

Physikalische Klimatologie

Skript

Educational Material

Author(s):

Blatter, Heinz

Publication date:

2001

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004239658>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

**PHYSIKALISCHE KLIMATOLOGIE:
Eine Einführung in die Physik und die
mathematischen Methoden der Klimatologie
SKRIPT**

Heinz Blatter
Institut für Atmosphäre und Klima ETH, Zürich

21. Dezember 2001

Inhaltsverzeichnis

1	FLUIDDYNAMIK	1
1.1	EINFÜHRUNG	1
1.2	GRUNDLAGEN	1
1.2.1	Bilanzgleichungen	1
1.2.2	Sprungbedingungen	2
1.2.3	Erhaltungssätze	3
1.2.4	Geschwindigkeit und Deformation	4
1.3	MATERIALGLEICHUNGEN	7
1.3.1	Allgemeine Grundlagen	7
1.3.2	Konstitutivgleichungen	7
1.3.3	Materialsymmetrie	7
1.3.4	Kinematische Bedingungen	7
1.3.5	Newtonsche Flüssigkeiten	8
2	BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	10
2.1	GRUNDGLEICHUNGEN	10
2.1.1	Buckingham Theorem	10
2.1.2	Skalierung der Bewegungsgleichung	13
2.1.3	Skalieren der einzelnen Variablen	15
2.1.4	Abschätzung der Terme	16
2.2	REIBUNGSFREIE ATMOSPHERE	16
2.2.1	Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten	16
2.2.2	Statische Atmosphäre	17
2.3	SEICHTE ATMOSPHERE	19
2.3.1	Anisotrope Skalierung	19
2.3.2	Hierarchie von Approximationen	21
2.4	PHYSIKALISCHE KOORDINATEN	23
2.4.1	Isobare Koordinaten	23
2.4.2	σ -Druckkoordinaten	24
2.5	Anwendungen	26
2.5.1	Zyklostrophe Bilanz	26

A	TENSOREN	28
A.1	KARTESISCHE TENSOREN	28
A.1.1	Vektorrechnen	28
A.1.2	Dyadisches Produkt	29
A.1.3	Räumliche Ableitungen	30
A.2	TENSORANALYSIS	31
A.2.1	Koordinatentransformationen	31
A.2.2	Der Metriktensor	34
A.2.3	Kovariante Ableitung	35
A.2.4	Differentialoperatoren	39
B	KOORDINATEN-TRANSFORMATION	40
B.1	GELAENDEFOLGENDE KOORDINATEN	40
B.1.1	Transformationsgleichungen	40
B.1.2	Beispiel Wärmeleitungsgleichung	41
B.1.3	Metriktensor und Christoffel-Symbole	42
B.2	KUGELKOORDINATEN	43
B.2.1	Basis und Metrik	43
B.2.2	Differentialoperatoren	45
B.2.3	Bilanzgleichungen in Kugelkoordinaten	46
B.3	Divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder	48

1 FLUIDDYNAMIK

1.1 EINFÜHRUNG

Das Klimasystem kann in Subsysteme eingeteilt werden. Wie bei allen systemtheoretischen Betrachtungen ist eine derartige Einteilung bis zu einem gewissen Grad willkürlich. Für eine Kontinuumsmechanische Beschreibung des Klimasystems bietet sich eine Einteilung in Atmosphäre (Luft, Wolken, Niederschläge), Hydrosphäre (Ozeane, Seen, Flüsse, Eisschilde, Meereis) und Pedosphäre (Boden, Fels, Vegetation) an. Teilweise können diese Systeme fluiddynamisch beschrieben werden, und ihre gegenseitige Kopplung kann durch Randbedingungen oder eine Grenzschicht behandelt werden.

Die im Klimasystem relevanten Medien können als Fluide behandelt werden:

Atmosphäre: ideales Gas, Kondensation und Verdunstung von Wasser

Hydrosphäre: Wasser ist eine Newton'sche Flüssigkeit, Eis ein Nicht-Newtonsches Fluid

Randbedingungen: Kopplung an andere Subsysteme (Thermisch, mechanisch, Massenfluss, Phasenänderung)

1.2 GRUNDLAGEN

1.2.1 Bilanzgleichungen

Bezeichne mit $\Psi_{\mathcal{V}}$ die Menge einer additiven Grösse Ψ in einem gegebenen Volumen \mathcal{V} , mit $\vec{\Phi}_{\partial\mathcal{V}}$ den Fluss dieser Grösse durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ des Volumens, $\Pi_{\mathcal{V}}$ und $\Sigma_{\mathcal{V}}$ sind die Produktion, resp. Zufuhr von Ψ in \mathcal{V} . Die zeitliche Änderung von $\Psi_{\mathcal{V}}$ wird damit zu (Haupt, 1993; Hutter, 1983)

$$\frac{d}{dt}\Psi_{\mathcal{V}} = \vec{\Phi}_{\partial\mathcal{V}} + \Pi_{\mathcal{V}} + \Sigma_{\mathcal{V}}. \quad (1.1)$$

Sei ψ die Dichte von Ψ , $\vec{\phi}$ die Flussdichte von Ψ durch ein Flächenelement $d\vec{O} = \vec{n} dO$. Die linke Seite von Gleichung (1.1) kann umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \psi \, dV &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{d}{dt} (\psi \, dV) \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{d\psi}{dt} \, dV + \psi \left(\frac{d}{dt} dV \right) \right] \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\text{grad } \psi) \cdot \vec{v} + \psi (\text{div } \vec{v}) \right] dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \text{div } (\psi \vec{v}) \right] dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\psi}{\partial t} dV + \iint_{\partial\mathcal{V}} \psi \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die letzte Beziehung in Gleichung (1.2) heisst Transporttheorem von Reynolds, und Gleichung (1.1) wird damit zu

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} (\psi \vec{v}) \right] dV &= \iint_{\partial \mathcal{V}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} dO + \iiint_{\mathcal{V}} (\pi + \sigma) dV \\
&= \iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \vec{\phi} + \pi + \sigma) dV,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

oder in lokaler (differentieller) Form:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\operatorname{grad} \psi) \cdot \vec{v} + \psi (\operatorname{div} \vec{v}) = \operatorname{div} \vec{\phi} + \pi + \sigma \tag{1.4}$$

1.2.2 Sprungbedingungen

Die lokale Form (1.4) der Bilanzgleichung gilt nur für differenzierbare Felder ψ und $\vec{\phi}$. Häufig können diese Feldgrößen oder ihre Ableitungen entlang einer Fläche diskontinuierlich verlaufen (Oberflächen, Phasengrenzen). Sei \mathcal{S} eine derartige Fläche und \mathcal{V} ein Volumenelement, das durch \mathcal{S} zerschnitten wird. Das Transporttheorem (1.2) wird damit zu

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \psi dV &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}^+} \psi dV + \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}^-} \psi dV \\
&= \iiint_{\mathcal{V}^+} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \iint_{\partial \mathcal{V}} \psi^+ \vec{v} \cdot \vec{n} dO - \iint_{\mathcal{S}} \psi^+ \vec{v}_s \cdot \vec{n} dO \\
&+ \iiint_{\mathcal{V}^-} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \iint_{\partial \mathcal{V}} \psi^- \vec{v} \cdot \vec{n} dO + \iint_{\mathcal{S}} \psi^- \vec{v}_s \cdot \vec{n} dO \\
&= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \iint_{\partial \mathcal{V}} \psi \vec{v} \cdot \vec{n} dO - \iint_{\mathcal{S}} [\psi \vec{v}_s] \cdot \vec{n} dO
\end{aligned} \tag{1.5}$$

mit der Definition der Klammer:

$$[[\psi]] = \psi^+ - \psi^- \tag{1.6}$$

Die Bilanzgleichung für das zerschnittene Volumen wird zu

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \iint_{\partial \mathcal{V}} \psi \vec{v} \cdot \vec{n} dO - \iint_{\mathcal{S}} [[\psi \vec{v}_s]] \cdot \vec{n} dO \\
= \iint_{\partial \mathcal{V}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} dO + \iiint_{\mathcal{V}} (\pi + \sigma) dV
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Lassen wir das Volumen derart schrumpfen, dass sich seine Oberfläche an die Diskontinuitätsfläche anschmiegt. Die Oberflächenintegrale werden im Grenzfall zu

$$\iint_{\partial \mathcal{V}} \psi \vec{v} \cdot \vec{n} dO \rightarrow \iint_{\mathcal{S}} [[\psi \vec{v}]] \cdot \vec{n} dO \quad ; \quad \iint_{\partial \mathcal{V}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} dO \rightarrow \iint_{\mathcal{S}} [[\vec{\phi}]] \cdot \vec{n} dO \tag{1.8}$$

und die Volumenintegrale verschwinden. Damit kann die Sprungbedingung an der Diskontinuität in lokaler Form geschrieben werden:

$$-\llbracket \vec{\phi} \cdot \vec{n} \rrbracket + \llbracket \psi(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} \rrbracket = 0 \quad (1.9)$$

1.2.3 Erhaltungssätze

Die Dichte, Flussdichte, Produktions- und Zufuhrdichte von Masse, Impuls und Energie sind in der Tabelle (1.1) zusammengefasst.

Tabelle 1.1: *Physikalische Grössen in den Bilanzgleichungen*

physikalische Grösse	ψ	$\vec{\phi}$	π	σ
Masse	ρ	$\mathbf{0}$	0	0
Impuls	$\rho\vec{v}$	\mathbf{T}	0	$\rho\vec{f}$
Energie	$\rho(0.5 \vec{v} \cdot \vec{v} + \epsilon)$	$\mathbf{T} \cdot \vec{v} - \vec{q}$	0	$\rho(r + \vec{f} \cdot \vec{v})$

Damit erhalten wir die allgemeine Form der entsprechenden Bilanzgleichungen, für die Masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\text{grad } \rho) \cdot \vec{v} + \rho(\text{div } \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (1.10)$$

die Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + [\text{grad}(\rho\vec{v})] \cdot \vec{v} + \rho\vec{v} \cdot \text{div } \vec{v} = \\ & \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} \right] + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\text{grad } \rho)\vec{v} + \rho\vec{v} \cdot \text{div } \vec{v} = \text{div } \mathbf{T} + \rho\vec{f} \end{aligned} \quad (1.11)$$

mit Berücksichtigung der Massenbilanz (1.10)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} \right] = \text{div } \mathbf{T} + \rho\vec{f} \quad (1.12)$$

und analog für die Energie:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(\epsilon + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \text{grad} \left(\epsilon + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) \cdot \vec{v} \\ &= \text{div}(\mathbf{T} \cdot \vec{v} - \vec{q}) + \rho(\vec{f} \cdot \vec{v} + r) \end{aligned} \quad (1.13)$$

und die entsprechenden Sprungbedingungen:

$$\llbracket \rho(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} \rrbracket = 0 \quad (1.14)$$

$$\llbracket \rho \vec{v}(\vec{v} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} - \mathbf{T} \vec{n} \rrbracket = 0 \quad (1.15)$$

$$\llbracket \rho \left(\epsilon + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_s) - \mathbf{T} \cdot \vec{v} + \vec{q} \rrbracket \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.16)$$

Die Bilanz mechanischer Energie (keine Erhaltungsgrösse) erhalten wir durch skalare Multiplikation der Impulsbilanz (1.12) mit dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} :

$$\rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \text{div } \mathbf{T} + \rho \vec{v} \cdot \vec{f} = \quad (1.17)$$

oder gleichwertig:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) = \text{div}(\mathbf{T} \cdot \vec{v}) - \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \text{grad } \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (1.18)$$

Der Gradient des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} ist ein Tensor 2. Stufe, \mathbf{L} , der auch additiv in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden kann:

$$\mathbf{L} = \text{grad } \vec{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{R} \quad (1.19)$$

Der symmetrische Teil heisst Deformationstensor, \mathbf{D} , und der antisymmetrische Teil Vorticity-Tensor, \mathbf{R} . Es gilt

$$\mathbf{T} \cdot \text{grad } \vec{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{R}), \quad (1.20)$$

$$\text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}) = \text{Sp}[\mathbf{T} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{R})] = \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}), \quad (1.21)$$

weil \mathbf{R} antisymmetrisch ist. Durch Einsetzen der Gleichung (1.18) in die Energiebilanz (1.13) erhalten wir eine Bilanzgleichung für die innere Energie,

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\rho \text{grad } \epsilon) \cdot \vec{v} = \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) - \text{div } \vec{q} + \rho r \quad (1.22)$$

Mit Gleichungen (1.18) und (1.22) konnten wir die Bilanzgleichungen für die mechanische Energie und die innere Energie einzeln schreiben, wobei der Dissipationsterm $\text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})$ (Reibungsverlust) der mechanischen Energie der Produktion von innerer Energie entspricht.

1.2.4 Geschwindigkeit und Deformation

Definitionen:

Die momentanen *Stromlinien* liegen überall tangential zu den Geschwindigkeitsvektoren.

Streichlinien durch einen Punkt bestehen aus den materiellen Teilchen, die sich zu irgend einem früheren Zeitpunkt durch den gegebenen Raumpunkt bewegt haben.

Bahnlinien sind die Bahnen gegebener Masseteilchen.

