz . . . . .	118
7.1	Einfluss der Verbauungshöhe auf die Verbauung <i>Geobrugg RX-300 Dimo</i> [3]	124



# 1 Einleitung

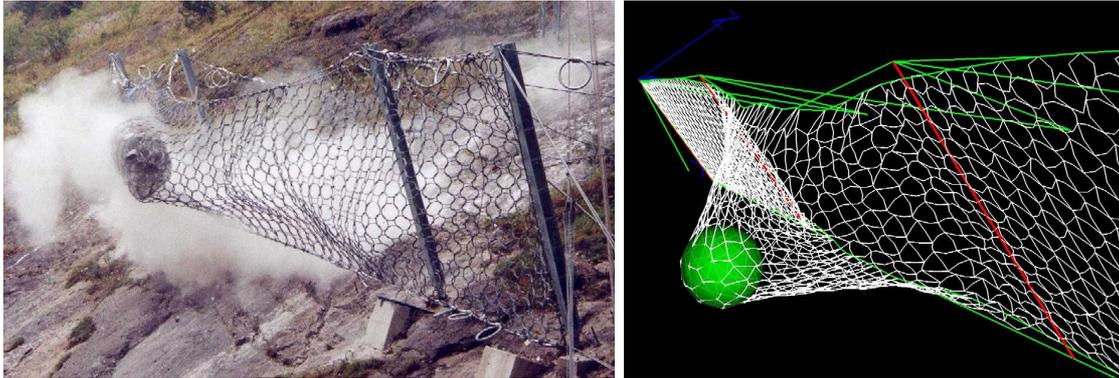


Abbildung 1.1: Beispiele für ein aufgefangenes Steinschlagereignis zusammen mit der entsprechenden Computersimulation

Die zunehmende Nutzung der Alpen- und Bergregionen erfordert einen wachsenden Aufwand zum Schutz der zivilen Einrichtungen und der dort lebenden Menschen. Ebenso müssen verstärkt Massnahmen getroffen werden, um den durch veränderte Umwelteinflüsse sich wandelnden Naturgefahren gerecht zu werden. Eine dieser zu berücksichtigenden Gefahren ist der Steinschlag. Er tritt in den erschlossenen Hanglagen am häufigsten entlang von Verkehrswegen auf und erfordert sich häufig über grosse Distanzen erstreckende Schutzmassnahmen, deren Bau- und Unterhaltskosten es zu minimieren gilt.

Die in dieser Arbeit untersuchten flexiblen Steinschlagschutzverbauungen (siehe nächster Abschnitt) wurden anfangs nur für wenig energiereiche Steinschläge eingesetzt. Durch Forschung und Weiterentwicklung konnte die Auffangkapazität dieser Anlagen innerhalb der letzten 15 Jahre auf einen Steinschlagenergieinhalt von bis zu  $3000 \text{ kJ}$  verzehnfacht werden. Ziel der weiteren Forschung ist es nun, die Kapazität der Verbauungen auf bis zu  $5000 \text{ kJ}$  auszuweiten. Zu diesem Zweck wurde ein gemeinsames Forschungsprojekt des *Eidg. Instituts für Schnee und Lawinenforschung Davos*, des *Instituts für Baustatik und Konstruktion* der *Eidg. Technischen Hochschule Zürich* sowie der Firma *Fatzer AG Geobrug Schutzsysteme* durchgeführt, innerhalb dessen die vorliegende Arbeit entstand. Ziel des Projektes ist es, über ein umfassendes Versuchsprogramm das Tragverhalten der Verbauungen vertieft zu analysieren und zu quantifizieren. Das bessere Verständnis der Abläufe hilft vor allem in Zukunft beim Entwurf von neuen Verbauungstypen. Bestandteil des Versuchsprogramms waren dabei quasistatische Laborversuche an den eingesetzten Ringnetzen. Mit weiteren dynamischen Feldversuchen an einem speziell konstruierten Versuchsrahmen konnten einzelne Verbauungskomponenten isoliert oder kombiniert getestet werden. Zwei Grossversuche an der weiter unten beschriebenen Zertifizierungsanlage für Steinschlagschutzverbauungen rundeten das Versuchsprogramm ab [39].



Abbildung 1.2: Grossversuchsanlage und Versuchsrahmen von SLF Davos und Fatzer AG Geobrugg Schutzsysteme

Parallel zum Versuchsprogramm wurde speziell für den untersuchten Verbauungstyp ein auf finiten Elementen basierendes Simulationsprogramm entwickelt, mit dem eine effiziente numerische Modellierung von hochflexiblen Steinschlagschutzverbauungen erreicht werden soll. Ein wesentlicher Vorteil der numerischen Simulation ist vor allem eine Reduktion der teuren Experimente. Des Weiteren erlaubt eine bessere Kenntnis des Auffangprozesses die Optimierung der Dimensionierung bestehender Verbauungssysteme. Das Simulationsprogramm wurde mit den aus den Versuchen gewonnenen Ergebnissen kalibriert und validiert. Die numerischen Hintergründe und Methoden des entwickelten Simulationsprogramms werden in dieser Arbeit beschrieben.

### 1.1 Flexible Steinschlagschutzverbauungen

Eine Übersicht über die Vorgänge, die zu Steinschlag führen, und wie damit umgegangen werden sollte, wird in [52] gegeben. Durch sog. aktive Schutzmassnahmen wird die Entstehung von Steinschlag verhindert. Ist dies nicht möglich oder nicht rentabel so müssen letztendlich passive Schutzmassnahmen den fallenden Stein umleiten oder auffangen. Ein solcher Steinschlag charakterisiert sich durch die Grösse und damit Masse des herabfallenden Steins sowie durch seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls. Anhand dieser Grössen lässt sich der aufzuhaltende Energieinhalt ableiten, welcher wiederum als Lasteinwirkung auf die zu berechnende Verbauung zu verwenden ist. Die zum Steinschlagschutz notwendigen Baumassnahmen werden entsprechend diesem Energieinhalt bemessen. Bei kleinen Steinschlagereignissen reichen hierfür starre Verbauungen wie z.B. Wände aus, bei denen die dabei auftretenden Kräfte bei energiereicheren Ereignissen allerdings relativ gross werden können. In diesem Fall kommen sog. flexible Verbauungssysteme zum Einsatz, wie sie im folgenden Abschnitt näher beschrieben werden. Bei einer weiteren Zunahme der zu erwartenden Steinschlagenergie übernehmen Steinschlaggalerien die notwendige Schutzfunktion. Bei sehr grossen Energieinhalten empfehlen sich auch Gräben und verstärkte Dämme, welche jedoch wiederum höhere Kosten verursachen und sehr viel Platz beanspruchen.

Ziel der sog. flexiblen Steinschlagschutzverbauungen ist es nun, über einen verlängerten Bremsweg des fallenden Steins die Belastung der Verbauungskomponenten auf einen längeren Zeitraum auszudehnen und dadurch deren Maximalbelastung zu reduzieren. Die dadurch schlanker dimensionierbaren Komponenten und weniger aufwändig zu gestaltenden Verankerungen im Untergrund tragen zu einer wirtschaftlichen Bauweise bei. Ein weiterer Vorteil dieser Verbauungsart ist, dass sie auch bei beengten Platzverhältnissen, wie sie bei Alpenstrassen o.ä. unweigerlich vorkommen, gut einsetzbar sind. Ziel des Entwurfs von flexiblen Verbauungen ist es zudem, dass diese nach einem Steinschlagereignis relativ leicht gereinigt und nach Auswechseln einiger weniger Verbauungskomponenten (Bremsselemente, Seile und Netze in einzelnen Feldern) wieder voll einsatzfähig sind.

Die flexiblen Verbauungen sind in der Regel so aufgebaut, dass ein durch Stützen und Seile aufgespanntes Netz den Steinschlag aufnehmen soll. Innerhalb der flexiblen Steinschlagschutzverbauungssysteme gibt es mehrere Varianten, die sich im Wesentlichen durch die Art, Anzahl und Anordnung der eingesetzten Netze, Seile und Bremsselemente unterscheiden. Im Normalfall kommen hier entweder sogenannte sog. Omeganetze<sup>1</sup>, Diagonalseilnetze<sup>2</sup>, Rocco-Ring-Netze<sup>3</sup> oder Torpedonetze<sup>4</sup> zum Einsatz (siehe Abschnitt 3.1). Die Seile, welche zum Aufspannen der Netze eingesetzt werden, werden gemäss ihrer Tragfunktion benannt. Dies sind zum einen die Tragseile, an denen das Netz eingehängt wird. Die Tragseile wiederum sind mit den Stützenköpfen und -fusspunkten verbunden. Bei den Stützen handelt es sich im Niedrigenergiebereich um am Fusspunkt eingespannte Stahlprofile, bei höheren Energien um beidseitig gelenkig gelagerte Stahlprofile, deren Fusspunkt mit einer Ankerplatte und deren Stützenkopf mit Rückhalteseilen in Richtung Berg abgespannt ist. Die seitliche Abspannung der ganzen Verbauung übernehmen die Abspannseile. Die zu absorbierende Steinschlagenergie wird von speziellen sich plastisch verformenden sogenannten Bremsselementen aufgenommen, von denen ein paar Typen in Abschnitt 3.3 beschrieben sind. Sie sind je nach Energieklasse der Verbauung in die Rückhalte- und Tragseile der Verbauung integriert.

## 1.2 Forschung und Entwicklung im Bereich der flexiblen Steinschlagschutzverbauungen

Eine Übersicht über die Entwicklung von den ersten Steinschlagschutzverbauungen aus Holzzäunen bis hin zu den heutzutage vorzugsweise eingesetzten Hochenergienetzen ist in [88] gegeben. Hier werden unterschiedliche Ansätze diskutiert, um fallende Steine mehr oder weniger sanft abzubremsen. Im Bereich der universitären Forschung gab es Anfang der 1990er Jahre an der *Colorado University of Boulder*, umfassende Untersuchungen zu verschiedenen neuartigen flexiblen Tragsystemen. Hier wurden sowohl entsprechende Experimente als auch dazugehörige Simulationen durchgeführt. Verschiedenste Ansätze wie zum Beispiel schwingend an einem Seil aufgehängte und mit Autoreifen gepolsterte

---

<sup>1</sup>Firmen AVT (CH) und Trumer Schutzbauten (A)

<sup>2</sup>z.B. Firma Isofer (CH)

<sup>3</sup>Firma Fatzer AG Geobrugge Schutzsysteme (CH)

<sup>4</sup>Firma EI-Montagne (F)

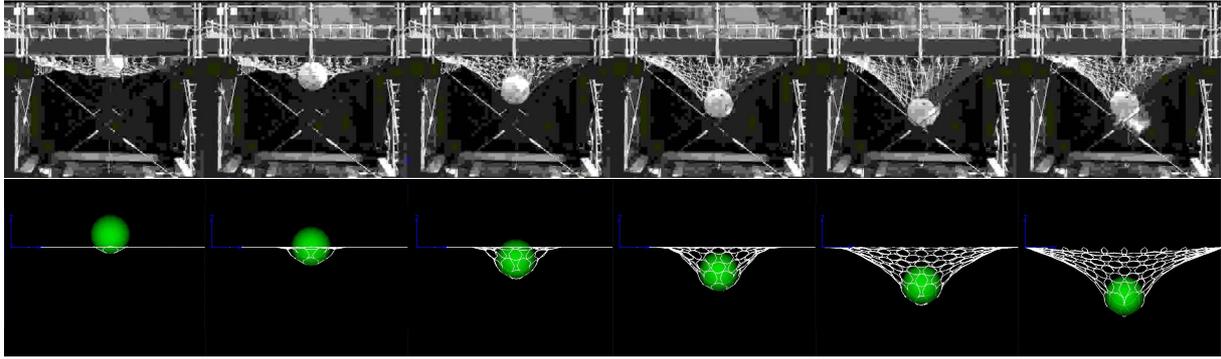


Abbildung 1.3: Beispiel für den Verlauf eines Versuchs am Versuchsrahmen und in der Simulation

Balken aber auch durch Stützen mit einem vordefinierten Fließgelenk am Stützenfuß aufgespannte Drahtseilnetze werden dabei erörtert. Bei den dazugehörigen Versuchen wurden Felsblöcke an einem Hang ausgelöst, so dass sie weiter unten auf die Verbauungen trafen.

Schon früher (1989) wurden von der Firma *Fatzer AG Geobrug Schutzsysteme* zusammen mit dem *California Highway Department CALTRANS* ebenfalls erste Feldtests im Massstab 1:1 an flexiblen Verbauungen mit Diagonalseilnetzen durchgeführt [24, 25]. Die Steine wurden eine Böschung hinunter gerollt, wo sie unten an einem eher zufälligen Ort in der Verbauung auftrafen. Bereits 1991 folgten Feldversuche in der Schweiz mit einem Vorgehen ähnlich wie bei späteren Versuchen in Italien [77], bei denen ein Steinblock an einem zum Hang parallel verlaufenden Seil beschleunigt und zum (möglichst) richtigen Zeitpunkt ausgeklinkt wurde, wonach er dann in die Verbauung stürzte. Mit diesem Verfahren wurden auch die bisherigen Zertifizierungen von Verbauungssystemen durchgeführt.

1999 wurde an der *Ecole Centrale de Lyon* in Zusammenarbeit mit dem Schutznetzhersteller *EI Montagne* ein Forschungsprojekt abgeschlossen, in welchem Verbauungen mit sogenannten ASM-Netzen aus sechsfach verhängten Ringen (siehe Abschnitt 3.1.4.1) mit expliziten Finite-Element-Berechnungen simuliert wurden. Weitere numerische Untersuchungen über das dynamische Verhalten von Diagonalseilnetzen beim Steinschlagereignis wurden 2002 von Cazzani et al. [19] veröffentlicht.

Mit der Zeit wuchsen die Anforderungen nach reproduzierbaren Versuchen und genormten Versuchsrichtlinien, um einerseits den Käufern von Steinschlagschutzverbauungen einen Vergleich der Produkte der verschiedenen Anbieter zu ermöglichen und zum anderen, damit die Hersteller einen reproduzierbaren Nachweis erbringen können, dass ihre Verbauungen den Anforderungen genügen. Dazu entstand in der Schweiz eine Richtlinie zur Typenprüfung von Steinschlagschutzverbauungen [30], in der die Anforderungen und das Zertifizierungsverfahren von im schweizerischen öffentlichen Raum zu nutzenden Steinschlagverbauungen beschrieben sind. Darin wird beispielsweise der Auftreffwinkel von  $30^\circ$  sowie die charakteristische Auftreffgeschwindigkeit von  $v_{Stein} = 25 \text{ m/s}$  festgelegt. Die Zertifizierung erfolgt dabei an der ebenfalls in der Richtlinie beschriebenen Versuchsanlage *Lochezen* in *Walenstadt* (SG).

Die Steinschlagversuche an der Versuchsanlage in Walenstadt erfolgen durch einen vertikalen Fall der Steine in die um 30 Grad gegenüber der Horizontalen nach oben geneigten Verbauung (siehe auch Abschnitt 6.2). Somit wird allein die Verbauung ohne die Interaktion mit dem Untergrund getestet, dessen Einfluss bei den Versuchen am geneigten Hang nicht genau genug erfassbar ist [31]. Letztendlich ist es somit erst mit solchen Versuchsanlagen wie derjenigen aus Walenstadt möglich, klar definierte Steinschlagereignisse zu produzieren. Die dadurch vergleichbaren Ergebnisse lassen obendrein eine Charakterisierung zu, ob gewisse Verbauungen eher einen harten oder weicheren Auffangmechanismus haben [32].

### 1.2.1 Berechnung und numerische Analyse

Möchte man die flexiblen Verbauungen von Hand berechnen, dimensioniert man diese im einfachsten Fall so, dass man von einem maximalen Verformungszustand der Barriere ausgeht und die energiedissipierenden Bremsen so anordnet, dass die bei einer bestimmten Belastung beanspruchten Bremsen in der Summe die Energie des Steins abbauen können. Die Belastung der übrigen Verbauungskomponenten ergibt sich dann aus den maximal von den Bremsen übertragbaren Kräften. Schwierig ist es jedoch, die Belastung des Auffangnetzes zu ermitteln, da dieses im Aufprallbereich je nach Steinform unterschiedlich stark belastet wird. Hierfür bietet sich eine numerische Simulation an, welche die Flächentragwirkung des Netzes auch für grosse Verformungen erfasst und potentielle Schwachstellen des Netzes aufdeckt. Dadurch lässt sich das Netz flächig besser ausnützen, um hohe punktuelle Lasten zu vermeiden.

Andere flexible Steinschlagschutzsysteme als die in dieser Arbeit behandelten wurden schon früher numerisch untersucht. Die im vorigen Abschnitt erwähnte Simulationen der Diagonalseilnetze wurden mit dem kommerziellen Finite-Element-Programm ABAQUS durchgeführt. Hier wurde vor allem das dynamische Verhalten des Seilnetzes wie z.B. dessen Geschwindigkeitsverteilung beschrieben [19]. Nicot [65, 66, 67, 68, 71] verwendet einen eigens geschriebenen Code zur Simulation eines gesamten Steinschlagschutzsystems der französischen Firma *EI Montagne*. Die Modellierung der dort eingesetzten ASM-Netze wird in Abschnitt 3.1.4.1 beschrieben. Ergebnisse quasistatischer Versuche wurden dort für eine Abschätzung der Rechengenauigkeit verwendet.

Ein weiterer Effekt, der bei den im vorigen Absatz erwähnten Verbauungstypen weniger anzutreffen ist als bei den im aktuellen Forschungsprojekt untersuchten, ist der sogenannte Vorhangeffekt, bei dem die NetZRinge der vierfach verhängten Ringnetze (siehe Abschnitt 3.1) entlang der Tragseile rutschen und sich somit bei Belastung dort sammeln können, wo die grösste Last auftritt. Diese Besonderheit tritt nur bei diesem Netztyp auf, da der lose Verbund der einzelnen Ringe auch grosse Verformungen der Ringe zueinander erlaubt, was bei den Diagonalseilnetzen so gut wie unmöglich und bei den sechsfach verhängten ASM-Netzen auf Grund der starken Vernetzung der Ringe untereinander nur in sehr beschränktem Masse möglich ist.

## 1.3 Einordnung und Abgrenzung dieser Arbeit

Um die grossen Gleiteffekte der vierfach verhängten Ringnetze zum einen innerhalb der Ringnetze und zum anderen entlang der Tragseile zu simulieren, bedurfte es einer speziellen numerischen Simulation, welche in dieser Arbeit vorgestellt wird. Das Ziel bei der Entwicklung dieser Simulationsmethoden ist eine effiziente und praxistaugliche Simulation von flexiblen Verbauungen dieses Typs und erfolgt am besten durch eine Finite-Element-Berechnung. Auf Grund der grossen zu erwartenden Nichtlinearitäten der dynamischen Simulation und des kurzen Simulationszeitraumes von  $T_{ges} \approx 0.5 \text{ s}$  empfiehlt sich ein explizites Zeitintegrationsverfahren mit sehr kurzen Zeitschritten von ca.  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ .

Die Simulationen können mit kommerziellen Finite-Element-Programmen durchgeführt werden, welche über Schnittstellen zur Implementierung eigener Elemente verfügen. Der Vorteil hierbei ist, dass die Standard-Finiten-Elemente, die meisten Algorithmen zur Zeitintegration und Kontaktberechnung sowie Programme für das Pre- und Postprocessing vorhanden sind. Im Rahmen dieses Projektes wurde jedoch das gesamte Simulationsprogramm neu entwickelt, auch wenn dafür die Implementierung aller oben erwähnten Details notwendig wurde. Ein Vorteil dieser Vorgehensweise ist jedoch die direkt angepasste und für die gewünschte Problemstellung optimierte und dadurch weniger aufwändige Simulation z.B. ohne die Speicherung von nicht notwendigen Resultaten. Auch die Steuerung der Simulation sowie die Berücksichtigung von Verbauungsinstallationsabläufen und Besonderheiten bei der Berechnung (siehe Kapitel 5) kann dadurch Berücksichtigung finden. Und letztendlich kommen nur speziell auf die Verbauungskomponenten abgestimmte diskrete Elemente zum Einsatz, welche eine effiziente Modellierung und Simulation erlauben. Ein grosser Vorteil liegt hierbei in der genauen Kenntnis sämtlicher Programmabläufe und der nahezu beliebigen Erweiterbarkeit des Programms auf neue Problemstellungen oder Lasteinwirkungen (z.B. Schnee und Murgänge). Im Hinblick auf eine spätere Nutzung des Simulationsprogramms ist es auch sinnvoll, dieses frei von externen Produkten wie zum Beispiel einem kommerziellen Finite-Element-Programm zu halten. Dies reduziert die laufenden Kosten und befreit von der Abhängigkeit bezüglich längerfristigem Support und Unterstützung eines solchen Programms.

Im Vergleich zu den bisherigen Arbeiten im Bereich der flexiblen Steinschlagschutzsysteme verknüpft das zu dieser Arbeit gehörige Forschungsprojekt dynamische Experimente und zugehörige Simulationen sehr eng miteinander. Dieser Arbeit liegen darum umfangreiche experimentelle Daten des *SLF Davos* zu Grunde, sodass auch fundierte Aussagen über die Qualität der dynamischen Simulationen gemacht werden können. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Simulationen speziell auf die untersuchten Systeme zugeschnitten sind. Das bedeutet, dass zukünftige Änderungen bei den Komponenten wie z.B. bei den Netzringen der Ringdurchmesser, die Drahtdicke oder die Anzahl der Drahtwindungen erst separat überprüft und getestet werden müssen, ehe entsprechende Modelle für herkömmliche Simulationen eingesetzt werden können.

Ziel der im Rahmen des Projekts entwickelten und in dieser Arbeit beschriebenen Software FARO ist eine benutzerfreundliche Modellierung und effiziente Berechnung der untersuchten Steinschlagschutzsysteme der Firma Geobruagg. Dies war bislang und zudem nur in weit beschränkterem Umfang nur für andere Verbauungstypen möglich. In dem

Programm werden neu entwickelte Verfahren mit Methoden kombiniert, die heutzutage als Standardverfahren bekannt sind. Aus Gründen der Vollständigkeit sind beide Arten in dieser Arbeit beschrieben.

### 1.3.1 Inhalt der Arbeit

Das entwickelte Simulationsprogramm und damit auch diese Arbeit orientieren sich an den Anforderungen, die an die Simulation einer flexiblen Steinschlagschutzverbauung gestellt werden. Es wird versucht, mit weitgehend einfachen Modellen die auftretenden Prozesse mit brauchbaren Resultaten zu simulieren. Dazu sind in dieser Arbeit verschiedene Themenbereiche vereint, wie z.B. die dynamische Simulation einer Struktur unter ebenfalls dynamischen Lasteinwirkungen. Die Verbauungskomponenten werden hierbei durch spezielle diskrete Elemente simuliert. Zur Simulation des fallenden Steins kommt die räumliche Starrkörperdynamik zur Anwendung und ein spezieller Kontaktalgorithmus regelt die Interaktion zwischen Stein und Verbauung.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 werden die numerischen Verfahren zur Simulation von dynamischen Prozessen beschrieben. Dies beinhaltet auch die quasistatische Berechnung mit dynamischen Methoden sowie die räumliche Starrkörpermechanik. Kapitel 3 stellt die entwickelten diskreten Elemente zur Simulation der einzelnen Verbauungskomponenten vor. Mit der Einbindung des fallenden Steins und dessen Interaktion mit der modellierten Steinschlagschutzverbauung befasst sich Kapitel 4. Das entwickelte Finite-Element-Programm mit der Umsetzung der Numerik zusammen mit den Schnittstellen zur Ein- und Ausgabe wird in Kapitel 5 vorgestellt. In Kapitel 6 werden die mit den durchgeführten Simulationen gewonnenen Ergebnisse mit denjenigen der im Rahmen dieses Forschungsprojektes durchgeführten Experimente verglichen. Das Schlusskapitel 7 beinhaltet eine Zusammenfassung der gesamten Arbeit und einen Ausblick auf die Anwendungsmöglichkeiten des Programms.



# 2 Numerische Methoden zur Simulation dynamischer Prozesse

## 2.1 Nichtlineare dynamische Analyse

Im Gegensatz zu einer statischen Finite Element Analyse müssen bei dynamischen Berechnungen zusätzlich noch die auftretenden Massenträgheitskräfte berücksichtigt werden. D.h., das durch die Elemente diskretisierte Modell wird durch zusätzliche Massenkomponeenten erweitert. Für die Bewegungsgleichungen gilt, dass die Trägheitskräfte und die viskosen Dämpfungskräfte zusammen mit den elementinternen Kräften über die Zeit im Gleichgewicht mit den einwirkenden Lasten stehen müssen. Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten damit im nichtlinearen Fall

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

Hierin stehen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{K}$  für die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen des Systems und  $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$  und  $\mathbf{X}$  für die Vektoren der Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Koordinaten  $\ddot{x}_i$ ,  $\dot{x}_i$  und  $x_i$  aller diskretisierten Knotenpunkte  $i$ . Der Ausdruck  $\mathbf{K}(\mathbf{X})$  steht für die zeitlich veränderlichen elementinternen Kräfte, während  $\mathbf{F}$  die ebenfalls zeitlich veränderlichen äusseren Kräfte beschreibt.

Im Rahmen dieser Arbeit erhalten die Knotenpunkte jeweils drei Translationsfreiheitsgrade. Die entwickelten Elemente sind so formuliert, dass sie an den Knoten keine zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade benötigen. Die Massen der angrenzenden Elemente sind anteilig in den Knoten konzentriert. Auftretende Trägheitseffekte bezüglich Rotationen werden wegen der fehlenden Rotationsfreiheitsgrade nicht erfasst und bei schweren Stützelementen und beim simulierten Stein dort separat berücksichtigt (siehe Kapitel 3.4 und Abschnitt 2.4).

Nichtlineare dynamische Simulationen entsprechen einem Anfangswertproblem und die obigen Differentialgleichungen können mit einem impliziten oder expliziten Zeitschrittverfahren gelöst werden. Bei einem sogenannten Einschrittverfahren<sup>1</sup> geht man von einem Zustand zum Zeitpunkt  $t$  aus und berechnet die aus den wirkenden inneren und äusseren Kräften resultierenden Beschleunigungen zur Zeit  $t + \Delta t$  und daraus wiederum die neuen Knotengeschwindigkeiten und -koordinaten. Für  $t = 0s$  gelten die Anfangsgeschwindigkeiten und Ausgangspositionen der Knoten.

Bei den impliziten Verfahren sucht man das Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  durch Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems. Jedoch sind bei grossen Nichtlinearitäten un-

---

<sup>1</sup>Die Mehrschrittverfahren z.B. nach Houbolt berücksichtigen auch noch Werte zur Zeit  $t - \Delta t$ ,  $t - 2\Delta t$  usw. [10]

ter Umständen zeitaufwändige Iterationen notwendig. Die explizite Zeitintegration hingegen bestimmt die neuen Geschwindigkeiten und Verschiebungen direkt aus den berechneten Beschleunigungen, wobei man sich dadurch u.U. beliebig weit vom tatsächlichen Gleichgewichtszustand entfernt. Man wählt darum den Zeitschritt  $\Delta t$  so klein, dass die Abweichung vom Gleichgewicht klein genug und damit der Algorithmus stabil bleibt. Vor allem bei grossen zu erwartenden Nichtlinearitäten kann ein solches Verfahren im Vergleich zu einem impliziten effizienter rechnen. Aus diesem Grund wird diese Variante für die in dieser Arbeit behandelten Simulationen gewählt und im nächsten Abschnitt vorgestellt, wobei mehr Details auch in der Standardliteratur (z.B. [2, 10]) zu finden sind.

## 2.2 Methode der finiten Differenzen

Die Taylorentwicklung für  $\dot{\mathbf{X}}_{(t+\Delta t)}$  lautet

$$\dot{\mathbf{X}}_{(t+\Delta t)} = \dot{\mathbf{X}}_{(t)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{d^{\nu} \dot{\mathbf{X}}_{(t)}}{dt^{\nu}} \Delta t^{\nu}. \quad (2.2)$$

Verwendet man aus der Summe mit den Gliedern höherer Ordnung ( $\nu \geq 1$ ) nur das erste daraus, so erhält man einen Ansatz zur Bestimmung der Geschwindigkeit im nächsten Zeitschritt zu

$$\dot{\mathbf{X}}_{(t+\Delta t)} = \dot{\mathbf{X}}_{(t)} + \ddot{\mathbf{X}}_{(t)} \Delta t. \quad (2.3)$$

Der hierbei gemachte Fehler liegt gemäss einem nach [16] ermittelten Restglied in der Grössenordnung von  $\Delta t^2$ . Wählt man nun die Zeitschrittgrösse klein genug, erzielt man trotz der gemachten Vereinfachung eine ausreichende Genauigkeit. Die Zeitschrittgrösse  $\Delta t$  wird somit so klein gewählt, dass man die Beschleunigungen innerhalb eines Zeitintervalls als konstant annehmen kann.

Analog erhält man die Knotenkoordinaten aus der Taylorreihenentwicklung für  $\mathbf{X}_{(t+\Delta t)}$  zu

$$\mathbf{X}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{X}_{(t)} + \dot{\mathbf{X}}_{(t)} \Delta t. \quad (2.4)$$

Im Folgenden werden die Grössen  $\ddot{\mathbf{X}}$  und  $\dot{\mathbf{X}}$  nicht weiterhin als Ableitung der Weggrösse  $\mathbf{X}$ , sondern allgemein durch die Symbole  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{V}$  ausgedrückt, da man bei der nachfolgend beschriebenen Zeitdiskretisierung nicht mehr direkt von Ableitungen spricht. Die Geschwindigkeiten werden zudem als zeitlich verschoben bezogen auf das Zeitintervall, in dem sie gelten, mit  $\mathbf{V}_{t-\Delta t/2}$ ,  $\mathbf{V}_{t+\Delta t/2}$  als Mittelwerte der Geschwindigkeiten  $\mathbf{V}_{t-\Delta t}$ ,  $\mathbf{V}_t$  und  $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$  angegeben.

Die Massen aller Elemente seien als konzentrierte Massenpunkte auf die Elementknoten verteilt, weswegen die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  diagonalisiert werden kann. Damit erhält man die ungedämpfte Beschleunigung aller Knoten  $i$  zu

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i/m_i \quad (2.5)$$

und kann die Bewegungsgleichung des Systems somit mit rein vektoriellen Grössen ohne teure Ermittlung der Inversen der konsistenten Massenmatrix lösen. Analog verfährt

man mit der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  bei zusätzlich viskos gedämpften Berechnungen (siehe Abschnitt 2.2.5).

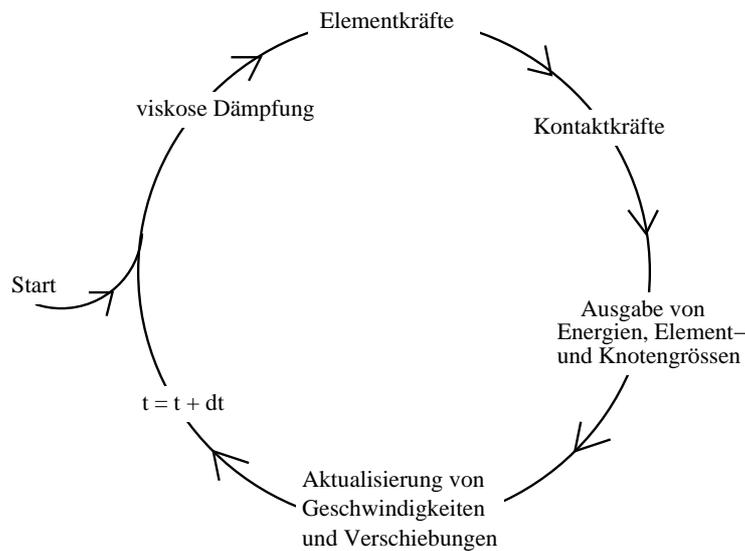


Abbildung 2.1: Vorgehensweise bei der Methode der zentralen Differenzen

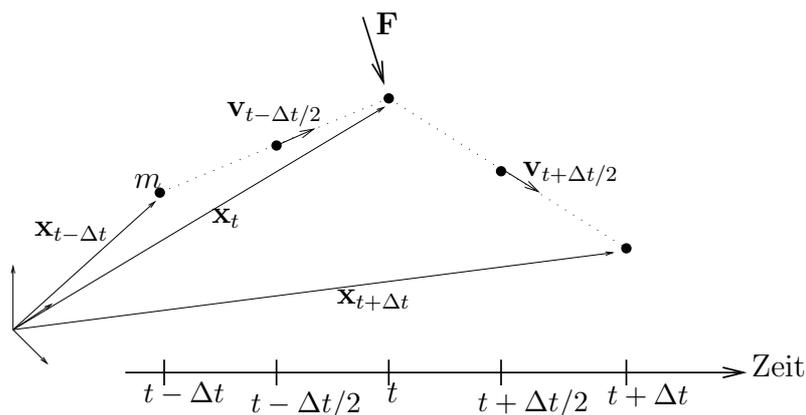


Abbildung 2.2: Zeitliche Anordnung der für die Zeitintegration verwendeten kinetischen Größen am Beispiel eines einzelnen Massenpunkts

### 2.2.1 Ablauf des Zeitintegrationsalgorithmus

Obige Ansätze sind in den Abb. 2.1 und 2.2 graphisch veranschaulicht. Der Algorithmus bewegt sich dabei immer von der Zeit  $t - \Delta t/2$  zur Zeit  $t + \Delta t/2$ . D.h. die einwirkenden Kräfte, die aktuellen Verschiebungen, Energieinhalte und weitere Ausgabewerte wirken und gelten immer konstant innerhalb des Zeitintervalls  $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$ , d.h. der  $\Delta t/2$ -Umgebung von  $t$ .

Zur Zeit  $t = 0$  gelten für die Knoten die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{v}_{t=0} = \mathbf{v}_0 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{x}_{t=0} = \mathbf{x}_0 \tag{2.7}$$

Die Aktualisierung der Geschwindigkeiten und Verschiebungen erfolgt dann durch

$$\mathbf{v}_{t+\Delta t/2} = \mathbf{v}_{t-\Delta t/2} + \frac{\mathbf{f}}{m}\Delta t \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_{t-\Delta t} + \mathbf{v}_{t+\Delta t/2}\Delta t. \quad (2.9)$$

Kern der Berechnungen ist somit die Ermittlung der auf die Massenpunkte einwirkenden Kräfte wie die Gewichtskraft, die Elementkräfte und die zwischen Steinschlag und Schutzverbauung auftretenden Kontaktkräfte. Die Bestimmung der beiden letzteren ist ausführlich in den Kapiteln 3 und 4 beschrieben.

### 2.2.2 Stabilität des Differenzenverfahrens

Die Stabilität einer expliziten Zeitintegration hängt von der Wahl der Zeitschrittgrösse ab. Bei den in dieser Arbeit behandelten Problemen ergab sich dieser im Bereich von  $\Delta t = 10^{-4} - 10^{-6} s$ . Dies entspricht der Zeit, die ein frei fallender Stein mit einer typischen Geschwindigkeit von  $v = 25m/s = 90km/h$  braucht, um eine Strecke von  $s = 25\mu m \dots 2.5mm$  zurückzulegen. Allerdings erfordert ein kleinerer Zeitschritt eine umgekehrt proportional längere Berechnungsdauer, weswegen eine Maximierung der Zeitschrittgrösse wünschenswert ist. Dieses Maximum orientiert sich an der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb der eingesetzten Elementmaterialien. Dafür stelle man sich ein Stabelement vor, an dessen einem Ende zur Zeit  $t$  eine Kraft angesetzt wird und sich dieses gemäss seiner Trägheit während des Zeitschritts verformt. Im nächsten Zeitschritt ergibt sich durch die Änderung der Stablänge eine elementinterne Kraft, welche der Aussenkraft entgegenwirkt. Ist nun  $\Delta t$  zu gross gewählt, so ergibt sich aufgrund der grösseren Verschiebung des einen Knotens eine unter Umständen viel zu grosse Elementkraft, welche den Knoten im nächsten Zeitschritt übermässig beschleunigt. Diese Beschleunigung wiederum resultiert in einer hohen Geschwindigkeit des Massenpunkts und lässt den Algorithmus numerisch instabil werden. Als Resultat lässt sich beobachten, dass die Knoten mit hoher Geschwindigkeit grosse Verschiebungen zurücklegen und nicht mehr durch die zwischengeschalteten Elemente zusammengehalten werden können ('Das Modell explodiert.'). Vergleicht man darum den Kraftfluss mit der Ausbreitung von Kraftwellen im Element, darf der Zeitschritt nicht grösser gewählt werden, als der Kraftfluss Zeit benötigt, um das Element zu durchqueren.

Zur Ermittlung der maximal möglichen Zeitschrittgrösse betrachte man nun ein beliebiges lineares ungedämpftes freies System mit  $N$  Verschiebungsgrössen  $\mathbf{X}$ , der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ . Die Bewegungsgleichung hierfür lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}_{t=0} = X_0. \quad (2.10)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich durch die durch die Wichtungsfaktoren  $E_n$  gewichtete Summation aller  $N$  Eigenschwingungen mit

$$\mathbf{X}_{(t)} = \sum_{n=1}^N E_n \mathbf{Y}_n(t) \quad (2.11)$$

formulieren mit den Lösungen  $\mathbf{Y}_{n(t)} = \mathbf{y}_n \cos \omega_n t$  und  $\mathbf{Y}_{n(t)} = \mathbf{y}_n \sin \omega_n t$ . Diese werden im Ansatz

$$\mathbf{Y}_{n(t)} = \mathbf{y}_n e^{i\omega_n t} \quad (2.12)$$

zur Beschreibung der Schwingungen zusammengefasst. Damit lässt sich Gl. 2.10 durch die  $N$  entkoppelten Differentialgleichungen

$$\ddot{\mathbf{Y}}_n + \omega_n^2 \mathbf{Y}_n = 0, \quad (2.13)$$

ausdrücken, deren Eigenwerte  $\omega_n = \omega_1 \dots \omega_{max} \dots \omega_N \geq 0$  gleich den Eigenkreisfrequenzen des gesamten Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K} - \{\omega_n^2\} \mathbf{M}) \{E_n\} = 0 \quad (2.14)$$

sind.

Nach dem Verfahren der zentralen Differenzen lässt sich der Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{Y}}_n$  zur Zeit  $t$  durch

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n(t)} = \frac{\dot{\mathbf{Y}}_{n(t+\Delta t/2)} - \dot{\mathbf{Y}}_{n(t-\Delta t/2)}}{2} = \frac{\mathbf{Y}_{n(t+\Delta t)} - 2\mathbf{Y}_{n(t)} + \mathbf{Y}_{n(t-\Delta t)}}{\Delta t^2} \quad (2.15)$$

ausdrücken. Diesen Ausdruck in Gl. 2.13 eingesetzt ergibt

$$\mathbf{Y}_{n(t+\Delta t)} = (2 - \omega_n^2 \Delta t^2) \mathbf{Y}_{n(t)} - \mathbf{Y}_{n(t-\Delta t)}. \quad (2.16)$$

Für eine geeignete Formulierung dieser Iteration als Fixpunktiteration  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{T}^k + \mathbf{c}$  in Matrixform nach [82] ergänzt man obige Gleichung noch um die Gleichung  $\mathbf{Y}_{n(t)} = \mathbf{Y}_{n(t)}$  (siehe auch [45]) und erhält

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{n(t+\Delta t)} \\ \mathbf{Y}_{n(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \omega_n^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{n(t)} \\ \mathbf{Y}_{n(t-\Delta t)} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Bezeichnet man die Koeffizientenmatrix mit  $\mathbf{A}$  erhält man nach  $m$  Zeitschritten zur Zeit  $t = m \Delta t$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{n(t+\Delta t)} \\ \mathbf{Y}_{n(t)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^m \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{n(\Delta t)} \\ \mathbf{Y}_{n(0)} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Damit dieser Ausdruck auch bei theoretisch unendlich kleinen Zeitschritten immer zum gleichen beschränkten Ergebnis führt, muss die Matrix  $\mathbf{A}$  beschränkt sein [82]. Dies ist der Fall, wenn der sog. Spektralradius der Matrix  $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$  gegeben ist. Der Spektralradius entspricht dabei dem betragsmässig grössten Eigenwert  $\lambda_{max}$  der Koeffizientenmatrix nach

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad (2.19)$$

$$\lambda^2 - (2 - \omega_n^2 \Delta t^2) \lambda + 1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\longrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{2 - \omega_n^2 \Delta t^2 \pm \omega_n \Delta t \sqrt{\omega_n^2 \Delta t^2 - 4}}{2}. \quad (2.21)$$

Wegen  $\rho(\mathbf{A}) = |\lambda_{max}| \leq 1$  erhält man folgende Bedingung für den maximalen Zeitschritt:

$$\left| 2 - \omega_n^2 \Delta t^2 \pm \omega_n \Delta t \sqrt{\omega_n^2 \Delta t^2 - 4} \right| \leq 2 \quad (2.22)$$

$$\longrightarrow \Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}. \quad (2.23)$$

Somit ist es also notwendig, die grösste Eigenkreisfrequenz des Gesamtsystems zu kennen und mittels dieser den minimalen Zeitschritt zu bestimmen. Da das System aus lauter einzelnen voneinander unabhängigen Elementen zusammengesetzt ist, kann die maximale Gesamteigenfrequenz nicht über derjenigen eines einzelnen nicht gelagerten Elements liegen. Die maximale Eigenfrequenz ermittelt sich somit aus dem Maximum der Eigenkreisfrequenzen der einzelnen Elemente.

**Beispiel: Stabelement** mit der Länge  $l$ , der Querschnittsfläche  $A$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Dichte  $\rho$ . Die Masse  $m = \rho Al$  ist in den beiden Knotenpunkten mit den Freiheitsgraden  $x_1$  und  $x_2$  je zur Hälfte konzentriert. Das für dieses Element entkoppelte Eigenwertproblem lautet damit

$$(\mathbf{K} - \{\omega_S^2\}\mathbf{M})\mathbf{x} = \left( \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega_S^2 \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

Die Eigenwerte (Nullstellen der Determinante) hierfür lauten somit

$$\omega_1 = 0 \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.25)$$

wobei  $\omega_1 = 0$  einer reinen Starrkörperverschiebung des Stabes entspricht. Die Schwingungsdauer von  $\omega_2$  entspricht damit der maximalen Zeitschrittgrösse von

$$\Delta t_{max} = \frac{2}{\omega_{max}} = \frac{l}{\sqrt{E/\rho}}. \quad (2.26)$$

Der Wurzelausdruck ist zudem auch gleich der Schallgeschwindigkeit  $c = \sqrt{E/\rho}$  eines Materials mit der Elastizität  $E$  und der Dichte  $\rho$ . Für reine Stabelemente und für die weiterhin in dieser Arbeit eingesetzten diskreten linienartigen Elemente der Länge  $l$  gilt darum

$$\Delta t \leq \frac{l}{c} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.27)$$

bei einem Elastizitätsmodul  $E$  und der Materialdichte  $\rho$ .

Wie später in Kapitel 3 gezeigt wird, lässt sich die minimale Zeitschrittgrösse der entwickelten Seil- und Ringelemente mit dem gleichen Ansatz ermitteln.

### Änderung des Zeitschritts

Für eine möglichst kurze Rechenzeit ist es bei einem veränderlichen maximal möglichen Zeitschritt wünschenswert, immer diesen zu verwenden. Das bedeutet aber, dass der Zeitschritt  $\Delta t$  während der Simulation auf  $\Delta t_{neu}$  vergrössert werden kann oder aber unter Umständen auch dementsprechend verkleinert werden muss. Die Aktualisierung der Knotengeschwindigkeiten erfolgt damit durch

$$\mathbf{v}_{t+\Delta t_{neu}/2} = \frac{\mathbf{f}}{m} \frac{\Delta t + \Delta t_{neu}}{2} \quad (2.28)$$

oder, wenn die neue Geschwindigkeit bereits für den alten Zeitschritt ermittelt wurde, die Korrektur von  $\mathbf{v}_{t+\Delta t/2}$  zu

$$\mathbf{v}_{t+\Delta t_{neu}/2} = \mathbf{v}_{t+\Delta t/2} + \frac{\mathbf{f}}{m} \frac{\Delta t_{neu} - \Delta t}{2}. \quad (2.29)$$

Der Zeitschritt lässt sich beliebig verkleinern. Bei einer Vergrößerung sollte er aus Gründen der Stabilität mit einem Mal aber nicht mehr als verdoppelt werden.

### 2.2.3 Energieverlauf

Das aktuelle Energieniveau eines Massenpunkts zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich aus der Summe von kinetischer und potentieller Energie. Da die kinetische Energie nur für die Zeitpunkte  $t - \Delta t/2$  und  $t + \Delta t/2$  bekannt ist, verwendet man das arithmetische Mittel dieser.

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m \left[ \frac{\mathbf{v}_{t+\Delta t/2} + \mathbf{v}_{t-\Delta t/2}}{2} \right]^2 + m g (\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_{z,t=0}). \quad (2.30)$$

Die durch eine während des Zeitschritts wirkende Kraft induzierte Differenz der kinetischen Energie lässt sich auch direkt aus dem Produkt der während dieser Zeit aufgebrachtten Kraft und dem dabei zurückgelegten Weg berechnen:

$$\mathbf{v}_{t+\Delta t/2} = \mathbf{v}_{t-\Delta t/2} + \frac{\mathbf{f}}{m} \quad \longrightarrow \quad \Delta E_{kin} = \mathbf{f} \cdot \frac{\mathbf{v}_{t+\Delta t/2} + \mathbf{v}_{t-\Delta t/2}}{2} \Delta t. \quad (2.31)$$

### 2.2.4 Lagerung von Knoten

Für gelagerte Knoten gilt, dass die auf sie einwirkenden Kräfte keine Verschiebungen und Geschwindigkeiten bewirken. Daher kann man die Auflagerung während der Simulation berücksichtigen, indem man bei den aufgelagerten Knoten die Geschwindigkeitsaktualisierung aus Abb. 2.1 nicht durchführt. Allerdings würde dieses Vorgehen bei der Kontaktberechnung zwischen Stein und Knoten nach Gl. 4.25 zu falschen Ergebnissen führen, da der Knoten als ungelagert angenommen wird und sich daraus eine falsche Kontaktkraft ergibt. Insofern bietet es sich an, den Knoten durch Erhöhung seiner Masse so aufzulagern, dass die im Rahmen der Simulation erwarteten Kräfte auf Grund der rechnerischen Genauigkeitsgrenzen des Computers keine Knotenbeschleunigungen bewirken. Dies entspricht auch weitgehend den natürlichen Umständen, da in der Realität die Auflager dadurch erhalten werden, dass unendlich grosse Massen den einwirkenden Kräften Widerstand leisten. Für das Beispiel der Kontaktkraftberechnung gilt damit weiterhin, dass die Kontaktkraft unendlich hoch sein muss, damit der Berührknoten in Bewegung gesetzt werden kann. Insofern wird durch den Ansatz nur die Bewegung des Steins beeinflusst. Es gilt also für einen aufgelagerten Knoten im Vergleich zu einem ungelagerten

$$m_{gelagert} = 10^{100} m \quad \longrightarrow \quad \text{Beschleunigung } \mathbf{a}_{gelagert} = \frac{\mathbf{f}}{m_{gelagert}} = 1^{-100} \frac{\mathbf{f}}{m} \approx \vec{0}. \quad (2.32)$$

Es müssten also erst  $10^{100}$  stärkere, d.h. unendlich grosse Kräfte auf die Massen wirken, damit zur ursprünglichen Grössenordnung vergleichbare Beschleunigungen auftreten. Durch

die numerische beschränkte Genauigkeit der Computer entsteht durch diese Variante der Auflagerung von Massen sogar eine absolute Lagerung der Massen mit  $|\mathbf{v}| = 0 \text{ m/s}$ .

### 2.2.4.1 Lagerung einzelner Freiheitsgrade

Für gewisse Aufgabenstellungen ist es wünschenswert, wenn ein Knoten nicht komplett, sondern nur für bestimmte Richtungen gelagert wird. Beschränkt man sich bei diesen Richtungen nun auf die drei Hauptachsen, so kann man die für einen Massenpunkt eigentlich skalare Masse  $m$  durch die eine Massenmatrix  $\mathbf{M}$  ausdrücken:

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & m_z \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Wird der Massenpunkt nun in einer der drei Richtungen gelagert, so wird das entsprechende Diagonalelement mit  $10^{100}$  multipliziert. Die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  des Massenpunkts ist damit

$$\mathbf{a} = [m]^{-1}\mathbf{f}. \quad (2.34)$$

Da es sich bei der Massenmatrix um eine Diagonalmatrix handelt, lässt sich deren Inverse sehr einfach durch die reziproken Diagonalelemente berechnen. Für weiterhin effiziente Berechnungen auf Vektorbasis wird die diagonale Massenmatrix durch einen Massenvektor  $\mathbf{m}$  ersetzt und an Stelle der Berechnung der Inversen eine sogenannte Vektordivision nach

$$[m]^{-1}\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} f_x/m_x \\ f_y/m_y \\ f_z/m_z \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

definiert. Damit werden die Beschleunigungen des Knotens in der aufgelagerten Richtung automatisch zu null gesetzt.

Für einen nichtgelagerten Knoten gilt dabei, dass die Länge des Massenvektors nicht gleich der Masse des Knoten ist. D.h., der Massenvektor darf nicht als normaler Vektor betrachtet werden. Diese Variante wurde nur eingeführt, um Produkte und Divisionen von Massen mit Kräften entweder zu Null zu setzen oder eine normale Beschleunigung  $a = f/m$  nach Newton zuzulassen.

### 2.2.5 Dämpfung

Um die sich bei einer expliziten dynamischen Simulation zwangsläufig einstellende Wellenbildung bei vor allem hochfrequenten Schwingungen zu reduzieren, empfiehlt es sich, die Bewegung der Massenpunkte zu dämpfen. Bei der Methode der Finiten Elemente wird häufig die sog. Rayleigh-Dämpfung verwendet (siehe z.B. [10]). Die Dämpfungsmatrix aus Gl. 2.1 ermittelt sich dabei aus der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  zu

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}, \quad (2.36)$$

wobei die Faktoren  $\alpha$  und  $\beta$  häufig experimentell in Abklingversuchen ermittelt werden. Es muss beachtet werden, dass es für jedes System eine kritische Dämpfung gibt, oberhalb derer die bewegten Massen übermässig stark abgebremst werden und die sich einstellende Lage nicht dem statischen Gleichgewicht entspricht[45]. Die Dämpfung muss also klein genug gewählt werden, sodass nur kleine Geschwindigkeitskorrekturen vorgenommen werden, was die Bewegung einer Masse nicht stark beeinflusst, aber hochfrequente Schwingungen herausfiltert.

Setzt man  $\beta = 0$ , so reduziert sich  $\mathbf{C}$  auf eine rein viskose Dämpfung. Die Grösse der Dämpfungskraft wird somit dertart angesetzt, dass jeder Knoten mit einer beliebigen Masse<sup>2</sup> innerhalb eines Zeitschritts mit dem Dämpfungskoeffizienten  $\alpha$  proportional zur Grösse der Geschwindigkeit abgebremst wird. Mit diesem Ansatz erhält die Dämpfungsmatrix eine diagonale Gestalt und ermöglicht weiterhin die einfache explizite Zeitintegration (siehe auch [45]). Die Dämpfungskraft zum Zeitpunkt  $t$  ermittelt sich damit zu

$$\mathbf{f}_{D,t} = -\alpha m \mathbf{v}_{t-\Delta t/2}. \quad (2.37)$$

Die kritische Dämpfung wird in [74] in Abhängigkeit von der kleinsten Eigenschwingung des Systems mit  $\alpha = 2\omega_{min}$  angegeben<sup>3</sup>. Hier wird auch ein Verfahren beschrieben, wie  $\omega_{min}$  mit Hilfe eines geeigneten Dämpfungsmasses abgeschätzt werden kann.

## 2.3 Statische Berechnungen

Der statische Gleichgewichtszustand einer Struktur wird in der Regel durch eine implizite Berechnung ermittelt. Mit dem im vorigen Abschnitt 2.1 beschriebenen Verfahren zur Simulation dynamischer Prozesse lassen sich jedoch auch quasistatische Berechnungen durchführen, welche für einen bestimmten Lastzustand die statischen Verformungen eines modellierten Systems ermitteln. Vor allem bei grösseren Nichtlinearitäten ist eine explizite Simulation die u.U. effektivere Variante. Das Verfahren bietet sich ebenfalls an, wenn man für eine Berechnung eine statische Berechnung mit einer dynamischen Analyse kombinieren möchte und letztere mit einem ausschliesslich explizit arbeitenden Programm durchgeführt wird.

Bei quasistatischen Berechnungen muss darauf geachtet werden, dass die Geschwindigkeiten der Massenpunkte so gering bleiben, dass die Trägheitskräfte keinen nennenswerten Einfluss auf die Verformungen des Systems haben. Darum setzt man zu Beginn die Geschwindigkeiten aller Massenpunkte zu Null und die Knoten werden durch die einwirkenden Kräfte -wie auch schon in Abb. 2.1 gezeigt- beschleunigt. Die dabei entstehenden Geschwindigkeiten werden jedoch gleich im nächsten Zeitschritt wieder fast vollständig durch einen hohen Dämpfungskoeffizienten gedämpft. Dieses Verfahren wird solange fortgeführt bis der Zuwachs der kinetischen Energie eines Systems pro Zeitschritt ein entsprechendes Minimum erreicht hat. Um die Grössenordnung dieses Minimums richtig zu erfassen, ermittelt man als Referenzwert die Änderung der kinetischen Gesamtenergie  $\Delta E_{kin,0}$  nach

<sup>2</sup>Aufgelagerte Knotenrichtungen mit unendlich hoher Masse müssen dabei ausgenommen werden.

<sup>3</sup>Nicht zu verwechseln mit  $\omega_{max}$  zur Bestimmung des minimal möglichen Zeitschritts

dem ersten Zeitschritt der quasistatischen Berechnung. Das quasistatische Gleichgewicht ist am Ende gefunden, wenn die Bedingung

$$\Delta E_{kin} = \varepsilon \Delta E_{kin,0} \quad (2.38)$$

erfüllt ist. Wirkt auf die belastete Struktur ausschliesslich deren Eigengewicht, so kann nach dem gleichen Verfahren auch die Änderung der Lageenergie als Kriterium für das Erreichen des Gleichgewichts verwendet werden. Die Summe aus allen Energien ist dabei ebenso verwendbar.

Zu beachten ist eine passende Wahl des Dämpfungskoeffizienten  $\alpha$ , welcher im besten Fall dafür sorgt, dass der Geschwindigkeitsgewinn eines Massenpunkts während eines Zeitschritts im nächsten Zeitschritt wieder reduziert wird. Wird  $\alpha$  zu gross gewählt, werden die Massenpunkte zu stark abgebremst und der Algorithmus erkennt auf Grund der nun nicht mehr vorhandenen kinetischen Energie das Gleichgewicht als zu früh gefunden und beendet die quasistatische Rechnung mit einem falschen Ergebnis. Wählt man dagegen  $\alpha$  zu klein, wird das System durch die einwirkenden Kräfte in Schwingung versetzt und kommt trotz Dämpfung nicht zur Ruhe. Die dadurch stets vorhandene kinetische Energie lässt den Algorithmus kein Gleichgewicht finden.

Durchgeführte Simulationen haben gezeigt, dass mit diesem Verfahren für einen Energiequotienten von  $\varepsilon \approx 10^{-5}$  und einem Dämpfungskoeffizienten  $\alpha = 5 \dots 10 \text{ s}^{-1}$  nach Abschnitt 2.2.5 gute Ergebnisse erzielt werden können.

