

# Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke

**Report**

**Author(s):**

Martins, Luis da Motta Faria Cândio

**Publication date:**

1996

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-001681257>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

**Originally published in:**

IBK Bericht 218

# **Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke**

Luis Cândia Martins

Institut für Baustatik und Konstruktion  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich  
Mai 1996

*The empire of man over things is founded on the arts and sciences alone,  
for nature is only to be commanded by obeying her.*

*Francis Bacon, 1620*

# Inhaltsverzeichnis

|   |      |
|---|------|
| Prolog  | v    |
| Bezeichnungen   | vii  |
| Kurzfassung   | xi   |
| Summary   | xii  |
| Résumé  | xiii |
| <br>  |      |
| 1 Einleitung  |      |
| 1.1 Morphologie und Konstruktion                          | 1    |
| 1.2 Die konstruktive Aufgabe                              | 4    |
| 1.3 Übersicht   | 7    |
| <br>  |      |
| 2 Die Form: eine kritische Auseinandersetzung             |      |
| 2.1 Zur Philosophie der Form                              | 10   |
| 2.2 Morphologie gebauter Formen                           | 14   |
| Tradition   | 16   |
| Technik   | 18   |
| Effizienz   | 20   |
| 2.3 Ästhetik technischer Formen                           | 22   |
| <br>  |      |
| 3 Strukturelle Morphologie                                |      |
| 3.1 Form und Struktur                                     | 28   |
| 3.2 Gleichgewichtsformen einer Struktur                   | 31   |
| 3.3 Struktur und Stoff                                    | 34   |
| Logische und physikalische Konzeption von Struktur        | 34   |
| Materialisierung von Struktur: Anforderungen an den Stoff | 36   |
| <br>  |      |
| 4 Geometrie der gekrümmten Fläche                         |      |
| 4.1 Geometrische Konstruktion gekrümmter Flächen          | 39   |
| 4.2 Differentialgeometrie der Fläche                      | 43   |
| Krümmungseigenschaften der Fläche                         | 43   |
| Sphärische Abbildung und Gauss'sche Krümmung              | 45   |
| Die Fläche als analytisches Gebilde                       | 47   |
| 4.3 Regelflächen  | 50   |
| Abwickelbare Flächen                                      | 51   |
| Nichtabwickelbare Regelflächen                            | 52   |
| 4.4 Minimalflächen  | 55   |
| Theoretische Grundlagen                                   | 55   |
| Analytisch erfassbare Minimalflächen                      | 59   |
| 4.5 Flächen konstanter Krümmung                           | 66   |
| Sphärische und pseudosphärische Flächen                   | 66   |
| Nichteuklidische Geometrie                                | 68   |
| 4.6 Diskrete Punktsysteme des Raumes                      | 69   |
| Diskontinuierliche Geometrie                              | 69   |
| Punktsysteme als topologische Modelle konvexer Netze      | 71   |
| Reguläre Polyeder   | 74   |
| Quasireguläre Polyeder                                    | 76   |
| Duale der quasiregulären Polyeder                         | 78   |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 5   | Parkettierungen gekrümmter Flächen                           |     |
| 5.1 | Homonomische Zerlegung ebener Punktfiguren                   | 79  |
| 5.2 | Diskrete sphärische Punktgruppen                             | 88  |
|     | Differentialgeometrische Flächenabbildung                    | 88  |
|     | Sphärische Abbildung eines Polyeders                         | 90  |
|     | Sphärische Geometrie   | 93  |
|     | Bestimmung der Polyederpunkte der Kugel                      | 94  |
|     | Kugelpflasterung   | 99  |
| 5.3 | Dilatationen der sphärischen Punktgruppe                     | 102 |
|     | Kartesische Sphärendilatation                                | 102 |
|     | Lokale Dilatationen  | 105 |
|     | Zum Gradienten des Verzerrungsmasses                         | 110 |
| 6   | Formfindung von gekrümmten Flächentragwerken                 |     |
| 6.1 | Mechanik der gekrümmten Fläche                               | 112 |
|     | Membrantheorie   | 113 |
|     | Biegetheorie   | 116 |
|     | Elastische Beultheorie                                       | 119 |
|     | Die Formfindungsaufgabe                                      | 122 |
| 6.2 | Experimentelle Formfindungsmethoden                          | 123 |
|     | Experimentelle Untersuchung mechanischer Zusammenhänge       | 123 |
|     | Geschichtliche Entwicklung der Formfindung                   | 125 |
|     | Formfindung von Bogenmauern mit der Membrananalogie          | 129 |
|     | Der Kulminationspunkt: der Schalenbau                        | 132 |
|     | Der Wendepunkt: Frei Ottos Seilnetzkonstruktionen            | 136 |
| 6.3 | Numerische Formfindung vorgespannter Seilnetze               | 138 |
|     | Zum Tragverhalten vorgespannter Seilnetze                    | 138 |
|     | Nichtlineare Ausgleichsrechnung vorgespannter Seilnetze      | 139 |
|     | Gleichgewichtsgleichungen                                    | 141 |
|     | Fest- und Ausgleichungsansatz                                | 143 |
|     | Kraftdichtemethode   | 145 |
|     | Spezielle Anwendungen des Ausgleichungsansatzes              | 147 |
| 7   | Epilog   |     |
| 7.1 | Wissenschaft, Kunst und Baukultur                            | 151 |
| 7.2 | Die morphologische Aufgabe: Ergebnis und Ausblick            | 153 |
|     | Anhang   |     |
| A 1 | Geometrische Eigenschaften der Polyeder                      | 157 |
| A 2 | Zur Plastizitätstheorie gekrümmter Flächen                   | 161 |
| A 3 | Inelastische Beultheorie                                     | 163 |
| A 4 | Numerische Berechnungsverfahren                              | 167 |
| A 5 | Ausgleichsrechnung und Elastomechanik                        | 168 |
| A 6 | Weitere Ansätze für die numerische Formfindung von Membranen | 172 |
|     | Literatur  | 173 |
|     | Bildnachweise  | 189 |

## Prolog

Goethes Wissenschaft der Form – die Morphologie – beruht auf der Überzeugung, dass alles, was ist, auch durch eine Form andeutbar sein muss. Die Umkehrung dieser logischen Verknüpfung führt zum scholastischen Axiom “*Tout ce qui est contenu dans l’effet, est contenu dans la cause*” und somit zur Andeutung von Form als Ausdruck universeller Gesetze. Die Natur, so Goethe, *schafft ewig neue Gestalten; was da ist, war noch nie, was war, kommt nicht wieder – alles ist neu, und doch immer das Alte*. Als *causa finalis* ist Form, in Anlehnung an Paul Janet, *un fait qui peut être en quelque sorte considéré comme la cause de sa propre cause: mais, comme il est impossible qu’il soit cause avant d’exister, la vraie cause n’est pas le fait lui même, mais son idée*. Als abstraktes Phänomen umfasst Form daher die Vorstellung, dass der Kosmos eine Logik aufweisen muss, die ihm seine metaphysische Struktur verleiht. Dementsprechend muss auch die Existenz jedweder materialisierten Form als hylemorphische Einheit durch die gleiche Logik zu begründen sein. Eine schwächliche und zielunsichere Terminologie hat mitgeholfen, diesen Sachverhalt zu unterdrücken. Wie aber Oswald Spengler vermerkt hat, ist für die Morphologie die terminologische Frage beinahe die Kernfrage.

Der Titel dieser Arbeit – Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke – deutet bereits darauf hin, dass sie zum Ziel hat, die Logik des Raumes anhand der zwischen der zweidimensionalen Struktur und dem physikalischen Geschehen bestehenden Zusammenhänge aufzudecken. Der morphologische Ansatz gründet sich auf die Entmaterialisierung von Struktur und die Erhebung der Form auf eine Abstraktionsebene, auf der geometrische Zwänge und physikalische Gegebenheiten zu der ontologischen Einheit einer nach Matila Ghyka bezeichneten *architecture vectorielle* fusionieren. Das konstruktive Konzept, wie es hier verstanden wird, muss somit in seiner Essenz das Desiderat beinhalten, die Massen durch den Gedanken der Form zu beherrschen. Dieser Ansatz beinhaltet natürlich eine ganzheitliche Betrachtungsweise, wie sie bei jedem baukünstlerischen Entwurf angestrebt werden sollte.

Trotz aller ermutigenden Fortschritte muss heute festgestellt werden, dass das ganzheitliche Konzept Form einen nur sehr bescheidenen Eingang in die Denkweise von Forschern, Konstrukteuren, Unternehmern und Bauherren gefunden hat. *La resistenza per forma pur essendo la più efficiente tra tutte, e una delle più diffuse in natura, non è entrata in quel complesso di inconsapevoli intuizione statiche dal qual derivano gli schemi e le realizzazione strutturali. In altre parole non siamo ancora abituati a pensare staticamente “per forma”*. Bedauerlicherweise hat Pier Luigi Nervi 1965 niedergeschriebene Darlegung des angesprochenen Sachverhaltes keineswegs an Bedeutsamkeit verloren. Nach wie vor – und vermutlich mehr denn je – werden im konstruktiven Bereich in anachronistischer Weise, irgendwelche vorgegebenen Massen nach den Gesetzen der Elastizität zum Gleichgewicht gezwungen. Selbst die Erkenntnis, dass dieser Ansatz ohne die Gutmütigkeit des Stoffes nicht praktikabel wäre, und die Beobachtung mangelhafter Leistungen in der Praxis konnten diese tief verwurzelte Unsitte nicht verdrängen.

*We are, so Ludwig Mies van der Rohe bereits 1960, [...] at the beginning of an epoch; an epoch which will be guided by a new spirit, which will be driven by new forces, new technological, sociological and economical forces, and which will have new tools and new materials. For those reasons we will have a new architecture.* 35 Jahre später – ein Zeitraum, in dem ein bis dahin unvorstellbarer Wandel stattgefunden hat – muss der Kritiker feststellen, dass die von Mies van der Rohe vorangekündigte Entwicklung entgegen jeder logischen Deduktion nicht stattgefunden hat. Dementsprechend ist auch die heutige Baukunst durch eine Disparität gegenüber dem technologischen Potential und den Notwendigkeiten unseres Zeitalters gekennzeichnet. Mangels grundlegender Prinzipien verirrt sich die heutige Baukunst in Inkonsistenz und Einseitigkeit.

In der konstruktiven Ingenieurbaukunst – einem streng konservativen Fachgebiet – sind die meisten fortschrittlichen Impulse seitens des etwas marginalisierten Bereichs der weitgespannten Flächentragwerke zu verzeichnen. In diesem Bereich führten die insbesondere mit Seifenhäuten durchgeführten Forschungsarbeiten zu einem teilweise wahrgenommenen neuen Verständnis der Form und einer bedeutenden Erweiterung des entsprechenden Vokabulars. Geleitet durch die Notwendigkeiten der praktischen Ausführung konnten unter Berücksichtigung materialtechnologischer und geometrisch-statischer Erfordernisse neue wegweisende Lösungen gefunden werden, welche sich hochentwickelter Mittel bedienen. In diesem Bereich wurde ein Innovationsgeist geweckt, wie er von einer echten Baukunst zu erwarten ist. Zu dieser Entität soll mit der vorliegenden Arbeit ein Beitrag geleistet werden.

Im Laufe des Entstehungsprozesses dieser Arbeit wurden fünf nicht veröffentlichte Berichte gefertigt, aus welchen manches des hier Niedergelegten übernommen worden ist, nämlich: *Tragverhalten und Berechnung gekrümmter Flächentragwerke*, Juli 1993, 45 pp.; *Formfindung von gekrümmten Flächentragwerken*, Jan. 1994, 74 pp.; *Entwicklung gebauter Formen*, Feb. 1994, 11 pp.; *Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke*, Okt. 1994, 86 pp.; *Parkettierungen gekrümmter Flächen*, Mai 1995, 73 pp.

Zuletzt sei hier den Personen und Institutionen Dank ausgesprochen, die die Entstehung dieser Arbeit unterstützt und gefördert haben. Als Doktorand von Herrn Prof. Dr. Peter Marti am Institut für Baustatik und Konstruktion verfügte ich über eine nur selten anzutreffende Infrastruktur. Herrn Prof. Dr. Peter Marti gilt mein ganz besonderer Dank insbesondere für sein Vertrauen, das es mir ermöglicht hat, die hier verfassten Ideen völlig eigenständig und frei zu entfalten. Herrn Prof. Dr. Otto Künzle danke ich ganz herzlich für die Übernahme des Korreferats. Die “Junta Nacional de Investigaçã Científica e Tecnológica - JNICT” in Lissabon hat die finanzielle Unterstützung über das “Programa Ciência” beziehungsweise “Praxis XXI” geleistet. Für die freundschaftliche Unterstützung und die kritische Lektüre des Manuskripts sei hier Frau Sibylle Burki öffentlich gedankt. Diese Arbeit ist meinen Eltern und Frau Dr. Nicole Hacker gewidmet. Ihnen ist im Sinne dieser Arbeit mehr geschuldet als Dank.

Zürich, im Oktober 1995

# Bezeichnungen

## Grundformen der Bezeichnungen

- A Flächeninhalt, Jakobimatrix der Beobachtungsgleichungen, Jakobimatrix der Stäbe, Matrix, Punkt
  - B Punkt
  - C Kanten-Knoten-Matrix der variablen Punkte , Punkt
  - $C_f$  Kanten-Knoten-Matrix der festen Punkte
  - $C_s$  Kanten-Knoten-Matrix aller Punkte
  - D Biegesteifigkeit, Dilatation, Drehmatrix, Substitutionsmatrix
  - $D_f$  Substitutionsmatrix der festen Punkte
  - E Eckenanzahl, Elastizitätsmodul, Energie, metrische Komponente
  - $E_t$  Tangentenmodul
  - F Einwirkung, Flächenanzahl, Flächeninhalt, Freiheitsgrad, Funktion, metrische Komponente, Punkt, Spannungsfunktion, Subfläche
  - G metrische Komponente
  - H Diagonalmatrix der Stabzugsteifigkeiten
  - K Gauss'sche Krümmung, Kantenanzahl, kardinaler Punkt, Schalensteifigkeit
  - L Diagonalmatrix der gedehnten Stablängen, metrische Komponente, Operator
  - $L_0$  Diagonalmatrix der ungedehnten Stablängen
  - M Biegemoment, metrische Komponente, Minimalfläche, mittlere Krümmung
  - N metrische Komponente, normale Ebene, Normalgleichungsmatrix, Variable
  - P Beullast, Gewichtsmatrix, Last, Punkt
  - Q Diagonalmatrix der Kraftdichten, Flächenpunkt, Hyperdiagonalmatrix
  - $Q_{x,x}$  Kofaktorenmatrix der Unbekanntenzuschläge
  - R Koordinate, Radius
  - S Flächenverzerrung, Kraft, Punkt der Störungskurve, Subpolygon
  - T Dehnungssteifigkeit, Transformationsmatrix
  - U Diagonalmatrix der Knotenverschiebungen
  - V Diagonalmatrix der Knotenverschiebungen, Dilatationsfeld, Querkraft, Vektor, Vektorfeld, Volumen
  - W Diagonalmatrix der Knotenverschiebungen, Winkelverzerrung
- 
- a Erzeugende, Kante, Konstante, Variable, Vektor
  - b Erzeugende, Kante, Konstante, Variable, Vektor
  - c Achse, Kante, Konstante, Lichtgeschwindigkeit, Vektor
  - d Drall
  - e Einheitsvektor, Einheitsvektor der Belastungen, Erzeugende, Schnittgerade
  - $f$  Erzeugende, Frequenz, Funktion, Materialfestigkeit
  - g Determinante, Erzeugende, Funktion, geodätische Kurve
  - h Dicke, Funktion, mittlere Verzerrung, Vektor der Stabzugsteifigkeiten
  - i Knotenvariable, Variable
  - j Kantenvariable
  - k Anzahl, geschlossene Kurve, Knotenvariable, Vektor der Knotenbelastung, Verzerrungsmass

|               |   |
|---------------|---|
| $l$           | Länge, Vektor der Beobachtungen, Vektor der gedehnten Stablängen  |
| $l_0$         | Vektor der ungedehnten Stablängen   |
| $\Delta l$    | zwangsfreie Längenänderung  |
| $m$           | bezogenes Moment, Masse   |
| $n$           | Anzahl, Membrankraft, normale Gerade, Normalvektor, Polygongrad   |
| $p$           | Distributionsparameter, Flächenlast, Koeffizient, Koordinate, Vektor der Knotenbelastung, Verknüpfungsgrad  |
| $q$           | Flächenlast, Koeffizient, Koordinate, Vektor der Kraftdichten   |
| $r$           | Koeffizient, Ortsvektor, Radius   |
| $s$           | Bogenlänge, Koeffizient, Schnittkurve, Seitenvektor, Vektor der Stabkräfte, Vektor der Kantenvariablen  |
| $t$           | Anzahl, Dicke, Einheitsvektor (tangential), Koeffizient, Zeit   |
| $u$           | gnomonisches Element, Koordinate, Vektor der Knotenverschiebungen, Verknüpfungsvektor   |
| $v$           | bezogene Querkraft, Dilatationsvektor, gnomonisches Element, Koeffizient, Koordinate, Vektor der Verbesserungen, Vektor der Stabverformungen, Vektor der Knotenverschiebungen |
| $w$           | gnomonisches Element, Koordinate, Translationsvektor, Vektor der Knotenverschiebungen, Verschiebung   |
| $w_0$         | Anfangsexzentrizität  |
| $x$           | Koordinate, Vektor der Unbekannten, Koordinatenvektor der variablen Knotenpunkte, Vektor  |
| $x_f$         | Koordinatenvektor der festgehaltenen Knotenpunkte   |
| $x_s$         | Koordinatenvektor aller Knotenpunkte  |
| $x_G$         | Raumkoordinaten der variablen Knotenpunkte  |
| $\Delta x$    | Vektor der Zuschläge zu den Unbekannten, Vektor der Knotenverschiebungen  |
| $y$           | Koordinate, Koordinatenvektor der variablen Knotenpunkte  |
| $y_f$         | Koordinatenvektor der festgehaltenen Knotenpunkte   |
| $y_s$         | Koordinatenvektor aller Knotenpunkte  |
| $z$           | Koordinate, Koordinatenvektor der variablen Knotenpunkte  |
| $z_f$         | Koordinatenvektor der festgehaltenen Knotenpunkte   |
| $z_s$         | Koordinatenvektor aller Knotenpunkte  |
| $\Gamma$      | Randkurve   |
| $\vartheta$   | Winkel (meridional)   |
| $\Delta$      | Differenz, Leitlinie, Operator  |
| $\Pi$         | Ebene   |
| $\Sigma$      | Ebene   |
| $\Phi$        | Fläche, Goldener Schnitt  |
| $\Omega$      | Fläche, Krümmungsmittelpunkt  |
| $\alpha$      | Variable, Winkel  |
| $\beta$       | Variable, Winkel  |
| $\gamma$      | Drehwinkel  |
| $\delta$      | sphärischer Exzess  |
| $\varepsilon$ | Dehnung, Funktion   |
| $\zeta$       | Koordinate  |
| $\eta$        | Koordinate  |

|            |   |
|------------|---|
| $\theta$   | Koordinate  |
| $\varphi$  | Koordinate, Kriechwert, Winkel (azimutal)             |
| $\kappa$   | Flächenkrümmung                                       |
| $\lambda$  | algebraischer Grad, Dilatations- oder Verzerrungsmass |
| $\mu$      | algebraischer Grad, Variable                          |
| $\nu$      | Querdehnungszahl                                      |
| $\xi$      | Koordinate  |
| $\pi$      | Ebene   |
| $\sigma$   | Normalspannung  |
| $\tau$     | Schubspannung   |
| $\upsilon$ | algebraischer Grad                                    |
| $\varphi$  | Drehwinkel  |
| $\chi$     | Koeffizient   |
| $\psi$     | Steifigkeitsreduktionsbeiwert                         |
| $\omega$   | Rotationsvektor, Variable                             |

### Fusszeiger

|    |                                |
|----|--------------------------------|
| A  | Punkt                          |
| B  | Punkt                          |
| C  | Punkt                          |
| E  | Elastizitätsmodul              |
| F  | Spannungsfunktion              |
| G  | variable Knotenpunkte          |
| I  | Inkugel, Zuschnittsbereich     |
| K  | Kantenkugel                    |
| P  | Punkt                          |
| R  | regulärer Bereich              |
| U  | Umkugel                        |
|    |                                |
| a  | Kante                          |
| c  | Beton                          |
| cr | kritisch                       |
| f  | festgehaltene Punkte, Frequenz |
| g  | geodätisch                     |
| i  | Knotenvariable, Variable       |
| j  | Stabvariable, Variable         |
| k  | Knotenvariable                 |
| l  | längs                          |
| m  | Mittelwert, Variable           |
| n  | Anzahl                         |
| p  | Belastung                      |
| r  | radial                         |

red reduziert  
 s aller Knotenpunkte (fest und variabel)  
 t Dicke  
 w Verschiebung  
 x Koordinate  
 y Koordinate  
 z Koordinate

0 initial, konstant, ungedehnt  
 1, .. Orte, Richtungen  
 I, .. Hauptwerte

$\alpha$  Winkel  
 $\zeta$  Koordinate  
 $\eta$  Koordinate  
 $\xi$  Koordinate  
 $\varphi$  azimutal

## Kopfzeiger

K kardinal  
 S gestört, similär  
 T transponiert

(e) elastisch  
 (e,p) elasto-plastisch  
 i Variable  
 lin linear  
 (p) plastisch  
 u gnomonisch  
 v gnomonisch  
 w gnomonisch

I, II Zustände  
 - Abbildung, gewichteter Mittelwert  
 ' Ableitung nach dem Ort, Spiegelbild, zugeordneter Punkt oder Vektor  
 · Ableitung nach der Zeit

## Kurzfassung

Das Spezialistentum der Moderne birgt einen anthropozentrischen Perspektivismus und einen dogmatischen Absolutheitsanspruch in sich, auf welche die stetige Entartung der Baukunst und, im weitumfassenden Sinn, die fortschreitende Dehumanisierung des Lebensraumes zurückzuführen sind. Die zyklische Ausbreitung der Reichweite menschlichen Handelns, die der technologische Fortschritt ausgelöst hat, erfordert eine neue, diesen tiefgreifenden Veränderungen gewachsene ethische Anschauung, die dem vom positivistischen Radikalismus geprägten Denken unerreichbar ist.