Im stationären Fall $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t_0)$ fallen Strom-, Streich- und Bahnlinien zusammen. Bei Stromlinien sind der lokale Geschwindigkeitsvektor und die Änderung des Ortsvektors entlang der Stromlinie definitionsgemäss zueinander parallel:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0. \quad (1.23)$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen der momentanen Stromlinien in einem gegebenen momentanen Geschwindigkeitsfeld:

$$v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = -v_1 dx_3 + v_3 dx_1 = 0 \quad (1.24)$$

Das Geschwindigkeitsfeld kann lokal entwickelt werden (Taylorreihe):

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0 + \vec{r} \cdot (\text{grad } \vec{v})_0 + \dots \quad (1.25)$$

In infinitesimaler Umgebung können die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0 + \vec{r} \cdot \mathbf{L}_0 = \vec{v}_0 + \vec{r} \cdot (\mathbf{D}_0 + \mathbf{R}_0) \quad (1.26)$$

Hilfssatz: Sei ein Geschwindigkeitsfeld definiert durch

$$\vec{v} = \vec{r} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 a + x_2 c \\ x_1 b + x_2 d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

dann ist die Divergenz der Geschwindigkeit

$$\text{div } \vec{v} = a + x_1 \frac{\partial a}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial c}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial b}{\partial x_2} + d + x_2 \frac{\partial d}{\partial x_2} \quad (1.28)$$

Falls $\mathbf{A} = (\text{const})$ und $\text{Sp } \mathbf{A} = 0$ (oder als Spezialfall: \mathbf{A} antisymmetrisch):

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.29)$$

Das bietet eine Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes in Teile mit verschiedenen grundlegenden Eigenschaften an:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{v}_0}_{(1)} + \underbrace{\vec{r} \cdot \left[\mathbf{D}_0 - \frac{1}{3}(\text{Sp } \mathbf{D}_0)\mathbf{E} \right]}_{(2)} + \underbrace{\vec{r} \cdot \frac{1}{3}(\text{Sp } \mathbf{D}_0)\mathbf{E}}_{(3)} + \underbrace{\vec{r} \cdot \mathbf{R}_0}_{(4)} \quad (1.30)$$

Die Bewegung wird derart in eine reine Translation (1), eine reine (volumenkonstante) Deformation (2), eine reine (formtreue) Dehnung (3) und eine starre Rotation (4) zerlegt. Dies soll am 2-dimensionalen Fall illustriert werden, für den die Gleichung leicht verschieden ist:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\vec{r}) &= \vec{v}_0 + \vec{r} \cdot \left[\mathbf{D}_0 - \frac{1}{2}(\text{Sp } \mathbf{D}_0)\mathbf{E} \right] + \vec{r} \cdot \frac{1}{2}(\text{Sp } \mathbf{D}_0)\mathbf{E} + \vec{r} \cdot \mathbf{R}_0 \\
&= \vec{v}_0 + \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

mit

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \tag{1.32}$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad d = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \tag{1.33}$$

Teil (1) ist einfach als reine Translation zu erkennen. Für Teil (3) erhalten wir eine Gleichung für die lokale Stromlinie nach (1.24):

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{x_2}{x_1} \tag{1.34}$$

deren Lösungen Geraden durch den Nullpunkt sind, und die Geschwindigkeit auf der Stromlinie:

$$x_2 = C x_1 \quad \text{und} \quad v = c r. \tag{1.35}$$

Damit wird die Bewegung zu einer zentrischen Streckung. Für Teil (4) ergibt (1.24) eine Gleichung für die Stromlinien,

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{x_1}{x_2} \tag{1.36}$$

deren Lösungen Kreise um den Nullpunkt sind, und die Geschwindigkeit auf der Stromlinie:

$$x_1^2 + x_2^2 = C \quad \text{und} \quad v = d r. \tag{1.37}$$

Damit wird die Bewegung zu einer starren Rotation. Entsprechend finden wir für Teil (2) die Gleichungen für die Stromlinien:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{x_1 b - x_2 a}{x_1 a + x_2 b}. \tag{1.38}$$

Aufgabe (1.1):

Finde die Lösungen für die Stromlinien (1.38) für zwei Spezialfälle: $a = 0$ oder $b = 0$, und beschreibe ihre Form. Zeige auch, dass das Geschwindigkeitsfeld auch im allgemeinen Fall ($a \neq 0$ und $b \neq 0$) divergenzfrei ist.

1.3 MATERIALGLEICHUNGEN

1.3.1 Allgemeine Grundlagen

Die 5 Bilanzgleichungen (1.10), (1.12) und (1.13) enthalten die 14 Unbekannten $\rho, v_1, v_2, v_3, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}, T_{33}, \epsilon, q_1, q_2,$ und q_3 . Um das System zu schliessen, sind noch 9 Gleichungen notwendig. Diese Gleichungen werden durch die Definition des Materiales in Betrachtung geliefert werden: (1) Konstitutivgleichungen, (2) Materialsymmetrie und (3) kinematische Bedingungen.

1.3.2 Konstitutivgleichungen

Konstitutivgleichungen für den Spannungstensor definieren die Beziehung zwischen dem Spannungstensor und dem Deformationstensor,

$$\mathcal{R}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = 0 \quad (1.39)$$

wobei \mathcal{R} ein allgemeines Funktional ist. Für die Spezifikation von \mathcal{R} werden einige Prinzipien berücksichtigt:

Das *Prinzip der lokalen Wirkung* sagt, dass der Spannungszustand nur durch eine infinitesimale Umgebung bestimmt wird.

Das *Prinzip des Determinismus* sagt, dass der gegenwärtige Spannungszustand durch die Vorgeschichte der Deformation eindeutig bestimmt ist.

Das *Prinzip der materiellen Objektivität* sagt, dass die Beschreibung des Spannungszustandes koordinatenunabhängig ist.

Klassifikation:

$$\text{Erinnerung} \left\{ \begin{array}{l} \text{ja: inelastisch} \\ \text{nein: elastisch} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{langzeit: plastisch} \\ \text{verblappend: viskoelastisch} \end{array} \right.$$

$$\text{Konstitutivgleichung} \left\{ \begin{array}{l} \text{implizit} \\ \text{explizit} \end{array} \right.$$

1.3.3 Materialsymmetrie

Die Materialsymmetrie muss sich in den Konstitutivgleichungen widerspiegeln, zum Beispiel kubisch, hexagonal, triklin bei Kristallen, Isotropie bei Flüssigkeiten.

1.3.4 Kinematische Bedingungen

Kinematische Bedingungen sagen etwas aus über geometrische Beschränkungen der Bewegung.

Beispiele: volumenkonstante Bewegungen ($\rho = \text{const}$) bei inkompressiblen Materialien, Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte bei idealen Gasen.

1.3.5 Newtonsche Flüssigkeiten

Eine Newton'sche Flüssigkeit ist definiert durch eine lineare Abhängigkeit der Spannungskomponenten von den Komponenten der Deformationsrate (6 Gleichungen):

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -p \mathbf{E} + \kappa (\text{Sp}\mathbf{D}) \mathbf{E} + 2\eta\mathbf{D} \\ &= -p \mathbf{E} + \lambda (\text{Sp}\mathbf{D}) \mathbf{E} + 2\eta \left[\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\text{Sp}\mathbf{D}) \mathbf{E} \right],\end{aligned}\quad (1.40)$$

wobei η und λ der dynamische Viskositätskoeffizient (Scherviskosität) und der Volumenviskositätskoeffizient sind, und

$$\lambda = \frac{2}{3}\eta + \kappa. \quad (1.41)$$

Der Druck p kann eine Funktion anderer Grössen sein, z.B. der Dichte ρ und der Temperatur θ , und eine Konstitutivgleichung für p ist notwendig. Im Falle einer inkompressiblen Newton'schen Flüssigkeit sind κ und λ nicht definiert, und für p ist keine Konstitutivgleichung notwendig:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{E} + 2\eta\mathbf{D}. \quad (1.42)$$

Gleichung 1.40 in die Impulsbilanzgleichung 1.12 eingesetzt ergibt die sog. Navier-Stokes Gleichung:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \text{div} \left[-p\mathbf{E} + \lambda(\text{Sp}\mathbf{D})\mathbf{E} + 2\eta\left\{\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\text{Sp}\mathbf{D})\mathbf{E}\right\} \right] + \rho\vec{f} \\ &= -\text{grad } p + \text{grad}(\kappa \text{div}\vec{v}) + 2 \text{div}(\eta \text{grad}\vec{v}) + \rho\vec{f}\end{aligned}\quad (1.43)$$

Aufgabe: Schreibe die Impulsgleichungen für eine Newton'sche Flüssigkeit als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten in einem Kartesischen Koordinatensystem.

Falls die Thermodynamik der Flüssigkeit wichtig ist, benötigen wir Konstitutivgleichungen für die innere Energie ϵ und die Wärmeleitung \vec{q} (4 Gleichungen):

$$\dot{\epsilon} = c \dot{\theta} \quad (1.44)$$

und die Fourierbeziehung

$$\vec{q} = -k \text{grad } \theta. \quad (1.45)$$

Dies kann in die Gleichung (1.22) eingesetzt werden:

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (k \text{grad } \theta) - \rho c (\text{grad } \theta) \cdot \vec{v} + \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) + \rho r. \quad (1.46)$$

Bilanz:

15 Gleichungen: 5 Kontinuitätsgleichungen (1.10), (1.12) und (1.13), 6 Konstitutivgleichungen (1.40) für die Spannungskomponenten und 4 thermische Konstitutivgleichungen (1.44) und (1.45)

15 Unbekannte: Die 14 zu Beginn des Abschnittes aufgezählten Unbekannten und die Temperatur.

Bemerkung: Konstitutivgleichungen haben einen beschränkten Gültigkeitsbereich, z.B. nur für genügend langsame Deformationen.

2 BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

2.1 GRUNDGLEICHUNGEN

In den Bewegungsgleichungen für die Atmosphäre oder die Ozeane auf der sich drehenden Erde müssen die Trägheitskräfte (Coriolis - und Zentrifugalkraft) mitberücksichtigt werden:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{T} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega}^2 R + \vec{g}_0. \quad (2.1)$$

Die Erde kann mit sehr guter Näherung als Kugel angenommen werden. Die Gravitationsbeschleunigung \vec{g}_0 und die Zentrifugalbeschleunigung $\vec{\Omega}^2 R$ sind nur von der geographischen Breite abhängig, und können deshalb zur sog. Schwere \vec{g} zusammengefasst werden:

$$\vec{\Omega}^2 R + \vec{g}_0 \equiv \vec{g}. \quad (2.2)$$

Damit wird die Gleichung (2.1) mit Zerlegung der Spannungsdivergenz in einen hydrostatischen Teil und den Reibungsteil zu

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \text{grad } p}_{(3)} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{P}}_{(4)} + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}}_{(5)} - \underbrace{\vec{g}}_{(6)} = 0 \quad (2.3)$$

Der Tensor \mathbf{P} wird mit der Konstitutivgleichung (1.40) eindeutig definiert. Der Term (1) ist die Eulersche Beschleunigung, (2) die Trägheitsbeschleunigung, (3) die Druckgradientbeschleunigung, (4) der Reibungsterm, (5) die Coriolisbeschleunigung und (6) die Schwerebeschleunigung.

2.1.1 Buckingham Theorem

Gegeben: n physikalische Grössen: W_i , $i = 1, \dots, n$

Dimensionale Grössen: L_k , $k = 1, \dots, m$

Definition:

Sei $z \in \{W_i\}$ und z habe die Dimension $[z] = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} \dots L_m^{\alpha_m}$ dann ist der Dimensionsvektor von $\vec{\alpha}$ von z wie folgt definiert:

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

sei \vec{b}_i der Dimensionsvektor von W_i :

$$\vec{b}_i \equiv \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{mi} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

und \mathbf{B} die sog. Dimensionsmatrix der Menge $\{W_i | i = 1, \dots, n\}$ von physikalischen Variablen:

$$\mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Buckingham-Theorem:

Die Anzahl k unabhängiger dimensionsloser Grössen, die mit den Grössen W_i , $i = 1, \dots, n$ gebildet werden können, ist $k = n - r$, wobei $r = \text{Rang}(\mathbf{B})$.

Beweis:

Sei $A = W_1^{x_1} W_2^{x_2} \cdots W_n^{x_n}$ eine dimensionslose Grösse, die aus den gegebenen Grössen W_i gebildet wurde. Die Potenz der dimensionalen Einheit L_i von A ist dann

$$(L_i^{x_1})^{b_{i1}} (L_i^{x_2})^{b_{i2}} \cdots (L_i^{x_n})^{b_{in}} = (L_i)^0 = 1 \quad (2.7)$$

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

Dieses System von Gleichungen, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = 0$, hat $k = n - r$ linear unabhängige Lösungen, wobei r der Rang der Matrix \mathbf{B} ist.

