Geometrie

Skript für die Vorlesung: 91-157, G, Geometrie, 86-3, Ausgabe 2002

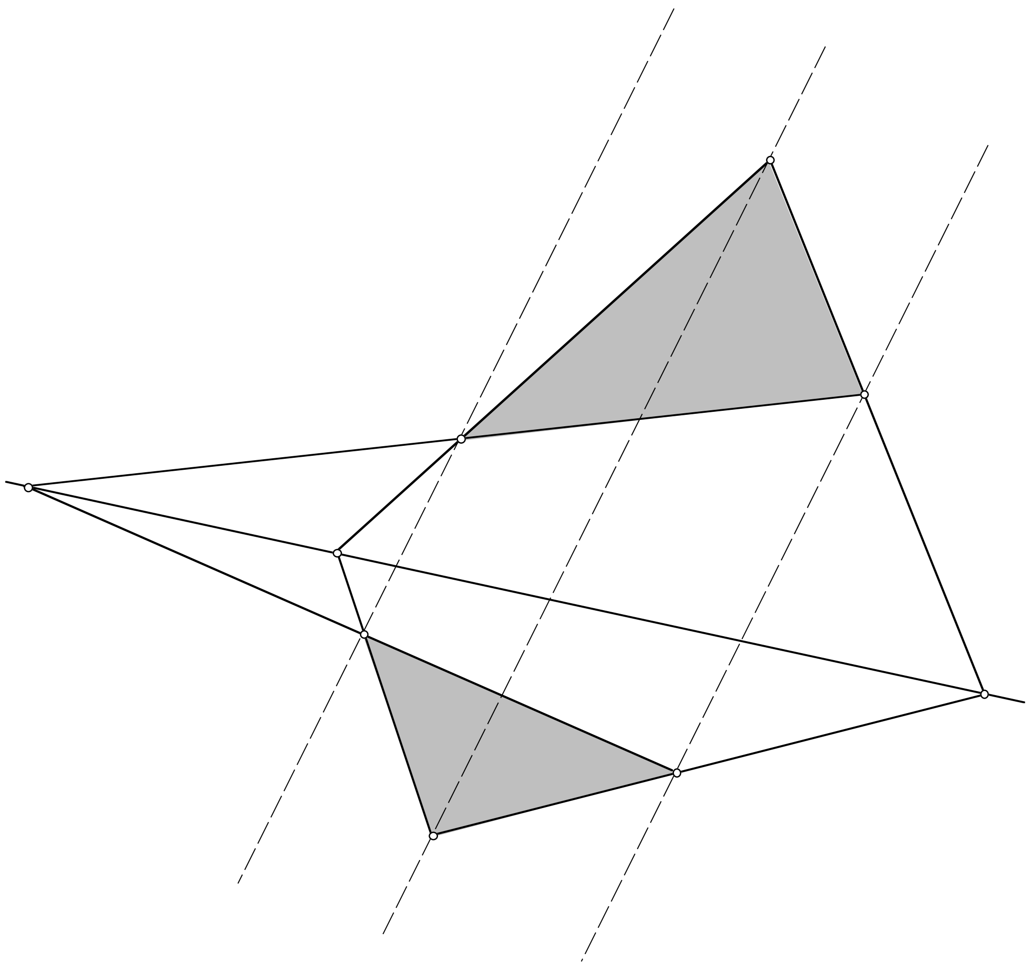
Author(s):
Walser, Hans

Publication date:
2002

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-004377954

Hans Walser

Affine Abbildungen



ETH-Z

Inhalt

Der vorliegende Skript-Modul dient als Arbeitsunterlage der Vorlesung *Geometrie*.

Es werden vor allem Dispositionen und Zusammenfassungen gegeben.

1995 Erstausgabe

1996 Ergänzungen

1999 Überarbeitung

2000 Neue Moduleinteilung. Ergänzungen

Hans Walser

hwalser@bluewin.ch

1 Analytischer Zugang

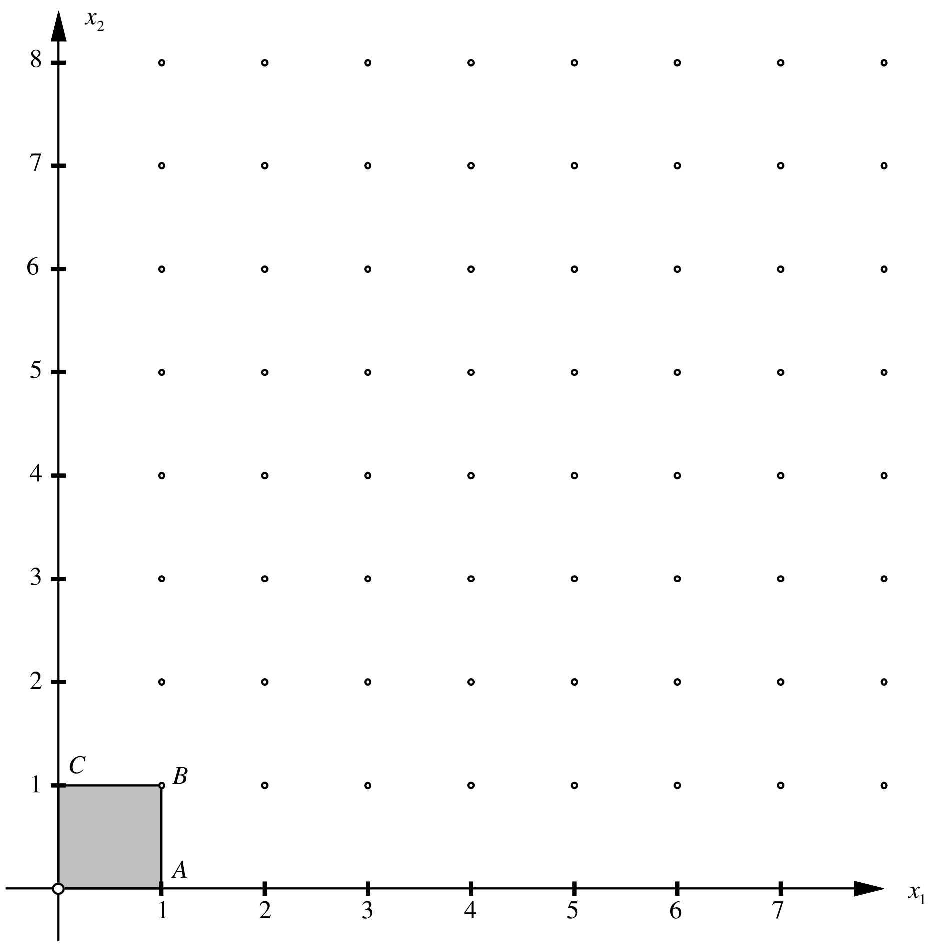
1.1 Abbildungsgleichungen

Unter einer *affinen Abbildung* der Ebene auf die Ebene verstehen wir eine Abbildung mit den linearen Abbildungsgleichungen:

$$\bar{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1$$
$$\bar{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2$$

In vektorieller Schreibweise mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ sowie der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ kann dies in der Form $\vec{\bar{x}} = A\vec{x} + \vec{f}$ geschrieben werden.