### 2.3.1 Beschleunigung der Lösungsfindung

Die Gewichtskraft kann einen gedämpften Knoten innerhalb eines Zeitschritts nur sehr wenig beschleunigen, d.h. die Bestimmung des Gleichgewichts erfordert sehr viele Zeitschritte. Eine Beschleunigung des quasistatischen Lösungsverfahrens ist darum wünschenswert.

Eine Variante dafür ist, die Massenpunkte zunächst ungedämpft durch die wirkenden Kräfte zu belasteten, bis deren Bewegungsrichtung durch den sich inzwischen aufgebauten Widerstand der Elemente umgekehrt wird. Erst dann werden die Dämpfungskräfte auf den jeweiligen Massenpunkt angesetzt. Dies Verfahren zeigt jedoch insgesamt zu starke Schwingungen im System, die unter Umständen während des Dämpfprozesses das System mit einer falschen Geometrie zur Ruhe kommen lassen.

Eine effizientere Variante ist es darum, die wirkenden Lasten um einen Faktor  $\gamma$  zu erhöhen und, nach Erreichen des Gleichgewichts für den erhöhten Lastzustand, diesen in mehreren Schritten wieder auf das eigentliche Mass zu reduzieren und für das entlastete System wieder das Gleichgewicht zu suchen. Damit durch das erhöhte Eigengewicht das System nicht zu stark in Schwingung versetzt wird, empfiehlt sich auch eine Erhöhung des Dämpfungskoeffizienten. So erzielt man zu Beginn der Berechnung bei einem grossen statischen Kräfteungleichgewicht an den Knoten einen hohen viskosen Widerstand und reduziert diesen systematisch, je mehr Knoten sich mit kleinen Beschleunigungen und Dämpfungskräften im Gleichgewicht befinden. Der prinzipielle Ablauf zur Findung des statischen Gleichgewichts ist in Abb. 2.3 dargestellt.

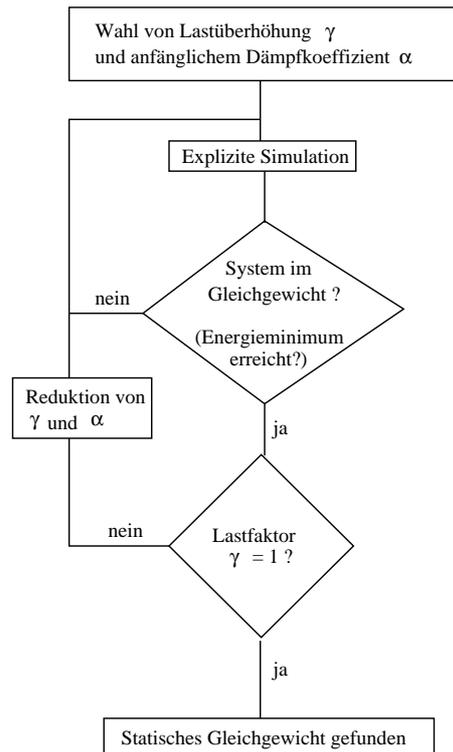


Abbildung 2.3: Ablaufdiagramm zur Findung des statischen Gleichgewichts mittels quasi-statischer Methoden

In den Simulationen wurde z.B. eine erste Überhöhung der wirkenden Lasten um den Faktor  $\gamma = 2.0$  bei einer anfänglichen Dämpfung von  $\alpha = 20.0 \text{ s}^{-1}$  mit einer sich anschließenden Reduktion dieser Werte auf  $\gamma = 1.0$  und  $\alpha = 5.0 \text{ s}^{-1}$  innerhalb von 5 Reduktionszyklen verwendet.

## 2.4 Geometrische Beschreibung von Körpern im Raum

Überall dort, wo Strukturen oder Teile von Strukturen ohne oder nur mit sehr kleinen Verformungen vorkommen, empfiehlt sich bei der numerischen Simulation die Verwendung von Starrkörpern. Durch den Einsatz von entsprechenden Zwangsbedingungen zur Definition der Interaktion mit anderen Strukturelementen lässt sich damit z.B. die Mechanik einer Maschine oder auch die Bewegung von Planeten und Satelliten effizient beschreiben. Neben der reinen Translation eines Starrkörpers, die sehr einfach beschrieben werden kann, muss auch die Rotation des Körpers berücksichtigt werden.

Die zur Simulation eines fallenden Steins eingesetzten Methoden zur geometrischen und kinetischen Starrkörperbehandlung werden in diesem Abschnitt erörtert.

### 2.4.1 Charakteristische Parameter eines dreidimensionalen Starrkörpers

Die Lage eines Körpers im Raum lässt sich eindeutig beschreiben durch unabhängige Parameter z.B. die Position von drei voneinander verschiedenen Körperpunkten ( $3 \cdot 3 = 9$  Koordinaten mit 3 Bindungsgleichungen), durch die Koordinaten von zwei Punkten und der Verdrehung um die Verbindungsachse ( $2 \cdot 3 + 1 = 7$  Werte bei einer Bindungsgleichung) oder durch die Koordinaten eines Bezugspunkts und die Verdrehung des Körpers um diesen Punkt ( $3 + 3 = 6$  voneinander unabhängige Größen). Wenn ein Starrkörper in der Simulation nur durch seinen Schwerpunkt definiert wurde, wird die dritte Option für Beschreibung der Lage des Steins im Raum gewählt. Im Schwerpunkt befinden sich zudem die Körpermassen im Gleichgewicht, d.h. translatorische Beschleunigungen erzeugen keine Momente und Rotationen keine Kräfte im Schwerpunkt, was bei der dynamischen Berechnung vorteilhaft ist.

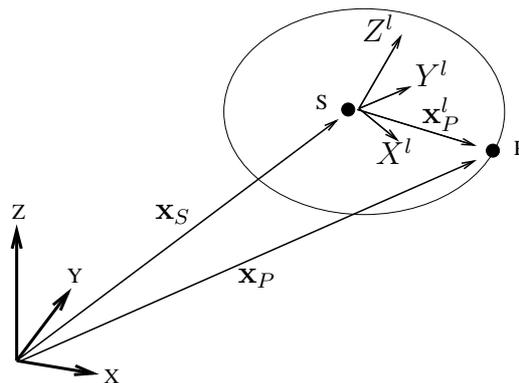


Abbildung 2.4: Starrkörper im globalen System mit lokalem Koordinatensystem und einzelnen Vektorbeziehungen

Abb. 2.4 zeigt einen Starrkörper im globalen kartesischen Koordinatensystem. Im Schwerpunkt  $S$  liegt der Ursprung des lokalen Koordinatensystems<sup>4</sup>. Die Bedingung für einen

<sup>4</sup>Lokale Vektoren und Koordinaten sind durch den Index  $l$  gekennzeichnet. Ausnahme:  $\omega$  als lokale im Gegensatz zur globalen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$

Starrkörper ist die unveränderliche Lage eines jeden Körperpunkts bezüglich des lokalen Koordinatensystems, welches fest mit dem Starrkörperbezugspunkt verbunden ist.

Damit lässt sich die Position eines jeden Starrkörperpunkts  $P$  bezüglich des globalen Koordinatensystems durch  $\mathbf{x}_P$  und bezüglich des lokalen Koordinatensystems durch den konstanten Vektor  $\mathbf{x}_P^l$  beschreiben. Das heisst nach dem Satz von Chasle, für die numerische Beschreibung des Starrkörpers ist die Formulierung der translatorischen Bewegung des Schwerpunkts sowie die Orientierung des lokalen Koordinatensystems ausreichend [34, 96]. So gilt für eine rein translatorische Bewegung  $\Delta\mathbf{x}_t$  des Starrkörperbezugspunkts die gleiche Verschiebung für den gesamten Starrkörper. Erst die Rotation des lokalen Bezugssystems erfordert eine zusätzliche Berechnung [72]. Ziel ist es nun, die Lage  $\mathbf{x}_P$  des Punkts  $P$  im globalen Bezugssystem in Abhängigkeit von der Lage des Körperbezugspunkts, der Orientierung des lokalen Koordinatensystems sowie der lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}_P^l$  zu beschreiben.

## 2.4.2 Räumliche Rotationen

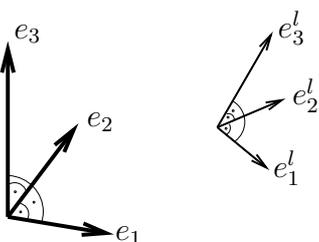


Abbildung 2.5: Achsen von globalem und lokalem kartesischen Koordinatensystem

Die drei paarweise orthogonalen Basiseinheitsvektoren  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  spannen einen dreidimensionalen 'euklidischen' Vektorraum auf. Durch ihre lineare Unabhängigkeit gilt

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3 \text{ und Kronecker Delta} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.39)$$

Die gleichen Eigenschaften gelten für das lokale Koordinatensystem  $(\mathbf{e}_1^l, \mathbf{e}_2^l, \mathbf{e}_3^l)$ . Des Weiteren lässt sich jeder der globalen Basisvektoren durch die lokalen Basisvektoren ausdrücken:

$$\mathbf{e}_i = r_{i1}\mathbf{e}_1^l + r_{i2}\mathbf{e}_2^l + r_{i3}\mathbf{e}_3^l = \sum_{j=1}^3 r_{ij}\mathbf{e}_j^l \quad \text{mit } i = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

Bildet man nun jeweils aus den drei Basisvektoren die  $(3 \times 3)$ -Matrizen  $\underline{\mathbf{e}}^l = [\mathbf{e}_1^l \ \mathbf{e}_2^l \ \mathbf{e}_3^l]$  und  $\underline{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$  lassen sich obige drei Gleichungen wie folgt formulieren:

$$\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{R}\underline{\mathbf{e}}^l. \quad (2.41)$$

Die Matrix  $\mathbf{R}$  ist eine  $(3 \times 3)$  Matrix bestehend aus obigen Koeffizienten  $r_{ij}$ . Durch sie lässt sich die lokale Vektorbasis in globalen Koordinaten beschreiben und sie stellt somit eine Transformationsmatrix zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem dar.

Die Transformationsmatrix hat zudem folgende Eigenschaften:

- Die einzelnen Koeffizienten  $r_{ij}$  beschreiben den Kosinus des Winkels  $\varphi_{ij}$  zwischen den beiden Vektoren  $\mathbf{e}_i^l$  und  $\mathbf{e}_j$ , da die Definition des Skalarprodukts  $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{e}_j||\mathbf{e}_i|\cos\varphi$  für  $|\mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_j| = 1$  bei der Berechnung der Matrixkoeffizienten wiederzufinden ist.
- Die Determinante von  $\mathbf{R}$  ist für Rechtssysteme<sup>5</sup> gleich eins:  $\det \mathbf{R} = 1$ .
- Die Matrix ist orthonormal, d.h. ihre Transponierte ist gleich ihrer Inversen:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \implies \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} = \text{Einheitsmatrix}). \quad (2.42)$$

Eulers Theorem [96] besagt nun, dass zwei beliebig orientierte Inertialsysteme mit einem gemeinsamen Ursprung durch eine einzige Drehung um eine bestimmte Achse ineinander übergeführt werden können. Die Drehachse verläuft dabei durch den Ursprung der Systeme und hat als Richtung den Eigenvektor  $\mathbf{u}$  der Transformationsmatrix für den Eigenwert  $\lambda = 1$ :  $\mathbf{R} \mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

Interpretiert man nun obige Transformation mit Hilfe dieses Theorems, so ergeben sich folgende Anwendungen für die Rotationsmatrix:

- Ein Vektor  $\mathbf{x}^l$  in lokalen Koordinaten kann mit Hilfe von  $\mathbf{R}$  in globale Koordinaten  $\mathbf{x}$  umgewandelt werden:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}^l \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^l = \mathbf{R}^T \mathbf{x}. \quad (2.43)$$

- Eine lokale Matrix  $\mathbf{A}^l$  kann mit Hilfe von  $\mathbf{R}$  zu  $\mathbf{A}$  globalisiert werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{A}^l \mathbf{R}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}^l = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}. \quad (2.44)$$

- Es seien die drei Bezugssysteme  $\underline{\mathbf{e}}^a, \underline{\mathbf{e}}^b$  und  $\underline{\mathbf{e}}^c$  gegeben. Dann lässt sich ein Vektor  $\mathbf{x}^a$  durch  $\mathbf{R}^{ab}$  in Koordinaten von  $\underline{\mathbf{e}}^b$ , sowie  $\mathbf{x}^b$  durch  $\mathbf{R}^{bc}$  in Koordinaten von  $\underline{\mathbf{e}}^c$  ausdrücken. Damit gilt für die Umwandlung von  $\mathbf{x}^a$  in  $\mathbf{x}^c$ :  $\mathbf{x}^c = \mathbf{R}^{bc} \mathbf{x}^b = \mathbf{R}^{bc} (\mathbf{R}^{ab} \mathbf{x}^a)$ . Das heisst, die Hintereinanderschaltung von zwei Transformationen lässt sich durch eine neue Transformationsmatrix ausdrücken:

$$\mathbf{R}^{ac} = \mathbf{R}^{bc} \mathbf{R}^{ab}. \quad (2.45)$$

Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Kombination der Transformationen nicht kommutativ ist, d.h.  $\mathbf{R}^{bc} \mathbf{R}^{ab} \neq \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{bc}$ .

- Ein einzelner Vektor kann mit Hilfe der Transformationsmatrix innerhalb desselben Inertialsystems gedreht werden:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} \mathbf{x}_0. \quad (2.46)$$

- Wird ein Körper ausgelenkt und dabei an einem Punkt festgehalten, so erfolgt eine Drehung um eine Achse durch diesen Punkt (Eulers Theorem) [43].

Für die Formulierung der Rotationsmatrix gibt es verschiedene Darstellungen. Eine Auswahl derer wird im folgenden Abschnitt kurz diskutiert.

---

<sup>5</sup>Die Richtungen der Basisvektoren lassen sich mit den ersten drei Fingern der rechten Hand bestimmen.

### 2.4.2.1 Alternative mathematische Beschreibungen von räumlichen Rotationen

Bei der Verwendung sogenannter Eulerwinkel nimmt man an, dass die gesuchte Drehung das Ergebnis von drei aufeinander folgenden Drehungen um die Achsen 1, 3, 1 des Koordinatensystems ist. Die sogenannten Byrantwinkel verfahren ähnlich mit der Achsendrehungsreihenfolge 1, 2, 3 und dementsprechend angepassten Teilrotationsmatrizen. Abgesehen davon, dass diese Verfahren abhängig von der Drehreihenfolge sind, gibt es hier numerische Probleme, wenn zum Beispiel der zweite Winkel gleich  $k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ist. Dann fallen die Achsen des ersten und des dritten Winkels zusammen und beide Drehungen können nicht mehr unterschieden werden. Somit ist dieses Verfahren nur für kleine Winkeländerungen zu empfehlen.

Die Rotationsmatrix für beispielsweise die Byrantwinkel ergibt sich aus dem Produkt der drei aufeinander folgenden Drehungen  $\varphi, \psi$  und  $\chi$  um die drei Koordinatenachsen ( $c := \cos, s := \sin$ ):

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} c\psi & 0 & s\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\psi & 0 & c\psi \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\chi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\chi & s\chi \\ 0 & -s\chi & c\chi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\chi \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} c\psi c\chi & c\psi s\chi + s\psi c\chi & s\psi s\chi - c\psi c\chi \\ -c\psi s\chi & c\psi c\chi - s\psi s\chi & s\psi c\chi + c\psi s\chi \\ s\psi & -s\psi c\chi & c\psi c\chi \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

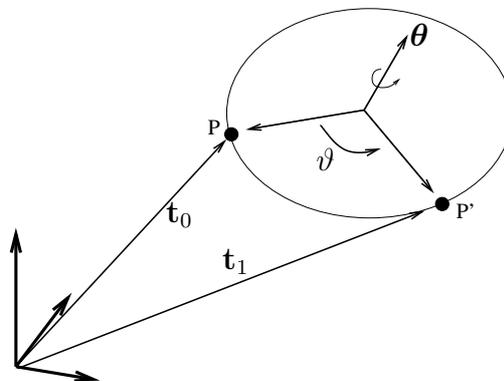


Abbildung 2.6: Mechanismus der räumlichen Vektordrehung

Gegeben sei nun die räumliche Drehung des Vektors  $\mathbf{t}^0$  um einen sogenannten Pseudovektor<sup>6</sup>  $\boldsymbol{\theta}$  in die Position  $\mathbf{t}^1$ . Der Drehwinkel  $\vartheta$  entspricht der Länge des Drehvektors:  $\vartheta = |\boldsymbol{\theta}|$ . Ziel ist nun in diesem Abschnitt, eine brauchbare Beschreibung der Rotationsmatrix zu erhalten. Für diese Beschreibung gibt es verschiedene Ansätze, welche ausführlich in [96] beschrieben sind.

<sup>6</sup>Es gelten nicht alle Regeln der Vektoralgebra: Addition und Subtraktion sind nicht erlaubt, d.h. einzelne Rotationen lassen sich nicht durch einfache Vektoraddition in resultierende Rotationen überführen.

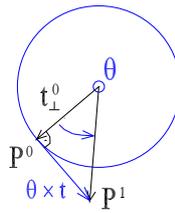


Abbildung 2.7: Rotation eines Vektors um seinen Fußpunkt: Linearisierung für kleine Winkeländerungen

**Linearisierung für kleine Drehwinkel** Am einfachsten lässt sich die Rotationsmatrix für kleine Drehwinkel wie in Abb. 2.7 veranschaulicht linearisieren. Für den neuen Vektor  $\mathbf{t}^1$  gilt demnach

$$\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}^0. \quad (2.48)$$

Das Kreuzprodukt lässt sich nun durch eine Matrixmultiplikation mit einer schiefsymmetrischen Matrix  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  ersetzen.

$$\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^0 + \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta_z & \vartheta_y \\ \vartheta_z & 0 & -\vartheta_x \\ -\vartheta_y & \vartheta_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{t}^0 = (\mathbf{E} + \hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{t}^0 \quad (2.49)$$

Mit der  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  entspricht die Matrix  $(\mathbf{E} + \hat{\boldsymbol{\theta}})$  der gesuchten Rotationsmatrix für kleine Drehwinkel.

Rechenregeln für schiefsymmetrische Matrizen:

$$\hat{\mathbf{a}}^T = -\hat{\mathbf{a}}, \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\hat{\mathbf{b}} \mathbf{a}, \quad (2.51)$$

$$\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{a}})^T \quad (2.52)$$

$$\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}} = (\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}})^T \quad (2.53)$$

$$\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{c} \longrightarrow \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T. \quad (2.54)$$

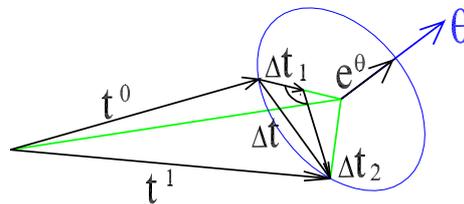


Abbildung 2.8: Rotation eines Vektors um seinen Fußpunkt, Aufteilung des Verbindungsvektors  $\Delta \mathbf{t}$  in zwei zueinander senkrechte Komponenten  $\Delta \mathbf{t}_2$  und  $\Delta \mathbf{t}_1$  in der Drehebene des Vektorendpunkts von  $\mathbf{t}^0$

**Rodrigues-Formel** Eine weitere Darstellung für die Rotationsmatrix erhält man mit Hilfe der Rodrigues-Formel. Hierbei teilt man den Vektor  $\Delta \mathbf{t}$  in zwei Komponenten  $\Delta \mathbf{t}_1$  und  $\Delta \mathbf{t}_2$ , die eine radial und die andere tangential zur Drehung, beide in der Drehebene liegend

(siehe Abb. 2.8). Mit Hilfe dieser Zerlegung lässt sich die Rotationsmatrix herleiten. Dazu bildet man den Einheitsvektor  $\mathbf{e}^\theta$  zu  $\boldsymbol{\theta}$  und beschreibt die Komponenten der Verschiebung  $\Delta \mathbf{t}$  nach [21] durch

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{t}_2 &= (\mathbf{e}^\theta \times \mathbf{t}^0) \sin \vartheta \\ \text{und } \Delta \mathbf{t}_1 &= \mathbf{e}^\theta \times (\mathbf{e}^\theta \times \Delta \mathbf{t}^0) (1 - \cos \vartheta) \end{aligned} \quad \text{mit } \mathbf{e}^\theta = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|}. \quad (2.55)$$

Das bedeutet für die Transformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^1 &= \mathbf{t}^0 + \Delta \mathbf{t}_1 + \Delta \mathbf{t}_2 \\ &= \mathbf{t}^0 + (1 - \cos \vartheta) \mathbf{e}^\theta \times (\mathbf{e}^\theta \times \mathbf{t}^0) + \sin \vartheta \mathbf{e}^\theta \times \mathbf{t}^0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

und für die Rotationsmatrix entsprechend der Vorschrift  $\mathbf{t}^1 = \mathbf{R} \mathbf{t}^0$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.57)$$

Diese Form der Rotationsmatrix bildet nun auch grosse Drehungen exakt ab. In der Literatur finden sich weitere Beispiele, in denen diese Form mit Hilfe von Substitution linearisierbar wird (Cayley-Transformation) oder auch als exponentielle Reihenentwicklung der schiefsymmetrischen Matrix  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  geschrieben werden kann.

### 2.4.2.2 Räumliche Rotation mittels Euler-Parameter (Quaternionen)

Ein allgemeines Problem bei der Verwendung der Rodrigues-Formel und ihrer Derivate alle in Abhängigkeit des Pseudovektors  $\boldsymbol{\theta}$  ist jedoch, dass diese bei additiven Rotationen nicht mehr eindeutige Ergebnisse liefern oder bei bestimmten Drehwinkeln Singularitäten aufweisen. Bei zweidimensionalen Problemen ist es daher hilfreich, die Rotation in Formeln zu fassen, die nur mit dem halben Drehwinkel rechnen, um so Vollkreisdrehungen abbilden zu können. Für dreidimensionale Problemstellungen führt man neben den drei Komponenten eines Pseudovektors noch eine vierte Grösse ein und bestimmt damit die sogenannten Euler-Parameter (Quaternionen) nach folgender Vorschrift:

$$q_0 = \cos \frac{\vartheta}{2} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\vartheta} \sin \frac{\vartheta}{2} = \mathbf{e}^\theta \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (2.58)$$

Die Quaternionen erfüllen zusätzlich die Nebenbedingung

$$\underline{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{q}} = q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (2.59)$$

Wendet man nun auf die Winkelfunktionen aus Gl. 2.56 die Funktionen für Winkelvielfache bei den trigonometrischen Funktionen [16] an, so lässt sich Gl. 2.56 wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{t}^1 = \mathbf{t}^0 + 2 \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{t}^0) + 2 q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{t}^0. \quad (2.60)$$

Benutzt man jetzt für  $\mathbf{q}$  die Matrixformulierung  $\hat{\mathbf{q}}$  des Kreuzprodukts, erhält man die Beziehung

$$\mathbf{t}^1 = (\mathbf{E} + 2\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}} + 2q_0\hat{\mathbf{q}}) \mathbf{t}^0 \quad (2.61)$$

und damit die Rotationsmatrix zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = [r_{ij}] &= \mathbf{E} + 2\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}} + 2q_0\hat{\mathbf{q}} \\ &\stackrel{(\text{Gl. 2.54})}{=} (2q_0^2 - 1)\mathbf{E} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\hat{\mathbf{q}} \\ &= \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Mit ihr kann man nun jeden beliebigen Vektor um seinen Fusspunkt in jede gewünschte Position drehen.

**Rückrechnung des Rotationsvektors** Der aktuelle Pseudodrehvektor  $\boldsymbol{\theta}$  lässt sich nach [87] aus den Quaternionen gewinnen. Die rechte Gleichung in 2.58 zeigt die lineare Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{e}^\theta$  und damit ihre Parallelität. Das heisst, multipliziert man beide Seiten von links mit  $\mathbf{e}^\theta$  ergibt sich für den Drehwinkel  $\vartheta$

$$\mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{q} = \mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}^\theta \sin \frac{\vartheta}{2} \quad \mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}^\theta \xrightarrow{=} 1 \quad \vartheta = 2 \arcsin(|\mathbf{q}|) \quad (2.63)$$

und für den Drehvektor  $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\vartheta}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q}. \quad (2.64)$$

**Gewinnung der Quaternionen aus einer Rotationsmatrix** Die Quaternionen lassen sich mit Hilfe des Spurrier-Algorithmus [90] direkt aus der Rotationsmatrix gewinnen: Wegen Gl. 2.59 gilt für die Spur<sup>7</sup> der Rotationsmatrix  $\text{tr}\mathbf{R}$  und damit für den Parameter  $q_0$  bei positiven Diagonalelementen:

$$\text{tr}\mathbf{R} = 4q_0^2 - 1 \quad \longrightarrow \quad q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\text{tr}\mathbf{R} + 1}. \quad (2.65)$$

Mit Hilfe von  $q_0$  lassen sich schliesslich die restlichen drei Quaternionen in  $\mathbf{q}$  bestimmen:

$$q_i = \frac{r_{kj} - r_{jk}}{4q_0} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c|ccc} \mathbf{i} & 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{j} & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{k} & 3 & 1 & 2 \end{array}. \quad (2.66)$$

Für den Fall von teilweise negativen Diagonalelementen in der Rotationsmatrix ermittelt man deren Maximum  $r_{ii}$ . Dann bestimmt sich  $q_i$  zu

$$q_i = \sqrt{\frac{r_{ii}}{2} + \frac{1 - \text{tr}\mathbf{R}}{4}} \quad (2.67)$$

und daraus wieder die restlichen Quaternionen

$$q_0 = \frac{r_{kj} - r_{jk}}{4q_i} \quad \text{mit } k, j \text{ wie oben} \quad \text{und} \quad q_l = \frac{r_{li} + r_{il}}{4q_i} \quad \text{mit } l \neq i. \quad (2.68)$$

---

<sup>7</sup>Die Spur einer Matrix ergibt sich aus der Summe ihrer Diagonalelemente

**Addition zweier Drehungen** In Gl. 2.45 wurde beschrieben, dass zwei aufeinander folgender Rotationen  $\mathbf{R}^a$  und  $\mathbf{R}^b$  mathematisch hintereinander geschaltet werden, wenn die beiden Rotationsmatrizen miteinander multipliziert werden. Dieses Verfahren kann man auch anwenden, um die Quaternionen nach zwei aufeinander folgenden Drehungen (zuerst Drehung  $a$ , anschliessend Drehung  $b$ ) zu bestimmen. Man ermittelt die beiden Rotationsmatrizen, multipliziert diese und extrahiert aus der neuen Matrix schliesslich wieder die neuen Quaternionen  $(q_0, \mathbf{q})$ . Dieser Vorgang ist jedoch sehr rechenintensiv und kann durch eine direkte Quaternionenaktualisierung ersetzt werden. Dazu definiert man eine Quaternionenmultiplikation analog zur Matrixmultiplikation in Gl. 2.45 [43, 87] zu

$$(q_0, \mathbf{q}) = (q_0, \mathbf{q})^b \circ (q_0, \mathbf{q})^a \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} q_0 &= q_0^b q_0^a - \mathbf{q}^b \cdot \mathbf{q}^a \\ \mathbf{q} &= q_0^b \mathbf{q}^a + q_0^a \mathbf{q}^b + \mathbf{q}^b \times \mathbf{q}^a. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Fasst man nun die 4 Quaternionen in einem Vektor  $\underline{\mathbf{q}} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  zusammen, lässt sich das Quaternionenupdate wie folgt formulieren:

$$\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}^b \circ \underline{\mathbf{q}}^a = \left[ \begin{array}{c|c} q_0^b & -(\mathbf{q}^b)^T \\ \hline \mathbf{q}^b & \hat{\mathbf{q}}^b + q_0^b \mathbf{E} \end{array} \right] \underline{\mathbf{q}}^a =: \mathbf{Q}^b \underline{\mathbf{q}}^a. \quad (2.70)$$

**Normierung der Quaternionen** Besteht eine Simulation aus vielen Einzelrotationen die zu einer resultierenden Rotation zusammengesetzt werden, sind Rechenungenauigkeiten durch Rundungsfehler zu erwarten. Durch diese kann die Rotationsmatrix ihre Orthonormalität verlieren, womit die Ergebnisse nicht mehr korrekt sind. Die Verwendung der Quaternionen bietet die Möglichkeit, die Quaternionen zu normalisieren und damit die Orthonormalität der Rotationsmatrix auch noch nach vielen Einzeldrehungen zu gewährleisten. Dazu korrigiert man die Quaternionen derart, dass die ihre Nebenbedingung 2.59 stets erfüllt bleibt:

$$l = \sqrt{\underline{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{q}}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \longrightarrow \quad q_i \mapsto q_i/l \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.71)$$

### 2.4.3 Beschreibung der Kinetik

In früheren Zeiten (Anfang der 80er Jahre und früher) begann man, die Quaternionen zur Beschreibung von Mehrkörpersystemen zu verwenden. Dies war u.a. in der Raumfahrt nützlich, um die Flugbahnen von Satelliten, Raumkapseln usw. über längere Zeiträume hinweg zu beschreiben. In diesem Zusammenhang wurde auch die zeitliche Ableitung der Quaternionen hergeleitet und die Bewegungsgleichungen von Starrkörpern wurden mit Hilfe derer formuliert[72]. Später realisierte man, dass diese sehr umfangreichen Gleichungen für eine genaue Beschreibung der Kinetik nicht notwendig sind. So verwendet man die Quaternionen heutzutage nur noch, um die Lage eines Körpers im Raum zu beschreiben und um die entsprechende Rotationsmatrix zu formulieren. Alles andere wie zum Beispiel die Bewegungsgleichungen stellt man hingegen durch Drehgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen in Vektorform dar. Dadurch vermeidet man die Singularitätsprobleme, wie sie bei herkömmlichen Rotationsbeschreibungen auftreten, behält zugleich aber die Bewegungsgleichungen in wesentlich einfacherer Form.

### 2.4.3.1 Drehgeschwindigkeit

Verschiedene Drehvektoren  $\boldsymbol{\theta}_i$  können nur addiert werden, wenn sie parallel verlaufen und damit eine Drehung um eine identische Achse beschreiben. Im Normalfall jedoch verändern sukzessive Drehungen auch die Richtung des Drehvektors und erfordern somit die Beschreibung der Drehgeschwindigkeit über eine Differentialgleichung. Die Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  ist deshalb nicht einfach die Ableitung des Drehwinkels  $\boldsymbol{\theta}$ .

Nach Abb. 2.4 ist die Verschiebung eines beliebigen Starrkörperpunkts  $P$  beschreibbar durch die Verschiebung des Starrkörperbezugspunkts und durch die Starrkörperrotation in Zusammenhang mit dem konstantem lokalen Ortsvektor  $\mathbf{x}_P^l$ :

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}_{PS} = \mathbf{x}_S + \mathbf{R} \mathbf{x}_P^l. \quad (2.72)$$

Die absolute Geschwindigkeitsverteilung für die Punkte  $P$  des Starrkörpers ergibt sich für  $\mathbf{x}_P^l = \text{const.}$  ( $\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_P^l = 0$ ) aus der Differentiation nach der Zeit zu

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_S + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{x}_P^l \quad (2.73)$$

mit  $\dot{\mathbf{R}}$  als noch zu ermittelnde Grösse.

Wegen der Orthonormalität der Matrix  $\mathbf{R}$  gilt

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{E} \quad (2.74)$$

und davon die Ableitung nach der Zeit

$$\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = -\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = -(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T)^T. \quad (2.75)$$

D.h., der Ausdruck  $(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T)$  ist eine schiefsymmetrische Matrix. Die drei charakteristischen Koeffizienten dieser Matrix werden nun mit  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  bezeichnet und der entsprechende Vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  sei die Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Damit gelten für die 'Ableitung' der Rotationsmatrix die sogenannten Poissonschen Gleichungen [48]:

$$\dot{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} \quad (2.77)$$

und es ergibt sich für die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}_P$  des Starrkörperpunkts  $P$  in globalen Koordinaten

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_S + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} \mathbf{x}_P^l = \dot{\mathbf{x}}_S + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x}_P = \dot{\mathbf{x}}_S + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_P \quad (2.78)$$

Die letzte Darstellung mit dem Kreuzprodukt entspricht der Definition der Geschwindigkeitsverteilung für die Punkte eines Starrkörpers nach [85].

**Addition von Drehgeschwindigkeiten** Gegeben sei nun die Drehgeschwindigkeit  $\Omega_0$  in globalen Koordinaten sowie eine zusätzliche Drehung des Körpers  $\Delta\mathbf{R}$  mit der Geschwindigkeitsänderung  $\Delta\Omega$ . Aus diesen beiden ergibt sich nun die neue Drehgeschwindigkeit  $\Omega_1$ . Geometrisch kann man sich die Drehgeschwindigkeiten als Relativbewegungen einzelner Koordinatensystem zueinander vorstellen. Das heisst,  $\omega_0$  und  $\omega_1$  beschreiben die Drehgeschwindigkeit des Starrkörpers relativ zum globalen Inertialsystem.  $\Delta\omega$  bezieht sich auf die Bewegung eines 'Δ'-Systems relativ zum '0'-System ausgedrückt in globalen Koordinaten.

Analog zum Vorgehen für lokale Koordinaten in [55, 87] sind die schiefsymmetrischen Matrizen der drei Drehgeschwindigkeiten nach Gl. 2.76 definiert durch

$$\hat{\Omega}_1 = \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T, \quad \hat{\Omega}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0 \mathbf{R}_0^T \quad \text{und} \quad \Delta\hat{\Omega} = \Delta\dot{\mathbf{R}} \Delta\mathbf{R}^T. \quad (2.79)$$

Dafür gilt:

- $\mathbf{R}_0$  = Transformation vom lokalen ins globale System zur Zeit  $t_0$  (Basis  $\underline{e}_0$ )
- $\mathbf{R}_1$  = Transformation vom lokalen ins globale System zur Zeit  $t_1$  (Basis  $\underline{e}_1$ )
- $\Delta\mathbf{R}$  = Transformation vom  $t_0$ - ins  $t_1$ -System (Basis  $\underline{e}_1$ )

Aus der Definition über zusammengesetzte Drehungen in Gl. 2.45 folgt

$$\mathbf{R}_1 = \Delta\mathbf{R} \mathbf{R}_0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_0^T \Delta\mathbf{R}^T \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{R}}_1 = \Delta\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}_0 \quad (2.80)$$

und somit eine Differentialgleichung zur Berechnung von  $\Omega_1$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_1 &= \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T = (\Delta\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}_0) \mathbf{R}_1^T \\ &= \Delta\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0^T \Delta\mathbf{R}^T + \Delta\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}_0 \mathbf{R}_0^T \Delta\mathbf{R}^T \\ &= \Delta\hat{\Omega} + \Delta\mathbf{R} \hat{\Omega}_0 \Delta\mathbf{R}^T \\ \longrightarrow \quad \Omega_1 &= \Delta\Omega + \Delta\mathbf{R} \Omega_0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Infolge der Starrkörperdrehung ändert sich die Winkelgeschwindigkeit in globalen Koordinaten mit der Zeit, demnach muss die ursprüngliche Winkelgeschwindigkeit erst um die erfolgte Drehung  $\Delta\mathbf{R}$  angepasst werden, bevor beide zur neuen Winkelgeschwindigkeit addiert werden können.

Andererseits lässt sich Gl. 2.81 gemäss Gl. 2.43 auch in lokalen Koordinaten formulieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \omega_1 &= \Delta\mathbf{R} \Delta\omega + \Delta\mathbf{R} \mathbf{R}_0 \omega_0 \\ \omega_1 &= \mathbf{R}_1^T \Delta\mathbf{R} \Delta\omega + \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_0 \omega_0 \\ \xrightarrow{\text{Gl. 2.45 \& 2.42}} \quad \omega_1 &= \mathbf{R}_0^T \Delta\omega + \omega_0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Diese Darstellung ist nun bei gegebenen Grössen  $\mathbf{R}_0$  und  $\omega_0$  keine Differentialgleichung mehr, was die Handhabung entsprechend vereinfacht. Auch hier stellt man sich die Drehgeschwindigkeiten am besten als Relativbewegungen zwischen Koordinatensystemen vor. Die  $\omega_i$  beschreiben die Bewegung des globalen Inertialsystems relativ zum Starrkörper.

Hier wird der Vektor  $\Delta\boldsymbol{\omega}$  nun erst durch  $\mathbf{R}_0^T$  zurück ins globale Inertialsystem gedreht, damit er direkt zu  $\boldsymbol{\omega}_0$  addiert werden kann. Das bedeutet, nur wenn sämtliche Relativgeschwindigkeiten bezüglich eines gemeinsamen Koordinatensystems  $I$  formuliert werden, können sie direkt addiert werden.

$${}_I\boldsymbol{\omega}_1 = {}_I\Delta\boldsymbol{\omega} + {}_I\boldsymbol{\omega}_0 \quad (2.83)$$

### 2.4.3.2 Drehbeschleunigung

Analog zur Beschreibung der Drehgeschwindigkeit wird im Folgenden die Drehbeschleunigung ermittelt. Dazu bildet man die Ableitung von Gl. 2.76 zu

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\Omega}}} = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}^T = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\hat{\boldsymbol{\Omega}}^T = \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\hat{\boldsymbol{\Omega}} \quad (2.84)$$

und erhält für die zweite Ableitung der Rotationsmatrix nach der Zeit

$$\ddot{\mathbf{R}} = (\hat{\boldsymbol{\Omega}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}\hat{\boldsymbol{\Omega}})\mathbf{R} = (\hat{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T - \boldsymbol{\Omega}^T\boldsymbol{\Omega}\mathbf{E})\mathbf{R}. \quad (2.85)$$

### 2.4.4 Starrkörperdynamik

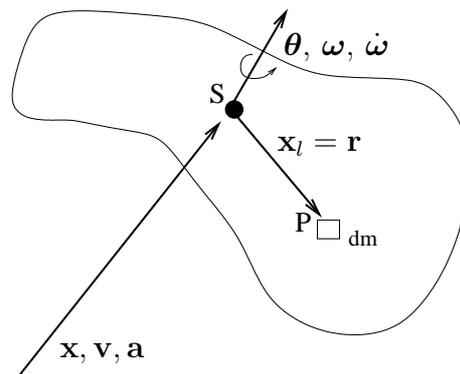


Abbildung 2.9: Relevante Größen zur Bestimmung des Massenträgheitsmoments

Abb. 2.9 zeigt einen Starrkörper mit seinem Bezugspunkt  $S$ . Die Masse  $m$  des Körpers sei in diesem Schwerpunkt konzentriert. Die translatorische Bewegung des Starrkörpers wird durch die Lagekoordinaten  $\mathbf{x}$  beschrieben. Die translatorische Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ergeben sich demnach aus der Ableitung von  $\mathbf{x}$  nach der Zeit zu  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}$ . Ebenso beschreibt  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$  die Winkelbeschleunigung der Starrkörperrotation  $\mathbf{q}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$ . Der Verbindungsvektor vom Körperschwerpunkt  $S$  zum beliebigen Körperpunkt  $P$  in lokalen Koordinaten sei  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_P^l$ .

#### 2.4.4.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie eines Körpers bestimmt sich aus der absoluten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  seiner verteilten Masse. Die absolute Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_m$  eines einzelnen Masseanteils an

der Stelle  $P$  ermittelt sich wiederum aus der Translation und der Drehgeschwindigkeit des gesamten Körpers.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_m \dot{\mathbf{v}}_m^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\mathbf{v}_m + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m)^2 dm \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \mathbf{v} \int_m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm + \frac{1}{2} \int_m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 dm \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \int_m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 dm \quad (2.87)$$

Der erste Teil der sich ergebenden Gleichung entspricht der translatorischen kinetischen Energie eines Körpers. Die translatorische Geschwindigkeit ist für alle Massenanteile konstant, somit lässt sich die Massenmatrix als skalare Grösse verwenden. Den Term  $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  kann man sich vorstellen als die Trägheit eines Massenanteils bezüglich der momentan tangentialen Komponente der Kreisbewegung. Auf Grund der Massensymmetrie des Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt verschwindet der mittlere Teil von Gl. 2.86. Der dritte Teil stellt somit den rein rotatorischen Anteil der Bewegung dar. Die Lösung dieses Integrals

$$\begin{aligned} \int_m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 dm &\stackrel{[96]}{=} \int_m \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] dm \\ &\stackrel{\text{Gl. 2.54}}{=} \int_m \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T] \cdot \boldsymbol{\Omega} dm. \end{aligned} \quad (2.88)$$

führt nun zum polaren Massenträgheitsmoment  $\mathbf{J}_{(t)}$ , mit dem die Trägheit eines beliebig geformten Körpers bezüglich Drehbewegungen ausgedrückt werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist für den gesamten Körper konstant ( $d\boldsymbol{\Omega}/dm = 0$ ) und damit gilt für das Massenträgheitsmoments eines homogenen Körpers in lokalen Koordinaten

$$\mathbf{J} := \int_m (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) dm = \rho \int_m (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) dV. \quad (2.89)$$

In lokalen Koordinaten ausgedrückt bleibt der Trägheitstensor  $\mathbf{J}$  konstant, da sich das lokale Inertialsystem mit dem Körper mitdreht. Ist die Drehgeschwindigkeit jedoch in globalen Koordinaten gegeben, muss für die Berechnung der kinetischen Energie ein mit lokalen Koordinaten ermittelter Trägheitstensor nach Gl. 2.44 ebenfalls in globale Koordinaten oder der globale Drehgeschwindigkeitsvektor in lokale Koordinaten umgerechnet werden:

$$\mathbf{J}_{(t)} = \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{R}^T \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.90)$$

Der globale Trägheitstensor ist demnach keine über die Zeit konstante Matrix und er muss dementsprechend immer der aktuellen Lage des Körpers im Raum angepasst werden. Zudem gilt für seine Ableitung nach der Zeit  $\dot{\mathbf{J}}_{(t)} = \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{J}_{(t)} - \mathbf{J}_{(t)} \hat{\boldsymbol{\Omega}}$  [48]<sup>8</sup>, während die Ableitung des lokalen Massenträgheitsmoments nach der Zeit gleich null ist. Aus diesem Grund bietet es sich eher an, die Drehgeschwindigkeit hier in lokalen Koordinaten zu verwenden.

<sup>8</sup>Zwischen der Zeitableitung  $d/dt$  eines Vektors  $\mathbf{e}$  bezüglich eines raumfesten Systems und der Ableitung nach der Zeit eines sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  sich drehenden bewegten Systems  $d^*/dt$  besteht der Zusammenhang  $d\mathbf{e}/dt = d^* \mathbf{e}/dt + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}$ .

Somit ergibt sich für die kinetische Energie des Starrkörpers

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.91)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.92)$$

Für den Fall einer Rotation um eine gleich bleibende Drehachse  $\boldsymbol{\theta}$  lässt sich das Massenträgheitsmoment für diesen Vektor ermitteln und als skalare Konstante zur Bestimmung der kinetischen Energie verwenden. Genauso verfährt man, wenn das Massenträgheitsmoment invariant bezüglich der Orientierung des Körpers im Raum ist. In diesen Fällen gilt schliesslich

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}J_0\boldsymbol{\omega}^2. \quad (2.93)$$

#### 2.4.4.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für einen Starrkörper lassen sich sowohl analytisch mit Hilfe der Lagrange-Koordinaten als auch durch den synthetischen Freischnitt des Körpers nach d'Alembert aufstellen [48].

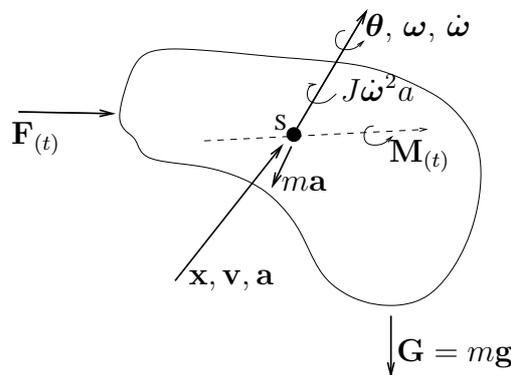


Abbildung 2.10: Auftretende Belastungen und Beschleunigungen am Starrkörper

Im hier behandelten Fall werden die Bewegungsgleichungen anhand des dynamischen Gleichgewichts bezüglich des Schwerpunkts in globalen Koordinaten ermittelt.  $\mathbf{F}_{(t)}$  sowie  $\mathbf{M}_{(t)}$  in Abb. 2.10 stehen für die Kraft- und Momenteinwirkung auf den Schwerpunkt. Die Momente  $\mathbf{M}_i$  resultieren aus den am Starrkörper angreifenden Kräften  $\mathbf{F}_i$  und deren Verbindungsvektoren  $\mathbf{r}_i$  vom Körperbezugspunkt zum Kraftangriffspunkt:

$$\mathbf{M}_{(t)} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (2.94)$$

Hierbei spielt es keine Rolle, ob die Wirkungslinie einer Kraft parallel zum Verbindungsvektor ebenfalls durch den Bezugspunkt verläuft. Das Kreuzprodukt ergibt für einen solchen Fall ein Moment  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . Zu den einwirkenden Kräften zählen Zwangskräfte,

zusätzlich aufgebrachte Lasten und die Gewichtskraft. Es werden keine viskosen Dämpfungskräfte angesetzt, welche bei der Herleitung der Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit berücksichtigt werden müssten.

Auf Grund des ersten Schwerpunktsatzes gilt, dass sich der Körper so bewegt, als ob alle Kräfte im Schwerpunkt angreifen und die gesamte Masse in ihm konzentriert ist [48]. Damit erhält man die ersten drei Bewegungsgleichungen zu

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{(t)}. \quad (2.95)$$

Die restlichen drei Bewegungsgleichungen erhält man analog aus dem Momenten- oder Drallsatz. Die Zeitableitung des Drehimpulses muss dabei mit den einwirkenden Momenten im Gleichgewicht stehen. Der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ergibt sich aus dem polaren Massenträgheitsmoment des Körpers und seiner Winkelgeschwindigkeit zu  $\mathbf{L} = \mathbf{J}_{(t)}\boldsymbol{\Omega}$ . Somit erhält man die Eulerschen Gleichungen zu

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{(t)}\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{J}_{(t)}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}_{(t)}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{J}_{(t)}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{J}_{(t)}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}_{(t)}. \quad (2.96)$$

Gl. 2.96 mit der Drehgeschwindigkeit in lokalen Koordinaten lautet mit Hilfe der Beziehungen  $\mathbf{J}_{(t)} = \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\Omega}$  und  $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}^T\hat{\mathbf{R}}$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T\mathbf{M}_{(t)}. \quad (2.97)$$

Für diese Differentialgleichungen lassen sich für bestimmte Fälle die Lösungen direkt angeben [96]. Im nachfolgenden Abschnitt wird nach [22] ein Verfahren vorgestellt, mit dem die Gleichungen numerisch gelöst werden.

### 2.4.5 Zeitintegration räumlicher Rotationen

Für den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung verfährt man genauso wie es weiter vorne in diesem Kapitel bereits für volumenlose Punktmassen beschrieben wurde. Die Drehbewegung eines Starrkörpers lässt sich numerisch mit einer expliziten Zeitintegration nach der Methode der zentralen Differenzen analog zur Zeitintegration für rein translatorische Bewegungen lösen. Man nimmt die Drehbeschleunigung und Drehgeschwindigkeit über ein Zeitintervall  $\Delta t$  jeweils als konstant an. Damit bestimmt man also aus der aktuellen Drehbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  zur Zeit  $t = t_0$  und der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{t_0-\Delta t/2}$  die für das nächste Zeitintervall als konstant angenommene Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{t_0+\Delta t/2}$ .

Aus Gl. 2.97 ergibt sich aus der Umkehrbarkeit von  $\mathbf{J}$  für die aktuelle Drehbeschleunigung

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{R}^T\mathbf{M}_{(t)} - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{t_0-\Delta t/2}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{t_0-\Delta t/2}) \quad (2.98)$$

und damit für die neue Drehgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega}_{t_0+\Delta t/2} = \boldsymbol{\omega}_{t_0-\Delta t/2} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\Delta t. \quad (2.99)$$

Eine über die Zeit  $\Delta t$  konstante Winkelgeschwindigkeit resultiert bei kleinen Zeitintervallen in einer Eulerschen Verdrehung des Körpers um

$$\Delta\theta = \mathbf{R} \Delta\theta^l = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega} \Delta t \quad (2.100)$$

Aus dieser Verdrehung lässt sich nun gemäss Gl. 2.49 und Gl. 2.57 eine entsprechende Rotationsmatrix  $\Delta\mathbf{R}$  bilden, welche nach der Vorschrift  $\mathbf{R}_{t_1} = \Delta\mathbf{R} \mathbf{R}_{t_0}$  die neue Rotation beschreibt. Alternativ lassen sich aus  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  nach Gl. 2.58 auch die Quaternionen  $\Delta\mathbf{q}$  gewinnen, mit Hilfe derer und der Definition des Quaternionenupdates aus Gl. 2.70 sich die aktuelle Lage des Starrkörpers durch die Eulerparameter ausdrücken lässt. Diese haben den Vorteil, dass sie -wie auf Seite 27 beschrieben- normiert werden können und somit die sich bei vielen Zeitintegrationsschritten ansammelnden Rundungsfehler weitgehend eliminiert werden können.

### **3 Simulation von Verbauungskomponenten mit diskreten Elementen**

## 3.1 Ringnetze

Ein wesentlicher Bestandteil der untersuchten Steinschlagschutzverbauungen sind die in diesem Kapitel behandelten Ringnetze. Entstanden sind die heutigen sogenannten Rocco-Ringnetze aus den alten ASM-Unterwassernetzen<sup>1</sup>, mit denen im zweiten Weltkrieg die Hafeneinfahrten vor feindlichen Torpedos und Unterseebooten geschützt werden konnten. Wurden die Netze damals noch von Hand gefertigt, so ermöglichen die heutigen Herstellungstechniken eine effiziente maschinelle Fertigung.

Mit der Modellierung der Ringcharakteristiken befassen sich nun die folgenden Abschnitte. Dabei werden zunächst der Aufbau der Ringnetze und das Tragverhalten der Ringe beschrieben. Die zu den Ringnetzen bereits existierende Forschung wird kurz erläutert, um im Anschluss daran ein effizientes Ringmodell zur raschen numerischen Berechnung bei ausreichender Genauigkeit vorzustellen.

### 3.1.1 Aufbau der Ringnetze

Die Ringnetze bestehen aus lose zusammenhängenden Drahringen. Die Ringe selbst sind aus einem einzigen zu  $n_w$  Windungen gebogenen Draht aus hochfestem Stahl gefertigt. Durch die Variation der Ringwindungen erhält man unterschiedliche Netzstärken. Die einzelnen Ringwindungen werden pro Ring durch drei Metallklammern wie ein einzelner Drahtstrang zusammengehalten.

Die Anzahl der eingesetzten Ringe bestimmt sich durch die Anordnung der sogenannten Haupt- und Nebenreihen (siehe Abb. 3.2). In der Praxis werden die Ringnetze in der Regel so eingesetzt, dass sich in den Ecken jeweils ein Ring befindet (sogenannte Hauptreihenordnung). Bei den innerhalb dieses Projekts durchgeführten Ringnetzversuchen [39] befinden sich in den Ecken keine Ringe (sog. Nebenreihenordnung). Mischformen treten in der Regel nicht auf.

Im Gegensatz zum Innenring eines ASM-Netzes mit jeweils sechs Nachbarringen hat ein Rocco-Innenring vier Nachbarringe, die dazugehörigen Randringe eines Netzes nur deren zwei und die Eckringe nur jeweils einen. Die Berührungspunkte der inneren Ringe sind gleichmässig auf den Ringumfang verteilt, weswegen diese im unbelasteten Zustand die Eckpunkte eines Quadrates bilden. Die Rand und Eckringe besitzen jeweils drei Berühr- und Kontaktpunkte mit den Nachbarringen bzw. den Tragseilen der Verbauung, welche im unbelasteten Zustand ein gleichschenkliges Dreieck aufspannen (siehe Abb. 3.3)

### 3.1.2 Tragverhalten der Netzringe

Besonders an den Ringnetzen ist ihr loses Gefüge, sodass die Ringe ihre Lage zueinander variieren können (siehe Abb. 3.4). Dadurch bleibt das Netz sehr flexibel und durch eine optimale Ausrichtung der Ringe bezüglich des Kraftflusses beim Steinschlagereignis sehr

---

<sup>1</sup>ASM=AntiSubMarine

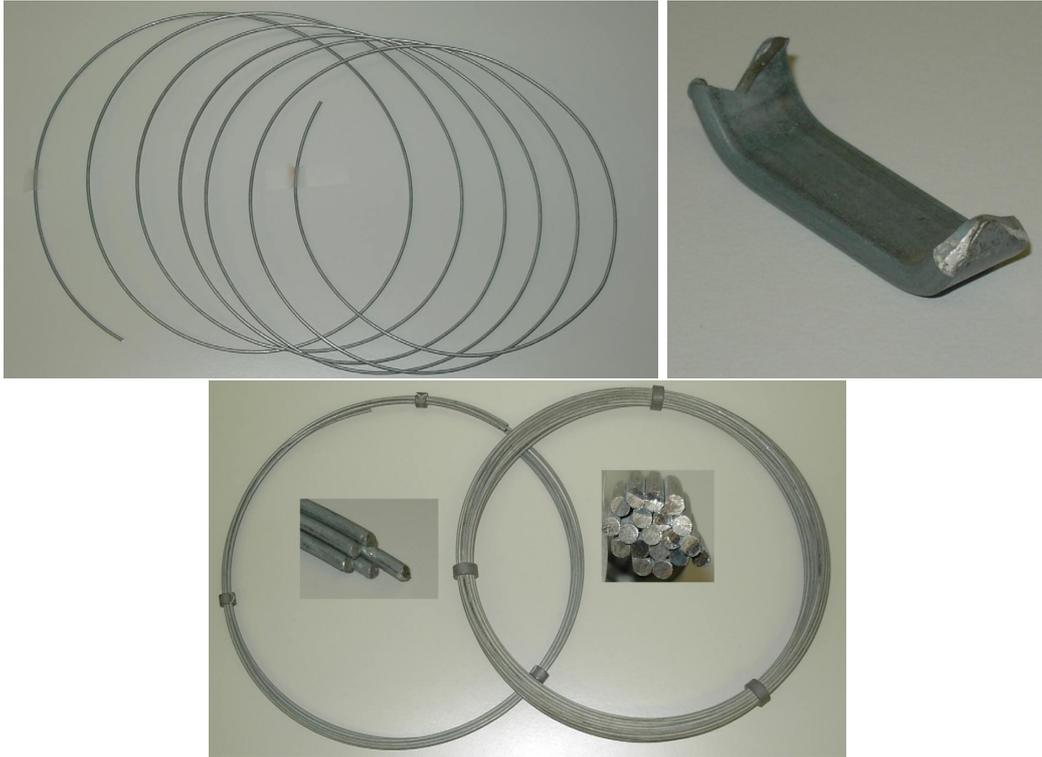


Abbildung 3.1: (links) Komponenten eines Netzrings: Ein zu mehreren Windungen gebogener Draht wird durch Klammern zu einem stabilen Ring, (rechts) Rocco-Netzringe mit  $n_w = 5$  und  $n_w = 19$  Windungen mit dem jeweiligen Querschnitt

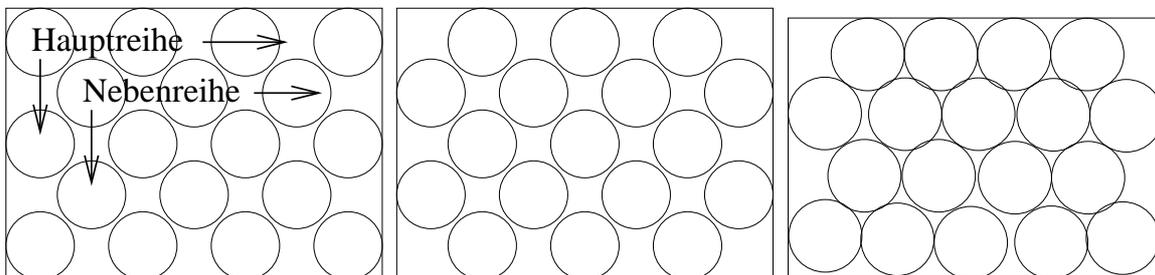


Abbildung 3.2: Anordnung der Netzringe innerhalb der Ringnetze mit (links) Hauptreihen, (Mitte) Nebenreihen an den NetZRändern und (rechts) bei Verwendung von 6-fach verhängten ASM-Netzen

tragfähig im Vergleich zu herkömmlichen Steinschlagverbauungen mit weniger flexiblen Netzen. Verwendet man zum Beispiel ein nur an zwei Seiten festgehaltenes Ringnetz, so richten sich die Ringe derartig aus, dass nur Kräfte zwischen den festen Rändern und nicht quer dazu übertragen werden. Es stellt sich somit eine quasi einachsige Belastung des Netzes ohne eine zu berücksichtigende Flächentragwirkung ein. Nachteil des grossen Netzverformungsvermögens ist die nichttriviale numerische Simulation, welche solcherlei Effekte berücksichtigen muss.