Beispiel: Planck'sches Strahlungsgesetz

$$B_\lambda d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (2.9)$$

Liste der vorkommenden physikalischen Grössen: B_λ , λ , h , c , k , T

Liste der dimensionalen Grössen: Länge [m], Zeit [s], Masse [kg] und Temperatur [K]

Die Dimensionsmatrix (Reihenfolge der Kolonnen: B , λ , h , c , k , T , und Reihenfolge der Zeilen: Länge, Zeit, Masse, Temperatur) ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

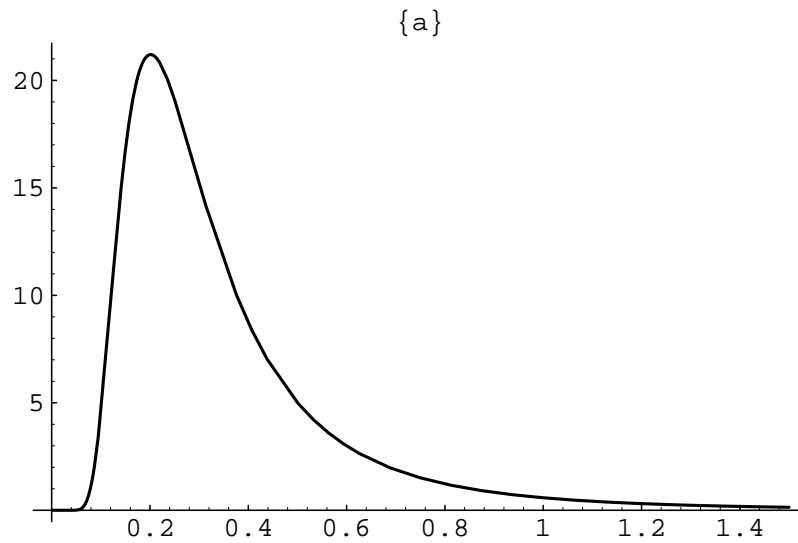


Abbildung 2.1: *Skaliertes Planck'sches Strahlungsgesetz*

wobei die erste Zeile für die Dimension Länge, die zweite für Zeit, die dritte für Masse und die vierte für die Temperatur steht. Der Rang der Matrix ist $r = 4$, und damit die Anzahl möglicher dimensionsloser Kombinationen

$$k = 6 - r = 2 \tag{2.11}$$

Beispiele zweier unabhängiger dimensionsloser Kombinationen:

$$\frac{\lambda k T}{hc}, \quad \frac{B_\lambda h^4 c^3}{k^5 T^5} \tag{2.12}$$

scaling

$$(\lambda, B_\lambda) = \left(\frac{hc}{kT} \tilde{\lambda}, \frac{2k^5 T^5}{h^4 c^3} \tilde{B}_\lambda \right) \tag{2.13}$$

$$\tilde{B}_\lambda d\tilde{\lambda} = \frac{1}{\tilde{\lambda}^5} \frac{d\tilde{\lambda}}{\exp\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) - 1} \tag{2.14}$$

Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{kT} \tilde{\lambda}_{max} = \frac{const}{T} \tag{2.15}$$

Stefan-Boltzmann:

$$B_{tot} = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{2k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \tilde{B}_\nu d\tilde{\nu} = \text{const } T^4 \quad (2.16)$$

2.1.2 Skalierung der Bewegungsgleichung

Liste der vorkommenden physikalischen Grössen: \vec{v} , \vec{r} , t , ρ , p , \mathbf{P} , Ω , g

Liste der dimensionalen Grössen: Länge [m], Zeit [s], Masse [kg]

Die Dimensionsmatrix ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

wobei die erste Zeile für die Dimension Länge, die zweite für Zeit und die dritte für Masse steht. Der Rang der Matrix ist $r = 3$, und damit die Anzahl möglicher dimensionsloser Kombinationen

$$k = n - r = 5 \quad (2.18)$$

Eine Gleichung besteht oft aus mehreren Summanden:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum A_i = 0. \quad (2.19)$$

Um ein objektives Kriterium für die Vernachlässigung kleiner Terme zu finden, können die Terme mit ihrer typischen Grössenordnung skaliert werden:

$$A_i = \{A_i\} A_i^* \quad \text{mit} \quad \{A_i\} = \text{magn}(A_i) \quad (2.20)$$

wobei die skalierte Grösse A_i^* dimensionslos und zusätzlich von der Grössenordnung $\text{magn}(A_i^*) = \mathcal{O}(1)$ ist. Die Gleichung (2.19) in skaliertem Form ist

$$\{A_1\} A_1^* + \{A_2\} A_2^* + \{A_3\} A_3^* + \dots + \{A_n\} A_n^* = \sum \{A_i\} A_i^* = 0. \quad (2.21)$$

Für einen Vergleich der Terme, z.B. mit Term 1, können alle anderen Skalierfaktoren durch $\{A_1\}$ dividiert werden:

$$\{A_{i1}\} = \frac{\{A_i\}}{\{A_1\}}. \quad (2.22)$$

Damit kann die Gleichung (2.19) in skaliertem und dimensionsloser Form geschrieben werden:

$$A_1^* + \{A_{21}\} A_2^* + \{A_{31}\} A_3^* + \dots + \{A_{n1}\} A_n^* = \sum \{A_{i1}\} A_i^* = 0. \quad (2.23)$$

Die skalierte Navier-Stokes Gleichung (2.3) lautet nun

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \right\} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)^* + \left\{ |(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}| \right\} \left((\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} \right)^* + \left\{ \frac{1}{\rho} | \text{grad } p | \right\} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right)^* \\
& - \left\{ \frac{1}{\rho} | \text{div } \mathbf{P} | \right\} \left(\frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{P} \right)^* + \left\{ 2 | \vec{\Omega} \times \vec{v} | \right\} \left(2 \vec{\Omega} \times \vec{v} \right)^* \\
& - \{G\} (\vec{g})^* = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Beim Vergleich der Terme mit dem Trägheitsterm ergeben sich für die anderen Terme Skalierfaktoren, deren Reziproke vielverwendete dimensionslose Zahlen sind. Das Verhältnis der Eulerschen Beschleunigung zum Trägheitsterm heisst Stouhal-Zahl:

$$\frac{\left\{ |(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}| \right\}}{\left\{ \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \right\}} \equiv St, \tag{2.25}$$

das Verhältnis der Coriolisbeschleunigung zum Trägheitsterm heisst Rossby-Zahl:

$$\frac{\left\{ |(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}| \right\}}{\left\{ 2 | \vec{\Omega} \times \vec{v} | \right\}} \equiv Ro \tag{2.26}$$

das Verhältnis der Druckgradientbeschleunigung zum Trägheitsterm heisst Euler-Zahl:

$$\frac{\left\{ |(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}| \right\}}{\left\{ \frac{1}{\rho} | \text{grad } p | \right\}} \equiv Eu \tag{2.27}$$

das Verhältnis des Reibungsterms zum Trägheitsterm heisst Reynolds-Zahl:

$$\frac{\left\{ |(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}| \right\}}{\left\{ \frac{1}{\rho} | \text{div } \mathbf{P} | \right\}} \equiv Re \tag{2.28}$$

das Verhältnis der Schwerebeschleunigung zum Trägheitsterm heisst Froude-Zahl:

$$\frac{\left\{ |(\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v}| \right\}}{\{G\}} \equiv Fr \tag{2.29}$$

Damit kann die Gleichung (2.24) neu geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{St} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)^* + \left((\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} \right)^* + \frac{1}{Eu} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right)^* \\
& - \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{P} \right)^* + \frac{1}{Ro} \left(2 \vec{\Omega} \times \vec{v} \right)^* \\
& - \frac{1}{Fr} (\vec{g})^* = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.1.3 Skalieren der einzelnen Variablen

Diese pauschale Abschätzung der Terme als ganzes ist nicht einfach. In den meisten Fällen ist es einfacher, eine typische Grössenordnung der einzelnen Variablen anzugeben. Deshalb bietet sich eine Skalierung der einzelnen Variablen, die in einer Gleichung vorkommen, an. In der Navier-Stokes Gleichung (2.3) kommen folgende skalierbare Variablen vor:

$$\vec{r} = \{r\}\vec{r}^* \quad (2.31)$$

$$\vec{v} = \{v\}\vec{v}^* \quad (2.32)$$

$$\vec{g} = \{G\}\vec{g}^* \quad (2.33)$$

$$\mathbf{P} = \{P\}\mathbf{P}^* \quad (2.34)$$

$$p = \{p\}p^* \quad (2.35)$$

$$\rho = \{\rho\}\rho^* \quad (2.36)$$

$$\Omega = \{\Omega\}\Omega^* \quad (2.37)$$

$$t = \{t\}t^* = \frac{\{r\}}{\{v\}}t^*. \quad (2.38)$$

Gleichung (2.3) wird damit zu

$$\begin{aligned} \frac{\{r\}}{\{t\}\{v\}} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\text{grad}^* \vec{v}^*) \cdot \vec{v}^* + \frac{\{p\}}{\{\rho\}\{v\}^2} \frac{1}{\rho^*} (\text{grad}^* p^*) \\ - \frac{\{P\}}{\{\rho\}\{v\}^2} \frac{1}{\rho^*} (\text{div}^* \mathbf{P}^*) + \frac{2\{\Omega\}\{r\}}{\{v\}} (2\vec{\Omega}^* \times \vec{v}^*) \\ - \frac{\{G\}\{r\}}{\{v\}^2} \vec{g}^* = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

und die dimensionslosen Zahlen können jetzt in den einzelnen Variablen ausgedrückt werden:

$$St = \frac{\{t\}\{v\}}{\{r\}} \quad (2.40)$$

$$Ro = \frac{\{v\}}{2\{\Omega\}\{r\}} \quad (2.41)$$

$$Eu = \frac{\{\rho\}\{v\}^2}{\{p\}} \quad (2.42)$$

$$Re = \frac{\{\rho\}\{v\}^2}{\{P\}} \quad (2.43)$$

$$Fr = \frac{\{v\}^2}{\{G\}\{r\}} \quad (2.44)$$

2.1.4 Abschätzung der Terme

Für die Atmosphäre, deren Gasmischung als ideales Gas angenommen werden kann, können wir die skalierte ideale Gasgleichung verwenden:

$$\frac{\{p\}}{\{\rho\}} \frac{p^*}{\rho^*} = R\{\theta\}\theta^*, \quad (2.45)$$

womit die Euler-Zahl folgende Form bekommt:

$$Eu = \frac{\{v\}^2}{R\{\theta\}}. \quad (2.46)$$

Der skalierte Reibungsteil $\{\mathbf{P}\}$ in der Reynolds-Zahl kann mit dem skalierten Geschwindigkeitsgradienten abgeschätzt werden:

$$\frac{\{v\}}{\{r\}} \text{grad}^* \vec{v}^* = \frac{\{v\}}{\{r\}} (\mathbf{D}^* + \mathbf{R}^*) \quad (2.47)$$

$$\{\mathbf{P}\}\mathbf{P}^* = \{\eta\} \frac{\{v\}}{\{r\}} 2\eta^* \mathbf{D}^* \quad (2.48)$$

$$\{\mathbf{P}\} = \frac{\{\eta\}\{v\}}{\{r\}} \quad (2.49)$$

und mit der Definition der kinematischen Zähigkeit $\eta_0 \equiv \frac{\eta}{\rho}$

$$Re = \frac{\{r\}\{v\}}{\{\eta_0\}} \quad (2.50)$$

Um numerische Werte für die dimensionslosen Zahlen zu bekommen, müssen problemspezifische Annahmen über die typischen Grössenordnungen der Variablen gemacht werden. Für die grossräumige, d.h. $\{r\} \approx 10^6$ m, Zirkulation wehen Winde mit typischerweise $\{v\} \approx 10$ m s⁻¹. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\{\Omega\} = 7 \cdot 10^{-5}$ s⁻¹ und die kinematische Zähigkeit der Luft ist etwa $\{\eta_0\} = 1.8 \cdot 10^{-5}$ s m⁻²:

$$St = 0.03 ; Ro = 0.07 ; Eu = 0.001 ; Re = 5 \cdot 10^{11} ; Fr = 0.00001 \quad (2.51)$$

2.2 REIBUNGSFREIE ATMOSPHERE

2.2.1 Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten

Die Reynoldszahl ist viele Grössenordnungen grösser als die anderen dimensionlosen Zahlen. Dies ist ein wichtiges Resultat, da damit der Reibungsterm für die Berechnung der grossräumigen Zirkulation vernachlässigt werden darf. Das vereinfacht die Bewegungsgleichungen wesentlich, die in kartesischen Koordinaten die folgende Form bekommen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2(w\Omega_y - v\Omega_z) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2(u\Omega_z - w\Omega_x) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2(v\Omega_x - u\Omega_y) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (2.54)$$

Diese Gleichungen werden im folgenden für Kugelkoordinaten geschrieben. Die Koordinate r ist der Abstand zum Erdmittelpunkt, ϕ die Geographische Breite (vom Aequator gezählt), und λ die geographische Länge (von einer Referenzrichtung her gezählt). Dabei werden die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, \vec{v} , der Schwerebeschleunigung, \vec{g} , und des Vektors der Erdrotation, $\vec{\Omega}$, wie folgt definiert:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \phi \\ \Omega \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

und folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} \partial x &= r \cos \phi \partial \lambda & v_\lambda &= u \\ \partial y &= r \partial \phi & v_\phi &= v \\ \partial z &= \partial r & v_r &= w \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ω ist der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, und a ist der mittlere Erdradius. Die Gleichungen (2.52), (2.53) und (2.54) in Kugelkoordinaten lauten damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ - \frac{uv}{a+z} \tan \phi + \frac{uw}{a+z} + 2w\Omega \cos \phi - 2v\Omega \sin \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ + \frac{vw}{a+z} - \frac{u^2}{a+z} \tan \phi + 2u\Omega \sin \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ - \frac{u^2 + v^2}{a+z} - 2u\Omega \cos \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.2.2 Statische Atmosphäre

Die polytrope Atmosphäre ist definiert durch einen konstanten vertikalen Temperaturgradienten γ :

$$\theta = \theta_0 - \gamma(z - z_0) \quad (2.60)$$

und die daraus resultierende Höhenabhängigkeit des Druckes ist

$$p = p_0 \left(\frac{\theta_0 - \gamma z}{\theta_0} \right)^{\frac{g}{R\gamma}} \quad (2.61)$$

In einer adiabat geschichteten Atmosphäre mit dem adiabaten vertikalen Temperaturgradienten Γ ergibt sich folgende Temperatur-Druck Beziehung:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\Gamma}{g}} \quad (2.62)$$

Eine adiabate Atmosphäre hat entsprechend eine Obergrenze, wo der Druck Null wird:

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad H_a = \frac{\theta_0}{\Gamma} \quad (2.63)$$

wobei H_a die Höhe dieser Atmosphäre ist. In einer homogene Atmosphäre mit konstanter Dichte, die allerdings hochgradig instabil wäre, ist der Druck eine lineare Funktion der Höhe:

$$p = p_0 - \rho g(z - z_0) \quad (2.64)$$

Auch diese Atmosphäre hat eine Obergrenze mit der Höhe H_0 :

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{R\theta_0}{g} \quad (2.65)$$

Eine isotherme Atmosphäre hat im Gegensatz zu obigen Fällen keine Obergrenze, da der Druck exponentiell mit der Höhe abfällt:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right) \quad (2.66)$$