Beispiel: $\bar{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 2$
$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + 4$



Beispiel einer affinen Abbildung

1.1.1 Verwendung eines Maple-Programmes

Das Programm ist eigentlich für dreidimensionale Darstellungen konzipiert; die dritte Dimension wird hier einfach Null gesetzt.

```
> plot3d({[   x1,
              x2,
              0],
         [    2*x1+x2+2,
              1/2*x1-x2+4,
              0]},
x1 = 0..2, x2 = 0..2, grid = [3,3], scaling = constrained,
orientation = [-90,0], color = black);
```

Das Programm liefert folgendes Bild:

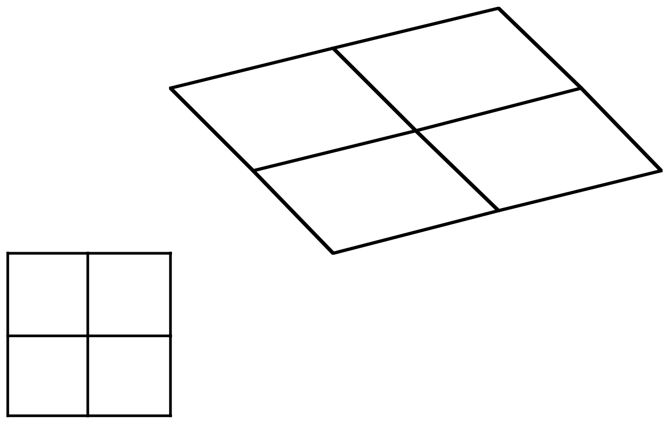
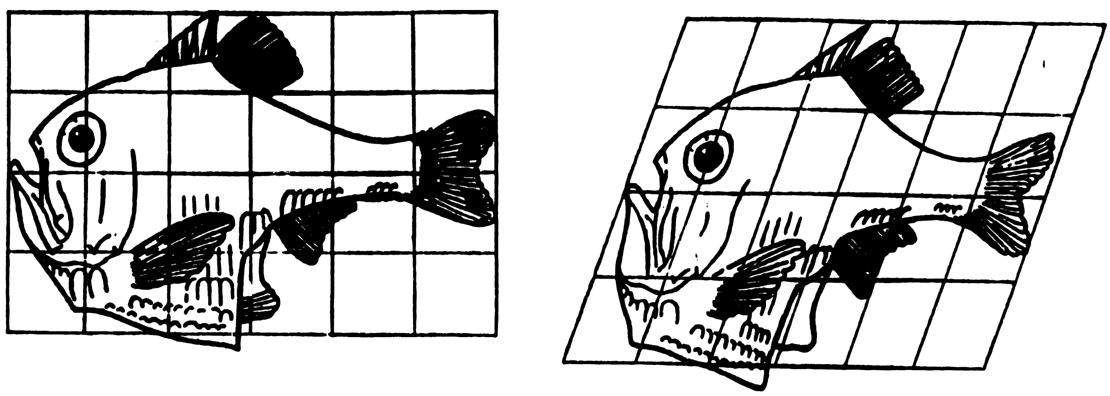


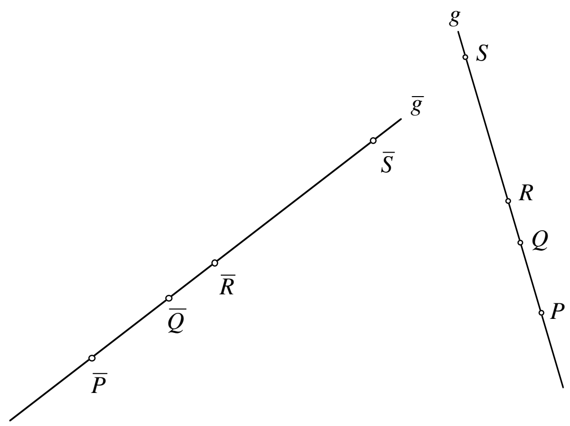
Bild generiert durch Maple -Programm



Affines Bild eines Fisches

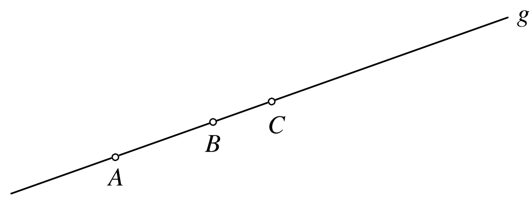
1.2 Teilverhältnis

Die Teilverhältnisse auf den Geraden g und $\overline{g}$ sind gleich:



Gleiche Teilverhältnisse

Zur Definition eines Teilverhältnisses benötigen wir drei Punkte auf einer Geraden:

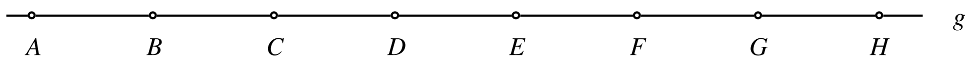


Teilverhältnis dreier Punkte auf einer Geraden

Schreibweise: (ABC) = *Teilverhältnis* der drei Punkte A, B, C auf der Geraden g

Definition: $\overrightarrow{AC} = (ABC)\overrightarrow{BC}$, oder, wenn mit (AC) die *orientierte* Länge von A nach C gemeint ist: $(ABC) = \dfrac{(AC)}{(BC)}$

Beispiel: Es sei auf der Geraden g eine äquidistante Punktreihe $A, B, C, \ldots, H$ gegeben:



Beispiel zu Teilverhältnissen

Dann ist:

$(ABC) = \dfrac{(AC)}{(BC)} = \dfrac{2}{1} = 2$ $\qquad$ $(AGH) =$

$(ABD) =$ $\qquad$ $(AEG) =$

$(ACB) =$ $\qquad$ $(AFD) =$

1.3 Zusammenfassung: Affine Abbildungen

A: "Positive" Eigenschaften:

* Der Quadratraster wird auf einen Parallelogrammraster abgebildet.
* Die affine Abbildung ist geradentreu: Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
* Die affine Abbildung ist parallelentreu: Parallele Geraden haben parallele Bildgeraden.
* Die affine Abbildung ist teilverhältnistreu: Dem Teilverhältnis auf einer Geraden entspricht das Teilverhältnis auf der Bildgeraden.