Der in dieser Arbeit dargelegte morphologische Ansatz beinhaltet eine von Relativismus geprägte wissenschaftliche Objektivität, die die Überprüfung des Bewährungsgrades von wissenschaftlich erworbenem Wissen innerhalb eines kohärenten und ganzheitlichen Referenzrahmens anstrebt. Die Gegenüberstellung von Geschichte und Natur sowie Wissenschaft und Kunst offenbart die Polaritäten, die zwischen Erlebnis und Erkenntnis sowie Intellekt und Emotionalität bestehen, und lässt die Notwendigkeit einer Revision der invarianten Abgrenzungskriterien, die das genormte Erkenntnis- und Denkvermögen typisieren, erkennen.

Als Lehre der strukturellen Form der Gedankenwege des faustischen Weltbewusstseins, verfolgt die Morphologie die Absicht, subjektiv bewährtes Erfahrungswissen in seiner Universalität tautologisch zu erfassen. In begrifflicher Hinsicht stellt Form eine ontologische Gesetzmässigkeit dar, die dem Partiellen eine Totalität und der Pluralität eine Einheitlichkeit verleiht. Aufgrund der epistemologischen Kongruenz, die zwischen den Strukturen des Denkens und des Kosmos besteht, muss jede phänomenologische Form als hylemorphische Einheit durch die gleiche Logik zu begründen sein.

Die esoterische Auslegung von Form als allgegenwärtigem Ausdruck und Abbild des Wechselspiels, das zwischen geometrischen Erfordernissen und physikalischen Tatbeständen besteht, ermöglicht die Veranschaulichung kausaler Zusammenhänge, die Gleichgewicht, Stabilität und Beständigkeit jedweder Struktur des räumlichen Diskontinuums festlegen. Die atomistische Zurückführung von Form auf ein eindeutiges topologisches Verknüpfungsschema erlaubt die Deduktion neuer Verfahren und die Gestaltung neuer Systemstrukturen anhand von Analogien und logischen Verknüpfungsprozessen wie etwa die im Rahmen dieser Arbeit dargestellten Abbildungs- und Dilatationsprozesse diskreter Punktgruppen.

Das Streben nach einer synergetischen Synthese von Raumeinschliessung, Struktur und Materie, die der Idee der deterministischen Hylemorphie inhärent ist, bedingt eine Unvoreingenommenheit und eine Einheit des Denkens, aus welchen die unerlässliche Neuinterpretation der Prinzipien des Vitruvius und die Bildung der geforderten ethischen Imperative zu entspringen haben. Diese innovatorischen Maximen fanden ihre latente baukünstlerische Verwirklichung unter Verwendung hochentwickelter Mittel im Bereich der weitgespannten, gekrümmten Flächentragwerke der Ingenieurbaukunst, die deshalb den praktischen Schwerpunkt dieser morphologischen Untersuchung bilden.

## Summary

This thesis has the title “Morphology of Lightweight Spatial Structures” and is an investigation into some fundamental principles concerning the logic of space assembly in relation to spatial and physical constraints. One of the chief aims of this study is to make a contribution towards a true and complete understanding of the meaning of form by dealing with it according to its origin, essence, features and scope. It has been attempted to establish, both by argument and evidence, that the vague and pointless notion of form that prevails in our subconscious must be counteracted and that morphological thinking ought to become a cognizant and active reality.

Goethe’s morphology is based on the assumption that every real or metaphysical being constitutes a system specified by its form. A system is a subdivision of universe, itself the sum total of all systems. Form is, accordingly, the source of inward essence and of global coherence of any isolated cosmic event. Recognition of this fact leads to the doctrinal idea of form as an ontological principle of nature, i.e. as a structural principle of space. The purpose of any morphological study must consequently be not to search for differences or fundamental contrasts, but to search for the essential principles which govern the creation of order and pattern in a mutable universe. This approach implies a coherent and wholly intellectual posture, which affords a synergetic combination of all disciplines of human thought.

Form, as a logical concept, embodies a finite aggregate of interrelated elements. This structural and thus eminently topological notion allows a systematic analysis of form using mathematics – the science of structure and pattern in general – for its description and physics for its elucidation. The interplay between geometrical requirements and physical facts can be advantageously illustrated by the curved surface of space, since it reveals the peculiar advantage of comprising structure and space inclosure at the same time. Recognition of the parameters involved in the creation of any structural order leads to the organic form-finding processes of nature and therefore to the deduction of new methods and the construction of new structural schemes. This process underlies a systematic procedure based on the triple induction-deduction-construction, which constitutes the essence and true being of structural art.

Human activity and therefore man-made changes to the natural environment are based on studied intention as well as on intuition, instinct and feeling. This fact implies that any form-making should express an organic interplay between the methods used in thinking and feeling. Scientific discovery and technological progress have undoubtedly brought about a completely new concept of man’s relation to nature. Scientific thought has however advanced far beyond moral and social developments. From this it follows that the achievement of cultural unity presupposes finding a way out of the one-sided tendencies that prevail in today’s civilisation by bridging the existing gap between the sciences and the arts. Acceptance of this morphological proposition could, it seems, make some contribution towards restoring the balance of common sense in human progress by removing the present-day doubts regarding the direction which our architectural culture and, in the broadest sense, our civilisation should now take.

## Résumé

La science technique formule des principes par rapport à un certain plan arbitrairement postulé d'après une utopie positiviste, la référence absolue. L'enthousiasme inépuisable déchaîné par le critère d'une vérité unique, définitive et apodictique a masqué le fait que toute objectivité est une notion spécifiquement humaine et, par conséquent, relative et variable. D'où le besoin de réunir, en une synthèse solide, la multiplicité des acquisitions de la pensée et de vérifier le degré de sa validité sur le plan cohérent et universel de la morphologie.

Constante de toute présence consciencieuse, la forme est, paradoxalement, source ontologique de la pluralité et de l'unité en même temps. D'un point de vue purement pragmatique, elle extériorise la manifestation incorporelle du jeu d'ensemble composé par des exigences spatiales et des faits physiques. En tant que principe universel, elle impose les conditions et les lois qui dévoilent sa signification immanente et qui dégagent les liens causaux qui contrôlent l'équilibre et la stabilité de toutes les structures concevables dans l'espace et dans le temps. Dans le sens le plus vaste, la particularité est, en effet, la généralité dévoilée sous des conditions diverses. Étudier la forme, c'est donc rechercher l'invariance d'un univers fluctuant.

Tous les systèmes structurels, à toutes les échelles, représentent des agrégats discontinus et finis, composés par des éléments connectés entre eux. Cette notion atomiste, dépouillée de matière, élève la structure à un degré d'abstraction qui rend possible son analyse systématique avec l'aide des groupes d'opérations, combinaisons et transformations de la physique topologique. La méthode topologique ramène spontanément à des idées inexplorées qui, en se développant, constituent l'embryon de schémas structurels éprouvés dans le monde réel de la nature mais inconnus dans le monde illusoire de l'anthropocentrisme. Dans ce contexte, la surface courbe de l'espace assume une signification primordiale, car elle expose une synthèse synergique d'involucre, structure et matière innée du déterminisme hylémorphique inhérent à la théorie de la forme, la morphologie.

L'action créatrice, c'est-à-dire formatrice, comprise non seulement comme opération actuelle mais aussi comme phénomène futur, a placé l'homme sur un point singulier. Pourtant, l'empreinte humaine dans l'espace vital et dans l'histoire de cette planète visualise non seulement la dimension du pouvoir acquis, mais surtout la vulnérabilité et la partialité épouvantable des valeurs éthiques et morales prédominantes qui méprisent l'ensemble humain, en tant que traduction logique d'une réalité ontologique.

L'étude morphologique désencombre, effectivement, des liaisons profondes qui régissent entre l'expérience et la connaissance, ainsi qu'entre l'intellect et l'émotivité, c'est-à-dire entre l'histoire et la nature, les sciences et les arts. Ces qualités font preuve d'une polarité essentielle à l'homogénéité et à la consistance de l'être humain. L'absence de préjugés et l'unité de la pensée semblent être des conditions préalables pour réinterpréter les principes culturels et établir une notion d'art constructive non pas comme bastion de la spécialisation, mais comme centre polaire des toutes les disciplines techniques et humanistes – ce qui est bien plus beau.

# 1 Einleitung

*Den Stoff sieht jedermann vor sich; den Gehalt findet nur der,  
der etwas dazu zu tun hat; und die Form ist ein Geheimnis den meisten.*

*Johann Wolfgang von Goethe*

## 1.1 Morphologie und Konstruktion

Nach der Urknall-Hypothese konzentrierte sich das Weltall zu Beginn der Zeit bei unendlich hoher Temperatur und Dichte auf unendlich kleinem Raum. Diesem als kosmologische Singularität bezeichneten Anfangszustand folgte vor rund 20 Milliarden Jahren ein Urknall, der einen explosionsartigen Expansionsprozess verursachte. Mit der Ausdehnung des Universums nahm die Temperatur sehr rasch ab. Gleichzeitig begann die Synthese der Elemente. Im Verlauf der weiteren Ausdehnung, nach dem Überwiegen der Dichte des Materiefeldes über diejenige des Strahlungsfeldes, konnten sich unter dem Einfluss der Schwerkraft Galaxien, Sterne und Planeten bilden. Vor vier Milliarden Jahren entstanden die ersten informationstragenden Moleküle, die Nukleinsäuren, und somit auch das Leben. Aus der anfänglichen kosmologischen Singularität entstand keine ausgedehnte strukturlose – amorphe – Verteilung von Masse und Energie. Vielmehr scheinen allgemeine Gesetze die kollektiven Effekte, die als Formen zum Ausdruck gebracht werden, auf allen Realitätsebenen zu regieren.

In den verschiedensten Bereichen wie Physik, Chemie, Biologie, Ökologie, Ökonomie oder Gesellschaft werden mikro- und makroskopische Ordnungszustände erreicht, die sehr ähnlichen Prozessen zu unterliegen scheinen. Die systematische Fluktuation, der diese Systeme unterliegen, ist der Ursprung der Evolution der bestehenden Ordnungszustände. Aus diesem Grund darf vermutet werden, dass es im Sinne der Leibnizschen Monadologie nur eine einzige Gesamtheorie geben kann, auf welche die ontologische Einheit der Natur unter Berücksichtigung aller Pluralismen der Qualitäten in den verschiedenen Realitätsschichten zurückzuführen ist. Wie die sich gerade entwickelnde Einsicht in das Verhalten chaotischer Systeme vermuten lässt, muss die Form eine Logik aufweisen, die ihr jenseits alles Zufälligen und Unberechenbaren einen Ordnungszustand – eine metaphysische Struktur – verleiht. Dem Konzept des deterministischen Chaos zufolge beinhaltet das Verständnis der Form das Verständnis ihres Verhältnisses zu Natur und Geist. Es ist symptomatisch für die angesprochenen Zusammenhänge, dass das logische Operationssystem Geometrie – im Ursprung die Wissenschaft der Beschreibung struktureller Formen – eine der ersten Entwicklungen der Gedanken gewesen ist.

Geleitet durch die Intuition sowie durch Beobachtung und Deduktion des phänomenologischen Geschehens verwirklicht der Mensch seine konstruktiven Strukturen im Bewusstsein, dass er zur Operation über die zwei Grundelemente Form und Materie verfügt. Nach der klassisch gewordenen aristotelischen Doktrin beinhaltet Form eine dynamische Komponente, während die Materie als passives Element, als eine Art Proteus –

der griechische Meergott, der imstande ist, jede beliebige Gestalt zu verkörpern – ausgelegt ist. Form wird in diesem Zusammenhang der Materie zugeführt, womit Aktivität und Passivität zu einer hylemorphischen Einheit fusionieren. In dieser Deutung besitzen sowohl Form als auch Materie eine autonome Gesetzmässigkeit, die somit aber der Einheit des deterministischen Chaos widersprüchlich gegenübersteht.

Bei der Rückführung bis zu den Anfängen der Zeit würde jedes beliebige Etwas in eine reine Energieerscheinung zerfallen. Wie die Naturwissenschaften zeigen konnten, existiert tatsächlich auch stets eine Grenze, festgehalten durch die berühmt gewordene Einsteinsche Formel  $E = mc^2$ , bei welcher Materie und Energie ineinander übergehen. Diese Erkenntnis führt selbstverständlich zur endgültigen Entmaterialisierung des Konzeptes der Materie und zur Rückführung derselben auf eine reine Energieerscheinung. Verallgemeinert betrachtet muss daher Form als ein abstrakter Ausdruck natürlicher Gesetze verstanden werden. Somit ist auch Form – und nicht Materie – das omniprésente Äussere der Ordnungsprinzipien, mit denen die Strukturierung des Universums bestimmt wird. Form, so Francis Bacon, *is always present when [...] nature is present, and universally attests such presence, and is inherent in the whole of it. The same form is of such character, that if it is removed the particular nature infallibly vanishes*<sup>1</sup>. In diesem Sinn enthält das morphologische Studium laut D'Arcy Thompson, *a dynamical aspect, under which we deal with the interpretation, in terms of force, of the operations of energy*<sup>2</sup>. Ein Gesichtspunkt, der den Morphologen mitunter zu den Gesetzmässigkeiten der Thermodynamik führt.

Die Auffassung von Form als abstrakter Widerspiegelung einer Logik des Raumes lässt vermuten, dass die Aufdeckung struktureller Zusammenhänge unter einem räumlich-physikalischen Gesichtspunkt zu erfolgen hat. Es gilt also, die Kompatibilität zwischen den jeder Struktur gestellten räumlichen und energetischen Zwängen zu untersuchen und die daraus entnommenen kausalen Zusammenhänge zum eigenen Nutzen heranzuziehen. Es darf somit postuliert werden, dass die adäquate geometrische Formerfassung jedweden Systems seine Ganzheitlichkeit berücksichtigen muss. Das daraus folgende Muss, nämlich die Möglichkeit der Deduktion des Partikulären aus dem Allgemeinen, setzt einen Ansatz voraus, dem die diskrete, nicht aber die antagonistisch begründete differentiale Geometrie genügen kann. Es gilt hierbei somit, den atomistischen Ansatz Häüys, Gründer der modernen Kristallographie, der die geometrischen Eigenschaften des Diskontinuums und das physikalische Verhalten von Struktur vereinigt untersucht hat, auf die Verhältnisse der konstruktiven Morphologie zu übertragen<sup>3</sup>.

Die konstruktive Morphologie verfolgt das Ziel, die räumliche Anordnung von unter statischem Gleichgewicht stehenden Strukturen, das heisst von vektorialen Nullgruppen, zu untersuchen und herzuleiten. Nach der elementaren Newtonschen Mechanik ist der Gleichgewichtszustand einer Kräftegruppe durch die Geschlossenheit des entsprechenden Kräftepolygons gegeben. Demgemäss ist der Gleichgewichtszustand eines diskonti-

---

1. Bacon (1853).

2. Thompson (1992).

3. Vgl. Burckhardt (1988), Emerton (1984).

nuierlichen Punktsystems des Raumes, das sogar als Grenzfall eines entsprechenden Kontinuums aufgefasst werden kann, durch das einfache System

$$A^T \cdot s = p \quad (1.1)$$

eindeutig charakterisiert. Dieser Ausdruck stellt die analytische Formulierung der Forderung dar, dass in jedem Punkt des strukturellen Systems die vektorielle Summe der an diesem Punkt angreifenden Lasten den Nullvektor ergeben muss<sup>4</sup>. Dieses System enthält die grundlegende morphologische Aussage, dass die allgemein gesetzten räumlichen und physikalischen Zwänge zusammen und auf interaktive Weise einem strukturellen Ordnungsprinzip gehorchen.

Die angesprochene Dekomposition von Materie zu reiner Energie lässt erkennen, dass Materie keine Inkarnation der aristotelischen Passivität sein kann. Materie, wie Buckminster Fuller mit Hartnäckigkeit zu beweisen versucht, ist nichts anderes als ein Ausdruck des räumlich-energetischen Ordnungsprinzips des Mikrokosmos<sup>5</sup>. Materie ist also ein Ausdruck der auf der mikroskopischen Ebene wirkenden massstabslosen Form. Hiermit wird nicht nur der Mythos einer passiven Materie, sondern überhaupt die gewöhnliche Auffassung von Materie vernichtet. *Jusqu'au dernier moment des Siècles*, so Pierre Teilhard de Chardin, *la Matière sera jeune et exubérante, étincelante et nouvelle pour qui voudra*<sup>6</sup>. Dem heutigen Wissen angepasst muss das klassische Konzept der Hylemorphie als die Fusion makro- und mikroskopischer Formen verstanden werden. Demgemäss ist auch das Akt-Potenz-Schema, das der aristotelischen Hylemorphie zugrunde liegt, durch ein einziges Akt-Schema zu ersetzen. Für die Natur sind sowohl Form als auch Materie das gleiche dynamische Element jedweder hylemorphischen Realität. Die Vielfalt biologischer Strukturen beweist tatsächlich, dass die Einheit Form und Materie im Laufe der Evolution deterministisch nach dem Prinzip der Auslese neue Ordnungszustände angenommen haben muss.

Die Konsistenz der aufgezeichneten morphologischen These lässt sich durch die Tätigkeit des Menschen selbst bekräftigen. Mit der Erfassung mikroskopischer Formen wurde naturgemäss eine Entwicklung eingeleitet, die es dem Menschen nun ermöglicht, die Materie in seinem Interesse manipulativ zu verändern. Die Auffassung, dass Stoff so zu entwickeln ist, dass er innerhalb einer makroskopischen Struktur eine möglichst hohe Effizienz aufweist, fand längst ihren Eingang in die verschiedensten Bereiche, wie zum Beispiel die Luft- und Raumfahrttechnik. Die rasanten Fortschritte, die in diesen Bereichen zu vermerken sind, entspringen dem Bewusstsein, dass theoretische Grundkonzepte eine Unvoreingenommenheit aufweisen müssen, um den zeitgemässen Herausforderungen genügen zu können. Dieser Ansatz setzt selbstverständlich voraus, dass die zugrunde liegende Aufgabe vorerst klar definiert und formuliert worden ist. Ein Punkt, auf welchen die in der Baukunst feststellbare Metastase zurückzuführen ist.

---

4. Die Matrix  $A$  und die Vektoren  $s$  und  $p$  des Systems (1.1) beinhalten jeweils die Richtung  $a_{x,j}$  der Verbindungsstrecken jedes Punktes zu den benachbarten Punkten, die Kräfte  $s_j$  in Richtung  $a_j$  und die am System wirkenden äusseren Knotenlasten  $p_k$ . Vgl. Kap. 6.3, pp. 141-142, sowie Anhang A 5, pp. 168 ff.

