Diss. ETH No. 13003

Crossing Brownian motion in a soft Poissonian potential

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doktor der Mathematik

presented by
MARIO VALENTIN WÜTHRICH
Dipl. Math. ETH
born May 19, 1969
citizen of Winterthur (ZH) and Trub (BE)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. A.-S. Sznitman, examiner
Prof. Dr. E. Bolthausen, co-examiner

1999

Abstract

We consider d-dimensional crossing Brownian motion in a truncated soft Poissonian potential ($d \geq 2$): In a random medium with soft obstacles distributed according to a Poissonian law, we consider Brownian motion conditioned to reach a remote location. In this model there is a naturally defined random distance function, which measures the cost of the Brownian crossings in the presence of the Poissonian obstacles. This distance function satisfies a shape theorem, which says that asymptotically it behaves as a deterministic norm on $\mathbb{R}^d$.

In this thesis we introduce a critical exponent χ (depending on d), which measures finer asymptotics of this distance function. As a second critical exponent we introduce ξ (depending on d), which describes the transverse fluctuations of the crossings. It is conjectured that χ and ξ should satisfy the scaling identity, $2\xi - 1 = \chi$, in all dimensions $d \geq 2$. We provide here a rigorous version of the scaling identity, i.e., we prove lower and upper bounds on ξ in terms of χ.

Further, we provide numerical lower and upper bounds for ξ and χ. In particular, we are able to prove that the point-to-plane model behaves superdiffusively in dimension $d = 2$, resulting in $\xi \geq 3/5 (> 1/2)$, whereas for $d \geq 3$ we prove that the model behaves at least diffusively, $\xi \geq 1/2$.

In the final part of this thesis we compare, when we strengthen the potential, the Lyapounov norms to the time-constants of certain naturally associated random Riemannian metrics.

Kurzfassung

Wir betrachten d-dimensionale traversierende Brownsche Bewegungen in einem Poissonschen Potential ($d \geq 2$): D.h., in einem zufälligen Medium mit poisson-verteilten Hindernissen schauen wir alle Brownschen Pfade an, die ein entferntes Ziel in endlicher Durchlaufszeit erreichen. Für dieses Modell gibt es eine kanonisch definierte, zufällige Distanzfunktion, die die mittleren Kosten der traversierenden Brownschen Bewegungen im Poissonschen Potential misst. Es existiert nun eine deterministische Norm auf $\mathbb{R}^d$, die das asymptotische Verhalten dieser zufälligen Distanzfunktion beschreibt, wenn das Ziel der Pfade gegen unendlich strebt (Shape Theorem).

In dieser Doktorarbeit führen wir einen kritischen (dimensions-abhängigen) Exponenten χ ein, welcher das asymptotische Verhalten unserer Distanzfunktion für feinere Ordnungen beschreibt. Ein zweiter kritischer Exponent ξ, den wir hier betrachten wollen, misst die transversalen Schwankungen der traversierenden Pfade. In der physikalischen Literatur wurde die Behauptung aufgestellt, dass die beiden kritischen Exponenten eine Skalierungsgleichung erfüllen sollten: $2\xi - 1 = \chi$, in allen Dimensionen $d \geq 2$. In dieser Arbeit beweisen wir eine rigorose Version der Skalierungsgleichung, d.h., wir zeigen eine untere (bzw. obere) Schranke für ξ, die nur von χ abhängt.

Ferner beweisen wir numerische Schranken für ξ und χ. Insbesondere konnten wir zeigen, dass sich das "Punkt-zu-Ebene"-Modell in Dimension $d = 2$ superdiffusiv verhält, d.h., $\xi \geq 3/5 > 1/2$, während wir in höheren Dimensionen ($d \geq 3$) mindestens ein diffusives Verhalten haben, $\xi \geq 1/2$.

Im letzten Teil dieser Arbeit vergleichen wir die Lyapounov Normen mit den Zeit Konstanten, die wir erhalten, wenn wir die kanonisch definierte Riemannsche Metrik zum Poissonschen Potential betrachten.