B: "Negative" Eigenschaften:

– Die affine Abbildung ist nicht verhältnistreu.

– Die affine Abbildung ist nicht längentreu.

– Die affine Abbildung ist nicht winkeltreu.

– Die affine Abbildung ist nicht flächentreu.

– Die affine Abbildung ist nicht kreistreu.

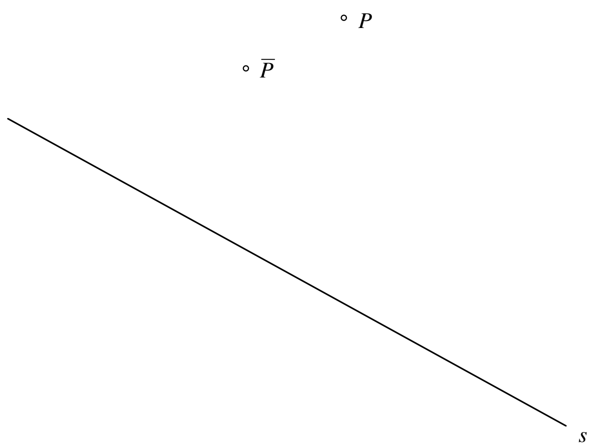
2 Perspektive Affinitäten

2.1 Definition der perspektiven Abbildungen

Wir studieren nun Abbildungen der Ebene auf die Ebene mit folgenden Eigenschaften ("*Spielregeln*"):

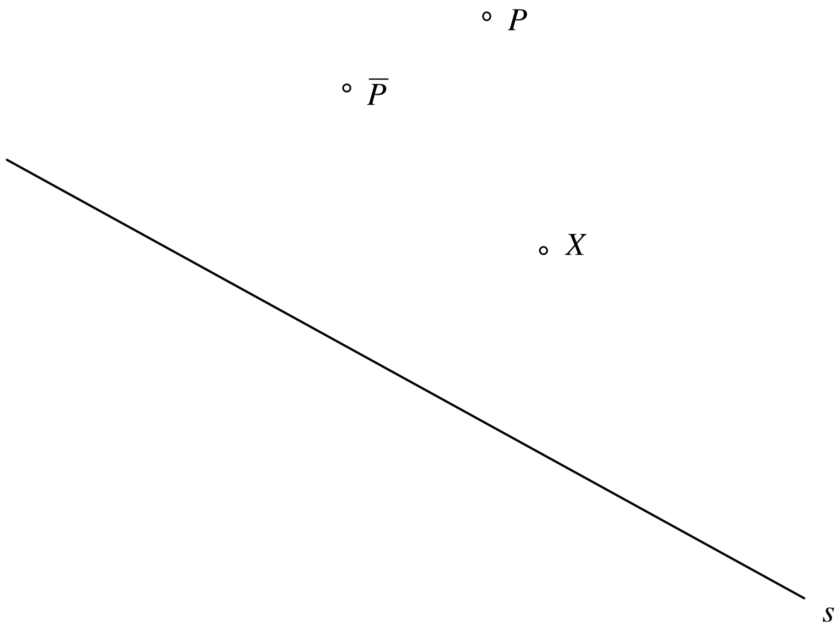
- *Geradentreu*
- *Parallelentreu*, $g \| h \Rightarrow \overline{g} \| \overline{h}$
- Es gibt eine *Fixpunktgerade s*.

Der Punkt P werde auf den Punkt $\overline{P}$ abgebildet. Schreibweise: $\overline{P} = \alpha(P)$ oder $P \overset{\alpha}{\mapsto} \overline{P}$.



Perspektive Affinität

Es sei nun ein weiterer Punkt X gegeben. Wie finden wir seinen Bildpunkt $\overline{X} = \alpha(X)$?

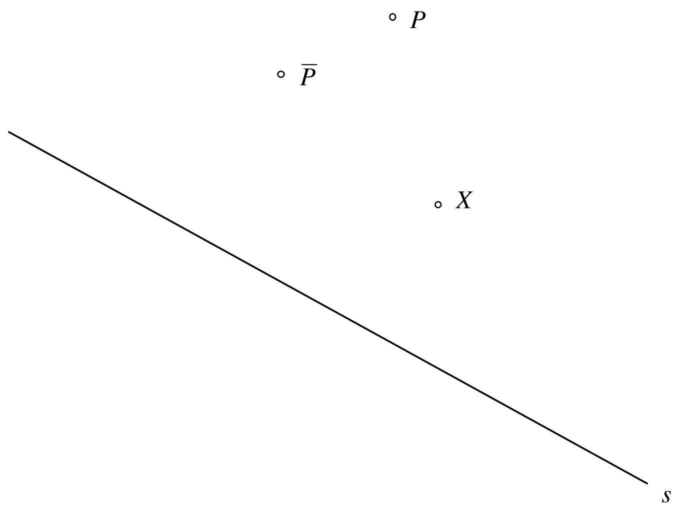


Wo ist der Bildpunkt $\overline{X} = \alpha(X)$?

Bemerkung: Auf Grund der Strahlensätze gilt:

$$\left.\begin{array}{l} f \parallel g \Rightarrow (XPF_1) = (F_3F_2F_1) \\ \bar{f} \parallel \bar{g} \Rightarrow (\overline{X}\,\overline{P}F_1) = (F_3F_2F_1) \end{array}\right\} \Rightarrow (XPF_1) = (\overline{X}\,\overline{P}F_1) \Rightarrow X\overline{X} \parallel P\overline{P}$$

Damit ergibt sich ein einfacheres Konstruktionsverfahren mit Hilfe der sogenannten *Affinitätsrichtung*:



Konstruktion mit Hilfe der Affinitätsrichtung

Definition: Eine geraden- und parallelentreue Abbildung α der Ebene auf sich mit einer Fixpunktgeraden s heißt eine *perspektive Affinität*.