5. Vgl. Buckminster Fuller (1975).

6. Teilhard de Chardin (1961).

## 1.2 Die konstruktive Aufgabe

Die Genese der konstruktiven Tätigkeit fällt mit derjenigen höherer Lebensformen und deren Notwendigkeiten – Schutz und Beutefang – zusammen. Hierfür entwickelte die Natur ein architektonisches Konzept, dem ihr eigenes organisches Ordnungsprinzip unterliegt<sup>7</sup>. Mit der Entstehung der bewussten Denktätigkeit und der Forderung nach einem erhöhten Schutzgrad entwickelte sich aus der Architektur des Instinktes eine Architektur des Bewusstseins. Mit dem Werdegang gesellschaftlicher Organisationen bildeten sich die ersten Agglomerationen, die neue infrastrukturelle Bedürfnisse mit sich brachten. Dadurch entwickelte sich die konstruktive Tätigkeit. Sie gewann an Charakter, erhielt eine ornamentale und symbolische Dimension und erhob sich somit zur Kunst. Als aktiver elementarer Bestandteil der menschlichen Existenz wurde die Baukunst respektiert und verstanden. Der hohe Status, den sie genoss, führte auch dazu, dass ihr alle weiteren bildenden Künste und Kunsthandwerke untergeordnet wurden. So sind auch vier der sieben Weltwunder – den seit der Antike berühmten Bau- und Kunstwerken – rein architektonische Bauten, wobei zwei davon, nämlich die ägyptischen Pyramiden und der Leuchtturm der ehemaligen Insel Pharos bei Alexandria, nach heutiger Perspektive sogar primär als Produkte einer Ingenieurbaukunst zu bewerten wären.

Bereits im jetzigen Zeitalter wurde eine Entwicklung eingeleitet, die dazu führte, dass die “Mutter aller Künste”, wie die Baukunst unter der dargelegten historischen Perspektive in der Literatur bezeichnet wird, in Konformität mit der kulturellen, ökonomischen und gesellschaftlichen Progression ihre Rolle als Koordinator zunehmend verlor. Diesem Zerfall folgte eine Zersplitterung der Kunst. Es bildeten sich verschiedene Kunstbereiche, die sich unabhängig voneinander entwickelten und unabhängig voneinander verstanden und gewürdigt wurden. Schliesslich löste sich Kunst im allgemeinen Bewusstsein von irgendwelchen primären Zweckgebundenheiten, um Synonym von Malerei und Skulptur zu werden. Kunst und Baukunst entwickelten sich zu zwei sich teilweise überschneidenden, aber grundsätzlich verschiedenen Bereichen menschlicher Tätigkeit.

Der zweite entscheidende Wendepunkt in der Entwicklung der Baukunst geht auf das Jahr 1794 zurück, als drei Jahre nach der “Proclamation de la liberté du travail” die École Polytechnique in Paris gegründet worden ist. Chaptal, der zusammen mit anderen Wissenschaftlern wie Monge, Lagrange und Berthollet die Lehre übernahm, bekundigte die Absicht, mit der “*école spéciale*” eine Vereinigung von Wissenschaft und Praxis zu erzielen. Diese neugegründete Ingenieurwissenschaft fand stürmischen Eingang in eine Baukunst, die sich zunehmend – wie teilweise heute erneut – in sich aneinanderreihende Stilrichtungen in einem inkonsistenten Spannungsfeld verirrte. Diesen Sachverhalt fasste César Daly 1867 – bereits nachdem Henri Labrouste die Bibliothèque Sainte-Geneviève

---

7. Das architektonische Konzept der Natur umfasst einen imponierenden hylemorphischen Umfang und ist durch teilweise hochentwickelte Bausysteme gekennzeichnet. Stabtragwerke, Membran-, Netz- und Schalenbauten, Faltragwerke und Gewölbe werden den ökologischen Umständen entsprechend herangezogen und angepasst und durch die verschiedensten Stoffe materialisiert. Es ist bemerkenswert, dass hierbei die stammesgeschichtlich älteren Tiere und nicht die hochentwickelten Wirbeltiere die bei weitem ausgeklügeltsten Konstruktionen entwickelt haben. Vgl. Otto et al. (1985).

und die Bibliothèque Nationale in Paris, die zu Symbolen einer neuen Bauordnung wurden, erbaut hatte – mit der Fragestellung *“Is it the fate of architecture to give way to the art of engineering? Will the architect be eclipsed by the engineer?”* zusammen <sup>8</sup>. Der Aufstieg des Konstrukteurs in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ist durch die Tatsache, dass er die Evolution des industriellen und wissenschaftlichen Potentials auf die Verhältnisse der Baukunst zu übertragen wusste, zu begründen. Die kühnen Brückenbauten – Bereich des Konstrukteurs par excellence – eines Telfords, Stephensons, Chaleys oder Brunels begründeten eine neue Bauordnung, die nicht nur seitens der Architektur – bis hin zu Le Corbusier –, sondern allgemein von der Öffentlichkeit akklamiert worden ist.

Im Verlauf des 19. Jahrhunderts wandelte sich das intellektuelle Leben Europas. Dem enzyklopädischen Menschen, der in der Renaissance das Ideal der Zivilisation verkörpert hatte, folgte allmählich der Spezialist, der jede Inkursion in ausserhalb des eigenen liegenden Bereiche und dadurch auch die Einheit des Denkens als Dilettantismus ansieht. Auf die Verhältnisse der Konstruktion übertragen kam diese Bewegung dadurch zum Ausdruck, dass den allmählich normierten Regeln der Konstruktion zunehmend mehr Gewichtung zugeteilt wurde, als den Ideen, die sie zum Entstehen brachten. Dadurch wurden die minutiöse Kalkulation, der Nachweis auf den Bruchteil der Einheit, die stets subjektive Kostenkalkulation und nicht wie anhin das grundsätzliche Leistungsprinzip, die Qualität, zum zentralen Gegenstand der konstruktiven Ingenieurstätigkeit. Der anonyme Technokrat entthronte den Konstrukteur, womit auch die Ganzheitlichkeit, die in unserem Jahrhundert noch in den Bauwerken von Robert Maillart, Eduardo Torroja, Pier Luigi Nervi oder Felix Candela wahrnehmbar ist, verloren ging.

Heute muss festgestellt werden, dass das konstruktive Ingenieurwesen, einst Glanzpunkt einer Epoche, keinen angemessenen Eingang in das neue Zeitalter gefunden hat. Mangels Reaktionsfähigkeit und Ambition wurde die diesem Bereich gestellte Aufgabe nicht revidiert, um der rasanten technologischen, ökonomischen und gesellschaftlichen Neuordnung angepasst zu werden. Statt dessen tauchte eine autoproklamierte unifunktionale Aufgabe auf, welcher der Technokrat unter Zuzug einer einzigen hylemorphischen Lösung – einem Stoff, einer Form – kritiklos zu genügen versucht. Diese Tatsache lässt sich insbesondere dem Brückenbau entnehmen, wo nur in Ausnahmefällen Nutzungszweck, Lokalisation und Umgebung aus dem Bauwerk ablesbar sind <sup>9</sup>. Aus diesem Grund, und weil es zusätzlich seine anfänglich wegweisende Funktion in der Architektur nicht wahrnehmen konnte, verpasst das konstruktive Ingenieurwesen die Gelegenheit, einen angemessenen Beitrag zu einer hochstehenden Baukultur zu leisten.

Der Mensch bedarf, da seine Sensomotorik und sein Perzeptionsvermögen selbst kohärenten Systemstrukturen unterliegen, der intuitiven Erkenntnis von Kohärenz in seiner Umwelt. Diese Idee knüpft an einen Aphorismus von Pessoa, nach welchem das, was wir sehen, nicht das ist, was wir sehen, sondern das, was wir sind <sup>10</sup>. Als aktive Komponente des menschlichen Daseins verlangt daher die Perzeption, dass jede erzeugte materialisi-

---

8. Cit. in Giedion (1946).

9. Vgl. Schlaich (1986).

10. Pessoa (1990).

sierte Form mit den *raisons de sa nécessité* verknüpft werden kann <sup>11</sup>. Es gilt somit, Paul Janets naturphilosophische Forderung “*nul phénomène sans cause, nul mode sans substance*” wahrzunehmen und ihr zu folgen <sup>12</sup>. Wie sich dem Dargelegten entnehmen lässt, muss es gesetztes Ziel einer konstruktiven Morphologie sein, die Ganzheitlichkeit des Formgedankens im Bereich der konstruktiven Baukunst erneut zu implementieren. Es steht ausser Zweifel, dass Konstruktion Spezialisten braucht, da einzig der Materialtechnologe, der Statiker oder der Fertigungstechniker eine wissenschaftlich-technische Entwicklung vorantreiben können, aus der Innovation entspringen kann. Konstruktion selbst muss aber als Verbindungspol verschiedenster technischer und humanwissenschaftlicher Bereiche Antithese der Spezialisierung bleiben. Dementsprechend müssen für die Bewertung der angesprochenen Qualität einer Konstruktion nicht die stereotype Kosten-Dauerhaftigkeit-Analyse, sondern die Fülle von Parametern technischer, gestalterischer, ethischer und ökonomischer Art, welche die Gesamtheit des baukünstlerischen Geschehens umfassen, herangezogen werden <sup>13</sup>.

Die Entwicklung, welche die Baukunst seit dem letzten Jahrhundert genommen hat, hat zu ihrer Verzweigung geführt. Die heutige bautechnische Leistung unterliegt einerseits einer Diktatur des Stils, andererseits einer Diktatur der Technik. Die architektonische Produktion ist somit durch Inkonsistenz, die ingenieurtechnische Konstruktion durch Einseitigkeit gekennzeichnet. In dieser Disparität der Zwänge ist auch die verwickelte, seitens des Ingenieurs oft als traumatisch empfundene Beziehung zwischen Architektur und konstruktiver Ingenieurtechnik begründet <sup>14</sup>. Dabei sind aber die beiden Erscheinungen Inkonsistenz und Einseitigkeit auf den gleichen Mangel, nämlich das Nichtvorhandensein fundamentaler baukünstlerischer Prinzipien, zurückzuführen. Davioud, einer der Architekten des Trocadéro, bemerkte bereits 1877, dass die Baukunst “*will never become real, complete and fruitful until the day that the engineer, the artist, and the scientist are fused together in the same person. We have for a long time lived under the foolish persuasion that art is a kind of activity distinct from all other forms of human intelligence, having its sole source of origin in the personality of the artist himself, and its capricious fancy*” <sup>15</sup>. Wenn schon die heutige Vielschichtigkeit den Weg zu einer renaissanceistischen baumeisterlichen Einheit endgültig versperrt hat, so sind doch die Wege der Konstruktion zur Kunst – aufgefasst in der hier bereits dargelegten ursprünglichen Bedeutung – nach wie vor offen. Zu diesem Zweck muss Konstruktion von ihrem atavistischen Ballast, nämlich der Diktatur des normierten Denkens und der stofforientierten Gremien, befreit werden, um sie anschliessend ebenso wie die Design-Branche an das wissenschaftliche und technologische Potential der Jahrtausendwende anknüpfen zu können. Dies bildet die Grundlage, und zwar die einzige, aus der die Lösung des Problems, das heisst die Reinterpretation der konstruktiven Aufgabe, hervorgehen kann.

---

11. Le Ricolais (1966).

12. Janet (1882).

13. Vgl. Vitruvius (1974) sowie Gabriel (1994).

14. Das Verhältnis zwischen Architekt und Ingenieur ist natürlich ein abgestandenes Diskussionsthema, das des öfteren die Ebene der Banalität nicht zu verlassen weiss. Es nützt dem Ingenieur nur wenig, in diesem Zusammenhang sich selbst als den Unterdrückten zu bemitleiden. Vielmehr gilt es, durch ganzheitliches und innovatives Denken ein Designer-Image – ganz im Sinne des Industriedesigns – aufzubauen und dadurch die Konstruktion in der Öffentlichkeit zu würdigen.

15. Giedion (1946).

### 1.3 Übersicht

*I. Die unentbehrliche Grundlage: der morphologische Rahmen.* Es lässt sich dem bereits Dargelegten entnehmen, dass der Formbegriff – betrachtet in seiner vollen Souveränität – die Berührungsfläche zwischen Natur- und Geisteswissenschaften bildet. Einen Formbegriff nachzuweisen, heisst somit erneut und trotz einer hochgekommenen durchgängigen Spezialisierung, ein einheitliches Prinzip in der Wissenschaft anzustreben. Jedes morphologische Studium überspringt somit die jedem Fachgebiet scheinbar klar gesetzten Grenzen, um globale Zusammenhänge ganzheitlich zu erfassen und anhand dieser kontextbezogen zu deduzieren. In diesem Sinne kann die Bedeutung philosophischer Reflexionen über die Form kaum überschätzt werden. Wie Ortega y Gasset bemerkt hat, kann die Befreiung des Geistes und dadurch die Bildung wahrer Innovation einzig einer tiefen Auseinandersetzung mit Philosophie und Psychologie entspringen<sup>16</sup>. Der “geniale” Gedanke – *la pensée ingénieuse* – ist und bleibt derjenige, der die Bahnen des Gewohnten und Alltäglichen verlässt und dadurch zu einer neuen, überraschenden Ansicht der Dinge hinführt.

Andererseits setzt dieser Ansatz voraus, dass man die Form und ihr Verhältnis zum Raum und zur Zeit, also zur Geschichte versteht. Weil jede Form im Raum existiert und jedes Ereignis in der Zeit stattfindet, muss es Aufgabe jeder Geschichte sein, zu enträtseln, warum gewisse Formen gerade “dort” und “damals” auftauchen mussten. *History*, so Siegfried Giedion, *is not a compilation of facts, but an insight into a moving process of life*<sup>17</sup>. Die Notwendigkeit, eine Lösung zu finden, die auf ein einziges Prinzip zurückführt, drängt sich hierbei unmittelbar auf. Ein solcher morphologischer Ansatz stellt in der Deutung Spenglers die einzige Möglichkeit dar, die historische Entwicklung als Struktur des Seins in den Aspekt des Geschehens zu verlegen<sup>18</sup>.

Jede Auseinandersetzung mit dem Begriff Form führt notwendigerweise zur Ästhetik. Die ursprüngliche Bedeutung der Ästhetik – bei Baumgarten noch als Lehre der sinnlichen Wahrnehmung verstanden – wurde aufgrund ihrer Anbindung an die Künste zurückgedrängt<sup>19</sup>. Diese Entwicklung hat dazu geführt, dass heutzutage die von Irrationalität und Egozentrik geprägten Erfahrungen und Überlegungen von Künstlern häufig als ein Ersatz für eine philosophische Auseinandersetzung mit der Ästhetik missverstanden werden. Mangels eines geeigneten rationalen Ansatzes hat die technische Baukunst den ästhetischen Begriff in einer extrem trivialisierten Form übernommen – falls überhaupt –, um ihn inhaltlich einer faden, festgelegten Korrektheit gleichzusetzen. *However*, wie Leonhardt betont, *aesthetic qualities can also be analysed*<sup>20</sup>. In Anlehnung an Shaftesbury ist Ästhetik, wie gezeigt werden kann, etwas, was stets jenseits der Effizienz zu liegen kommt, jedoch stets ein Teil von ihr ist und ihr Wesen mitbestimmt<sup>21</sup>.

---

16. Ortega y Gasset (1992).

17. Giedion (1946).

18. Spengler (1969).

19. Mittelstraß (1980).

20. Leonhardt (1976).

21. Vgl. Cassirer (1989).

*II. Der konstruktive Gedanke der Form: die Struktur.* Die konstruktive Morphologie, das heisst das Studium von Form unter einem konstruktiven Gesichtspunkt, hat Struktur zum Gegenstand jeder Untersuchung. Struktur muss als ein logisches Organisationsprinzip, welches sich in einem einheitlichen Verknüpfungsnetz von Komponenten abbildet, verstanden werden. Dadurch ist Struktur in ihrem Ursprung eine eminent topologische Erscheinung. Als Beziehungsnetz räumlich nicht festgelegter Komponenten ermöglicht das topologische Gebilde die Untersuchung von Gleichgewichtsformen einer betrachteten Struktur – in der Konstruktion ebenso wie im Verkehrswesen, im Wasserbau oder in der Elektrizität <sup>22</sup>. Diese Interpretation der Form ermöglicht das Studium kausaler Zusammenhänge, die zwischen der Form und den ihr auferlegten physikalischen Zwängen bestehen. Im konstruktiven Bereich bildet sie die Grundlage, die die Materialisierung von Struktur in Konformität zum Durchfluss der Newtonschen Kräfte ermöglicht, und damit zu einer idealen Ausnützung der Materie und demzufolge zu einer Minimierung des Stoffaufwandes führt.

Da Druck stets mit einer gegebenenfalls massgebenden Verzweigungslast assoziiert ist, darf die vektorielle Richtung des Kraftdurchflusses nicht als indifferent angenommen werden. Aus diesem Grund drängt sich im Bereich der weitgespannten Strukturen die Aufstellung eines solchen Konzeptes auf, bei welchem die strukturelle Kontinuität durch Zug gewährleistet wird. Diese Idee beinhaltet die Forderung, dass Druck nur lokal, Zug aber global einwirkt. Diese Vorstellung knüpft natürlich am kosmischen Aufbau an, wenn man diesen als durch querschnittslose Zugstäbe miteinander verbundene kugelförmige Druckelemente andeutet. Dies stellt auch die Leitidee dar, die zum unverständlicherweise etwas mystisch beladenen Konzept des Tensegrity – begriffsmässig durch Buckminster Fullers Fusion von “tension” und “integrity” entstanden – geführt hat. Im Bereich der Zugnetzwerke und -membranen, wie die Überdachung des Olympiastadions München oder die Nuages des Pariser Grande Arche, hat sich dieses Konzept mit Selbstverständlichkeit behaupten können. Es ist allerdings symptomatisch für den Zustand der heutigen Baukultur, dass die Lastabtragung in einer zur Effizienz inversen Proportion hauptsächlich über Biegung, dann über Druck und nur geringfügig über Zug erfolgt.

*III. Die Geometrie als Sprache.* Nachdem sie sich in metaphysischen Fragestellungen und künstlerischen Formtendenzen längst angekündigt hatte, erschien in der Antike eine selbstbewusste Theorie, nach welcher die Zahl das Wesen aller sinnlich erfassbaren Dinge ist. Für die Pythagoräer liegt die Zahl den kosmischen Formen apriorisch zugrunde. Das pythagoräische Axiom – *quod omnia consistunt in numero* – wurde in der Renaissance insbesondere von Fra Luca Pacioli explizit aufgenommen <sup>23</sup>. Mit Descartes wurde die Betrachtung der Zahlen als symbolische Elemente einer endlichen Geometrie durch eine neue Zahlenidee abgelöst. Die optische Handhabe der geometrischen Konstruktion wurde somit durch eine analytische Tätigkeit ersetzt, anhand welcher Zahlen durch die Lage von Punkten bestimmt werden und umgekehrt. Die analytische Geometrie ermöglicht eine einzigartig präzise und synthetische Erfassung bestimmter Bereiche der objektiven Realität von Form. Die Stärke dieser Modellierung besteht in ihrer Fähigkeit, ein sinnlich wahrgenommenes Formenbild in ein ideal abstraktes Konzept umzu-

22. Vgl. Fenves und Branin (1963).

23. Pacioli (1980).

wandeln, was wiederum den Weg zu neuen Formen aufdecken kann. Es ist somit ersichtlich, dass die Erfassung und die Beschreibung phänomenologischer Formen einzig mit mathematischen Mitteln erfolgen kann. Als logisches Operationssystem bildet Geometrie zudem die Grundlage, um das von Carl Culmann geforderte Ziel zu erreichen, *vor allem denkende Menschen zu bilden, welche auszuführende Projekte räumlich mathematisch überblicken* <sup>24</sup>.

*IV. Die geometrische Diskretisierung des zweidimensionalen Kontinuums.* Der Versuch, Häute mit bestimmten Eigenschaften konzeptionell zu verwirklichen, kann dazu führen, dass ein zu erzeugendes Kontinuum als Grenzfall eines Diskontinuums aufgefasst wird. Umgekehrt kann die praktische Zweckmässigkeit verlangen, dass das angesprochene Kontinuum als diskretes – parkettiertes – Gebilde betrachtet wird. Beide Ansätze machen es erforderlich, dass das zweidimensionale Kontinuum und beliebige in ihr enthaltene diskrete Punktgruppen, die vorgegebenen geometrischen Gesetzmässigkeiten unterliegen, durch eine eindeutige Vorschrift miteinander verknüpft werden. Zu diesem Zweck müssen geometrische Abbildungs- und Dilatationsprozesse diskreter Punktgruppen, die durch gewisse Regelmässigkeiten gekennzeichnet sind, herangezogen werden. *Tous les Problèmes de Géométrie, so René Descartes 1637, se peuvent facilement réduire a tels termes, qu'ils n'ont besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire* <sup>25</sup>.