Für eine Atmosphäre können potentielle und innere Energie, P_q und U_q , wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} P_q &= \int_0^\infty \rho g z \, dz = \int_0^{p_0} z \, dp \\ &= z p \Big|_0^{p_0} - \int_\infty^0 p \, dz = \int_0^\infty p \, dz \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$U_q = \int_0^\infty \rho c_v \theta \, dz = \frac{c_v}{R} \int_0^\infty p \, dz \quad (2.68)$$

Die beiden Energieanteile haben überraschend ein konstantes Verhältnis:

$$\frac{P_q}{U_q} = \frac{R}{c_v} \approx 0.4 \quad (2.69)$$

Mit der hydrostatischen Grundgleichung $dp = -\rho g dz$ werden die Gleichungen (2.67) und (2.68) zu

$$U_q = \frac{c_v}{g} \int_0^{p_0} \theta dp ; \quad P_q = \frac{R}{g} \int_0^{p_0} \theta dp \quad (2.70)$$

und mit $c_p = c_v + R$ erhalten wir

$$P_q + U_q = \frac{c_p}{g} U_q = \frac{c_p}{R} P_q \quad (2.71)$$

$$P_q + U_q = \frac{c_p}{c_v} \int_0^{p_0} \theta dp = \frac{c_p}{R} \int_0^\infty p dz \quad (2.72)$$

$$P_q + U_q = \frac{c_p}{R} P_q = \frac{c_p}{R} \int_0^\infty p dz \quad (2.73)$$

Die Höhe der Schwerpunktes der Atmosphäre, H_s , ist gegeben durch

$$H_s = \frac{P_q}{gM_q} \quad \text{mit} \quad M_q = \int_0^\infty \rho dz = \int_0^{p_0} \frac{dp}{g} = \frac{p_0}{g} \quad (2.74)$$

$$H_s = \frac{P_q}{p_0} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} z dp = \frac{1}{p_0} \int_0^\infty p dz \quad (2.75)$$

und mit der Gasgleichung erhalten wir

$$H_s = \frac{R}{gp_0} \int_0^{p_0} \theta dp = \frac{R\tilde{\theta}}{g}. \quad (2.76)$$

$\tilde{\theta}$ ist Mitteltemperatur der Luftsäule, gemittelt mit p als vertikale Koordinate.

Für eine polytrophe Atmosphäre mit dem Temperaturgradienten γ ergibt dies

$$H_s = \frac{R\theta_0}{g \left(1 + \frac{R\gamma}{g}\right)} = \frac{H_0}{\left(1 + \frac{R\gamma}{g}\right)}, \quad (2.77)$$

womit auch eine Beziehung zwischen der Skalenhöhe und der Höhe des Schwerpunktes gegeben ist.

2.3 SEICHTE ATMOSPHÄRE

2.3.1 Anisotrope Skalierung

In der Atmosphäre, wie auch in den Ozeanen, sind die charakteristischen Skalen für Längen und Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung viel grösser als in vertikaler Richtung:

$$\{L\} \gg \{H\} \quad \text{und} \quad \{U\} \gg \{W\} \quad (2.78)$$

Umgekehrt sind die Druckschwankungen über eine charakteristische Distanz in der vertikalen Richtung in der Grössenordnung des Druckes selbst, in der horizontalen Richtung hingegen zwei bis drei Grössenordnungen kleiner:

$$\left\{ \frac{\Delta_{HP}}{p} \right\} \gg \left\{ \frac{\Delta_{LP}}{p} \right\} \quad (2.79)$$

Dies legt es nahe, für Längen und Geschwindigkeiten unterschiedliche Werte für die Skalierfaktoren in horizontaler und vertikaler Richtung zu wählen:

$$(x, y) = \{L\}(x^*, y^*) \quad (2.80)$$

$$(z, H) = \{H\}(z^*, H^*) \quad (2.81)$$

$$(u, v) = \{U\}(u^*, v^*) \quad (2.82)$$

$$w = \{W\}w^* \quad (2.83)$$

$$t = \{t\}t^* = \frac{\{L\}}{\{v_c\}}t^* \quad (2.84)$$

Für die Skalierung des Druckgradienttermes skalieren wir zuerst die Gasgleichung:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R\theta}{p} = \frac{gH_0}{p} = \frac{\{G\}\{H\}g^*H_0^*}{p} \quad (2.85)$$

und anstelle des Druckes selbst wählen wir eine Skalierung für die relativen Druckschwankungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\{G\}\{H\}}{\{L\}} \left\{ \frac{\Delta_{LP}}{p} \right\} g^* H_0^* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^* \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\{G\}\{H\}}{\{L\}} \left\{ \frac{\Delta_{LP}}{p} \right\} g^* H_0^* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right)^* \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\{G\}\{H\}}{\{H\}} \left\{ \frac{\Delta_{HP}}{p} \right\} g^* H_0^* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^* \end{aligned} \quad (2.86)$$

Die Coriolisparameter werden wie folgt definiert,

$$f \equiv 2\Omega \sin \phi ; \quad l \equiv 2\Omega \cos \phi \quad (2.87)$$

und wir skalieren sie mit ihren typischen Werten, z.B. für mittlere Breitengrade:

$$f = \{f\}f^* ; \quad l = \{l\}l^* \quad (2.88)$$

Gleichungen (2.57) bis (2.59) ergeben bei anisotroper Skalierung unter Verwendung von $\{U_a\} = \{U\}$ und

$$\frac{\{H\}}{\{L\}} = \frac{\{W\}}{\{U\}} \equiv \epsilon \quad (2.89)$$

2.3.2 Hierarchie von Approximationen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial t^*} &+ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \\
&+ \frac{\{L\}}{a} (-\tan \phi u^* v^* + \epsilon u^* w^*) \\
&+ \frac{\{L\}}{\{U\}} (\{l\} \epsilon l^* w^* - \{f\} f^* v^*) \\
&+ \frac{\{G\}\{H\}}{\{U\}^2} \left\{ \frac{\Delta_{LP}}{p} \right\} g^* H_0^* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^* = 0
\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^*}{\partial t^*} &+ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \\
&+ \frac{\{L\}}{a} (-\tan \phi u^{*2} + \epsilon v^* w^*) + \frac{\{f\}\{L\}}{\{U\}} f^* u^* \\
&+ \frac{\{G\}\{H\}}{\{U\}^2} \left\{ \frac{\Delta_{LP}}{p} \right\} g^* H_0^* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right)^* = 0
\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^*}{\partial t^*} &+ u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \\
&- \frac{\{L\}}{a\epsilon} (u^{*2} + v^{*2}) - \frac{\{l\}\{L\}}{\{W\}} l^* u^* \\
&+ \frac{\{G\}\{L\}}{\{U\}\{W\}} \left[\left\{ \frac{\Delta_{HP}}{p} \right\} g^* H_0^* \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^* + g^* \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Für eine Abschätzung der Werte der Skalierfaktoren benützen wir dieselben Skalierwerte wie im isotropen Fall, zusätzlich wählen wir für $\epsilon = 0.01$. Für die vertikale Gleichung erhalten wir damit:

$$\frac{\{L\}}{a\epsilon} \approx 0.1 ; \quad \frac{\{l\}\{L\}}{\{W\}} \approx 1000 ; \quad \frac{\{G\}\{L\}}{\{U\}\{W\}} \left\{ \frac{\Delta_{HP}}{p} \right\} \approx 10^7. \tag{2.93}$$

Damit fallen alle Terme gegenüber dem Druckgradient- und Schwereterm um viele Größenordnungen ab, und können vernachlässigt werden. Die vertikale Bewegungsgleichung degeneriert so zur hydrostatische Druckgleichung:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \tag{2.94}$$

Die Skalierfaktoren in der horizontalen Gleichung sind

$$\frac{\{L\}\{\tan \phi\}}{a} \approx 0.1 ; \quad \frac{\{f\}\{L\}}{\{U\}} \approx 10 ; \quad \frac{\{G\}\{H\}}{\{U\}^2} \left\{ \frac{\Delta_{LP}}{p} \right\} \approx 1000 \quad (2.95)$$

Die Terme, die ϵ enthalten, sind um zwei Grössenordnungen kleiner als die entsprechenden Terme ohne ϵ , und können für eine entsprechende Näherung weggelassen werden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{a} \tan \phi - 2v\Omega \sin \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2}{a} \tan \phi + 2u\Omega \sin \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.97)$$

Durch Zusammenfassen des Beschleunigungstermes mit den Trägheitstermen, und Verwendung der Definition für den Coriolisparameter wird daraus

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \tan \phi - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{a} \tan \phi + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.99)$$

oder als Linearkombination der Basisvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 geschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dv}{dt} \vec{e}_2 - \frac{u}{a} \tan \phi (-v\vec{e}_1 + u\vec{e}_2) + f(v\vec{e}_1 + u\vec{e}_2) \\ + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Wir definieren den horizontalen Geschwindigkeitsvektor und den horizontalen Nabla-Operator mit

$$\vec{v}_h = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \nabla_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

Die totale zeitliche Ableitung des horizontalen Geschwindigkeitsvektors unterscheidet sich wegen metrischen Termen vom horizontalen Anteil der totalen zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dv}{dt} \vec{e}_2 - \frac{uv}{a} \tan \phi \vec{e}_1 - \frac{u^2}{a} \tan \phi \vec{e}_2 - \frac{u^2 + v^2}{a} \vec{e}_3 \\ \equiv \left(\frac{d\vec{v}_h}{dt} \right)_h - \frac{u^2 + v^2}{a} \vec{e}_3 \equiv \frac{d\vec{v}_h}{dt}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Damit reduziert sich die horizontale Bewegungsgleichung für die freie Atmosphäre auf

$$\left(\frac{d\vec{v}_h}{dt}\right)_h + f(\vec{e}_3 \times \vec{v}_h) + \frac{1}{\rho} \nabla_h p = 0 \quad (2.103)$$

und in skaliert Form:

$$Ro \left(\frac{d\vec{v}_h^*}{dt^*}\right)_h + f^*(\vec{e}_3 \times \vec{v}_h^*) + \frac{Ro}{Fr} \left\{ \frac{\Delta L p}{p} \right\} \frac{1}{\rho^*} \nabla_h^* p^* = 0. \quad (2.104)$$

Im stationären Fall erhalten wir die Gleichung für den rein geostrophischen Wind,

$$f(\vec{e}_3 \times \vec{v}_h) + \frac{1}{\rho} \nabla_h p = 0, \quad (2.105)$$

und im Fall für sehr grosse Ro die Gleichung für den Eulerwind:

$$\left(\frac{d\vec{v}_h}{dt}\right)_h + \frac{1}{\rho} \nabla_h p = 0. \quad (2.106)$$

2.4 PHYSIKALISCHE KOORDINATEN

Jede relevante physikalische Grösse, die monoton von der Höhe über Grund abhängt, kann als neue vertikale Koordinate benützt werden. Eine oft verwendete Grösse ist der atmosphärische Druck oder monotone Funktionen davon:

isobare Koordinaten: $\tilde{z} \equiv p$

σ -Druckkoordinaten: $\tilde{z} \equiv \frac{p}{p_0}$

normierte σ -Druckkoordinaten: $\tilde{z} \equiv \frac{p_0 - p}{p_0 - p_t}$

2.4.1 Isobare Koordinaten

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.107)$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = -\rho g \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.108)$$

und für $\alpha = x, y, t$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \tilde{\alpha}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.109)$$

2.108 auflösen und 2.107 ergeben

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} + \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\alpha}} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.110)$$

für $\alpha = x, y$ allein

$$\nabla_h = \tilde{\nabla}_h + \rho \tilde{\nabla}_h \tilde{\Phi} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.111)$$

Aufgabe: zeige, dass

$$\nabla_h p = \rho \tilde{\nabla}_h \tilde{\Phi} \quad (2.112)$$

Drucktendenzgleichung: mit $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{t} = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{t}} \quad (2.113)$$

totale zeitliche Ableitung:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_h \cdot \nabla_h + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \vec{v}_h \cdot \tilde{\nabla}_h + \tilde{z} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.114)$$

Mit Gleichung 2.103 erhalten wir mit Isobaren Koordinaten:

$$\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_h}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\vec{v}}_h \cdot \tilde{\nabla}_h \tilde{\vec{v}}_h + \omega \frac{\partial \tilde{\vec{v}}_h}{\partial p} + f \vec{k} \times \tilde{\vec{v}}_h = -\tilde{\nabla}_h \tilde{\Phi} \quad (2.115)$$

Für die geostrophe Näherung wird die materielle zeitliche Ableitung Null gesetzt:

$$f \vec{k} \times \tilde{\vec{v}}_h = -\tilde{\nabla}_h \tilde{\Phi} \quad (2.116)$$

Wir lösen die Gleichung nach $\tilde{\vec{v}}_h$ auf durch vektorielles Multiplizieren mit \vec{k} :

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \tilde{\vec{v}}_h) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \tilde{\vec{v}}_h)}_0 \vec{k} - \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{k})}_1 \tilde{\vec{v}}_h - \frac{1}{f} \vec{k} \times \tilde{\nabla}_h \tilde{\Phi} \quad (2.117)$$

$$\tilde{\vec{v}}_h = -\frac{1}{f} \vec{k} \times \tilde{\nabla}_h \tilde{\Phi} \quad (2.118)$$

Der geostrophe Wind ist also nicht nur parallel zu den Isobaren, sondern auch zu den Flächen gleichen Geopotentials (Isohypsen).