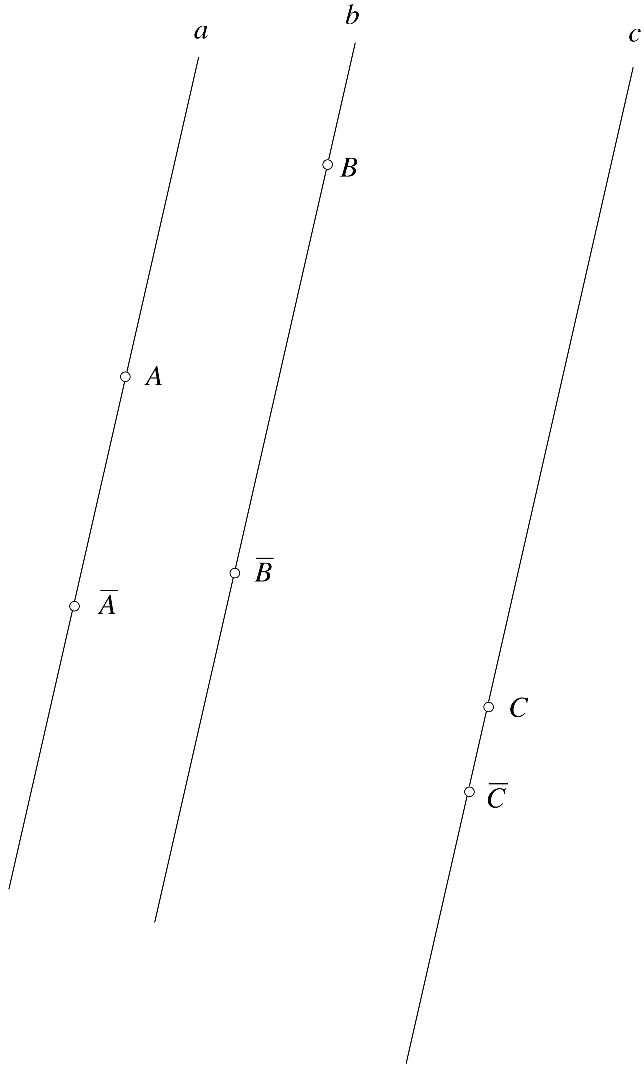
Die Fixpunktgerade *s* heißt *Perspektivachse* oder *Affinitätsachse*.

Satz: Eine perspektive Affinität α ist durch die Achse *s* und eine Punktepaar *P*, $\overline{P} = \alpha(P)$ vollständig bestimmt.

Die Richtung der Geraden $P\overline{P}$ heißt *Affinitätsrichtung*.

2.2 Die Figur von Desargues

Es sei $a \| b \| c$.

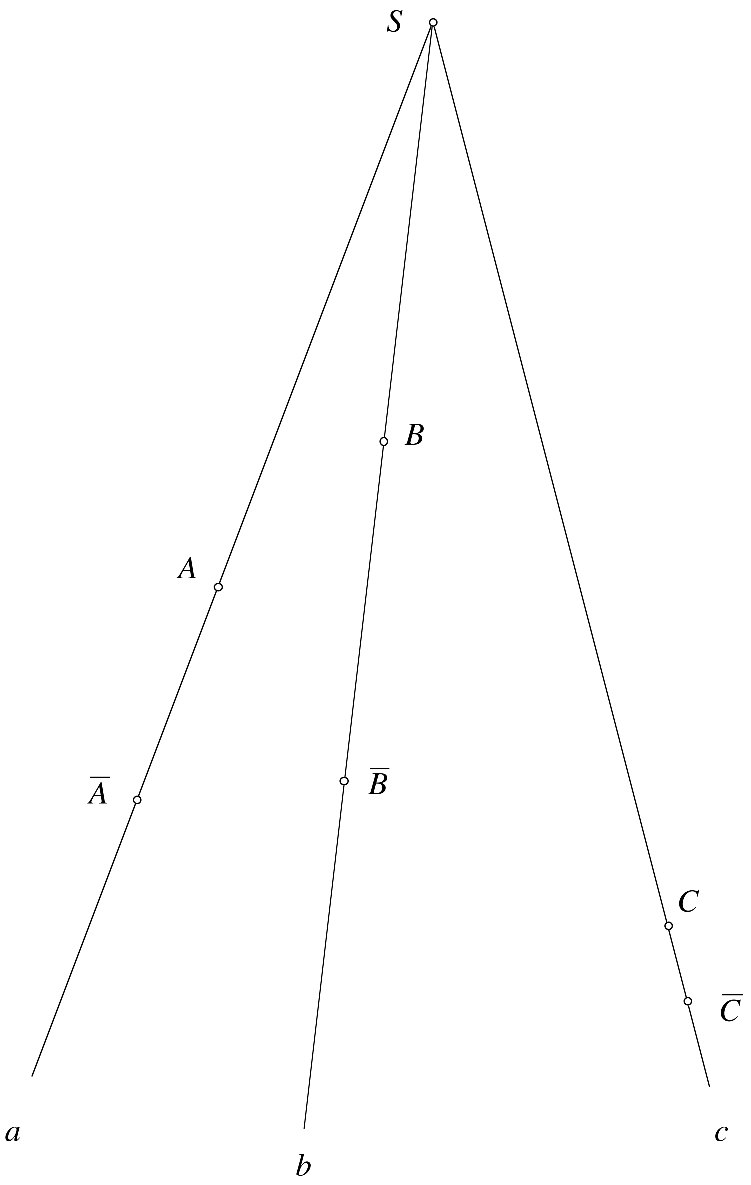


Die Figur von Desargues

Wir stellen fest, dass der Punkt *H* ebenfalls auf der Geraden *s* = *FG* liegt.

Beweis: *s, A* und $\overline{A}$ definieren eine perspektive Affinität α. Dabei ist $B \overset{\alpha}{\mapsto} \overline{B}$, $C \overset{\alpha}{\mapsto} \overline{C}$ und $h \overset{\alpha}{\mapsto} \overline{h}$. Der Schnittpunkt von *h* mit *s* ist ein Fixpunkt, daher muss auch $\overline{h}$ durch diesen Punkt gehen.

Bemerkung: Diese Figur von Desargues ist ein Spezialfall einer allgemeineren Figur, bei welcher die drei Geraden *a, b* und *c* durch einen gemeinsamen Punkt *S* verlaufen:



Allgemeine Figur von Desargues

2.2.1 Girard DESARGUES

Girard Desargues, 1591 – 1661

Born: 21 Feb 1591 in Lyon, France. Died: Sept 1661 in Lyon, France

Little is known about Girard DESARGUES' personal life. His family (on both his mother's and his father's side) had been very rich for several generations and had supplied lawyers and judges to the Parliament in Paris as well as to that in Lyon (then the second most important city in France).

DESARGUES seems to have made several extended visits to Paris in connection with a lawsuit for the recovery of a huge debt. Despite this loss, the family still owned several large houses in Lyon, a manor house (and its estate) at the nearby village of Vourles, and a small chateau surrounded by the best vineyards in the vicinity. It is thus clear that DESARGUES had every opportunity of acquiring a good education, could afford to buy what books he chose, and had leisure to indulge in whatever pursuits he might enjoy. In his later years, these seem to have included designing an elaborate spiral staircase, and an ingenious new form of pump, but the most important of DESARGUES' interests was Geometry. He invented a new, non-Greek way of doing geometry, now called 'projective' or 'modern' geometry. As a mathematician he was very good indeed: highly original and completely rigorous. He is, however, far from lucid in his mathematical style.