*V. Die Logik des Raumes: der Formfindungsprozess.* Die Auffindung optimaler Formen, das heisst solcher Formen, die in Konsonanz mit der Logik des Raumes stehen, bildet die wesentliche Grundlage des Entwurfes leichter Flächentragwerke. Zu diesem Zweck müssen die Ansätze der analytischen Geometrie überschritten werden, da die Natur – wie nach Torroja Fresnel an Laplace geschrieben hat – nicht vor analytischen Schwierigkeiten zurückschreckt <sup>26</sup>. In anderen Bereichen ingenieurtechnischer Tätigkeit, insbesondere in solchen, in denen die Form primär den Strömungsgesetzen zu unterliegen hat und die entsprechende Qualitätsbeurteilung rein leistungsbezogen ist, bildet die Formfindungsaufgabe eine unumgängliche Voraussetzung für die Verwirklichung effizienter Produkte. *Il semble, so Antoine de Saint-Éxupéry im Jahr 1939, que tout l'effort industriel de l'homme, tous ses calculs, toutes ses nuits de veille sur les épures, n'aboutissent, comme signes visibles, qu'à la seule simplicité, comme s'il fallait l'expérience de plusieurs générations pour dégager peu à peu la courbe d'une colonne, d'une carène, ou d'un fuselage d'avion, jusqu'à leur rendre la pureté élémentaire de la courbe d'un sein ou d'un épaule. [...] Il semble que la perfection soit atteinte non quand il n'y a plus rien à ajouter, mais quand il n'y a plus rien à retrancher* <sup>27</sup>. Saint-Éxupérys Denkspruch verdeutlicht, wie die Form zu Effizienz, Philosophie, Ethik und Ästhetik – also zum angesprochenen morphologischen Rahmen – führt. Gleichzeitig verdeutlicht er den Anachronismus einer konstruktiven Baukunst, die die analytisch bestimmbar Form und nicht das physikalische Geschehen als normativen Rahmen, aus welchem die konstruktiven Lösungen zu entspringen haben, bezieht.

---

24. Culmann (1875).

25. Descartes (1954).

26. Torroja (1984).

27. Saint-Exupéry (1992).

## 2 Die Form: eine kritische Auseinandersetzung

### 2.1 Zur Philosophie der Form

Unter einem systematischen Studium der Form darf nicht allein die Untersuchung ontologischer und kausaler Beziehungen verstanden werden, denn jede Erscheinung unterliegt gewissen Gesetzen, welche die Omnipräsenz der Form regeln, die ebenfalls einer Analyse bedürfen. Beim Studium des Begriffes Form werden daher die Grenzen der technischen Wissenschaften weit überschritten, und man gelangt zu einer Ebene, wo Wissenschaft, Philosophie und gegebenenfalls Theologie zu einer Einheit werden. Im Gegensatz zu den reinen Begriffen der Geometrie, die sich vollständig und adäquat definieren lassen, wird jeder Versuch, den Begriff Form zu definieren, stets einen willkürlichen Charakter aufweisen und unsere eigenen, häufig vagen Vorstellungen nur schwer verdrängen können. Wenn an dieser Stelle der metaphysische Aspekt der Form gestreift wird, dann nur, weil das Verständnis der phänomenologischen Formen es erfordert. Denn das hier praktizierte Studium erfolgt dem Ziel dieser Untersuchung entsprechend abseits der erkenntnistheoretischen Deutungen Kants aus einer auf der aristotelischen Tradition beruhenden wissenschaftlichen Perspektive der Form.

Unter dem Begriff Form wird grundsätzlich eine beliebige wahrnehmbare Gestalt bezeichnet. Jede Gestalt ist fest umrissen, wodurch sie von ihrer Umgebung getrennt und zugleich hervorgehoben wird. In der Deutung Francis Bacons gilt, dass *the form of anything is inherent in each individual instance in which the thing itself is inherent, or it would not be a form*<sup>1</sup>. Dementsprechend erhält der Begriff Form erst dann eine Bedeutung, wenn er auf etwas Begrenztes, also Endliches übertragen wird. Der Form lassen sich daher zwei Vorstellungen zuordnen, nämlich die der Trennung und die der Endlichkeit. Die Umgebung einer Form muss sich dieser Logik entsprechend aus weiteren endlichen Formen zusammensetzen. Die undefinierbare Summe aller endlichen Formen bildet die Unendlichkeit, das heisst den Raum, in welchem jede dieser Formen eingefügt ist. Sinngemäß lässt sich hierbei der Raum nicht als die dreidimensionale homogene Leere der Geometrie andeuten, sondern vielmehr als das verbleibende Referenzmedium, in welchem sich jedweder Relationswandel vollzieht. Der Raum bildet somit das konstitutive Element und ist demnach Grundlage jeder Formerscheinung.

Dadurch, dass die Form einen Teil des Raumes einnimmt, schliesst sie den weiteren Raum aus. Diese beiden Eigenschaften, die Appropriation und die Exklusion, bilden eine interne Polarität, welche die Form mit dem Unendlichen und dem Undefinierten kontrastieren lässt. Die Exteriorität der Form bildet die Quelle ihrer Spezifikation. Andererseits aber setzt die Form auch eine innerliche Essenz voraus, auf welche sie sich stützen kann. Teilhard de Chardin bringt diese Idee anhand des Ausdruckses "*coextensif à leur Dehors, il y a un Dedans des Choses*" zum Erscheinen<sup>2</sup>. Der platonisch-thomistische Begriff der

---

1. Bacon (1853).

2. Teilhard de Chardin (1955).

reinen Formen und der Formen “für sich” beinhaltet eine streng logische Abstraktion, welche die Grenzen des Verstandes übersteigt und die Form zur Dimension eines transzendentalen Aktes überführt. Bei Aristoteles hingegen bedarf die Form eines innerlichen Elementes, auf welches sie aktiv wirken kann. Erst über das innerliche Element, die passive Materie, erhält die phänomenologische Form ihren ontologischen Sinn. Unter diesem Blickwinkel ist die Form ein unterbestimmter und nicht absoluter Begriff.

Die in der Form enthaltene Widersinnigkeit besteht darin, dass sie konzeptionell den Bezug zu einem Komplement braucht, um existenzfähig zu sein, und dennoch in sich selbst ihr eigener Existenzgrund ist. Die Entwicklung einer Form, wie sie in der Natur anzutreffen ist, stellt keinen durch eine reine und schlichte Handlung geprägten Prozess dar, sondern ist vielmehr durch die Prinzipien Erfolg und Misserfolg gekennzeichnet. Es ist ein wesentliches Charakteristikum der Form, keine ziellosen Änderungen innerhalb der ihr gesetzten Möglichkeiten zu erbringen, sondern evolutionär im Sinne einer “*causa finalis*” im Raum und in der Zeit fortzuschreiten. Die Form operiert demnach methodisch in einer universellen Dimension und muss somit als ein Gesetz der Natur verstanden werden. *For when we speak of forms, we speak of nothing else than those laws and regulations of simple action which arrange and constitute any simple nature*<sup>3</sup>. Die der Morphologie gestellte Aufgabe besteht daher darin, die Beständigkeit innerhalb des Wandels aufzudecken – *découvrir l’universel sous l’exceptionnel*<sup>4</sup>.

Da nach Aristoteles die Materie in jeder Form enthalten ist, beinhaltet dieser Begriff alles, was eine Form aufweist, das heisst alles, was “ist”. *Man fragt sich nach der Ursache der Materie, und das ist die Form, durch welche sie ein Was ist, und diese Form ist die Substanz*<sup>5</sup>. Substanzen sind in dieser Deutung das Bleibende und Beharrliche in jedem Wechsel und allen Erscheinungen<sup>6</sup>. In der aristotelischen Doktrin des Hylemorphismus stellt die Realität eines Gegenstandes die Synthese aus der aktiven Form, das heisst dem Element, das ihm seinen Charakter, seine Struktur und seine Organisation verleiht, und der an sich unerkennbaren Materie, welche ihm als indeterminiertes, individualisiertes und potentiell Element zugrundeliegt, dar. Für Aristoteles ist Materie, wie sie auch im allgemeinen verstanden wird, fest, undurchdringlich und raumfüllend. Da ihr alle weiteren existenziellen Eigenschaften vorenthalten bleiben, wird Materie als qualitätsloses Substrat betrachtet. Es ist daher der dynamische Aspekt, welcher der Form die Charakteristik verleiht, bei fester Intervention die bestehenden kausalen Verknüpfungen einer Struktur zu verändern. *Die Materie und die Form ist eins und ist dasselbe, nur die eine in Möglichkeit, die andere in Wirklichkeit. [...] Denn jedes Ding ist Ein Ding, und das Potentielle ist mit dem Aktuellen in einem bestimmten Sinne Eines*<sup>7</sup>. Die Einheit des aristotelischen Denkens ist auch in der Verknüpfung des Form-Materie-Schemas mit demjenigen von Akt-Potenz zu begründen<sup>8</sup>.

---

3. Bacon (1853).

4. Teilhard de Chardin (1955).

5. Aristoteles (1920/04).

6. Vgl. Klowski (1966).

7. Aristoteles (1920/04).

8. *Danke, dass die Gunst der Musen /Unvergängliches verheisst: /Den Gehalt in deinem Busen /Und die Form in deinem Geist.* Goethe, cit. in Friedmann (1930).

Das aktive Prinzip der phänomenologischen Formen reinterpretierte Gottfried Wilhelm von Leibniz in Anlehnung an das durch den Platonismus, die Chemie- und Korpuskulartheorien sowie die biblische Doktrin der Schöpfung beeinflusste aristotelische Formkonzept, indem er diese als eine dynamisch tätige Kraft andeutete<sup>9,10</sup>: *The concept of forces [...] for whose explanations I have set up a distinct science of dynamics, brings the strongest light to bear upon our understanding of the true concept of substance. Active force [...] is carried into action by itself and needs no help*<sup>11</sup>. Dieser Ansatz knüpft an denjenigen von Leonardo da Vinci an, der zuvor *all phenomena, all animal und human forms [as] manifestations and expressions of universal forces* angedeutet hat<sup>12</sup>. In unserem Jahrhundert baute D'Arcy Thompson diese Doktrin aus, indem er das phänomenologische Geschehen der lebenden Natur unter einer physikalischen Perspektive untersuchte. Thompson deutet Form, *of any portion of matter, [...] as due to the action of force*, oder, im Sinn der Graphischen Statik Culmanns, *as a "diagram of forces"* an<sup>13</sup>.

Wie Avicenna zuvor, der für die Untersuchung kristallographischer Formen den Aristotelismus in einer mathematisch-physikalischen neuplatonischen Fassung weiterentwickelt hatte, verbanden da Vinci, Leibniz und Thompson die aristotelische dynamische Komponente der Form mit der platonischen Vorstellung einer materielosen reinen Form, die als konstitutives Einheitsprinzip des Kosmos zu verstehen ist. Diese Interpretation von Form wurde wissenschaftlich bekräftigt, als aufgezeigt werden konnte, dass die aristotelische weitverbreitete Vorstellung einer festen, undurchdringlichen und raumfüllenden Materie einzig als ein Spezialfall einer Energieerscheinung zu betrachten ist. *Materie ist dort, wo*

- 
9. Das christliche Denken behandelte das Formenproblem im Rahmen der Schöpfungslehre. In der Deutung des Timaios von Plato bei Calcidius bezeichnet der lateinische Kirchenlehrer Aurelius Augustinus (354-430) Gott als den Schöpfer aller Formen und gleichzeitig als deren Urbild. Bei Augustinus wird eine Entwicklung begründet, welche durch die gegenseitige Durchdringung von Glaube und Wissen geprägt ist. Der Augustinismus wurde durch den Philosophen und Staatsmann A. M. T. S. Boethius (480-524), allgemein als "der letzte Römer und erste Scholastiker" bezeichnet, und von J. Scotus Eriugena Johannes (unbek.-877), Theolog und Philosoph, systematisch weiterentwickelt. Unter Robert Grosseteste (um 1175-1253), englischer Theologe und Naturforscher, wurde die platonische Tradition des Augustinismus erstmals mit dem aristotelischen Denken kombiniert. Thomas von Aquino (1224-1274, heiliggesprochen 1323), bedeutendster Philosoph und Theologe des Mittelalters, verband den überlieferten Augustinismus mit den Lehren des Aristoteles, welche insbesondere durch den islamischen Arzt Ibn Sina (lateinisiert Avicenna, um 980-1037) und, in Widerpart, den arabischen Philosophen, Theologen, Jurist und Mediziner Ibn Ruschd (lateinisiert Averroes, 1126-1198) im lateinischen Abendland in ihrem ganzen Umfang bekannt geworden waren, zu einer philosophisch-theologischen Synthese. Bedeutende Beiträge zur thomistischen Formtheorie lieferten der scholastische Philosoph und Theologe Johannes Duns Scotus (um 1266-1308), Wilhelm von Ockham (1285-1349), Franziskanertheologe und kirchenpolitischer Schriftsteller, sowie die beiden Coimbrer Jesuiten Pedro da Fonseca (1528-1599) und Francisco Suárez (1548-1617). Als doktrinäre Grundlage beeinflusste der Thomismus alle weiteren Diskussionen über das Formenproblem bis in die heutigen Tage.
10. Wie Francis Bacon zuvor unterschied der Mathematiker und Philosoph Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) zwischen metaphysischen und phänomenologischen Formen. *Let there be two practical divisions; to physics that of mechanics, and to metaphysics that of magic, in the purest sense of the term, as applied to its ample means, and its command over nature.* F. Bacon, *Ibid.* Sinngemäß gilt bei Leibniz: *I fully agree that all the particular phenomena of Nature can be explained mechanically [...] but we must also consider how these mechanical principles [...] arise from higher principles and cannot be explained by quantitative and geometrical considerations alone.* G. W. Leibniz, *Animadversiones in Cartesium*, entnommen aus Emerton (1984).

*sehr viel Energie konzentriert ist; ein Feld ist dort, wo wenig Energie ist. Wenn das aber stimmt, dann ist der Unterschied zwischen Materie und Feld eher quantitativer als qualitativer Natur. Es hat dann keinen Sinn mehr, Materie und Feld als zwei grundverschiedene Dinge zu betrachten, und wir dürfen auch nicht von einer klar definierbaren Oberfläche, einer Scheidewand, zwischen Feld und Materie sprechen. [...] In einer solchen Physik wäre kein Raum mehr für beides: Feld und Materie; das Feld wäre als das einzige Reale anzusehen*<sup>14</sup>. Obschon die durch Kant geprägte philosophische Auffassung von Form diesen Sachverhalt unterdrückt hat, muss Form im weitumfassenden Sinn als energetische Erscheinung und somit als ontologisches Prinzip der Natur verstanden werden<sup>15</sup>. Die Morphologie muss somit auf die wesentliche Hypothese, dass die Strukturierung der Natur dem Prinzip des Minimums der Energie unterliegt, aufbauen. Energie muss in diesem Zusammenhang als das Wechselspiel zwischen physikalischen Kräften, das heisst Gravitationskräften sowie elektrischen, chemischen und magnetischen Kräften, und räumlichen Zwängen verstanden werden. Einen Formbegriff nachzuweisen, heisst also erneut, gegen das Absolute schlechthin anzustreben.

Trotz aller interner und externer Pluralitäten ist die Form, wie gezeigt werden konnte, universell und selbstgenügend. Die Form ist ein Gesetz und somit eine Einheit. Einheit, als logisches Konzept, steht jedoch in klarem Widerspruch zu den zuvor dargelegten Polaritäten der exkludierenden Appropriation und der abhängigkeitsbezogenen Selbstbestimmung. Einheit kann sich nur auf etwas Totales beziehen, welches nicht in sich selbst geschlossen ist und alles Sonstige relegiert. Dementsprechend schliesst sie die Möglichkeit der Begrenzung aus, da diese die Pluralität mit sich bringt. Zusätzlich schliesst Einheit auch die Determination aus, da diese nur differenziert einwirken kann und somit appropriativ-exklusive Eigenschaften aufweist. Der Einheit der Form, welche die universelle Dimension eines Gesetzes aufweist, stehen deren Pluralitäten Raumteilung, Endlichkeit, Begrenzung und Einzelausprägung, Determination und Änderung diametral gegenüber. Es ist aber gerade dieses Paradoxale, was der Form ihre Kohärenz verleiht. Die Form bezeichnet nämlich die einheitliche Aktualisierung von allem, was räumlich partiell, endlich, begrenzt und differenziert sowie determiniert und dem Wechsel ausgesetzt ist. Die Form isoliert und begrenzt das Veränderliche, gleichzeitig aber verleiht sie dem Partiiellen eine Totalität und der Pluralität eine Einheitlichkeit. Die Form ist Subjekt der Pluralität und Einheit zugleich und bildet daher die verschmelzende Verbindung des in diesen Begriffen enthaltenen Antagonismus. *La forme*, wie Jeanne Hersch schlussfolgert, *est une victoire paradoxale*<sup>16</sup>.

11. G. W. Leibniz, *De primae philosophiae emendatione et de notione substantiae*, Ibid.

12. Usher (1954).

13. Thompson (1992).

14. Einstein und Imfeld (1950).

15. Obschon die Schulphilosophen C. Wolff und A. G. Baumgarten im Begriff Form neben einem metaphysischen (Form als Seinsprinzip) und einem erkenntnistheoretischen Aspekt (Form als Bestimmung, wie Art und Gattung) ebenfalls einen physikalischen Aspekt (Form als wirkende Kraft) unterscheiden, sind Formen bei Immanuel Kant – in völliger Abkehr von der aristotelisch-scholastischen Tradition – Reflexionsbegriffe und somit ungebunden von physikalischen Ideen. Bei Kant sind Raum und Zeit Formen der Anschauung und Kategorien Formen des Denkens. *[Es gibt] zwei reine Formen sinnlicher Anschauung, [...] nämlich Raum und Zeit. Der Satz: ich denke, ist keine Erfahrung, sondern die Form der Apperzeption*. Kant (1913).

16. Hersch (1946).

## 2.2 Morphologie gebauter Formen

Allgemein betrachtet lässt sich der Prozess der Hominisation auf die Genese des Bewusstseins zurückführen. *L'animal sait, bien entendu. Mais certainement il ne sait pas qu'il sait. [...] Par rapport à lui, parce que réfléchis, nous ne sommes pas différents, mais autres*<sup>17</sup>. In biologischer Hinsicht vertritt die zoologische Subspezies "Mensch" ein Phylum ohne Gleichen. Beim Menschen – und nur beim Menschen – sammeln sich alle Perzeptionen und Erfahrungen in einer bewusst gegliederten kohärenten Systemstruktur. Konfrontiert mit einer unübersehbaren Variabilität versucht der menschliche Geist den Kosmos im scheinbaren Chaos aufzufinden. Im weitesten Sinne lässt sich das gesamte Streben des Intellekts auf die Suche nach der Invarianz in einem fluktuierenden Universum reduzieren. Wie Goethe anhand seines morphologischen Studiums schlussfolgert ist *die Lehre der Metamorphose [...] der Schlüssel zu allen Zeichen der Natur*<sup>18</sup>. Weil – nach Francis Bacon – *the roads to human power and to human knowledge lie close together, and are nearly the same*, schliesst das Verständnis der Evolution ihre gleichzeitige Kontrolle ein<sup>19</sup>. Als Studierender des evolutionären Wandels, aus dem er selbst entsprungen ist, verkörpert daher der Mensch nach Julien Huxley den kritischen Punkt *at which the evolutionary process [...] has for the first time become aware of itself. Evolution is on the verge of becoming internalized, conscious, and self-directing*<sup>20</sup>.

Goethe bezeichnet die Form als *ein Bewegliches, ein Werdendes, ein Vergehendes* und somit die Formenlehre als eine Verwandlungslehre. Um die Bedeutung der Formentwicklung in ihrem ganzen Ausmass hervorheben zu können, ist es erforderlich zu verstehen, was die Form überhaupt ist, und in welchem Verhältnis sie zur Natur und zum Geist sowie zum Raum und zur Zeit steht. Dementsprechend ist die historische Untersuchung der Form unentbehrlich. Dass daher die Logik der Form im Ursprung ihres Seins gesucht werden muss, ist unverkennbar. Eliel Saarinen fasst diese weitumfassende Idee in einem idyllischen Image zusammen<sup>21</sup>:

*The plant grows from its seed. – The characteristics of its form lie concealed in the potential power of the seed. The soil gives it strength to grow. And outer influences decide its shape in the environment.*

*Art is like the plant. – The quality of art lies concealed in the potential power of the people. The aim of the age is the soil that gives it vitality. And outer influences decide its fitness in its environment. – To understand life, and to conceive form to express this life, is the great art of man.*

Entsprechend der Deutung Eliel Saarinens darf postuliert werden, dass die Systematik, mit welcher Goethe der Entwicklung der Pflanzenformen aus dem Blatt, der Entstehung des Wirbeltiertypus oder dem Werden der geologischen Schichten nachgegangen ist, auch den geeigneten Ansatz für die Untersuchung der technischen Formen liefert<sup>22</sup>.