2.4.2 σ -Druckkoordinaten

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z p_0} = \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{p_0} \rho g \quad (2.119)$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\rho g}{p_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (2.120)$$

und für $\alpha = x, y, t$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \rho g \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.122)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} + \frac{\rho}{p_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (2.123)$$

für $\alpha = x, y$ allein

$$\nabla_h = \tilde{\nabla}_h + \frac{\rho}{p_0} \tilde{\nabla}_h \Phi \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.124)$$

Aufgabe: zeige, dass

$$\nabla_{hp} = \tilde{\nabla}_{hp} + \tilde{\nabla}_h \Phi \quad (2.125)$$

2.5 Anwendungen

2.5.1 Zyklotrophe Bilanz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{a} \tan \phi - 2v\Omega \sin \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2}{a} \tan \phi + 2u\Omega \sin \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.127)$$

Die auf der Venus beobachtete Superrotation der höheren Atmosphäre kann nun diagnostisch interpretiert werden. Die Winde sind vorwiegend zonal und horizontal, das heisst $u \gg v$ und $w = 0$, annähernd stationär:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.128)$$

ausserdem ist die Winkelgeschwindigkeit Ω der Venusrotation sehr klein. Nehmen wir zugleich an, dass die Ableitungen in x -Richtung verschwinden, dann vereinfacht sich die Gleichung (2.127) zu

$$\frac{u^2}{a} \tan \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.129)$$

Ein Windsystem mit dieser Kräftebilanz heisst zyklotrop, im Gegensatz zum geostrophischen Regime auf einem schneller rotierenden Planeten. Interessant ist die Wichtigkeit eines metrischen Termes, der die Bewegung der Atmosphäre über einer Kugeloberfläche hier wesentlich mitbestimmt.

Mit der Definition des Geopotentials, $\Phi = gz$, und den isobaren Koordinaten

$$\tilde{z} = p \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.131)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.132)$$

erhalten wir

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \quad (2.133)$$

und damit wird Gleichung (2.129) zu

$$\frac{u^2}{a} \tan \phi = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \quad (2.134)$$

Mit der hydrostatischen Grundgleichung

$$\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \quad (2.135)$$

und dem idealen Gasgesetz erhalten wir:

$$p \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial p} = -\frac{p}{\rho} = -RT \quad (2.136)$$

Wir führen neue Koordinaten ein:

$$\zeta = -\ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (2.137)$$

Diese Koordinaten entsprechen einer Proportion zur Höhe z für den Fall einer isothermen Atmosphäre mit einer Druckverteilung

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{gz}{RT} \right) \quad (2.138)$$

womit

$$\zeta = \frac{g}{RT} z \quad (2.139)$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \left(-\ln \frac{p}{p_0} \right)} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\frac{p_0}{p} \frac{\partial p}{p_0}} = -p \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial p} = RT \quad (2.140)$$

Wir differenzieren Gleichung (2.134) nach ζ (mit $\partial y = a \partial \phi$)

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u^2}{a} \tan \phi \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} RT \quad (2.141)$$

und erhalten

$$2u \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{R}{\tan \phi} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (2.142)$$

eine Gleichung für den Zusammenhang zwischen der zonalen Windgeschwindigkeit als Funktion der Höhe und dem zonalen Temperaturgradienten.

A TENSOREN

A.1 KARTESISCHE TENSOREN

A.1.1 Vektorrechnen

Zur Repetition und Einführung der Schreibweise werden hier die Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem eingeführt. Die Basisvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 parallel zu den Koordinatenachsen haben je die Länge $|\vec{e}_i| = 1$. Ein beliebiger Vektor \vec{a} kann nun als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k\vec{e}_k \equiv a_k\vec{e}_k \quad (\text{A.1})$$

Die letzte Identität legt die sog. Einstein'sche Summenkonvention fest, nach der Terme mit einem wiederholten Index über diesen Index summiert werden. Vektoren bilden eine abelsche (kommutative) additive Gruppe:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{A.3})$$

mit einem Neutralelement (Nullvektor) und dem negativen eines Vektors:

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{o} \Rightarrow \vec{b} \equiv -\vec{a} \quad (\text{A.5})$$

Weiter ist eine distributive Multiplikation mit einem Skalar definiert:

$$m \vec{a} = \vec{a} m \quad (\text{A.6})$$

$$m (n \vec{a}) = (mn) \vec{a} \quad (\text{A.7})$$

$$(m + n)\vec{a} = m \vec{a} + n \vec{a} \quad (\text{A.8})$$

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m \vec{a} + m \vec{b} \quad (\text{A.9})$$

Falls die Skalarmenge ein algebraischer Körper ist, bilden die Vektoren einen sog. Vektorraum. Ein Skalarprodukt mit der Definition:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\text{A.10})$$

$$\text{mit } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

kann als Linearkombination von Skalarprodukten der Basisvektoren geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &= a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a_k b_k,\end{aligned}\tag{A.13}$$

und ist auch kommutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}\tag{A.14}$$

A.1.2 Dyadisches Produkt

Sei \mathbf{T} eine Funktion: $\vec{b} = \mathbf{T} \cdot \vec{a}$ und $\vec{c} = \vec{a} \cdot \mathbf{T}$, die die Linearitätsbedingungen

$$\mathbf{T} \cdot (m\vec{a} + n\vec{b}) = m(\mathbf{T} \cdot \vec{a}) + n(\mathbf{T} \cdot \vec{b})\tag{A.15}$$

$$(m\vec{a} + n\vec{b}) \cdot \mathbf{T} = m(\vec{a} \cdot \mathbf{T}) + n(\vec{b} \cdot \mathbf{T})\tag{A.16}$$

erfüllt. Weiter sei eine Verknüpfung zweier derartiger Funktionen definiert:

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \vec{a} \equiv \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \vec{a})\tag{A.17}$$

$$\vec{a} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \equiv (\vec{a} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S}\tag{A.18}$$

Eine derartige lineare Funktion kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{a} = \vec{f}(\vec{g} \cdot \vec{a}) \equiv (\vec{f}\vec{g}) \cdot \vec{a}\tag{A.19}$$

$$\vec{a} \cdot \mathbf{T} = (\vec{a} \cdot \vec{f})\vec{g} \equiv \vec{a} \cdot (\vec{f}\vec{g})\tag{A.20}$$

Die Form $\mathbf{T} = \vec{f}\vec{g}$ heisst dyadisches (oder tensorielles) Produkt von \vec{f} mit \vec{g} . Mit den Gleichungen (A.19) und (A.20) folgt auch

$$\vec{f}(n\vec{g}) = (n\vec{f})\vec{g} = n(\vec{f}\vec{g})\tag{A.21}$$

Damit kann das dyadische Produkt in Komponenten geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\vec{f}\vec{g} &= f_{1g_1} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + f_{1g_2} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + f_{1g_3} \vec{e}_1 \vec{e}_3 \\ &+ f_{2g_1} \vec{e}_2 \vec{e}_1 + f_{2g_2} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + f_{2g_3} \vec{e}_2 \vec{e}_3 \\ &+ f_{3g_1} \vec{e}_3 \vec{e}_1 + f_{3g_2} \vec{e}_3 \vec{e}_2 + f_{3g_3} \vec{e}_3 \vec{e}_3 \equiv T_{ij} \vec{k}_{ij}\end{aligned}\tag{A.22}$$

Die Komponenten $T_{ij} = f_i g_j$ von \mathbf{T} sind zweifach indizierte Skalare, die Basis des Tensors, $\vec{k}_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$, besteht aus den dyadischen Produkten der Basisvektoren \vec{e}_i . Das dyadische Produkt $\mathbf{T} = \vec{f}\vec{g}$ kann als Tensor zweiter Stufe betrachtet werden, ein Vektor als Tensor

erster Stufe und ein Skalar als Tensor nullter Stufe. Analog werden Tensoren höherer Stufe definiert. Mit obigen Definitionen können folgende Rechenregeln abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \cdot \vec{a} &= (f_i g_j \vec{e}_i \vec{e}_j) \cdot (a_k \vec{e}_k) = (f_i g_j a_k) (\vec{e}_i \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k \\
&= (f_i g_j a_k) \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = (f_i g_j a_k \delta_{jk}) \vec{e}_i = (f_i g_j a_j) \vec{e}_i \\
&= (T_{ij} a_j) \vec{e}_i
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \mathbf{T} &= (a_k \vec{e}_k) \cdot (f_i g_j \vec{e}_i \vec{e}_j) = (a_k f_i g_j) \vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \vec{e}_j) \\
&= (a_k f_i g_j) (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_j = (a_i f_i g_j) \vec{e}_j \\
&= (a_i T_{ij}) \vec{e}_j
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Weiter gelten

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} &= (T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \cdot (S_{kl} \vec{e}_k \vec{e}_l) = (T_{ij} S_{kl}) (\vec{e}_i \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_k \vec{e}_l) \\
&= (T_{ij} S_{kl}) (\vec{e}_i \vec{e}_l) (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = (T_{ij} S_{jl}) (\vec{e}_i \vec{e}_i)
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = T_{ij} S_{ji} \tag{A.26}$$

A.1.3 Räumliche Ableitungen

Für die räumlichen Ableitungen wird der Nabla-Operator definiert:

$$\nabla \equiv \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{A.27}$$

Der Nabla-Operator ist ein Vektoroperator und formal gelten die gleichen Rechenregeln wie für normale Vektoren. Unter einer Divergenz einer tensoriellen Grösse \mathbf{T} verstehen wir die skalare Multiplikation $\nabla \cdot \mathbf{T}$, und unter einem Gradienten einer tensoriellen Grösse das dyadische Produkt $\nabla \mathbf{T}$. Mit diesen Definitionen werden der Gradient eines Skalarfeldes, Divergenz und Gradient eines Vektorfeldes, und die Divergenz eines Tensorfeldes zweiter Stufe zu

$$\text{grad } m = \nabla m = \frac{\partial m}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial m}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial m}{\partial x_3} \vec{e}_3 \tag{A.28}$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \tag{A.29}$$

$$\text{grad } \vec{a} = \nabla \vec{a} = \left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (a_j \vec{e}_j) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} (\vec{e}_i \vec{e}_j) \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{T} &= \nabla \cdot \mathbf{T} = \left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \\
&= \left(\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \vec{e}_k) = \left(\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \right) (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_k \\
&= \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \right) \vec{e}_k
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Analog können die Divergenz und Gradient von Tensorfeldern höherer Stufe definiert werden.

Aufgabe: beweise folgende Identitäten:

$$(\vec{a}\vec{b}) \cdot (\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a}\vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \tag{A.32}$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \vec{a}) = (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \vec{a} + \operatorname{Sp}(\mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \vec{a}) \tag{A.33}$$

A.2 TENSORANALYSIS

A.2.1 Koordinatentransformationen

Gegeben seien Kartesische Koordinaten $\mathcal{O}(x, y, z)$ und ein zweiter Satz beliebiger Koordinaten $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ mit den Transformationsgleichung

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \tilde{x}(x, y, z) & x &= x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\
\tilde{y} &= \tilde{y}(x, y, z) & y &= y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\
\tilde{z} &= \tilde{z}(x, y, z) & z &= z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Um eine kompakte Schreibweise zu erhalten, benennen wir die Variablen neu, $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$, $z \equiv x^3$, $\tilde{x} \equiv \tilde{x}^1$, und $\tilde{y} \equiv \tilde{x}^2$, $\tilde{z} \equiv \tilde{x}^3$. Gleichzeitig führen wir eine modifizierte Summenkonvention ein: Kommt in einem Term ein Index sowohl oben wie auch unten vor, dann wird über diesen Index von 1 bis 3 summiert. Ein oberer Index einer Variablen in einem Nenner gilt dabei als unterer Index. Beispiele sind

$$\frac{b^i}{a^i} = \frac{b^1}{a^1} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3}; \quad a^j c_j = a^1 c_1 + a^2 c_2 + a^3 c_3 \tag{A.35}$$

Die Differentiale eines Skalarfeldes $\phi(x, y, z) = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ werden nach der Kettenregel transformiert

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^j}; \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \tag{A.36}$$

Ein totales Differential wird wie folgt transformiert:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^i; \quad d\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j \tag{A.37}$$

Entsprechend Gleichung (A.36) führen wir Basisvektoren $\vec{e}^i = \vec{e}_i$ in kartesischen Koordinaten (x^i) ein. Um die Summenkonvention konsequent anwenden zu können, werden Basisvektoren mit oberen und mit unteren Indizes verwendet. In Kartesischen Koordinaten können wir die beiden Arten von Basisvektoren einander gleichsetzen. Die Unterscheidung gewinnt erst in nicht-Kartesischen Koordinatensystemen Bedeutung, ist aber für eine konsequente Schreibweise schon hier notwendig. Die totalen Koordinatendifferentiale und der Gradient eines Skalarfeldes können jetzt mit Verwendung von Gleichung (A.36) wie folgt geschrieben werden:

$$d\vec{x} = dx^i \vec{e}_i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j \right) \vec{e}_i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \vec{e}_i \right) d\tilde{x}^j \equiv d\tilde{x}^j \vec{\tau}_j \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \vec{e}^i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^j} \vec{e}^i = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^j} \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \vec{e}^i \right) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^j} \vec{\eta}^j \quad (\text{A.39})$$

Die mit der letzten Identität definierten Symbole $\vec{\tau}_j$ und $\vec{\eta}^j$ können als die beiden Arten Basisvektoren in den Koordinaten $\tilde{O}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ identifiziert werden:

$$\vec{\eta}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \vec{e}^i ; \quad \vec{\tau}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \vec{e}_i \quad (\text{A.40})$$

Gleichungen (A.40) geben gleichzeitig die Transformationsregeln für die Basisvektoren. Die Vektoren $\vec{\eta}^j$ transformieren gleich wie die totalen Koordinatendifferentiale und die Vektoren $\vec{\tau}_j$ wie die Differentiale eines Skalarfeldes. Die Basis $\vec{\eta}^j$ heisst deshalb die kovariante Basis, $\vec{\tau}_j$ die kontravariante Basis. Die Umkehrtransformationen können entsprechend gefunden werden:

$$d\vec{x} = d\tilde{x}^i \vec{\tau}_i = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j \right) \vec{\tau}_i = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \vec{\tau}_i \right) dx^j \equiv dx^j \vec{e}_j \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla \vec{\phi} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\eta}^i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x^j} \vec{\eta}^i = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\eta}^i \right) \equiv \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x^j} \vec{e}^j \quad (\text{A.42})$$

$$\vec{e}^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\eta}^i ; \quad \vec{e}_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \vec{\tau}_i \quad (\text{A.43})$$