When in Paris, DESARGUES became part of the mathematical circle surrounding Marin MERSENNE (1588 - 1648). This circle included René Descartes (1597 -1650), Etienne PASCAL (1588 -1651) and his son Blaise PASCAL (1623 - 1662). It was probably essentially for this limited readership of friends that DESARGUES prepared his mathematical works, and had them printed. Some of them were later expanded into more publishable form by Abraham BOSSE (1602 -1676), who is now best remembered as an engraver, but was also a teacher of perspective.

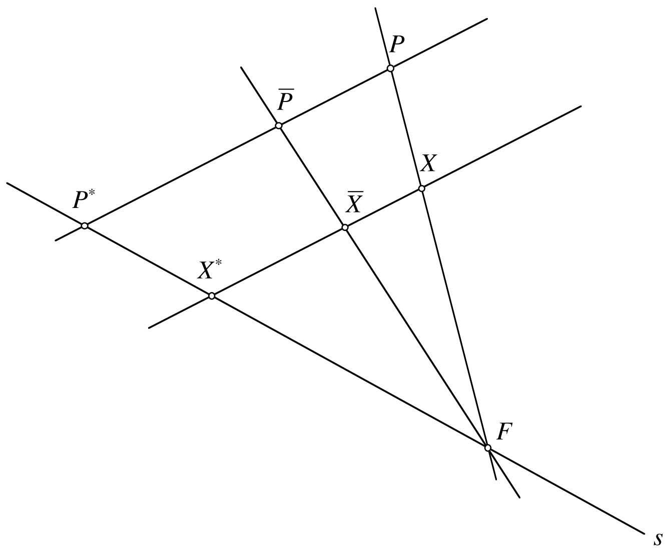
DESARGUES wrote on 'practical' subjects such as perspective (1636), the cutting of stones for use in building (1640) and sundials (1640). His writings are, however, dense in content and theoretical in their approach to the subjects concerned. There is none of the wordy and elementary step-by-step explanation which one finds in texts that are truly addressed to artisans.

DESARGUES' most important work, the one in which he invented his new form of geometry, has the title *Rough draft for an essay on the results of taking plane sections of a cone* (Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan). A small number of copies was printed in Paris in 1639. Only one is now known to survive, and until this was rediscovered, in 1951, DESARGUES' work was known only through a manuscript copy made by Philippe DE LA HIRE (1640 - 1718). The book is short, but very dense. It begins with pencils of lines and ranges of points on a line, considers involutions of six points (DESARGUES does not use or define a cross ratio), gives a rigorous treatment of cases involving 'infinite' distances, and then moves on to conics, showing that they can be discussed in terms of properties that are invariant under projection. We are given a unified theory of conics.

http://www-history.mcs.st-andrew.ac.uk/history/Mathematicians

2.3 Die Charakteristik κ

Die Charakteristik κ einer perspektiven Affinität ist folgendermaßen definiert:

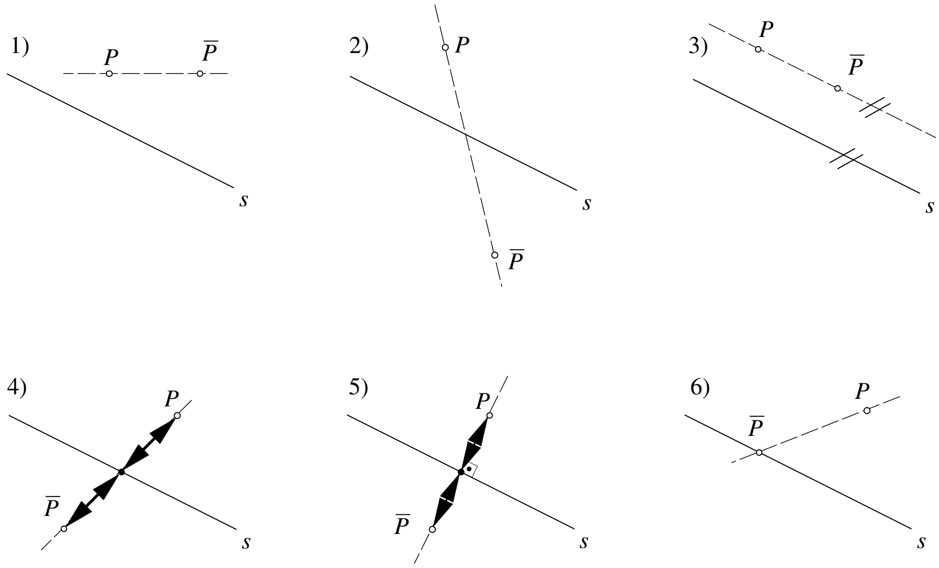


Zur Charakteristik κ einer perspektiven Affinität

Definition: *Charakteristik* κ einer perspektiven Affinität: $\kappa := \left(\overline{P}PP^*\right)$

Im Beispiel der Figur ist $\kappa \approx 0.63$.

2.3.1 Beispiele zur Charakteristik



Beispiele zur Charakteristik

Bemerkungen zu den Beispielen:

1) $\kappa > 1$

2) $\kappa < 0$

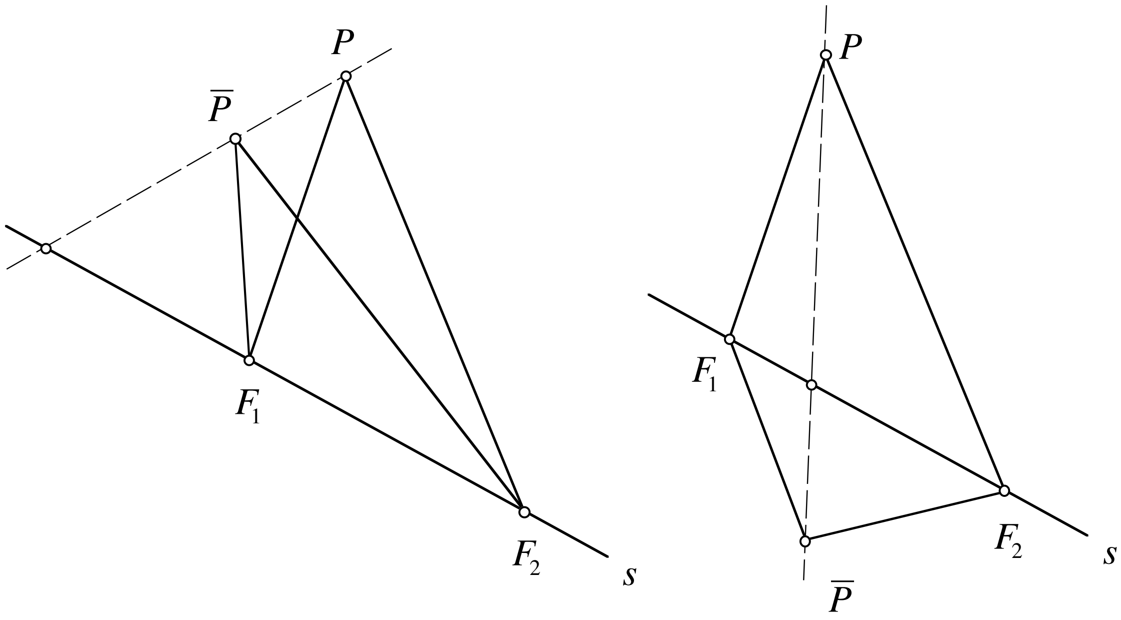
3) Scherung, $\kappa = +1$

4) Schrägspiegelung, $\kappa = -1$

5) Geradenspiegelung, $\kappa = -1$

6) Diese Abbildung ist nicht bijektiv. Schräge Parallelprojektion. $\kappa = 0$.