Neben der geometrischen Ausrichtfähigkeit und damit dem Tragverhalten im Netzverbund ist noch das Last-Verformungsverhalten eines einzelnen Rings relevant. Die Ringe können dabei nur auf von aussen aufgebraachte Zugkräfte reagieren. Charakteristisch ist

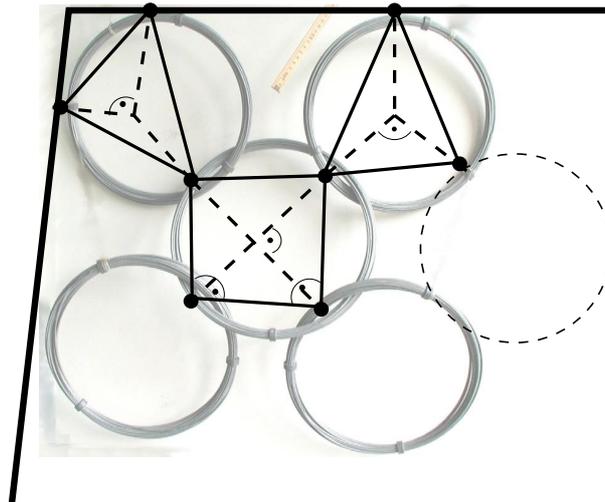


Abbildung 3.3: Anordnung der Rocco-Ringe im Ringnetz: Im Feldinnern mit vier, am Rand und in der Ecke mit jeweils drei Berührungspunkten



Abbildung 3.4: Belastung und Verformungsfiguren zu Zwei-, Drei- und Vierecken der Netzringe bei ein- und zweiachsiger Beanspruchung

dabei, dass zu Beginn des Verformungsvorgangs der Ring unter grossen Verformungen nur wenig Widerstand entgegensetzen kann. Er verformt sich praktisch nur auf Grund von Biegung. Erst nach vollständiger Streckung der gekrümmten ehemals Kreisstücke wechselt die Widerstandsart derart, dass sie mit einem normalen Zugstab vergleichbar wird (siehe Abb. 3.5). Für eine Beschreibung des Verhaltens wird die Diagrammkurve darum in vier Abschnitte eingeteilt. Im ersten verformt sich der Ring vollkommen elastisch nur auf Biegung. Die wirkenden Normalkräfte sind dabei so klein, dass sie vernachlässigt werden können. Dies gilt auch für den zweiten Abschnitt, in dem die Biegung plastische Verformungen hervorruft. Während einer Übergangsphase werden die Ringsegmente dann so gestreckt, dass im letzten Abschnitt bis zum Bruch nur noch der Widerstand des Stahlquerschnitts auf Zug massgebend wird.

Die Belastung und Reaktion eines einzelnen Rings kann als ein allein zweidimensionales

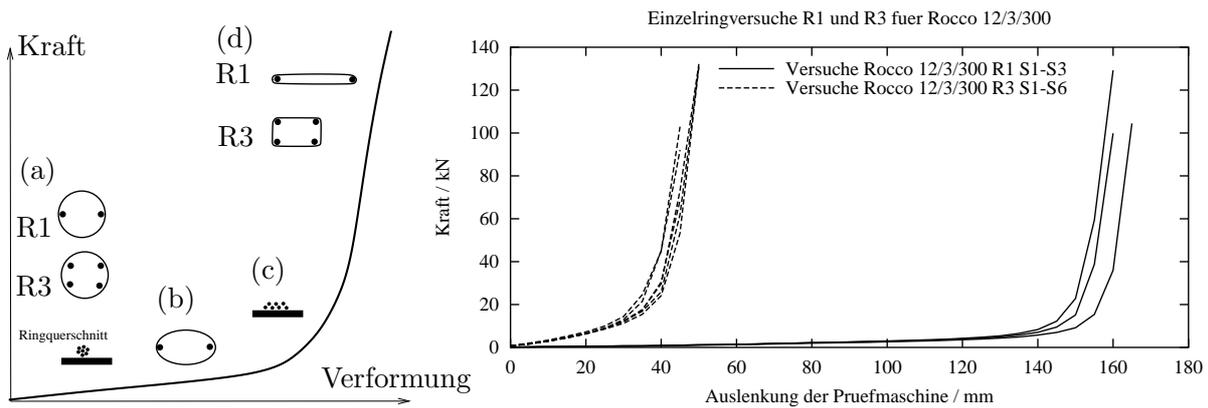


Abbildung 3.5: Qualitative Einteilung des charakteristischen Last-Verformungsverhaltens eines Drahtlings: (a) rein elastisch auf Biegung, (b) elastisch-plastisch auf Biegung, (c) Übergangsbereich mit Neusortierung der einzelnen Drähte im Querschnitt und (d) reine Zugbeanspruchung bis zum Bruch. Rechte Seite Lastverformungsdiagramm der Versuche R1 und R3 nach [39] für die Ringe Rocco 12/3/300

Problem aufgefasst werden. Für die Randringe mit jeweils drei Kontaktpunkten ergibt sich die Ringebene aus diesen Koordinaten. Durch die lose Anordnung der Ringe im Netz richten sich auch die Netzzinnenringe innerhalb des Ringnetzes immer so aus, dass keine oder nur eine geringe Verformung ausserhalb der Ringebene auftritt. Allein im unmittelbaren Kontaktbereich zwischen Steinschlag und Verbauung können bedingt durch die Steingeometrie entsprechende Verformungen der Ringe auftreten. Dieser Lastfall tritt jedoch nur bei ein paar wenigen Ringen auf und wird vernachlässigt. Ist der Stein zudem noch kugelförmig und damit kantenlos wie in den durchgeführten Steinschlagexperimenten, ist eine flächennormale Verformung der Ringe praktisch nicht auszumachen.

### 3.1.2.1 Biegeverformung

Die Biegesteifigkeit des Ringquerschnitts lässt sich durch analytische Methoden nicht eindeutig definieren. Dies liegt daran, dass sich bei einer Biegebelastung die einzelnen Drahtwindungen zueinander verschieben, aber auf Grund der Halteklammern und der Reibung der einzelnen Windungen untereinander für diese Verschiebungen nicht komplett frei sind. Darum lassen sich die Ringe weder mit einem äquivalenten flächengleichen Kreisquerschnitt noch mit einem aus mehreren Einzelquerschnitten zusammengesetzten Profil vergleichen. Auch die Summe der Flächenträgheitsmomente der einzelnen Drähte liefert eine ungenügende Beschreibung der Biegesteifigkeit für die verschiedenen Windungszahlen.

Bei der Produktion der Netzzringe wird der Stahldraht so vorgeformt, dass der fertige Ring in sich spannungsfrei bleibt. D.h., die Metallklammern tragen in diesem Zustand keinerlei Last. Dies lässt sich einfach nachweisen, indem man von einem unbelasteten Ring an einer Stelle alle Drahtwindungen durchtrennt. Es ist keine Verformung desselben auszumachen.

Anders jedoch bei den plastisch verformten Ringen. Abb. 3.6 zeigt einen belasteten Ring im Vergleich zu einem unbelasteten sowie drei Ringe, die nach ihrer Belastung durch-

trennt wurden. Deutlich ist zu sehen, dass in den verformten Ringen eine elastische Biegung gespeichert ist, welche freigesetzt wird, sowie der Ring ohne seine Ringnormalkrafttragwirkung dieser Biegung nichts mehr entgegenzusetzen hat: Die Ringe scheinen sich zusammenzuziehen. Die belasteten Ringe wurden in den Eckpunkten fließgelenkartig zu einer stärkeren Krümmung verformt und in den Zwischensegmenten elastisch-plastisch aufgebogen. Der elastische Anteil der Segmentaufbiegung entspannt sich nach Öffnung des Rings wieder. Dieser Effekt wäre auch quantitativ durch entsprechende Messungen



Abbildung 3.6: Darstellung der Biegeverformung: (links) Unbelasteter und zu einem Viereck verformter Ring und (rechts) drei verformte und anschliessend an verschiedenen Stellen durchtrennte Netze (Ringe 1 und 2 waren jeweils zu einem Viereck und Ring 3 zu einem Zweieck verformt)

der Verformungen nach dem Aufschneiden gut erfassbar. Da das Ringnetz bei einer Belastung jedoch in der Regel nicht zerstört wird, wird diese elastische Energie vom Ringnetz nach seiner Entlastung nicht wieder freigegeben. D.h., man kann ohne Verlust an Genauigkeit die gesamte Biegeverformung eines elastisch-plastisch verformten Rings auch als rein plastisch vernichtete Energie betrachten.

Die Öffnung eines bislang unbelasteten Rings mit dem Durchmesser  $d = 2r$  ermöglicht jedoch zusätzlich eine einfache und normalkraftfreie Ermittlung des Flächenträgheitsmoments  $I_R$  des Drahtbündels auf Biegung ohne Verfälschung der Anordnung der einzelnen Drähte. Die ist eine charakteristische Grösse der Ringe, die in der Form bislang noch nicht experimentell untersucht wurde. Abb. 3.7 zeigt die aufzubringende Belastung und die zu messende Öffnung des Kreisrings  $u = 2x$  mit der angenommenen Momentenverteilung.

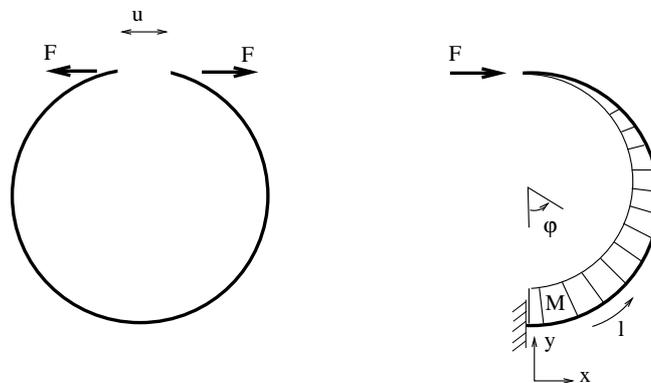


Abbildung 3.7: Experimentelle Ermittlung des Flächenträgheitsmoments eines Ringquerschnitts

Für kleine Verformungen gilt damit

$$x = r \sin \varphi, \quad y = r(1 - \cos \varphi) \quad \text{und} \quad l = r \varphi \rightarrow dl = r d\varphi. \quad (3.1)$$

Das Biegemoment verteilt sich über den Kreisring nach

$$M_{(\varphi)} = F(2r - y_{(\varphi)}) = F r (1 + \cos \varphi) \quad (3.2)$$

und mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte erhält man als Ansatz zur Berechnung der Ringöffnung

$$\begin{aligned} \frac{u}{2} &= \int_0^{r\pi} \frac{M \bar{M}}{E I_R} dl = \int_0^\pi \frac{M \bar{M}}{E I_R} r d\varphi = \frac{F r^3}{E I_R} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3 F r^3 \pi}{2 E I_R} \\ \rightarrow I_R &= \frac{3 F r^3 \pi}{E u} \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.2.2 Normalkraftbelastung

Das Versagenskriterium des Rings ist nicht die Bruchlast des gesamten Stahlquerschnitts, sondern vielmehr der Bruch einzelner Windungsdrähte [35]. Dieser Bruch hängt stark davon ab, wie sich die einzelnen Drähte im Übergangsbereich aus Abb. 3.5 zueinander anordnen und wie sich dementsprechend die Kräfte und damit Spannungen und Dehnungen auf die einzelnen Drähte verteilen. Daher ist es nicht sinnvoll, für die Versagenslast oder die Bruchdehnung theoretische Werte zu ermitteln. Sie sollten eher durch eine gross angelegte Versuchsreihe ermittelt werden, welche eine stochastische Auswertung der Ergebnisse ermöglicht. Geeignete Versuche an einzelnen Ringen oder Ringgruppen dazu sind in [35] beschrieben.

Dennoch wäre die durch solche Experimente gefundene Bruchlast bei realen Steinschlagexperimenten immer noch sehr schwer zu überprüfen, da lokale Effekte bei Belastung durch eine Steinkante oder ungewöhnliche Ringbelastungen einen zu grossen Einfluss auf die Bruchlast haben. Auch die Belastungsgeschwindigkeit spielt hierbei eine Rolle. So wird später gezeigt, dass die dynamische Bruchlast deutlich über der quasistatisch ermittelten liegt.

Ausserdem sind die Steinschlagbarrieren meist so dimensioniert, dass der Bruch der Netze eben nicht auftritt, sodass auch praktisch alle bisher durchgeführten Versuche keine Rückschlüsse auf die tatsächlichen Bruchlasten der Netze zulassen.

### 3.1.3 Anforderungen an ein finites Ringelement

Ziel einer erfolgreichen Netzmodellierung ist es nun, über die Entwicklung eines geeigneten Ringelements die wesentlichen Eigenschaften der Ringe zu erfassen. Dazu gehören im einzelnen

1. Neuausrichtung der Ringe gemäss ihrer Belastung. Das bedeutet, dass sich die Kontaktstellen der Ringe untereinander jeweils auf den Ringen verschieben können

müssen. Dieser Effekt tritt vornehmlich zu einem Zeitpunkt auf, während dessen die Ringe nur sehr gering und vornehmlich nur auf Biegung belastet werden. Dadurch sind die auftretenden Kräfte an den Kontaktstellen vergleichsweise gering und die bei Gleiteffekten zu berücksichtigende Reibung ist nicht relevant. Dies zeigt auch die Auswertung des später beschriebenen 8-Knoten-Ringelements nach [39]. Der Gleiteffekt tritt nicht mehr auf, wenn sich der Ring plastisch zu einem Zwei-, Drei- oder Viereck verformt hat.

2. Bedingt durch das Gefüge der Ringe im Netzverbund können die Ringe selbst nur Zugkräfte übertragen. D.h. Elementkräfte dürfen nur entstehen, wenn sich die Abstände der Elementknoten zueinander vergrößern.
3. Bis zu einem gewissen Grad der Verformung leistet der Ring praktisch allein Biege-  
widerstand.
4. Erst ab einem gewissen Grad der Biegeverformung sind die einzelnen Ringsegmente  
derart gestreckt, dass sich die Last-Verformungskurve derjenigen eines reinen Zug-  
stabes annähert.
5. Das Versagen der Ringe definiert sich durch eine maximale Bruchlast, welche den  
Anstieg der Zugstabverformungskurve nach oben begrenzt. Wegen der unterschied-  
lichen Beanspruchung der einzelnen Drahtwindungen orientiert sich die Bruchlast  
jedoch nicht an der Bruchdehnung des Materials.
6. Die im Rahmen des Forschungsprojekts behandelten Rocco-Ringe haben einen  
Durchmesser von  $d_{Ring} = 30 \text{ cm}$  bei einer Drahtdicke von  $t_{Draht} = 3 \text{ mm}$ . Die Anzahl  
der Drahtwindungen beträgt  $n_w = 5, 7, 12, 19$ . Der Draht besteht aus hochfestem  
Stahl mit einer Bruchspannung von  $\sigma_{Bruch} = 1770 \text{ N/mm}^2$  bei einem Elastizitäts-  
modul  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ .  
Für eine sinnvolle Nutzung des Simulationsprogramms sollte es auch möglich sein,  
Ringe mit unterschiedlichen Windungszahlen oder anderen Geometrien oder Mate-  
rialkennwerten zu simulieren.

#### 3.1.4 Bereits entwickelte Modelle von Ringelementen

Zur Bestimmung des numerischen Verhaltens eines einzelnen NetZRings und einer Gruppe von Ringen existieren bislang zwei Modelle von Nicot [71, 66, 67, 68, 65] und von Grassl [37, 39]. Beide Ansätze liefern bei den jeweils simulierten Modellen gute Ergebnisse. Der Aufbau und die Charakteristiken der Ansätze werden in den beiden nachfolgenden Unterabschnitten kurz erörtert.

##### 3.1.4.1 Modellierung von ASM-Ringen nach Nicot

Nicot modelliert weniger die Ringe an sich, sondern charakterisiert in seinem Modell jeden einzelnen Ring durch dessen Mittelpunkt und bestimmt über Stabelemente mit einem nichtlinearen Materialgesetz die Interaktion dieses Mittelpunktes mit den Mittelpunkten

der Nachbarringen (siehe Abb. 3.8). Durch die gelenkige Lagerung der einzelnen Stäbe lässt sich so zusätzlich das Gleitverhalten der einzelnen Ringe zueinander elegant berücksichtigen. Das Modell benötigt nur einen Knoten pro Ring und hat damit eine reduzierte Anzahl an zu lösenden Unbekannten. Demgegenüber steht die erhöhte Anzahl an Elementen für jede Berührstelle von zwei Ringen oder mit einem Randseil, wobei bei letzterer Verbindung ein eigenes Materialgesetz eingesetzt werden muss.

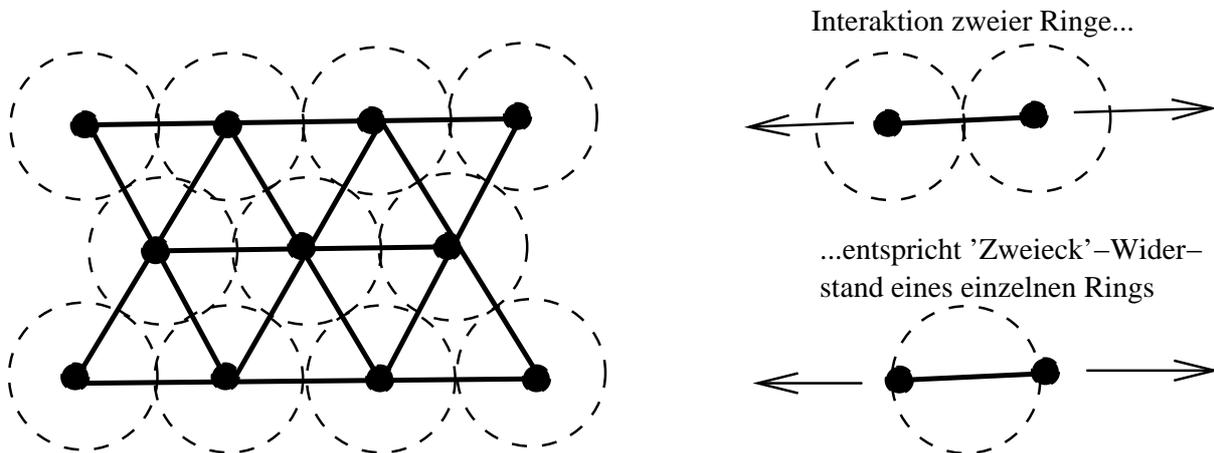


Abbildung 3.8: Charakteristische Interaktion mit den Nachbarringen nach Nicot für ASM-Netze

Es wird hier auf Grund der Symmetrielinie zwischen den beiden Ringen angenommen, dass sich beim Auseinanderziehen zweier ineinander hängender Ringe der gleiche Widerstand aufbaut, als wenn man einen einzelnen Ring zu einem sogenannten Zwei-Eck verformt. Die variierende Steifigkeit dieses Stabelementes wird in [67] angegeben, wobei auch hier die Biegesteifigkeit und Bruchlast eines Rings nicht direkt berechnet werden konnte. Experimente sind zur Bestimmung dieser Werte notwendig.

### 3.1.4.2 Modellierung von Rocco-Ringen nach Grassl

Grassl modelliert die Ringelemente durch 8-Knoten-Elemente, wie sie in Abb. 3.9 dargestellt sind. Der Elementtyp wurde in das in dieser Arbeit vorgestellte Simulationsprogramm FARO implementiert, womit dann auch die entsprechenden Berechnungen durchgeführt wurden. Auf Grund der hohen Elementknotenzahl erhöht sich die benötigte Rechenzeit während der Simulation dementsprechend, da die Zwischenknoten nur Bestandteil eines einzigen Elements und für das Gesamtnetz somit nicht von Bedeutung sind. Jedoch sind die Zwischenknoten bei der Kontaktbeziehung zwischen Stein und Netz von Vorteil, da sich die Ringe durch die erhöhte Kontaktknotenanzahl besser um den Stein legen und die Elementverbindungslien den Stein nicht durchschneiden (siehe Beschreibung von Knoteneindringungsmechanismen auf Seite 72).

Zwischen den einzelnen Knoten befinden sich immer einzelne Stabelemente, welche die Zugsteifigkeit des Rings übernehmen. Ist einer der Knoten ein Verbindungsknoten zu einem anderen Element in der Simulation, so erhalten die beiden benachbarten Stäbe

immer die gleiche Normalkraft. Damit wird ein Rutschen des Knotens auf den beiden Stäben ermöglicht, ähnlich dem Prinzip, wie es in Abschnitt 3.2 beschrieben wird.

Die Biegetragfähigkeit des Netzrings wird durch Drehfedern in den einzelnen Knoten simuliert. Da die Knoten keine Rotationsfreiheitsgrade haben, wird das durch die Drehfedern aufgenommene Moment durch äquivalente Kräftepaare ersetzt, welche auf den 'Drehknoten' und auf die jeweiligen Nachbarknoten wirken.

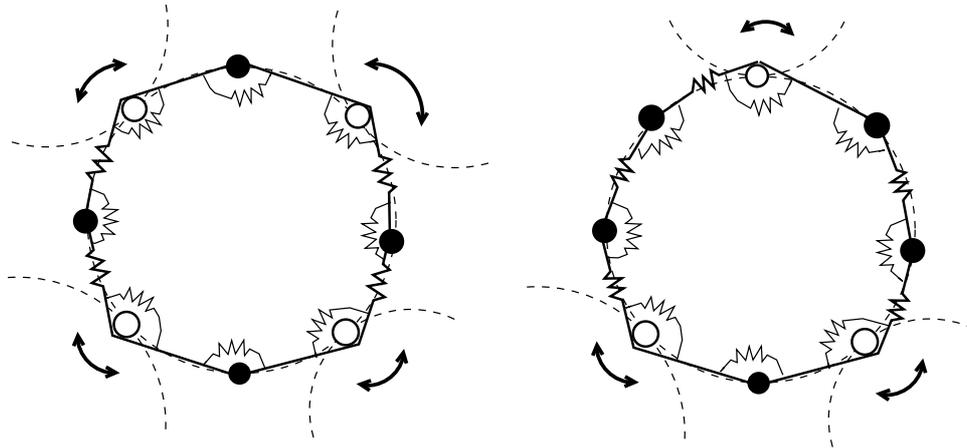


Abbildung 3.9: 8-Knoten-Element mit (links) vier und (rechts) drei gleitenden Zwischenknoten nach Grassl

Die charakteristischen Größen für die Ringeigenschaften werden nach [39] mit einem iterativen Schema anhand der Ergebnisse von quasistatischen Laborversuchen nach [35] kalibriert und anschliessend mit den Ergebnissen der dynamischen Feldversuche verifiziert.

Dieses Ringmodell für die Rocco-Ringe liefert sehr gute Resultate bezüglich des Tragverhaltens in der Verbauung. Da die Bruchlasten der Ringe in den dynamischen Versuchen nur schwer bzw. eigentlich unmöglich verifiziert werden können, beinhaltet dieses Ringmodell keine Bruchlastcharakteristik, d.h. die Ringe können auf Zug theoretisch unendlich hohe Kräfte tragen. Des Weiteren reagieren die 8-Knoten-Ringelemente relativ schwingungsempfindlich auf Druckkräfte bzw. übertragen auch Druckkräfte im Netzverbund, was durch den losen Ringverbund physikalisch nicht gegeben ist.

#### 3.1.5 Entwicklung eines diskreten 4-Knoten-Ringmodells

Im folgenden Teil wird nun ein diskretes finites Element zur Beschreibung von Ringelementen vorgestellt. Es genügt den in 3.1.3 erwähnten Kriterien. Des Weiteren soll es einfach kalibrierbar und durch die Verwendung von einfachen Mechanismen schnell berechenbar sein. Letzteres vor allem, da innerhalb einer Steinschlagverbauung die Ringe zahlenmässig am häufigsten vertreten sind und sich eine Optimierung der entsprechenden Elementalgorithmen spürbar positiv auf die Rechenzeit auswirkt.

Für das Ringmodell wird nun zuerst das mechanische Modell mit den charakteristischen Größen vorgestellt und anhand der Versuchsergebnisse kalibriert. Es wird gezeigt, dass das Kalibrierungsverfahren sehr gut eingesetzt werden kann, um weitere Drahringe (z.B.

mit unterschiedlichem Durchmesser oder anderer Drahtdicke oder aus anderen Materialien bestehend) für dynamische Simulationen zu verwenden.

### 3.1.5.1 Mechanisches Modell

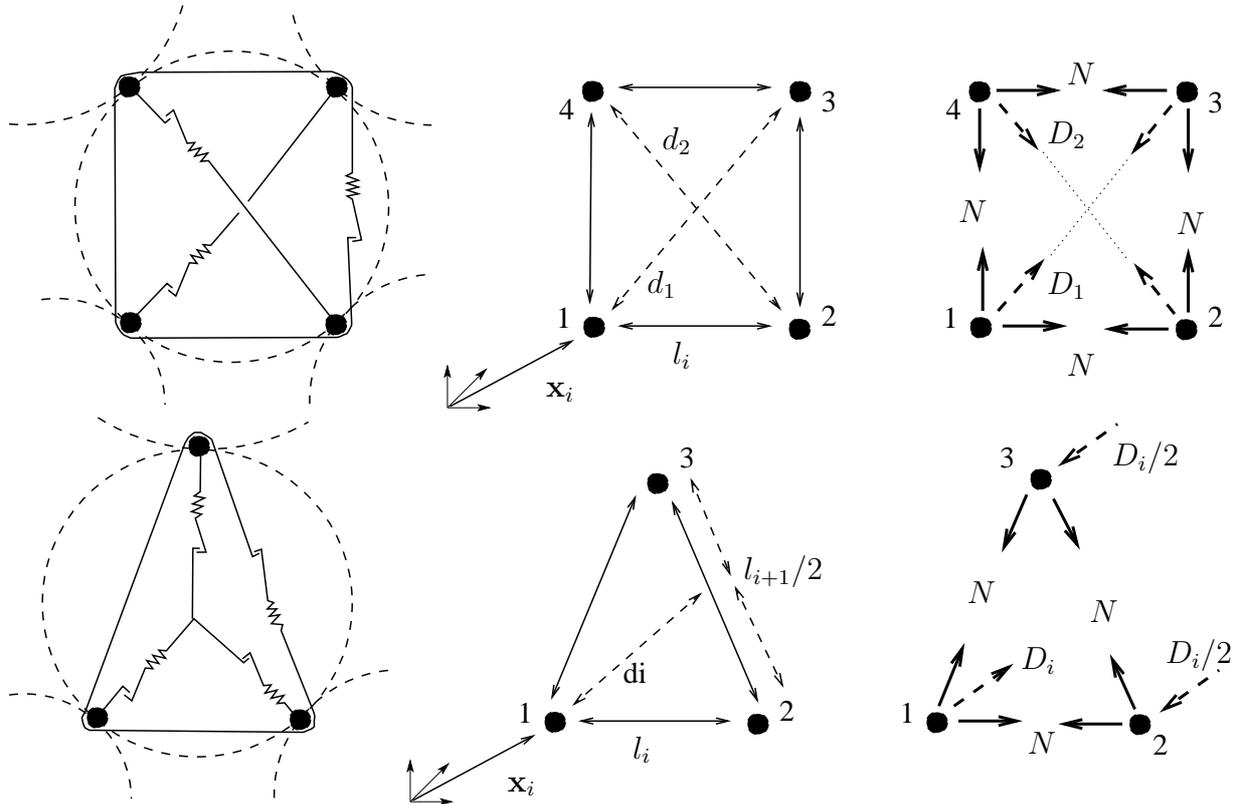


Abbildung 3.10: Mechanisches Modell und Abmessungen des diskreten 4- und 3-Knoten-Ring-Elements zusammen mit den im Element auftretenden Kräften

Wie in Abb. 3.10 gezeigt, erhält das Ringelement eines Ringnetzinnenrings an jedem Kontaktpunkt mit einem Nachbarring einen, und damit insgesamt vier Knoten. Diese sind durch ein umlaufendes Seil, welches ähnlich einer druckschlaffen Feder mit der Steifigkeit  $k_i$  agiert, miteinander verbunden. Die Länge des Seils ergibt sich aus der Summe der vier Einzellängen zu

$$l = \sum_{i=0}^4 l_i = \sum_{i=0}^4 |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c|cccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline j & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \quad (3.4)$$

Zwei weitere druckschlaffe Federn verbinden jeweils die Diagonalelemente miteinander. Ihre Längen sind

$$d_1 = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1| \quad \text{und} \quad d_2 = |\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2| \quad (3.5)$$

und sie besitzen die Dehnsteifigkeit  $k_b$ .

Für die 3-Knoten-Elemente gilt analog

$$l = \sum_{i=0}^3 l_i = \sum_{i=0}^3 |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| \quad \text{und} \quad d_i = \left| \mathbf{x}_i - \frac{\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_k}{2} \right| \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ \hline j & 2 & 3 & 1 \\ k & 3 & 1 & 2 \end{array}. \quad (3.6)$$

Ziel ist es nun im Folgenden, durch eine angenommene Entkopplung des Zug- und Biegetragverhaltens des Rings ein effizientes Elementmodell zu definieren.

### 3.1.5.2 Simulation des Zugstabverhaltens

Die Idee des umlaufenden Seils ist, dass dieses den Ring als Zugstab und dementsprechend das Normalkraftverhalten des Rings simuliert. Hier wird eine Dehnverformung der vier Ringsegmente definiert. Der Ringbruch wird über den Bruch des Seils eingeleitet.

Aus der Verlängerung  $\Delta l$  des Seils in Bezug auf eine\* Referenzlänge  $l_{min}$  ergibt sich eine konstante Normalkraft  $N$  in allen Segmenten.

$$N = \begin{cases} k_t \Delta l = k_t(l - l_{min}) & \text{für } l > l_{min} \\ 0 & \text{für } l \leq l_{min} \end{cases} \quad (3.7)$$

Analog zum in Abschnitt 3.2 beschriebenen Seilmodell ermöglicht man durch die in allen Segmenten konstante Normalkraft ein freies Gleiten der einzelnen Knoten in Umfangsrichtung. Entscheidend für die Berechnung der konstanten Normalkraft ist,

- ab welcher Referenzlänge  $l_{min}$  die Normalkraft als relevante Elementkraft zu berücksichtigen ist. Anhaltspunkt hierfür ist zum Beispiel der Ringumfang.
- die Relation  $k_t$  zwischen zunehmender Längendehnung und Normalkraft, welche in der Größenordnung eines Zugstabs mit vergleichbarer Querschnittsfläche liegt, sowie
- die maximale aufnehmbare Normalkraft  $N_{max}$  als Kennwert für die Bruchlast. Diese orientiert sich an der Bruchspannung eines adäquaten Stahlstabs.

Des Weiteren wird angenommen, dass die elastische Normalkraftverformung der Ringe auf Grund der grossen geometrischen Verschiebungen sehr klein bleibt und deshalb jede erfolgte Längendehnung als plastisch angesehen wird. D.h., wenn sich die Summenlänge der Ringsegmente nach einer anfänglichen Dehnung wieder reduziert, so wird die im Ring wirkende Normalkraft gleich Null gesetzt. Diese plötzliche Widerstandsreduktion kann jedoch zu numerische Instabilitäten führen. Um diese zu vermeiden, erfolgt die Nullsetzung der Normalkraft nicht schlagartig, sondern linear mit einem abfallenden und bei erneuter Belastung wieder ansteigenden Ast. Dessen Steigung wird dabei einhundert mal steiler eingestellt als der ursprüngliche Normalkraftanstieg bei der Erstbelastung und ist dadurch so hoch, dass die physikalische Wirkung vernachlässigt werden kann.

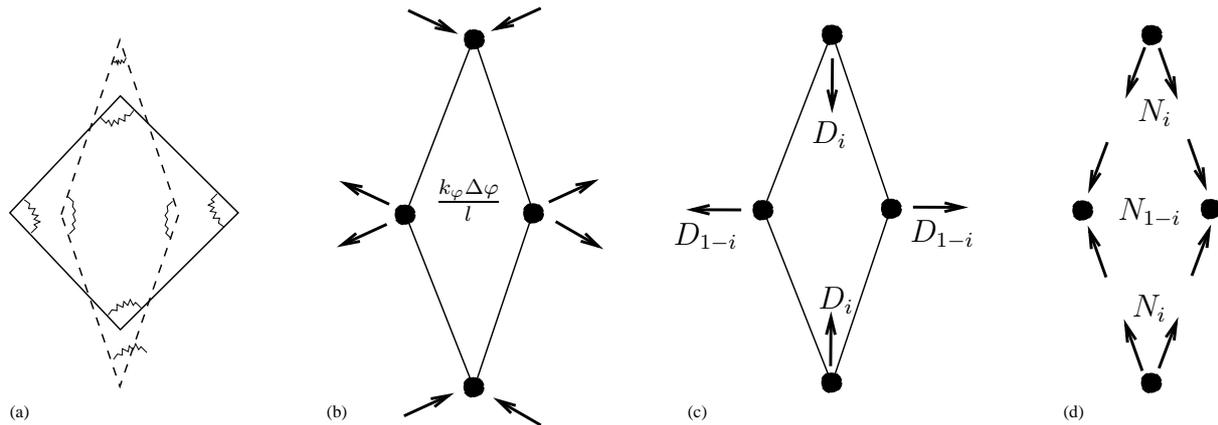


Abbildung 3.11: (a) Modellierung der Ringbiegung über eine vierfache Starrkörperverformung mit Drehfedern in den Gelenken; (b) Über aus den Biegemomenten resultierende Kräftepaare und diese wiederum zu resultierenden (c) Diagonal- und (d) Normalkräften zusammengefasst

### 3.1.5.3 Simulation des Biegetragverhaltens

Die Biegeverformung des Rings wird ähnlich einer gekoppelten Starrkörperbewegung der vier Ringsektanten simuliert (siehe Abb. 3.11a). Die Verformungsfigur ist dabei immer rautenförmig. Der Biege­widerstand wird durch in den Elementknoten platzierte Drehfedern aufgebaut. Da die Simulation keine Drehfreiheitsgrade in den Knoten berücksichtigt, werden die Biegemomente an den Knoten durch äquivalente Kräftepaare ersetzt (siehe Abb. 3.11b). Diese wiederum lassen sich an jedem Knoten zu resultierenden Kräften zusammenfassen, deren Wirkungslinien auf den Diagonalen der sich ergebenden Raute liegen (Abb. 3.11c).<sup>2</sup>

Geometrisch definierbar ist der Biege­widerstand somit über die Länge bzw. Längenänderung der Diagonalen. Charakteristisch für die Grösse des Ringwiderstands ist damit der Anstieg  $k_b$  der diagonalen Ersatzkraft. Die Verlängerung der Diagonale ermittelt man durch den Bezug auf die Diagonalbezugslänge  $d_0$  des Kreisrings. Dabei ist  $d_0$  nicht gleich dem Durchmesser  $d_{Ring}$  des Kreisrings, sondern es muss, da die Ringe im Netzverbund ineinander eingehängt sind, von diesem noch die Ringdicke  $t_{Ring}$  abgezogen werden. Diese ergibt sich ungefähr aus der Drahtdicke  $t_{Draht}$  und der Anzahl Drahtwindungen  $n_w$  und dem sich daraus ergebenden flächengleichen Kreisquerschnitt.

$$d_0 = d_{Ring} - t_{Ring} = d_{Ring} - t_{Draht} \sqrt{n} \quad (3.8)$$

Bei 3-Knoten-Ringen ergibt sich  $d_0$  aus der Geometrie der drei Elementknoten zueinander gemäss Abb. 3.10.

Wegen des losen Gefüges der Netzringe untereinander sind nur Verlängerungen und keine Verkürzungen der Diagonalen interessant. Die Verlängerungen gehen mit einer Verkleinerung des Innenwinkels an den jeweiligen Eckpunkten einher. Die diagonale Ersatzkraft wirkt ab der ersten Verformung des Rings auf Biegung anfangs noch voll­elastisch. Erst bei

<sup>2</sup>Alternativ wäre auch die Zerlegung in Kräfte in Umfangsrichtung nach Abb. 3.11d) möglich.

Erreichen des Übergangsbereichs aus Abb. 3.5 bilden sich in den Eckpunkten Fließgelenke und die Biegeverformung bleibt plastisch. Für die Simulation wird dafür angenommen, dass eine elastische Entlastung der Biegung nicht mehr berücksichtigt wird, wenn die Verlängerung des umlaufenden Seils den Wert  $l_{min}$  erreicht hat und sich damit der Ring nur noch wie ein Zugstab verhält.

Verwendet man nun  $d_{N_i}$  für die Länge der Diagonalen  $i$  zur Zeit des Normalkraftwiderstandsbeginns, so berechnen sich die Diagonalkräfte  $D_i$  nach

$$D_{i=1,2} = \begin{cases} 0 & \text{für } d_i \leq d_0 \\ k_b (d_i - d_0) & \text{für } d_0 < d_i < d_{N_i} \\ k_b (d_{N_i} - d_0) & \text{für } d_i > d_{N_i} \end{cases} \quad (3.9)$$

Sollte während einer Simulation eine Entlastung der bereits plastisch gewordenen Biegung auftreten, so empfiehlt sich analog zum Vorgehen beim Normalkraftverhalten des Rings eine elastische Entlastung mit  $k_b^* = 100k_b$ .

Des Weiteren kann beim 4-Knoten-Ring noch berücksichtigt werden, dass bei der oben beschriebenen Starrkörperbewegung die Summe der beiden Diagonalen immer gleich  $2d_0$  ist. Dadurch ergibt sich aus der Verlängerung der einen Diagonalen auch gleichzeitig eine Verkürzung der jeweils anderen, deren Diagonalkraft mit

$$D_{1-i} = D_i \frac{d_{1-i}}{d_i} \quad \text{für } d_{1-i} > 2d_0 - d_i \quad \text{mit } i = 1, 2 \quad (3.10)$$

gesondert berücksichtigt werden kann.

### 3.1.5.4 Kalibrierung des Modells

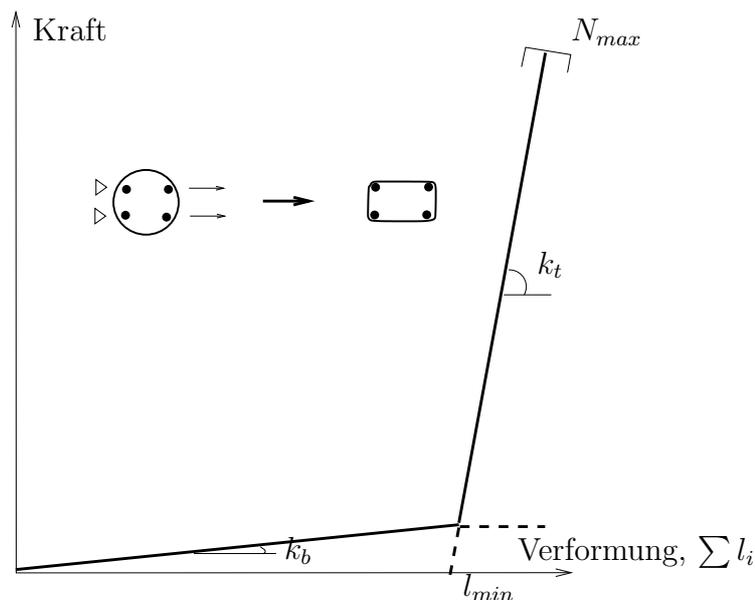


Abbildung 3.12: Definition der charakteristischen Verformungsbezogenen Größen eines Netzzings

Abb. 3.12 zeigt nun das qualitative Last-Verformungs-Diagramm eines einzelnen Rocco-Rings, der an 2, 3 oder 4 Punkten gelagert in einer Richtung auseinander gezogen wurde. Dieses Diagramm wird nun durch zwei Geraden, der sogenannten Biege- und Zuggeraden mit den Steigungen  $k_b$  und  $k_t$  approximiert. Die Zuggerade schneidet die Verformungsachse bei  $l_{min}$  und endet bei der maximalen Last  $N_{max}$ . Diese vier Werte gilt es nun für die einzelnen Ringmodelle zu kalibrieren. Ziel hierbei ist es in erster Linie, die Werte so aufeinander abzustimmen, dass sich daraus Gesetze auch für andere als die zum Kalibrieren verwendeten Netzringe entwickeln lassen.

### Einfluss der Ringparameter auf das Tragverhalten

Der Einfluss der Parameter  $k_b$ ,  $l_{min}$  und  $k_t$  auf die Bewegungsgrößen des Steins bei Versuchen mit unverschieblich gelagerten Ringnetzen am Versuchsrahmen ist in Abb.3.13 dargestellt. Die beiden anderen Werte wurden dabei jeweils konstant eingestellt, sodass der Vergleich des Bremsvorgang des Steines von diesen nicht beeinflusst wird.

**Variation des Biegeparameters  $k_b$ :** Gemäss dem oben beschriebenen Modell zur Simulation eines NetZRings ist es möglich, den Stein allein über einen entsprechenden BiegeWiderstand aufzufangen. Der Wert  $l_{min}$  wurde hierbei so gross gewählt, dass er nicht oder nur sehr spät erreicht wird,  $k_t$  hingegen bleibt sehr klein.

Der Auffangprozess geschieht sanfter im Vergleich zu den Variationen von  $l_{min}$  und  $k_t$ . Vergleicht man die Kurven der Variation von  $k_b$  mit den Versuchergebnissen aus Abb. 6.3, so wird sogar deutlich, dass der Stein bei den verwendeten Ringnetzen mit höheren Ringwindungszahlen hauptsächlich nur über den RingbiegeWiderstand abgebremst wird.

**Variation des Startpunkts  $l_{min}$  für das Zugstabverhalten des NetZRings:** Bei dieser Variation wurde der BiegeWiderstand  $k_b$  als praktisch nicht vorhanden angenommen, während der ZugWiderstand konstant auf  $k_t = 800 \text{ kN/m}$  gesetzt wurde. Sehr deutlich kann man nun erkennen, dass die Variation von  $l_{min}$  einen zeitlichen Parallelversatz der abgebildeten Kurven bewirkt. Je grösser der Wert, desto später beginnt das Zugstabverhalten des Rings und damit der Abbremsvorgang des Steins. Dies resultiert dabei zwangsläufig in einer höheren vertikalen Verschiebung des Steins und führt damit zu einer Erhöhung der abzubauenen Gesamtenergiedifferenz, welche durch entsprechend höhere Steinverzögerungen bzw. Ringkräfte abgebaut wird.

**Variation der Ringzugsteifigkeit  $k_t$ :** Belässt man den BiegeWiderstand  $k_b$  vernachlässigbar klein und den Beginn des Zugstabverhaltens konstant  $l_{min} = 0.9m$ , so sieht man den deutlichen Einfluss der Zugsteifigkeit auf den Maximalwert der Verzögerung und den Anstieg derselben dorthin. Ein sehr steifer Ring vermag den Stein sehr schnell aber auch sehr hart zu stoppen, was in einem verkürzten Bremsweg desselben resultiert.

### Kalibrierung der Ringparameter

Die Kalibrierung wurde anhand der an der Versuchseinrichtung durchgeführten Versuche mit unverschieblich gelagerten Ringnetzen durchgeführt (siehe [39] und Abb. 6.3). Es

zeigte sich dabei ein linearer Zusammenhang mit der Anzahl der Drahtwindungen von allen drei zu bestimmenden Grössen. Die Bruchlast eines Netzrings wurde ebenfalls als linear abhängig von der Windungszahl angenommen. Über sie existieren bei dynamischer Belastung nur Aussagen für die Ringe mit  $n_w = 5$  Windungen [39], welche deutlich über den quasistatischen Bruchlasten nach [35] lagen. Da aber letztere auf der sicheren Seite liegend linear extrapolierbar waren, wird diese Annahme auch für die dynamische Belastung getroffen. Die Kalibrierung der NetZRinge führte schliesslich zu in Tab. 3.1 gezeigten Parametern.

Anzahl Drahtwindungen	$n_w$	5	57	12	19	
BiegeWiderstand	$k_b$	[kN/m]	60	80	120	180
Beginn Zugstabverhalten	$l_{min}$	[m]	0.918	0.910	0.900	0.890
Zugwiderstand	$k_t$	[kN/m]	900	1000	1200	1500
Maximale Ringnormalkraft	$f_{max}$	[kN]	42	58.8	100.8	159.6

Tabelle 3.1: Charakteristische Ringparameter für die NetZRinge *Rocco 5, 7, 12, 19/3/300*

Diese Parameter lassen sich sehr gut über eine lineare Regression durch nachfolgende Bestimmungsgleichungen ausdrücken. Das zusätzlich angegebene Bestimmtheitsmass  $R$  liefert einen Anhaltspunkt für die mit dem jeweiligen Ansatz erreichte Genauigkeit im Vergleich zur Wahl der optimalsten Werte für die einzelnen Windungszahlen. Die mit nach diesen Formeln erhaltenen Ergebnisse werden in Kap. 6 gezeigt.

$$\begin{aligned}
 k_b & \quad / \frac{N}{m} = 18844 + 8479.7 n_w & \text{mit } R_{k_b} & = 0.9994 \\
 l_{min} & \quad / m = 0.9251 - 0.0019 n_w & \text{mit } R_{l_{min}} & = 0.9658 \\
 k_t & \quad / \frac{N}{m} = 694218 + 42398 n_w & \text{mit } R_{k_t} & = 0.9994 \\
 N_{max} & \quad / N = & & 8400 n_w
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

### Übertragbarkeit auf andere Ringgeometrien

Wie schon weiter oben beschrieben, existieren zur Kalibrierung und Validierung der NetZRingmodelle nur Versuche für Ringe mit einer Drahtstärke von  $t_{Draht} = 3 \text{ mm}$  bei einem Ringdurchmesser von  $d_{Ring} = 30 \text{ cm}$ . Eine Erweiterung obiger Beziehungen für die charakteristischen Ringparameter auf andere Konfigurationen wäre deshalb noch wünschenswert. So wird sich voraussichtlich  $l_{min}$  direkt proportional zum Ringdurchmesser ermitteln d.h.  $l_{min,350} = \frac{350}{300} l_{min,300}$ .

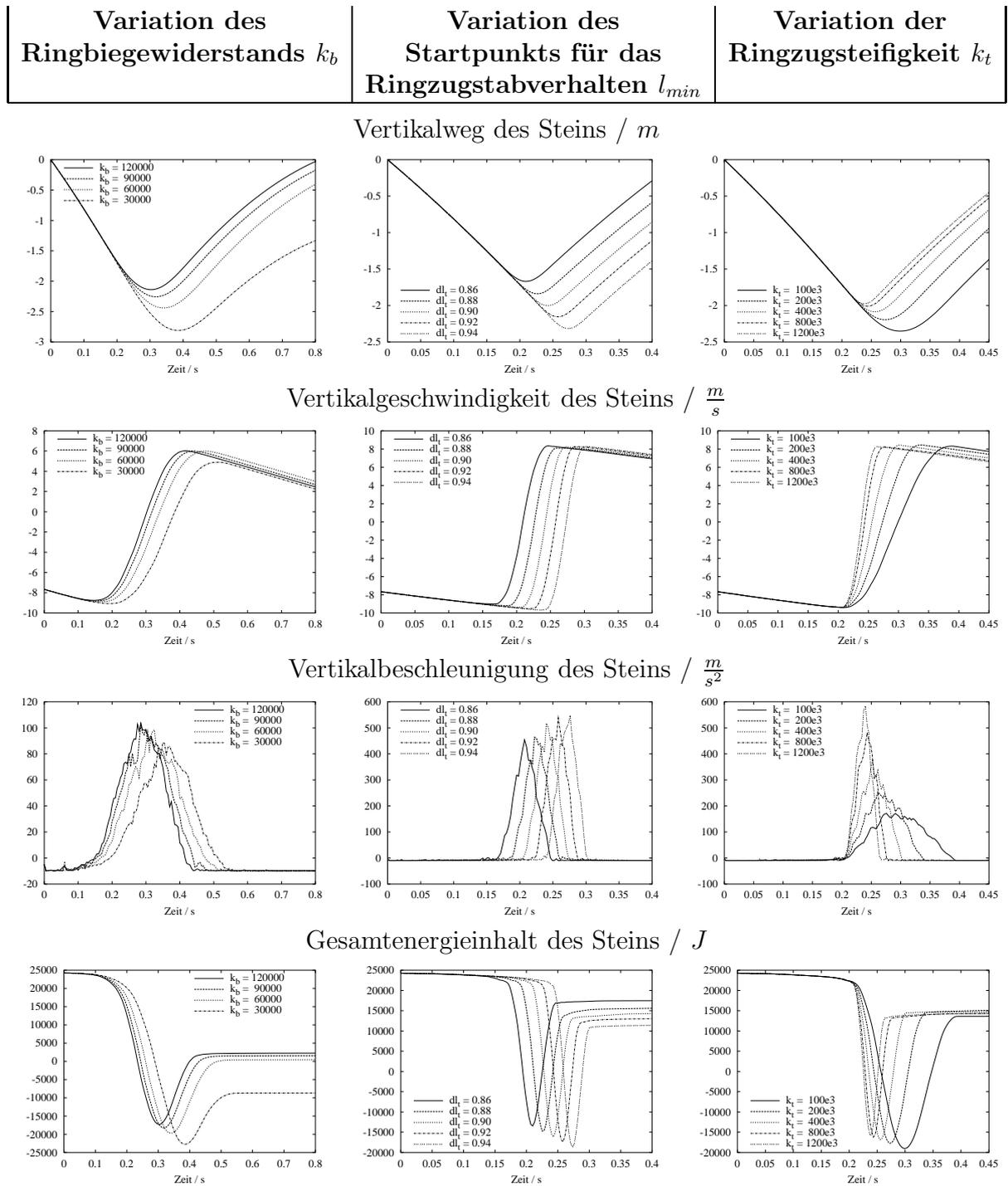


Abbildung 3.13: Einfluss der charakteristischen Ringparameter  $k_b$ ,  $l_{min}$  und  $k_t$  auf Weg-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Energiekurven des Steins beim Fall aus 3m Höhe in unverschieblich gelagerte Ringnetze

## 3.2 Seile

Kennzeichnend für die heutigen Steinschlagschutzverbauungen ist der Einsatz von Seilen. Sie zeichnen sich durch eine gewisse Filigranität vor allem aber durch die Flexibilität im praktischen Einsatz aus. Da die genauen Seillängen auch vor Ort einstellbar sind, sind Seile vor allem in ungleichmässigen Geländeformen ideal. Auch eine Vorspannung der gesamten Verbauung ist durch den Einsatz von Seilen möglich. Platziert man die Verankerungspunkte der Seile so, dass ungünstige Zugwinkel vermieden werden, so können die Seile ihre Lasten sehr effizient abtragen.

### 3.2.1 Begriffsklärung

Die heute erhältlichen Seile werden anhand ihres den Querschnitt definierenden Aufbaus klassifiziert. Dazu gehören die Art, Anzahl und Anordnung der einzelnen Drähte und Litzen. Die Wahl dieser orientiert sich dabei an der späteren Nutzung der Seile. So verwendet man bei Seilen, die durch Abrieb oder auf grossen Querdruck beansprucht werden, dicke Drähte. Wird dagegen eine hohe Biegezahl erwartet, eignen sich besser viele dünne Drähte [28].

Nach DIN 18800 [23] ist die Seilstärke über den Nenndurchmesser  $d$  definiert. Über den metallischen Querschnitt  $A_m$  erhält man den Füllfaktor  $f = A_m / (d^2 \pi / 4)$  als Verhältnis zum Umkreisflächeninhalt. Das rechnerische Seilgewicht wird wegen zusätzlich aufgebrachtener Beschichtungen über den Gewichtungsfaktor  $w$  zu  $G = A_m w$  bestimmt.

Das Produkt aus Nennfestigkeit der Stahldrähte und dem metallischen Querschnitt definiert die rechnerische Bruchkraft  $F_r = A_m \beta_N$ . Die Anordnung der Drähte im Seilstrang reduziert die wirkliche Bruchkraft  $F_W$  um den Verseilverlust, definierbar im sogenannten Verseilfaktor durch  $F_W = F_r k_S$ . Dieser Wert muss je nach Ausfertigung der Seilenden noch um einen Faktor  $k_e$  korrigiert werden und ergibt damit die Grenzzugkraft  $Z_{R,d} = F_r k_S$ .

Die Festigkeiten der Stahldrähte werden in der Regel in Spannungen ausgedrückt. Im Zusammenhang mit Seilen ist es jedoch üblich, weniger die Spannungen als vielmehr direkt mit den Seilkräften zu arbeiten, so auch in diesem Kapitel. Dies hat zudem den Vorteil, dass die Berechnungen direkt mit den Kraftmessungen der Feldversuche verglichen können. Auch der Auslastungsgrad der Seile wird direkt über die Grenzzugkraft  $Z_{R,d}$  definiert. Selbst dann, wenn dadurch bei einem nichtlinearen Materialgesetz die vom Seil verrichtete und aufnehmbare Energie nicht mit dem Normalkraftzuwachs und der Grenzzugkraft korreliert.

Werden Drahtseile an Umlenkstellen auch einer Querpressung ausgesetzt, reduziert sich ihre Bruchkraft. Um diesen Einfluss minimal zu halten schreibt DIN 18800 [23] einen Mindestkrümmungsradius des Seilstrangs von  $r \geq 20..30 d_S$  vor.

### 3.2.2 Anforderungen an ein finites Seilelement

- Mit dem Einsatz der ebenfalls in diesem Kapitel besprochenen Ringnetze werden diese lose mit den Randseilen verbunden, sodass erstere an letzteren bei Belastung auch über grössere Strecken rutschen können (siehe Abb. 3.4).
- Werden durch die eingesetzten Bremsen die Seile unter Last verlängert, so können diese sich besser zur Hauptbelastungsrichtung ausrichten und somit unter einem besseren Winkel belastet werden (siehe auch Abschnitt 3.2.7). Dabei kommt es vor, dass das Seil bei diesem Verformungsvorgang über grössere Distanzen über Verbaufixpunkte hinweggleitet.
- Das Seilelement darf nur Zug- und keine Druckkräfte aufnehmen.