---

17. Teilhard de Chardin (1955).

18. Goethe (1954).

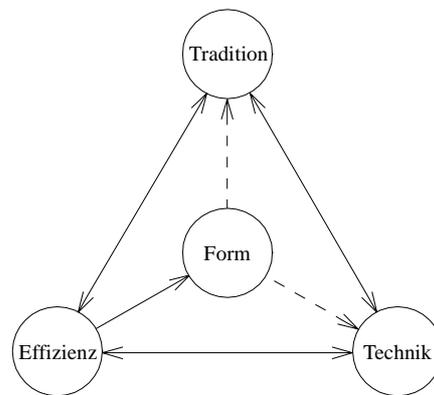
19. Bacon (1853).

20. Huxley (1954).

21. Saarinen (1985).

Alle Antworten, die von der ontologischen Untersuchung technischer Formen gefordert werden, müssen zweifellos im Menschen selbst gesucht werden. Nun unterliegt aber der menschliche Schöpfungsakt dem Bezweckten und dem Vorbedachten ebenso wie dem Instinktiven, dem Intuitiven und dem Emotionellen. Jede menschliche Formerzeugung bildet einen verwickelten Schöpfungsakt, bei welchem vielseitige, nur teilweise erfassbare Parameter interagieren. Aus diesem Grund bedarf es der Aufstellung eines Denkmodells, das die Synthese dieses vielfältig verflochtenen Unternehmens ermöglicht. Hierdrin liegt die Wurzel, und zwar die einzige, aus der die Lösung des Problems hervorgehen kann. Das tiefe Verständnis der bereits erzeugten Formen und der konsequente, realitätsbezogene Ausblick in die zukünftigen Entwicklungsmöglichkeiten – des öfteren durch zusammenhanglose Vergleiche oder Aneinanderreihungen willkürlich festgelegter ad hoc Parameter getrübt – können nur anhand eines übersichtlichen Konstruktes, welches eine zielgerichtete Ordnung von Begriffen und Denkabläufen beinhaltet, erfolgen.

Zu diesem Zweck wird die Gesamtheit aller im menschlichen Formakt involvierten Parameter in die drei Glieder Tradition, Technik und Effizienz sowie in deren Interdependenzen zerlegt. Die Formkreation, wie sie hier verstanden wird, unterliegt einem systematischen Prozess, dessen Ursprung in ein aus Tradition, Technik und Effizienz bestehendes, dreipoliges Beziehungsgeflecht verankert ist.



*Bild 2.1: Die Formbildung als Triangulationsprozess.*

Als hypothetisches Spiegelbild der menschlichen Tätigkeit muss ein solches Schema selbst allen im Menschen enthaltenen Ambivalenzen unterliegen. Die in der Folge näher untersuchten Glieder Tradition, Technik und Effizienz unterliegen Parametern, die mit relativer Objektivität untersucht werden können. Hingegen ist der Triangulationsfluss, das heisst die Dialektik und Gewichtung der einzelnen Glieder im Triangulationsprozess, durch individuelle Parameter geregelt, die höchstens im konkreten Fall mit den Mitteln der Psychologie bestimmbar sind.

---

22. Anhand seiner Forschungsarbeiten eruierte Goethe die periodische Struktur und das Organisationsprinzip der Organismen. Goethes Untersuchungen erfolgten unter dem bedeutsamen Ansatz, dass zum Begriff der Art auch der ihr zugeordnete Lebensraum gehört, ebenso wie die Berücksichtigung der Umgestaltung der Organismen im Entwicklungsprozess. Ibid., vgl. auch Krätz (1992).

## Tradition

Die menschliche Existenz unterliegt einer Logik des Raums und der Zeit, welche das gesamte mythologische, religiöse und künstlerische Denken ausfüllt und das Wesen und den Kern aller menschlichen Geschichte bildet. Diese mit der “conditio humana” verbundene Logik, die Tradition, bildet die wesentliche Voraussetzung, welche der Bildung einer kollektiven und individuellen Identität dient und eine Entwicklung und einen Wandel in den kulturellen Erscheinungsformen ermöglicht. Sinnemäss besteht die Tradition im kontinuierlichen Aufbau von Überlieferungen und der Bewahrung dieser geistigen Bestände über Generationen.

In der Geschichte aller höheren Kulturen begegnen uns Zeitabschnitte, die für den Abschluss einer bis zu ihrem Höhepunkt entfalteten Entwicklung des menschlichen Denkens und Schaffens bezeichnend sind. Solche Wendepunkte des Pfades, entlang welchem die Geschichte der Baukunst sich wandelt, sind stets durch hervorragende Bauten festgelegt. Als Urban VIII 1632 die Inschrift

PANTHEON – AEDIFICIVM TOTO TERRARVM ORBE – CELEBERRIMVM

am Pantheon in Rom anbringen liess, verfolgte er die Absicht, auf die symbolische Bedeutung dieses hadrianischen Gebäudes in der christlichen Welt hinzuweisen. Michelangelo bezeichnete zuvor das Pantheon als das Ergebnis eines *disegno angelico e non umano*, und Goethe ordnete es der inneren Grösse nach als das wunderbarste Werk, das er in Italien vorgefunden hatte, ein. Die didaktische Rolle dieses am Anfang des 2. Jahrhunderts erbauten, einzigartigen Bauwerkes bei nachträglich gebauten Formen lässt sich auf die Prägnanz und den Universalismus einer im majestätischen Massstab ausgeführten, einfachen Geometrie und auf eine ausgereifte, hochentwickelte empirische Bautechnik zurückführen<sup>23</sup>.



Bild 2.2: Das Pantheon.

23. Das Pantheon in Rom beeinflusste die abendländische Baukunst bis in die moderne Ära. Der Einfluss, welchen das Pantheon in architektonischer Hinsicht beispielsweise auf Andrea Palladio (1508-1580) oder James Wyatt (1747-1813) ausgeübt hat, ist deutlich erkennbar. Vgl. Licht (1968), MacDonald (1976). In bautechnischer Hinsicht wirkte die Spannweite der hemisphärischen Kuppel des Pantheons – 43.30 m Innendurchmesser – fast zwei Millennien lang als eine empirisch festgelegte Grenzspannweite. Der Dom der um 537 erbauten Hagia Sophia in Konstantinopel – nach Mark (1987) von den anhand des Pantheons gesammelten konstruktiven Erfahrungen bedeutend beeinflusst – weist einen Innendurchmesser von 32 m auf. Brunelleschis Florenzer Dom von 1446, Michelangelos St. Peters Dom von 1590 und Sir Christopher Wrens St. Pauls Dom von 1710 weisen Innendurchmesser von 42 m, 40 m und 31 m auf. Vgl. Badr (1962), Luebke (1992). Die Spannweite des Pantheons blieb bis zum Bau der Jahrhunderthalle in Breslau im Jahre 1909 unübertroffen.

Anfänglich war die römische Baukunst durch eine vielfach die etruskische Richtung weiterverfolgende Technik sowie durch eine von der hellenischen Kunst übernommene Formenwelt beherrscht. Zur Zeit Hadrians erlebte das römische Reich seine höchste Wirtschaftsblüte, die sich insbesondere in einer regen städtischen Bautätigkeit äusserte. Es galt daher, die übernommenen technischen und architektonischen Traditionen den sich stets vergrössernden sozialen Erfordernissen durch neue bauliche Techniken und neue Formsymbole anzupassen<sup>24</sup>. Als Kulminationspunkt dieser Entwicklung vereinigt das Pantheon diese Übernahme und Bildung von Tradition auf exemplarische Weise.

Die Tradition verweist auf die Notwendigkeit jedes Individuums, Orientierungswissen zu übernehmen. Das kulturelle Erbe ist einerseits durch die gegenwärtige Umgebung, andererseits durch die Ereignisse der besonderen Geschichte und das subjektive Perzeptionsvermögen, das heisst die Biographie des Individuums, gekennzeichnet. Die Tradition umfasst jedoch zugleich die Alternativen Annahme oder Ablehnung und besteht somit in ihrem Kern aus einem Paradox, welches ihr einen einzigartigen wegweisenden Charakter verleiht. Obschon sie mit dem Anspruch nach unveränderter Weitergabe und Ausführung der kulturellen Werte auftritt, bedarf die Tradition der Anpassung, der Veränderung und der Neuinterpretation, um überhaupt wirksam Orientierung bieten zu können. Die Tradition ist also sinngemäss eine Lehre der Metamorphose<sup>25</sup>.

Jeder aus dem menschlichen Bewusstsein entspringende schöpferische Akt weist notwendigerweise einen hohen Reproduktionsgrad auf, welcher auf die gemeinsame Identität zurückzuführen ist. Die Möglichkeit der Innovation in diesem Prozess ergibt sich aus der kritisch eingestellten, individuellen Traditionsübernahme, so dass die verfügbaren Referenzwerte im innovativen Pfad orientierend wirken können. In diesem Sinne dient jede Form gleichzeitig als normativer Rahmen und als Widerpart bei jeder neuen Formbildung. Der Fortschritt entspringt somit niemals aus bezugslosen Ideen. Jede Erfindung beruht auf einer Weiterbildung oder auf einer neuen Kombination von übernommenen Ideen. Die Elemente einer Erfindung oder einer Vervollkommnung – so Vierendeel – schweben in der Luft wie der Blütenstaub im Frühling bei der Suche nach einem zu befruchtenden Geist<sup>26</sup>. Dies stellt auch die Leitidee dar, welche Fritz Zwicky veranlasste, seine Morphologische Methode im Hinblick auf die Entwicklung neuartiger Antriebssysteme für Raketen zu entwickeln<sup>27</sup>.

---

24. Die im nachchristlichen Jahrhundert entstandene römische Gewölbetechnik zeichnet sich durch eine mit dem heutigen Betonskelettbau verwandte Bauweise aus. Die Hauptcharakteristik dieser leistungsfähigen und rationellen Ausführungsmethodik, die sich wirtschaftlich durch ungelernete Arbeitskräfte ausführen lässt, besteht in der Bildung eines aus Backsteinen bestehenden Systems tragender Rippen und Entlastungsbögen auf einer Holzschalung und der nachträglichen Ausfüllung der gebildeten Zwischenräume mit einem aus abwechselnd eingebrachten Schichten von Mörtel und Ziegelbrocken zusammengesetzten Gusswerk. Vgl. Beltrami (1929), Harries (1995) und Straub (1992). Im Gegensatz zu der in der Literatur oft anzutreffenden Vorstellung deuten neue Untersuchungen darauf hin, dass die statischen Aspekte, das heisst das hypothetische Streben zum monolithischen Bauwerk, keinen Beitrag zu dieser Entwicklung geleistet haben. Vgl. Mark (1987).

25. *Étudier les systèmes admis par les constructeurs antérieurs à notre temps c'est à coup sûr le vraie moyen d'apprendre à construire nous-mêmes, mais il faut tirer de cette étude autre chose que des copies plates.* Viollet-le-Duc, *Entretien sur l'architecture*, 1863-1872, in Viollet-le-Duc (1984).

26. In Cardellach (1993).

## Technik

Ein der Art "Mensch" gemeinsames Merkmal besteht darin, dass dieser in einer selbstgestalteten kulturellen Umwelt lebt. Die Technik ist in diesem Sinne kein isolierter und selbständiger Bereich, sondern eng mit Ökonomie, Gesellschaft, Politik und Kultur verflochten. Das Studium der Technik ist daher auch ein wesentlicher Teil der Anthropologie, die auf der Grundlage des Zusammenwirkens verschiedener Disziplinen das menschliche Sein untersucht. Für das Verständnis der Technik ist nebst allen sozialen, wirtschaftlichen, politischen und humanen Bezügen auch die Zeitdimension miteinzubeziehen. Es muss erklärtes Ziel einer Geschichte der Technik sein, zusätzlich zur Darstellung des technischen Geschehens selbst die Beschreibung der historischen Entwicklung der Technik in ihren soziokulturellen Entstehungs- und Verwendungszusammenhängen zu erörtern.

Die ersten kultivierten Techniken entstanden als Folge der neolithischen Revolution um das dritte vorchristliche Jahrhundert mit den Hochkulturen befestigter Städte am Euphrat und Tigris, am Indus sowie am Hwangho. Die entscheidende Wende in der technischen Entwicklung ergab sich, als diese bis dato einen empirischen Charakter aufweisenden Techniken mit der bei Galilei beginnenden europäischen Wissenschaft gekoppelt wurden. Ortega y Gasset unterscheidet klar zwischen der empirischen Technik eines hochtechnisierten China, wo bereits zur mittelalterlichen Zeit das Papier, der Eisenguss, das Porzellan, das Schiesspulver oder der Kompass bekannt waren, und der im 18. Jahrhundert entstandenen europäischen Technik, welche als einzige einer wissenschaftlichen Basis entspringt, was ihr den sehr spezifischen Charakter der unbegrenzten Entwicklungsmöglichkeiten verleiht<sup>28,29</sup>.

Im allgemeinen besteht die Tendenz, die Naturwissenschaften mit dem Wissen und die Technik mit der Wirkung zu verknüpfen. Tatsächlich aber stehen Technik und Wissenschaft in einem Wechselverhältnis gegenseitiger Voraussetzung und Folge. *Die Technik treibt die Naturwissenschaften, wie die Naturwissenschaften ihrerseits die Technik treiben*<sup>30</sup>. Wie uns die Geschichte des konstruktiven Ingenieurwesens lehrt, ist der Ingenieur

---

27. Vgl. Zwicky (1989).

28. Ortega y Gasset (1992).

29. Dass der Mensch in diesem Prozess gleichzeitig enormen Gefahren ausgesetzt ist, muss in den heutigen Tagen kaum ins Bewusstsein gebracht werden. Das die menschlichen Systeme regelnde gegenwärtige Denken stellt die Erbschaft jahrtausendealter Ideologien und Erfahrungen dar und ist ersichtlicherweise hinter den Ereignissen zurückgeblieben. Einzig über einen neuen, dem technologischen Zeitalter angemessenen Humanismus werden sich neue Wertssysteme ableiten lassen, die über die Lieferung adäquater Mittel zur Aufstellung neuer, die fortschreitende Konvergenz des weltweiten Systems berücksichtigender globaler Strategien führen können, mit welchen sich die entscheidenden Herausforderungen unseres Zeitalters bewältigen lassen. Diese Diskussion wurde vor allem durch die Berichte des Club of Rome zur Lage der Menschheit in ein weites Publikum hineingetragen. Vgl. Peccei (1981), Jonas (1984), v. Weizsäcker (1987). In Huning (1978) heisst es in diesem Zusammenhang: *Eine Zeit kann nur dann die rechte Technik und das rechte Verhältnis zu ihrer Technik haben, wenn sie das rechte Menschenbild hat. Daher ergibt sich die drängende Notwendigkeit einer ziel-, massstab- und leitorientierten Erziehung statt blosser Vermittlungskompetenz für bruchstückhaftes Sachwissen, das den homo faber sapiens zum blossen – und so furchtbar gefährlichen – homo faber macht.*

in der Lage, bei Bedarf den durch die Wissenschaften gesetzten Rahmen zu überspringen und komplexe technische Innovationen zu erbringen<sup>31,32</sup>. *The art [of engineering] is – in den Worten Ove Arups –, by a synthesis of ends and means, to arrive at a good solution. This is a creative activity, involving imagination, intuition and deliberate choice*<sup>33</sup>.

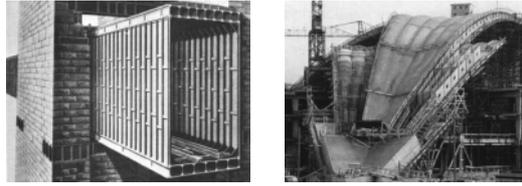


Bild 2.3: Die Britannia Bridge und der CNIT.

Des öfteren bedarf das Verständnis der empirischen Welt solcher Erkenntnisse, die nicht über das rein logische Denken erfolgen können. Als Stephenson und Fairbairn um 1850 bei der Projektierung der Britannia Bridge mit dem Problem des Knickens des Druckflansches konfrontiert wurden, entwickelten sie auf experimenteller Basis den zellularen Querschnitt. Die induktive Vorgehensweise der Ingenieure der Britannia Bridge, so wie von Clark beschrieben, ist typisch für das gesamte Ingenieurwesen: *It was necessary to determine what kind of information was required [...] and to ascertain generally in what manner tubes might be expected to fail, and to what extent their strength might be modified by form*<sup>34</sup>. Die Bahnüberquerung der Wasserstrasse von Menai stellte neue Erfordernisse, denen einzig durch systematisch aufgezoogene experimentelle Tätigkeit genügt werden konnte. Die Erfassung der theoretischen Hintergründe und die Diffusion und Verallgemeinerung des somit gesammelten Wissens sind charakteristisch für die technische Progression des konstruktiven Ingenieurwesens. Ein Jahrhundert später fand der zellulare Querschnitt Stephensons und Fairbairns eine bedeutende Anwendung in Esquillans monumentalem Palais des Expositions du CNIT<sup>35</sup>. Die obige Leitidee Clarks lässt sich in der Aussage von Esquillan wiedererkennen: *Le problème crucial pour des coques d'une pareille envergure est celui du flambement combiné avec le fluage. La sécurité au flambement général a été obtenue en recourant à une double coque (moment d'inertie maximum avec le minimum de matière)*<sup>36</sup>.

30. Huning (1978).

31. Vgl. Wagner (1991).

32. Die technische Evolution ist selbstverständlich auch durch Misserfolge gekennzeichnet. Ebenso wie die Versuche der Britannia Bridge trugen das Versagen der Quebec City Bridge 1907 oder der Kühltürme in Ferrybridge, England, 1965 zum besseren Verständnis der Instabilitätserscheinungen bei. Vgl. Ferguson (1992), Hayman und Chilver (1971).

33. Ove Arup & Partners (1986).

34. E. Clark, *Britannia and Conway Bridges*, 1850, in Rosenberg und Vincenti (1978). Clark arbeitete als Bauführer der Britannia Bridge mit Stephenson und Fairbairn zusammen. Vgl. ebenfalls Peters (1977).

35. Die auf nur drei Punkte aufgesetzte Schale des Palais des Expositions setzte neue Rekordspannweiten fest. Die überdeckte Fläche beschreibt ein äquilaterales Dreieck mit der Seitenlänge 218 m und einem Inhalt von 20'500 m<sup>2</sup>. Die theoretische Pfeilhöhe beträgt 46.30 m. Die Stege und Flansche des Regelquerschnittes weisen eine gleiche Stärke von 6 cm auf. Esquillan verbildlicht diese Abmessungsverhältnisse wie folgt: *Ces coques sont environ vingt fois plus minces que la coquille d'oeuf transposée à l'échelle de la voûte*. Vgl. Marrey (1992).

36. Esquillan (1960). Vgl. auch Sanchez del Rio (1962).

## Effizienz

Weil die Suche nach der wahren Bedeutung der Form das Studium ihrer Ursprünge voraussetzt, führt der Weg zu ihr durch die Natur hindurch. In der aristotelischen Doktrin ist die Natur durch das Prinzip der Vernunft normativ geregelt. Jeder Akt der Natur ist durch Rationalismus geprägt, und jede sich daraus ergebende Schöpfung weist eine Kohärenz auf, die auf ihre Kontextbezogenheit zurückzuführen ist. *La nature agit toujours par les moyens les plus simples [...] et chaque chose finit toujours par s'accommoder à son milieu*<sup>37</sup>. Die Formen der Natur sind demzufolge das Produkt eines durch den Kontext gesteuerten rationalen Aktes<sup>38</sup>.



Bild 2.4: Spinnennetz.

Da der Mensch selbst das Ergebnis eines Aktes der Natur ist, muss die Quintessenz des menschlichen Handels, in Anlehnung an das Diktum von Thomas von Aquino "*art imitatur naturam in sua operatione*", konsonant zu den natürlichen Prinzipien sein<sup>39</sup>. Anknüpfend an dieses Postulat lassen sich einige Parallelen zwischen den natürlichen und den menschlichen Tragstrukturen ziehen: *The spider and the structural engineer share similar requirements and constraints when designing a new structure*<sup>40</sup>. Der natürliche sowie der menschliche Akt weisen eine einheitliche Substanz auf, die auf die kontextbedingte Zielsetzung und die durch Rationalismus geprägte Entscheidungslogik zurückzuführen ist. Nun ist aber die Natur – im Sinne Leibniz' die göttliche Kunstfertigkeit – unserer Technik weit überlegen: *The spider is using the techniques of the late twentieth century engineer, but with much more elegance and precision*<sup>41</sup>.