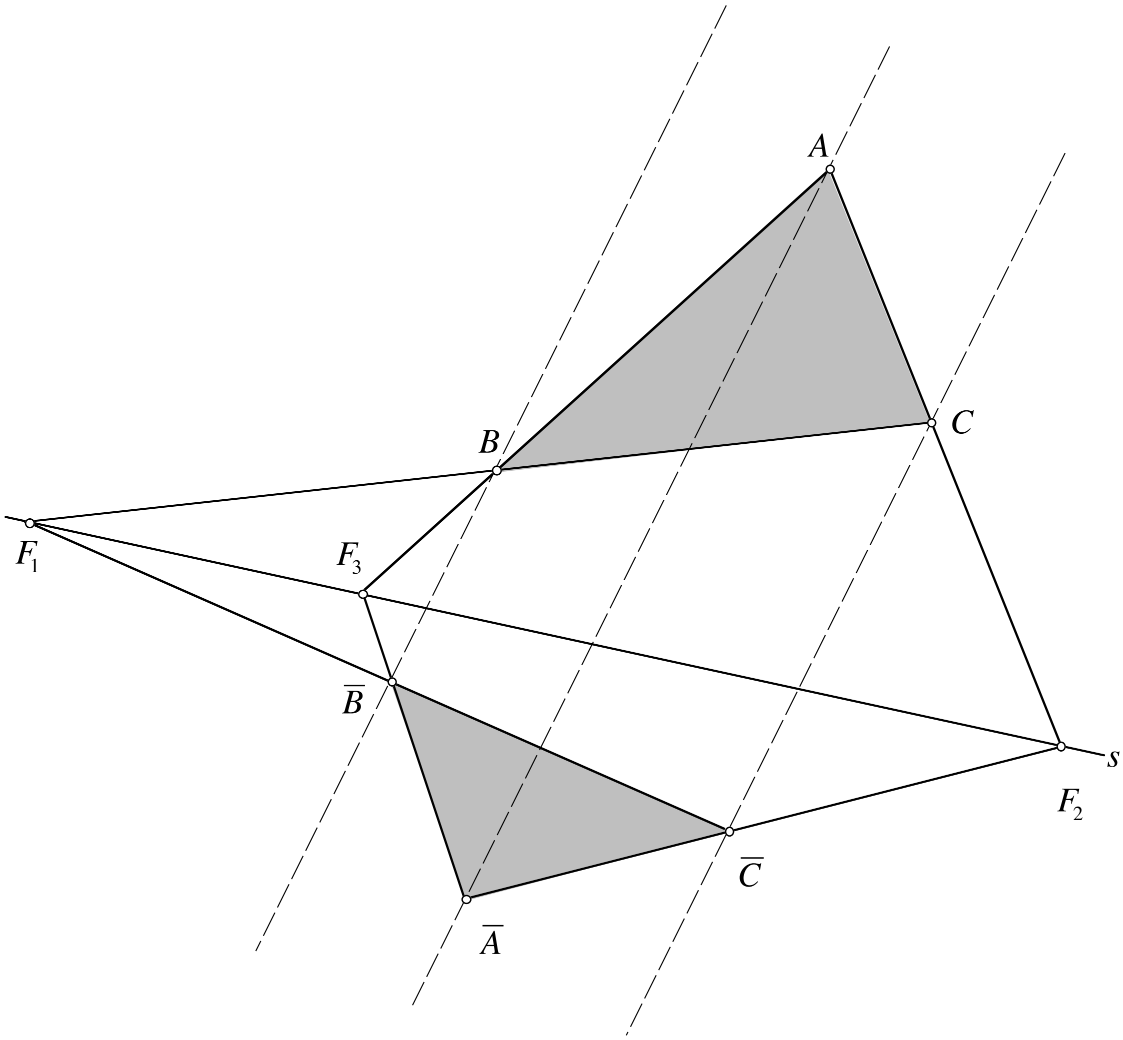
2.3.2 Bedeutung der Charakteristik



Bedeutung der Charakteristik

In der Figur ist $\dfrac{\overline{h}}{h} = |\kappa|$. Da die beiden Dreiecke F_1F_2P und $F_1F_2\overline{P}$ dieselbe Grundlinie F_1F_2 haben, gibt $|\kappa|$ das Flächenverhältnis dieser beiden Dreiecke an. Das Vorzeichen von κ gibt Auskunft über die Orientierung der beiden Dreiecke.

In einem beliebigen Dreieck ABC kann folgende Überlegung angestellt werden:



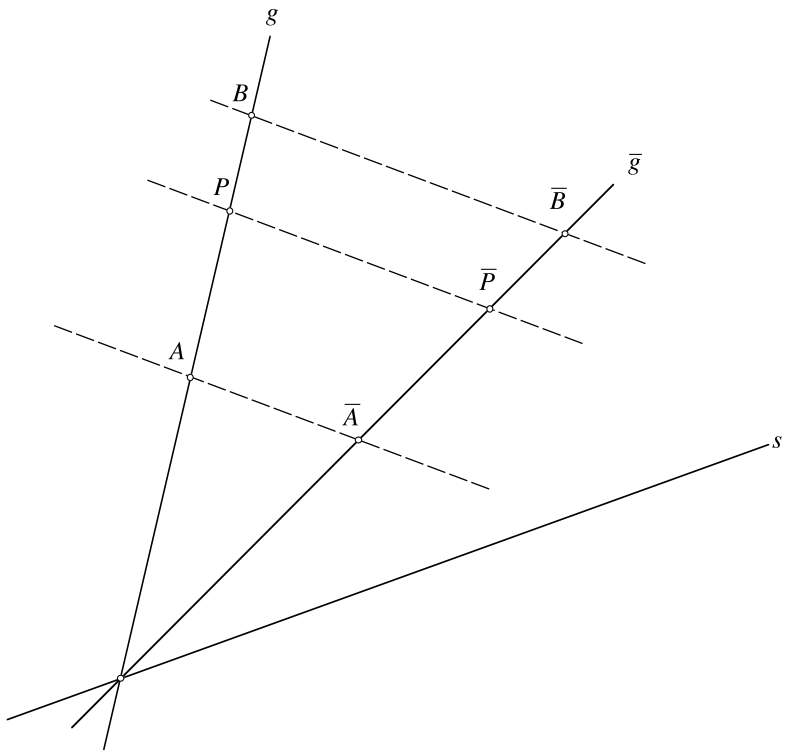
Charakteristik als Flächenmaßstab

Satz:

