

Diss. ETH No. 12953

STABILITY OF QUANTUM ELECTRODYNAMICS
WITH NON-RELATIVISTIC MATTER
AND MAGNETIC LIEB-THIRRING ESTIMATES

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Natural Sciences

presented by
Luca Bugliaro Goggia
Dipl. Phys. ETH
born May 10, 1971
Italian citizen

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. G.M. Graf, examiner
Prof. Dr. J. Fröhlich, coexaminer

1998

Abstract

The subject of this thesis is the investigation of the stability of a system composed of an arbitrary number of non-relativistic electrons and an arbitrary number of static nuclei interacting through Coulomb forces, where in addition the electrons are coupled to the photon field, or more precisely, to the quantized ultraviolet-cutoff electromagnetic field. Stability means that the energy per particle in the system is bounded below uniformly in the number of particles (and in the nuclear configurations). For this system of matter and radiation we prove two results. The first one asserts that stability holds if the values of the fine structure constant, α , and of the product of its square with the largest nuclear charge, Z , are not too large. These constraints are of the same kind as the ones occurring in a system of nuclei and electrons coupled to a classical external field, which are caused first of all by the fact that the Pauli operator has zero-modes. The second result establishes stability for every value of α and $Z\alpha^2$, showing in this way that actually stability can no longer manifest, once an ultraviolet cutoff is imposed on the quantized electromagnetic field. Both results are presented in Section I.7.

The proofs of these two results rest on two magnetic Lieb-Thirring type inequalities. By this we mean a lower bound on the sum of the negative eigenvalues of a Pauli operator, that describes the motion of one electron in an external electromagnetic field, including also the interaction of its magnetic moment (i.e., spin) with the external magnetic field. The original inequality stems from Elliot H. Lieb and Walter Thirring, who 1975 derived such an estimate for the Schrödinger operator describing the motion of a non-relativistic spinless electron in an external potential. The proofs of our two Lieb-Thirring inequalities require the use of effective magnetic fields (i.e., smeared magnetic fields) in order to account for the semilocal cooperation between the physical magnetic field and the potential in creating new bound states, and to them are devoted the second and third chapter.

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Dissertation ist das Studium der Stabilität eines Systems, das aus einer beliebigen Anzahl nicht-relativistischer Elektronen und einer beliebigen Anzahl statischer Kerne besteht, die durch Coulomb-Kräfte wechselwirken, wobei die Elektronen noch an das Photonenfeld gekoppelt sind, oder genauer, an das quantisierte elektromagnetische Feld mit Ultraviolett-Cutoff. Stabilität bedeutet, dass die Energie pro Teilchen im System nach unten beschränkt ist, und zwar gleichmässig in der Anzahl der Teilchen (und in den Kernkonfigurationen). Für dieses System von Materie und Strahlung beweisen wir zwei Resultate. Das erste besagt, dass Stabilität gilt, falls die Werte der Feinstrukturkonstante α und des Produkts deren Quadrats mit der höchsten Kernladung Z nicht zu gross sind. Diese Einschränkungen sind von derselben Art wie sie in einem System von Kernen und Elektronen, die an ein äusseres klassisches Feld gekoppelt sind, vorkommen, und die vor allem von der Tatsache herrühren, dass der Pauli Operator Nullmoden besitzt. Das zweite Resultat liefert Stabilität für jeden Wert von α und $Z\alpha^2$; und zeigt damit, dass eigentlich Stabilität nicht mehr zum Vorschein kommen kann, wenn wir einen Ultraviolett-Cutoff am quantisierten elektromagnetischen Feld einführen. Beide Resultate werden in Abschnitt I.7 vorgezeigt.

Die Beweise dieser beiden Resultate beruhen auf zwei magnetischen Lieb-Thirring Ungleichungen. Damit meinen wir eine untere Schranke für die Summe der negativen Eigenwerte eines Pauli Operators, der die Bewegung eines Elektrons in einem äusseren elektromagnetischen Feld mitsamt der Wechselwirkung von seinem magnetischen Moment (d.h. Spin) mit dem äusseren Magnetfeld beschreibt. Die ursprüngliche Ungleichung stammt von Elliot H. Lieb und Walter Thirring, die 1975 eine analoge Abschätzung für den Schrödinger Operator hergeleitet haben, der die Bewegung eines nicht-relativistischen Elektrons ohne Spin in einem äusseren Potential beschreibt. Die Beweise unserer beiden Lieb-Thirring Ungleichungen fordern die Benutzung von effektiven magnetischen Feldern (d.h. ausgeschmierten magnetischen Feldern), um die halblokale Kooperation zwischen physikalischem Magnetfeld und Potential bei der Erzeugung von neuen gebundenen Zuständen zu berücksichtigen. Ihnen sind das zweite und dritte Kapitel gewidmet.