Diss. ETH Number 14195

Elliptic Isogenies and Slopes

A dissertation submitted to the

SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of Doctor of Mathematics
presented by

EVELINA VIADA-AEHLE
Laurea di Dottore in Matematica
Universita' degli Studi di Torino

born February 6th, 1973
citizen of Italy

Prof. GISBERT WÜSTHOLZ, examiner
Prof. FABRIZIO CATANESE, co-examiner

2001

Abstract

In this thesis we give a detailed analysis of the methode of the slopes introduced by Bost in 1995 in a Bourbaki talk [3]. In particular we write down some proofs that are missing in his paper. In the first part of our dissertation we show how to modify the proof of the Subvariety Theorem by Bost in order to improve the bounds in a quantitative respect and to extend the Theorem to subspaces instead than hyperplanes. Given an abelian variety A defined over a number field K and a non-trivial period γ in a subspace $W \subset T_{A_K}$, the Subvariety Theorem (Theorem 2) shows the existence of an abelian subvariety B of A defined over $\overline{\mathbb{Q}}$, whose degree is bounded in terms of the height of W and of the norm of the period γ.

As a nice application of our Subvariety Theorem we deduce an upper bound for the degree of a minimal elliptic isogeny which improves the result of Masser and Wüstholz [20].

Riassunto

In questa tesi presentiamo una dettagliata analisi del metodo delle pendenze introdotto da Bost in un seminario Bourbaki nel 1995 [3]. In particolare diamo alcune dimostrazioni che non appaiono nell'articolo. Nella prima parte della dissertazione mostriamo come modificare la dimostrazione del Teorema della Sottovarieta' (Theorem 2) data da Bost, al fine di ottenere un miglioramento dei limiti ed estendiamo il risultato a sottospazi anziché considerare solamente iperpiani. Data una varietá abeliana A definita su un campo di numeri K e un periodo non nullo γ appartenente a un sottospazio $W \subset T_{A_K}$, il Teorema assicura l'esistenza di una sottovarietá abeliana B di A definita su $\overline{\mathbb{Q}}$, il cui grado e' limitato in funzione dell'altezza di W e della norma del periodo γ.

Come interessante applicazione del Teorema della Sottovarietá deduciamo un limite superiore per il grado di una isogenia minimale tra curve ellittiche che migliora il risultato ottenuto da Masser e Wüstholz [20].