- $|\kappa|$ = Flächenveränderungsfaktor (Flächenmaßstab)
- $\kappa > 0 \Leftrightarrow$ orientierungserhaltende, gleichsinnige perspektive Affinität
- $\kappa < 0 \Leftrightarrow$ orientierungsumkehrende, ungleichsinnige perspektive Affinität

2.4 Teilverhältnisse

Die Teilverhältnisse bleiben bei einer perspektiven Affinität erhalten:



Eine perspektive Affinität ist teilverhältnistreu

Satz: Eine perspektive Affinität ist teilverhältnistreu.

2.5 Zusammenfassung: Perspektive Affinität

Eigenschaften:

- geradentreu
- parallelentreu
- Es gibt eine Fixpunktgerade
- teilverhältnistreu

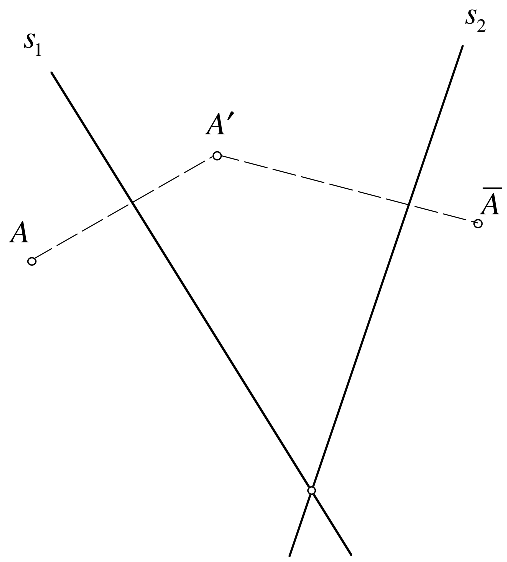
Begriffe:

- Affinitätsachse = Fixpunktgerade
- Affinitätsrichtung (durch Punkt und Bildpunkt)
- Charakteristik κ
- Flächenmaßstab
- Orientierung
- Figur von Desargues

3 Zusammensetzung von perspektiven Affinitäten

3.1 Zusammensetzung von zwei perspektiven Affinitäten

Wir studieren zunächst die Zusammensetzung von zwei perspektiven Affinitäten:



Zusammensetzung von zwei perspektiven Affinitäten

Schreibweisen:

$$A' = \alpha_1(A), \quad \overline{A} = \alpha_2(A') \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \alpha_2 \circ \alpha_1(A)$$

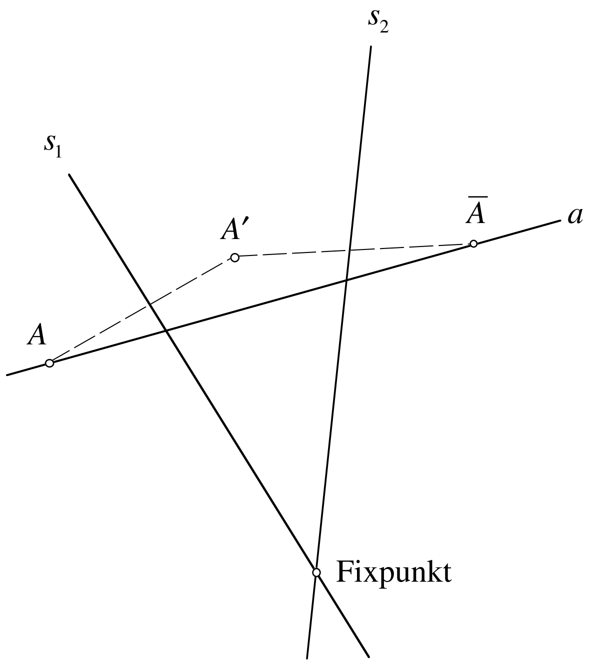
$$A \overset{\alpha_1}{\mapsto} A', \quad A' \overset{\alpha_2}{\mapsto} \overline{A} \quad \Rightarrow \quad A \overset{\alpha_2 \circ \alpha_1}{\mapsto} \overline{A}$$

Bei dieser Zusammensetzung bleiben folgende Eigenschaften einer perspektiven Affinität erhalten:

- Geradentreue
- Parallelentreue
- Teilverhältnistreue

$\kappa = \kappa_1 \kappa_2$, Flächenveränderung, Orientierung

Es stellt sich die Frage, ob diese Zusammensetzung wieder eine perspektive Affinität sein kann. Dann müsste die Gerade $a = A\overline{A}$ eine Fixgerade sein.



Die Gerade *a* ist keine Fixgerade

Die Zusammensetzung von zwei perspektiven Affinitäten ist echt etwas Neues. $\alpha_2 \circ \alpha_1$ ist also keine perspektive Affinität. Wir werden für diese Abbildungen einen neuen Begriff einführen:

3.2 Allgemeine Affine Abbildung

Definition: Eine *affine Abbildung* α ist eine Zusammensetzung von n perspektiven Affinitäten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha = \alpha_n \circ \ldots \circ \alpha_1$$

Gemäß Definition hat eine affine Abbildung folgende Eigenschaften:

- Geradentreue
- Parallelentreue
- Teilverhältnistreue
- $\kappa = \kappa_1 \cdot \cdots \cdot \kappa_n$ (Flächenveränderung, Orientierung)

Nach Definition kann eine affine Abbildung aus beliebig vielen perspektiven Affinitäten zusammengesetzt sein. Wir werden aber gleich sehen, dass wir tatsächlich mit der Zusammensetzung von *zwei* perspektiven Affinitäten auskommen. Das sehen wir anhand des Beweises von folgendem

Satz: Durch drei Punktepaare $A \mapsto \overline{A}$, $B \mapsto \overline{B}$, $C \mapsto \overline{C}$ ist genau eine affine Abbildung α definiert.

Den Beweis führen wir in zwei Schritten

a) Es gibt eine passende affine Abbildung (Existenz).