### 3.2.3 Alternative Seilelemente

Im Allgemeinen lassen sich Seile sehr einfach durch biegefreie Fachwerkelemente mit einem druckschlaffen Materialgesetz modellieren (siehe z.B. [53, 45]). Einen Seilzug über mehrere Knoten implementiert man auf diese Weise durch die Aneinanderreihung mehrerer Einzelemente. Gerade bei der expliziten Zeitintegration ist diese Methode sehr effizient. Muss man jedoch davon ausgehen, dass die einzelnen Elemente ihre Grundlängen während der Simulation ändern sollen, stösst man hier schnell an die Grenzen. Dann bliebe die Möglichkeit, diejenigen Knoten, die gleiten können sollen, aus dem Seilzug zu entfernen und über passende Zwangsbedingungen an den Seilzug zu binden (siehe Abb. 3.14a). Dies erfordert jedoch einen relativ hohen rechnerischen Aufwand und empfiehlt sich nicht für die gewünschte Anwendung. Beim Finite-Element-Programm LS-Dyna [45] behilft man sich z.B. durch sogenannte Gleitringe: Ein Seil wird in viele kleine Seilstücke unterteilt. Wird nun an einem Seilende gezogen, so springt das Seil am Gleitring einen Seilzugknoten weiter (siehe auch Abb. 3.14b);

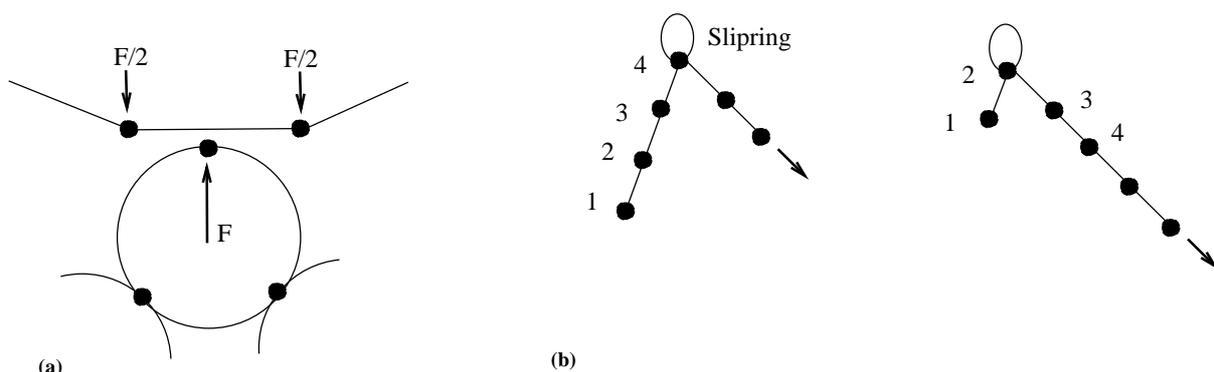


Abbildung 3.14: Seilmodellierungen über viele kleine Seilstücke mit Berücksichtigung von Gleiteffekten: (a) Gleiten über Zwangsbedingungen, (b) Elementweises Springen am 'Slipring'-Element in LS-Dyna [45]

Grassl [39] und Zhou et al. [99] zeigen jeweils eine Variante eines finiten Seilelements, welches dem Prinzip des nachfolgend in dieser Arbeit beschriebenen Elements entspricht.

Die Verfahren beruhen jeweils auf der Annahme, dass ein Seil einen gleitenden Zwischenknoten haben kann und dass das Seil einem linear-elastischen druck- und biegeschlaffen Materialgesetz gehorcht.

### 3.2.4 Getroffene Annahmen

Für die Entwicklung eines geeigneten Seilelements werden folgende Annahmen getroffen:

- Die eingesetzten Seile haben keinen Durchhang, d.h. ein Seilstück ist durch einen geraden Stab, der nur Zug- und keine Druckkräfte aufnehmen kann, ausreichend abgebildet. Diese Annahme ist insofern korrekt, da die in der Verbauung eingesetzten Seilstücke vorgespannt und dabei so kurz sind, dass der Durchhang sehr klein ist. Angaben in der Literatur zur Berechnung von Seilen unter Berücksichtigung von Seilschwingungen und Seildurchhang beziehen sich in der Regel auf viel grössere Seilkonstruktionen [47, 81, 91].
- Das Seil ist sehr biegeweich, d.h. es können keinerlei Momente übertragen werden und einfache Fachwerkelemente eignen sich als mechanisches Modell für die Seilstücke.
- Die Umlenkung der Seile erfolgt in der Simulation immer an Knoten, an welchen kein Krümmungsradius definiert werden kann. Aus diesem Grund wird auch der Einfluss der Querpressung des Seiles nicht berücksichtigt und es wird davon ausgegangen, dass die Einhaltung der Mindestradien bei der Konstruktion der Steinschlagschutzverbauungen immer gewährleistet ist.
- Die Belastung der Seile erfolgt derart, dass benachbarte Knoten sich nicht zu nahe kommen und dabei evtl. überschneiden oder die Länge eines Seilstücks beinahe null beträgt.

### 3.2.5 Seilmodell mit gleitenden Zwischenknoten

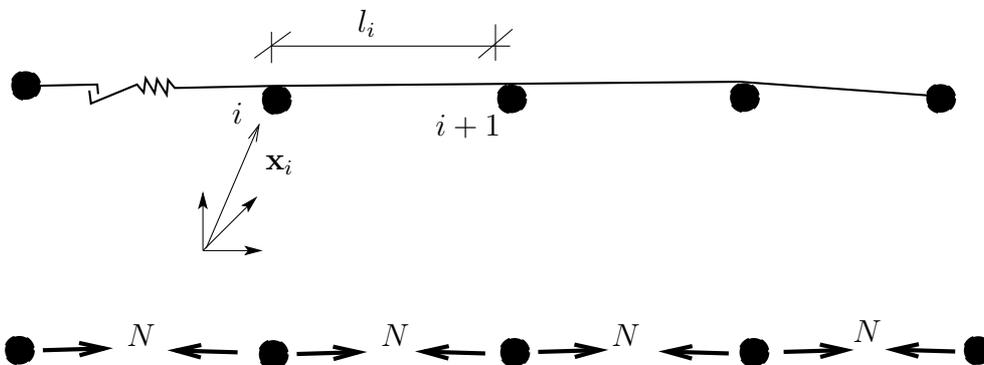


Abbildung 3.15: Seilmodell mit über die Länge gleichmässig verteilter Dehnung und mit im ganzen Seil konstanter gleicher Normalkraft

Ein Seilelement kann beliebig viele Knoten haben. Allerdings sollte jeder dieser Knoten entweder aufgelagert oder mit mindestens einem weiteren Element verbunden sein. Auf Grund der weiter oben getroffenen Annahmen ist ein innerhalb des Seils ungebundener Knoten nicht notwendig und kann zudem zu numerischen Instabilitäten führen. Die Masse des Seiles ist in den Knoten konzentriert, in ihrer Grösse jeweils proportional zu den jeweils benachbarten Seilstücken im Verhältnis zur Gesamtlänge des Seils.

Die Idee bei der Entwicklung eines Seilelements ist nun, dass man unter Vernachlässigung von Reibungseffekten im gesamten Seil immer die gleiche Normalkraft hat. Um diese zu ermitteln, nimmt man demzufolge an, dass das gesamte Seil gleichmässig gedehnt ist (siehe auch Abb. 3.15). Die aktuelle Dehnung  $\varepsilon$  in Bezug auf die Seillänge zu Simulationsbeginn ermittelt sich also zu

$$\varepsilon = \frac{\sum l_i}{\sum l_{i,t=0}} - 1 \quad \text{mit} \quad l_i = |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|, \quad (3.12)$$

wobei hier der Ansatz für die Ingenieurdehnung gewählt wurde, da die Dehnungen klein genug bleiben. Die Seilnormalkraft erhält man über eine Funktion  $f(\varepsilon)$ , welche in Abschnitt 3.2.6 beschrieben wird:

$$N = f(\varepsilon). \quad (3.13)$$

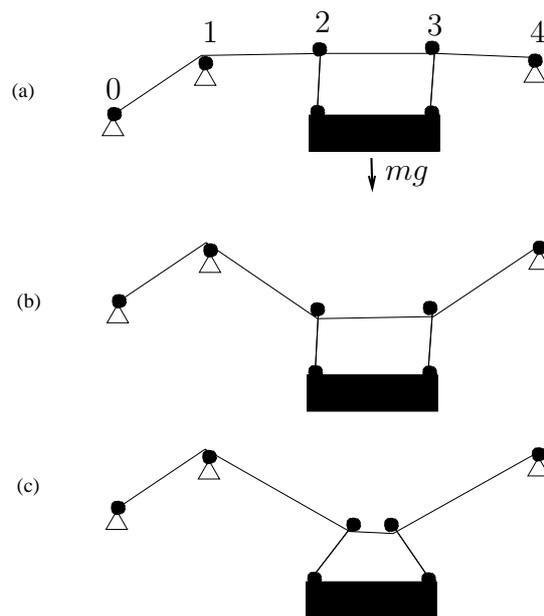


Abbildung 3.16: Prinzipdarstellung der Gleitvorgänge innerhalb eines Seilelements

Abb. 3.16 veranschaulicht die mit diesem Ansatz berücksichtigten Gleiteffekte durch die sehr vereinfachte Abfolge von aufeinander folgenden Zeitschritten. Das abgebildete Seil sei gleichmässig vorgespannt und im unbelasteten Zustand befinden sich alle Knoten im Gleichgewicht (analog zu Abb. 3.15). Wirkt nun auf die Knoten 2 und 3 ein durch Pendelstützen angehängtes Gewicht (Abb. 3.16a), so werden diese beiden Knoten nach unten beschleunigt. Dies verlängert das gesamte Seil und es wird auch das beiderseits aufgelagerte Seilstück zwischen Knoten 0 und 1 gedehnt. Die Kräftebilanz an den Knoten 2

und 3 ergibt nun eine resultierende Beschleunigung, welche die beiden Knoten zueinander bewegen wird (Abb. 3.16b). In der nun in Abb. 3.16c engeren Lage der Knoten 2 und 3 zueinander haben sich die Wirkungslinien der Pendelstützenkräfte jeweils auswärts gerichtet und die beiden Knoten haben eine neue Gleichgewichtslage eingenommen. Die Gesamtlänge des Seils hat sich dabei im Vergleich zum vorigen Schritt kaum geändert. Wegen der geänderten Längen der Seilsegmente müssen die in den Knoten konzentrierten Massen wieder proportional zu den benachbarten Seilstücklängen angepasst werden.

Die kritische Zeitschrittgröße, bei der die explizite Simulation mit dem hier beschriebenen Seilmodell noch stabil bleibt, ermittelt sich analog zum in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Fachwerkelement. Als Elementlänge ist die Durchschnittslänge aller Seilstücke zu verwenden.

Soll ein Zwischenknoten gleitfrei angeschlossen werden, so wird wie im vorigen Abschnitt beschrieben, der Seilzug an dieser Stelle so unterbrochen, sodass die Abschnitte rechts und links von dem Knoten jeweils ein eigenes Seilelement darstellen.

### 3.2.6 Last-Verformungs-Charakteristik eines Seils

Das Last-Verformungsverhalten eines Seiles hängt sehr stark von seinem Aufbau ab. Die Seile werden in der Regel ab Werk entsprechend ihres späteren Einsatzes vorgereckt um dadurch in diesem Lastbereich eine weitgehend linear-elastische Last-Verformungs-Charakteristik zu erreichen [28, 78]. Der Elastizitätsmodul mit dem metallischen Querschnitt als Bezugsfläche liegt dabei im Bereich von ca.  $E = 70..170 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$  und somit unter dem für einen Stahlvollquerschnitt üblichen Wert von  $E \approx 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ . Für ein vorgerecktes Seil bestimmt sich die Normalkraft in Abhängigkeit von der Dehnung demnach zu

$$N = \begin{cases} 0 & \text{für } \varepsilon < 0 \\ E A_m \varepsilon & \text{für } 0 \leq \varepsilon \leq \frac{Z_{R,d}}{E A_m} \\ 0 & \text{für } \varepsilon > \frac{Z_{R,d}}{E A_m} \longrightarrow \text{Seilbruch} \end{cases} . \quad (3.14)$$

Bei Einsatz eines nicht vorgereckten Seiles empfiehlt sich die Verwendung einer nichtlinearen Seilcharakteristik wie sie durch die Prüfung von Drahtseilen nach DIN 51201 [23] erhalten werden kann. Die Entlastung und Wiederbelastung erfolgt elastisch mit dem Elastizitätsmodul eines vorgereckten Seiles (siehe Abb. 3.17). Prinzipiell ist es auch möglich, die Seilcharakteristik über analytische Methoden wie in [26, 94] beschrieben zu ermitteln. Im Rahmen dieser Arbeit nimmt man die Seilcharakteristiken jedoch als gegeben an, da in der Regel immer Standardseile eingesetzt werden, deren Charakteristiken bekannt sind.

### 3.2.7 Vorspannung und minimaler Seildurchhang

Vorgespannte Seilelemente werden in der Art berücksichtigt, dass die aus der Momentan-konfiguration eines Seils in Gl. 3.12 ermittelte Dehnung um die Dehnung  $\varepsilon_V$  erhöht wird, die sich in einem nur durch die Vorspannkraft belasteten Seil ergeben würde.

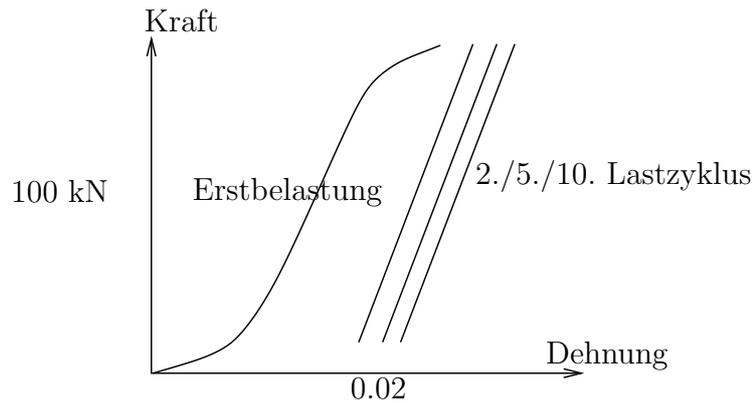


Abbildung 3.17: Prinzipielle nichtlineare Kraft-Dehnungs-Beziehung mit elastischer Entlastung eines nicht vorgereckten Spiralseiles

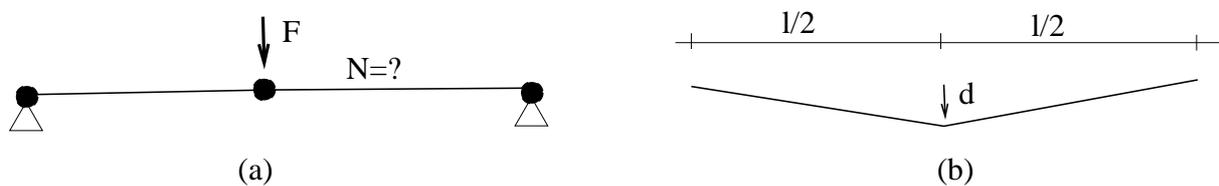


Abbildung 3.18: (a) Problematik der idealen Seilgeometrie in Bezug auf zur Seilachse senkrechte Kräfte, (b) Seilgeometrie bei Mittenabsenkung um  $d$

Ein Problem jeder Computersimulation von Seilen ist die meist als perfekt angenommene Geometrie. Betrachtet man z.B. das in Abb. 3.18 dargestellte Problem, so würden sich auf Grund der als ideal angenommenen Seilgeometrie unendlich hohe Kräfte im Seil einstellen. In der Realität existiert jedoch immer ein noch so kleiner Durchhang, der die Seilkräfte endlich werden lässt. Dieser Problematik kann entgegengewirkt werden, indem man der Seildehnung einen geringen Schlupf gewährt. Nach [44] gilt ein Durchhang von  $d \leq l/20$  als so klein, dass die Seilkraft als konstant angenommen werden kann, was wiederum den oben genannten Annahmen für das finite Seilelement entspricht. Nimmt man z.B. an, dass ein nicht vorgespanntes horizontal verlaufendes Seil im gesamten einen Durchhang  $d$  hat, so ergibt sich eine neue Seillänge von

$$l^* = 2l \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 1.0050l \quad \text{mit} \quad l = \sum l_i. \quad (3.15)$$

Dies entspricht einer Dehnung von  $\varepsilon_D = 5\%$ . Gemäss der Richtlinien beim Aufbau der untersuchten Steinschlagverbauungen ist ein Durchhang eines Seiles  $d \leq 0.03 \cdot l$  genehmigt, was wiederum in der Simulation einer freien Dehnung von  $\varepsilon_D = 1.8\%$  entspricht.

Obige zwei Punkte zur Korrektur der aus der Seilgeometrie erhaltenen Dehnung beeinflussen damit die Bestimmung der Normalkraft im Seil wie folgt:

$$N = f(\varepsilon + \varepsilon_V - \varepsilon_D). \quad (3.16)$$

Die Funktion  $f$  entspricht der in Abschnitt 3.2.6 beschriebenen.

### 3.2.8 Reibungseffekte beim Gleiten von Knoten

Bei den in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Gleitvorgängen darf die auftretende Reibung in einigen Fällen nicht vernachlässigt werden. Entscheidend hierfür ist der Zeitpunkt der Gleitvorgänge während der Simulation. Wie in Kapitel 6 über die Simulationsergebnisse gezeigt, richten sich z.B. die Ringnetze in einem frühen Stadium optimal bezüglich der Belastungsrichtungen aus. Zu diesem Zeitpunkt wird der Stein jedoch nur unwesentlich abgebremst. Somit treten nur geringe Kräfte innerhalb der Verbauung auf, woraus noch geringere Reibungskräfte resultieren. Dagegen erfahren die eingesetzten Bremsenlemente ihre grösste Verlängerung erst später, wenn der Stein am stärksten abgebremst wird. Die an den Bremsen angeschlossenen Seile rutschen deshalb z.T. erst jetzt über einige Verbauungsfixpunkte hinweg. Die zu diesem Zeitpunkt auftretenden hohen Verbauungskräfte ziehen auch grosse Reibungskräfte nach sich, welche berücksichtigt werden sollten. In der Realität können diese sogar spänende Wirkung auf die Seile und Verbauungsfixpunkte haben.

#### 3.2.8.1 Umsetzung der Gleitreibung

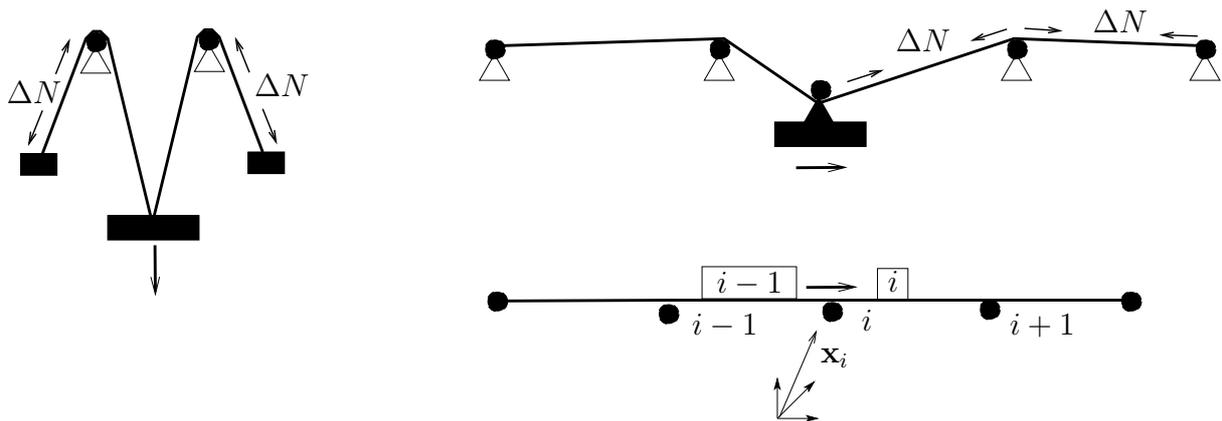


Abbildung 3.19: Beispiele für mögliche Gleitmechanismen innerhalb eines Seiles mit Kräften zur Reduktion des Gleitvorgangs als Modell für den Reibungswiderstand

Abb.3.19 zeigt mögliche Gleitmechanismen von einzelnen Knoten innerhalb eines Seilzuges. Das Gleiten eines Knotens ist erfassbar, wenn sich sein relativer Abstand zu den beiden Seilendknoten im Vergleich zum vorigen Zeitschritt verändert: Der Knoten gleitet in Richtung des Seilendes mit dem sich verkürzenden Abstand. Eine an den Gleitstellen vorhandene Reibung hat nun zur Folge, dass ein bestehender Gleitvorgang abgebremst wird. Das bedeutet, dass dem gleitenden Knoten entgegen der Gleitbewegung ein entsprechender Widerstand aufgebaut wird. Die dabei vernichtete Bewegungsenergie entspricht der geleisteten Reibungsarbeit. Der Widerstand wird so aufgebracht, dass die Seilkraft  $N$  in dem sich verkürzenden Seilstrang um den Betrag  $\Delta N$  verringert wird. Man kann sich dies auch so vorstellen, dass in den entsprechenden Seilstücken eine Druckkraft der Grösse  $\Delta N$  wirkt. Diese Druckkraft wird mit der vorhandenen Seilkraft  $N$  überlagert und entspricht dabei einer Zugentlastung der entsprechenden Seilstücke. Die resultierenden Seilstückkräfte dürfen dabei aber nicht kleiner als Null werden, da alle Seilstücke  $j$  jeweils

nur Zugkräfte übertragen können:

$$N_j - \Delta N \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta N \leq N_j \quad (3.17)$$

### 3.2.8.2 Grösse der Reibungskraft

Eine Gleitreibung kann in der Regel nur dann auftreten, wenn das Seil an der Kontaktstelle umgelenkt wird und dadurch eine Querpressung auf das Seil ausgeübt wird. Je nach Beschaffenheit der Kontaktstelle, empfiehlt sich ein anderer Ansatz zur Bestimmung der Normalkraftreduktion durch die Reibungskraft.

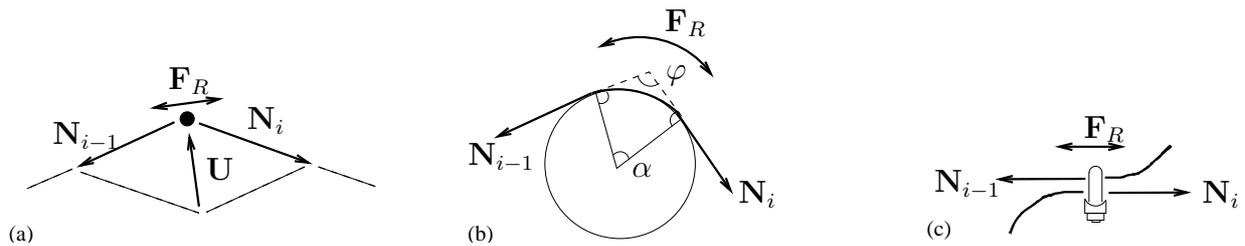


Abbildung 3.20: Verschiedene Ansätze zur Ermittlung der Reibungskräfte an Seilen

Bei einer punktförmigen Kontaktstelle des Seilknotens bietet sich ein Coulombsches Reibungsgesetz mit dem Reibungsbeiwert  $\mu$  an. Dies ist zum Beispiel an den Schäkeln der Fall, über die die Ringnetze in einer Steinschlagverbauung an die Seile angeschlossen werden. Die Schäkel sind hier so dünn, dass sich das Seil nicht kontaktschlüssig über die Oberfläche des Schäkels umlenken lässt. Analog zu Abb. 3.20a bestimmt man hier zuerst die Umlenkkraft  $\mathbf{U} = \mathbf{N}_{i-1} + \mathbf{N}_i$  und daraus dann die resultierende Reibungskraft  $F_R$  bzw. die Reduktion  $\Delta N$  der Seilskraft auf dem sich verkürzenden Seilende zu

$$\Delta N = |F_R| = \mu |\mathbf{U}| = \mu N |(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)^0 - (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})^0|. \quad (3.18)$$

Wird das Seil an einem Stützenknoten umgelenkt, so kann man davon ausgehen, dass die Verbauungsstütze an diesem Punkt so ausgebildet ist, dass die Umlenkung mit einer passenden Krümmung erfolgt, sodass das Seil linienförmig auf der Umlenkung aufliegt. Die hier auftretende Seilreibung und Seilkraftreduktion bestimmt sich gemäss Abb. 3.20b nach [48] zu

$$\Delta N = |F_R| = N(1 - e^{-\mu\alpha}) = N(1 - e^{-\mu(\pi-\varphi)}) \quad (3.19)$$

$$\text{mit} \quad \varphi = \arccos((\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)^0 \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})^0). \quad (3.20)$$

Ein Spezialfall der Seilreibung tritt auf, wenn zwei Seile mit einer Klemme miteinander verbunden sind (Abb. 3.20c). Die Klemmkraft ist dabei so bemessen, dass sich die Klemme ab einer bestimmten Belastung mit einem konstanten Widerstand verschieben lässt. D.h. wenn sich der Klemmknoten sich innerhalb des Seilzuges verschiebt, so wird dessen Bewegung gebremst durch die Reibungskraft bzw. Seilkraftreduktion

$$\Delta N = |F_R| = \text{const.} \quad (3.21)$$

### 3.2.9 Zusätzliche Seilbelastung an Umlenkpunkten

Wird ein Seil umgelenkt, so entsteht an der Umlenkstelle eine Querpressung. Dies insbesondere auf die einzelnen Drähte und Litzen, da diese sich über den Querschnitt bedingt durch die Herstellungsart der Seile überkreuzen. Die Querpressung definiert sich bei zylinderförmigen Umlenkungen mit einem Durchmesser  $d_U$  im Normalfall über die Grösse der Kontaktfläche, welche sich aus der Länge der Umlenkstrecke und der Seilovalisierung im Umlenkbereich ergibt [29]. Im praktischen Gebrauch reduziert man diese Flächenpressung auf eine Längenbezogene Anpresskraft  $q_U$  gemäss dem Umlenkradius  $r_U = d_U/2$ , welche sich nach [29] zu

$$q_U = \frac{N}{r_U} = 2 \frac{N}{d_U} \quad (3.22)$$

berechnet wird. Integriert man  $q_U$  über die Umlenkstrecke, erhält man damit die Umlenkkraft  $\mathbf{U}$  aus Abschnitt 3.2.8.2.

Die Querkraftbelastung  $U$  lässt sich nach [29] wie eine einfache Seilbiegung an der entsprechenden Stelle behandeln. Es werden jedoch nur die Biegenormalspannungen, nicht jedoch die ebenfalls auftretenden Torsions-, Pressungs- und sekundären Biegespannungen berücksichtigt, da diese nur bei genauer Kenntnis des Seilaufbaus ermittelbar sind.

Im Prinzip hat man bisher das Seil als biegeschlaff angenommen, da die Biegesteifigkeit eines Seiles in der Regel sehr gering ausfällt. Berücksichtigt man nun den geringen Biege widerstand, so erhöhen sich nach [29] die Randnormalspannungen im Querschnitt um

$$\sigma_U = U \sqrt{\frac{E}{A_m N}}. \quad (3.23)$$

Hier stehen  $E$  und  $A_m$  für den Elastizitätsmodul und den metallischen Querschnitt des Seiles. Dies entspricht wiederum einer äquivalenten Seilnormalkraft

$$\begin{aligned} N^* &= \sigma_N A_m + \sigma_U A_m \\ &= N + U \sqrt{\frac{E A_m}{N}} \\ &= N + |(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)^0 - (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})^0| \sqrt{E A_m N}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.3 Bremsen

Bei den untersuchten Steinschlagverbauungen ist es die Aufgabe der sogenannten Brems-elemente, als Sollschwachstellen an klar definierten Orten innerhalb des Schutzsystems die vom Steinschlag übertragene Energie abzubauen. Die Bremsen werden z.B. zwischen Bodenverankerung und Seilenden quasi als Verlängerung der Seile eingesetzt, welche die Schutznetze auf- bzw. abspannen.

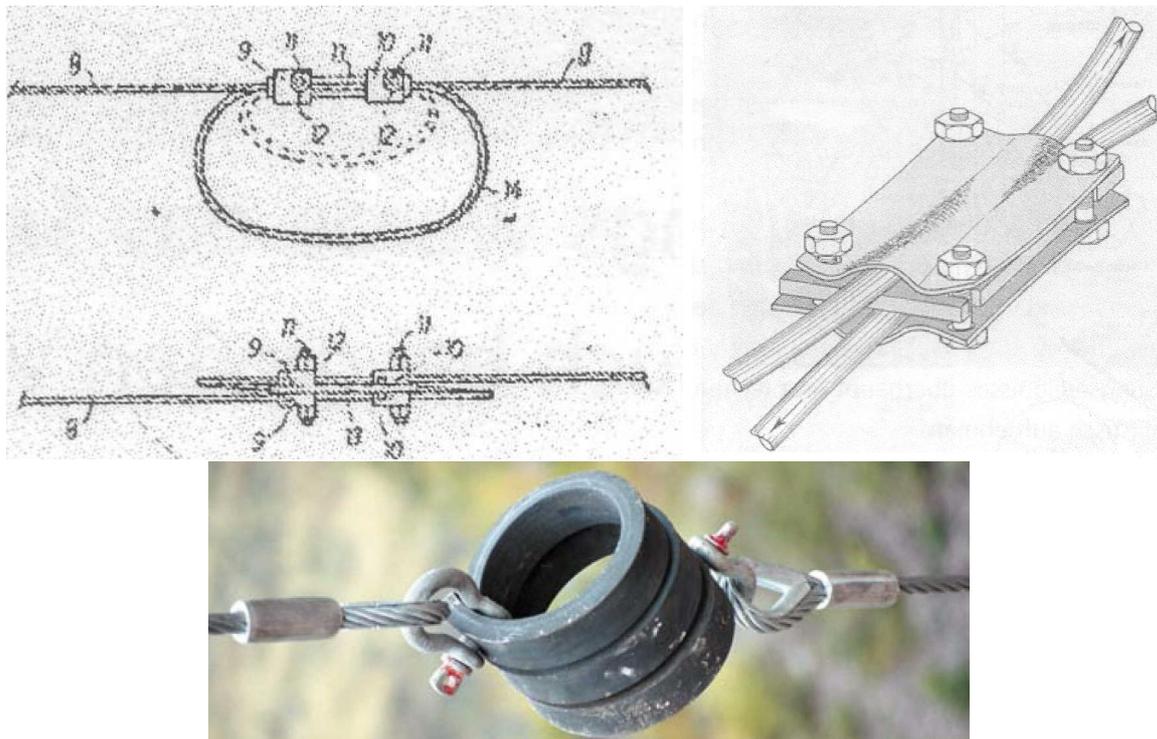


Abbildung 3.21: Beispiele für Brems-elemente innerhalb einer Steinschlagschutzverbauung: (oben links) Seil mit Reibklemmen, (oben rechts) Seil mit Reibplatten und (unten) plastisch verformendes Stahlprofil (Quellen: Geobrugg,AVT)

Wie in Abb. 3.21 dargestellt, werden hierfür zum Beispiel Seile parallel oder kreisförmig durch Reibplatten oder Seilklemmen festgehalten und absorbieren durch den hohen Gleitwiderstand dementsprechend Energie (siehe auch [88]). Ein höheres Energieaufnahmevermögen haben neuere Systeme bestehend aus einem kreisförmig gebogenem Rohr und einem durch dieses Rohr geführtes Seilstück (siehe Abb. 3.22links). Durch den Zug im Seil wird der Rohrringradius verkleinert und das Rohr durch die Pressklemme gestossen, welche ausser dem Reibwiderstand auch verhindert, dass sich der Kreisring aus seiner Ebene heraus aufbiegt.

Der rechte Teil von Abb. 3.22 zeigt die sich dafür ergebenden Last-Verformungs-Kurven von verschiedenen Bremsringtypen. Hier ist zu sehen, dass die Bremsringe im Bereich 0 – A bei nur kleinen Verformungen einen elastischen Widerstand aufbauen. Dieser definiert sich durch die Pressung des innen laufenden Seils auf den Rohrring sowie durch eine elastische Seildehnung und Rohrkompression über den Umfang. Erst bei einer gewissen Last (Punkt B) wird der Klemmwiderstand des Rohres in der Pressklemme gebrochen und

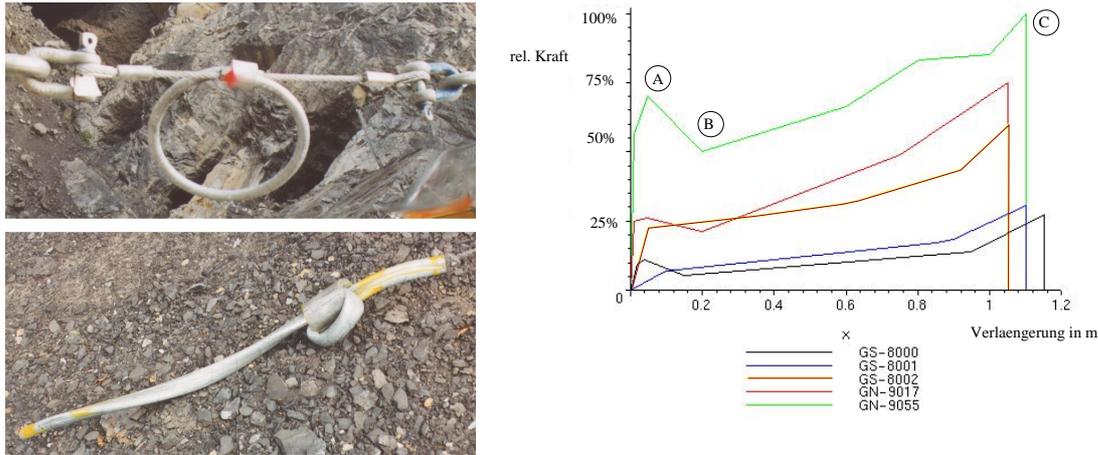


Abbildung 3.22: (links) Bremsring im unbelasteten und belasteten Zustand, (rechts) Last-Verformungs-Verhalten von verschiedenen Bremsringen aus der Baureihe *Geobrugg*

der Rohrring beginnt durch die Klemme zu laufen. Bei einzelnen Bremsringtypen ist hierbei zu beobachten, dass die nun vorherrschende Gleitreibung zwischen Rohr und Klemme kleiner ist als die anfängliche wirkende Haftreibung: Die erforderliche Kraft nimmt im Bereich  $B - C$  ab. Von nun an nimmt die Widerstandskraft mit weiterem Anstieg der Verformungen stetig zu. Effekte, die während dieses Anstiegs auftreten sind eine Torsion des Rohres beim Austritt aus der Klemme, eine Ovalisierung des Rohrquerschnittes bei zunehmender Rohrringkrümmung (siehe auch [40]), eine Krümmungszunahme des Rohrrings und eine Aufbiegung des durch die Klemme gleitenden Ringabschnitts. Der Bruch des Bremslements tritt meistens durch einen Bruch des innen liegenden Seils ein, welches jedoch im Rohr so geschützt geführt ist, dass die Bruchlast des Seiles weitgehend frei von Querkraftpressungen erreicht wird (siehe Abschnitt 3.2 und [52]).

### 3.3.1 Modellierung der Bremslemente

Die Bremslemente der untersuchten Verbauungen werden als Verbindungen zwischen Bodenverankerungen und Trag- und Rückhalteseilen und auch zwischen den Enden der Verbauungsstützen und dem Ringnetz eingesetzt. Der Anschluss erfolgt dabei jeweils gelenkig über Schäkkel, was eine Modellierung als nichtlineare Dehnfeder erlaubt. Als Materialgesetz kommt dabei ein abschnittsweise linear definiertes druckschlaffes Last-Verformungsverhalten zum Einsatz<sup>3</sup>. Eine zeitweise Entlastung eines Bremslements erfolgt dabei elastisch mit einem Elastizitätskoeffizienten, der sich aus dem Abschnitt 0 – A von Abb. 3.22b ergibt.

Dieser Ansatz ermöglicht zudem die Berücksichtigung von beliebigen anderen Bremstypen, welche in der Regel alle über eine Funktion charakterisiert werden können, die angibt, bei welcher Verlängerung des Bremslements welcher Widerstand zu erwarten ist.

<sup>3</sup>Die dafür notwendigen Parameter erhält man aus entsprechenden Zugversuchen.

## 3.4 Stützelemente



Abbildung 3.23: Zu simulierende Stützen im System RX300: (linke Hälfte) Beispiel für Einsatz in den Steinschlagverbauungen und (rechte Hälfte) Details der gelenkigen Lagerung von Stützenkopf und -fuß (Quelle der Details: Geobrugg)

Für die Stützen in den untersuchten Steinschlagschutzanlagen werden gewöhnlich Standardwalzprofile aus Stahl, in der Regel Doppel-T-Träger oder Hohlquerschnitte verwendet. Sie definieren durch ihre Länge die Bauhöhe der Verbauung, in der die Netze in den einzelnen Verbauungsfeldern aufgespannt werden. Beim Steinschlagereignis sind diese die einzigen Elemente, welche innerhalb der Verbauung Druckkräfte aufnehmen. Die linke Hälfte von Abb. 3.23 zeigt eine Stütze innerhalb einer Verbauung und die rechte Hälfte die Details am freien Stützenkopf und am Fusspunkt. Am Fusspunkt werden die ankommenden Tragbremsen und Trageile direkt mit der Ankerplatte verbunden. Je nach Stützensausführung ist das verwendete Doppel-T-Profil mit einer oder zwei Laschen über einen Bolzen mit der Grundplatte in beide Kipprichtungen gelenkig verbunden. Vom konstruktiven Gesichtspunkt ist die Fusskonstruktion eine gewollte Sollbruchstelle mit einem klar definierten Versagensmechanismus. Die Stütze als einzelnes ist einfach zu ersetzen und umfangreichere Reparaturen an der installierten Ankerplatte können so vermieden werden.

### 3.4.1 Mechanisches Modell

Am Stützenkopf greifen in der Verbauung die eingesetzten Trag-, Rückhalte- und Abspannseile mit den dazugehörigen Bremsringen an. Dieser quasi gelenkige Anschluss kann kein von der Stütze übertragenes Biegemoment aufnehmen, womit am dortigen Stützenende keine Einspannmomente auftreten können. Deshalb wird dieses Stützenende im Modell gelenkig gelagert. Durch die Langlochverbindungen der Stützenfusslaschen mit dem Gelenkbolzen sind die verschiedenen Stützenfüsse ebenfalls gelenkig gelagert anzunehmen. Es gibt praktisch keinen Lastfall, der die eingesetzte Stütze auf Torsion belasten würde, weshalb die Stütze auch bezüglich Torsion um die Längsachse als gelenkig angenommen wird.

Somit werden als mechanisches Modell für die Simulation der Stützen Pendelstützen angenommen. Das entsprechende Stabelement besitzt an den beiden Elementknoten mit den Ortsvektoren  $\mathbf{x}_i$  die üblichen drei Verschiebungsfreiheitsgrade, ausgedrückt im Verschie-

bungsvektor  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2$ ) und kann einen Widerstand in Form einer axialen Normalkraft  $N$  aufbauen (Abb. 3.24). Der Verbindungsvektor  $\mathbf{x}_{21}$  bildet die momentane Orientierung der Stütze im Raum ab.

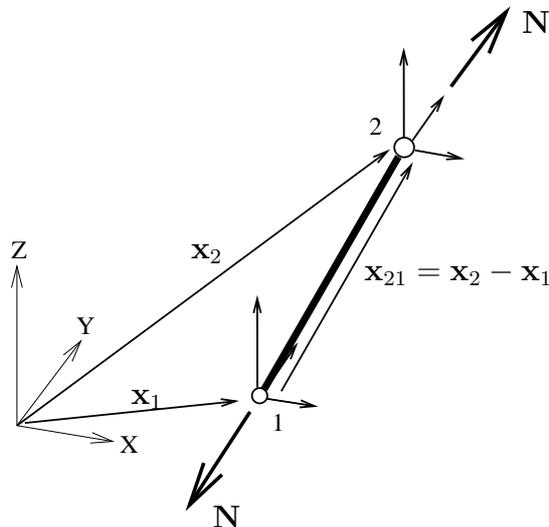


Abbildung 3.24: Mechanisches Modell für eine räumliche Stütze mit Angabe der Verschiebungsfreiheitsgrade und der Reaktionskraft

## 3.4.2 Elementeigenschaften

### 3.4.2.1 Materialverhalten

Im Vergleich zu den im gesamten System auftretenden Verformungen nimmt sich die Stauchung einer solchen Stütze mit höchstens wenigen Millimetern sehr klein aus. Demnach wäre auch eine Modellierung der Stützen als reine Starrkörper denkbar. Notwendig hierfür wäre eine Kopplung der Knotenfreiheitsgrade parallel zur Verbindungslinie der beiden Elementknoten und eine direkte Übertragung der auftretenden Kräfte in dieser Richtung. Für die Annahme eines Starrkörpers spricht zudem, dass die eingesetzten Walzprofile voraussichtlich nur zu einem sehr geringen Prozentsatz ihrer Tragfähigkeit beansprucht werden, da sie auch nur Normalkräfte aufnehmen und im Vergleich zu den am Stützenkopf angreifenden Seilen eine viel höhere Querschnittsfläche zur Abtragung derselben haben. Somit könnte der Auslastungsgrad der Stützen für die Simulation vernachlässigt werden, solange die Normalkraft noch erfasst wird.

Dennoch wird für die Simulation der Stützen eine elastisch deformierbare Pendelstütze zur Übertragung von Zug- und Druckkräften gewählt. Dies erweitert den Anwendungsbereich des Elementes auch auf weitere allenfalls zu modellierende Verbauungskomponenten.

Charakterisiert wird ein Stützelement in Bezug auf Normalkraftverformung durch die Querschnittsfläche  $A$  des Stützenprofils, durch die Stützenanfangslänge  $l_0$  und durch den Elastizitätsmodul  $E$ . Die Querschnittsfläche wird jeweils angegeben, die Anfangslänge  $l_0$  der Stütze ergibt sich zu Beginn der Simulation aus den Koordinaten der Elementknoten  $\mathbf{x}_{0,1}$  und  $\mathbf{x}_{0,2}$ . Da es sich bei den verwendeten Stützen immer um Stahlprofile handelt,

wird ein Elastizitätsmodul von  $E = 210000\text{N/mm}^2$  angenommen. Die Belastung der Stützen bleibt im generell im elastischen Bereich, weswegen in der Simulation mit einem konstanten Elastizitätsmodul gerechnet werden kann. Die aktuelle Länge  $l$  der Stütze ergibt sich aus den aktuellen Koordinaten der Elementknoten  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ . Aus der damit ermittelbaren Dehnung  $\varepsilon$  berechnet sich die Normalkraft  $N$  der Pendelstütze zu

$$N = \sigma A = E\varepsilon A = EA\left(\frac{l}{l_0} - 1\right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} l_0 = |\mathbf{x}_{0,2} - \mathbf{x}_{0,1}| \\ l = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \end{array} \quad (3.25)$$

Auf Grund der Belastung der Stütze im elastischen Bereich und des daraus resultierenden konstanten Elastizitätsmoduls hat diese Formel in der absoluten Form ihre Gültigkeit auch für grosse Verformungen und die dadurch bedingte geometrische Nichtlinearität. Ein inkrementeller Ansatz zur Berechnung der Normalkraft wie zum Beispiel in [53] beschrieben ist nicht notwendig.

Damit ergibt sich der von der Stütze aufgebrachte Widerstand bzw. ergeben sich die an den Knoten aufzubringenden Kräfte zu

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = N\mathbf{x}_{21}^0 \quad (3.26)$$

### 3.4.2.2 Mögliche Versagenszustände

Grundsätzlich gilt, dass ein Versagen einer einzelnen Stütze der Verbauung im Gesamten zu mehr Bewegungsfreiheit verhilft und durch die so entstandene höhere Flexibilität die Gesamttragfähigkeit des Systems gesteigert wird. Insofern gehört das Stützenversagen nicht zu den primär zu untersuchenden Effekten bei der Entwicklung eines Steinschlagverbauungssystems.

In erster Linie sind die Stützen besonders gefährdet, wenn das Steinschlagereignis die Stütze direkt trifft. Die Mechanismen, die dabei auftreten, sind in dieser Arbeit nicht erfasst, könnten jedoch in einer separaten Finite-Element-Analyse, in der das Stahlprofil sehr fein diskretisiert wird, ermittelt werden. Diese sind jedoch als unwichtig einzustufen, da dieser Lastfall in der Regel mit einem Stützensausfall gleichgesetzt wird. Um diese Auswirkung des Stützentreffers auf die übrige Steinschlagverbauung zu untersuchen, entfernt man die Stütze aus dem Modell der Steinschlagverbauung und verteilt die Steinmasse auf die beiden ursprünglichen Stützenknoten und behaftet diese wiederum mit einer Restgeschwindigkeit.

Auch wenn die Verbauungsstützen bei einem normalen Steinschlagereignis innerhalb der Ringnetze nur einen geringen Auslastungsgrad aufweisen, gibt es dennoch Fälle, in denen sie versagen können (geordnet nach vermuteter absteigender Versagenslast):

- Erreichen der Bruchspannung im Walzprofil.
- Erreichen der Bruchspannung in den Stahllaschen am Stützenfuss.
- Stabilitätsversagen des Walzprofils durch Ausknicken: Durch die gelenkige Lagerung der Stütze an beiden Enden ergibt sich nach Euler eine Knicklast von  $N_{krit} = \pi^2 EI/l^2$  mit  $I$  als kleinstem Flächenträgheitsmoment des Walzprofils.

- Stabilitätsversagen der an das Walzprofil angehängten Stahllaschen durch Beulen oder Ausknicken: Bei diesem Versagensmechanismus, verliert die Stütze nicht die komplette Tragfähigkeit. Lediglich der Stützenfußpunkt wird etwas verschoben.
- Bruch des Verbindungsbolzens zwischen Stütze und Ankerplatte: Dieser Versagensmechanismus stellt die Sollbruchstelle der Stützenkonstruktion dar und soll eintreten, bevor die vorigen Versagensfälle eintreten. So muss im Reparaturfall nur der Bolzen und nicht die gesamte Stütze ersetzt werden.

Die Analyse der Stütze auf die jeweiligen Versagensmechanismen hin ist nicht Teil dieser Arbeit, da dies einem eigenen Optimierungsprozess untergeordnet werden muss. In der Simulation kann eine dafür ermittelte Maximallast für Zug- und Druckkräfte als obere bzw. untere Grenze angegeben werden. Damit erhält man auch für die Stützen während der Simulation Aussagen über den Grad der Auslastung dieser Komponenten.

#### 3.4.2.3 Dynamisches Verhalten

Die Masse  $m$  einer Stütze ermittelt sich aus der Querschnittsfläche des Walzprofils und der für die dynamischen Prozesse als konstant angenommenen Länge  $l_0$  der gesamten Stütze zu  $m = \rho A l_0$ , wobei als Dichte der Stütze die Dichte von Stahl mit  $\rho = 7.85 \text{ to/m}^3$  angenommen wird. Auf Grund der insgesamt hohen Masse der Stütze wird ein verbleibender Massenfehler als akzeptabel angesehen. Dieser beinhaltet z.B. eine evtl. unterschiedliche Masse der Laschen pro Laufmeter im Vergleich zum eingesetzten Stützenprofil sowie die Trittstufen bzw. Transportbügel und Fixpunktbefestigungen für die an den Stützen angreifenden Seile. Diese Fehler gleichen sich zudem teilweise gegenseitig aus.

Die Seilführungs- bzw. -befestigungskonstruktion am Stützenkopf kann durch Addition einer zusätzlichen Punktmasse am entsprechenden Elementknoten ausreichend abgebildet werden.

Die Masse eines Stützen- bzw. Stabelements ist wie bei den anderen Elementen in den Elementknoten konzentriert. Diese beiden konzentrierten Punktmassen bilden die Massenträgheit der Stütze bezüglich translatorischen Starrkörperbewegungen exakt ab. Die Masse einer Stütze ist im Vergleich zu den übrigen Verbauungselementen aufgrund der grossen Querschnittsfläche und der Stützenlänge sehr hoch. Aus diesem Grund werden zusätzlich die dynamischen Effekte, die bei der Rotation der Stütze auftreten, als Starrkörperbewegung der Stütze simuliert. Ziel ist es deshalb im Folgenden, die Rotation der Stütze abzubilden und an den Knoten die entsprechenden Trägheitskräfte anzusetzen.

Im Wesentlichen handelt es sich dabei um eine Korrektur der an den Massenpunkten angreifenden Trägheitskräfte, die bei der expliziten Zeitintegration unter der Annahme ermittelt werden, dass die vorhandenen Knotenbeschleunigungen nur von translatorischen Bewegungen herrühren.

Bei den Trägheitskräften bezüglich der Rotation interessieren weniger die Winkeländerungen, als vielmehr die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung, weshalb nur diese hergeleitet werden.

Abb. 3.25 zeigt ein Stabelement mit den konzentrierten Knotenmassen  $m = m_{\text{Stütze}}/2$

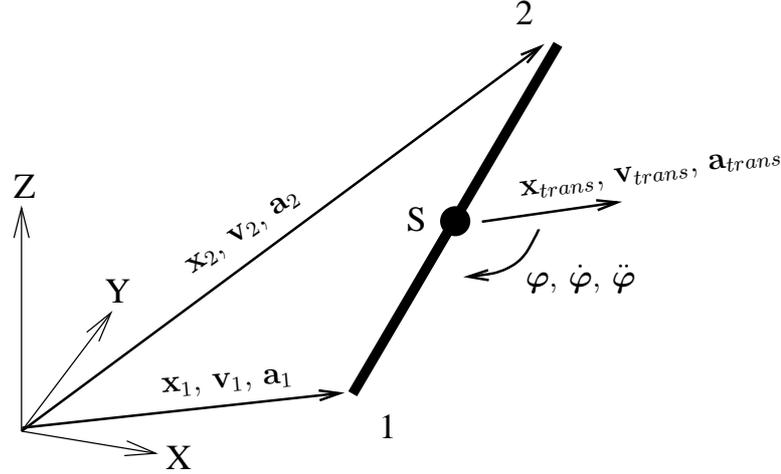


Abbildung 3.25: Allgemeine translatorische und rotatorische Bewegung einer Stütze

zum Zeitpunkt  $t$ . Mit Hilfe dieser Angaben lässt sich nun anhand der Bewegungen der beiden Knotenmassen zueinander die Kinetik des Stützelementes bestimmen.

Allgemein gilt, dass sich jede beliebige Bewegung der Stütze durch eine Translation, überlagert von einer Rotation um den Stützenschwerpunkt abbilden lässt. Die Starrkörpertranslation der Stütze bestimmt sich aus den Mittelwerten der Stützenknoten:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{trans} &= (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1)/2 \\ \mathbf{a}_{trans} &= (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1)/2.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Daraus folgen die Differenzen  $\Delta\mathbf{v}_i$  und  $\Delta\mathbf{a}_i$  der einzelnen Knotenbewegungen in Bezug auf die Bewegung des Schwerpunktes

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{trans} \\ \Delta\mathbf{a}_i &= \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{trans}\end{aligned}\quad \text{mit } i = 1, 2.\quad (3.28)$$

Die Starrkörperrotation wird erfasst durch die tangentielle Bewegung der Knoten um den Stützenschwerpunkt. Dafür zerlegt man die Differenz der Knotenbewegungen zur Bewegung des Stützenschwerpunktes in zwei Komponenten parallel und senkrecht zu  $\mathbf{x}_{21}$ . Die parallele Komponente ist die Projektion von  $\Delta\mathbf{v}_i$  (bzw.  $\mathbf{a}_i$ ) auf  $\mathbf{x}_{21}$

$$\Delta\mathbf{v}_i^{\parallel} = (\Delta\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{x}_{21}^0) \mathbf{x}_{21}^0 \quad (3.29)$$

und beschreibt die aktuelle Längenänderung der Stütze infolge der wirkenden Normalkraft.

Die senkrechte Komponente

$$\Delta\mathbf{v}_i^{\perp} = \Delta\mathbf{v}_i - \Delta\mathbf{v}_i^{\parallel} \quad (3.30)$$

ist die jeweilige Rotationsgeschwindigkeit der beiden Stabenden, d.h. jedes der Enden bewegt sich mit dieser Tangentialgeschwindigkeit  $\Delta\mathbf{v}_i^{\perp}$  um den Stabmittelpunkt.

Analog dazu ermittelt sich die Tangentialbeschleunigung:

$$\Delta\mathbf{a}_i^{\perp} = \Delta\mathbf{a}_i - \Delta\mathbf{a}_i^{\parallel} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{a}_i^{\parallel} = (\Delta\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_{21}^0) \mathbf{x}_{21}^0. \quad (3.31)$$

Auf Grund der Punktsymmetrie der Starrkörperrotation um den Stützenmittelpunkt gilt nun

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_1^\perp &= -\Delta \mathbf{v}_2^\perp \\ \Delta \mathbf{a}_1^\perp &= -\Delta \mathbf{a}_2^\perp.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Deshalb lassen sich aus den tangentialen Bewegungsgrößen die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  und die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  der Starrkörperrotation mit dem Radius  $r = l_0/2$  um den Schwerpunkt ermitteln.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= |\Delta \mathbf{v}_i^\perp|/r = 2|\Delta \mathbf{v}_i^\perp|/l_0 \\ \ddot{\varphi} &= |\Delta \mathbf{a}_i^\perp|/r = 2|\Delta \mathbf{a}_i^\perp|/l_0.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Die Rotation erfolgt dabei um den Schwerpunkt der Stütze mit der Drehachse  $\mathbf{t} = \Delta \mathbf{v}_1^\perp \times \mathbf{x}_{21}$ .

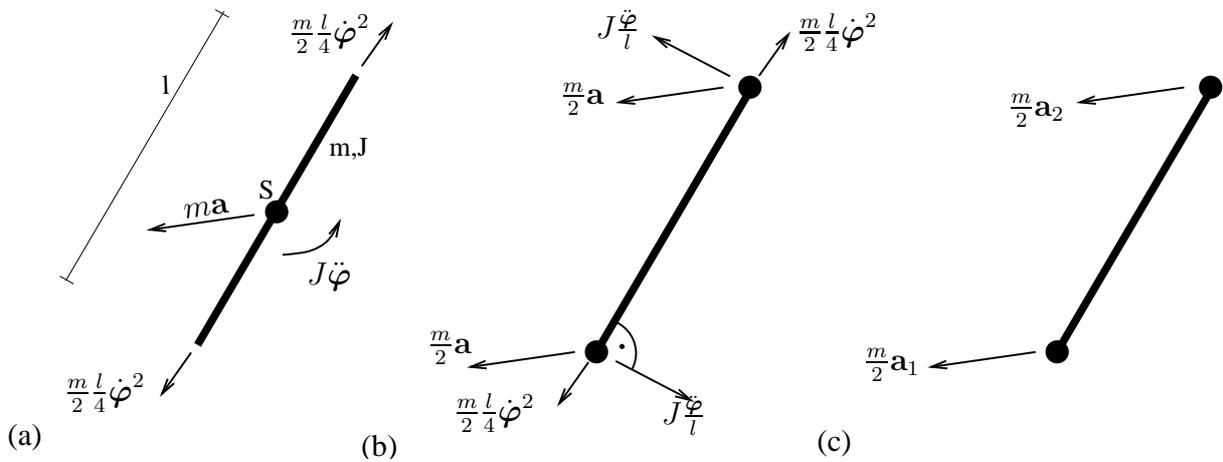


Abbildung 3.26: Trägheitskräfte einer Stütze: (a) am Schwerpunkt angreifend, (b) mit Ersatzkräften an den Knoten und (c) ohne Berücksichtigung der Rotation

Für eine Stütze mit dem Massenträgheitsmoment  $J = ml_0^2/12$  bei Rotation um den Mittelpunkt ergeben sich nun die in Abb. 3.26a beschriebenen zu berücksichtigenden Trägheitskräfte der Stütze. Abb. 3.26b beschreibt die Ersatzkräfte an den beiden Stützenendknoten.