Entsprechend den Vektoren in Kartesischen Koordinaten soll ein Skalarprodukt definiert werden, vorerst mit den Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_j \cdot \vec{\eta}^i &= \left(\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \vec{e}_l \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \vec{e}^k \right) = (\vec{e}_l \cdot \vec{e}^k) \left(\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \tilde{x}^j} = \delta_j^i \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Ein beliebiger Vektor kann jetzt mit seinen Kartesischen Komponenten beschrieben werden: $\vec{f} = f_i \vec{e}^i = f^j \vec{e}_j$ mit $f_i = f^i$. Die vektorielle Schreibweise, \vec{f} , ist koordinatenunabhängig. Der Vektor in Komponentenschreibweise in transformierten Koordinaten heisst dann:

$$\vec{f} = \tilde{f}_i \tilde{\eta}^i = \tilde{f}^j \tilde{\tau}_j \quad (\text{A.45})$$

Damit werden die Vektorkomponenten in den transformierten Koordinaten zu:

$$\vec{f} = \tilde{f}_i \tilde{\eta}^i = \tilde{f}_i \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \vec{e}^j \right) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \tilde{f}_i \right) \vec{e}^j = f_j \vec{e}^j \quad (\text{A.46})$$

$$\vec{f} = f_i \vec{e}^i = f_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{\eta}^j \right) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} f_i \right) \tilde{\eta}^j = \tilde{f}^j \tilde{\eta}^j \quad (\text{A.47})$$

Daraus folgen die Transformationsgesetze für kovariante Vektorkomponenten:

$$f_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \tilde{f}_i ; \quad \tilde{f}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} f_j \quad (\text{A.48})$$

Aufgabe: beweise die entsprechenden Transformationsgesetze für die kontravarianten Vektorkomponenten:

$$\tilde{f}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} f^i ; \quad f^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{f}^j \quad (\text{A.49})$$

Das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren wird mit (A.45) zu

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = (\tilde{\eta}^i \cdot \tilde{\tau}_j) \tilde{f}_i \tilde{g}^j = \tilde{f}_i \tilde{g}^i \quad (\text{A.50})$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist invariant unter Koordinatentransformation:

$$\tilde{f}_i \tilde{g}^i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} f_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} g^k = f_j g^k \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} = f_j g^j \quad (\text{A.51})$$

Das dyadische Produkt zweier Vektoren wird wie folgt transformiert:

$$\begin{aligned} \vec{f} \vec{g} &= f_i g_j (\vec{e}^i \vec{e}^j) \equiv T_{ij} (\vec{e}^i \vec{e}^j) \\ &= f_i g_j \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{\eta}^m \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} \tilde{\eta}^n \right) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} T_{ij} (\tilde{\eta}^m \tilde{\eta}^n) \\ &= \tilde{T}_{mn} (\tilde{\eta}^m \tilde{\eta}^n) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Daraus folgt die Transformationsgleichung für kovariante Komponenten eines Tensors 2. Stufe:

$$\tilde{T}_{mn} = \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^n} T_{rs} \quad (\text{A.53})$$

Analog ergibt sich die Transformation von kontravarianten oder gemischten Komponenten von Tensoren 2. Stufe:

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{mn} &= \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^s} T^{rs} \\ \tilde{T}_n^m &= \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^n} T_s^r\end{aligned}\tag{A.54}$$

A.2.2 Der Metriktensor

Der Abstand zwischen zwei Punkten in Kartesischen Koordinaten ist

$$\Delta s^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \equiv \sum_i (\Delta x^i)^2\tag{A.55}$$

Differentiell geschrieben wird somit ein Linienelement zu

$$\begin{aligned}(dS)^2 &= \sum_i (dx^i)^2 = \sum_i \left[\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k \right) \right] \\ &= \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^j d\tilde{x}^k \equiv \tilde{G}_{jk} d\tilde{x}^j d\tilde{x}^k\end{aligned}\tag{A.56}$$

Mit dieser Ueberlegung führen wir den Metriktensor \mathbf{G} ein:

$$\mathbf{G} = \tilde{G}_{jk} \mathbf{k}^j \mathbf{k}^k \equiv \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} (\vec{\eta}^j \cdot \vec{\eta}^k)\tag{A.57}$$

Aufgabe: zeige, dass

$$\mathbf{G}^{-1} = (\tilde{G}^{jk}) = \left(\sum_i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \right)\tag{A.58}$$

der inverse Metriktensor ist: $\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^{-1} = (\tilde{G}_{jk} \tilde{G}^{jl}) = (\delta_k^l)$

Mit dem Metriktensor können kovariante Komponenten in kontravariante Komponenten umgewandelt werden, und umgekehrt:

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{jk} \tilde{f}_j &= \sum_m \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} f_i = \sum_m \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} f_i \\ &= \sum_m \delta_m^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} f_i = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} f^i = \tilde{f}^k\end{aligned}\tag{A.59}$$

oder zusammenfassend:

$$\tilde{G}^{jk} \tilde{f}_j = \tilde{f}^k ; \quad \tilde{G}_{jk} \tilde{f}^j = \tilde{f}_k\tag{A.60}$$

Aufgabe: zeige, dass

$$\vec{\eta}^j = \tilde{G}^{ij} \vec{\tau}_i \quad ; \quad \vec{\tau}_j = \tilde{G}_{ij} \vec{\eta}^i \quad (\text{A.61})$$

Bei Tensoren 2. Stufe gilt entsprechend:

$$\tilde{G}^{lj} \tilde{B}_{jk} = \tilde{B}_k^l \quad ; \quad \tilde{G}_{lj} \tilde{B}^{jk} = \tilde{B}_l^k \quad (\text{A.62})$$

Damit kann das Skalarprodukt zweier Vektoren auch mit gleichartigen (kovarianten oder kontravarianten) Komponenten geschrieben werden:

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \tilde{f}_i \tilde{g}^i = \tilde{G}_{ij} \tilde{f}^j \tilde{g}^i = \tilde{G}^{ij} \tilde{f}_i \tilde{g}_j \quad (\text{A.63})$$

Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ergibt das Quadrat seiner Länge in kartesischen Koordinate. Wegen der Invarianz des Skalarproduktes bei Koordinatentransformationen gilt das in beliebigen Koordinaten:

$$\vec{f} \cdot \vec{f} = \tilde{G}^{ij} \tilde{f}_i \tilde{f}_j = |\vec{f}|^2 \quad (\text{A.64})$$

A.2.3 Kovariante Ableitung

Betrachten wir die partielle Ableitung der Basisvektoren:

$$\frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial \tilde{x}^l} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^l} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \vec{e}_i \right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^j} \vec{e}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \vec{\tau}_s \equiv \tilde{\Gamma}_{lj}^s \vec{\tau}_s \quad (\text{A.65})$$

Das so definierte Christoffel-Symbol ist symmetrisch in den beiden unteren Indizes: $\tilde{\Gamma}_{lj}^s = \tilde{\Gamma}_{jl}^s$. Analog sei

$$\frac{\partial \vec{\eta}^i}{\partial \tilde{x}^j} = \hat{\Gamma}_{js}^i \vec{\eta}^s \quad (\text{A.66})$$

Um die Bedeutung des Symbols $\hat{\Gamma}_{jk}^i$ zu ermitteln, leiten wir das Skalarprodukt der Basisvektoren ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} (\vec{\eta}^i \cdot \vec{\tau}_j) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} (\delta_j^i) = 0 = \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial \tilde{x}^k} \cdot \vec{\eta}^i + \frac{\partial \vec{\eta}^i}{\partial \tilde{x}^k} \cdot \vec{\tau}_j \\ &= \tilde{\Gamma}_{jk}^s (\vec{\tau}_s \cdot \vec{\eta}^i) + \hat{\Gamma}_{kr}^i (\vec{\eta}^r \cdot \vec{\tau}_j) = \tilde{\Gamma}_{jk}^i + \hat{\Gamma}_{jk}^i \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

$$\frac{\partial \vec{\eta}^i}{\partial \tilde{x}^j} = -\tilde{\Gamma}_{js}^i \vec{\eta}^s \quad (\text{A.68})$$

Skalare Multiplikation von Gleichung (A.65) mit $\vec{\eta}^k$, respektive von Gleichung (A.68) mit $\vec{\tau}_k$ ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial \tilde{x}^l} \cdot \vec{\eta}^k &= \tilde{\Gamma}_{jl}^s (\vec{\tau}_s \cdot \vec{\eta}^k) = \tilde{\Gamma}_{jl}^s \delta_s^k = \tilde{\Gamma}_{jl}^k \\ \frac{\partial \vec{\eta}^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \vec{\tau}_k &= -\tilde{\Gamma}_{jk}^i\end{aligned}\tag{A.69}$$

Aufgaben:

1) zeige:

$$\tilde{\Gamma}_{lm}^k = \frac{1}{2} \tilde{G}^{kn} \left(\frac{\partial \tilde{G}_{mn}}{\partial \tilde{x}^l} + \frac{\partial \tilde{G}_{nl}}{\partial \tilde{x}^m} - \frac{\partial \tilde{G}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n} \right)\tag{A.70}$$

2) Kugelkoordinaten: $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \Rightarrow (r, \phi, \lambda) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ mit $x = r \cos \phi \cos \lambda$, $y = r \cos \phi \sin \lambda$ und $z = r \sin \phi$.

berechne: $\vec{\eta}^i$, $\vec{\tau}_k$, \tilde{G}_{ij} , \tilde{G}^{ij} , Γ_{lm}^k

Partielle Ableitung von Vektorkomponenten ergibt

$$\frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial \tilde{x}^m} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^m} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} f_j \right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^l} f_j + \frac{\partial f_j}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l}\tag{A.71}$$

woraus mit der Gleichung (A.48) für die Transformation von kovarianten Vektorkomponenten und der Kettenregel

$$\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \tilde{x}^m} = \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial f_j}{\partial x^r}\tag{A.72}$$

folgt:

$$\frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial \tilde{x}^m} - \frac{\partial^2 x^j}{\tilde{x}^m \partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^j} \tilde{f}_s = \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial f_j}{\partial x^r}\tag{A.73}$$

Gleichung (A.73) zeigt, dass die partiellen Ableitungen von Vektorkomponenten keine Tensorcomponenten sind, da sie nicht wie Tensorcomponenten transformiert werden. Wir definieren die kovariante Ableitung von kovarianten Vektorkomponenten:

$$\tilde{f}_{l;m} \equiv \frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial \tilde{x}^m} - \frac{\partial^2 x^j}{\tilde{x}^m \partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^j} \tilde{f}_s = \frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial \tilde{x}^m} - \tilde{\Gamma}_{ml}^s \tilde{f}_s\tag{A.74}$$

und analog die kovarianten Ableitungen von kontravarianten Vektorkomponenten:

$$\tilde{f}^l_{;m} \equiv \frac{\partial \tilde{f}^l}{\partial \tilde{x}^m} + \tilde{\Gamma}_{ms}^l \tilde{f}^s\tag{A.75}$$

Um die Bedeutung der kovarianten Ableitung zu ermitteln, berechnen wir die partielle Ableitung eines Vektors $\vec{f} = \tilde{f}^j \vec{\tau}_j$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\tau}_j + \tilde{f}^j \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial \tilde{x}^i} \quad (\text{A.76})$$

woraus mit Gleichung (A.65):

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\tau}_j + \tilde{f}^j \tilde{\Gamma}_{ij}^k \vec{\tau}_k = \left(\frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial \tilde{x}^i} + \tilde{f}^k \tilde{\Gamma}_{ik}^j \right) \vec{\tau}_j = \tilde{f}_{;i}^j \vec{\tau}_j \quad (\text{A.77})$$

Dies ist ein wichtiges Resultat:

Die Komponenten der partiellen Ableitung eines Vektors sind die kovarianten Ableitungen der Komponenten dieses Vektors.