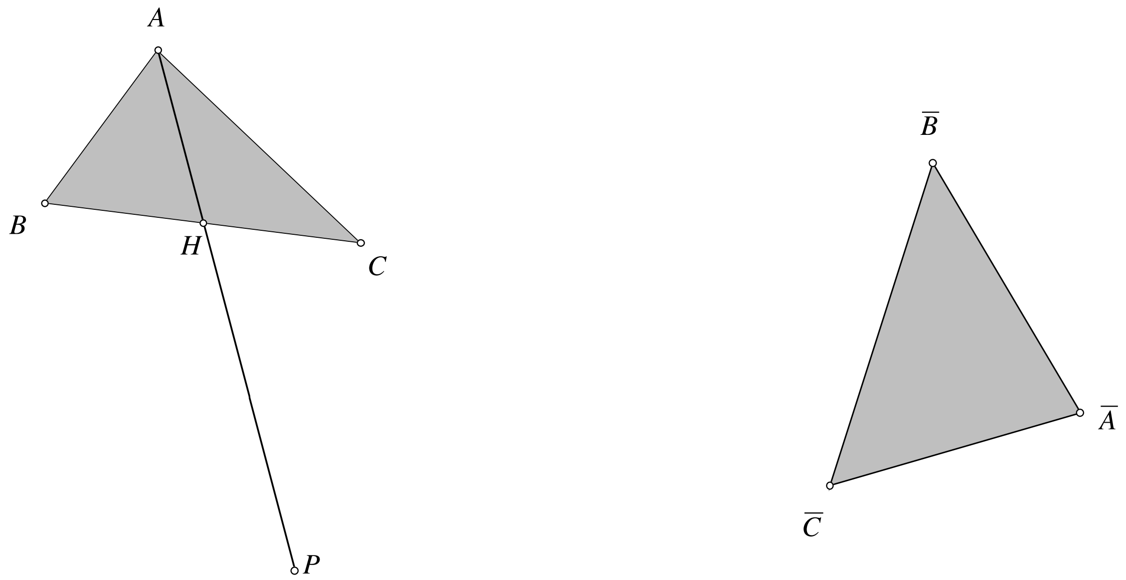
b) Es gibt nur eine passende affine Abbildung (Eindeutigkeit).

Zum Beweis der *Existenz* gehen wir von drei Punktepaaren $A \mapsto \overline{A}$, $B \mapsto \overline{B}$, $C \mapsto \overline{C}$ aus:

Existenz einer affinen Abbildung

Durch die Wahl von zwei "Einschneiderichtungen" entsteht ein Zwischendreieck $A'B'C'$. Nach der Figur von Desargues gibt es eine perspektive Affinität α_1 mit $A \overset{\alpha_1}{\mapsto} A'$, $B \overset{\alpha_1}{\mapsto} B'$, $C \overset{\alpha_1}{\mapsto} C'$, und eine perspektive Affinität α_2 mit $A' \overset{\alpha_2}{\mapsto} \overline{A}$, $B' \overset{\alpha_2}{\mapsto} \overline{B}$, $C' \overset{\alpha_2}{\mapsto} \overline{C}$. Die Zusammensetzung $\alpha_2 \circ \alpha_1$ ist dann eine affine Abbildung mit $A \overset{\alpha_2 \circ \alpha_1}{\mapsto} \overline{A}$, $B \overset{\alpha_2 \circ \alpha_1}{\mapsto} \overline{B}$, $C \overset{\alpha_2 \circ \alpha_1}{\mapsto} \overline{C}$.

Da die Wahl der beiden Einschneiderichtungen willkürlich war, müssen wir uns überlegen, ob die so konstruierte affine Abbildung *eindeutig* ist, das heißt, ob sie für einen beliebigen Punkt P immer denselben Bildpunkt $\overline{P}$ liefert. Für diesen Beweis der Eindeutigkeit benützen wir die Eigenschaften der Geradentreue und der Teilverhältnistreue der affinen Abbildungen:



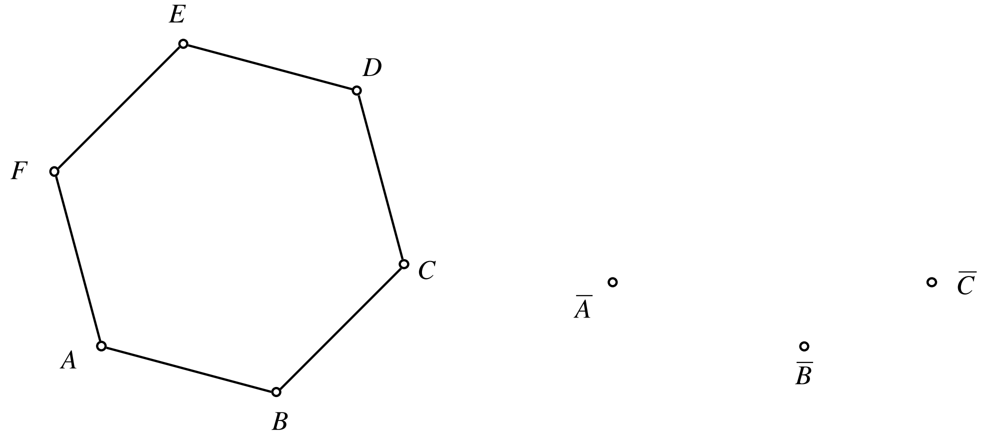
Eindeutigkeit einer affinen Abbildung

Aufgrund der Teilverhältnistreue ist der Hilfspunkt $\overline{H}$ eindeutig auf der Geraden $\overline{B}\overline{C}$ festgelegt; ebenso ist dann der Punkt $\overline{P}$ eindeutig auf der Geraden $\overline{A}\overline{H}$ festgelegt.

Damit ist unser Satz bewiesen.

3.2.1 Beispiel

Ein regelmäßiges Sechseck *ABCDEF* soll affin abgebildet werden, so dass $A \mapsto \overline{A}$, $B \mapsto \overline{B}$ und $C \mapsto \overline{C}$.



Affine Abbildung eines regelmäßigen Sechseckes

3.3 Zusammenfassung: Affine Abbildungen von der Ebene auf die Ebene

- Zu drei Punkten und ihren Bildern $A \mapsto \overline{A}$, $B \mapsto \overline{B}$, $C \mapsto \overline{C}$ gibt es genau eine Abbildung, die geradentreu, parallelentreu und teilverhältnistreu ist.
- Analytisch: Lineare Abbildungsgleichungen:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2$$

- Geometrisch: Zusammensetzung zweier perspektiver Affinitäten: $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$
- Charakteristik: $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$

  $|\kappa|$ = Flächenmaßstab

  $\kappa > 0 \Leftrightarrow$ orientierungserhaltende, gleichsinnige affine Abbildung

  $\kappa < 0 \Leftrightarrow$ orientierungsumkehrende, ungleichsinnige affine Abbildung