Bei der expliziten Zeitintegration werden wegen der Diagonalisierung der Massenmatrix jedoch nur die in Abb. 3.26c angegebenen Trägheitskräfte berücksichtigt. Die konsistente Massenmatrix für ein zweidimensionales Stabelement ergibt die aus ihr resultierenden Trägheitskräfte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} = -\frac{m l_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}.\quad (3.34)$$

Diese beinhalten die translatorischen Trägheitskräfte und die an den Knoten tangential zum Stab angreifende rotatorische Trägheitskomponente (siehe Abb. 3.26b). Letztere wird bei der diagonalisierten Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{lumped} = \frac{m l_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (3.35)$$

jedoch nicht richtig erfasst. Auf Grund der hohen Masse der Stützen im Vergleich zu den übrigen Verbauungskomponenten soll sie jedoch mit in die Berechnungen einfließen. Daraus ergibt sich praktisch einen Zeitschritt verzögert eine Korrektur der wirkenden Knotenkräfte von

$$\mathbf{F}_i = -\frac{m}{2}\mathbf{a}_{trans} - (-1)^i \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{l_0}{4} \mathbf{x}_{21}^0 - \frac{J\ddot{\varphi}}{l_0} \Delta \mathbf{a}_1^{\perp,0} + \frac{m}{2} \mathbf{a}_1. \quad (3.36)$$

Hier wird zudem noch der Anstieg der durch die Fliehkraft erzeugten Stützennormalkraft mit berücksichtig. Dieser ist in der Regel komplett zu vernachlässigen, stellt aber bei der Korrektur der Fliehkkräfte auch nur einen kleinen weiteren Term da und kann somit ohne grossen Rechenaufwand mit berücksichtigt werden.

### 3.4.3 Einseitig eingespannte Stützen für Niedrigenergiesysteme

In Steinschlagverbauungen, die für geringere Steinschlagenergien ausgelegt sind, kommen teilweise auch Stützen zum Einsatz, die am Fuss biegesteif mit der Bodenplatte verschraubt werden. Belastet wird die Stütze in der Verbauung durch die am Stützenkopf befestigten Tragseile. Insofern ist es ausreichend, dass ebenfalls am Kopf angreifende Rückstellkräfte ermittelt werden.

Ein einseitig eingespannter Biegebalken mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und einem Flächenträgheitsmoment  $I$  kann durch Einsatz einer Drehfeder am Stützenfuss der biegefreien Pendelstütze simuliert werden. Dazu wird im Folgenden die Ersatzfedersteifigkeit der Drehfeder unter der Annahme bestimmt, dass die Biegebeanspruchung der Stütze im elastischen Bereich verbleibt. Die Verformungen bleiben klein. Nimmt man die Einspannung selbst als starr an, so bildet die Drehfeder nur die Biegesteifigkeit des Stützenprofils bzgl. Biegung um die starke oder schwache Achse ab. Da die in der Simulation verwendeten drei Verschiebungsfreiheitsgrade pro Knoten dieses Moment nicht aufnehmen können, bringt man an Stelle des Moments ein entsprechendes Kräftepaar an Stützenkopf und -fuss auf und hält auf diese Weise die Pendelstütze im Gleichgewicht. Im Rahmen der Simulation gilt es nun, das entsprechende Rückstellmoment bzw. die Ersatzrückstellkraft zu ermitteln.

Gegeben sei die in Abb. 3.27a gezeigte zweidimensionale Pendelstütze. Im Laufe der Simulation ergibt sich eine Auslenkung der Stütze um den Winkel  $\varphi$  gedreht um die Drehachse  $\mathbf{t}$  in Bezug auf den Zustand 0 zu Beginn der Simulation.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \mathbf{x}_{21} \cdot \mathbf{x}_{21,0} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{x}_{21,0} \times \mathbf{x}_{21}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Es geht nun darum, eine Kraft  $F$  zu ermitteln, die bei einem einseitig eingespannten Biegebalken die gleiche Auslenkung  $\varphi$  erzeugt. Die durch eine entsprechende Kraft  $F$  erzeugte Momentenlinie  $M_{(x')}$  des Balkens ist in Abb. 3.27b gezeigt. Die Krümmung  $\kappa_{(x')}$  des Biegebalkens ist nach der Differentialgleichung der Biegelinie

$$\kappa_{(x')} = EI \frac{d^2 w}{dx'^2} = M_{(x')}. \quad (3.38)$$

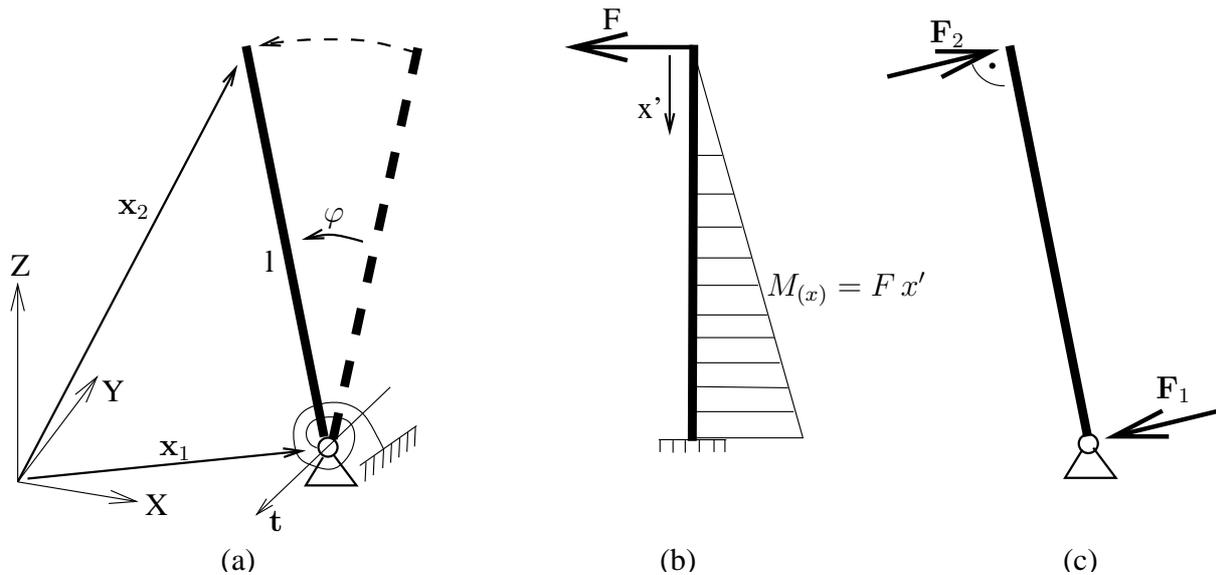


Abbildung 3.27: Simulation eines am Ende durch eine Kraft belasteten eingespannten Kragarms durch eine Pendelstütze und entsprechende Ersatzkräfte

Diese nun über die Länge des Balkens integriert, ergibt die bekannte Arbeitsgleichung für die Gesamtverdrehung der Stütze:

$$\varphi = \int_0^{l_0} \frac{M}{EI} dx' = \frac{1}{EI} \int_0^{l_0} F x' dx' = \frac{F l_0^2}{2EI}. \quad (3.39)$$

Damit lässt sich die Rückstellkraft der Biegefeder in Anhängigkeit von der Verdrehung  $\varphi$  des Balkens ausdrücken durch

$$F = \frac{2EI}{l_0^2} \varphi \quad (3.40)$$

und an den beiden Knoten der Pendelstütze greifen die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  an (siehe Abb. 3.27c) mit

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = F(\mathbf{t} \times \mathbf{x}_{21}) = \frac{2EI}{l_0^2} \varphi (\mathbf{t} \times \mathbf{x}_{21}). \quad (3.41)$$

Dieser Vorgang muss nun an jeder Stütze separat für Biegung um die starke und Biegung um die schwache Achse berechnet werden.

**Anmerkung:** Auch hier müssten wie für die vorhin beschriebene Pendelstütze die Trägheitskräfte korrigiert werden. Da bei einer fest eingespannten Stütze die zu erwartenden Verdrehung sehr klein bleibt, kann der hier gemachte Fehler vernachlässigt werden.

# 4 Numerische Simulation des Steins

Bei den untersuchten Steinschlagschutzverbauungen stellt der Steinschlag selbst neben dem weitgehend vernachlässigbaren Eigengewicht der Verbauung die einzige zu berücksichtigende Belastung dar. Dieses Kapitel beschreibt nun die verwendeten Methoden, mit denen ein Steinschlagereignis mit den untersuchten Verbauungen simuliert wurde. Dazu gehören in erster Linie die Kinematik und Dynamik des Steins als Starrkörper und die Beschreibung der Interaktion zwischen Stein und Steinschlagverbauung. Gegen Ende des Kapitels wird noch eine mögliche Erweiterung der Steinform auf andere als die verwendete kugelförmige beschrieben.

## 4.1 Modellierung

Als Modell zur Simulation des Steins wird ein Starrkörper angenommen. Dies zum einen, da die Verformungen des Steins sehr klein gegenüber den Systemverformungen der Verbauung sind und zum anderen, weil keine Schädigungen des Steins zu erwarten bzw. nicht von Interesse sind, welche ein Materialgesetz zur Modellierung des Steins erfordern würden.

Eine Steinschlaganalyse liefert in der Regel die Daten, die zum Start der Auffangnetzsimulation gebraucht werden: Die Einschlagposition, sowie Einschlaggeschwindigkeit und -richtung. Ebenso ist es heutzutage möglich, mit Hilfe der Steinschlaganalyse Aussagen über die Orientierung des meist asymmetrischen Steins sowie seine Rotationsgeschwindigkeit zu machen. Jedoch variieren diese Parameter in der Natur zu stark, als dass sie zu diesem Zeitpunkt sinnvoll in ein Versuchsprogramm integriert werden konnten. Aus diesem Grund beschränkte man sich bei den innerhalb dieses Projekts durchgeführten Versuchen auf einen kugelförmigen Versuchskörper und einen vertikalen rotationsfreien freien Fall des Testkörpers in die Versuchsanlage. Der meist symmetrisch liegende Aufschlagort in der Verbauung erzeugte zudem kaum Rotationen des Versuchskörpers während des Auffangprozesses. Auch die Kontaktkräfte zwischen Verbauung und Stein wirken senkrecht zur Steinoberfläche und können den Starrkörper auf Grund seiner Kugelform nicht in Rotation versetzen, da der Stein als homogen angesehen wird und sich somit der geometrische Mittelpunkt mit dem Massenschwerpunkt deckt. Insofern wäre eine Simulation des Versuchskörpers als rotationsfreier Starrkörper denkbar. Lediglich die zu berücksichtigende Reibung zwischen Stein und Verbauung und der Ausblick auf nicht mehr kugelförmige Testkörper erfordern letztendlich die Beschreibung der Drehbewegung.

## 4.2 Kontakt mit der Steinschlagverbauung

Kern der Interaktion zwischen Stein und Netz ist die Berechnung des Kontaktmechanismus zwischen diesen Komponenten. Ziel hierbei ist es, durch einen geeigneten Algorithmus in der Simulation die Eindringung der Verbauung in den Starrkörper Stein zu verhindern. In diesem Abschnitt wird hierfür ein geeignetes Verfahren zur Beschreibung des Kontaktverhaltens ausgewählt. Dieses, zuerst zweidimensional für einen einzelnen Elementknoten verifiziert, wird dann auf die Interaktion mit mehreren Knoten erweitert. Des Weiteren werden noch Reibungs- und Dämpfungseffekte mit eingearbeitet und ein Ansatz für die Interaktion mit einem eventuell vorhandenen Untergrund berücksichtigt. Die Verwendung aller Herleitungen für dreidimensionale Körper ist durch eine konsequente Vektorformulierung aller Größen ebenfalls gegeben.

### 4.2.1 Getroffene Annahmen und Auswahl des Kontaktberechnungsverfahrens

Herkömmliche Finite-Element-Programme definieren Starrkörper in der Regel durch Kombination verschiedener Einzelelemente, die wiederum als ein zusammenhängender Starrkörper behandelt werden (z.B. [53]). Die aussen liegenden Elementflächen definieren dabei die Oberfläche und ein zentraler Bezugspunkt die Bewegung des ganzen Starrkörpers. Diese Methode hat den Vorteil, dass mehr oder weniger willkürlich geformte Starrkörper einfach modellierbar sind. Jedoch wird die Kontaktinteraktion dadurch sehr viel aufwändiger als bei der hier gewählten Modellierung des Starrkörpers (siehe übernächster Absatz).

Der hier modellierte Stein hingegen ist für die Simulation nichts anderes als ein Knoten mit einer gewissen Ausdehnung. Die Ausdehnungsbeziehung definiert sozusagen eine Oberfläche, welche von den Elementknoten nicht durchdrungen werden darf. Im ersten Ansatz wird die Form des Steins als kugelförmig angenommen. Später wird diese Annahme auch auf weitere Formen mit stetiger differenzierbarer Oberfläche erweitert.

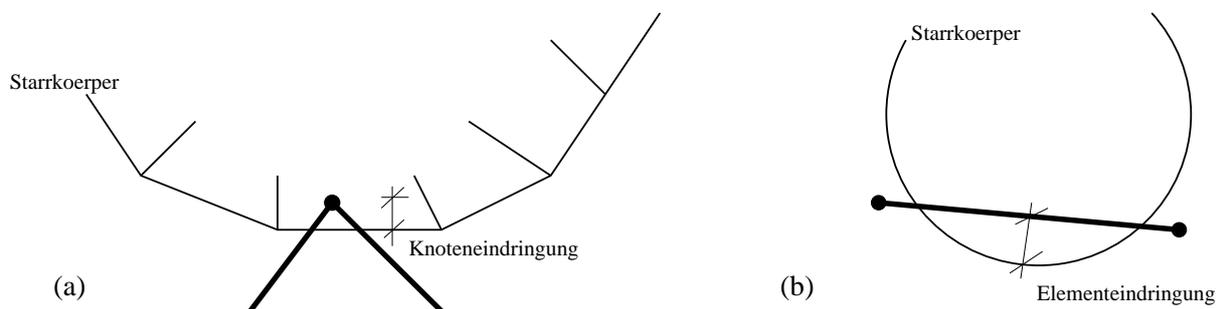


Abbildung 4.1: Mögliche Eindringung in einen Starrkörper: (a) Knoten und (b) Element

Grundsätzlich geht es darum, dass die Elemente der Steinschlagverbauung nicht in den Stein eindringen sollen. Die Elemente selbst sind in der Simulation jedoch nicht als Körper an sich existent. Lediglich ihre End- und Zwischenknoten können zur Kontaktberechnung

herangezogen werden. D.h. man nimmt in Kauf, dass die Elementanteile zwischen den Inzidenzknoten in den Stein eindringen, ihn sozusagen durchschneiden (siehe Abb. 4.1b) und kontrolliert nur, ob die Elementknoten (*slaves*) die sogenannte *master*-Oberfläche durchdringen. Die klassischen Finite-Element-Programme ermitteln aus den meist drei oder vier Oberflächenknoten eines Starrkörperelements eine Ebene für jedes Oberflächensegment und kontrollieren dann den Abstand der *slave*-Knoten zu dieser Ebene. Dieses Vorgehen bei der Kontaktinteraktion ist vor allem bei grossen Rutschungen und nicht vorgeordneten *master-slave*-Beziehungen sehr rechenintensiv, weil hier in jedem Zeitschritt für jeden einzelnen *slave*-Knoten ein geeignetes *master*-Segment gefunden werden muss (Abb. 4.2a). Hingegen gibt es bei dem in dieser Arbeit gewählten Modell für den Stein nur eine einzige (gekrümmte) Ebene, bezüglich derer alle *slave*-Knoten kontrolliert werden, was der Simulation Geschwindigkeitsvorteile verschafft (Abb. 4.2b). Obendrein verhindert die kantenlose Oberfläche Unregelmässigkeiten und Instabilitäten während der Simulation.

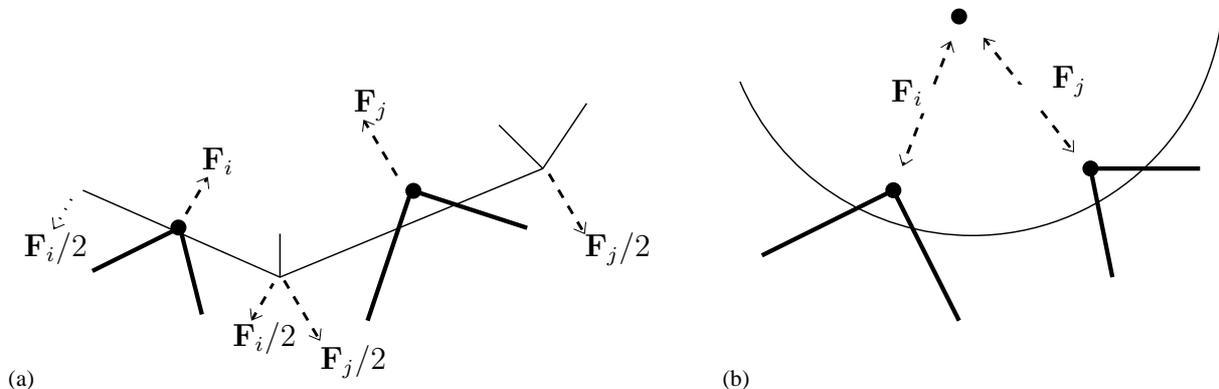


Abbildung 4.2: Reduktion der Kontaktinteraktion bei Verwendung eines zentralen Bezugspunkts für den Stein

Für die numerische Formulierung von Kontaktbeziehungen müssen nun für die *slave*-Knoten entsprechende Zwangsbedingungen gefunden werden. D.h. zusätzliche Bindungsgleichungen verhindern ihr Eindringen in die Masteroberfläche. Da sich nun sämtliche Massenpunkte im Prinzip unabhängig voneinander nur durch entsprechend wirkende Kräfte gesteuert bewegen, soll auch die Kontaktbedingung über wirkende Kontaktkräfte realisiert werden. Der folgende Abschnitt beschreibt die Formulierung der Kontaktbedingung mit verschiedenen Ansätzen auf Lage-, Geschwindigkeits- und Energieebene.

#### 4.2.2 Formulierung eines reibungsfreien Kontaktgesetzes

Die Bestimmung der Kontaktkräfte orientiert sich am in Kapitel 2.1 beschriebenen Zeitintegrationsverfahren nach der Methode der zentralen Differenzen. Ziel ist es, über aufgebraute Korrekturkräfte den Stein und die in den Stein eingedrungenen Elementknoten so zu korrigieren, dass die Eindringungsbeziehung im nächsten Zeitschritt nicht verletzt wird. Damit dem Gesamtsystem keine Energie zugeführt oder entzogen wird, wird für jede Kontaktbeziehung ein gegengerichtetes Kräftepaar eingesetzt.

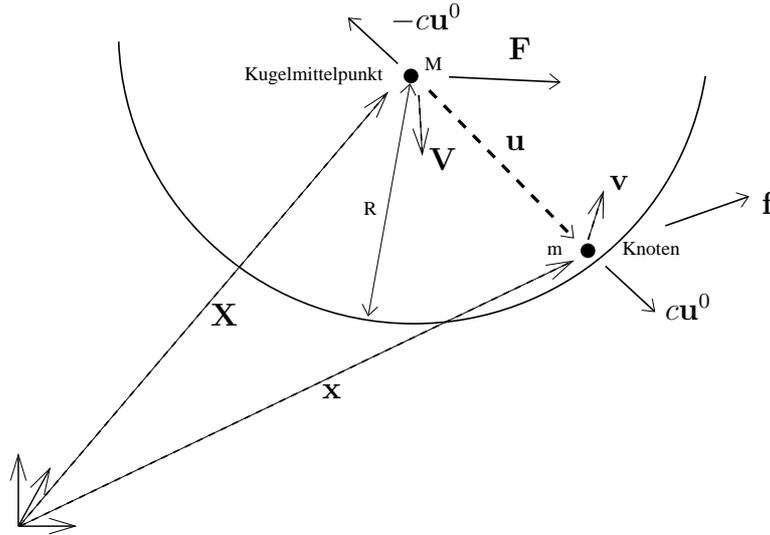


Abbildung 4.3: Zweidimensionale Kontaktbeziehung zwischen kugelförmigem Stein und einem einzelnen Knoten

Der Starrkörper hat die Masse  $M$  und den Kugelradius  $R$ , der Knoten  $N$  die meist sehr viel kleinere Masse  $m$ . Abb. 4.3 zeigt die Beziehung zwischen dem Starrkörper und einem einzelnen Knoten und Tab. 4.1 die für den Kontakt relevanten Größen. Die für den aktuellen Zeitschritt einwirkenden Kräfte  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{f}$  auf die am Kontakt beteiligten Körper sind bereits berechnet (siehe Abb. 2.1).

Aufgrund der Kugelform des Steins beschreibt der Verbindungsvektor  $\mathbf{u}$  zwischen Stein und Knoten gleichzeitig die Obeflächennormale an der Stelle der Knotenpenetration. Dies ist gleichzeitig die Richtung, in die die zu berechnenden Kontaktkraft  $c\mathbf{u}^0$  auf den Knoten und in negativer Richtung auf den Stein wirkt und deren Grösse es so zu bestimmen gilt, so dass die gewünschte Korrektur zum Zeitpunkt  $t = t + \Delta t$  erfüllt wird. Die Kontaktkräfte treten nur dann auf, wenn der Knoten in den Stein eindringt, d.h.  $|\mathbf{u}| < R$  und stellen somit eine einseitige Bindung für den Knoten an den Stein dar. Betrachtet man nun die gesuchte Kontaktkraft  $c\mathbf{u}^0$  als normale Knotenlast, so lassen sich die Formeln der Zeitintegration für den Knoten wie folgt schreiben:

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f} + c\mathbf{u}^0}{m} \Delta t \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_t + \mathbf{v}^+ \Delta t. \quad (4.2)$$

Die entsprechenden Formeln für den Stein gelten analog nur mit negativer Kontaktkraft. Auf Grund der Kugelform des Steins resultieren aus den Kontaktkräften keine auf den Steinschwerpunkt wirkenden Momente, weswegen eine eventuelle Drehbewegung des Steins vorerst nicht berücksichtigt wird.

Die Grösse von  $c$  orientiert sich z.B. nach [45] an der Steifigkeit des Körpers, in den der Knoten eindringt. Handelt es sich wie in dieser Arbeit dabei jedoch um einen starren Körper, existiert keine solche Steifigkeit. Darum werden in den nachfolgenden Abschnitten verschiedene Ansätze zur Berechnung der Kontaktkraft hergeleitet, welche letztendlich dann in Abschnitt 4.2.2.4 miteinander verglichen und auf ihre Brauchbarkeit für die Simulation überprüft werden.

<u>Zeit <math>t = t - \Delta t/2</math>: Geschwindigkeiten</u>	
$\mathbf{V}$	Geschwindigkeit des Steins
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeit des Knotens
$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$	Geschwindigkeit des Knotens gegenüber dem Stein
<u>Zeit <math>t = t</math>: Kräfte und Lagebeziehungen</u>	
$\mathbf{F}$	Gewichtskraft des Steins
$\mathbf{f}$	Gewichts-, Dämpfungs- und Elementkräfte am Knoten
$\mathbf{X}$	Position des Steins
$\mathbf{x}$	Position des Knotens
$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$	Vektor vom Steinmittelpunkt zum Knoten (normiert: $\mathbf{u}^0$ )
<u>Zeit <math>t = t + \Delta t/2</math>: Geschwindigkeiten</u>	
$\mathbf{V}^+$	neue Geschwindigkeit des Steins
$\mathbf{v}^+$	neue Geschwindigkeit des Knotens
$\Delta\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^+ - \mathbf{V}^+$	Geschwindigkeit des Knotens gegenüber dem Stein
<u>Zeit <math>t = t + \Delta t</math>: Lagebeziehungen</u>	
$\mathbf{X}_{t+\Delta t}$	neue Position des Steins
$\mathbf{x}_{t+\Delta t}$	neue Position des Knotens
$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_{t+\Delta t}$	Vektor vom Steinmittelpunkt zum Knoten (normiert: $\mathbf{u}_{t+\Delta t}^0$ )

Tabelle 4.1: Relevante Grössen für die Berechnung der Kontaktkraft zwischen einem Knoten und dem Stein basierend auf der Methode der zentralen Differenzen

#### 4.2.2.1 Ansatz auf Lageebene

Die natürlichste Variante, den Knoten innerhalb des nächsten Zeitschritts wieder an den Rand des Steins zu befördern, basiert auf folgender Bedingung:

$$|\mathbf{u}_{t+\Delta t}| = |\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_{t+\Delta t}| \stackrel{!}{=} R. \quad (4.3)$$

Mit Gl. 4.1 und Gl. 4.2 ergibt sich folgendes für  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{x}_t + \frac{\Delta t^2}{m}(\mathbf{f} + c\mathbf{u}^0) + \mathbf{v}\Delta t - \mathbf{X}_t - \frac{\Delta t^2}{M}(\mathbf{F} - c\mathbf{u}^0) - \mathbf{V}\Delta t \\ \longrightarrow \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= c\Delta t^2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mathbf{u}^0 + \Delta t^2 \left( \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{F}}{M} \right) + \Delta t\Delta\mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.4)$$

und damit für die Kontaktbedingung

$$|c\mathbf{a} + \mathbf{b}| \stackrel{!}{=} R \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{a} := \Delta t^2 \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mathbf{u}^0 \\ \mathbf{b} := \Delta t^2 \left( \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{F}}{M} \right) + \Delta t\Delta\mathbf{v} + \mathbf{u} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  bestehen dabei aus zum Zeitpunkt  $t$  bekannten Grössen und lassen sich direkt berechnen. Gl. 4.5 lässt sich durch beiderseitiges Quadrieren wie folgt

umformen:

$$(\mathbf{c}\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}\mathbf{a} + \mathbf{b}) = R^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} c^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} c + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - R^2 = 0. \quad (4.6)$$

Daraus folgt

$$c_{1,2} = \frac{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - R^2)}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (4.7)$$

mit zwei potentielle Lösungen für  $c$ . Eine davon ist die Gesuchte, die andere ergibt eine Kontaktkraft, die den Knoten innerhalb eines Zeitschritts auf die gegenüberliegende Seite des Steines bewegen würde. Dieser Wert ist deshalb kleiner als Null und würde bedeuten, dass der Knoten in den Stein gedrückt wird. Darum wird der positive von beiden Werten massgebend bei der Bestimmung der Kontaktkraft.

### Vereinfachung der Kontaktbedingung

Nimmt man an, dass sich Knoten und Stein innerhalb eines Zeitschritts relativ wenig zueinander bewegen, reicht es aus, nur die Länge von  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  projiziert auf  $\mathbf{u}^0$  heranzuziehen, womit sich obige Kontaktbedingung wesentlich einfacher und ohne quadratische Terme formulieren lässt

$$|(\mathbf{u}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{u}^0) \mathbf{u}^0| = \mathbf{u}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{u}^0 \stackrel{!}{=} R \quad (4.8)$$

und sich für die gesuchte Kontaktkraft folgender Wert ergibt

$$c = \frac{Mm}{M+m} \left[ \frac{R - |\mathbf{u}|}{\Delta t^2} + \left( \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{u}^0 \right]. \quad (4.9)$$

#### 4.2.2.2 Ansatz auf Geschwindigkeitsebene

Mit diesem Ansatz gewährt man dem Knoten eine Annäherung an den Stein bis zu einem bestimmten Wert und verhindert jede weitere Eindringung. D.h., die zur Steinoberfläche normale Relativgeschwindigkeit soll verschwinden:

$$|\Delta \mathbf{v}_\perp^+| = \Delta \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t}^0 = \Delta \mathbf{v}^+ \cdot \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t}}{|\mathbf{u}_{t+\Delta t}|} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t} = 0. \quad (4.10)$$

Für  $\Delta \mathbf{v}^+$  gilt dabei

$$\Delta \mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^+ - \mathbf{V}^+ = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f} + c\mathbf{u}^0}{m} \Delta t - \frac{\mathbf{F} - c\mathbf{u}^0}{M} \Delta t, \quad (4.11)$$

was sich wie folgt umschreiben lässt:

$$\Delta \mathbf{v}^+ = \mathbf{a}^* c + \mathbf{b}^* \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{a}^* := \Delta t \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mathbf{u}^0 \\ \mathbf{b}^* := \Delta \mathbf{v} + \Delta t \left( \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{F}}{M} \right) \end{cases}. \quad (4.12)$$

Verwendet man für  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  den Ausdruck mit den beiden Parametern  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aus dem vorigen Abschnitt, gilt somit für die Kontaktkraftbedingung:

$$(\mathbf{a}^* c + \mathbf{b}^*) \cdot (\mathbf{a} c + \mathbf{b}) = 0. \quad (4.13)$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus, erhält man wie im vorigen Abschnitt einen quadratischen Ansatz zur Berechnung der Kontaktkraft.

### Vereinfachung der Kontaktbedingung

Ebenfalls wie im vorigen Abschnitt kann man aber auch annehmen, dass sich Knoten und Stein innerhalb eines Zeitschritts nur geringfügig zueinander verschieben und man deshalb in obigem Ansatz an Stelle von  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}^0$  auch das bereits bekannte  $\mathbf{u}^0$  verwenden kann. Die Kontaktbeziehung lautet dann noch einfacher:

$$\Delta \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{u}^0 = 0 \xrightarrow{\text{Gl. 4.1}} c = \frac{Mm}{M+m} \left( \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{u}^0. \quad (4.14)$$

#### 4.2.2.3 Ansatz auf Energieebene

Dieser Ansatz geht davon aus, dass die Energie des Gesamtsystems *Stein – Knoten* konstant bleiben soll. D.h., die Energieänderung des Steins während des relevanten Zeitschritts muss gleich der Energieänderung des Knotens sein:

$$\Delta E_{Stein} = \Delta E_{Knoten}. \quad (4.15)$$

Die Energieänderung der Massen im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  ergibt sich aus dem Produkt der während dieser Zeit aufgebrauchten Kontaktkraft und dem dabei zurückgelegten Weg nach Gl. 2.31. Damit folgt

$$\Delta E_{Stein} = c \mathbf{u}^0 \left( \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}^+ \right) \stackrel{!}{=} c \mathbf{u}^0 \left( \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^+ \right) = \Delta E_{Knoten} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad & \mathbf{V}^+ + \mathbf{V} & = & \mathbf{v}^+ + \mathbf{v} \\ \xrightarrow{\text{Gl. 4.1}} \quad & 2\mathbf{V} + \frac{\mathbf{F} - c\mathbf{u}^0}{M} \Delta t & = & 2\mathbf{v} + \frac{\mathbf{f} + c\mathbf{u}^0}{m} \Delta t \end{aligned} \quad (4.17)$$

und man erhält als Ansatz für die Kontaktkraft

$$c = \frac{Mm}{M+m} \left( \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}}{m} - 2 \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{u}^0 \quad (4.18)$$

#### 4.2.2.4 Vergleich der Ansätze

Die in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Ansätze der Gleichungen 4.9, 4.14 und 4.18 zur Berechnung der Kontaktkraft sind sich untereinander sehr ähnlich und unterscheiden sich nur in einzelnen Termen. Die Brauchbarkeit der Ansätze kann nun mit Hilfe der Energieerhaltung geprüft werden. Hierzu überprüft man anhand der Bedingung

$$\Delta E = \Delta E_{Knoten} + \Delta E_{Stein}, \quad (4.19)$$

ob das System Energie gewinnt oder verliert. In diesem Fall kann man davon ausgehen, dass ein Stein, der auf eine stehende Verbauung trifft, Energie verliert. D.h., die im Zeitintervall  $\Delta t$  wirkende Kontaktkraft entzieht dem Stein Energie, während der Knoten positiv

beschleunigt wird und dadurch Energie gewinnt. Demnach lässt sich die Energiebilanz mit Hilfe von Gl. 2.31 folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta E &= c \mathbf{u}^0 \cdot \left( \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}^+ \right) - c \mathbf{u}^0 \cdot \left( \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}^+ \right) \\ &= \frac{\Delta t}{2} c \mathbf{u}^0 \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}^+ - \mathbf{V} - \mathbf{V}^+) \\ &\stackrel{\text{Gl. 4.1}}{=} \frac{\Delta t^2}{2} c \cdot \left[ \left( \frac{2\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{F}}{M} \right) \cdot \mathbf{u}^0 + \frac{m+M}{mM} c \right].\end{aligned}\quad (4.20)$$

Setzt man nun den in den verschiedenen Ansätzen für die Kontaktkraft  $c$  gewonnenen Term für das  $c$  innerhalb der Klammer in der obigen Gleichung ein, so erhält man für den Ansatz auf

- **Energieebene:**

$$\Delta E = 0 \quad (4.21)$$

D.h., dem System wird Energie weder zu- noch abgeführt, d.h., der Stossvorgang ist vollelastisch.

- **Geschwindigkeitsebene:**

$$\Delta E = \frac{c}{2} (\Delta t \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^0) \quad (4.22)$$

Da im Kollisionsfall die Differenzgeschwindigkeit  $\Delta \mathbf{v}$  dem Verbindungsvektor  $\mathbf{u}$  entgegengerichtet ist, ergibt sich für das Skalarprodukt  $\Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^0$  ein negativer Wert. Nach der Definition der Kontaktkraftrichtung gilt  $c > 0$  und damit  $\Delta E < 0$ . Das bedeutet, dass der Stein mehr Energie verliert, als der Knoten gewinnt, und dass dadurch Energie abgebaut wird. Anschaulich lässt sich dies so interpretieren, dass die Kollisionsgeschwindigkeit zu Null gesetzt wird, was einem vollplastischen Stoss gleichkommt.

- **Lageebene:**

$$\Delta E = \frac{c}{2} (\Delta t \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^0 + R - |\mathbf{u}|) \quad (4.23)$$

Den Term  $e := \Delta t \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^0$  kann man als die negative Eindringung des Knotens in den Stein mit der Eindringgeschwindigkeit  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^0$  während der Zeit  $\Delta t$  betrachten. Der Term  $R - |\mathbf{u}|$  beschreibt die gleiche Grösse, nur positiv. D.h. die beiden Terme heben sich gegenseitig auf und man erhält wie beim Ansatz auf Energieebene

$$\Delta E = 0 \quad (4.24)$$

Demnach kann man nun davon ausgehen, dass die Ansätze auf Energie- und Lageebene äquivalent sind, womit sich der Ansatz zur Berechnung der Kontaktkraft letztendlich durch

$$c = \frac{Mm}{M+m} \left[ \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}}{m} - (1+e) \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right] \cdot \mathbf{u}^0 \quad \text{mit Stosszahl } e \quad (0 \leq e \leq 1) \quad (4.25)$$

formulieren lässt. Die eingeführte Stosszahl  $e$  beträgt bei einem vollelastischen Stoss  $e = 1$  und bei einem vollplastischen Stoss  $e = 0$ .

In Abb.4.4 sind nun die Energieverläufe über die Zeit während der Kontaktphase dargestellt. Die Energien sind dabei die folgenden:

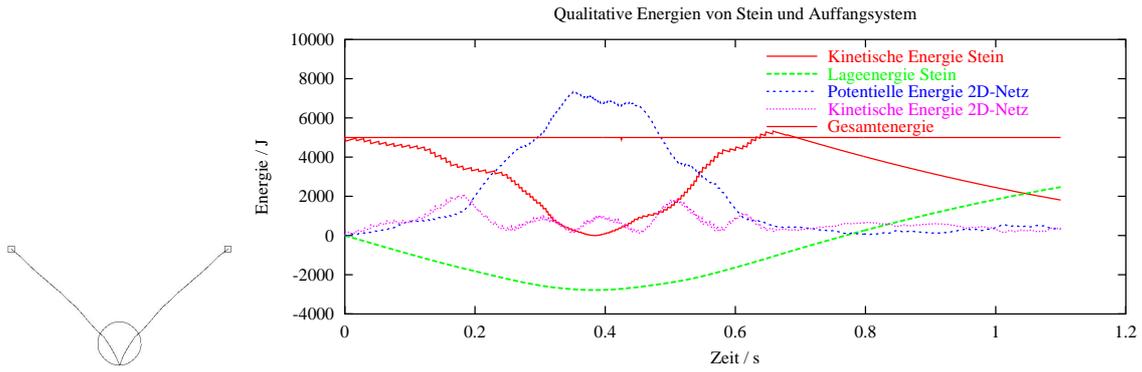


Abbildung 4.4: Zweidimensionale Steinschlagsimulation mit linear-elastischen Stabelementen und vollenelastischem Stossgesetz zwischen einem einzigen Knoten und dem Stein: (links) Simulation und (rechts) Energieverläufe

- Kinetische Energie des Steins:  $E_k = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2$
- Lageenergie des Steins:  $E_p = Mg\Delta X_Z$
- Federenergie in den linear-elastischen Stabelementen:  $E_p = \sum \frac{EA}{l}\Delta l^2$
- Kinetische Energie der 2D-Verbauung:  $E_k = \sum \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$

Als entscheidendes Kriterium für die ordentliche Funktion des Kontaktgesetzes dient hierbei die Gesamtenergie, welche sich für Gesamtsystem während des gesamten Kontaktzeitraums nicht ändert.

### 4.2.3 Kombination mit mehreren Knoten

Oben beschriebenes Verfahren wird nun derart erweitert, dass sämtliche Knoten  $i$ , die mit dem Stein während eines Zeitschritts gleichzeitig in Kontakt stehen, parallel berücksichtigt werden. Da die einzelnen Korrekturkräfte gleichzeitig auf denselben Stein wirken, beeinflussen sie sich ebenfalls gegenseitig: Die resultierende auf den Stein wirkende Kontaktkraft ist die Summe der einzelnen Kontaktkräfte. Die zur Ermittlung dieser gemeinsamen Kontaktbedingung notwendigen Größen sind in Abb. 4.5 dargestellt. Im Wesentlichen sind diese identisch mit den Größen für den Einzelkontakt, die Knotenbezogenen Größen sind nur jeweils mit einem Index versehen.

Der Ansatz aus Gl. 4.25 wird nun neu mit der am Stein angreifenden Kontaktkraft  $\mathbf{C}$  formuliert:

$$\frac{c_i \mathbf{u}_i^0}{m} + \frac{\mathbf{C}}{M} + \frac{\mathbf{f}_i}{m} - \frac{\mathbf{F}}{M} + (1 + e) \frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} = 0. \quad (4.26)$$

Für  $\mathbf{C}$  gilt weiterhin

$$\mathbf{C} = \sum_j c_j \mathbf{u}_j^0 \quad (4.27)$$

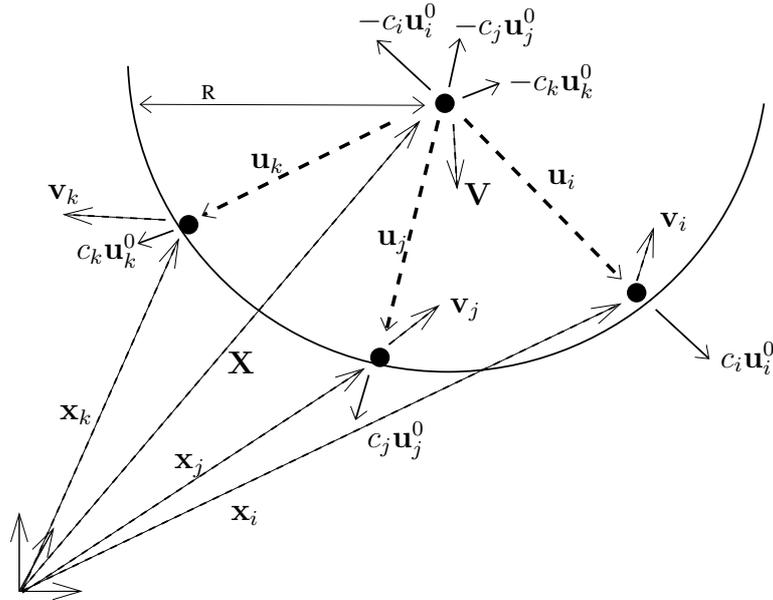


Abbildung 4.5: Zweidimensionale Kontaktbeziehung zwischen Stein und mehreren Knoten

und damit die Umformung

$$\frac{c_i}{m} + \frac{\sum_j c_j \mathbf{u}_j^0 \cdot \mathbf{u}_i^0}{M} = \left( \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}_i}{m} - (1+e) \frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{u}_i^0. \quad (4.28)$$

Dies führt letztendlich zum Aufbau eines Gleichungssystems mit symmetrischer Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$ , dessen Unbekannten die gesuchten Kontaktkräfte  $c_i$  darstellen. Die rechte Seite wird gebildet durch den Anteil der relativen Beschleunigung von Knoten und Stein zueinander in Richtung des entsprechenden Verbindungsvektors  $\mathbf{u}_i^0$ . Die einzelnen Koeffizienten bestimmen sich damit zu

$$\begin{aligned} [A_{ij}] [c_i] &= [S_i] & (4.29) \\ \text{mit } A_{ij} = A_{ji} &= \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j}{M} + \frac{1}{m} \delta_{ij} \quad \text{mit Kroneckerdelta } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \\ S_i &= \left( \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}_i}{m} - (1+e) \frac{\Delta \mathbf{v}_i}{\Delta t} \right) \cdot \mathbf{u}_i^0. \end{aligned}$$

Ergibt sich nun bei der Lösung obigen Gleichungssystems eine Kontaktkraft  $c_k < 0$ , so würde dies ein weiteres Eindringen des Knotens  $k$  in den Stein bedeuten. Um dies zu vermeiden, wird die entsprechende Unbekannte aus dem Gleichungssystem entfernt. Die numerische Ungenauigkeit des Computers ermöglicht dies, indem wahlweise alle Koeffizienten in der Spalte  $j = k$  oder auch nur der Koeffizient  $A_{kk}$  auf  $A = \infty \simeq 10^{100}$  gesetzt werden. Mit diesem Verfahren wird nun iterativ das übrige System solange gelöst, bis alle übrig gebliebenen Kontaktkräfte  $c_i \geq 0$  sind. Die eliminierten Kraftgrößen werden zu  $c_i = 0$  gesetzt, womit sich die reibungsfreie Interaktion eines kugelförmigen Steins mit der Steinschlagverbauung modellieren lässt.

### 4.2.3.1 Optimierung des Kontaktalgorithmus

Je nach erstelltem Verbaunungsmodell und Steindurchmesser ergeben sich bei obigem Verfahren bis zu 200 Knoten, die in jedem Zeitschritt für den Algorithmus in Betracht kommen. Die Aufstellung des Gleichungssystems und seine Lösung ist jedoch sehr rechenintensiv. Insbesondere, wenn das Gleichungssystem bei einzelnen negativ gefundenen  $c_i$  innerhalb eines Zeitschritts mehrfach gelöst werden muss.

Vereinfacht werden nun alle  $c_i$  separat nach Gl. 4.25 ermittelt. Die resultierende Kontaktkraft des Steins ergibt sich aus der Summe aller  $c_i \cdot \mathbf{u}_i^0$ . Damit wird angenommen, dass der Einfluss der einzelnen  $c_i$  aufeinander so gering ist, dass eine eventuelle Fehlbeschleunigung des Steins ebenfalls sehr klein bleibt. Diese wird durch die Kontaktberechnung im nächsten Zeitschritt dann automatisch korrigiert.

Es kann nun durch bereits weiter oben verwendetes zweidimensionales Beispiel sehr einfach gezeigt werden, dass diese Vereinfachung vertretbar ist. Der Stein tritt mit mehreren Knoten der linear-elastischen Stabelemente in Interaktion. Das Stossgesetz zwischen Knoten und Stein sei voll elastisch. Damit darf das Gesamtsystem weder Energie gewinnen noch verlieren.

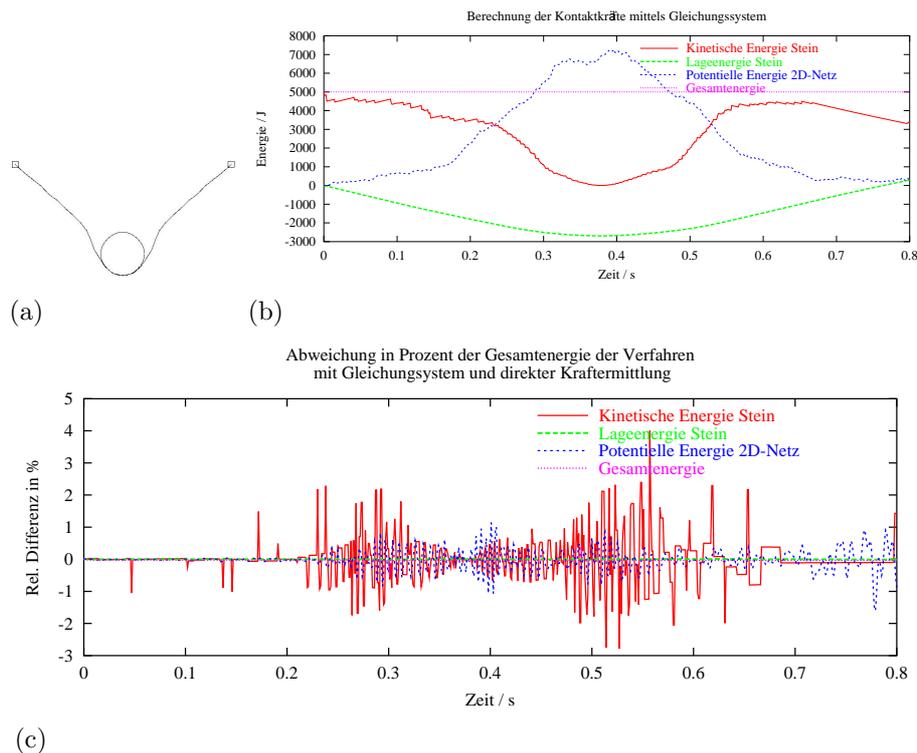


Abbildung 4.6: Genauer und vereinfachter Kontaktalgorithmus für elastischen Kontakt mit mehreren Knoten: (a) 2D-Simulation, (b) Energieverläufe mit Gleichungssystem zur Berechnung der Kontaktkräfte und (c) Abweichung im Vergleich zur direkten Berechnung der separaten Kontaktkräfte

Abb. 4.6b zeigt die Energieverläufe für den Kontaktalgorithmus mit Erstellung eines Gleichungssystems. Das zweite Diagramm zeigt die Abweichung der Energieverläufe beim ver-

einfachten Algorithmus im Vergleich zur exakten Berechnung. Es zeigt deutlich, dass die Vereinfachung des Kontaktgesetzes im grossen und ganzen ihre Gültigkeit hat und der Algorithmus somit wesentlich beschleunigt werden kann. Auch wenn einzelne Spitzenabweichungen von 3 – 4% auftreten, gleichen diese sich über die Zeit mit den meist darauf folgenden vorzeichenmässig entgegengesetzten Abweichungen auf. Integriert man darum die einzelnen Energiekurven über die Zeit, ergeben sich beispielsweise für den Zeitraum  $t = 0 \dots 0.8s$  die in Tab. 4.2 angegebenen Werte und man kann die Gültigkeit der Vereinfachung noch deutlicher zeigen, da die Gesamtabweichung hier nur max. 0.3% beträgt.

	genau	vereinfacht	Abweichung
Kinetische Energie des Steins	2395.76	2395.68	0.03 ‰
Lageenergie des Steins	-1222.44	-1222.40	0.03 ‰
Potentielle Energie in der 2D-Verbauung	2119.01	2119.56	0.26 ‰
Gesamtenergie	4005.01	4006.23	0.30 ‰

Tabelle 4.2: Über die Zeit integrierte und dadurch von temporären Abweichungen bereinigte Energiewerte für die genaue und approximierte Berechnung der Kontaktkräfte

**Grenzen der Gültigkeit der Vereinfachung** Auf die Aufstellung des Gleichungssystems kann verzichtet werden, wenn angenommen wird, dass der Einfluss der auftretenden Kontaktkräfte auf den Stein viel kleiner ist als auf die Kontaktpartner (Elementknoten und Untergrund). Dies ist der Fall, solange die Masse des Steins viel grösser als die Knotenmassen ist und damit die Bedingung

$$M \gg m_i \tag{4.30}$$

erfüllt bleibt. D.h., Knoten von Stützelementen, aufgelagerte Knoten oder der Untergrund erfüllen diese Bedingung nicht mehr, wenn diese am Kontakt beteiligt sind. Jedoch kann davon ausgegangen werden, dass, solange nur eine einzelne obiger Komponenten bei der Aufstellung der Kontaktbindungen auftaucht, die angenäherte Lösung ungefähr gleich dem Ergebnis des Gleichungssystems ist. Erst wenn mehrere von jenen gleichzeitig berücksichtigt werden müssten, sollte das oben beschriebene Gleichungssystem verwendet werden. Im Rahmen der erwarteten Simulationskonfigurationen ist dieser Fall in der Regel jedoch nicht zu erwarten.

#### 4.2.4 Berücksichtigung von Reibungseffekten

Wenn sich ein Kontaktknoten auch tangential zur Steinoberfläche bewegt, muss für die Kontaktinteraktion zwischen Knoten und Stein zusätzlich zur Kontaktkraft senkrecht zur Steinoberfläche auch noch Reibung zwischen Stein und Verbauung berücksichtigt werden. Die Reibungskräfte induzieren insbesondere auch Momente bezüglich des Steinschwerpunkts, was die Berücksichtigung der Drehgeschwindigkeit  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}$  (siehe Abschnitt 2.4 und Tab. 4.3) bei der Ermittlung der Relativgeschwindigkeit an der Kontaktstelle erfordert:

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{v} - (\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{v} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} \tag{4.31}$$

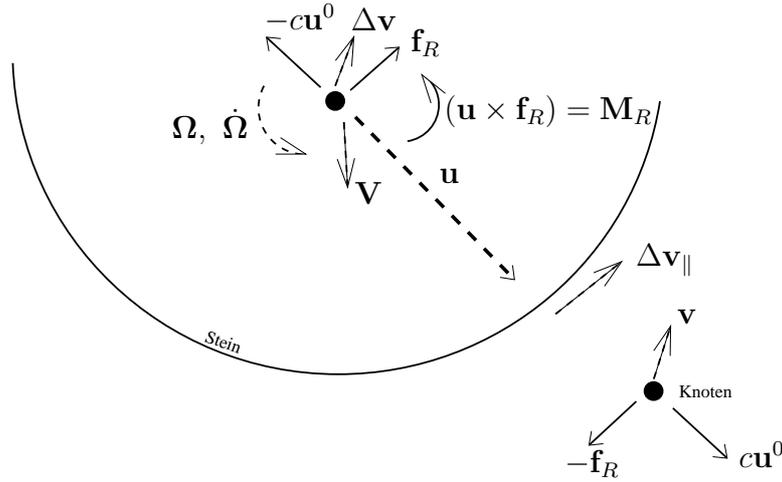


Abbildung 4.7: Relevante Grössen für Reibungseffekte am freigeschnittenen System *Stein – Knoten*

Die oberflächenparallele Relativgeschwindigkeit  $\Delta \mathbf{V}_{\parallel}$  ermittelt sich zu

$$\Delta \mathbf{V}_{\parallel} = \Delta \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V}_{\perp} = \Delta \mathbf{V} - (\Delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{u}^0) \mathbf{u}^0, \quad (4.32)$$

in deren Richtung die Reibungskraft  $\mathbf{f}_R = f_R \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0$  auf den Stein und entgegengesetzt auf den Knoten wirkt. Die Grösse der Reibungskraft errechnet sich nach Coulomb zu  $|\mathbf{f}_R| = f_R = \mu c$  mit  $c > 0$ . Die Reibungskraft beeinflusst das oben gefundene Kontaktgesetz in keinsten Weise, da die Kontakt- und Reibungskräfte in diesem Augenblick immer aufeinander senkrecht stehen. Auf den Schwerpunkt des Steins übt die Reibungskraft das Moment  $\mathbf{M} = \mathbf{u} \times \mathbf{f}_R$  aus.

Zusätzlich muss beim Ansatz der Reibungskraft berücksichtigt werden, dass diese die Relativgeschwindigkeit zwischen Knoten und Stein allenfalls verzögern nicht jedoch umkehren darf. Man stelle sich hierfür vor, dass Knoten und Stein eine sehr kleine Relativgeschwindigkeit aber eine hohe Kontaktkraft zueinander haben. Würde die Reibungskraft voll angesetzt, würde der Knoten parallel zur momentanen Steinoberfläche 'herausgeschleudert' werden. Diesen Effekt gilt es zu verhindern.