Jede Tätigkeit des denkend handelnden Menschen ist auf das Auftreten von Problemen zurückzuführen. Diese Probleme definieren den Kontext, nach welchem sich der Akt zu richten hat. Die Wirkkraft des menschlichen Aktes ist demzufolge von der korrekten und

37. Janet (1882).

38. Prinzipiell stehen die Naturformen in einem idealen Verhältnis zum Kontext oder zumindest in einem variant-idealen Verhältnis, wenn man den Faktor Zeit miteinbezieht und den unendlich andauernden Evolutionsprozess im Sinne des Darwinismus berücksichtigt. Der potentielle Koexistenzgrad zwischen dem Kontext und der Form wird allgemein als Anpassungsfähigkeit bezeichnet. Auftretende divergierende Tendenzen zwischen dem Kontext und der Form im Entwicklungsprozess können zum Aussterben dieser Form führen.

39. Thomas von Aquino, *Summa Theologiae*, I. Cit. in Eco (1988).

40. Rice (1994).

41. Ibid. In dieser Hinsicht ist zu erwarten, dass das computerunterstützte biomechanische Studium der Optimierungsprozesse und der Werkstoffe der Natur im Hinblick auf ihre Übertragung auf technische Bauteile wertvolle Ergebnisse liefern kann. Erste ermutigende Ergebnisse liegen bereits vor. Vgl. Mattheck (1992), SFB 230 (1991).

vollständigen Erfassung des zugrunde liegenden Problems abhängig. Aus der eindeutigen Festlegung des Kontextes ergibt sich eine bestimmte Umweltkonstellation. Die durch den Rationalismus vorgegebene Entscheidungslogik bestimmt die im funktionalen Zusammenhang zu dieser Konstellation stehenden zulässigen Operationsalternativen. In Analogie zu den Systemmodellen der Mikroökonomie lassen sich die dem Akt zugrunde liegenden funktionalen Zusammenhänge anhand des Ausdruckes

$$Akt = f(\text{Kontext}, \text{Entscheidungslogik})$$

formal darstellen<sup>42</sup>. Gemeinsam und auf interaktive Weise bestimmen der Kontext und die Entscheidungslogik das Ergebnis des Aktes, die Form.

Die Wertbestimmung einer Form erfolgt anhand der Beurteilung des Koexistenzgrades zwischen der Form und dem Kontext unter Berücksichtigung der im Akt erbrachten Leistung. Diese Verknüpfung der Form mit den Begriffen Ertrag und Aufwand führt zum Prinzip der Effizienz. In der technischen Sprache wird Effizienz durch den aus Produktionsleistungsertrag durch kalkulierbare Vorleistungen im Produktionsprozess gebildeten Quotienten,

$$\text{Effizienz} = \text{Output} / \text{Input},$$

definiert. Wie die Natur ist der Mensch stets bestrebt, den Wert dieses Quotienten zu maximieren. Leibniz argumentiert, dass wir in der vollkommensten aller möglichen Welten leben, weil die Natur nach diesen *Gesetzen der Finalgründe* operiert<sup>43</sup>. Bei Le Ricolais endet diese Gedankenkette bei solchen Tragstrukturen, die durch eine unendlich grosse Effizienz gekennzeichnet sind: *L'avenir demandera aux ingénieurs des structures dont le poids soit aussi petit que possible et dont les portées soient illimitées*. Freyssinets Ideal *“remplacer la matière qui est pesante par des forces qui, elles, ne pèsent rien”* konzentriert Le Ricolais in einer Utopie: *portée infinie, poids nul*<sup>44</sup>.

In den rein technischen und insbesondere in den ökonomischen Bereichen ist die Effizienz einer endlichen Anzahl erfassbarer Parameter ausgesetzt und stellt dementsprechend eine objektive, eindeutige und quantifizierbare Grösse dar, anhand welcher die Gültigkeit eines Konzeptes überprüft werden kann. Als kennzeichnende Grösse zumindest jeder Maschine wirkt die Effizienz somit als Massstab für die technische Progression. Darüberhinaus kann an der Tatsache, dass in den Staaten unserer Zeit den Wechselwirkungen zwischen der Wirtschaft einerseits und der Technik andererseits grundlegende Wichtigkeit beigemessen werden muss, nicht gezweifelt werden. Aber auch jede Kunst-erzeugung wird erst als solche wahrgenommen, wenn ihren physikalischen Manifestationen ein Kohärenzsystem zwischen dem Kontext und der zur produzierenden Form führenden Variablenwahl, also eine Effizienz, zugeschrieben werden kann. Dass hierbei jede Beurteilung subjektiven gemeinschaftlichen und individuellen Kriterien unterliegt, versteht sich von selbst.

---

42. Vgl. Hanssmann (1987).

43. Leibniz (1994).

44. Mimram (1983).

### 2.3 Ästhetik technischer Formen

Die entscheidende Wendung in der Entwicklung des höheren Lebenwesens erfolgte, als die triebhafte Urerfahrung in ein deutlich bewusstes Urwissen übergegangen war. Die Passivität des reinen Empfindens wurde durch die Aktivität des Denkens ersetzt. Dieses aktive Sein – cogito ergo sum – ist so alt wie das frei im Raum bewegliche Leben überhaupt. Jedes sich bewegende Tier weist eine artspezifische Technik auf, welche seiner Erhaltung und Verteidigung dient. Somit ist die Natur gleichzeitig Produzent und Anwender einer Technik, welche dem evolutionären Wandel ausgesetzt ist. Weil jeder Akt einer Technik bedarf, ist diese ein Urhumanum. Unabhängig davon, ob der gesamte Prozess einer finalen Gesetzlichkeit der Natur unterliegt, ist der Mensch, wie die Natur selbst, seit jeher Produzent von Technik und zugleich in der historischen Progression von Beginn an sein eigenes technisches Produkt.

Obschon die Möglichkeiten der technischen Produktion nicht apriorisch feststellbar sind, lässt sich die Technik durch die Bestimmung dessen, was gegen die Gesetze der Natur verstößt, negativ abgrenzen. Das technische Schaffen ist in zweifacher Weise von den Gesetzmässigkeiten der Natur geprägt. Einerseits bilden die empirischen oder wissenschaftlichen Kenntnisse der Naturgesetze die instrumentale Grundlage, welcher sich die schöpferische Phantasie des Menschen bedienen kann. Andererseits aber legen diese Gesetze die Grenzen fest, die der technischen Produktion gesetzt sind. Erst die naturwissenschaftlichen Kenntnisse ermöglichen das Gedankenspiel mit einem perpetuum mobile, dessen Verwirklichung aber aufgrund der Naturgesetze ausgeschlossen ist.

Die technische Produktion ergibt sich aus der Aufgabe, welche der Mensch sich selbst aus seinen Bedürfnissen stellt, und bezieht somit ihr Dasein aus menschlicher Zwecksetzung. Hierin entfaltet sich ein wesentliches charakterisierendes Merkmal der vom Menschen erzeugten Technik. Wie die Kunst ist auch die Technik Ausdruck menschlicher Schöpferkraft. Obschon die empirisch oder wissenschaftlich begründete Beherrschung der Naturgesetze die Voraussetzung technischer Einfälle ist, entspringen diese Einfälle dem menschlichen Existenzbewusstsein. Ebenso wie das Kunstwerk sind die technischen Formen vor ihrer Verwirklichung in den Gedanken des Schaffenden präformiert worden.

Der schöpferische Aspekt stellt einen wesentlichen Charakterzug des technischen Aktes dar, aus welchem sich eine weitere Eigenschaft der Technik ableiten lässt. Indem die Schöpfung zu einer neuen selbstständigen Wirklichkeit führt, ist sie durch eine gewisse Souveränität und Mächtigkeit gekennzeichnet. Diese eigendynamische Komponente der Technik stellt ein Potential dar, birgt aber gleichzeitig bedeutende Gefahren in sich, die nur durch die Mittel der Technik selbst zu bewältigen sind. Dass der Mensch als homo faber seinen eigenen Erzeugnissen unterworfen ist, bringt Goethes Mephistopheles klar zum Ausdruck mit der Warnung *“Am Ende hängen wir doch ab von Kreaturen, die wir machten”*<sup>45</sup>.

---

45. So Mephistopheles “ad spectatores” in Goethes *Faust, zweiter Teil*.

Eine herkömmliche Definition, nach welcher die Technik bloße angewandte Naturwissenschaft ist, berücksichtigt wesentliche Merkmale dieses Begriffes nicht. Insbesondere gilt es in dem hier angesprochenen Zusammenhang die Technik als eine elementare Aktgattung zu betrachten. Die Bezeichnung der Technik als *“die Betätigung der Schöpferkraft des Menschen, die im Rahmen der Naturgesetze und im Dienst menschlicher Daseinsbewältigung eine von menschlicher Zwecksetzung bestimmte Wirklichkeit in und neben der Naturwirklichkeit schafft”* erscheint dem Wesen der Technik in ihrem vollen Umfang entscheidend näherzukommen <sup>46</sup>.

Anhand des technischen Aktes erzeugt der Mensch neue Werkzeuge unter der Verwendung bereits vorhandener Werkzeuge. Die Vertilgung des Stoffes durch die Form verleiht dem Werkzeug seine Zweckmässigkeit. Es ist eine Inhärenz jedes Werkzeugs, dass dessen Aktualität erst bei der Funktionserfüllung vollkommen ist. Ein stehendes Flugzeug sowie ein ausgeschaltetes Radio drücken höchstens ein Flug-, beziehungsweise ein Tonpotential aus. Nur selten wird ein technisches Objekt, welches ein Beobachter nicht mit einer ihm zugänglichen Zweckmässigkeit verknüpfen kann, einen ästhetischen Genuss auslösen. Umgekehrt entspringt das Schönheitsgefühl der Wahrnehmung einer vollkommenen Anpassung einer Form an ihre Funktion. Die Formel *“Beauty is fitness expressed”* drückt Le Corbusier, der für eine funktionale Ästhetik in der Architektur plädiert, mit dem Satz *“Quand une chose répond à un besoin, elle est belle”* aus <sup>47,48</sup>.



Bild 2.5: Die Concorde.

Jede technische Formerzeugung enthält die Charakterzüge einer Kohärenz und stellt somit eine Einheit dar. Beeinflusst durch die Behauptung des Kartesianismus, das Wesen des Wissens sei in der Einheit enthalten, versucht die klassizistische Ästhetik, die Essenz des künstlerischen Prozesses und Urteils in ihrer Einheitlichkeit und der ihr eigentümlichen Gesamtheit zu erfassen. In Anlehnung an die mathematischen Wissenschaften, die beispielsweise anhand eines einzigen übersichtlichen Ausdruckes,

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \quad (2.1)$$

die Gesamtheit aller Ellipsoide erfassen, fordert die klassizistische Theorie eine Einheit in der ästhetischen Mannigfaltigkeit. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Verknüp-

---

46. Wipert (1962).

47. Ghyka (1987).

48. Le Corbusier untersucht die funktionale Ästhetik der Ingenieurleistung, um sie mit der Ziellosigkeit der architektonischen Produktionen kontrastieren zu lassen. *L'avion est un produit de haute sélection. La leçon de l'avion est dans la logique qui a présidé à l'énoncé du problème et à sa réalisation. [...] Le problème de la maison n'est pas posé.* Le Corbusier (1958).

fung der Begriffe Ästhetik und Natur. In der Natur entspringt nichts, was auf Laune und Willkür gegründet ist, sondern einzig das, was in Konsonanz zu den ewigen Prinzipien steht. Dieser “Vernunft” der Natur zufolge verknüpft die klassizistische Ästhetik die Ideale der “Schönheit” und der “Wahrheit”. In der ästhetizistischen Deutung Boileaus gilt, dass *Rien n’est beau que le vrai, le vrai seul est aimable* <sup>49</sup>.

Mit dieser Gleichsetzung hat die Theorie des Klassizismus das ästhetische Denken des industriellen Zeitalters in entscheidender Weise geprägt. Die Wirklichkeitsstärke der Technik und der ihr immanenten klassizistischen Ideale der Wahrheit übten selbst in den Bereichen der reinen Künste, beispielsweise bei Fernand Léger und Naum Gabo, einen bedeutenden Einfluss aus <sup>50</sup>. In seinen architekturtheoretischen Schriften fordert Le Corbusier eine *beauté plus technique* und eine *esthétique plus près de ses causes véritables* <sup>51</sup>. Le Corbusier, ebenso wie Léger und Gabo, entdeckt in der technischen Produktion, das heisst insbesondere im Flugzeug-, Schiff- und Automobilbau sowie in den Baukonstruktionen eines Telfords, Brunels oder Eiffels, das Kriterium der Wahrheit und das klassizistische Korollar der echten Schönheit, die Simplizität. Dadurch werden die im Leitsatz “simplex sigillum veri” enthaltenen Ideale dem Ästhetizismus angepasst <sup>52</sup>.

In der klassizistischen Deutung ergibt sich der ästhetische Ausdruck einer Baukonstruktion bei Torroja und bei Nervi aus der statischen Wahrheit <sup>53</sup>. Die ästhetischen Qualitäten eines technischen Produktes stehen in direkter Abhängigkeit zu seinem Effizienz- und Funktionalitätsgrad. *La verità funzionali, tecnica, ed economica [...] è sufficiente a raggiungere un aspetto estetico soddisfacente o per lo meno non disturbante. [...] Infatti se consideriamo la più vasta serie di manufatti, dall’edilizia all’aeronautica, è facile constatare che tutti gli esemplari veri sono anche esteticamente soddisfacenti* <sup>54</sup>. Der Klassizismus sieht in der Wahrheit die unerlässliche Voraussetzung für die echte Schönheit. Nun ist aber die Wahrheit von der Ehrlichkeit und Zielstrebigkeit eines Geisteszustandes abhängig. Die Gefahr der klassizistischen Ästhetik besteht demzufolge darin, dass die Forderung nach Wahrheit zur Routine und somit zur ästhetischen Trivialität führen kann. Dominique Bouhours Formulierung “*Les pensées à force d’être vraies sont quelquefois triviales*” bringt diese Idee der Degenerierung in einer konzisen Art zum Ausdruck <sup>55</sup>. Tatsächlich ist unsere bebaute Umwelt weitgehend durch einen ästhetischen Bankrott gekennzeichnet <sup>56</sup>. Im Bereich des konstruktiven Ingenieurwesens wird oft die ästhetische Trivialität mit einer stets unanfechtbaren statischen Wahrheit kaschiert <sup>57</sup>.

49. Nicolas Boileau-Despréaux (1636-1711), in Cassirer (1989).

50. Vgl. Léger (1924) und Gabo (1989).

51. Ibid. Die Parallelität zu Fernand Légers “*l’architecture de la mécanique*” ist unverkennbar. Ibid.

52. “Das Einfache ist das Siegel des Wahren”.

53. Vgl. Torroja (1984).

54. Nervi (1965).

55. Dominique Bouhour (1628-1702), in Cassirer, (1989).

56. Pier Luigi Nervi steht der ästhetischen Degeneration besonders kritisch gegenüber: *E nessun periodo è stato altrettanto ricco di opere edilizie esteticamente mal riuscite, insopportabilmente retoriche e, a volta, offensivamente volgari*. Ibid. Fritz Leonhardt bekräftigt diese Ansicht: *In most of our cities we have examples of such ugliness of modern buildings, of residential high rise quarters with depressing monotony or of massive concrete structures which are perfectly out of human scales. Such modern architecture has gained the significant name of brutalism*. Leonhardt (1976).

Dementsprechend reicht die Geradlinigkeit des Denkens, an der die klassizistische Ästhetik festhält und die sie als Norm aufstellt, in dem hier angesprochenen Zusammenhang nicht aus. *Art tends not only to discover the truth but to exaggerate and finally distort it; and, maybe in this distortion lies the essence of art* <sup>58</sup>. Die Ästhetik braucht zusätzlich zur Aufrichtigkeit und Exaktheit ein weiteres Ideal, anhand dessen alle ästhetischen Unlinearitäten erfasst werden können, nämlich die Inexaktheit, oder, anders ausgedrückt, die Phantasie, die dem Subjektivismus und der Intuition unterliegt <sup>59</sup>. Das Ästhetische verlangt einen Gegensatz zur absoluten Wahrheitsrationalität, welchen einzig die *traces de la main* bilden können. *Wenn die Logik Stetigkeit verlangt, so fordert die Ästhetik Plötzlichkeit* <sup>60</sup>. Eduardo Torroja vertritt die Ansicht, dass zur Erzielung eines wirklich ästhetischen Tragwerkes eine überlegene und präzise künstlerische Empfindsamkeit mit fruchtbarer schöpferischer Phantasie vereinigt werden muss <sup>61</sup>.

Die ästhetische Inexaktheit umfasst nicht ausschliesslich den Inhalt des Gedankens, sondern die Art und den Prozess des Denkens überhaupt. Die spezifischen Gesetzmässigkeiten des ästhetischen Bewusstseins lassen sich somit nicht mit der Bündigkeit einer logischen oder mathematischen Schlussfolgerung demonstrieren. Das rein deduktive Vorgehen und das vernünftige Beurteilen des Klassizismus erweisen sich in diesem Zusammenhang als ungenügend. Wie uns die alltägliche Erfahrung lehrt, kann eine feststehende Skala ästhetischer Werte unmöglich gebildet werden. Obwohl die alten Produktionen der Kunst oder der Technik der sicherste Beweis dafür sind, dass das Gefühl und somit die ästhetische Eindrucksfähigkeit des Menschen im Wandel des Denkens durch eine gewisse Konstanz geprägt sind, weist das ästhetische Mass stets eine Abhängigkeit von Zeit und Individuum auf. Die wissenschaftliche Ästhetik verlangt daher einen Ansatz, welcher im Sinne von Hume auf der Verhaltenspsychologie begründet ist <sup>62</sup>. Erst das Erkennen der zwischen dem Absolutum des Klassizismus sowie der Variabilität, der Relativität, der Intuition und der Subjektivität herrschenden Korrelation ermöglicht das Verständnis des ästhetischen Geschehens.

---

57. In diesem Zusammenhang heisst es bei v. Gunten (1983): *Eine häufig geäusserte Behauptung lautet: «Was statisch richtig ist, ist auch schön.» Die erste Frage wäre wohl die, was «statisch richtig» bedeutet. Ist nicht alles, was nicht zusammenstürzt, statisch richtig? Und kennen wir nicht viele hässliche Brücken, bei denen das Kräftespiel höchst ausgeklügelt und bestimmt statisch richtig ist? Wenn man den Satz umkehrt und etwa sagen würde: «Was statisch verkrampt, undurchsichtig oder unsinnig ist, wirkt hässlich», könnte er eher sinnvoll werden.* Billington vertritt eine äquivalente Meinung: *Too many ugly structures result from minimal design to support any simple formula connecting efficiency and economy to elegance.* Billington (1983). Vgl. auch Schlaich (1986).

58. Matthew Nowicki, 1960, in Temko (1962). Zusammen mit W. H. Deitrick entwarf Nowicki das berühmte gewordene cattle-judging pavilion in Raleigh, North Carolina, 1953.

59. Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) bezeichnet die Phantasie als die *hervorstechend künstlerische Fähigkeit*. In der Ästhetik Hegels ist der schöpferische Akt an die Phantasie geknüpft: *Dann muss man sich jedoch sogleich hüten, die Phantasie mit der bloss passiven Einbildungskraft zu verwechseln. Die Phantasie ist schaffend.* Hegel (1989).

60. Cassirer (1989).

61. Torroja (1984).

62. Für David Hume (1711-1776) ist *beauty no quality in things themselves: it exists merely in the mind which contemplates them; and each mind perceives a different beauty*. Humes Philosophie geht rein explizit weit weniger auf ästhetische, als auf erkenntnistheoretische und psychologische, auf ethische und religionsphilosophische Fragen ein. Vgl. Hume (1757). Vgl. auch Cassirer (1989) und v. Gunten (1983).

In früheren Zeiten bestand keine scharfe Trennung zwischen den beinahe die Gesamtheit des verfügbaren Wissens ausmachenden Begriffen “ars” und “scientiae”. In unseren Tagen ist die bestehende Parallelität trotz allen Wandels weiterhin unverkennbar <sup>63</sup>. Sowohl die aus dem künstlerischen als auch aus dem technischen Akt sich ergebenden Formen weisen einen ästhetischen Wert auf. Was nun die Realität des Kunstwerks von der Realität einer Konstruktion unterscheidet, ist die Zweckfreiheit des Kunstwerks gegenüber der rationalen Zweckmäßigkeit des technischen Produkts. Kunst entsteht dort, wo die Form das einzige gesetzte Ziel ist. Das bedeutet, dass bei der echten Kunsterzeugung eine bestimmte Erscheinungsform in der Materie festgehalten wird, welche wiederum in das Geistige übergehen soll. Das Versagen in der Kunst erfolgt daher nicht aufgrund der Nichteinhaltung vorgegebener ästhetischer Normen, sondern vielmehr aufgrund einer nicht erreichten ontologischen Kohärenz.