Die kovarianten Ableitungen sind Tensoren 2. Stufe, d.h. ihre Komponenten transformieren sich wie Komponenten von Tensoren. Zum Beweis rechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{f}^k &= - \frac{\partial \tilde{\eta}^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \vec{\tau}_k \tilde{f}^k \\ &= - \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^q} \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l} \vec{e}^l \right) \cdot \left(\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^k} \vec{e}_n \right) \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} f^m \\ &= - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^q \partial x^l} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} \delta_m^n \delta_n^l f^m \\ &= - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^q \partial x^m} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} f^m \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Damit ergibt Gleichung (A.75)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{;j}^i &\equiv \frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial \tilde{x}^j} + \tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{f}^k \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} f^m + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial f^m}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^q \partial x^m} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} f^m \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial f^m}{\partial x^l} \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

das dem Transformationsverhalten von Tensorcomponenten entspricht, da in Kartesischen Koordinaten die partielle Ableitung der Vektorkomponenten gleich ist wie die kovariante Ableitung. Die gleiche Ueberlegung, aber mit einer Transformation von beliebigen Koordinaten in beliebige andere Koordinaten ergibt folgendes:

$$\bar{\Gamma}_{ik}^j \bar{f}^k = - \frac{\partial \bar{\epsilon}^j}{\partial \bar{x}^i} \bar{\theta}_k \bar{f}^k$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^q} \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^l} \tilde{\eta}^l \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \bar{x}^k} \tilde{\tau}_n \right) \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{f}^m \\
&= -\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^q \partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} \delta_m^n \delta_n^l \tilde{f}^m + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} \delta_m^n \tilde{\Gamma}_{qn}^l \tilde{f}^m \\
&= \left(-\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^q \partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} \tilde{\Gamma}_{qm}^l \right) \tilde{f}^m \tag{A.80}
\end{aligned}$$

Damit ergibt Gleichung (A.75)

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{;j}^i &\equiv \frac{\partial \bar{f}^i}{\partial \bar{x}^j} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \bar{f}^k \\
&= \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial \bar{x}^j} \tilde{f}^m + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial \tilde{x}^l} \\
&+ \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} \tilde{\Gamma}_{qm}^l - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^q \partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial \bar{x}^j} \right) \tilde{f}^m \\
&= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial \bar{x}^j} \left(\frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial \tilde{x}^l} + \tilde{\Gamma}_{qr}^l \tilde{f}^r \right) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial \bar{x}^j} \tilde{f}_{;l}^m \tag{A.81}
\end{aligned}$$

das dem Transformationsverhalten von Tensorkomponenten entspricht. Aus Gleichungen (A.80) und (A.49) folgt weiter:

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{mn}^l \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^n} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \bar{x}^k} \tag{A.82}$$

woraus ersichtlich ist, dass die Christoffel-Symbole Γ_{mn}^l keine Tensoren sind. Der rechte Term in Gleichung (A.82) stört das Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole. Analog zu den kovarianten und kontravarianten Komponenten von Vektoren sind die kovarianten Ableitungen der Tensorkomponenten, z.B. für Tensoren 2. Stufe:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{ij;k} &= \frac{\partial \tilde{T}_{ij}}{\partial \tilde{x}^k} - \tilde{\Gamma}_{ik}^m \tilde{T}_{mj} - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{T}_{im} \\
\tilde{T}_{j;k}^i &= \frac{\partial \tilde{T}_j^i}{\partial \tilde{x}^k} + \tilde{\Gamma}_{km}^i \tilde{T}_j^m - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{T}_m^i \\
\tilde{T}_{i;k}^j &= \frac{\partial \tilde{T}_i^j}{\partial \tilde{x}^k} - \tilde{\Gamma}_{ik}^m \tilde{T}_m^j + \tilde{\Gamma}_{km}^j \tilde{T}_i^m \\
\tilde{T}_{;k}^{ij} &= \frac{\partial \tilde{T}^{ij}}{\partial \tilde{x}^k} + \tilde{\Gamma}_{km}^i \tilde{T}^{mj} + \tilde{\Gamma}_{km}^j \tilde{T}^{im} \tag{A.83}
\end{aligned}$$

Weiter sei der Tensor $\mathbf{T} = \vec{f}\vec{g}$ das dyadische Produkt der Vektoren \vec{f} und \vec{g} , dann gilt die Produktregel auch für kovariante Ableitungen der Komponenten eines dyadischen Produktes von Vektoren:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{k;i}^j &= (\tilde{f}_k \tilde{g}^j)_{;i} = \frac{\partial(\tilde{f}_k \tilde{g}^j)}{\partial \tilde{x}^i} - \tilde{\Gamma}_{ki}^s \tilde{f}_s \tilde{g}^j + \tilde{\Gamma}_{iu}^j \tilde{f}_k \tilde{g}^u \\
&= \tilde{g}^j \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^i} - \tilde{\Gamma}_{ki}^s \tilde{f}_s \tilde{g}^j + \tilde{f}_k \frac{\partial \tilde{g}^j}{\partial \tilde{x}^i} + \tilde{\Gamma}_{iu}^j \tilde{f}_k \tilde{g}^u = \tilde{g}^j \tilde{f}_{k;i} + \tilde{f}_k \tilde{g}_{;i}^j
\end{aligned} \tag{A.84}$$

A.2.4 Differentialoperatoren

Der Nabla-Operator wird wie ein Vektor transformiert:

$$\begin{aligned}
\nabla &\equiv \tilde{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{\eta}^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \\
&= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{\eta}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \delta_k^j \tilde{\eta}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{\eta}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}
\end{aligned} \tag{A.85}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes u ist damit:

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{\eta}^k \tag{A.86}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes \vec{v} :

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} = \left(\tilde{\eta}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right) \cdot (\tilde{v}^j \vec{\tau}_j) \\
&= \tilde{\eta}^i \cdot \left(\frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\tau}_j + \tilde{v}^j \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial \tilde{x}^i} \right) = \tilde{\eta}^i \cdot \left(\frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial \tilde{x}^i} \vec{\tau}_j + \tilde{v}^j \tilde{\Gamma}_{ji}^k \vec{\tau}_k \right) \\
&= (\tilde{\eta}^i \cdot \vec{\tau}_k) \left(\frac{\partial \tilde{v}^k}{\partial \tilde{x}^i} + \tilde{v}^j \tilde{\Gamma}_{ji}^k \right) = \tilde{v}_{;i}^k (\tilde{\eta}^i \cdot \vec{\tau}_k) = \tilde{v}_{;i}^i
\end{aligned} \tag{A.87}$$

Der Gradient eines Vektorfeldes \vec{v} und eines Tensorfeldes \mathbf{T} :

$$\text{grad } \vec{v} = \nabla \vec{v} = \tilde{\eta}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} (\tilde{v}^j \vec{\tau}_j) = \tilde{v}_{;i}^j (\tilde{\eta}^i \vec{\tau}_j) \tag{A.88}$$

$$\text{grad } \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} = \tilde{T}_{;k}^{ij} (\tilde{\eta}^k \vec{\tau}_i \vec{\tau}_j) \tag{A.89}$$

Aufgabe: schreibe entsprechend die Divergenz eines Tensors 2. Stufe

Weiterführende Literatur: Lichnerowicz (1966), Klingbeil (1966), Pielke (1984), Pichler (1984)

B KOORDINATEN-TRANSFORMATION

Gegeben seien Kartesische Koordinaten (x, y, z) und die Zeit t , und ein zweiter Satz beliebiger Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ und die Zeit \tilde{t} , mit den Transformationsgleichung

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{x}(x, y, z, t) & \tilde{y} &= \tilde{y}(x, y, z, t) \\ \tilde{z} &= \tilde{z}(x, y, z, t) & \tilde{t} &= \tilde{t}(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

Die Differentiale eines Skalarfeld $\phi(x, y, z, t) = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ werden nach der Kettenregel

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}}\tag{B.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}}\tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}}\tag{B.4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}}\tag{B.5}$$

B.1 GELAENDEFOLGENDE KOORDINATEN

B.1.1 Transformationsgleichungen

Ein für numerische Modellierung der Atmosphäre oft benutztes Beispiel ist die Transformation die die lokale vertikale Ausdehnung auf die Einheit abbildet und die vertikale Metrik örtlich verändert:

$$\tilde{x} = x ; \quad \tilde{y} = y ; \quad \tilde{z} = f(z^*) ; \quad z^* = \frac{z - b}{s - b}\tag{B.6}$$

wobei $f = f(\cdot)$ eine monotone Funktion mit $f(1) = 1$ und $f(0) = 0$ sein soll. Eine bei mesoskaligen Atmosphärenmodellen oft verwendete Funktion,

$$\tilde{z} = \frac{1}{\ln(1 + A)} \ln(1 + Az^*), \quad A \neq 0\tag{B.7}$$

erlaubt, das Gebiet in Bodennähe zu strecken oder zu stauchen. Falls $z^* \equiv \tilde{z}$, dann wird ein reguläres vertikales Gitter auf ein gestrecktes reguläres Gitter abgebildet:

$$\tilde{x} = x ; \quad \tilde{y} = y ; \quad \tilde{z} = \frac{z - b(x, y, t)}{s(x, y, t) - b(x, y, t)}\tag{B.8}$$

Die Transformationen (B.6) und (B.8) haben die Form $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$ und $\tilde{z} = \tilde{z}(x, y, z, t)$. Die ersten und die zweiten Ableitungen werden mit $\alpha = x, y$:

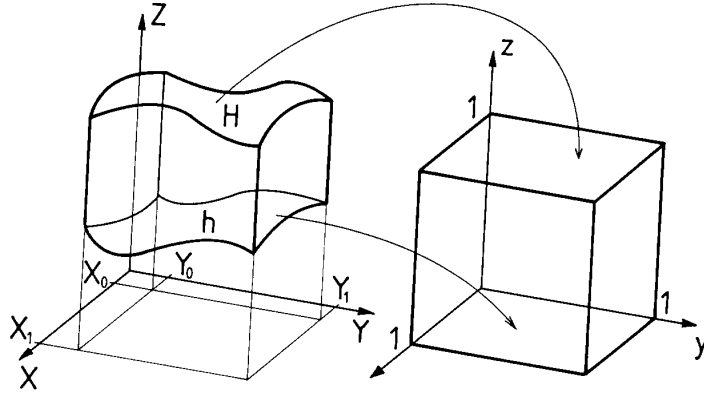


Abbildung B.1: Geländefolgende Koordinaten.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \alpha} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}, \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} + 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\alpha} \partial \tilde{z}} \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \alpha} \right) \right] \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}, \quad (\text{B.12})$$

und die zeitliche Ableitung

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}. \quad (\text{B.13})$$

B.1.2 Beispiel Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (\text{B.14})$$

Damit bekommt die Wärmeleitungsgleichung in den geländefolgenden Koordinaten die folgende Form:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = A \left(\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + C \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2} + D \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} + E \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} + H \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} \quad (\text{B.15})$$

mit

$$A = k \quad (\text{B.16})$$

$$C = k \left[\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{B.17})$$

$$D = 2k \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \quad (\text{B.18})$$

$$E = 2k \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \quad (\text{B.19})$$

$$H = k \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

$$+ k \left[\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \quad (\text{B.21})$$

B.1.3 Metriktensor und Christoffel-Symbole

Die Komponenten der Jacobi Matrix bekommen für die geländefolgenden Koordinaten (B.8) die Form:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \frac{1}{\tilde{s} - \tilde{b}} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} = - \frac{(1 - \tilde{z}) \tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z} \tilde{s}_{\tilde{x}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} = - \frac{(1 - \tilde{z}) \tilde{b}_{\tilde{y}} + \tilde{z} \tilde{s}_{\tilde{y}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} \quad (\text{B.24})$$

und die zeitliche Ableitung:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{t}} = - \frac{(1 - \tilde{z}) \tilde{b}_{\tilde{t}} + \tilde{z} \tilde{s}_{\tilde{t}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} \quad (\text{B.25})$$

wobei ein Index \tilde{x} , \tilde{y} oder \tilde{t} die partielle Ableitung nach der entsprechenden Variablen bedeutet.

Aufgabe: Berechne die in der transformierten Wärmeleitungsgleichung vorkommenden Koeffizienten

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \quad (\text{B.26})$$

Der kontravariante und der kovariante Metriktensor sind:

$$\tilde{G}_{jk} = \begin{pmatrix} 1 + [(1 - \tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}}]^2 & \text{sym} & \text{sym} \\ [(1 - \tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}}] [(1 - \tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{y}}] & 1 + [(1 - \tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{y}}]^2 & \text{sym} \\ [(1 - \tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}}] (\tilde{s} - \tilde{b}) & [(1 - \tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}}] (\tilde{s} - \tilde{b})^2 & \tilde{s} - \tilde{b} \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

$$\tilde{G}^{jk} = \begin{pmatrix} 1 & \text{sym} & \text{sym} \\ 0 & 1 & \text{sym} \\ -\frac{(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & -\frac{(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{y}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & \frac{[(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}}]^2 + [(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{y}}]^2 + 1}{\tilde{s} - \tilde{b}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

und die entsprechenden Christoffel-Symbole:

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^1 = \tilde{\Gamma}_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^3 = \begin{pmatrix} \frac{(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}\tilde{x}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & \text{sym} & \text{sym} \\ \frac{(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{x}\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{x}\tilde{y}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & \frac{(1-\tilde{z})\tilde{b}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \tilde{z}\tilde{s}_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & \text{sym} \\ \frac{\tilde{s}_{\tilde{x}} - \tilde{b}_{\tilde{x}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & \frac{\tilde{s}_{\tilde{y}} - \tilde{b}_{\tilde{y}}}{\tilde{s} - \tilde{b}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

B.2 KUGELKOORDINATEN

B.2.1 Basis und Metrik

Die Transformation zwischen Kugelkoordinaten (r, ϕ, λ) und Kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist gegeben durch

$$x = r \cos \phi \cos \lambda \quad (\text{B.31})$$

$$y = r \cos \phi \sin \lambda \quad (\text{B.32})$$

$$z = r \sin \phi \quad (\text{B.33})$$

Damit ist r der Abstand eines betrachteten Punktes zu einem Nullpunkt mit $x = y = z = 0$, ϕ ist ein Breitenwinkel und λ ein Längenwinkel, entsprechend den geographischen Koordinaten auf der Erde. Um die Notation mit indizierten Variablen zurückzugewinnen, werden die folgenden Identitäten definiert:

$$x = x^1 ; \quad y = x^2 ; \quad z = x^3 \quad (\text{B.34})$$

$$r = \tilde{x}^1 ; \quad \phi = \tilde{x}^2 ; \quad \lambda = \tilde{x}^3 \quad (\text{B.35})$$

Mit diesen Vorbereitungen können sofort die Komponenten des Metrikensors gerechnet werden, entsprechend Gleichung (A.57):

$$\tilde{G}_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2 \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.36})$$

$$\tilde{G}^{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

Die Christoffel Symbole werden mit Vorteil mit Hilfe der Gleichung (A.70) berechnet:

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \cos^2 \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.39})$$

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\tan \phi \\ \frac{1}{r} & -\tan \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.40})$$