Da die Reibungskraft immer entgegengesetzt zur Relativgeschwindigkeit angesetzt wird, bewirkt dies automatisch immer eine Reduktion dieser. Jedoch darf die Reibungskraft den Knoten oder Stein innerhalb des darauf folgenden Zeitschritts nicht über den relativen Stillstand wieder hinaus beschleunigen. Darum darf die Änderung der Relativgeschwindigkeit in tangentialer Richtung nicht grösser als die Relativgeschwindigkeit selbst sein:

$$\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ - \Delta \mathbf{V}_{\parallel} = -\Delta \mathbf{V}_{\parallel} \quad \longrightarrow \quad \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ = \vec{0}. \quad (4.33)$$

Wie schon weiter oben nimmt man nun an, dass sich der Stein innerhalb eines Zeitschritts nur wenig bewegt, d.h. die Projektion von  $\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+$  auf  $\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0$  soll gleich dem Nullvektor sein:

$$(\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0) \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 = 0. \quad (4.34)$$

Die Relativgeschwindigkeit  $\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+$  zwischen Knoten und Steinoberfläche im nächsten Zeitschritt lässt sich analog zu Gl. 4.31 & 4.32 ermitteln:

$$\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ = \Delta \mathbf{v}^+ - \boldsymbol{\Omega}^+ \times \mathbf{u} + [(\boldsymbol{\Omega}^+ \times \mathbf{u} - \Delta \mathbf{v}^+) \cdot \mathbf{u}^0] \mathbf{u}^0. \quad (4.35)$$

Damit und weil  $\Delta \mathbf{V}_{\parallel}$  und  $\mathbf{u}$  aufeinander senkrecht stehen ( $\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel} = 0$ ), gilt nun

$$\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 = (\Delta \mathbf{v}^+ - \boldsymbol{\Omega}^+ \times \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0. \quad (4.36)$$

Beschreibt man mit  $\mathbf{f}^*$ ,  $\mathbf{F}^*$  und  $\mathbf{M}$  die auf den Knoten wirkenden Kräfte bzw. Kräfte und Momente beim Stein, jeweils inkl. der oben berechneten Kontaktkraft, lassen sich die translatorische Relativgeschwindigkeit und die neue Drehgeschwindigkeit nach Gl. 4.1 und 2.99 in Abhängigkeit von der Reibungskraft  $\mathbf{f}_R$  ausdrücken. Hierbei kann berücksichtigt werden, dass der simulierte Stein eine Kugel mit einem in alle Richtungen und damit in allen Koordinatensystemen konstanten Massenträgheitsmoment  $\mathbf{J}$  darstellt, weswegen es durch den Skalar  $J = \frac{2}{5}mR^2$  ausgedrückt werden kann.

$$\Delta \mathbf{v}^+ = \Delta \mathbf{v} + \left( \frac{\mathbf{f}^*}{m} - \frac{\mathbf{F}^*}{M} \right) \Delta t - \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \Delta t f_R \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^+ &\approx \boldsymbol{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \Delta t \\ &= \boldsymbol{\Omega} + \frac{\mathbf{M} + \mathbf{u} \times \mathbf{f}_R}{J} \Delta t - \frac{\boldsymbol{\Omega} \times J \boldsymbol{\Omega}}{J} \\ &\stackrel{\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \vec{0}}{=} \boldsymbol{\Omega} + \frac{\mathbf{M} + \mathbf{u} \times \mathbf{f}_R}{J} \Delta t \end{aligned} \quad (4.38)$$

Damit erhält man schliesslich ein oberes Limit für den Ansatz der Reibungskraft <sup>1</sup>

$$\Delta \mathbf{V}_{\parallel}^+ \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 = \Delta t \left[ \left( \frac{\Delta \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{f}^*}{m} - \frac{\mathbf{F}^*}{M} - \frac{\mathbf{M}}{J} \right) \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 - \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{J} \right) f_R \right] \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.39)$$

womit sich die im nächsten Zeitschritt wirkende Reibungskraft aus dem Minimum obiger Bedingung und dem Ansatz nach Coulomb bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_R &= f_R \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 \\ &= \min \left( \mu c, \frac{\left( \frac{\Delta \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{f}^*}{m} - \frac{\mathbf{F}^*}{M} - \frac{\mathbf{M}}{J} \right) \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0}{\left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{J} \right)} \right) \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 \\ &\text{mit } \mathbf{f}^* = \mathbf{f} + c \mathbf{u}^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F} - c \mathbf{u}^0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dem Knoten und entgegengesetzt dem Stein werden diese Kräfte entsprechend beaufschlagt. Es ist offensichtlich, dass die Reibungskraft an einem Knoten über den gemeinsamen Kontaktpartner Stein auch das Kontaktverhalten der anderen Knoten in diesem aktuellen Zeitschritt beeinflusst. Aber da das entstandene Ungleichgewicht wie in Abschnitt 4.2.3.1 gezeigt im nächsten Zeitschritt jedoch automatisch wieder korrigiert wird, wird dieser 'temporäre' Fehler in der Berechnung zugelassen.

## 4.2.5 Einführung einer elastischen Grenzschicht

Kommen ein Knoten und der Stein zum ersten Mal in Kontakt, haben sie eine relativ hohe steinradiale Relativgeschwindigkeit zueinander. Um diese im nächsten Zeitschritt zu

---

<sup>1</sup>  $\mathbf{u} \perp \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 \longrightarrow [(\mathbf{u} \times \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0) \times \mathbf{u}] \cdot \Delta \mathbf{V}_{\parallel}^0 = |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

korrigieren, ergibt sich auf Grund des Starrkörperkontakts für einen einzelnen Zeitschritt eine relativ hohe Korrekturkraft. Da sich diese umgekehrt proportional zur Zeitschrittgrösse verhält, ergeben sich damit gerade für eine feine zeitliche Auflösung extrem hohe kurzzeitige Verzögerungen für den Stein, welche die aufgezeichnete Beschleunigungskurve sehr ungleichmässig aussehen lassen, auch wenn diese Spitzen den gesamten Bewegungsablauf des Steins nicht sonderlich beeinflussen, da diese ja nur während eines sehr kurzen Zeitintervalls wirken.

Um die Beschleunigungskurve zu glätten, habe der ansonsten starre Stein an seiner Oberfläche eine dünne elastische Schicht der Dicke  $d$ . Dabei wird die in Abschnitt 4.2.2.4 berechnete Kontaktkraft derart modifiziert, dass sie nur dann voll beaufschlagt wird, wenn der Knoten die elastische Grenzschicht voll durchdrungen hat. Befindet sich der Knoten inmitten der Grenzschicht, so wird die Kontaktkraft linear interpoliert.

$$c = \frac{R - d - |\mathbf{u}|}{d} \cdot \frac{Mm}{M + m} \left[ \frac{\mathbf{F}}{M} - \frac{\mathbf{f}}{m} - (1 + e) \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right] \cdot \mathbf{u}^0 \quad \text{mit Stosszahl } e \quad (0 \leq e \leq 1) \quad (4.41)$$

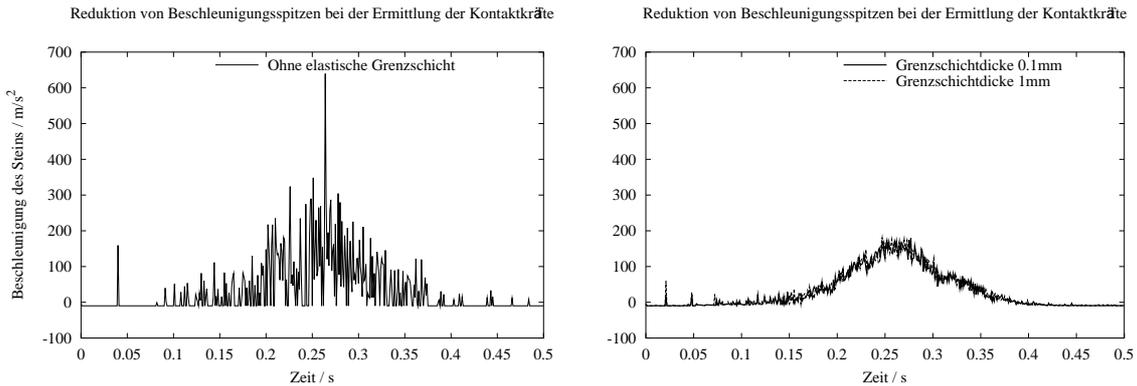


Abbildung 4.8: Vermeidung singulärer Spitzen bei den Beschleunigungen des Steins: Beschleunigungskurve (links) ohne Korrektur und (rechts) nach Einführung einer elastischen Grenzschicht der Dicke  $d = 1\text{mm} = 1.25\text{‰}$  des Steindurchmessers.

Auch in der Realität ist die Einführung einer solchen Zwischenschicht nicht abwegig. So ereignen sich in der Verbauung nie die harten Stösse, wie die Simulation sie ergibt. Allein potentielle Verformungen der Netzringe in Dickenrichtung würden eine Zwischenschicht rechtfertigen, die dann allerdings wesentlich dicker ausfallen müsste und mit dem bisher vorhanden Wissen über die Stossvorgänge nicht ausreichend charakterisiert werden könnte. Mit der hier beschriebenen Variante ist es jedoch sehr einfach möglich, solcherlei Effekte in der Simulation zu benutzen. Die Dicke der elastischen Schicht sollte grösser sein, als die Strecke, die der Stein innerhalb eines Zeitschritts zurücklegen kann. Dabei muss die Startgeschwindigkeit des Steins nicht unbedingt auch seine Maximalgeschwindigkeit darstellen, aber für eine ungefähre Abschätzung für die Dicke ist diese eine gute Annahme:

$$d \geq |\mathbf{V}_{t=0s}| \Delta t. \quad (4.42)$$

### 4.2.6 Einbezug des Untergrunds in den Kontakt

Bislang wurde angenommen, dass der gesamte Auffangprozess des Steins durch die Verbauung ohne Berührung des Untergrunds stattfindet. Dies ist insofern sinnvoll, da der Untergrund selbst Energie aufnehmen würde. D.h., ohne einen Kontakt mit dem Boden wird die Verbauung stärker belastet und ihre Widerstandsgrenze auf der sicheren Seite ermittelt.

Für bestimmte Geländesituationen mag es jedoch sinnvoll sein, auch den Untergrund zu berücksichtigen. Für die Interaktion zwischen Stein und Untergrund gibt es bereits viele Ansätze und entsprechende Forschung gerade in Bezug auf unterschiedliche Bodenarten, Steinformen etc. Im Wesentlichen geht es dabei darum, wie viel Energie der Bodenkontakt schluckt und wie sich die Flugbahn des Steins nach dem Stoss ändert. Diese Werte hängen stark von Bodenbeschaffenheit, Hangneigung, der Form des Steins und sogar von der Aufprallgeschwindigkeit und der Flugrichtung ab. Da dieser Part aber nicht wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit sein soll, beschränkt man sich hierbei auf ein einfaches Stossgesetz mit einem Abprallkoeffizienten, mit dem die zum Boden senkrechte Geschwindigkeit  $\mathbf{V}_{\perp, t+\Delta t/2} = \mathbf{V}_{\perp}^+$  eines Steins nach dem Abprall vom Boden bestimmt werden kann. Die Stosszahl  $e_B$  wird hier auf Geschwindigkeitsebene definiert:

$$|\mathbf{V}_{\perp}^+| = e_B |\mathbf{V}_{\perp}|. \quad (4.43)$$

Da die Werte von  $e_B$  in der Praxis sehr stark variieren und nicht einfach theoretisch ermittelbar sind, verwendet man in der Regel experimentell ermittelte Werte für die verschiedenen Bodenarten [9, 52, 79]. So benutzen auch viele erhältliche Programme zur Berechnung einer Steinflugbahn im frei definierbaren Gelände ebenfalls diesen sehr einfachen Ansatz (z.B. das Programm *Rockfall* der *University of Colorado at Boulder*).

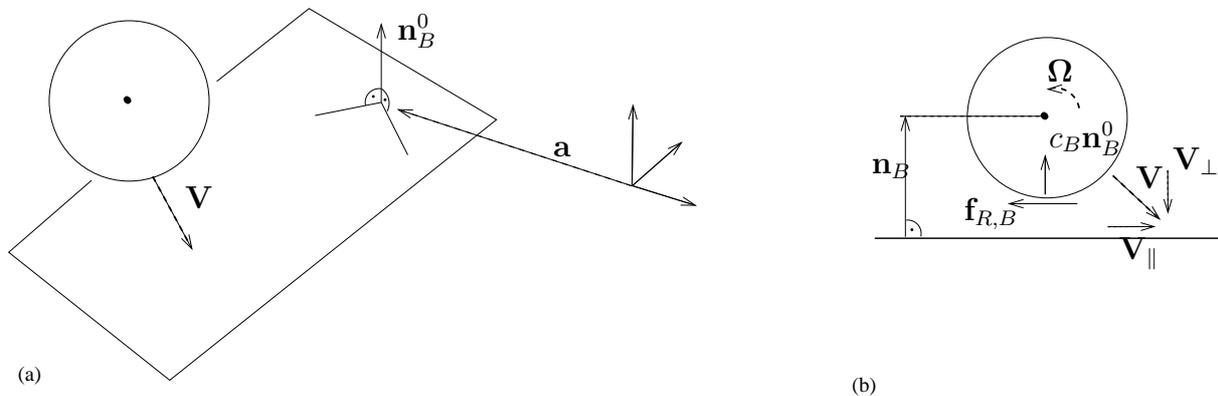


Abbildung 4.9: Kontakt zwischen Stein und einem als Ebene angenäherten Untergrund: (a) Definition der Ebene durch den Normalenvektor und Ebenenpunkt, (b) wirkende Kräfte und geometrische Details

Der Untergrund sei durch eine einfache Ebene im Raum, die Menge aller ihrer Punkte  $\mathbf{x}$  durch die Normalenform

$$\mathbf{n}_B^0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \quad (4.44)$$

beschrieben. Dabei sei der Normalenvektor  $\mathbf{n}_B$  so definiert, dass die positive Ebenenseite gleich der Seite ist, auf der sich auch der Stein befindet. Der Vektor  $\mathbf{a}$  beschreibt einen beliebigen Punkt der Ebene. Die Geschwindigkeiten normal und parallel zur Ebene ergeben

sich nach

$$\mathbf{V}_\perp = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_B^0) \mathbf{n}_B^0 \quad (4.45)$$

$$\mathbf{V}_\parallel = \mathbf{V} - \mathbf{V}_\perp \quad (4.46)$$

Die Eindringung  $d$  des Steins in den Untergrund ist somit ermittelbar aus der Lage  $\mathbf{X}$  des Steinschwerpunkts und seinem Radius  $R$ :

$$d = R - \mathbf{n}_B^0 \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{a}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_B = d \mathbf{n}_B^0 \quad (4.47)$$

Ergibt sich während der Simulation für die Eindringung ein Wert  $d > 0$ , so wirkt zwischen Boden und Stein eine Kontaktkraft. Da der Boden als unbeweglich angenommen wird, wird demnach nur dem Stein eine Kraft beaufschlagt, die im nächsten Zeitschritt die Kollisionsgeschwindigkeit umdreht und sie mit der Stosszahl  $e_B$  korrigiert. Die Grösse der Kontaktkraft ermittelt sich, unter der Annahme, dass die Masse  $m$  des Kontaktpartners 'Boden' unendlich gross und seine Geschwindigkeit gleich Null ist, analog zu Gl. 4.25 zu

$$c = -M \left[ \frac{\mathbf{F}}{M} + (1 + e_B) \frac{\mathbf{V}}{\Delta t} \right] \cdot \mathbf{n}_B^0 \quad \text{mit Stosszahl } e_B \quad (0 \leq e \leq 1) \quad (4.48)$$

Für die Reibungskraft zwischen Boden und Stein wird eine einfache Coulombsche Reibung angesetzt. Die relative Geschwindigkeit des Steins gegenüber dem Boden ist gleich der absoluten Geschwindigkeit parallel zur Ebene

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_\parallel + \boldsymbol{\Omega} \times (-\mathbf{n}_B) = \mathbf{V}_\parallel + \mathbf{n}_B \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.49)$$

Ist der Betrag dieser Geschwindigkeit ungleich Null, so wirkt die Reibungskraft ihr entgegengerichtet. Wie schon in obigem Abschnitt über die Reibung existiert auch hier ein oberes Limit für die Reibungskraft, da die Oberflächengeschwindigkeit in einem Zeitintegrationsschritt max. auf Null reduziert und nicht in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt werden kann. Damit gilt für die Reibungskraft analog zu Gl. 4.40

$$\mathbf{F}_R = \min \left( \mu_B c_B, \frac{\left( \frac{\mathbf{V} + \mathbf{n}_B \times \boldsymbol{\Omega}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}}{M} + \frac{\mathbf{M}}{J} \right) \cdot \mathbf{V}_B^0}{\left( \frac{1}{M} + \frac{\mathbf{n}_B \cdot \mathbf{n}_B}{J} \right)} \right) (-\mathbf{V}_B^0). \quad (4.50)$$

und entsprechend das Moment auf den Steinschwerpunkt

$$\mathbf{M}_R = (-\mathbf{n}_B) \times \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_R \times \mathbf{n}_B \quad (4.51)$$

### 4.2.7 Erweiterung des Kontaktgesetzes auf nicht-kugelförmige Steine

Bislang wurde bei der Steinform immer von einer Kugelform ausgegangen. Dies in erster Linie, weil sämtliche Validierungsversuche in dem Forschungsprojekt eben mit einem kugelförmigen Stein durchgeführt wurden. Die Realität liefert jedoch beliebige Steinformen, weswegen der folgende Abschnitt anreissen soll, was bei der Verwendung verschiedener

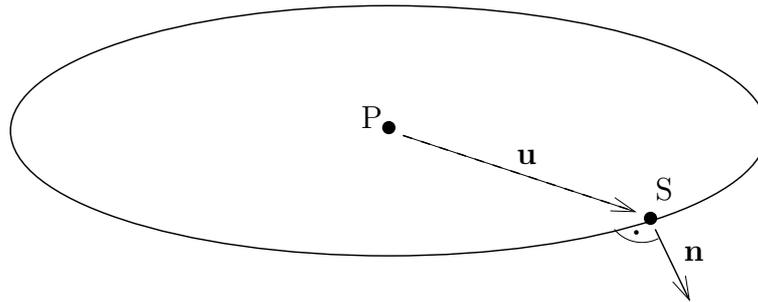


Abbildung 4.10: Geometrische relevante Grössen bei Erweiterung des Kontakts auf nicht kugelförmige Körper

Steinformen berücksichtigt werden muss. Entsprechende Simulation hierfür liegen jedoch nicht vor.

Im Wesentlichen geht es dabei um die bislang verwendeten Grössen  $R$  und  $\mathbf{u}$  als den Steinradius und dem Verbindungsvektor zwischen Steinschwerpunkt und Kontaktknotenposition. Letzterer wurde bislang auch automatisch als Oberflächennormalenvektor am Kontaktpunkt angenommen, was nun nicht mehr allgemein gültig ist. Die Oberflächennormale werde nun durch den Vektor  $\mathbf{n}_{(\mathbf{x})}$  als Funktion in Abhängigkeit von der Kontaktknotenposition  $\mathbf{x}$  beschrieben. Ebenso wird der Abstand vom Steinschwerpunkt zur Kontaktstelle mit derselben Abhängigkeit als  $R_{(\mathbf{x})}$  formuliert. Zusätzlich zu den in Tab. 4.1 angegebenen Grössen gelten auch diejenigen aus Tab. 4.3.

<u>Zeit <math>t = t - \Delta t/2</math>: Geschwindigkeiten</u>	
$\boldsymbol{\Omega}$	globale Winkelgeschwindigkeit des Steins
$\boldsymbol{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit im körpereigenen Koordinatensystem
$\Delta \mathbf{V}$	Geschwindigkeit des Knotens gegenüber dem Kontaktpunkt am Stein
<u>Zeit <math>t = t</math>: Kräfte und Lagebeziehungen</u>	
$\mathbf{M}$	Auf den Stein wirkende Momente
$\mathbf{J}$	lokales Massenträgheitsmoment des Steins ( $3 \times 3$ -Matrix)
$\mathbf{J}_{(t)}$	Massenträgheitsmoment des Steins in globalen Koordinaten ( $3 \times 3$ -Matrix)
$\mathbf{R}$	$3 \times 3$ -Rotationsmatrix vom lokalen ins globale Koordinatensystem
$\mathbf{n}^0$	Normalenvektor auf die Steinoberfläche im Berührungspunkt
<u>Zeit <math>t = t + \Delta t/2</math>: Geschwindigkeiten</u>	
$\boldsymbol{\Omega}^+$	neue globale Winkelgeschwindigkeit des Steins
$\boldsymbol{\omega}^+$	neue Winkelgeschwindigkeit im körpereigenen Koordinatensystem
$\Delta \mathbf{V}^+$	neue Differenzgeschwindigkeit

Tabelle 4.3: Zusätzliche benötigte Grössen für die Berechnung der Kontaktkraft zwischen einem Knoten und dem Stein unter Berücksichtigung eingeleiteter Momente

Der Ansatz für die Kontaktkraft auf Geschwindigkeitsebene lautet damit

$$\Delta \mathbf{V}^+ \cdot \mathbf{n}^0 = [\mathbf{v}^+ - (\mathbf{V}^+ + \boldsymbol{\Omega}^+ \times \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n}^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \boldsymbol{\Omega}^+ &= \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^+ = \mathbf{R} [\boldsymbol{\omega} + \Delta t \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{R}^T (\mathbf{M} + \mathbf{u} \times (-c\mathbf{n}^0)) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}]] \\ \mathbf{V}^+ &= \mathbf{V} + \frac{\mathbf{F} - c\mathbf{n}^0}{M} \Delta t \\ \mathbf{v}^+ &= \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f} + c\mathbf{n}^0}{m} \Delta t. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die lokale Massenmatrix des Steins nur Werte auf den Diagonalelementen enthält, ist ihre Inverse gleich dem reziproken Wert jener. Damit verschwindet der letzte Term zur Bestimmung von  $\boldsymbol{\Omega}^+$  und man erhält für die Grösse der Kontaktkraft

$$c = \frac{\frac{\Delta \mathbf{v} - \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{F}}{M} - \mathbf{J}_{(t)}^{-1} \mathbf{M}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} + [\mathbf{J}_{(t)}^{-1} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}^0)] \cdot \mathbf{n}^0} \cdot \mathbf{n}^0. \quad (4.53)$$

#### 4.2.7.1 Beispiel für eine nicht kugelförmige Steinform

Wie schon oben beschrieben, geht es beim nicht kugelförmigen Körper darum, den minimal möglichen Abstand  $R$  eines Knotens zum Steinbezugspunkt und die Oberflächennormale an dieser Stelle zu ermitteln. Dazu wird der globale Verbindungsvektor  $\mathbf{u}$  in das starrkörpereigene Koordinatensystem zu  $\mathbf{u}^l$  überführt (siehe Abschnitt 2.4).

Im Folgenden wird für die Steinform ein Ellipsoid mit den lokalen Hauptachsenradien  $a$ ,  $b$  und  $c$  angenommen. Ist die Definitionsgleichung der räumlichen Ellipsoidfunktion für  $\mathbf{u}^l$  erfüllt, so kommt der entsprechende Knoten für die Kontaktinteraktion mit dem Stein in Frage.

$$\frac{(u_x^l)^2}{a^2} + \frac{(u_y^l)^2}{b^2} + \frac{(u_z^l)^2}{c^2} \leq 1 \quad (4.54)$$

Die Gleichung für die Oberflächennormale in lokalen Koordinaten erhält man nach [16] aus den sich aus

$$a^2 \left[ \frac{n_x^l}{u_x^l} - 1 \right] = b^2 \left[ \frac{n_y^l}{u_y^l} - 1 \right] = c^2 \left[ \frac{n_z^l}{u_z^l} - 1 \right] \quad (4.55)$$

ergebenden drei Gleichungen, wobei bei deren Lösung die Fälle  $(u_x^l, u_y^l, u_z^l) = 0$  unterschieden werden müssen. Der gefundene Normalenvektor  $\mathbf{n}^l$  lässt sich mit Hilfe der aktuellen Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  wieder in das globale Koordinatensystem zu  $\mathbf{n}$  überführen.



## 5 Umsetzung der numerischen Modelle im Programm FARO

Ziel des Forschungsprojekts war es, die Steinschlagschutzsysteme numerisch zu modellieren, um damit den Auffangprozess des fallenden Steins nachbilden zu können. Zu diesem Zweck wurde das Finite-Element-Programm FARO entwickelt, dessen Aufbau und Funktionsweise in diesem Kapitel beschrieben wird. Eine erste Version des Programms wurde bereits im Herbst 2002 bei den Partnern des Forschungsprojekts zum Einsatz gebracht. Dies ermöglichte eine Optimierung in der Anwendung und Anpassung der Funktionalitäten, welche hier nun Berücksichtigung finden.

Das Programm gliedert sich in zwei Teile, der Simulation und der Benutzeroberfläche. Beide Teile sind durch eine spezielle Schnittstelle miteinander verknüpft. Diese Struktur erlaubt eine saubere Trennung von Berechnung und Darstellung bei der Entwicklung des Programms und ermöglicht die Ausnutzung der Vorteile der jeweiligen Teile, so kann man das Programm zum einen mit einer graphischen Oberfläche oder im reinen Batchbetrieb benutzen. Obendrein lässt sich die Benutzeroberfläche auch für weitere Anwendungen wiederverwenden.

Die Entwicklung des Programms erfolgte zuerst zweidimensional zum Aufbau einer effizienten Datenstruktur sowie zur Entwicklung und Validierung des Kontaktalgorithmus. Abbildung 5.1 zeigt die Simulation mit linear-elastischen Stabelementen und die Energieverläufe (Kinetische Energie Stein/Netz, Lageenergie Stein/Netz, Potentielle Energie Netz). Der 2D-Version folgte die Erweiterung auf drei Dimensionen.

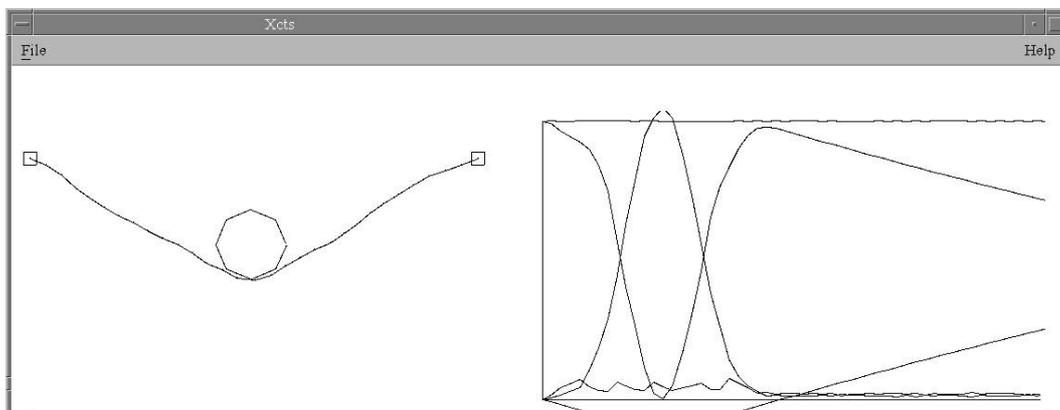


Abbildung 5.1: 2D-Simulation mit Energieverläufen

## 5.1 Programmkonzept

Dem Entwurf des Simulationsprogramms gingen verschiedene Überlegungen voraus, welche nachfolgend kurz erörtert werden.

Im Prinzip bietet es sich heutzutage an, bereitgestellte Schnittstellen von kommerziellen Finite-Element-Programmen zu verwenden, um eigene Elemente und Materialien zu implementieren. Der Prä- und Postprozessor sowie die Standardelemente und -simulationmethoden können so übernommen werden. Um jedoch vor allem beim Einsatz des Programms an verschiedenen Orten eine gewisse Unabhängigkeit von Drittprogrammen zu erhalten, bedarf es eines vollständigen in sich geschlossenen Simulationsprogramms inkl. Prä- und Postprozessor.

Das Programm soll im Gebrauchszustand von verschiedenen Personen ohne all zu spezifisches Hintergrundwissen im Bereich der finiten Elemente oder numerischen Methoden benutzt werden können. Dies erfordert benutzerfreundliche und am besten intuitiv zu benutzende Schnittstellen. Die Benutzeroberfläche orientiert sich darum an heute allgemein üblichen Fenstertechniken, die dreidimensionale Visualisierung der Modelle basiert auf dem OpenGL-Standard.

Um auch in der Entwicklung bzw. bei der Anwendung des Programms unabhängig von kommerziellen Produkten zu bleiben, wurden nur kostenfrei erhältliche Compiler (javac<sup>1</sup> und g++<sup>2</sup>) eingesetzt. Da diese auf fast allen heute erhältlichen Betriebssystemen zur Verfügung stehen, ist es somit möglich, FARO auch auf all diesen Plattformen einzusetzen.

Ein wesentliches Anliegen war es, den bei dynamischen Finite-Element-Simulationen oft sehr hohen Datenaufwand zu reduzieren. Dies wird in erster Linie dadurch ermöglicht, dass die heutzutage eingesetzten Prozessoren und Computer so leistungsfähig geworden sind, dass die in dieser Arbeit behandelten Simulationen in so kurzer Zeit durchgeführt werden können, dass der Rechengang simultan am Bildschirm beobachtet werden kann. Der sonst übliche Postprozessor wird dadurch nicht mehr nach erfolgter Berechnung aufgerufen, sondern visualisiert diese unmittelbar. Dies erübrigt die Speicherung sämtlicher Ausgabedaten über die Zeit und auch eine wiederholte Visualisierung der Simulation lässt sich durch einen erneuten Simulationsstart gut bewerkstelligen. Bei der Programmentwicklung wurde deshalb grossen Wert auf effiziente Algorithmen gelegt.

Um neben der graphischen Simulation auch Parameterstudien durchzuführen, bei denen es nur darauf ankommt, einzelne charakteristische Ausgabegrößen miteinander zu vergleichen, lässt sich das Programm auch allein über die Kommandozeile ohne Benutzeroberfläche starten.

---

<sup>1</sup><http://java.sun.com>

<sup>2</sup><http://gcc.gnu.org>

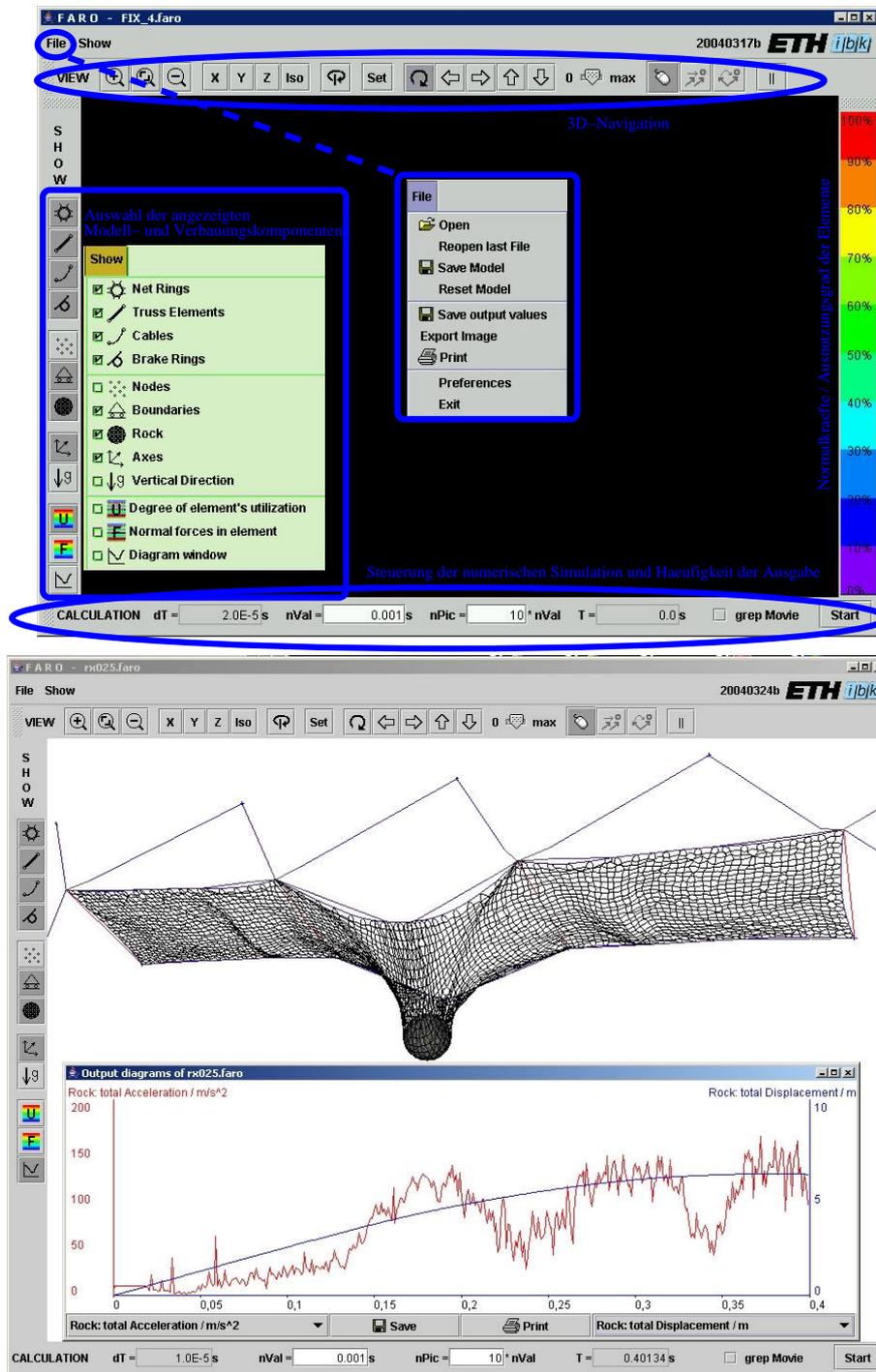


Abbildung 5.2: Oberfläche von FARO beim Start und während der Simulation einschliesslich des Diagrammfensters der gewünschten Ausgabewerte

## 5.2 Graphische Benutzeroberfläche

Die Oberfläche ist in der Sprache Java geschrieben. Grund hierfür ist die einfach umzusetzende Programmierung einer vollständigen Oberfläche, die heutigen Standards entspricht. Hinzu kommt die Portabilität des Programmcodes. Die Oberfläche lässt sich ohne Umkonfiguration auf den Betriebssystemen *Windows*, *Mac OS X*, *Unix* und *Linux* einsetzen und deckt damit weitgehend den heutigen Markt ab. Die dreidimensionale Darstellung der Systeme wurde mit Hilfe einer 3D-Erweiterung von Java basierend auf dem OpenGL-Standard realisiert. Auch diese lässt sich ohne weitere Konfiguration auf allen obigen Systemen einsetzen.

Java bietet zur Laufzeit des Programms den einzigen Nachteil, dass es zum Ausführen immer eine so genannte *Virtual Machine* benötigt, die den vorübersetzten, Betriebssystem-unabhängigen *Java-Native-Code* zur Laufzeit interpretiert und für den jeweiligen Prozessor bzw. das jeweilige Betriebssystem übersetzt. Dadurch geht ein Teil der Geschwindigkeit verloren. Dieser liegt jedoch im Toleranzbereich und wurde durch eine angepasste und optimierte Programmierung weitgehend kompensiert.

Die Oberfläche dient im Wesentlichen dazu, die Berechnung der eingelesenen Eingabedateien zu starten und diese zu verfolgen. Zu Beginn der Simulation kann man dabei wählen, ob das System vorher durch sein Eigengewicht vorbelastet werden soll, um dessen statische Ruhelage entweder mit oder ohne Belastung durch den Stein zu finden (siehe Abschnitt 5.4.2.3).

Vor dem Berechnungsstart gibt man an, alle wie viele Zeitschritte bzw. zu welchen Simulationszeiten die in der Eingabedatei angegebenen Ausgabewerte (siehe Abb. 5.2) jeweils erfasst werden sollen und wie oft ein Bild am Bildschirm ausgegeben werden soll. Zum einen liegt es dadurch in der Hand des Benutzers, wie umfangreich die gespeicherten Daten gesammelt werden sollen. Zum andere lässt sich auf diese Weise die Bildwiederholfrequenz am Bildschirm je nach Modellgröße optimieren, da der Datentransfer für den Bildaufbau Rechenzeit in Anspruch nimmt.

Mit der dreidimensionalen Visualisierung kann das räumliche Tragverhalten der Steinschlagschutzsysteme optimal studiert werden. Der Anwender kann gezielt einzelne Komponenten selektieren und beobachten oder durch eine passende Kameraposition die Simulation aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten. Zur Dokumentation lässt sich die Bildschirmdarstellung auch als Bild abspeichern oder die Simulation als Videosequenz aufzeichnen.

Die darstellbaren Komponenten sind die Elemente (nach Elementart sortiert), die Knoten, Knotenaufleger, der Stein, die Koordinatensysteme (global und das lokale des Steins) sowie die Richtung der Erdbeschleunigung. Der Stein und die Knoten werden volumetrisch jeweils als eine Kugel, die anderen Komponenten durch einfache Linienzüge dargestellt. Bei den Elementen verlaufen diese Linienzüge entlang der Elementknoten. Um eine bessere Visualisierung der Ringelemente zu erhalten, werden deren Linienzüge mit zusätzlichen Zwischenpunkten ausgestattet. Die Lage dieser Punkte bestimmt sich rein geometrisch und hat nichts mit der numerischen Behandlung der Ringelemente zu tun (siehe Abb.5.3).

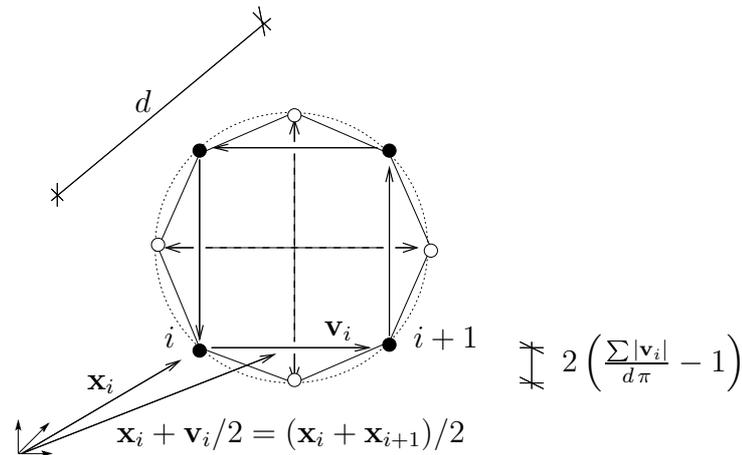


Abbildung 5.3: Konstruktion der Position von Zwischenpunkten zur besseren Visualisierung der 4-Knoten-Ringelemente

Die Ansicht der aller Elemente kann auch so eingestellt werden, dass alle Elemente anhand einer Farbskala koloriert werden und so Auskunft über ihren Ausnutzungsgrad geben. Dieser orientiert sich an den maximal aufnehmbaren Zug- und Druckkräften der einzelnen Elemente. Eine andere Variante wäre auch jene die Angabe in Prozent zur aufnehmbaren Energie der Elemente, welche sich aus deren Kraft-Verformungs-Charakteristiken ableiten lässt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass bei der Entwicklung von neuen Verbauungssystemen und für den Nachweis der Steinschlagverbauungen nur die Kräfte und eben weniger die Energieinhalte ausschlaggebend sind. Bei der Ausgabe kann man wahlweise den über den Simulationszeitraum maximalen Ausnutzungsgrad oder auch die momentane Belastung ausgeben lassen. Versagt ein Element infolge Überlast, so wird es nicht mehr gezeichnet.

## 5.3 Numerische Simulation

Im Gegensatz zur Programmoberfläche ist die eigentliche Finite-Element-Simulation in C++ geschrieben. Auf Grund der Systemabhängigen und Prozessoroptimierten Kompilation ermöglicht dies eine schnellere Berechnung als dies mit Java der Fall wäre.

Benutzt man FARO ohne graphische Benutzeroberfläche, so lauten die entsprechende Kommandozeilenparameter bei Benutzung im Batchbetrieb wie in Tab. 5.1 angegeben.

### 5.3.1 Aufbau der Eingabedatei

Wie bei vielen Finite-Element-Programmen üblich wird das Modell über eine normale Textdatei definiert. Dies gewährleistet eine flexible und freie Gestaltung der Modelle. Der Aufbau der Eingabedatei richtet sich nach dem Syntaxdiagramm aus Abb. 5.4.

Das sog. Railroad-Diagramm in Abb. 5.4 ist zu lesen, als ob man mit einem Zug Gleise abfährt. Das Hauptgleis führt vertikal von oben nach unten und an jedem Querbalken muss man das Seitengleis abfahren. Des Weiteren gibt es diverse Verzweigungen, wel-

MyModel.faro	Name/Position der Eingabedatei
nOut	Anzahl Zeitschritte zwischen Speicherung der Ausgabewerte
tMax	Simulationszeit in [s]
Outputfile	Name/Position der Ausgabedatei
<b>opt.:</b>	
STATICS_FIRST	wenn vor der dynamischen Simulation das statische Gleichgewicht ermittelt werden soll (siehe Abschnitt 5.4.2.3)
nOutMax	max. Anzahl Etappen, bis zu der das statische Gleichgewicht gefunden sein muss

Tabelle 5.1: Kommandozeilenparameter bei Verwendung von FARO im Batchbetrieb

che eine Umfahrung, Auswahl oder Wiederholung ermöglichen. Ansonsten finden sich in der Abbildung auch Angaben über die zu verwendenden SI-Einheiten, den Einsatz von Kommentaren und die Diagrammdarstellung von dreidimensionalen Vektoren und ganzzahligen Nummernfolgen.

Nach erfolgreicher Modellgenerierung kann die Simulation gestartet werden. Einzelne Teile des Syntaxdiagramms werden in den nachfolgenden Abschnitten erläutert.

## 5.4 Modellierungsdetails

### 5.4.1 Modellkomponenten

Die Komponenten des Finite-Element-Modells sind der Stein und wie allgemein üblich die Elemente mit den dazugehörigen Knoten. Knoten und Elemente werden dabei mit positiven ganzzahligen Werten benannt, welche wiederum in Gruppen mit frei wählbaren Namen zusammengefasst werden können.

Von allen Komponenten ist es möglich, bestimmte Ausgabegrößen über die Zeit zu erfassen, sofern gewünscht. Diese Ergebnisse sind einzelne Zahlenreihen mit den entsprechenden Werten zu bestimmten Zeitpunkten. Bei den Knoten und dem Stein sind dies alle kinetischen und dynamischen Größen sowie deren Energieinhalt. Die Elemente können über die in ihnen wirkende Normalkraft und ihren Ausnutzungsgrad Auskunft geben. Spannungen und Verzerrungen wurden bewusst aussen vorgelassen, da sich gezeigt hat, dass diese Informationen im Rahmen der durchgeführten Simulationen nicht von Interesse sind. Die für die Bemessung relevante Einhaltung der Maximalbeanspruchung eines Bauteils wird über den Ausnutzungsgrad oder die Normalkraft überprüft.

#### 5.4.1.1 Knoteneigenschaften

Zusätzlich zur Eingabe der Knotenkoordinaten lassen sich noch verschiedene Knotenparameter setzen. So kann die Lage von mehreren Knoten, welche als in einer Ebene liegend definiert wurden, entsprechend einem Seildurchhang in Richtung der Schwerkraft abge-

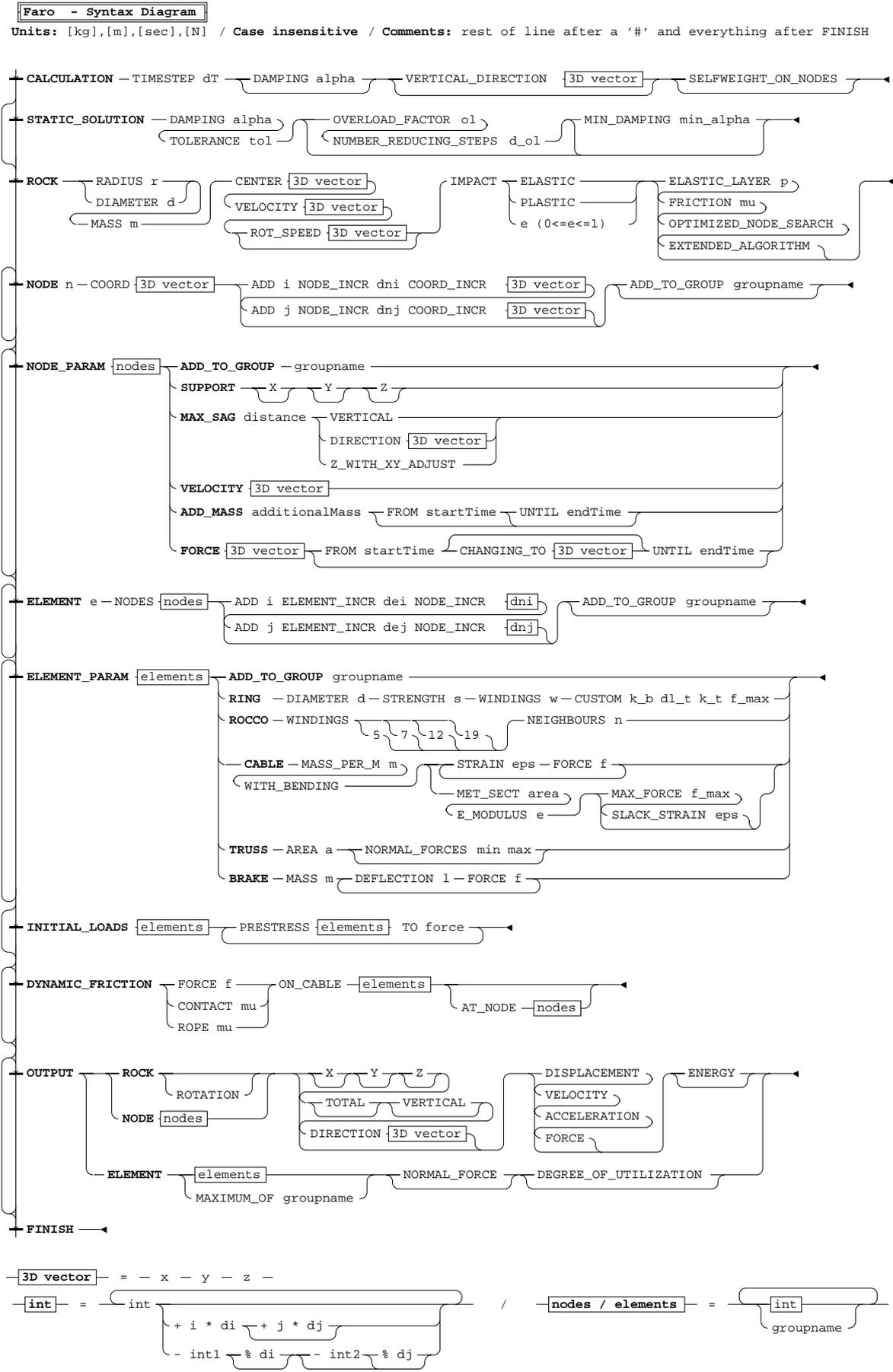


Abbildung 5.4: Diagramm zur Erstellung von FARO Eingabedateien

senkt werden, um somit der tatsächlichen Netzgeometrie näher zu kommen. Des Weiteren lassen sich auch die Auflagerungen setzen. Weist man zudem einem aufgelagerten Knoten eine Anfangsgeschwindigkeit zu, so lassen sich wegen der Lagerungsbedingten unendlich hohen Masse und damit der konstanten Geschwindigkeit des Knotens quasistatische Versuche simulieren. Für die Simulation von anderen Belastungsarten als der durch den fallenden Stein lassen sich auch für bestimmte Zeiträume zusätzliche Massen und Kräfte auf die Knoten aufbringen, was z.B. für die Simulation von Lawinen, Murgängen etc. verwendet werden kann.

### 5.4.1.2 Elementeigenschaften

Nachdem man die Elemente mit ihren Nummern und Knoten festgelegt hat, weist man den einzelnen Elementen jeweils einen Elementtyp zu. Die verfügbaren Elementtypen sind mit Ausnahme des Typs *Rocco* im Kap. 3 beschrieben. Letzterer stellt die Implementierung des in [39] beschriebenen Ringelements für die Netzringe *Rocco*5, 7, 12, 19/3/300 mit acht Elementknoten dar. Ansonsten werden die Ringelemente über den Ringdurchmesser, der Drahtstärke und der Anzahl Drahtwindungen bestimmt. Bei Bedarf, d.h. wenn die Ringgeometrien von den bisher erfassten abweichen, werden die vier charakteristischen Ringparameter nach Abschnitt 3.1.5.4 direkt angegeben.

Die angebotenen Stabelemente werden allein über die Stabquerschnittsfläche definiert, da hier als Material normaler Stahl mit einem Elastizitätsmodul  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  und einer Dichte  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  angenommen wurde. Werden innerhalb der Verbauung im Bereich der Stützen Sollbruchstellen eingebaut, so sind deren Maximalbelastungen über die Angabe von maximalen bzw. minimalen Stützennormalkräften ebenfalls definierbar.

Die angebotenen Elemente zur Simulation der Bremsen innerhalb der Verbauung werden nach Abschnitt 3.3 als Pendelstützen mit einem druckschlaffen abschnittsweise linearem Last-Verformungs-Verhalten definiert, wobei die Last die Normalkraft in dem Element und die Verformung seine Verlängerung beschreibt.

Das ebenfalls druckschlaffe Materialverhalten der Seilelemente nach Abschnitt 3.2 kann als elastisch definiert durch die Fläche des metallischen Querschnitts und den Elastizitätsmodul bis hin zu einer gewissen Maximalkraft angenommen werden. Bei nicht vorgereckten Seilen ist alternativ die Eingabe eines abschnittsweise linearen Kraft-Dehnungs-Diagramms möglich.

Des Weiteren ist bei den Seilelementen auch die Definition von Reibzahlen nach Abschnitt 3.2.8.2 bei am Seil auftretenden Gleiteffekten möglich. Dabei wird unterschieden, ob es sich um eine Kontaktreibung oder um eine Seilreibung handelt, Wird ein Knoten z.B. über eine spezielle Reibklemme an das Seil angeschlossen, gibt man die dadurch induzierte Reibkraft direkt an.

### 5.4.1.3 Definition des Steins

Der kugelförmige Stein wird über seinen Durchmesser und die entsprechende Masse definiert. Dazu wird er über dem Auftreffort platziert und erhält die entsprechende trans-

latorische Geschwindigkeit und bei Bedarf auch eine Drehgeschwindigkeit. Des Weiteren gibt man hier noch die Details für die Berechnung der Interaktion zwischen Stein und Steinschlagschutzverbauung an (siehe Abschnitt 5.4.2.2).

## 5.4.2 Berechnungsdetails

### 5.4.2.1 Dynamische Berechnung

Die dynamische Simulation erfolgt gemäss dem Algorithmus nach Abschnitt 2.2.1. Der für eine explizite Simulation erforderliche Zeitschritt bestimmt sich nach der grössten Eigenfrequenz des Modells, die man noch auflösen möchte (siehe Abschnitt 2.2.2). Der Dämpfungskoeffizient nach Abschnitt 2.2.5 sollte nicht zu gross gewählt werden, weil die Berechnung sonst zu stark abgefälscht wird. Des Weiteren gibt man noch an, in welcher Richtung die Erdbeschleunigung wirkt und ob das Eigengewicht während der Simulation auf die Knoten wirken soll.

### 5.4.2.2 Kontaktalgorithmus

Die Details zur Berechnung der Interaktion zwischen Stein und Steinschlagverbauung werden zusammen mit der Definition des Steins angegeben. Die Berechnung der Kontaktkräfte zwischen Knoten und Stein erfolgt dabei nach Abschnitt 4.2.3 oder vereinfacht nach 4.2.3.1. Die wirkende Reibung bestimmt sich dabei nach Abschnitt 4.2.4.

Um Kraftspitzen bei der Kontaktberechnung zu vermeiden, kann man den Stein nach Abschnitt 4.2.5 mit einer dünnen elastischen Schicht umgeben. Ebenso existiert bei Bedarf Reibung zwischen dem Stein und den Knoten. Für die Kontaktberechnung zwischen Stein und Verbauung empfiehlt es sich gerade bei kleineren Zeitschritten von  $\Delta t = 10^{-6} \dots 5 \cdot 10^{-5}$ , eine  $0.001 \dots 0.003m$  dicke elastische Schicht. Ansonsten gilt, dass ein plastischer Kontakt geringere Kontaktkräfte als der elastische induziert. Die Reibung zwischen Stahl und Stein wähle man im Bereich von  $\mu = 0.4 \dots 0.5$ .

### 5.4.2.3 Statische Ruhelage

Der einfacheren Finite-Element-Netzgenerierung wegen ist es möglich, die Ringnetzgeometrie zuerst innerhalb einer Ebene anzugeben. Mit Hilfe des in Abschnitt 2.3 beschriebenen quasistatischen Verfahrens kann ein statischer Netzdurchhang eingestellt werden (siehe Abb. 5.5). Dieser Vorgang findet immer vor der dynamischen Simulation des Steinschlag auffangprozesses statt.

Nutzt man die graphische Benutzeroberfläche zur Steuerung der Berechnung, kann weiterhin gewählt werden, ob dafür nur das Netz durch sein Eigengewicht belastet werden soll, oder ob der Stein, ebenfalls nur durch seine Gewichtskraft belastet und ohne Anfangsgeschwindigkeit, mit in die Gleichgewichtsberechnung mit einbezogen werden soll. Mit letzterer Variante wird die statische Belastung der Verbauung simuliert, wie sie in

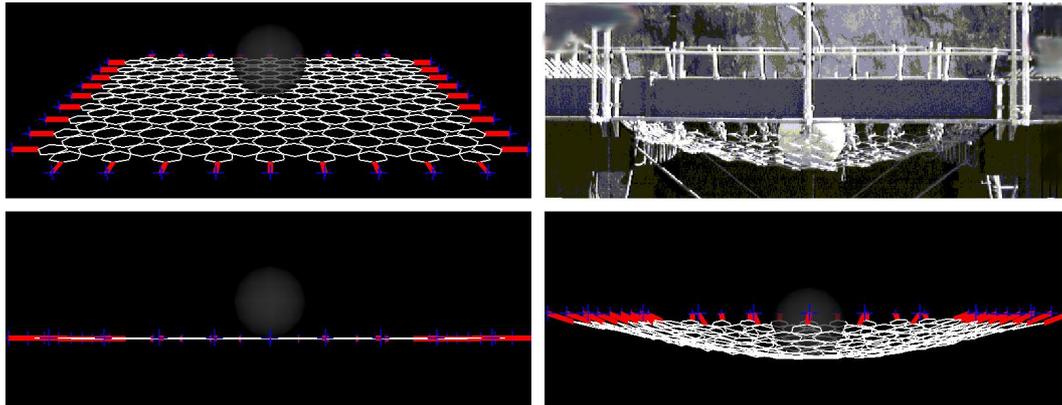


Abbildung 5.5: Ebene Modellierung und anschliessend berechnete statische Ruhelage des Ringnetzes am Versuchsrahmen

[30] bei der Typenprüfung von Steinschlagenschutzbarrieren vorgeschrieben ist.

Man gibt einen Dämpfungskoeffizienten an, der dafür sorgt, dass entstandene Schwingungen in der Gleichgewichtslage eliminierbar werden. Mehr Information zur Wahl dieses Koeffizienten ist in Abschnitt 2.3 zu finden. Des Weiteren benötigt das Programm eine Angabe, ab welcher relativen Änderung des Energieniveaus das statische Gleichgewicht als gefunden angenommen werden soll. Ergeben sich bei der statischen Berechnung gleich zu Beginn so hohe Schwingungen, dass das Gleichgewicht nicht gefunden werden kann, weil die Gewichtskraft einen zu kleinen Einfluss auf die Bewegung der Massen hat, kann man angeben, dass das Eigengewicht zuerst um einen gewissen Faktor überhöht wird und dann in einer bestimmten Anzahl von Schritten auf das eigentliche Eigengewicht reduziert wird. Analog kann man mit der gleichen Schrittzahl den Dämpfungskoeffizienten auf ein bestimmtes Niveau absenken.

Für die Suche nach der statischen Lösung wurde für eine schnellere Ergebnisfindung der Dämpfungskoeffizient  $\alpha = 80 \dots 200$  gewählt und konnte in Kombination mit einem  $OVERLOAD\_FACTOR = 2 \dots 10$  auf bis zu  $\alpha = 10 \dots 20$  abgesenkt werden. Die Toleranz zur Erreichung des statischen Gleichgewichts lag dabei bei  $\varepsilon = 10^{-6} \dots 10^{-3}$  (relative Änderung des Energieniveaus).

Wurde das Gleichgewicht gefunden und der Stein befindet sich noch nicht im Netz, so wird er mit der ursprünglich eingestellten Anfangsgeschwindigkeit und in Richtung dieser an die sich daraus ergebende Position über dem nun statisch verformten Netz neu positioniert. Danach kann die dynamische Simulation gestartet werden.

#### 5.4.2.4 Elementvorspannung

Eine Besonderheit des Ablaufs beim Bau von realen Steinschlagverbauungen wird mit dieser Option berücksichtigt. Zu Beginn der Bauarbeiten werden die Verankerungen gebohrt bzw. die Ankerplatten gesetzt und anschliessend die Stützen mit Rückhalteseilen positioniert. Nach der Installation aller Bremsen und Seile lässt sich die ganze Verbauung durch das abschliessende Spannen einzelner Seile im Gesamten vorspannen. Diese

Vorspannung soll nun auch im Programm Eingang finden. Reibungseinflüsse an den Seilen werden jedoch nicht berücksichtigt.