Bild 2.6: A. Giacometti, *La Main*.

Dass die Zweckfreiheit den Formen einen künstlerischen Wert verleiht, schliesst die Möglichkeit nicht aus, dass auch technische Formen den Rang von Kunst aufweisen können. So sind die skulpturalen Eigenschaften, die der Bogen des Jefferson Memorials in St. Louis von Eero Saarinen aufweist, auch in dem Bogen der D. Maria Pia Brücke von Gustave Eiffel enthalten. Sigfried Giedion und Max Bill zögern nicht, die Gewagtheit einer Konzeption eines Maillarts von einer rein technischen auf eine künstlerisch-visiönäre Ebene zu erheben <sup>64</sup>. Jede zweckfreie Form, die eine ontologische Essenz aufweist, ist ein Gegenstand der Kunst. Die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch nicht zulässig, da die Zweckgebundenheit der Kunst nicht im Wege steht <sup>65</sup>.

Was dem Akt einer Schöpfung grundsätzlich eine künstlerische Dimension verleiht ist nicht unbedingt die Zweckungebundenheit, sondern vielmehr *la pure joie créatrice* des Schöpfers <sup>66</sup>. Der künstlerische Akt entspringt aus der Leidenschaft desjenigen, der aus einer Perzeption den inneren Impuls der Kreation empfindet. In der ästhetischen Philosophie Hegels ist diese Begeisterung nichts anderes *als von der Sache ganz erfüllt zu werden, ganz in der Sache gegenwärtig zu sein und nicht eher [zu] ruhen, als bis die Kunstgestalt ausgeprägt und in sich abgerundet ist* <sup>67</sup>. Erst aufgrund seiner seelischen Erregung während des impulsiven Aktes vermag der Schöpfer wahre Kunst zu erzeugen. Somit ist die ästhetische Wertbestimmung der zweckgebundenen Formen vom Gefühlszustand des Technikers abhängig. Nervi unterscheidet klar zwischen solchen Formen, die

63. Vgl. Kap. 7.1, pp. 151-152.

64. Vgl. Giedion (1946), Bill (1949).

65. Vgl. Kap. 1.2, pp. 4-6.

66. Hersch (1946).

67. Ibid.

aufgrund ihrer physikalischen Wahrheit korrekt sind, und solchen, die eine künstlerische Leidenschaft des Individuums zum Ausdruck bringen: *Se per fatto artistico si intende qualche cosa di più del semplice soddisfacimento estetico, ossia, come penserei, la indefinibile qualità di un'opera di risvegliare nel nostro spirito la risonanza dei sentimenti e dell'emozione provati dall'artista nell'atto creativo*<sup>68</sup>. Nur der Wille zur Kunsterzeugung erlaubt die Emanzipation des physikalischen Gefühls von der rein rechnerischen Erfassung und dadurch die Entfaltung der schöpferischen Kraft des Konstrukteurs<sup>69</sup>.



Bild 2.7: E. Saarinen, Terminal der TWA.

In diesem Zusammenhang kann man der Fragestellung nach den Anforderungen, die an den wirklichkeitsmächtigen Konstrukteur gestellt werden müssten, nicht ausweichen. Dass der Techniker keine Fehler begehen darf, da die menschliche Sicherheit und das menschliche Leben von der Richtigkeit seiner Produkte abhängig sind, versteht sich von selbst. Darüberhinaus ist der Techniker verpflichtet, seine zweckbezogenen Produkte im Rahmen einer wirtschaftlich ausgerichteten Gesellschaft zu erzeugen. Dem Techniker müssen diese Aspekte, die Solidität und die wirtschaftliche Zweckmässigkeit, kaum ins Bewusstsein gerufen werden.

Im Sinne von Vitruvius muss nun aber jede Schöpfung derart angeordnet werden, dass bei ihrer Errichtung auch der künstlerischen Vollendung, dem *venustas*, die gebührende Beachtung geschenkt wird<sup>70</sup>. Steinmann merkte an, dass kein Brückenbauer diesen Namen verdiene, solange er nicht von der Leidenschaft erfüllt sei, seine Werke schön zu bauen<sup>71</sup>. Wenn nun die künstlerische Schöpfung der Technik der *traces de la main* bedarf, so benötigt der schöpferische Techniker selbst – wie Peter Rice es fordert – eine Identität<sup>72</sup>. Der Konstrukteur muss der Anonymität, in die er versunken ist, entchlüpfen und als Individuum für seine Schöpfungen gerade stehen. Nur so kann der Techniker seinen Verpflichtungen und Verantwortungen gegenüber der Öffentlichkeit in vollem Umfang gerecht werden. Ein derartiger Beitrag für eine bessere Gestaltung der Umwelt bildet die unumgängliche Grundlage für die Erschaffung eines Berufsbildes, aus welchem die gerechte Anerkennung der Ingenieurleistung hervorgehen kann.

68. Ibid.

69. Vgl. G. Meyer, *Eisenbauten, ihre Geschichte und Ästhetik*, 1907, in Hartmann (1928). Auch Billington vertritt die Ansicht, dass das wissenschaftliche Wissen die Erzeugung von Kunst nicht gewährleisten kann: *Knowing the scientific basis does not guarantee that the design will be art. The engineer must intend the work to be art.* Ibid.

70. Vgl. Vitruvius, in der Übersetzung von Prestel (1974). *We must conceive it as an important fact that the lack of aesthetic quality of our environment causes psychic and physical illness, it only takes time.* Leonhardt (1976).

71. v. Gunten (1983).

72. Rice (1994).

## 3 Strukturelle Morphologie

### 3.1 Form und Struktur

Formen – mit den Worten von Thomas von Aquino – *[are] not the structural principle of beings, but rather those very structured beings*<sup>1</sup>. Diese Idee knüpft an die Doktrin der Pythagoräer und des Demokritus, nach welcher die Formen als aus quantifizierbaren Verknüpfungen zusammengesetzte Konfigurationen – also als Strukturen – aufgefasst werden. Kant, der sich deutlich an Vorstellungen vom lebenden Organismus orientiert, definiert Struktur als die “Lage und Verbindung der Teile eines nach einheitlichem Zweck sich bildenden Organismus”<sup>2</sup>. In dieser Deutung ist Struktur eine atomistische Auffassung der Form. Mit dem strukturalistischen Ansatz werden komplexe Daten eines Ganzen, das heisst einer Form, auf eine endliche Anzahl bestimmter Elemente zurückgeführt. Struktur ist somit Form “von innen” gesehen. Wie Francis Bacon bemerkt, erlaubt das Verständnis des Ordnungsgefüges der Natursysteme deren Manipulation: *For he who is acquainted with forms, comprehends the unity of nature in substances apparently most distinct from each other. He can disclose and bring forward [...] things which [...] would for ever have escaped man’s thoughts; from the discovery of forms, therefore, results truth in speculation and freedom in operation*<sup>3</sup>. Grundsätzlich ist Struktur die nach Gesetzen geschaffene Einheit elementarer Teile und Verbände. Das entscheidende Merkmal von Struktur liegt nun darin, dass die Betonung bei allen Anwendungen vielmehr auf den Bezügen, das heisst auf dem logischen Aufbau, als auf den Einheiten liegt.

Als analytischer Begriff eignet sich Struktur zur Analyse gegenständlicher wie phänomenologischer Ereignisse der Natur. Selbst das menschliche Bewusstsein beruht auf kohärenten Systemstrukturen, auf welche die Verarbeitung der Sinneseindrücke zurückzuführen ist. In psychologischer Hinsicht stellt Wahrnehmung dementsprechend einen aktiven Prozess der Organisation und Interpretation von Informationen im Dienst einer Handlung dar. Sie ergibt sich aus der Bereitschaft des menschlichen Nervensystems, jede Perzeption zu definieren und sie in einer zunehmenden Anzahl überlappender Mengenkategorien kumulativ zu gruppieren und zu katalogisieren. Dabei werden formale und funktionale Eindrücke durch die Hervorhebung determinanter Elementverknüpfungen abstrahiert und durch einen konzisen und präzisen Sprachgebrauch formuliert und übermittelt. Umgekehrt aber sind diese Systemstrukturen der Wahrnehmung auf die komplexe Struktur der Sprache selbst gegründet. *I believe, so Bertrand Russell, that, with sufficient caution, the properties of language may help us to understand the structure of the world*<sup>4</sup>. Das Verständnis der als Struktur betrachteten Form bedarf dementsprechend auch des Verständnisses des strukturellen Aufbaus der Gedankenwege des Menschen. *En effet, il faut sortir d’abord de nos structures mentales pour construire des structures véritables*<sup>5</sup>.

---

1. Eco (1988).

2. Brockhaus-Enzyklopädie (1993).

3. Bacon (1853).

4. Russell (1951).

Als logisches Konzept stellt Struktur eine Antithese von Materie dar. Tatsächlich ist das Verhalten jeder Struktur nicht von den physikalischen Eigenschaften ihrer Komponenten, sondern primär von dem ihr zugrunde liegenden Beziehungsnetz abhängig. So sind die heterogenen Eigenschaften von Graphit und Diamant – zwei aus den gleichen Kohlenstoffatomen zusammengesetzte Strukturen – einzig auf die unterschiedlichen Organisationschemata zurückzuführen. Auch werden zwei unterschiedlich materialisierte aber geometrisch gleichwertige Ketten unter gleichen Voraussetzungen gleiche geometrische Formen annehmen, ebenso wie zwei äquivalent dazu materialisierte Tetraeder unter allen beliebigen Voraussetzungen formstabil bleiben werden. Die Tatsache, dass Struktur in ihrer Essenz ein geometrisches und somit stoffunabhängiges Phänomen ist, lässt sich ebenfalls dadurch veranschaulichen, dass der atomare Aufbau jeder Struktur einen extrem diskontinuierlichen – das heisst materiefreien – Charakter aufweist. Struktur ist das gewissen Gesetzmässigkeiten unterliegende Prinzip aller Erscheinungen.

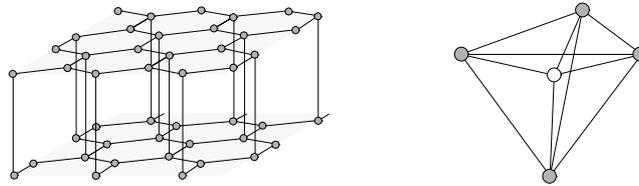


Bild 3.1: Die Strukturen des Graphits und des Diamants.

Da Struktur in ihrem Urwesen durch die Beziehungen ihrer Elemente definiert ist, lässt sie sich über ihre topologischen Eigenschaften eindeutig charakterisieren. Diese Mathematisierung der Form knüpft an Galileis pythagoräischen Aphorismus an, welcher die mathematische Sprache als die Wissenschaft von der Struktur des Universums ansieht: *[L'Univers] est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont [...] des figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur*<sup>6</sup>. Die topologische Perzeption unterliegt den rigorosen logischen Gesetzmässigkeiten und Regeln der Mathematik, was die präzise Formulierung und Kombination aller relevanter Abhängigkeiten und Zusammenhänge möglich macht<sup>7</sup>. Beispielsweise erfolgte die Erkenntnis der als Eulerscher Polyedersatz – Anzahl Ecken plus Anzahl Flächen gleich Anzahl Kanten plus zwei – bezeichneten Regelmässigkeit, als man die Platonischen Körper als ein entmaterialisiertes topologisches Konzept betrachtete.

|                   |    |   |    |   |    |   |   |
|-------------------|----|---|----|---|----|---|---|
| <i>Tetraeder</i>  | 4  | + | 4  | = | 6  | + | 2 |
| <i>Oktaeder</i>   | 6  | + | 8  | = | 12 | + | 2 |
| <i>Würfel</i>     | 8  | + | 6  | = | 12 | + | 2 |
| <i>Ikosaeder</i>  | 12 | + | 20 | = | 30 | + | 2 |
| <i>Dodekaeder</i> | 20 | + | 12 | = | 30 | + | 2 |

Bild 3.2: Der Eulersche Polyedersatz.

5. Emmerich (1968).

6. Galilei (1980).

7. Vgl. Hilbert und Cohn-Vossen (1932) sowie Lord und Wilson (1984).

Über den topologischen Ansatz werden die Verknüpfungsbeziehungen aller Elemente einer Struktur in einer eindeutigen Vorschrift matriziell erfasst. Als logisches Konzept erteilt die Topologie jedoch keine Informationen über die räumliche Lage der Knoten oder die Art der Verbindungskurven. Dadurch bildet die Topologie – wie sich herausstellen wird – den geeigneten Ansatz für die Untersuchung vektorieller Gleichgewichtszustände, die Buckminster Fullers Definition von Struktur zugrunde liegen. Weil aber alle topologischen Eigenschaften des Tetraeders in gleicher Weise im Würfel, im Ellipsoid oder in der Kugel enthalten sind, definiert die Topologie keine Form. Zusätzlich zu den topologischen Eigenschaften bedarf die geometrische Definition der Form der eindeutigen Festlegung aller Krümmungs- und Verwindungseigenschaften der Verbindungskurven sowie der räumlichen Anordnung aller als Knotenpunkte idealisierten Elemente.

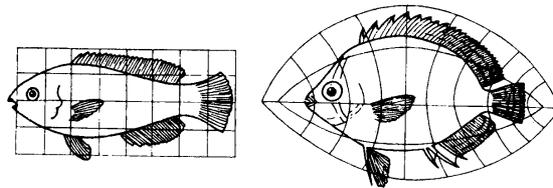


Bild 3.3: Topologische Identitäten *Scarus* und *Pomacanthus*.

Bei den als vektoriellen Gleichgewichtsschemata aufgefassten Strukturen entfällt die Unbekannte “Verbindungskurve”. Vektoren sind nämlich eine mathematische Idealisierung energetischer Erscheinungen, die definitionsgemäss eine geradlinige Wirkungslinie aufweisen. Dadurch entfällt die topologische Gleichheit zwischen den geometrischen Identitäten Tetraeder, Würfel, Ellipsoid und Kugel. Trotzdem ist hiermit noch keine Form definiert, da Tetraeder die Gesamtheit aller Strukturen, welche sich aus den Beziehungen zwischen vier Punkten des Raumes ergeben, umfasst. Der Tetraeder repräsentiert daher eine unendliche Anzahl geometrisch verwandter Formen.

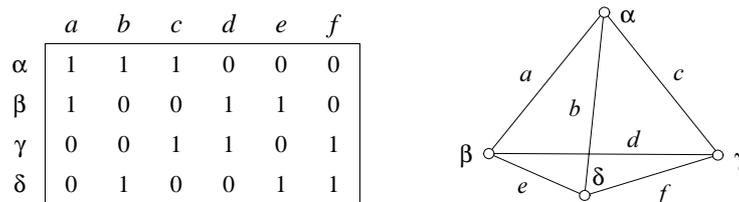


Bild 3.4: Topologische Matrix und entsprechende Struktur.

Die Spezifikation der Form muss daher anhand der Definition der räumlichen Anordnung aller Strukturelemente erfolgen. Als konzeptionelles Gebilde operiert Struktur stets in einer von der Magnitude unabhängigen Dimension. Struktur ist ein omnipräsentes Phänomen, welches auf allen Ebenen der Natursysteme, von den Milchstrassenstrukturen des Universums bis hin zu den Nukleonenstrukturen anzutreffen ist. Aus diesem Grund lässt sich die Form einer Struktur nicht über die Festlegung metrischer Eigenschaften, sondern einzig über die zwischen allen involvierten Elementen bestehenden Winkelgrößen bestimmen. Der als Struktur aufgefassten Form liegt demnach ein winkeltopologisches Konzept zugrunde.

### 3.2 Gleichgewichtsformen einer Struktur

*A structure is a self-stabilizing energy-event complex*<sup>8</sup>. Mit dieser konzisen Definition verknüpft Buckminster Fuller den Begriff Struktur mit den Prinzipien der Stabilität und der Energie. Alle im Universum wirkenden Kräfte vereinigen sich in stabilen Anordnungen, die durch Minimalprinzipien geregelt sind. Aristoteles verknüpft die Begriffe Struktur und Beständigkeit, indem er die Formen als Substanzen, und Substanzen als das Bleibende und Beharrliche in jedem Wechsel und allen Erscheinungen bezeichnet<sup>9</sup>. Wo immer Kräfte zu einem durch die Beständigkeit gekennzeichneten ganzheitlichen System zusammentreffen, treten stabile Strukturen auf. Der stabilen Struktur liegt demzufolge eine als räumlich-zeitliche Ganzheit verstandene Kräftekohäsion zugrunde. Die winkeltopologische Konzeption der Form führt dazu, dass Stabilität als Winkelbeständigkeit einer Struktur verstanden werden muss. Definitionsgemäss bezeichnet Stabilität sinngemäss die angulare Invarianz eines winkeltopologischen Konzeptes.

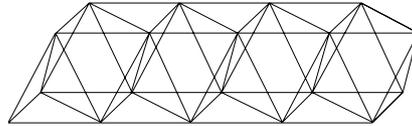


Bild 3.5: Räumliches Stabfachwerk.

In der Mechanik unterscheidet man zwischen solchen Strukturen, die in ihrem inneren Aufbau entweder starr oder beweglich sind. Starrheit und Beweglichkeit sind mechanische Verhaltensweisen, die durch die Topologie einer Struktur gegeben sind. Starrheit bedeutet inhärente Stabilität. Starre Strukturen sind für alle Einwirkungen stets angular invariant. Beweglichkeit bedeutet, dass die Struktur unter beliebigen Belastungen keine Winkelbeständigkeit aufweist und somit nicht formstabil ist. Der Grad der Beweglichkeit einer Struktur lässt sich über die Anzahl der als Freiheitsgrade  $F$  definierten unabhängigen Dreh- oder Verschiebungsbewegungen einzelner Elemente quantifizieren. Alle Strukturen, die keinen oder einen negativen Freiheitsgrad aufweisen,

$$F \leq 0, \tag{3.1}$$

sind inhärent stabil. Dagegen müssen bei durch positive Freiheitsgrade charakterisierten Strukturen,

$$F > 0, \tag{3.2}$$

kinematische Aspekte berücksichtigt werden<sup>10</sup>.

8. Buckminster Fuller (1975).

9. Vgl. Kłowski (1966).

10. In der Mechanik werden bewegliche Strukturen, mit welchen bestimmte Wirkungen ausgeübt werden sollen, als Maschinen definiert. Hiermit erfolgt ebenfalls eine Verknüpfung mit den leider wenig erforschten faltbaren räumlichen Tragstrukturen. *La conception et la réalisation d'une structure réticulée est le résultat d'un comportement de l'esprit face à la nature, qui se décompose, s'analyse et se manifeste de façon nouvelle suivant une réalisation qui est le fruit de génie de l'homme.* Piñero (1969).

Beim Durchdenken von Struktur und Stabilität ist es unübersehbar, dass die einzigen inhärent stabilen Strukturen omnitriangular sind <sup>11</sup>. Dies bedeutet wiederum, dass einzig die geometrische Identität Dreieck – eine durch die Beziehung dreier nicht kollinear Punkte gegebene Struktur – inhärent stabil ist. Es ist nun naheliegend, dass die Triangulationsbedingung ebenfalls durch ein topologisches Verhältnis – einen aus Verknüpfungen durch Elemente gebildeten Quotienten – gegeben sein muss. Die topologischen Verknüpfungsbeziehungen einer Struktur lassen sich als Kanten einer geometrischen Figur auffassen. In entsprechender Weise können die Elemente als Eckpunkte angedeutet werden. Für alle aus einer bestimmten Anzahl  $K$  Kanten und  $E$  Ecken zusammengesetzten Strukturen der Ebene ist die inhärente Stabilität durch die Bedingung

$$\frac{K}{2E - 3} \geq 1 \quad (3.3)$$

gegeben. Analog dazu gilt für alle polyedrischen Strukturen die Ungleichung <sup>12</sup>

$$\frac{K}{3E - 6} \geq 1. \quad (3.4)$$

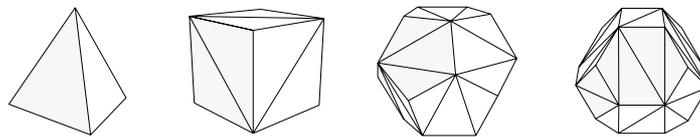


Bild 3.6: Inhärent stabile polyedrische Strukturen.