Die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren in Kugelkoordinaten lassen sich nach Gleichung (A.40) als Linearkombination der kartesischen normierten Basisvektoren schreiben:

$$\vec{\tau}_r = \cos \phi \cos \lambda \vec{e}_x + \cos \phi \sin \lambda \vec{e}_y + \sin \phi \vec{e}_z \quad (\text{B.41})$$

$$\vec{\tau}_\phi = r \sin \phi \cos \lambda \vec{e}_x - r \sin \phi \sin \lambda \vec{e}_y + r \cos \phi \vec{e}_z \quad (\text{B.42})$$

$$\vec{\tau}_\lambda = -r \cos \phi \sin \lambda \vec{e}_x + r \cos \phi \cos \lambda \vec{e}_y \quad (\text{B.43})$$

$$\vec{\eta}^r = \vec{\tau}_r \quad (\text{B.44})$$

$$\vec{\eta}^\phi = \frac{1}{r^2} \vec{\tau}_\phi \quad (\text{B.45})$$

$$\vec{\eta}^\lambda = \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \vec{\tau}_\lambda \quad (\text{B.46})$$

Die kovarianten Basisvektoren sind kollinear mit den entsprechenden kontravarianten Basisvektoren. Mit diesem Resultat und Gleichung (A.44) ist ersichtlich, dass die Basisvektoren in Kugelkoordinaten paarweise orthogonal sind. Kugelkoordinaten sind demnach orthogonale Koordinaten. Das zeigt sich auch darin, dass der Metriktensor diagonal ist. Die Basisvektoren sind allerdings nicht normiert, denn ihre Länge (Norm) ist

$$\|\vec{\tau}_i\| = \sqrt{G^{ii}} \quad (\text{B.47})$$

$$\|\vec{\tau}_r\| = 1 \quad ; \quad \|\vec{\eta}^r\| = 1 \quad (\text{B.48})$$

$$\|\vec{\tau}_\phi\| = r \quad ; \quad \|\vec{\eta}^\phi\| = \frac{1}{r} \quad (\text{B.49})$$

$$\|\vec{\tau}_\lambda\| = r \cos \phi \quad ; \quad \|\vec{\eta}^\lambda\| = \frac{1}{r \cos \phi} \quad (\text{B.50})$$

Physikalische vektorielle Grössen müssen auf eine Einheitsbasis bezogen werden. Jeder Vektor \vec{f} kann als Produkt seiner Norm $\|\vec{f}\|$ und dem kollinearen Einheitsvektor \vec{f}_e geschrieben werden:

$$\vec{f} = \|\vec{f}\| \vec{f}_e \quad (\text{B.51})$$

Die Komponenten eines Vektors \vec{f} können entsprechen auf eine normierte Basis bezogen werden:

$$\vec{f} = \tilde{f}^i \|\vec{\tau}_i\| \vec{\tau}_{ei} \equiv \bar{f}^i \vec{\tau}_{ei} \quad (\text{B.52})$$

$$\vec{f} = \tilde{f}_i \|\vec{\eta}^i\| \vec{\eta}_e^i \equiv \bar{f}_i \vec{\eta}_e^i \quad (\text{B.53})$$

Im Falle der orthogonalen Kugelkoordinaten gilt damit

$$\bar{f}^i = \bar{f}_i \quad (\text{B.54})$$

Die physikalischen Komponenten eines Vektors in Kugelkoordinaten, bezogen auf Einheitsbasis, sollen im folgenden mit den Indizes r , ϕ und λ geschrieben werden:

$$f_r \equiv \bar{f}_1 = \bar{f}^1 \quad ; \quad f_\phi \equiv \bar{f}_2 = \bar{f}^2 \quad ; \quad f_\lambda \equiv \bar{f}_3 = \bar{f}^3 \quad (\text{B.55})$$

B.2.2 Differentialoperatoren

Der Gradient eines Skalarfeldes folgt direkt aus Gleichung (A.86), und ist als physikalische Komponenten geschrieben:

$$(\text{grad } u)_r = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \quad ; \quad (\text{grad } u)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} \quad ; \quad (\text{grad } u)_\lambda = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} \quad (\text{B.56})$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes folgt direkt aus Gleichung (A.87)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} = (\tilde{v}_{;i}^j)(\tilde{\eta}^j \cdot \vec{\tau}_i) \\
&= \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{2}{r}v^1 + \frac{\partial \tilde{v}^3}{\partial \tilde{x}^3} - \tan \phi v_\phi
\end{aligned} \tag{B.57}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{\tan \phi}{r}v_\phi \tag{B.58}$$

Der Gradient eines Vektorfeldes folgt direkt aus Gleichung (A.88). Die einzelnen Komponenten der kovarianten Ableitung sind:

$$\tilde{v}_{;1}^1 = \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial r} \tag{B.59}$$

$$\tilde{v}_{;1}^2 = \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{v}^2 \tag{B.60}$$

$$\tilde{v}_{;1}^3 = \frac{\partial \tilde{v}^3}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{v}^3 \tag{B.61}$$

$$\tilde{v}_{;2}^1 = \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \phi} - r\tilde{v}^2 \tag{B.62}$$

$$\tilde{v}_{;2}^2 = \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\tilde{v}^1 \tag{B.63}$$

$$\tilde{v}_{;2}^3 = \frac{\partial \tilde{v}^3}{\partial \phi} - \tan \phi \tilde{v}^3 \tag{B.64}$$

$$\tilde{v}_{;3}^1 = \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \lambda} - r \cos^2 \phi \tilde{v}^3 \tag{B.65}$$

$$\tilde{v}_{;3}^2 = \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \lambda} - \sin \phi \cos \phi \tilde{v}^3 \tag{B.66}$$

$$\tilde{v}_{;3}^3 = \frac{\partial \tilde{v}^3}{\partial \lambda} + \frac{1}{r}\tilde{v}^1 + \tan \phi \tilde{v}^2 \tag{B.67}$$

B.2.3 Bilanzgleichungen in Kugelkoordinaten

Mit diesen Vorbereitungen können jetzt die Bilanzgleichungen (1.4) geschrieben werden. Dazu muss unterschieden werden, ob die entsprechende physikalische Grösse eine skalare (Masse, Energie) oder eine vektorielle Grösse (Impuls) ist. Für skalare Variablen ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{v}^j) + \tilde{\psi} \tilde{v}_{;j}^j = (\tilde{\phi}_\psi)_{;j}^j + \tilde{\pi} + \tilde{\sigma} \tag{B.68}$$

und für vektorielle Variablen:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}^j}{\partial t} \vec{\tau}_j = \tilde{\psi}_{;k}^j \tilde{v}^k \vec{\tau}_j + \tilde{\psi}^j \tilde{v}_{;k}^k \vec{\tau}_j = \tilde{\Phi}_{;k}^{kj} \vec{\tau}_j + (\tilde{\pi}^j + \tilde{\sigma}^j) \vec{\tau}_j \quad (\text{B.69})$$

Damit wird die Massenbilanz in Kugelkoordinaten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} + \frac{2\rho}{r} v_r + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\rho \tan \phi}{r} v_\phi \quad (\text{B.70})$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi \cos \phi) + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda) \quad (\text{B.71})$$

und die Navier-Stokes Gleichungen für ideale Flüssigkeiten in (nicht-rotierenden) Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ - \frac{uv}{a+z} \tan \phi + \frac{uw}{a+z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ + \frac{vw}{a+z} + \frac{u^2}{a+z} \tan \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ - \frac{u^2 + v^2}{a+z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

wobei folgende Abkürzungen verwendet wurden:

$$\begin{aligned} \partial x &= r \cos \phi \partial \lambda & v_\lambda &= u \\ \partial y &= r \partial \phi & v_\phi &= v \\ \partial z &= \partial r & v_r &= w. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

B.3 Divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder

In vielen Fällen ist die horizontale Komponente der Windgeschwindigkeit viel grösser als die vertikale, und entsprechend die relative Druck-, respektive Dichteänderung entlang einer Flusslinie klein. In diesen Fällen kann das Windfeld annähernd als divergenzfreies Vektorfeld beschrieben werden. Ein Windfeld, das aufgrund von Messungen durch Interpolation gewonnen werden kann, erfüllt diese Eigenschaft im allgemeinen nicht. Die folgende Methode erlaubt, ein nicht-divergenzfreies Feld durch minimale Modifikationen in ein divergenzfreies Feld zu verwandeln. Sei \vec{u}_0 das aus Messungen interpolierte, und \vec{u} das gewünschte divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld:

$$\nabla \vec{u} = 0. \quad (\text{B.76})$$

Die gesuchte Differenz ist dann

$$\vec{c} = \vec{u} - \vec{u}_0, \quad (\text{B.77})$$

und mit Gleichung (B.76) wird damit

$$\nabla \vec{c} = -\nabla \vec{u}_0. \quad (\text{B.78})$$

Es soll nun gefordert werden, dass die Rotation des Vektorfeldes lokal erhalten bleibt:

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times \vec{u}_0 \quad (\text{B.79})$$

Weiter unten wird gezeigt, dass diese Bedingung die Varianz der Differenz \vec{c} minimalisiert. Mit Gleichung (B.79) folgt weiter

$$\nabla \times \vec{c} = 0. \quad (\text{B.80})$$

Die Rotation eines Gradientenfeldes ist Null, und mit dieser Tatsache kann der Ansatz

$$\vec{c} = \nabla \lambda \quad (\text{B.81})$$

angenommen werden, wobei λ ein Skalarfeld ist. Eingesetzt in Gleichung (B.78) ergibt das eine Gleichung

$$\nabla^2 \lambda = \Delta \lambda = -\nabla \cdot \vec{u}_0, \quad (\text{B.82})$$

deren Lösung nach λ die Varianz der Differenz \vec{c} minimalisiert. Das entsprechende Funktional ist

$$J = \int_V \left[\frac{1}{2} (\vec{u} - \vec{u}_0)^2 + \lambda \nabla \cdot \vec{u} \right] dV. \quad (\text{B.83})$$

oder mit Gleichung (B.77)

$$J = \int_V \left[\frac{1}{2} (\nabla \lambda)^2 + \lambda \nabla \cdot \vec{u}_0 + \lambda \nabla^2 \lambda \right] dV \quad (\text{B.84})$$

und mit der Identität

$$\lambda \nabla^2 \lambda = \nabla (\lambda \nabla \lambda) - (\nabla \lambda)^2 \quad (\text{B.85})$$

erhalten wir weiter

$$J = \int_V \left[-\frac{1}{2} (\nabla \lambda)^2 + \lambda \nabla \vec{u}_0 + \nabla (\lambda \nabla \lambda) \right] dV. \quad (\text{B.86})$$

Im folgenden soll die Variation des Funktionals, δJ , berechnet werden. Unter Verwendung der Vertauschbarkeit von Differentiationen, und Anwendung der Produktregel erhalten wir vorerst folgende Identitäten:

$$\delta \left[\frac{1}{2} (\nabla \lambda)^2 \right] = \nabla \lambda \delta (\nabla \lambda) = \nabla \lambda \nabla (\delta \lambda), \quad (\text{B.87})$$

$$\delta [\nabla (\lambda \nabla \lambda)] = \nabla [\delta (\lambda \nabla \lambda)] = \nabla [\delta \lambda \nabla \lambda + \lambda \delta (\nabla \lambda)], \quad (\text{B.88})$$

$$-\nabla \lambda \nabla (\delta \lambda) + \nabla (\nabla \lambda \delta \lambda) = \Delta \lambda \delta \lambda, \quad (\text{B.89})$$

und damit die Variation des Funktionals

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_V \{ -\nabla \lambda (\delta \lambda) + \nabla \vec{u}_0 \delta \lambda + \nabla [\nabla \lambda \delta \lambda + \lambda \delta (\nabla \lambda)] \} dV \\ &= \int_V [\Delta \lambda + \nabla \vec{u}_0] \delta \lambda dV + \int_V \nabla [\lambda \delta (\nabla \lambda)] dV. \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

Mit dem Integralsatz von Gauss kann das zweite Integral in ein Oberflächenintegral verwandelt werden:

$$\delta J = \int_V [\Delta \lambda + \nabla \vec{u}_0] \delta \lambda dV + \int_{\partial V} \vec{n} \lambda \delta (\nabla \lambda) d\vec{O}. \quad (\text{B.91})$$

Der erste Integrand entspricht der Gleichung (B.82) und verschwindet bei Erfüllung dieser Gleichung. Der zweite Integrand ergibt die Randbedingungen, bei denen auch er verschwindet, und damit auch $\delta J = 0$, oder wie gewünscht, J minimal wird:

$$\text{Dirichlet} : \quad \lambda = 0 \quad (\text{B.92})$$

$$\text{Neumann} : \quad \delta (\vec{n} \nabla \lambda) = 0 \quad (\text{B.93})$$

Es ist leicht einsehbar, dass Gleichung (B.82) in den meisten Fällen mit einem numerischen Verfahren gelöst werden muss. Mehr Details und Anwendungsbeispiele können in Moussiopulos and Flassak (1986) und Sherman (1978) gefunden werden.

B Publications of the present project

- Haupt, P., 1993: Foundation of continuum mechanics In K. Hutter (Ed.), *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, pp. 1–77. Springer Verlag.
- Hutter, K., 1983: *Theoretical glaciology; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. D. Reidel Publishing Company/Tokyo, Terra Scientific Publishing Company.
- Klingbeil, E., 1966: *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I. Hochschultaschenbücher, Mannheim.
- Lichnerowicz, A., 1966: *Einführung in die Tensoranalysis*. B.I. Hochschultaschenbücher, Mannheim.
- Moussiopulos, N. and T. Flassak, 1986: Two Vectorized Algorithms for the Effective Calculation of Mass-Consistent Flow Fields. *J. Climat Applied Meteorol.* **25**, 847–857.
- Pichler, H., 1984: *Dynamik der Atmosphäre*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Pielke, R. A., 1984: *Mesoscale Meteorological Modelling*. Academic Press, Orlando.
- Sherman, C., 1978: A Mass-Consistent Model for Wind Fields over Complex Terrain. *J. Appl. Meteor.* **17**, 312–319.