Da die Vorspannung aufgebracht wird, wenn noch nicht die komplette Barriere (z.B. noch ohne das Ringnetz) installiert ist, sind von der Vorspannung auch nur bestimmte Elemente betroffen. D.h., nachdem sämtliche Knoten und Elemente in der Eingabedatei definiert wurden, gibt man an, welche Elemente von der Vorspannung betroffen sind (z.B. Stützen und Rückhalteseile) und welche Seile mit welcher Kraft gespannt werden.

Da eben nicht sämtliche Elemente von der Vorspannung betroffen sind, sollten die von der Vorspannung betroffenen Knoten entsprechend den sich ergebenden Elementverformungen nicht neu platziert werden, da dies die Modellgeometrie evtl. stören könnte. Dies bedeutet, dass die Vorspannkkräfte während der sich anschliessenden dynamischen Simulation Element-intern berücksichtigt werden. Es wird dabei angenommen, dass durch die zumeist von Hand aufgebrachte Vorspannung im Bereich von  $V \approx 10 \text{ kN}$  keine plastischen Verformungen bei den vorgespannten Elementen auftreten, die zusätzlich berücksichtigt werden müssten.

Prinzipiell bietet es sich an, die aus der Vorspannung resultierenden Elementkräfte durch eine entsprechende elastische implizite Finite-Element-Berechnung zu ermitteln. Die Belastung des Systems wäre damit die Vorspannkraft der beim Aufbau vorgespannten Seile. Die resultierenden Vorspannkkräfte in den übrigen Elementen ergeben sich dann aus deren Verformungen. Da es sich bei dem zu berechnenden Tragwerk jedoch nur um ein reines Fachwerk handelt, bedeutet es wesentlich weniger Aufwand auf der programmiertechnischen Seite wie auch vom Rechenaufwand her, statt dessen eine einfache Stabwerksberechnung durchzuführen. Diese hat nun nicht wie bei der Methode der Finiten Elemente die Verschiebungsfreiheitsgrade als Unbekannte, sondern nur die Normalkräfte in den Stäben. Dies ist sogar vorteilhaft, da das System in der Eingabedatei in der Regel bereits mit der endgültigen Verbauungsgeometrie eingegeben wird, wie sie sich nach der Vorspannung eingestellt hätte, und somit keinerlei sich durch die Vorspannung ergebenden Verformungen berücksichtigt werden müssen.

Man bildet nun ein Gleichungssystem mit einer Gleichung pro ungelagertem Knotenfreiheitsgrad. Alle in diesem Freiheitsgrad angreifenden Kräfte (Richtungskosinus der Stabkraft bzgl. der Freiheitsgradrichtung) müssen mit den bekannten also als vorgespannt eingegebenen Elementen im Gleichgewicht stehen.

Ist die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl unbekannter Stabkräfte ist das System statisch bestimmt und kann normal gelöst werden. Dazu werden die Gleichungen so umgeordnet, dass kein Diagonalelement gleich Null ist. Hat das Gleichungssystem mehr Gleichungen wie unbekannte Stabkräfte, d.h. es gibt mehr ungelagerte Freiheitsgrade wie unbekannte Stabkräfte wird es mittels Ausgleichsrechnung näherungsweise gelöst. Gibt es jedoch mehr unbekannte Stabkräfte als ungelagerte Freiheitsgrade, kann das Gleichungssystem auf Grund von zu wenig Gleichungen nicht gelöst werden.

Ein Seil, das über mehrere Knoten hinweg eingegeben wurde, wird in einzelne 2-Knoten-Stabelemente unterteilt. Die einzelnen Stabelemente haben nach Abschnitt 3.2 alle dieselbe Stabkraft und stellen damit nur eine einzige Unbekannte in obigem Gleichungssystem.

Ergibt sich nach dem Lösen des Gleichungssystems die Vorspannkraft in einem Seil oder in einem Bremsselement als Druckkraft, so wird diese Unbekannte aus dem Gleichungssystem eliminiert und das verbleibende System erneut gerechnet.

**Beispiel**

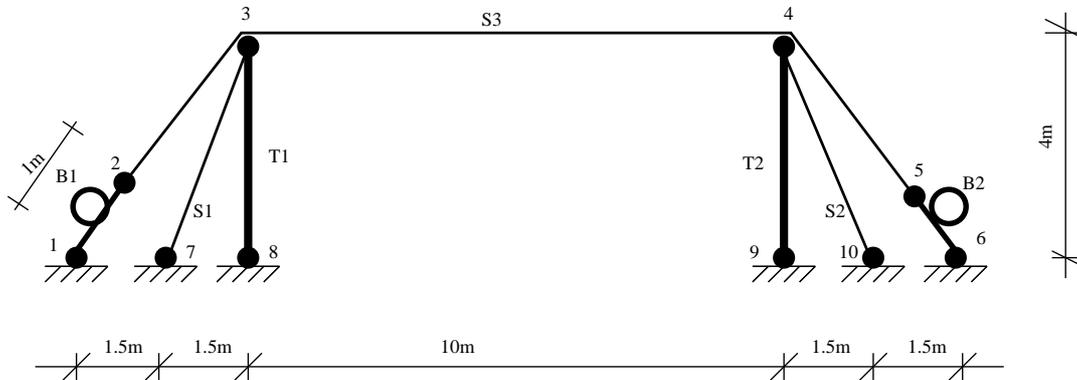


Abbildung 5.6: Ebenes Tragwerk dessen Seil S3 nach dessen Installation vorgespannt wird

Abb. 5.6 zeigt ein zweidimensionales Beispieltragwerk bestehend aus zwei Stützen T1 und T2, zwei Abspannseilen S1 und S2, einem Trageil S3 und zwei Bremsselementen B1 und B2. Wie oben beschrieben ist es irrelevant, welche Materialeigenschaften oder Querschnittsabmessungen die einzelnen Komponenten haben.

Das Trageil werde nun mit  $N_{S3} = 10 \text{ kN}$  vorgespannt, d.h. dessen Normalkraft ist bekannt. Damit lässt sich wie oben beschrieben das Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Elementkräfte wie folgt aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \sum N_{x,Kn.2} \\ \sum N_{y,Kn.2} \\ \sum N_{x,Kn.3} \\ \sum N_{y,Kn.3} \\ \sum N_{x,Kn.4} \\ \sum N_{y,Kn.4} \\ \sum N_{x,Kn.5} \\ \sum N_{y,Kn.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ -0.351 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.936 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.351 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.936 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{S1} \\ N_{S2} \\ N_{T1} \\ N_{T2} \\ N_{B1} \\ N_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ -8000 \\ -4000 \\ 8000 \\ 4000 \\ 8000 \\ 6000 \\ -8000 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Hieraus resultiert nun eine Druckkraft in den Stützen von  $N_{T1,2} = 18.7 \text{ kN}$  und in den Abspannseilen verbleibt eine Zugkraft  $N_{S1,2} = 11.4 \text{ kN}$ . Die Bremsselemente werden mit der Trageilvorspannkraft  $N_{B1,2} = N_{S3} = 10 \text{ kN}$  belastet, da sie in einer Reihe mit dem vorgespannten Seil liegen und direkt an dieses angeschlossen sind.

Das beschriebene Verfahren hat den Vorteil, dass es die gesuchten Elementkräfte sogar dann berechnet werden, wenn das System noch teilweise kinematisch gelagert ist. So erhält man auch Ergebnisse, wenn z.B. Beispiel die Abspannseile weggelassen werden oder das beschriebene zweidimensionale System als räumliches System berechnet wird, ohne dass Knotenverschiebungen aus der Systemebene heraus durch entsprechende Auflager fixiert werden.

# 6 Verifizierung der Finite-Element-Simulation

Dieses Kapitel zeigt die Ergebnisse, welche erhalten werden, wenn man verschiedene Systeme mit dem Programm FARO modelliert und für ein Steinschlagereignis simuliert. Das Kapitel teilt sich in drei Abschnitte. Zuerst werden die am Versuchsrahmen innerhalb des Forschungsprojekts durchgeführten Versuche nachgerechnet und mit den Versuchsergebnissen nach [39] verglichen. Gleiches geschieht im Anschluss mit einer realen Steinschlagerschutzverbauung, welche entsprechend dem Zertifizierungsverfahren nach [30, 39] belastet wurde. Im letzten Teil wird noch untersucht, welchen Einfluss diverse Modellierungsdetails auf die Genauigkeit der Ergebnisse haben. So kann abgeschätzt werden, wie detailliert ein System abgebildet werden muss, um noch ausreichend brauchbare Ergebnisse zu erhalten.

Als charakteristische Grössen werden in diesem Kapitel in der Regel die dynamischen Werte des Steins herangezogen. Dies zum einen, da diese Werte am besten aus den Versuchen erfassbar sind und zum anderen, da über diese auch im praktischen Gebrauch die Wirksamkeit und Arbeitsweise einer Verbauung bezüglich ihres Tragverhaltens charakterisiert wird [32]. Die Verschiebungskurve des Steins zeigt übersichtlich, wie flexibel eine Verbauung reagiert. Wird zu Beginn des Abbremsprozesses das Barrierennetz ohne grossen Widerstand verformt, bewegt sich der Stein nahezu geradlinig (die eigentlich vorhandene Parabel ist in dem kurzen Zeitraum kaum auszumachen). In dem Zeitintervall mit den hohen Verzögerungen addiert sich dann schliesslich eine vergleichsweise geringe zusätzliche Auslenkung. Der Geschwindigkeitsverlauf des Steins zeigt ebenso wie dessen Energielinie die Elastizität des Systems auf, d.h. welche Geschwindigkeit bzw. welchen Energieinhalt der Stein nach dem Auffangstoss hat. Die Beschleunigungskurve zeigt dann deutlich, wie gross die Rückhaltekräfte der Verbauung auf den Stein wirken. Aus dem Anstieg der Kurve und deren Maximalwert lässt sich schliessen, ob es sich um einen eher harten oder eher weichen Verbauungstyp handelt [32].

## 6.1 Simulation der Versuche am Versuchsstand für Bauwerkskomponenten

### 6.1.1 Modelliertes System

Die vom *Eidgenössischen Institut für Schnee und Lawinenforschung* (SLF Davos) durchgeführten Versuche an einem speziell angefertigten Versuchsstand zur Bestimmung des Tragverhaltens einzelner Verbauungskomponenten sind ausführlich in [39] beschrieben.

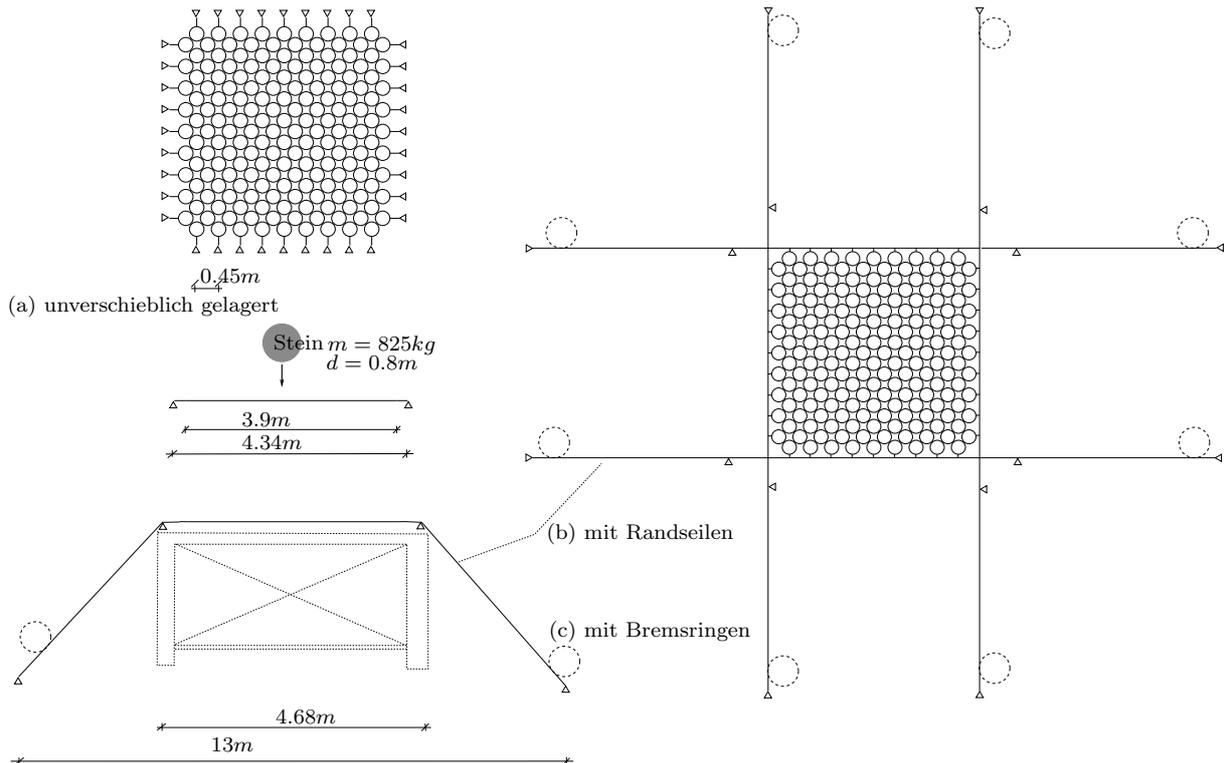


Abbildung 6.1: Systemzeichnung der erstellten doppelt symmetrischen Simulationsmodelle am Versuchstand für Bauwerkskomponenten: (a) unverschiebliche Lagerung, (b) verschiebliche Lagerung an Randseilen mit (c) integrierten Bremsselementen

Mit Hilfe dieses Versuchsrahmens ist es möglich, mit klar definierten Randbedingungen, einzelne Schutznetze zu testen. Die Randbedingungen variieren dabei zwischen unverschieblich gelagerten Netzrändern und verschieblicher Lagerung durch Verwendung von Randseilen welche zusätzlich in deren Verankerungsbereich mit Bremsselementen ausgestattet werden können. Für die Simulation dieser Versuche kann die Eigenbewegung bzw. Verformung des Stahlrahmens vernachlässigt werden, d.h. alle festen Verbindungen der getesteten Seil-/Netzkonfiguration mit dem Rahmen sowie die Verankerungspunkte der Seile am Untergrund werden durch feste, gelenkige Auflager modelliert. Dadurch ergeben sich die in Abb. 6.1 dargestellten Simulationsmodelle. Die Randschellen der Ringnetze sind in den Simulationen über jeweils zwei in Serie geschaltete Schellen mit dem Rahmen (siehe auch Abb.3.4) bzw. über jeweils einen Schellen mit den Randseilen verbunden. Dieser Anschluss erfolgt in der Simulation über einfache Stabelemente aus Stahl mit entsprechender Länge und Querschnitt.

Zwischen Stein und Netz wurde eine 1 mm dicke elastische Schicht bei einem plastischen Stossgesetz mit einem Reibungskoeffizienten von  $\mu = 0,3$  angenommen. Die Berechnung erfolgte mit einem Zeitschritt von  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$  bei unverschieblicher Netzlagerung bzw.  $\Delta t = 10^{-5}$  mit Halteseilen und Bremsselementen. Das System wird während der dynamischen Simulation mit  $\alpha = 0,001$  gedämpft. Der statische Netzdurchhang wurde mit einer anfänglichen Lastüberhöhung von  $f_L = 2,0$  bei einer anfänglichen Dämpfung von  $\alpha_S = 20$  und einer Reduktion auf  $\alpha_S = 5$  in 5 Schritten bei einer Toleranz von  $\varepsilon_S = 10^{-5}$  ermittelt (bzw. für  $n_W = 19$  Windungen:  $f_L = 5,0$ ,  $\alpha_S = 60..10$ ,  $\varepsilon_S = 5 \cdot 10^{-6}$ ).

Abb. 6.2 zeigt die auf diese Weise erhaltenen Verformungsfiguren. Ganz links ist der statische Netzdurchhang vor Beginn der dynamischen Belastung gezeigt. Dem schliessen sich die Verformungsbilder zum Zeitpunkt der maximalen Auslenkung<sup>1</sup> für die unverschiebliche Lagerung, die Lagerung der Ringnetze auf Randseilen vom Typ *Geobinex 22* und bei zusätzlicher Verwendung von Bremsringen des Typs *GS-8001* an. Die Seile werden dabei jeweils mit  $N_V = 10 \text{ kN}$  vorgespannt. Allfällige Seilreibung wird mit einem Reibungskoeffizienten  $\mu = 0.1$  angesetzt.

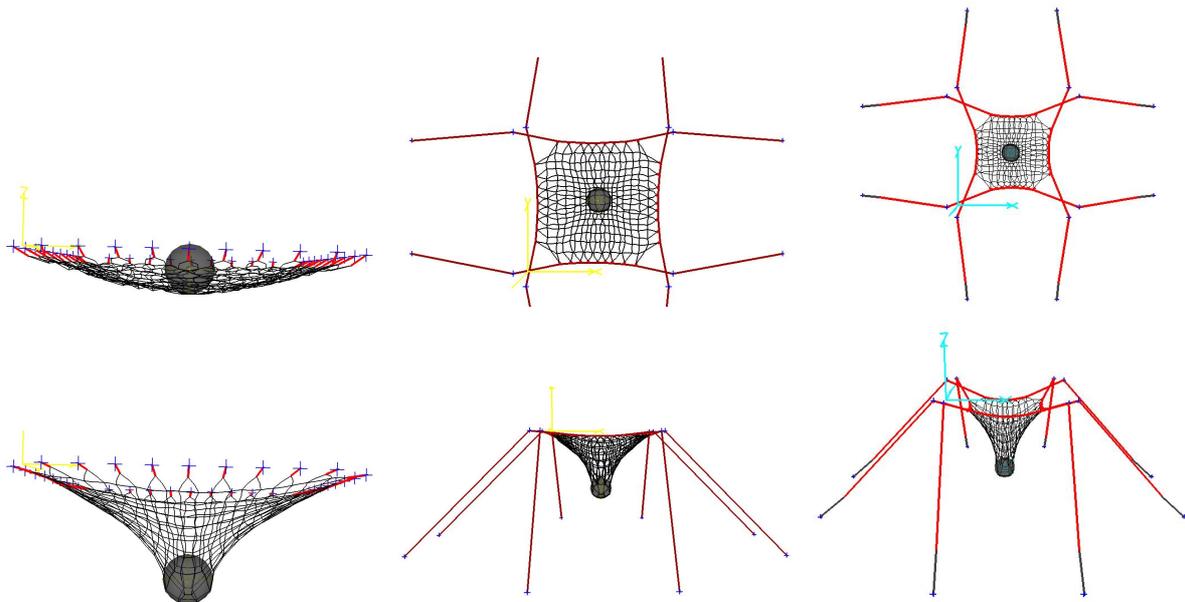


Abbildung 6.2: Verformungsfiguren der durchgeführten Simulationen am Versuchsrahmen mit (links) unverschieblicher Lagerung der Ringnetze, (Mitte) Aufhängung der Ringnetze an Randseilen sowie (rechts) mit integrierten Bremsselementen an den Seilenden

## 6.1.2 Unverschiebliche Lagerung

### 6.1.2.1 Versuchsergebnisse

Abb. 6.3 zeigt die Ergebnisse der durchgeführten Steinschlagversuche am Versuchsrahmen mit unverschieblich gelagerten Ringnetzen mit verschiedenen Netzstärken. Es werden hierbei bewusst die Kurven vieler Einzelversuche ohne eine mögliche Mittelwertbildung dargestellt. Dies soll demonstrieren, dass es bei der Kalibrierung der Ringmodelle nicht einfach ist, sich auf bestimmte charakteristische Ringparameter festzulegen, da auch die Ergebnisse von im Prinzip identischen Versuchen deutlich streuen. Es zeigte sich zudem, dass gerade die Versuchsrahmenversuche mit geringen Fallhöhen die stärkeren Ringnetze praktisch nur im Biegebereich beanspruchen, in welchem die Ringnetzeigenschaften stärker streuen.

<sup>1</sup>In [39] sind auch die vergleichbaren Abbildungen der Versuche zu finden.

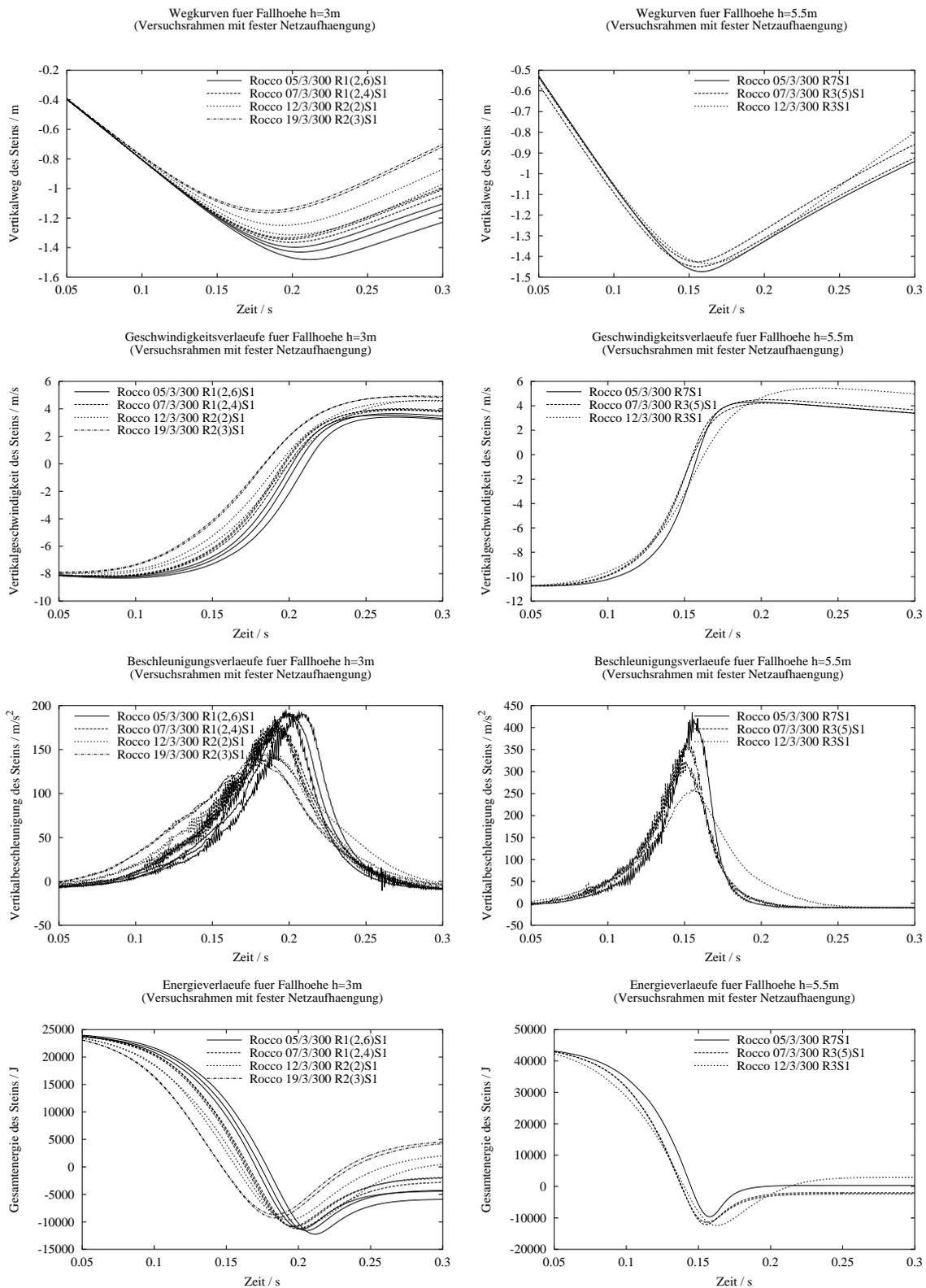


Abbildung 6.3: Versuchsergebnisse: Weg-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Energiekurven des Steins beim Fall aus 3 bzw. 5.5m Höhe in unverschieblich gelagerte Ringnetze Rocco 5(,7,12,19)/3/300 Quelle: SLF Davos

### 6.1.2.2 Simulationsergebnisse

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Versuche wurden mit dem Simulationsprogramm mit den charakteristischen Ringnetzparametern nach Abschnitt 3.1.5.4 nachgerechnet. Abb. 6.5 und 6.4 zeigen die entsprechenden Resultate.

Bei der Wahl der Ringparameter wurde mit einer Drahtwindungszahlabhängigen Formulierung erreicht, dass mit diesem Ansatz auch die entsprechenden Werte für andere als die untersuchten Windungszahlen ermittelbar sind. Die damit erhaltenen Ergebnisse zeigen sich als brauchbar im Vergleich mit den Versuchen. So stimmen der zeitliche Verlauf und die Extremwerte der Kurven für alle untersuchten Ringnetztypen gut bis sehr gut überein.

### 6.1.3 Verschiebliche Lagerung

Spannt man zwei Paar Seile über den Versuchsrahmen, so spannen diese wiederum ein Quadrat auf, in welches ein Ringnetz eingehängt werden kann. Die sich daraus ergebenden Verformungen werden massgeblich durch den Vorhangeffekt beeinflusst, bei welchem sich die Randknoten des Ringnetzes an der Stelle der grössten Lastkonzentration sammeln.

Die Verifizierung dieser Berechnung erfolgt exemplarisch mit den Versuchsergebnissen der Versuche *Rocco 7/3/300R11,12,16,17* nach [39]. Der Vergleich aus Versuch und dazugehöriger Simulation von Weg-, Beschleunigungs- und Energiekurve des Steins sowie der Mittelwerte der vier Seilkräfte findet sich in der linken Hälfte von Abb. 6.6. Auch hier zeigt sich besonders in Anbetracht der grossen Gesamtverformungen von bis zu  $2m$  eine sehr gute Übereinstimmung.

#### 6.1.3.1 Einsatz von Bremsen

Stattet man die vier Randseile an jedem ihrer Enden noch mit je einem Bremsen aus, so ergeben sich durch deren grosse Verformungen längere Bremswege für den Stein, was wiederum in einer Reduktion der maximalen Verzögerung des Steins und damit der Beanspruchung der Ringnetze resultiert. Die weitgehend vollplastisch zu behandelnden Bremsringe nehmen zudem einen grossen Anteil des Energieinhalts des Steins auf. Die rechte Hälfte von Abb. 6.6 zeigt den Vergleich der Bewegungsgrössen des Steins sowie der mittleren Seilkräfte für die von Grassl durchgeführten Versuche *Rocco 7/3/300R18,19*. Wie bereits in [39] erwähnt hängt die Qualität der Ergebnisse sehr stark mit dem Last-Verformungsverhalten der Bremsringe zusammen, da diese auf den gesamten Verformungsprozess massgeblichen Einfluss haben. Ist jenes nun auf Grund von vorhandenen Streuungen o.ä. nicht ausreichend bekannt, so muss mit Ungenauigkeiten, wie sie in dem hier gezeigten Beispiel auftreten, gerechnet werden. Die Simulationsergebnisse sind dennoch ausreichend, da sie die in der praktischen Anwendung relevanten Grössen ausreichend genau abbilden. Dazu gehören der Gesamtbremsweg des Steins, die maximale Steinverzögerung und die daraus resultierende Ringnetzbeanspruchung. Die Seilkräfte werden mit der Simulation deutlich überschätzt. Man liegt damit zwar auf der sicheren Seite, läuft damit aber in Gefahr, bei der Bemessung diese Seile zu überdimensionieren. Andererseits

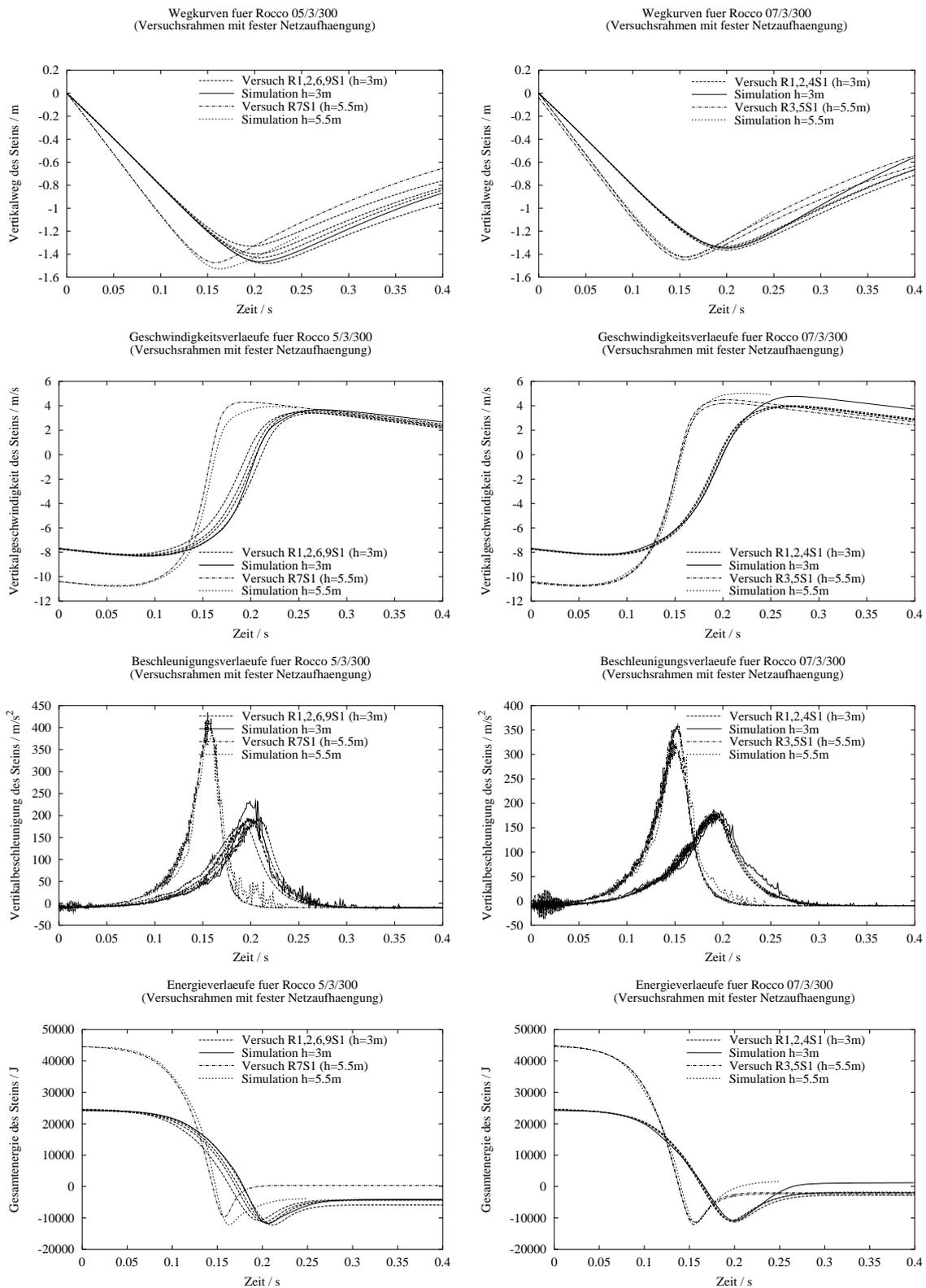


Abbildung 6.4: Vergleich zwischen Simulation und Versuchen von Weg-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Energiekurven des Steins beim Fall aus 3 bzw. 5.5m Höhe in unverschieblich gelagerte Ringnetze Rocco 5/3/300 und 7/3/300

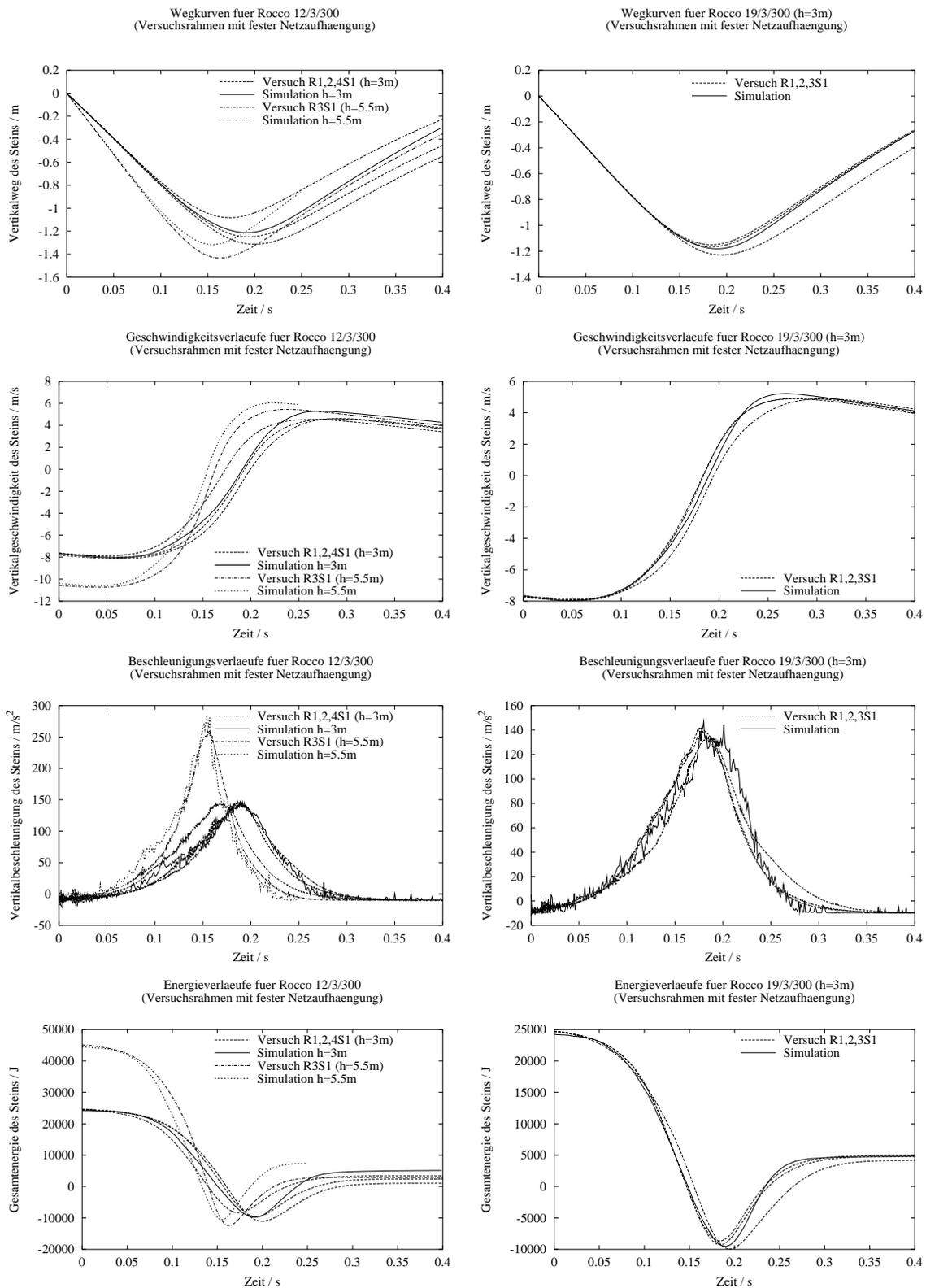


Abbildung 6.5: Vergleich zwischen Simulation und Versuchen von Weg-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Energiekurven des Steins beim Fall aus 3 bzw. 5.5m Höhe in unverschieblich gelagerte Ringnetze Rocco 12/3/300 und 19/3/300

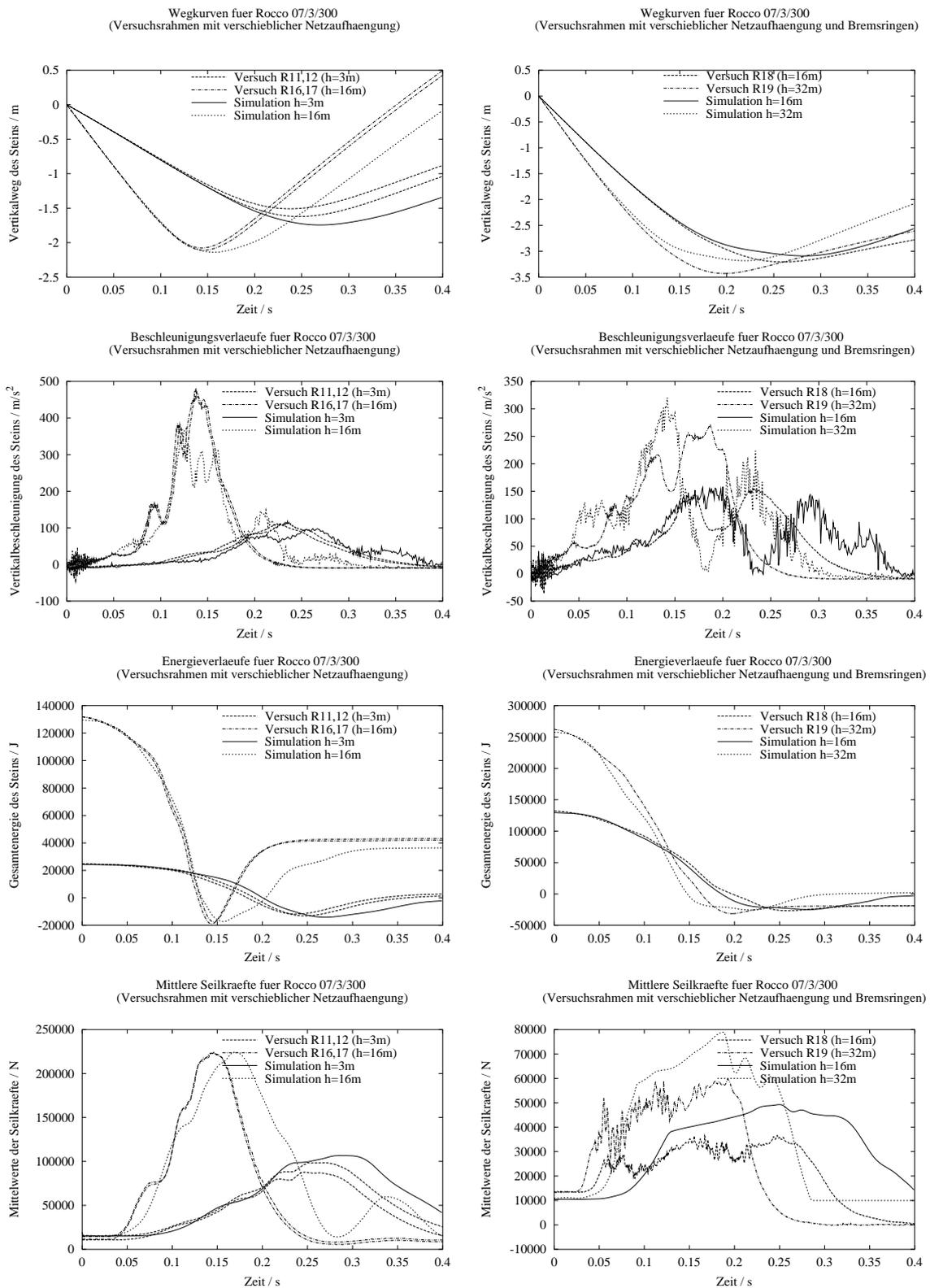


Abbildung 6.6: Vergleich zwischen Simulation und Versuchen von Weg-, Beschleunigungs- und Energiekurven des Steins sowie den Mittelwerten der Seilkräfte bei einem an *Geobinex 22*-Seilen verschieblich gelagerten Ringnetz *Rocco 7/3/300* (Rechte Hälfte mit integrierten Bremsen *GS-8002*) Quelle Versuchsdaten: SLF Davos

ist eine Überschätzung der Seilkräfte u.U. sogar erwünscht, da das verwendete Seilmodell nach Abschnitt 3.2 keine Querpressung berücksichtigt, welche die Tragfähigkeit eines Seils reduziert.

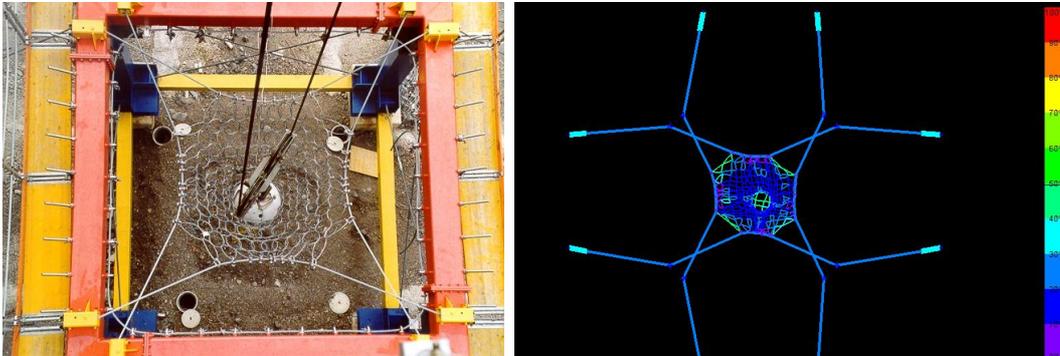


Abbildung 6.7: Ringnetz *Rocco 7/3/300* aufgehängt an Randseilen *Geobinex 22*, deren Enden über Bremsselemente *GS-8001* mit den Bodenverankerungen verbunden sind: Auslastung des Ringnetzes in 10% Schritten und Vergleich des Verformungsbildes mit dem eines Versuchs nach einem Fall des Versuchskörpers ( $\varnothing = 80\text{cm}$ ,  $m = 825\text{kg}$ ) aus einer Höhe von  $h = 32\text{m}$

## 6.2 Simulation einer realen Verbauung

Um die Brauchbarkeit des Simulationsprogramms für komplette Steinschlagverbauungen nachzuweisen, wird in diesem Abschnitt ein Steinschlagereignis in eine vollständige Steinschlagschutzverbauung simuliert. Das untersuchte System war eine Verbauung, welche im Versuchstand für dreifeldrige Bauwerke installiert wurde (siehe auch [30]). Die Simulation orientiert sich dabei an dem Versuch R22S1 nach [39] mit einer Variation des Verbauungssystems Geobrigg RX025, welches in seiner Originalkonfiguration auf eine Aufprallenergie von  $E_{\text{Stein}} = 250\text{ kJ}$  ausgelegt ist.

### 6.2.1 Simuliertes System

#### 6.2.1.1 Systemdaten

Die Verbauung verläuft über drei Felder mit einer Höhe von  $5\text{ m}$  und einer Breite von je  $10\text{ m}$ . Sie wurde an eine senkrechte Felswand montiert und ist um  $30^\circ$  gegenüber der Horizontalen nach oben geneigt. Die Rückhalteseile schliessen mit den Verbauungsstützen bei Projektion in Verbauungslängsrichtung einen Winkel von  $80^\circ$  ein. Die oberen und unteren Tragseile sowie die seitlichen Abspannseile werden auf Höhe der Stützenfußverankerungen in ca.  $5\text{ m}$  Abstand rechts und links der Verbauung verankert. Die Rückhalteseile sind an den Enden und die Tragseile an Anfang und Ende jeweils mit einem Bremsselement bestückt.

Als Systemkomponenten wurden die gleichen Komponenten wie auch schon bei den Versuchen am Versuchsstand für Bauwerkskomponenten eingesetzt. D.h., es werden die Seile *Geobinex 22* und Bremsenringe *GS-8001* verwendet. Das Ringnetz besteht aus Ringen vom Typ *Rocco 7/3/300* und wird über Schäkkel mit den Tragseilen verbunden. bei den Stützen handelt es sich um ein *HEB200*-Profil.

Der kugelförmige Stein hat wie schon bei den Versuchen am Versuchsrahmen einen Durchmesser von  $d_{Stein} = 0.8 \text{ m}$  bei einer Masse von  $m_{Stein} = 825 \text{ kg}$ . Nach einem freien Fall des Steins über eine Distanz von  $h_{Start} = 32 \text{ m}$  beträgt seine rein translatorische Auftreffgeschwindigkeit  $v_{Stein,0} = 25 \text{ m/s}$ .

### 6.2.1.2 Getroffene Annahmen und Modellierung

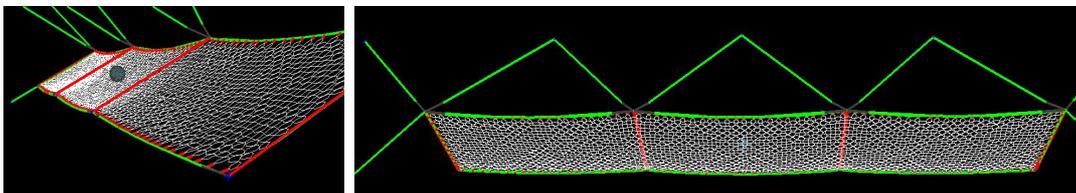


Abbildung 6.8: Modell des simulierten Systems Rx-025spezial nach Berechnung des statischen Netzdurchhangs vor der Simulation des Steinschlagereignisses

Die angesetzte Querschnittsfläche der Stützelemente  $A_{Stütze} = 0.008 \text{ m}^2$  entspricht derjenigen eines *HEB200*-Profils. Die eingesetzten Seilelemente werden mit den Kennwerten für die Seile *Geobinex 22* und die Bremsenringe *GS-8001* modelliert<sup>2</sup>. Die Vorspannung der Seile wurde entsprechend den gemessenen Seilkräften nach [39] beaufschlagt. Die charakteristischen Ringparameter für das Ringnetz entsprechen denjenigen aus Abschnitt 3.1.5.4. Die Schäkkel zwischen Tragseilen und Ringnetz werden durch  $10 \text{ cm}$  lange Stabelemente mit einer Querschnittsfläche von  $A_{Schäkel} = 0.0004 \text{ m}^2$  modelliert.

Im Modell werden sämtliche Ringknoten in einer Ebene eingegeben. Da das reale Netz einen gewissen Durchhang hat, werden durch die ebene Eingabe die Ringe gestaucht definiert, was bei dem verwendeten Ringmodell erlaubt ist, da die Referenzringgröße nicht durch die Lage der Knotenkoordinaten, sondern über die eingegebene Ringgeometrie definiert ist und das Ringmodell druckschlaff aufgebaut ist.

Die Simulation erfolgt mit einem Zeitschritt von  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ . Der obere Grenzwert hierfür wird im behandelten Beispiel auf Grund der kurzen Länge der eingesetzten Stabelemente zur Simulation der Schäkkelverbindungen definiert (siehe Beispiel in Abschnitt 2.2.2). Eine viskose Dämpfung von  $\alpha = 10$  reduziert auftretende hochfrequente Schwingungen der Elementknoten.

Der Kontaktstoss zwischen Stein und Knoten erfolgt vollplastisch, wobei eine  $1 \text{ mm}$ -dicke elastische Schicht um den Stein Beschleunigungsspitzen reduziert, wie in Abschnitt 4.2.5 beschrieben. Der Reibungskoeffizient zwischen Stein und Netzknoten beträgt  $\mu = 0.3$ .

---

<sup>2</sup>Die entsprechenden Charakteristiken wurden von der Firma Fatzer AG Geobruigg zur Verfügung gestellt.

Um die Netzgeometrie genauer zu erfassen wird der dynamischen Analyse eine quasistatische Berechnung nach Abschnitt 2.3 vorangestellt (Details siehe Abschnitt 6.1). Abb. 6.8 zeigt die sich daraus ergebende Startkonfiguration für die Simulation des Steinschlagauffangprozesses.

### 6.2.2 Ergebnisse

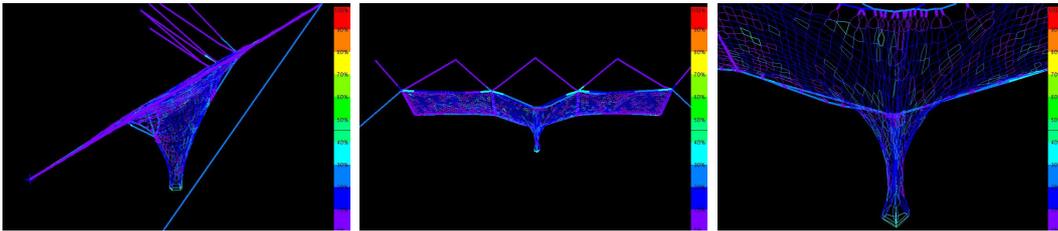


Abbildung 6.9: System Rx-025spezial nach erfolgreichem Abbremsen des fallenden Steins

Abb. 6.9 zeigt die verformte Lage der Verbauung bei maximaler Auslenkung, Abb.6.10 verschiedene numerische Ergebnisse im Vergleich zu den Versuchsergebnissen.

Die Versuchsergebnisse sind ebenfalls in [39] näher erläutert. In diesem Fall fällt besonders auf, dass die Beschleunigungskurve aus den Versuchen sehr glatt verläuft. Dies ist dadurch bedingt, dass sie nicht wie sonst aus der im Stein integrierten Beschleunigungsmessung, sondern über die zweimalige Zeitableitung der Verformungskurve ermittelt wurde, welche aus der Videoauswertung mit einer deutlich geringeren Abtastrate gewonnen wurde. Sehr deutlich ist bei den aus den Versuchen gewonnenen Seilkräften der Einfluss der in Serie geschalteten Bremsen zu erkennen. Dies äußert sich zum Beispiel bei der Kurve des oberen Tragseiles  $To2$  darin, dass es auf Grund von Ruckungen im Last-Verformungsverhalten der Bremsringe immer wieder zu abrupten Seilkraftverlusten kommt. Solcherlei Ruckungen treten bei den simulierten Bremsringen jedoch nicht auf.

Der Vergleich der Simulations- mit den Versuchsergebnissen zeigt im Endeffekt, dass die Simulation hinsichtlich der Bauteilbeanspruchung sehr gut geeignet ist, um entsprechende Dimensionierungen vorzunehmen. Die Maximalbeanspruchung der Seile sowie die maximale Verzögerung des Steins und damit die höchste Beanspruchung des Ringnetzes im Auffangbereich stimmen gut überein. Die Maxima der Simulation treten auf Grund der dort idealen Geometrien im Vergleich zu den allfälligen Schwankungen der realen Verbauungen unter Umständen zu anderen Zeitpunkten im Vergleich zu denjenigen des Versuchs auf. Die simulierten Tragseile weisen ein deutlich höheres Maximum auf, was bei der Seildimensionierung jedoch in Hinblick auf Seilquerpressung eine erwünschte Reserve übrig lässt. Allein bei der Dimensionierung der Abspannseile sollte eine entsprechende Reserve dazugerechnet werden, da die Simulationskräfte unter denen des Versuchs lagen.

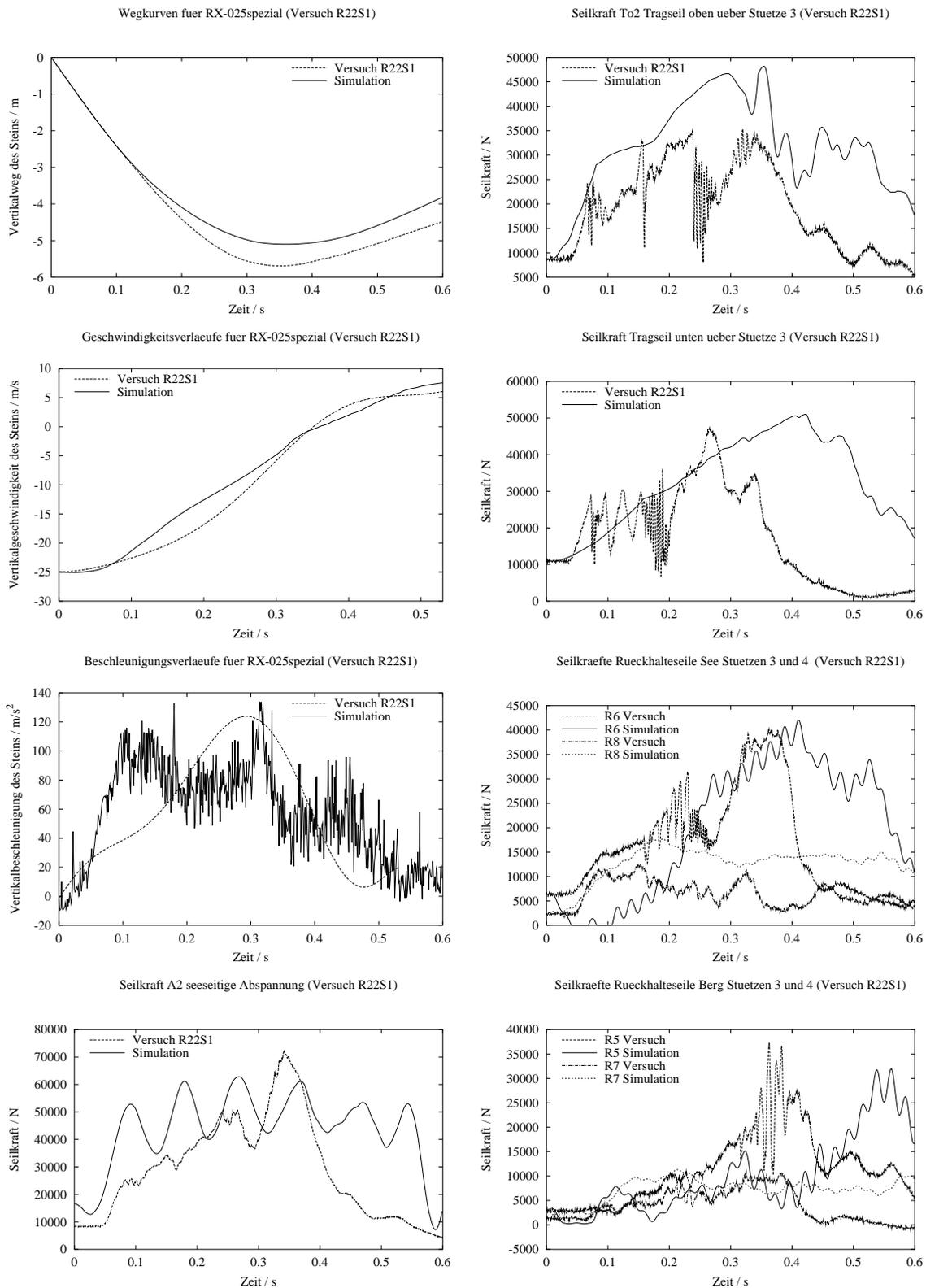


Abbildung 6.10: Versuch R22S1: Vergleich zwischen Simulation und Versuchen von Weg-, Beschleunigungs- und Energiekurven des Steins sowie einiger exemplarischer Seilkräfte einer Variation des Systems RX-025. Quelle Versuchsdaten: SLF Davos

## 6.3 Einfluss verschiedener Modellierungsdetails

Wie in Kap. 5 beschrieben, gibt es bei der Modellierung eines Steinschlagschutzsystems ein paar numerische Parameter, welche eingesetzt werden können, um die Qualität der Ergebnisse zu verbessern oder um unter Umständen überhaupt brauchbare Ergebnisse zu erhalten. In diesem Abschnitt soll deshalb kurz erläutert werden, welchen Einfluss solche Parameter auf die Ergebnisse haben und ob sie damit für die Simulation zwingend notwendig werden oder nicht. Ziel ist es dabei, abschätzen zu können, wie detailliert eine Verbauung modelliert werden muss, um noch plausible Ergebnisse zu erhalten. Weniger Modellierungsdetails bedeuten eine schnellere Modellierung und eine schnellere Analyse. Die untersuchten Einflüsse werden jeweils anhand von charakteristischen Ergebnissen von simulierten Experimenten am Versuchsrahmen für Verbauungskomponenten zum Teil mit verschieblicher und zum Teil mit unverschieblicher Lagerung des Ringnetzes dokumentiert.

### 6.3.1 Berücksichtigung der statischen Ruhelage

Da die Netzgeometrie von vornherein nie genau dem sich in der Verbauung einstellen dem Durchhang eingegeben werden kann, behilft man sich mit einer ebenen Eingabe der Netzfläche und ermittelt dann mit einer statischen Berechnung nach Abschnitt 2.3 den statischen Durchhang. Diese Berechnung kostet jedoch relativ viel Zeit, welche bei der praktischen Entwicklung eines Verbauungstyps störend sein kann. Darum empfiehlt sich für schnelle Studien eine Berechnung ohne die vorherige Ermittlung des statischen Netzdurchhangs. Was bedeutet dies für die Simulation? Der Stein wird in beiden Fällen direkt über dem Netz mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit platziert. Stellt man der dynamischen Simulation keine Durchhangsberechnung voran, so kann der Stein zuerst eine Weile mehr oder weniger ungebremst weiter fallen, bis das Netz wieder so gespannt ist, dass es einen entsprechenden Widerstand aufbauen kann. Durch diese zusätzliche Freifallperiode erhöht sich die Fallgeschwindigkeit und damit die kinetische Energie des Steins, welche nun vom Netz aufgefangen werden muss. Dies resultiert wiederum in einer stärkeren Verzögerung des Steins und damit in einer stärkeren Belastung des Netzes.

Der Einfluss der vorangestellten Berechnung des statischen Durchhangs auf den Bremsweg, die maximale Verzögerung und die Netzbelastung ist in Tab. 6.1 dargestellt. Für den Vergleich herangezogen wurden Berechnungen eines Versuchs am Versuchsrahmen für Bauwerkskomponenten mit einem unverschieblich gelagertem Netz.

	mit 0.6 $m$ stat. Netzdurchhang	mit ebener Netzfläche
Bremsweg in $m$	1.39	2.0
Max. Verzögerung in $m/s^2$	360	391
Max. Netzbeanspruchung in %	58	62

Tabelle 6.1: Einfluss der Berücksichtigung des statischen Netzdurchhangs vor der dynamischen Steinschlaganalyse am im Versuchsrahmen unverschieblich gelagerten Ringnetz Rocco 7/3/300 bei einem Fallhöhe des Steins von  $h = 5.5m$

### 6.3.1.1 Wahl der Parameter

Bei der Berechnung des statischen Durchhangs genügt es im Prinzip, das System durch sein Eigengewicht zu belasten und dann mit einer relativ hohen viskosen Dämpfung  $\alpha$  zur Ruhe kommen zu lassen. Wählt man diese jedoch zu hoch, kommt das System auf Grund der vergleichsweise relativ geringen Eigengewichtskräfte verfrüht zur Ruhe und ermittelt einen falschen statischen Netzdurchhang. Ist  $\alpha$  jedoch zu klein, können sich im System Schwingungen einstellen, die sich immer mehr vergrössern und das System nicht zur Ruhe kommen lassen, sodass auch keine statische Ruhelage gefunden wird. Ebenso besteht die Gefahr, dass das Netz durch sein Eigengewicht ausgelenkt wird und durch die zu geringe Dämpfung am Umkehrpunkt relativ schnell zurück schwingt und nur äusserst langsam zur Ruhe kommt.

Möchte man den Netzdurchhang eines mit den Ringelementen nach Grassl modellierten Netzes ermitteln, so muss berücksichtigt werden, dass zwischen den Elementknoten auch Druckkräfte wirken können. Um ein dadurch bedingtes Umschlagen des Netzes entgegen der Schwerkraftrichtung auf Grund des geringen Eigengewichts zu vermeiden, empfiehlt es sich, dieses vorübergehend zu erhöhen und dann wieder zu erniedrigen. D.h. die Gleichgewichtslage wird zuerst überschritten und anschliessend von unten erreicht. Der Einfluss der Wahl der hierfür zur Verfügung stehenden Parameter auf den statischen Netzdurchhang eines unverschieblich gelagerten Ringnetzes ist in Tab. 6.2 gezeigt.

	Var. 1 'von oben'	Var. 2 'von unten'
Anfänglicher Dämpfungskoeffizient	5	20
Genauigkeit	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
Überlastfaktor	1.0	2.0
Anzahl Lastreduktionsschritte	1	5
Zieldämpfungskoeffizient	5	5
Statischer Netzdurchhang in Feldmitte	56 cm	60 cm
Rechenaufwand	137%	100%

Tabelle 6.2: Einfluss der Parameter zur Berechnung des statischen Netzdurchhangs am im Versuchsrahmen unverschieblich gelagerten Ringnetz

### 6.3.2 Dämpfungskoeffizienten

Wird eine viskose Dämpfung angegeben, so beeinflusst diese allein die Knoten und nicht den Stein. Es ist dadurch möglich, kleine hochfrequente Massenschwingungen zu unterdrücken und damit die Simulationsergebnisse gleichmässiger darzustellen. Der Einfluss auf den eigentlichen Abbremsvorgang bleibt jedoch gering, was der Vergleich der beiden Verzögerungskurven in Abb. 6.11 für zwei verschiedene Dämpfungskoeffizienten von  $\alpha_{links} = 0.0001/s$  und als extreme Variante von  $\alpha_{rechts} = 10.0/s$  veranschaulicht. Der Stein wird in seiner Bewegung nur wenig beeinflusst, aber die Horizontalbeschleunigungen eines beliebig gewählten Netzknotens werden vor allem im Entlastungszeitraum deutlich

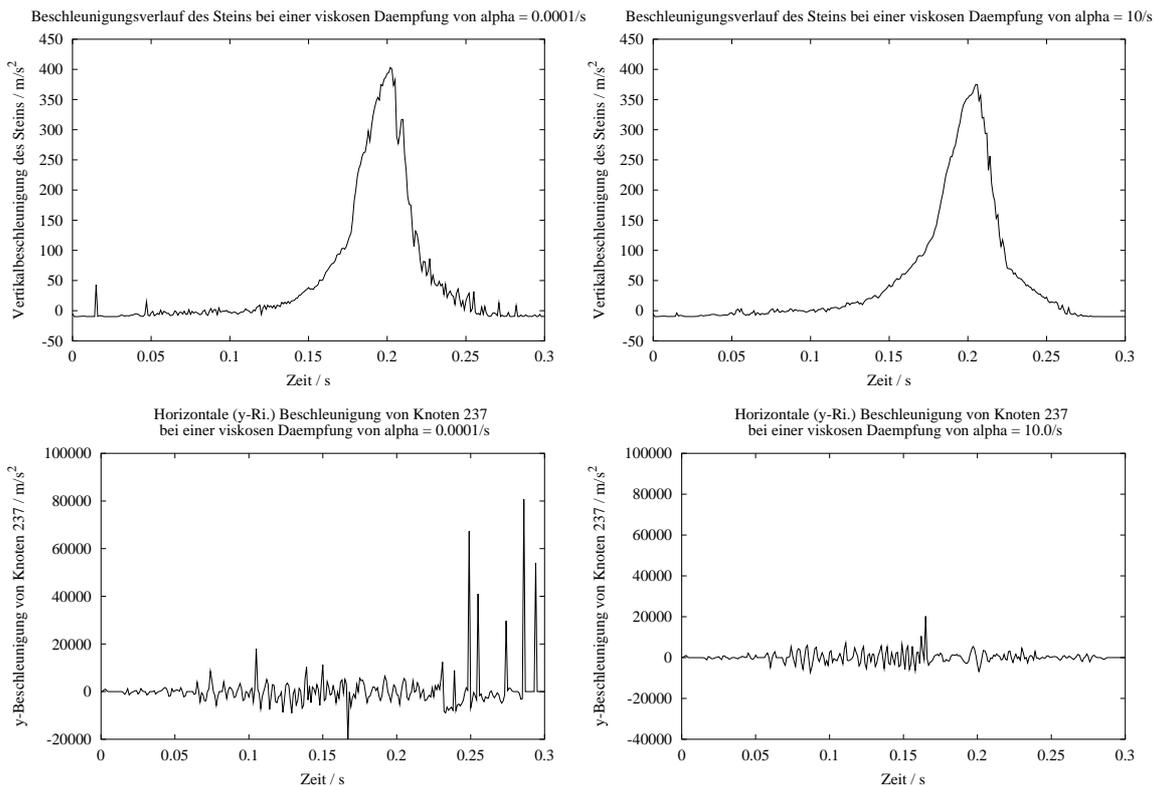


Abbildung 6.11: Einfluss der viskosen Dämpfung auf (oben) die Vertikalbeschleunigungskurve des Steins und (unten) die Horizontalbeschleunigung eines Netzknotens für  $\alpha_{links} = 0.0001/s$  und  $\alpha_{rechts} = 10.0/s$

beruhigt. Ungedämpft würden die Knoten gerade bei diesem Simulationsabschnitt mehr oder weniger ungezwungen anfangen zu schwingen.

### 6.3.3 Schäkkel zwischen Netz und Seilen

Die Befestigung der Ringnetze an den Tragseilen erfolgt über Schäkkel, die wiederum als Fachwerkelemente simuliert werden. Letztere erlauben in erster Linie, dass sich die Ringe optimaler entsprechend ihrer Belastung am Tragseil anordnen können. Für eine einfachere Modellierung der Systeme, ist es nun denkbar, diese Schäkkel nicht einzusetzen, was zum einen die maximal mögliche Zeitschrittgröße heraufsetzt und durch die reduzierte Element- und Knotenanzahl auch die Simulation beschleunigt. Die Simulation ergab bei fehlenden Schäkkeln eine um 3% höhere Seilkraft in den Tragseilen bei einer Zunahme des maximalen Ringnetzauslastungsgrads von 9%. Das Fehlen der Schäkkel wirkt sich demnach praktisch kaum auf die in den Tragseilen wirkenden Kräfte aus. Die durch Vereinfachung entstandene Sicherheitsreserve im Ringnetz kann ebenfalls erwünscht sein.

### 6.3.4 Berücksichtigung der Seilbiegespannungen

Gibt man bei der Modellierung der Seile an, dass die Seilbiegespannungen mit erfasst werden sollen, so erhält man z.B. bei der Simulation einer dreifeldrigen Verbauung in den Tragseilen eine maximale Auslastung von 39% gegenüber 26%. Dabei nimmt man an, dass die Seilbiegung keinen Einfluss hat, da der wirksame Biege­widerstand der Seile sehr klein ist.

### 6.3.5 Reibungskoeffizienten

Einen grossen Einfluss auf die Auslastung der Elemente hat die Angabe von Reibungskoeffizienten, da hierbei zusätzliche Energie abgebaut werden kann. Der Einfluss der Reibungskoeffizienten zwischen Stein und Ringnetz sowie der Netzbefestigung an den Seilen wird nachfolgend kurz erörtert.

#### 6.3.5.1 Reibung zwischen Stein und Verbauung

Im Vergleich zur Realität, wo die Ringelemente einen linienförmigen Kontakt mit dem Stein haben, konzentrieren sich in der Simulation die Kontaktkräfte in den einzelnen Ringknoten. Bei hohen Kräften treibt es die Knoten dann radial zum Steinmittelpunkt auseinander. Dies wiederum erzeugt hohe Normalkraftbeanspruchungen in den Ringen, welche die Ringe u.U. sogar zerreißen können. Um nun diesen Effekt nicht zu stark werden zu lassen, empfiehlt sich die Einführung einer Reibung zwischen Stein und Knoten. Sowie ein Knoten nun tangential zur Steinoberfläche zu gleiten beginnt, wirkt eine entsprechende Reibungskraft dieser Bewegung entgegen. Dieser Einfluss wirkt sich somit in erster Linie auf die Beanspruchung der Netzringe im Kontaktbereich mit dem Stein aus. Tab. 6.3 zeigt den Einfluss auf den Ringauslastungsgrad. Es ist demnach entscheidend, dass ein Reibungskoeffizient angesetzt wird, seine Grösse sollte in dem mit der Realität bei Reibung zwischen Beton und Stahl vergleichbaren Wert von  $\mu = 0.3..0.5$  liegen. In diesem Bereich bleibt dann der Einfluss des Reibungskoeffizienten auf die max. Ringauslastung gering.

Reibungskoeffizient $\mu$	max. Auslastung der Netzringe
0.0	96%
0.1	85%
0.3	64%
0.5	61%
0.7	52%
1.0	46%

Tabelle 6.3: Einfluss der Reibung zwischen Stein und Ringnetz bei einem unverschieblich am Versuchsrahmen gelagerten Netz

### 6.3.5.2 Seilreibung

Berücksichtigt man Reibungseffekte entlang der Seile, die auftreten können, wenn entweder die Seile über bestimmte Fixpunkte oder das Ringnetz entlang der Seile gleitet, so werden diese Bewegungen durch die Reibung gebremst. Durch die Reibung wird somit zusätzlich Energie vernichtet. Die beiden auftretenden Gleitvarianten haben jedoch unterschiedlichen Einfluss auf den Abbremsvorgang. Die Gleitungen der Tragseile über Fixpunkte treten nur dann auf, wenn das Seil unter höherer Last steht und entweder durch seine Eigendehnung oder durch die Verlängerung der angeschlossenen Bremsamente über die Auflager oder Enden der Verbauungsstützen rutscht. Dass hierbei sehr hohe Reibungskräfte vorhanden sind, zeigt auch die Realität, da diese Rutschungen dort sogar spänende Wirkung haben. Im Gegensatz dazu, haben die Reibungseffekte der Ringnetzrandschäkel nur geringen Einfluss auf das Tragverhalten einer Verbauung. Das liegt daran, dass das Ringnetz die für sich optimale Position zum Abbremsen des Steins schon früh einnimmt, bevor überhaupt hohe Kontaktkräfte zu den Tragseilen vorhanden sind, welche wiederum hohe Reibungskräfte bewirken könnten. Treten jene dann später beim Abbremsprozess auf, gibt es kaum noch Rutschungen der Schäkel entlang der Tragseile, deren Reibung das Tragverhalten beeinflussen könnte.

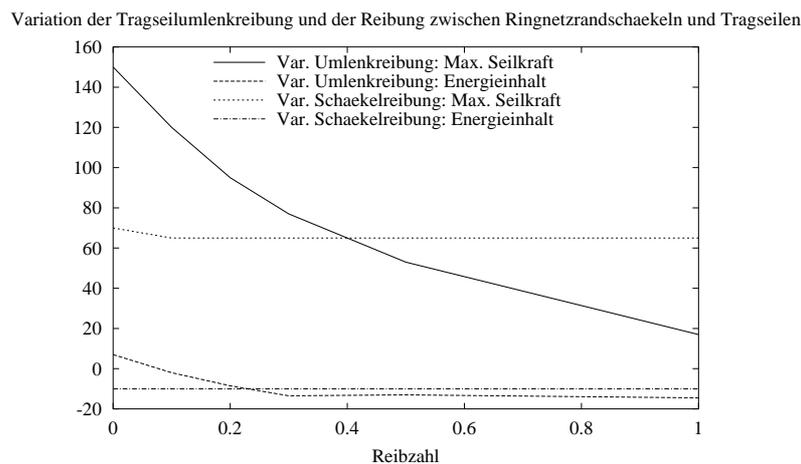


Abbildung 6.12: Einfluss der Reibungskoeffizienten an den Tragseilumlenkungen und zwischen Netzrandschäkeln und Tragseilen

Belegt wird dies anhand des Diagramms in Abb. 6.12. Hier wurde zum einen für ein an Tragseilen gelagertes Ringnetz am Versuchsrahmen der Reibungskoeffizient zwischen Tragseilen und Tragseilumlenkungen variiert. Um dem Ringnetz auch die Möglichkeit von grösseren Rutschungen entlang der Tragseile zu geben, wurde für die Variation des Reibungskoeffizienten zwischen Ringnetzrandschäkeln und Tragseilen ein an mit Bremsringen ausgestatteten Tragseilen gelagertes Ringnetz eingesetzt.

Deutlich ist nun zu erkennen, dass eine Variation des Reibungskoeffizienten zwischen Tragseilen und Ringnetzrandschäkeln praktisch keinen Einfluss auf die maximalen Tragseilkräfte und das Energieniveau des Steins nach dem Steinschlagereignis hat. Variiert man hingegen den Reibungskoeffizienten an den Tragseilumlenkpunkten, kann man einen deutlichen Einfluss auf den Energieabbau in der Testverbauung und die maximalen Trag-

seilkräfte erkennen. Das macht auch deutlich, dass es sehr stark darauf ankommt, wie diese Umlenkung in der Praxis gestaltet wird. Bei einer Reibungsbehafteten Umlenkung können die Tragseilkräfte reduziert werden, jedoch müssen die auftretenden Reibungskräfte von den übrigen Verbauungskomponenten wie Rückhalteseile und Stützenfundamente aufgenommen werden. Auch für die Interpretation der Versuchsergebnisse ist diese Tatsache von immenser Bedeutung, da auch die experimentell gemessenen Seilkräfte offensichtlich von der Gestaltung der Seilumlenkung abhängen.

# 7 Schlussbemerkungen

## 7.1 Zusammenfassung

Mit zunehmender Erfahrung und Wissen im Bereich der flexiblen Steinschlagschutzverbauungen ist es heutzutage möglich, diese zum Abfangen von immer energiereicheren Steinschlägen einzusetzen. Die in dieser Arbeit vorgestellte numerische Simulation solcher Verbauungen soll die Entwicklung zukünftiger Verbauungen vereinfachen, sodass nicht mehr so viele teure Experimente notwendig sind. Dazu wurde ein Finite-Element-Modell entwickelt und in dieser Arbeit vorgestellt. Mit einem expliziten Zeitschrittintegrationsverfahren lässt sich der kurzzeitige Auffangprozess des dynamischen und stark nichtlinearen Systems gut simulieren.

### **Belastung**

Die Belastung der Verbauung erfolgt über einen einzelnen kugelförmigen Stein, der im Rahmen der Simulation als Starrkörper behandelt wird. Bei der verwendeten Starrkörperdynamik wird auch die entsprechende räumliche Rotation des Steins mit Hilfe der Quaternionenalgebra berücksichtigt. Damit erfasst man die durch Reibung zwischen Stein und Verbauung induzierten Momente korrekt und schafft zum anderen die Vorbereitung des Simulationsprogramms auf nicht kugelförmige Steine. Ein eigener Kontaktalgorithmus erfasst die Interaktion zwischen den Elementknoten der simulierten Verbauung und der Steinoberfläche inkl. der Reibung zwischen den Kontaktpartnern. Gegen Ende des Kapitels zur numerischen Behandlung des Steins wird ein Ausblick für die Verwendung von nicht kugelförmigen Steinformen sowie der Interaktion mit dem Untergrund gegeben. Letzteres käme zum Einsatz, wenn eine Verbauung simuliert werden soll, die nicht wie die untersuchten an einer senkrechten Felswand, sondern wie in der Praxis üblich an einem geneigten Hang verbaut sind.

### **Verbauung**

Die untersuchten Verbauungen setzen sich aus verschiedenen Komponenten zusammen, die jeweils mit speziellen diskreten Elementen simuliert werden. Nur bei der Simulation der Verbauungsstützen kommen herkömmliche Fachwerkelemente zum Einsatz. Wegen ihrer im Vergleich zu den übrigen Verbauungskomponenten grossen Masse wurde auch eine Korrektur der an den beiden Massenpunkten wirkenden Beschleunigungen eingeführt, mit welcher die Trägheitskräfte auch bei einer grossen Rotation der Stütze korrekt erfasst werden können.

Die Modellierung der Rückhalte- und Abspannseile einer Verbauung erfolgt ebenfalls mit

biegefreien Fachwerkelementen über ein druckschlaffes Materialgesetz. Um den Gleitprozessen gerecht zu werden, welche an den Tragseilen auftreten, wurden zudem spezielle Seilelemente entwickelt und vorgestellt. Diese ermöglichen ein Verschieben der einzelnen Seilelementknoten entlang des Seils und bilden somit entweder das Rutschen des Seiles über Verbauungsfixpunkte oder das Rutschen der Ringnetze entlang des Tragseils ab. Die Gleitprozesse können auch reibungsbehaftet sein. Hier kann je nach Art der an einer Stelle auftretenden Seilumlenkung ein anderer Ansatz für die Reibkräfte eingesetzt werden. Diese werden zum einen als Seilreibung (siehe z.B. [48]) erfasst, wenn die Reibung infolge einer Umlenkung mit einem grossen Umlenkradius auftritt und das Seil somit über den gesamten Umlenkwinkel auf einer Linie die Umlenkung berührt. Bei einer sehr punktuellen Einwirkung wie der eines einzelnen Schäkels kommt dagegen eher eine einfache Coulombsche Reibung in Frage, da das Seil sich nicht so stark krümmen kann, wie es durch die Umlenkung vorgegeben ist. Eine weitere Variante der auftretenden Reibung ist der Einsatz von sogenannten Reibklemmen, bei denen einzelne Seilklemmen als Verbindungsmittel zwischen zwei Seilen so eingesetzt werden, dass diese sich nur mit einem bestimmten Widerstand zueinander verschieben können. Dieser Vorgang wird über eine konstante Reibkraft beim Auftreten von Gleiten innerhalb dieses Seilabschnitts berücksichtigt.

Die Last-Verformungscharakteristik eines Seils wird über dessen Kraft-Dehnungskurve erfasst. Bei Bedarf können auch durch Seilumlenkungen induzierte, über den gesamten Seilquerschnitt verteilte Seilbiegespannungen mit berücksichtigt werden. Diese werden in eine äquivalente Normalkraft umgerechnet, um dadurch die Seilbelastung im Vergleich zur maximal aufnehmbaren Normalkraft zu ermitteln.

Wegen der vielen verschiedenen Arten der eingesetzten, Energie-dissipierenden Bremsenlemente hat es sich herausgestellt, dass es am sinnvollsten ist, diese als Stabelemente mit einem druckschlaffen, abschnittsweise definierten, plastischen Last-Verformungsgesetz zu modellieren. Für die Verformung wird dabei die absolute Verlängerung und nicht wie bei den Seilen oder sonstigen herkömmlichen Elementen die Dehnung angesetzt. Eine Simulation von einzelnen Bremsringen, welche sich aus einzelnen Elementen zusammensetzt, wäre nicht wirtschaftlich und obendrein auch nur schwer bzw. ungenügend zu kalibrieren [92].

Bei den untersuchten Verbauungen kommen vierfach verhängte Ringnetze zum Einsatz, deren Ringe durch ein jeweils einzelnes diskretes Element modelliert werden. Dadurch ist es möglich, verschiedene Anforderungen an ein finites Ringelement in Bezug auf sein (räumliches) geometrisches Verhalten zu erfüllen. Dies beinhaltet vor allem die Fähigkeit dieser Ringnetze, sich innerhalb des Netzverbundes und entlang der Tragseile entsprechend ihrer Belastung anzuordnen. Bei der Tragwirkung der Ringe wird unterschieden zwischen der Biegebeanspruchung eines Rings, welche verhältnismässig wenig Widerstand aufbauen kann, und der Beanspruchung wie ein Zugstab mit weitgehend zu Geradenstücken gestreckten Ringsegmenten. Letzteres Verhalten ermöglicht ein Gleiten der Ringknoten entlang des Rings entsprechend dem Prinzip der gleitenden Seilknoten. Die charakteristischen Ringparameter wurden anhand von Versuchsergebnissen mit am Versuchsrahmen unverschieblich gelagerten Ringnetzen kalibriert.

## Ergebnisse

Die Kalibrierung der charakteristischen Netzingparameter zeigt, dass das Tragverhalten der Ringe proportional zur Anzahl der Drahtwindungen eines einzelnen Rings abgebildet werden kann. Die Berechnung von an bremsringfreien Seilen aufgehängten Ringnetzen zeigt eine gute Übereinstimmung mit den entsprechenden Versuchen. Integriert man zusätzliche Bremsselemente, hängt die Qualität der Ergebnisse stark vom angegebenen Last-Verformungsverhalten der eingesetzten Bremsselemente ab. Ist dieses auf Grund von Streuungen innerhalb der Baureihe oder ungenügend vorhandenen Versuchsdaten nur relativ ungenau und damit unzureichend bekannt, so können die berechneten Seilkräfte mitunter bis zu 30% von denjenigen in den Versuchen gemessenen abweichen. Die Abweichung war in den untersuchten Fällen meistens eine Überschätzung der tatsächlichen Last, sodass eine Dimensionierung nach den berechneten bzw. simulierten Werten auf der sicheren Seite liegen sollte. Bei der Berechnung einer gesamten Verbauung zeigte sich mit einer Abweichung von 10-15% eine gute Übereinstimmung der gefundenen maximalen Seilkräfte im Vergleich von Simulation und Berechnung, was eine ausreichende Dimensionierung der Seile zulässt. Nur bei den Tragseilen tritt eine grössere Abweichung von den Versuchsergebnissen auf. Da diese jedoch in der Berechnung überschätzt werden, liegt man bei einer Dimensionierung auf der sicheren Seite und hat somit noch weitere Reserven in Bezug auf auftretende Querpressung oder ungünstig platzierte oder mehrfache Steinschlagereignisse.

## 7.2 Einsatzmöglichkeiten des Simulationsprogramms

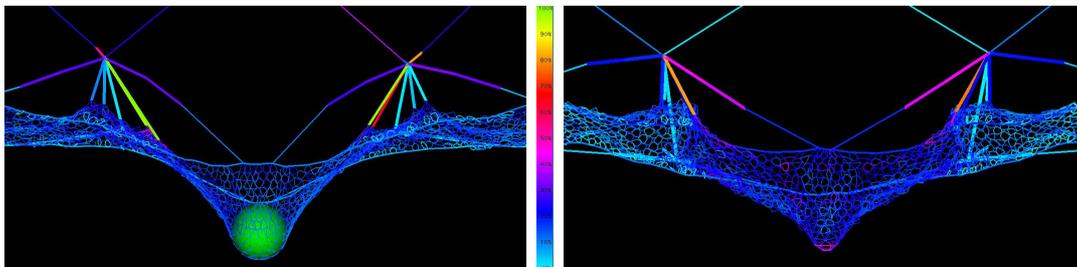


Abbildung 7.1: Belastung der Verbauung *Geobrugg RX-300 Dimo* mit  $E_{\text{Stein}} = 3000 \text{ kJ}$ :  
 (links) Normalbelastung:  $m = 9.6 \text{ to}$ ,  $v = 25 \text{ m/s}$  und (rechts) Hochgeschwindigkeitsbelastung:  $m = 1.3 \text{ to}$ ,  $v = 68 \text{ m/s}$

Mit dem beschriebenen Programm kann man nun den Auffangprozess in den Steinschlag-schutzverbauungen simulieren. Für den praktischen Einsatz bieten sich damit verschiedenste Einsatzmöglichkeiten an.

Um die vom Programm produzierten Ergebnisse optimal auf ihre Plausibilität einschätzen zu können, empfiehlt sich die Simulation bestehender und bereits in Feldversuchen getesteter Schutzverbauungen (siehe z.B. [3]). Ebenso empfiehlt sich der stete Vergleich der im Versuch gewonnenen Ergebnisse mit der vorangegangenen Simulation zur Verbesserung der Erfahrung beim Erstellen von Simulationsmodellen. Die weitere Analyse solcher

Berechnungen fördert zudem das Verständnis für die dynamischen Prozesse während des Abbremsvorgangs und kann diesen obendrein dokumentieren.

Viele Möglichkeiten hat man, die Belastung der Schutzverbauung zu variieren, wie dies in Feldversuchen zum Teil gar nicht möglich ist. So lässt sich z.B. die Auswirkung von Steinschlägen gleichen Energieinhalts, aber mit deutlich höheren Aufprallgeschwindigkeiten untersuchen (siehe Abb.7.1). Ebenso kann der Aufprallort sehr leicht variiert werden. Dies ermöglicht eine schnelle Studie über die für die Verbauung ungünstigsten Lastfälle und vermeidet riskante Versuche mit eng an den Verbauungsrändern platzierten Steinschlagereignissen, bei denen eine leichte Zielungenauigkeit im Feldversuch schnell zu ungewolltem Bruch führen kann.

Der Ausfall einer Stütze hervorgerufen durch einen Stützentreffer kann ebenfalls simuliert werden (siehe Abschnitt 3.4.2.2). Dies vermeidet z.B., dass durch einen absichtlich herbeigerufenen Stützentreffer in den Versuchen die aufwendigen Verankerungen der Versuchseinrichtung beschädigt werden.

Wenn es darum geht, einen neuen Barrierentyp zu entwickeln, kann man sehr effizient verschiedene Detail- und Gesamtlösungen berechnen. Man erkennt schnell potentielle Schwachstellen im System bzw. kann offensichtlich überdimensionierte Baugruppen anpassen und so die Barrieren hinsichtlich Konstruktions-, Material- und damit Kostenaufwand von Beginn an optimieren und ebenso die Anzahl Tests mit Prototypen reduzieren. Des Weiteren kann auch überprüft werden, ob die amtlich vorgegebenen Grenzwerte z.B. bezüglich des maximalen Bremswegs und der verbleibenden Restnutzhöhe der Verbauung nach einem Steinschlagereignis eingehalten werden [30].

Unter Umständen ist es in der Praxis je nach Verbauungsprojekt notwendig, eine bereits geprüfte Standardverbauung so zu variieren, dass sie bestimmten Randbedingungen gerecht wird. Dies beinhaltet zum Beispiel geänderte Stützenabstände oder eine andere Verbauungshöhe. Der Einfluss einer solchen Variation kann mit FARO schnell ermittelt werden und die Modifikation somit angenommen oder verworfen werden (siehe z.B. Tab.7.1). Die entscheidenden Kriterien sind hier zumeist eine noch akzeptable Auslastung der Verbauungskomponenten sowie der Nachweis eines maximalen Bremswegs. Auch für eine umgekehrte Aufgabenstellung lässt sich FARO einsetzen, d.h. für einen maximal möglichen Bremsweg oder maximal zugelassene Verankerungskräfte etc. werden die passenden Verbauungskonfigurationen gesucht.

Systemhöhe	4 m	5 m	6 m
Bremszeit	0.35 s	0.4 s	0.42 s
Bremsweg	6.02 m	6.74 m	6.89 m
Maximale Seilkraft	344 kN	347 kN	256 kN
Restnutzhöhe	2.9 m	2.8 m	3.6 m

Tabelle 7.1: Einfluss der Verbauungshöhe auf die Verbauung *Geobrugg RX-300 Dimo* [3]

Berechnungen mit anderen Netztypen z.B. Diagonalseilnetzen sind ebenfalls möglich, wenn auch hier noch Studien zum Tragverhalten der Netze vorangestellt werden müssen. Normale Seilelemente ohne entsprechende Modifikation würden zu steif ausfallen und durch die daraus resultierende steifere Verbauung dem fallenden Stein einen zu grossen

Widerstand entgegensetzen und umgekehrt dadurch auch stärker belastet werden und somit früher versagen.

## 7.3 Mögliche Erweiterungen

Zu Beginn dieses Forschungsprojekts war es das Ziel, mit Hilfe einer numerischen Simulation die durchgeführten Versuche nachzurechnen, um über diese Vergleichsmöglichkeit ein mehr oder weniger brauchbares Simulationsprogramm zu erhalten. Die nun vorliegende Version weist gute Einsatzmöglichkeiten auf und regt damit an, das Anwendungsspektrum des Simulationsprogramms zu verbessern und zu erweitern. Dies ausserdem, weil sich mit dem Erreichen der ursprünglichen Ziele gezeigt hat, dass nun weitere Details Berücksichtigung finden sollten, die während des Forschungsprojekts noch nicht mit einbezogen werden konnten. Erwähnt werden hierbei nur Vorschläge, welche die Qualität der numerischen Berechnungen verbessern würden. Weitere Vorschläge aus dem Bereich der Steinschlagereignisse, wie sie in freier Natur vorkommen, sind in [39] erwähnt.

### **Belastung**

Auf der Lastseite wurde bisher ein einzelner kugelförmiger Stein angenommen. Auf Grund der hohen Energiekonzentration bei einem Stein ist eine Erweiterung auf mehrere Steine nicht notwendig. Lediglich die Steinform sollte anpassbar werden. Für erste Untersuchungen an nicht kugelförmigen Steinen empfehlen sich Experimente mit kantenlosen Testkörpern. Das spätere Ziel sind dann beliebige, durch Polykaeder formulierbare Starrkörper. In erster Linie empfiehlt sich dabei die Steinform der Testkörper, wie sie für die Zertifizierung nach [30] vorgeschrieben werden. Damit liesse sich auch der Einfluss von Kanten und Ecken auf die Netze untersuchen, was bei dem innerhalb des Forschungsprojekts eingesetzten kugelförmigen Testkörper nicht möglich war.

Um die Berechnungen auch auf weitere Anwendungsgebiete der Verbauungen wie z.B. bei Murgängen, Schnee und Lawinen zu erweitern, ist zusätzliche experimentelle Forschung notwendig, welche die bei solchen Lastfällen wirkenden Kräfte und deren Verteilung über Zeit und Raum genauer bestimmt.

### **Verbauungen**

Nachdem die eingesetzten Modelle bereits ihre Brauchbarkeit gezeigt haben, empfiehlt sich für eine Weiterführung der Forschung im Bereich dieser Verbauungen auch eine Verbesserung des Wissens im Bereich der einzelnen Verbauungskomponenten. Dies betrifft vor allem Details, welche bei der Grössenordnung des Projekts noch nicht von vornherein erfassbar waren.

So wurde z.B. der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf die Verbauungskomponenten noch nicht näher untersucht. Es wird hierbei vermutet, dass dieser bei den Seilen und Stützen weniger, bei den Netzingen oder Bremsen eher mehr Einfluss haben wird. Bei letzteren empfiehlt sich zudem eine breit angelegte Versuchsreihe für eine bessere statistische Auswertung ihres Last-Verformungsverhaltens. Auch die Bruchlasten der

Netzringe weisen bei dynamischer Belastung deutlich höhere Werte auf als bei den quasi-statischen Versuchen nach [35]. Entsprechende Laststeigerungsserien am Versuchsrahmen wären dafür ebenso möglich wie dynamische Einzelringversuche.

Die Ringnetze wurden bisher nur für Ringe mit einem Ringdurchmesser von  $d = 300 \text{ mm}$  bei einer Drahtdicke von  $t_{\text{Draht}} = 3 \text{ mm}$  untersucht. Da in der Praxis inzwischen auch diese Parameter variiert werden, ist eine Erweiterung des Versuchsprogramms auch auf diese Variationen empfehlenswert. Um auch die Eigenschaften und Grenzeinsatzbereiche von alternativen Netztypen wie z.B. den Diagonalseilnetzen numerisch besser erfassen zu können, empfehlen sich auch für diese Netze umfangreiche Testzyklen am Versuchsrahmen. Diese Ergebnisse können ebenfalls sehr gut für die Dimensionierung der verschiedenen Netztypen im Bereich der Schnee- und Lawinenverbauungen verwendet werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] AKKARAJU, L.: *Dynamic Analysis of Cable Structures*. Diplomarbeit, University of Colorado, Boulder, 1994. Masterthesis, University of Colorado at Boulder.
- [2] ANDERHEGGEN, E., H. ELMER und H. MAAG: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden: Eine Einführung für Ingenieure*. Institut für Informatik, Zürich, 1986.
- [3] ANDERHEGGEN, E. und A. VOLKWEIN: *Rockfall Protection System GEOBRUGG RX-300 DIMO - Numerical modelling and simulation*. Techn. Ber., Federal Institute of Technology Zurich, 2004.
- [4] ANDERHEGGEN, E., A. VOLKWEIN und H. GRASSL: *Computational Simulation of Highly Flexible Rockfall Protection Systems*. In: MANG, H., F. RAMMERSTORFER und J. EBERHARDSTEINER (Hrsg.): *Proc. Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. Vienna University of Technology, 2002.
- [5] ARGYRIS, J.: *An Excursion into Large Rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32:85–155, 1982.
- [6] ARGYRIS, J. und H.-P. MLEJNEK: *Dynamics of Structures*, Bd. 5 d. Reihe *Texts on computational mechanics*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [7] ARMERO, F. und E. PETÖCZ: *Formulation and Analysis of conserving Algorithms for Frictionless Dynamic Contact/impact Problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 158:269–300, 1998.
- [8] ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Bd. 60 d. Reihe *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1978.
- [9] AZZONI, A., G. L. BARBERA und A. ZANINETTI: *Analysis and Prediction of Rockfalls Using a Mathematical Model*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 32(7):709–724, 1995.
- [10] BATHE, K.-J.: *Finite Element Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [11] BELYTSCHKO, T., W. K. LIO und B. MORAN: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley, Chichester, 2000.
- [12] BELYTSCHKO, T. und M. O. NEAL: *Contact-impact by the pinball Algorithm with penalty and lagrangian Methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31:547–572, 1991.

- [13] BENSON, D. J. und J. O. HALLQUIST: *A simple Rigid Body Algorithm for Structural Dynamics Programs*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22:723–749, 1986.
- [14] BERGMEISTER, K.: *Bewertung und Berechnung von Steinschlagnetzen*. In: HÖSLE, B. (Hrsg.): *Tagungsband Steinschlag als Naturgefahr und Prozeß*, S. 20–32, Wien, 1997. Institut für Wildbach- und Lawinenschutz, Universität für Bodenkultur.
- [15] BRACH, R. M.: *Friction, Restitution and Energy Loss in Planar Collisions*. Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics, 51:164–170, 1984.
- [16] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1976.
- [17] BUTZ, A.: *Numerische Simulation flexibler Schutzsysteme gegen Steinschlag*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2002. Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH).
- [18] CARMO, M. P. DO: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. vieweg studium, Aufbaukurs Mathematik. vieweg, Braunschweig, 1998.
- [19] CAZZANI, A., L. MONGIOVI und T. FRENEZ: *Dynamic Finite Element Analysis of Interceptive Devices for Falling Rocks*. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 39:303–321, 2002.
- [20] CHAU, K. T.: *Rockfalls, Landslides and Slope Failures*. In: ASAOKA, A., T. ADACHI und F. OKA (Hrsg.): *Deformation and progressive failure in geomechanics*, Nagoya, 2001. Pergamon.
- [21] CRISFIELD, M. A.: *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Bd. 1. John Wiley, Chichester, 1991.
- [22] CRISFIELD, M. A.: *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Bd. 2: Advances Topics. John Wiley, Chichester, 1991–1997.
- [23] DIN (Hrsg.): *Drahtseile: Normen*, Bd. 59 d. Reihe *DIN Taschenbuch*. Beuth, Berlin, 5. Aufl., 1990.
- [24] DUFFY, J. D.: *Flexible Wire Rope Rockfall Nets*. In: *Soils, Geology, and Foundations - Rockfall prediction and Control and landslide case histories (Transportation Research Record No. 1343)*, S. 30–35. Transportation Research Board, 1992.
- [25] DUFFY, J. D. und B. HALLER: *Field Tests of Flexible Rockfall Barriers*. In: WU, J. T. und R. K. BARRETT (Hrsg.): *Proc. Transportation Facilities through Difficult Terrain*, S. 465–473. Balkema, 1993.
- [26] ELATA, D., R. ESHKENAZY und M. P. WEISS: *The mechanical behavior of a wire rope with an independent wire rope core*. International Journal of Solids and Structures, 41:1157–1172, 2004.

- 
- [27] FALCETTA, J. L.: *un nouveau modele de calcul de trajectories de blocs rocheux*. Revue Francaise de Geotechnique, 30:11–18, 1985.
- [28] FATZER AG, Romanshorn: *Drahtseiltechnik - Produktdokumentation*, 2001.
- [29] FEYRER, K.: *Drahtseile - Bemessung, Betrieb, Sicherheit*. Springer, Berlin, 1994.
- [30] GERBER, W.: *Richtlinie über die Typenprüfung von Schutznetzen gegen Steinschlag*. Techn. Ber., Bundesamt für Umwelt, Wald und Landschaft (BUWAL), Eidgenössische Forschungsanstalt WSL, Bern, 2001.
- [31] GERBER, W.: *Vergleich zwischen Vertikal- und Schrägwurfanlagen zur Typenprüfung von flexiblen Steinschlagschutzverbauungen*. Techn. Ber., Eidg. Forschungsanstalt für Wald, Schnee und Landschaft WSL, Birmensdorf, 2001.
- [32] GERBER, W. und A. BÖLL: *Peak Forces in Flexible Rockfall Barriers*. In: *Interpraevent 2002 - in the Pacific Rim*. International Research Society INTERPRAEVENT, 2002.
- [33] GLOCKER, C.: *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 1995.
- [34] GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. Aula-Verlag, Wiesbaden, 1989.
- [35] GOTTSCHANG, M.: *Trag- und Verformungsverhalten von ROCCO-Drahtringnetzen*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2001. Vertieferarbeit am Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH).
- [36] GRASSL, H., P. A. BARTELT, W. J. AMMANN und A. ROTH: *Behaviour, Design and Reliability of Highly Flexible Rockfall Protection Systems for Highways*. In: DUFFY, J. D. und T. BECK (Hrsg.): *Proc. 53rd Annual Highway Geology Symposium*. California Department of Transportation, 2002.
- [37] GRASSL, H., P. A. BARTELT, A. VOLKWEIN und S. WARTMANN: *Experimental and Numerical Modeling of Highly Flexible Rockfall Protection Barriers*. In: CULLIGAN, P. J., H. H. EINSTEIN und A. J. WHITTLE (Hrsg.): *Proc. Soil and Rock America 2003*, Cambridge, Massachusetts, 2003. Verlag Glückauf GmbH, Essen.
- [38] GRASSL, H., A. VOLKWEIN, E. ANDERHEGGEN und W. J. AMMANN: *Numerical Simulation of Highly Flexible Rockfall Protection Systems*. In: JONES, N., C. A. BREBBIA und A. M. RAJENDRAN (Hrsg.): *Proc. Structures under Shock and Impact VII*, Bd. 11 d. Reihe *Structures and Materials*. WIT Press, 2002.
- [39] GRASSL, H. G.: *Experimentelle und numerische Modellierung des dynamischen Trag- und Verformungsverhaltens von hochflexiblen Schutzsystemen gegen Steinschlag*. Doktorarbeit, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2002.
- [40] GRESNIGT, A. M.: *Plastic Design of Buried Steel Pipelines in Settlement Areas*. HERON, 31(4), 1986.

- [41] GRESNIGT, A. M. und R. J. VAN FOEKEN: *Local Buckling of UOE and Seamless Steel Pipes*. In: *Proc. Eleventh International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*, Stavanger, 2001. International Society of Offshore and Polar Engineers.
- [42] GÜRLEBECK, K. und W. SPRÖSSIG: *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, Bd. 1 d. Reihe *Mathematical methods in practice*. John Wiley, Chichester[etc.], 1997.
- [43] GÖTTLICHER, B.: *Effiziente Finite-Element Modellierung gekoppelter starrer und flexibler Strukturbereiche bei transienten Einwirkungen*. Doktorarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2002.
- [44] HAJDUK, J. und J. OSIECKI: *Zugsysteme: Theorie und Berechnung*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1978.
- [45] HALLQUIST, J. O.: *LS-DYNA Theoretical Manual*. Livermore Software Technology Corporation, Livermore, 1998.
- [46] HALLQUIST, J. O., G. L. GOUDREAU und D. J. BENSON: *Sliding interfaces with Contact-impact in large-scale lagrangian computations*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:107–137, 1985.
- [47] HANENKAMP, W.: *Zum dynamischen Verhalten von Seilnetzwerken*. *Konstruktiver Ingenieurbau - Berichte*, 24, 1975.
- [48] HAUGER, W., W. SCHNELL und D. GROSS: *Technische Mechanik*, Bd. 1–3. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [49] HEARN, G. und L. AKKARAJU: *Analysis of Cable Nets for Boulder Impact*. In: STURE, S. (Hrsg.): *Proc. 10th Conf. Eng. Mech.*, 6, S. 289–292, Boulder, Colorado, 1995. ASCE.
- [50] HEARN, G., R. K. BARRETT und H. H. HENSON: *Development of Effective Rockfall Barriers*. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, 121(6):507–516, jun 1995.
- [51] HEARN, G., R. K. BARRETT und M. L. MCMULLEN: *CDOT Flexpost Rockfall Fence Development, Testing and Analysis*. In: *Soils, Geology, and Foundations - Rockfall prediction and Control and landslide case histories (Transportation Research Record No. 1343)*, S. 23–29, Washington, D.C., 1992. Transportation Research Board, National Academy Press.
- [52] HEIERLI, W., A. MERK und A. TEMPERLI: *Schutz gegen Steinschlag*. Diplomarbeit, Zürich / Bern, 1981.
- [53] HIBBIT KARLSSON & SORENSEN, INC., Pawtucket: *ABAQUS Theory Manual*, 5.4 Aufl., 1994.

- 
- [54] HOFFMANN, G.: *Application of Quaternions*. Diplomarbeit, FH Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven, 2002. [www.fho-emden.de/~hoffmann/quater12012002.pdf](http://www.fho-emden.de/~hoffmann/quater12012002.pdf).
- [55] HUGHES, P. C.: *Spacecraft Attitude Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [56] HUGHES, T. J. R., R. L. TAYLOR, JEROME L. SACKMAN, A. CURNIER und W. KNOKNUKULCHAI: *A Finite Element Method for a class of Contact-impact Problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8:249–276, 1976.
- [57] KLUMPP, A. R.: *Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction Cosine Matrix*. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 13(12):754–755, 1976.
- [58] KUGLER, J.: *Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik*. Doktorarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 1999.
- [59] LABIOUSE, V., F. DESCOEUDRES und S. MONTANI: *Experimental Study of Rock Sheds Impacted by Rock Blocks*. *Structural Engineering International*, 3:171–176, 1996.
- [60] LAMARQUE, C. H. und O. JANIN: *Numerics of systems with impacts*. In: MANG, H., F. RAMMERSTORFER und J. EBERHARDSTEINER (Hrsg.): *Proc. Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. Vienna University of Technology, 2002.
- [61] LITEWKA, P. und P. WRIGGERS: *Beam-to-beam Contact Finite Element*. In: MANG, H., F. RAMMERSTORFER und J. EBERHARDSTEINER (Hrsg.): *Proc. Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. Vienna University of Technology, 2002.
- [62] MARGRETH, S.: *Snow Pressure Measurements on Snow Net Systems*. In: *Acte de colloque*, S. 241–248, Chamonix, 1995.
- [63] MURAISHI, H.: *Dynamic Tension Tests of Brake Rings*. Techn. Ber., Japan Railway Research Institute, Tokyo, 1998.
- [64] MUSTOE, G. G. W. und H. HUTTELMAIER: *Dynamic Simulation of a Rockfall Fence by the Discrete Element Method*. *Microcomputer in Civil Engineering*, 8:423–437, 1993.
- [65] NICOT, F.: *Etude du comportement mécanique des ouvrages souples de protection contre les éboulements rocheux*. Doktorarbeit, Ecole Centrale de Lyon, 1999.
- [66] NICOT, F. und B. CAMBOU: *Dynamic Analysis of Rockfall Restraining Structures*. In: PANDE, G. N., S. PIETRUSZCAK und H. SCHWEIGER (Hrsg.): *Proc. Num. Models in Geomechanics NUMOG VII*, S. 609–613. Balkema, 1999.

- [67] NICOT, F., B. CAMBOU und G. MAZZOLÉNI: *Design of Rockfall Restraining Nets from a Discrete Element Modelling*. Rock Mechanics and Rock Engineering, 34(Issue 2):99–118, 2001.
- [68] NICOT, F., B. CAMBOU und G. MAZZOLÉNI: *From a Constitutive Modelling of Metallic Rings to the Design of Rockfall Restraining Nets*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 25(Issue 1):49–70, 2001.
- [69] NICOT, F., M. GAY, B. BOUTILLIER und F. DARVE: *Modelling of Interaction between a Snow Mantel and a Flexible Structure using a Discrete Element Method*. In: PANDE, G. N. und S. PIETRUSZCAK (Hrsg.): *Proc. Num. Models in Geomechanics NUMOG VIII*, S. 699–703. Swets & Zeitlinger, 2002.
- [70] NICOT, F., M. GAY und J. TACNET: *Interaction between a Snow Mantel and a Flexible Structure: A new Method to Design Avalanche Nets*. Cold Regions Science and Technology, 34(2):67–84, 2002.
- [71] NICOT, F., P. NOUVEL, B. CAMBOU, L. ROCHET und G. MAZZOLÉNI: *Etude du comportement mecanique des ouvrages souples de protection contre les eboulements rocheux*. Revue française de génie civil, 3(5):295–319, 1999.
- [72] NIKRAVESH, P. E. und I. S. CHUNG: *Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three-Dimensional Constrained Mechanical Systems*. Journal of Mechanical Design, 104:785–791, 1982.
- [73] NIKRAVESH, P. E., R. A. WEHAGE und O. K. KWON: *Euler Parameters in Computational Kinematics and Dynamics. Part 1 & 2*. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 107:358–369, 1985.
- [74] PAPADRAKAKIS, M.: *A Method for the Automated Evaluation of the Dynamic Relaxation Parameters*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 25:35–48, 1981.
- [75] PARONUZZI, P.: *Probabilistic Approach for Design Optimization of Rockfall Protection Barriers*. Quaterly Journal of Engineering Geology, 22:175–183, 1989.
- [76] PARS, L. A.: *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heinemann, London, 1965.
- [77] PEILA, D., S. PELIZZA und F. SASSUDELLI: *Evaluation of Behaviour of Rockfall Restraining Nets by Full Scale Tests*. Rock Mechanics and Rock Engineering, 31(1):1–24, 1998.
- [78] PFEIFER SEIL- UND HEBETECHNIK GMBH, Memmingen: *Seilbau - Produktdokumentation*.
- [79] PFEIFFER, T. J. und T. D. BOWEN: *Computer Simulation of Rockfalls*. Bulletin of the Association of Engineering Geologists, 26(1):135–146, 1989.
- [80] PFISTER, J. und P. EBERHARD: *Frictional Contact of flexible and Rigid Bodies*. Granular Matter, 4:25–36, 2002.

- 
- [81] SCHLEYER, F.-K.: *Berechnung von Seilen, Seilnetzen und Seilwerken*, Bd. 2 d. Reihe *Zugbeanspruchte Konstruktionen*. Ullstein, Berlin, 1966.
- [82] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [83] SCHWEIZERHOF, K. und J. O. HALLQUIST: *Solving Nonlinear quasistatic and transient Problems in science and industry with explicit Finite Element Programs*. In: SCHUELLER, G. UND (Hrsg.): *Proc. Eurodyn 2002, Structural Dynamics*, Lisse, 2002. Swets & Zeitlinger.
- [84] SHABANA, A. A.: *Dynamics of Multibody Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [85] SHABANA, A. A.: *Computational Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [86] SIMO, J. C. und L. VU-QUOC: *On the Dynamics in space of rods undergoing large motions - A geometrically exact approach*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:125–161, 1988.
- [87] SIMO, J. C. und K. K. WONG: *Unconditionally Stable Algorithms for Rigid Body Dynamics that exactly preserve energy and momentum*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:19–52, 1991.
- [88] SPANG, R. und R. BOLLIGER: *Vom Holzsaun zum Hochenergienetz - die Entwicklung des Steinschlagschutzes von den Anfängen bis zur Gegenwart*. Gebrugg Schutzsysteme, Romanshorn, 2001.
- [89] SPRING, K. W.: *Euler Parameters and the Use of Quaternion Algebra in the Manipulation of finite Rotations: A Review*. *Mechanism and Machine Theory*, 21:365–373, 1986.
- [90] SPURRIER, R.: *Comment on 'Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction Cosine Matrix'*. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 15(4):255, 1978.
- [91] STÜSSI, F.: *Statik der Seile*. *Publications IABSE*, 6:289–306, 1940.
- [92] STUDER, C.: *Simulation eines Bremsrings im Steinschlagschutzsystem*. Diplomarbeit, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2001. Diplomarbeit am Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich.
- [93] TRINIDADE, M. A.: *Uma Introdução á Dinâmica de Siestemas de Multicorpos*. Diplomarbeit, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1996. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [94] VELINSKY, S. A.: *General Nonlinear Theory for Complex Wire Rope*. *International journal of mechanical sciences*, 27(7/8):497–507, 1985.
- [95] VOLKWEIN, A.: *Kopplung starrer und flexibler Strukturbereiche in der Methode der Finiten-Elemente*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 1999. Vertieferarbeit am Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe (TH).

- [96] WITTENBURG, J.: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*, Bd. 33 d. Reihe *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1977.
- [97] WRIGGERS, P.: *Zur Berechnung von Stoss- und KontaktProblemen mit Hilfe der Finite-Element-Methode*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 1981.
- [98] XING, H.-L. und A. MAKINOCHI: *A node-to-point Contact Element strategy and its applications*. RIKEN Review, 30:35–39, 2000.
- [99] ZHOU, B., M. L. ACCORSI und J. W. LEONARD: *Finite Element Formulation for Modeling Sliding Cable Elements*. Computers and Structures, 82:271–280, 2004.
- [100] ZWEIFEL, O.: *Seilbahnberechnung bei beidseitig verankerten Tragseilen*. Schweizerische Bauzeitung, 1:1–4, 1960.

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Anstellung am Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK) im Rahmen eines gemeinsamen Forschungsprojekts zusammen mit dem Eidg. Institut für Schnee und Lawinenforschung Davos (SLF) und der Firma Fatzer AG Geobrugg Schutzsysteme. Das Projekt wurde dankenswerter Weise von der Kommission für Technologie und Innovation (KTI) des Bundesamts für Berufsbildung und Technologie (BBT) finanziell unterstützt. Viel lieber danke ich jedoch allen Personen, deren Unterstützung mir in den letzten Jahren viel geholfen hat.

Dieser Dank gilt besonders meinem Doktorvater, Chef und Betreuer Prof. Dr. Edoardo Anderheggen für die so unkomplizierte Zusammenarbeit, das hervorragende Betriebsklima und die ideale fachliche Führung und Unterstützung in den letzten Jahren.

Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner danke ich ebenfalls für die bereitwillige Übernahme des Korreferats und seine konstruktiven Verbesserungsvorschläge.

Besonders fruchtbar war die Zusammenarbeit mit den Projektpartnern und die dadurch bedingte Praxisnähe dieser Arbeit. Am SLF richtet sich darum der Dank an Hans Grassl für sein unermüdliches Engagement im Rahmen des Projekts und Perry Bartelt für die gelungene Koordination. Erfreulich unkompliziert und offen war auch die Zusammenarbeit mit Geobrugg, weswegen ich den Herren Stephan Wartmann, Marcel Sennhauser, Andrea Roth und Bruno Haller danke.

Dankbar bin ich auch den Studenten Christian Studer, Markus Gottschang, Sebastian Schaedler und Alexander Butz. Ihr Einsatz hat viel zum Gelingen des Gesamtprojekts und dieser Arbeit beigetragen.

Viel mitgenommen habe ich von meinen Arbeitskollegen und danke darum meiner Gruppe Can, Claudia, Günter, Juan, Martin, Pietro, Toni und natürlich dem Chef Prof. Anderheggen. Ebenfalls danke ich den übrigen IBK-Kollegen für die unzähligen Cappuccini, Ausflüge, fachlichen Diskussionen und den Fussball.

Und nicht zuletzt sei auch allen Freunden besonders herzlichst gedankt, die stets für die nötige Abwechslung zur Arbeit und eine dadurch bedingte Ausgeglichenheit meinerseits sorgten und sorgen.

Der letzte Dank geht an meine Eltern, deren früherer Einsatz und Unterstützung mich nun zu einer Dissertation führten, und natürlich an Vanessa für ihren steten Rückhalt, die Grundlage meiner Motivation und meines Engagements.

Zürich, im Juli 2004

Axel Volkwein

---