Omnitriangulare Strukturen sind inhärent stabil. Innerlich bewegliche Strukturen können in Abhängigkeit strukturfremder Faktoren einen empfindlichen Gleichgewichtszustand annehmen. Dieser Gleichgewichtszustand ist dann eingehalten, wenn die äusseren Kräfteinwirkungen jede unabhängige Bewegungsmöglichkeit behindern. Es drängt sich hiermit die Fragestellung auf, welche grundlegenden Strukturprinzipien für stabile Gleichgewichtsformen verantwortlich sind. Grundsätzlich wird hierzu der Begriff des Energieprinzips herangezogen <sup>13</sup>. In den Gebieten, wo sich diese Anschauung als tauglich erwiesen hat, sind die stabilen Gleichgewichtsformen durch die Minimierung der gesamten potentiellen Energie der Struktur eindeutig bestimmt. Diese Betrachtung des stabilen Gleichgewichtszustandes einer Struktur führt bis in das Jahr 1690 zurück, als der Basler Mathematiker Jakob Bernoulli die Aufgabe gestellt hat, die Kettenlinie mit den Mitteln der Mathematik zu erfassen. Wie im folgenden Jahr sein Bruder Johann und, unabhängig voneinander Leibniz und Huygens zeigen konnten, ist die potentielle Energie eines Elementes der Länge  $ds$  einer Kette mit gleicher Masse je Längeneinheit pro-

- 
11. Wie die kristallographische Untersuchung der homogenen Raumteilung offenbart, ist die Omnitriangularität eine universelle Eigenschaft des Raumes. Der Isotropie der Raumstruktur entspricht die Partition des Raumes in  $n$  Tetraeder und  $n/2$  Oktaeder – zwei inhärent stabile Strukturen. Die Form des isotropen Raumes ist daher nicht durch die kartesische Winkelgrösse  $\pi/2$  – die kartesisch kubische Raumteilung ist anisotrop – sondern durch die tetraedische Winkelgrösse  $\pi/3$  eindeutig bestimmt.
  12. Die Ausdrücke (3.3) und (3.4) stellen dementsprechend die Abzählbedingung für die statische Bestimmtheit ebener beziehungsweise räumlicher Fachwerke dar.
  13. Vgl. Whyte (1967).

portional zu dem Produkt  $y \cdot ds$ , falls  $y$  die Koordinate einer parallel zum Gravitationsvektor zeigenden Achse bezeichnet. Die Form, welche die Kette im Schwerfeld annimmt, ist dann diejenige, die dem Minimum der gesamten potentiellen Energie

$$\int y \cdot ds \quad (3.5)$$

entspricht. Die Lösung führt zur Gleichgewichtsform  $y(x)$  der Kette, dem hyperbolischen Cosinus.

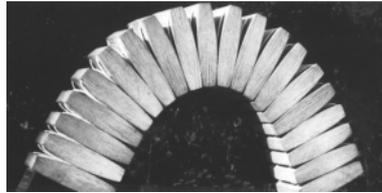


Bild 3.7: Die "Stützkette".

Die Kette, wie alle anderen innerlich beweglichen Strukturen, bedarf eines systemfremden vektoriellen Angriffes, um eine stabile Gleichgewichtsform anzunehmen. Hierbei besteht eine Affinität zwischen den angreifenden Vektoren und dem Mechanismus der Struktur, so dass bestimmten Vektorgruppen eindeutige Formen zuzuordnen sind und umgekehrt.

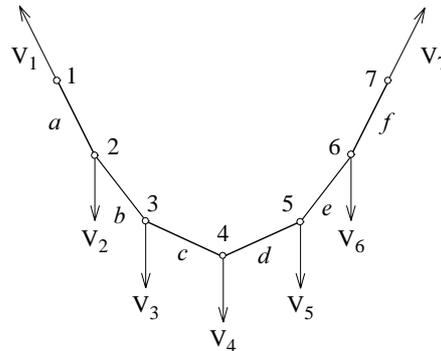


Bild 3.8: Belastungsaffine Kettenform.

Bei zusätzlich wirkenden Vektorgruppen nimmt die Kette eine neue stabile Gleichgewichtsform an, die der vektoriellen Superposition beider Gruppen entspricht. Hierbei ist das auf die Magnitude und Richtung bezogene Verhältnis zwischen den beiden Vektorgruppen von entscheidender Bedeutung für die Formänderung der Kette. Die Steifigkeit der Kette ergibt sich somit aus dem Verhältnis zwischen ständig wirkenden und variabel angreifenden Vektorgruppen. Entsprechendes gilt selbstverständlich für die als Fläche ausgebildeten innerlich beweglichen Strukturen. In Abhängigkeit des Spieles – Magnitude und Richtung – aller involvierten Kräfte ergeben sich hierbei aus dem gleichen topologischen Konzept antiklastische oder synklastische Flächen<sup>14</sup>. Auf diese Zusammenhänge wird in einem der folgenden Kapitel näher eingegangen.

14. Vgl. Motro (1992).

### 3.3 Struktur und Stoff

#### Logische und physikalische Konzeption von Struktur

In metaphysischer Hinsicht ist Struktur ein geschlossenes und ganzheitliches Verknüpfungsschema von aufeinanderwirkenden energetischen Ereignissen. Die strukturelle Kohärenz und die stabilen Gleichgewichtsformen ergeben sich aus den Einschränkungen möglicherweise eintretender Prozesse, welche einerseits durch die Energieprinzipien, andererseits durch die topologischen Eigenschaften der Struktur gesetzt sind. Als logisches Konzept lässt sich Struktur daher auf die zwei interdependenten Variablen Form und Kraft zurückführen. Als System des physikalischen Universums ist Struktur nun aber verkörperte Logik in Aktion. Die physikalische Struktur beinhaltet eine vorausgehende Verwirklichung von Vorstellungen, die anhand der objektiven Transposition eines Konzeptes in die physikalische Realität erfolgt. Struktur, wie sie in der Technik oder in der gegenständlichen Natur anzutreffen ist, bedeutet die Erweiterung des Form-Kraft Prinzipes auf die in diesem Zusammenhang untrennbare hylemorphische Trilogie Form-Kraft-Materie – *form is structure, and matter is what enters into the structure*<sup>15</sup>.

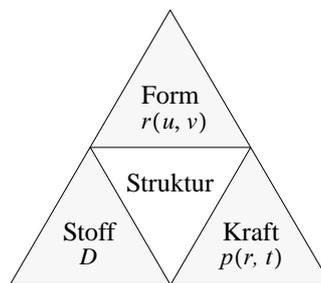


Bild 3.9: Struktur, Form, Kraft und Materie.

Soweit die vorgegebenen Randbedingungen und alle weiteren Variablen es zulassen, operiert die Natur stets nach dem Prinzip des direkten Kraftflusses. Hierdurch lassen sich alle strukturellen Elemente optimal ausnützen, so dass die Steifigkeit maximiert und der Werkstoffaufwand minimiert werden können<sup>16</sup>. Mit dem progressiven Verständnis natürlicher Phänomene zeichnet sich eine konvergierende Tendenz der technischen Strukturen in Richtung auf die nach dem Prinzip der Auslese – also der Effizienz – geprägten physikalischen Strukturen der Natur ab. Es ist hierbei bemerkenswert, dass diese notgezwungene Annäherung nicht durch direkte Nachahmung, sondern vielmehr über die wissenschaftliche Entwicklung hocheffizienter Strukturen erfolgen konnte. Nicht das direkte Studium der natürlichen Strukturen, sondern die fachübergreifenden wissenschaftlichen Erkenntnisse wirken als Katalysator in diesem konvergierenden Prozess<sup>17</sup>.

15. Williams (1958).

16. Vgl. Nachtigal (1974).

17. In diesem Zusammenhang erscheint es unerlässlich, auf die 1961 gegründete Arbeitsgruppe “Biologie und Bauen” hinzuweisen. Diese fachübergreifende internationale Gruppe verfolgt das Ziel, an einem besseren Verständnis von Biologie, Technik und Baukunst zu arbeiten. Vgl. Otto et al. (1985).

Schon früh ist den Anatomen aufgefallen, dass der als Spongiosa-Architektur bezeichnete innere Aufbau des menschlichen Oberschenkelknochens ein strukturelles System von sich senkrecht schneidenden Linien darstellt. Carl Culmann erkannte als erster, was den Biologen und Medizinern lange Zeit verborgen blieb, nämlich dass die Spongiosa-Struktur ein verknöchertes Spannungstrajektorienfeld ist<sup>18</sup>. Ausgehend von den Trajektorien des entsprechenden räumlichen Kontinuums entwickelte die Natur ein feingliedriges, engmaschiges Netzwerk normalkraftbeanspruchter Stäbe. Die Stabkräfte entsprechen den Volumenspannungen zwischen den Stäben, so dass das Knotengleichgewicht stets erfüllt ist. Der hier zugrunde liegende Prozess beruht auf logischen Schritten, die durch die Mittel der Technik nachvollziehbar sind<sup>19</sup>. Für einen als elastisches Kontinuum aufgefassten ebenen Tragwerksraum lässt sich anhand der Auflagerbedingungen und Belastung ein Trajektorienbild erstellen. Das Zusammenfassen von Trajektorien und das Entfernen von Nullstäben führt zu einem strukturellen System normalbeanspruchter Stäbe, welches bei entsprechender Kräftekonzentration ein dem Kontinuum ähnliches Verhalten aufweist.

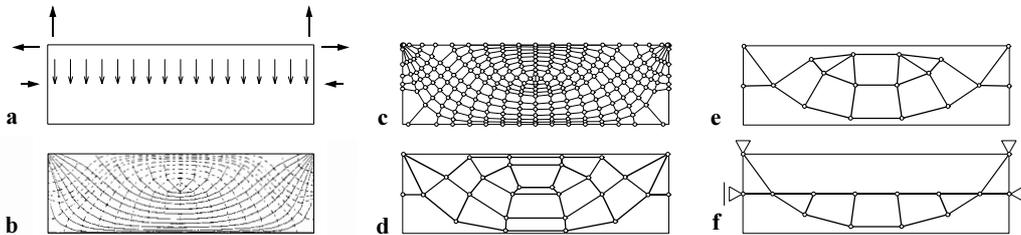


Bild 3.10: Strukturbildung aus dem Trajektorienverlauf eines ebenen Kontinuums.

Diese Beispiele verdeutlichen, dass erst das Studium und die konsequente Verallgemeinerung der operativen Konzepte der Natur das Erstellen praxisrelevanter technischer Konzepte und deren konsequente Umsetzung in physikalische Strukturen ermöglicht. Weil beide den gleichen Gesetzmässigkeiten unterliegen, wird dabei das Endprodukt "technische Struktur" der anfänglich untersuchten Struktur der Natur notwendigerweise ähneln. In diesem Tripel Induktion-Deduktion-Konstruktion liegt geradezu der psychologische Prozess jeder menschlichen Erfindung.

18. *A great engineer, Professor Culmann of Zurich, [...] happened (in the year 1866) to come into his colleague Meyer's dissection-room, where the anatomist was contemplating the section of a bone. The engineer, who had been busy designing a new and powerful crane, saw in the moment that the arrangement of the bony trabeculae was nothing more nor less than a diagram of the lines of stress, or directions of tension and compression, in the loaded structure: in short, that Nature was strengthening the bone in precisely the manner and direction in which strength was required; and he is said to have cried out, "That's my crane!"* In Thompson (1992). Bauersfelds geodätische Armierungskuppel des 1925 erbauten Planetariums in Jena und Buckminster Fullers geodätische Kuppeln weisen ebenfalls frappante Ähnlichkeiten zu Strukturen der Natur auf: *Es bleibt uns unvergessen, wie 1962 im Max-Planck-Institut Berlin [...] Buckminster Fuller von den neuesten stereoskopischen Fotos der Schalen von Kieselalgen (Diatomeen) fast überwältigt wurde. Er sah neueste Fotos in fünf- bis fünfzigtausendfacher Vergrößerung, die er nicht kennen konnte. Die stereoskopischen Lichtbilder sahen aus wie Modelle seiner berühmten Kuppeln. Den Beteiligten war klar: Hätte er die Diatomeenschalen vorher gekannt, würde alle Welt sagen, er habe sie der lebenden Natur abgeguckt. Hätte er aber die Diatomeenschalen gekannt, würde er vermutlich gar nicht erst gewagt haben, seine Schalen zu bauen.* In Otto et al. (1985). Die Massstabunabhängigkeit von Konzepten wird hiermit klar verdeutlicht.

19. Vgl. Wagner (1991).

## Materialisierung von Struktur: Anforderungen an den Stoff

Jede zweckbezogene, bewusst vom konstruktiven Geist des Menschen im Raum aufgestellte, materialisierte Form enthält den Wert einer Bauplastik. Als eigenständige Form bildet jede Bauplastik eine autonome Einheit, die losgelöst von jedem bereits in der Natur vorhandenen Objekt ist und somit ihren Inhalt in sich selbst hat. Dadurch ist der emotionale Gehalt einer künstlerischen Plastik durch das hylemorphische Zusammenspiel aus Form und Stoff bestimmt. Somit werden auch die Grenzen der ästhetischen Wirkung und die Offenbarung von mitzuteilenden Empfindungen entscheidend durch das Material mitprägt. In diesem Zusammenhang muss es gesetztes Ziel der Baukunst sein, jeweils eine neue künstlerische Ordnung zu schaffen, innerhalb welcher Struktur und Stoff zu einer synergetischen Einheit werden. Hierfür müssen natürlich die Grundeigenschaften von Form und Stoff apriorisch miteinander übereinstimmen.

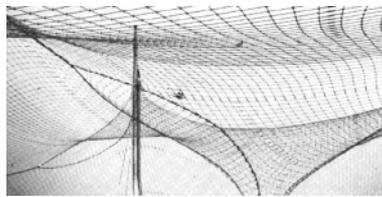


Bild 3.11: Seilnetzlandschaft.

In der Konstruktion muss die Vereinigung von Struktur und Stoff primär technischen Kriterien unterliegen. Hierbei gilt es, die mechanischen, physikalischen, chemischen und verarbeitungstechnischen Eigenschaften eines Stoffes im Hinblick auf die gestellten Anforderungen zu überprüfen beziehungsweise zu entwickeln. Dabei kommt selbstverständlich der auf die Lebensdauer bezogenen Wirtschaftlichkeit eine richtungweisende Rolle zu. Auf die festzustellende totalitäre Gewichtung wirtschaftlicher Wertanalysen sollte allerdings zugunsten einer Gewichtung qualitativer Merkmale verzichtet werden.

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| <i>technische Einsetzbarkeit</i> | <i>mechanische Eigenschaften</i><br>Festigkeit, Härte, Elastizität, Duktilität, Temperaturbeständigkeit<br><i>physikalisch-chemische Eigenschaften</i><br>Dichte, Brand-, Witterungs- und Alterungsverhalten, bauphysikalisches und lichttechnisches Verhalten, Korrosionsbeständigkeit |
| <i>Verarbeitbarkeit</i>          | <i>Formbarkeit</i><br>plastische Umformung, giessen, pressen, sintern, verspannen<br><i>Zusammenfügbarkeit</i><br>schweissen, löten, schrauben, nieten, kleben  |
| <i>Wirtschaftlichkeit</i>        | <i>komparative Wirtschaftlichkeit bei Verfügbarkeit</i><br>Werkstoff-, Verarbeitungs- und Unterhaltskosten, Wiederverwendbarkeit  |

Bild 3.12: Zur Wertanalyse eines Werkstoffes.

Zusätzlich muss beachtet werden, dass die Produktion eines Stoffes auf lange Sicht eine Funktion der Menge und der Konzentration der Rohstoffvorkommen und der zur Her-

stellung und gegebenenfalls zur Wiederverwendung des Werkstoffes nötigen Energie darstellt. In diesem Zusammenhang lässt sich die Entwicklung der Werkstoffe nur in Konsonanz zu derjenigen der Energietechnik betrachten. Bei einem gelösten Energieproblem liessen sich beispielsweise die reichlich vorhandenen metallischen Rohstoffe wie Eisen, Aluminium, Titan und Magnesium sowie insbesondere die keramischen Rohstoffe für die Erzeugung hochwertiger Werkstoffe verwenden.

Zwecks einer vereinigten Betrachtung der mechanischen, elektrischen und chemischen Eigenschaften ist das atomare Studium der Werkstoffe unerlässlich. Feste Stoffe bestehen aus gleich- oder verschiedenartigen, in klarer Regelmässigkeit oder in völliger Unordnung miteinander verbundenen Atomen. Verschiedenartige Wechselwirkungen zwischen den äusseren Elektronen bestimmen die Stärke der chemischen oder der physikalischen Bindung und damit die makroskopischen Eigenschaften des Werkstoffes. In einem metallischen Idealkristall sind die Atome in einem periodischen regulären Raumgitter streng angeordnet. Die naturtypischen Abweichungen von dieser Idealkonstellation ergeben sich aus Gitterbaufehlern und sind von grundlegender Bedeutung für die Werkstoffeigenschaften, da sie Festigkeiten und beispielsweise plastisches Verhalten gleichzeitig in der inversen Proportion verändern. In der Bruchphase werden die Atombindungen zerstört, womit sich interne Riss-, Bruch- oder Gleitebenen bilden. Hierbei ist zu beachten, dass die äusseren Parameter Spannungsintensität, Belastungsgeschwindigkeit und -dauer, Anzahl und Frequenz periodischer Lastwechsel, Temperatureinwirkungen und chemische Umgebung einen bedeutenden Einfluss auf das meistens richtungsspezifische Verformungs- und Bruchverhalten eines betrachteten Materials ausüben können. Bei der Prüfung der Anwendbarkeit eines Stoffes müssen neben der Festigkeit die Art des Versagens unter statischer oder schwingender Beanspruchung gründlich untersucht werden. Das duktile Versagen eines Bauteils unter statischer Beanspruchung ist dann gewährleistet, wenn der Bruch durch die Überwindung des atomaren Gleitwiderstandes entlang bestimmter Gleitebenen erfolgt. Bei Periodizität der Lasteinwirkung können extruse und intruse Versetzungsbewegungen zu einer Verfestigung und einem spröden Dauerbruch führen<sup>20</sup>.

Nach der klassischen Effizienzdoktrine setzt die günstige Verwendung eines Baustoffes eine materialgerechte Struktur voraus. In den primären und sekundären Phasen der bewussten Werkstoffsnutzung verfügte der Mensch über aus der Natur stammende Werkstoffe (Holz, Naturstein und Kupfer) beziehungsweise durch Zufall oder systematische Versuche künstlich entwickelte Werkstoffe (Mauerwerk, Bronze, Eisen und Beton). Demzufolge musste die konstruktive Gestaltung einer Struktur den Baustoffeigenschaften und den Fertigungsmöglichkeiten notgedrungen angepasst werden. Die Beispiele für diese Bauphilosophie reichen vom mesopotamischen Bogen, der beim infrastrukturellen Aufbau des römischen Imperiums seine Blütezeit erlebte, bis hin zur neuzeitlichen Baukunst eines Eiffels oder Maillarts. Zur Zeit Albertis bestand die bei Vitruvius begonnene Materialtechnologie in einer systematischen Beschreibung der Phänomenologie der zur Verfügung stehenden Materialien. Bedingt durch eine Entwicklung, die ihren Wendepunkt in der Einführung der Messung und des Experimentes bei der Galileischen Physik

---

20. Vgl. Hornbogen (1979), Rostásy (1983) und Smith (1977).

hat, wurde die sinnliche Erfahrung des Stoffes zunehmend durch eine wissenschaftlich begründete abstrakte Logik ersetzt. Mit der Durchdringung der Materie konnten erstmals die mikro- und makroskopischen mechanischen, elektrischen und chemischen Eigenschaften vereinigt betrachtet werden. Das atomare Studium der Materie führte nicht einzig zum geeigneten Verständnis phänomenologischer Erscheinungen, sondern ebenso – in der Deutung Francis Bacons – zur Freiheit in der Handhabung. Die Aluminiumlegierungen und die organischen Kunststoffe, insbesondere aber die Halbleiter, die Reaktorwerkstoffe, die hochfesten Stähle und die Legierungen mit Formgedächtnis sind Beispiele einer das tertiäre Zeitalter charakterisierenden, zielgerichteten menschlichen Manipulation des atomaren Aufbaus der Natur. Auf makroskopischer Ebene führte diese Entwicklung zu den bewehrten, faserverstärkten oder geschichteten Werkstoffen sowie den Werkstoffverbunden wie Sandwich- oder integrierten Schalungssystemen.

|   |  |
|---|--|
| <i>Natürliche Werkstoffe<br/>bis zum 100. Jh. v. Chr.</i>                             | Naturstein, Holz,<br>Meteoreisen, Gold, Kupfer   |
| <i>Empirisch entwickelte Werkstoffe<br/>vom 100. Jh. v. Chr. bis Ende des 19. Jh.</i> | Keramik, Mauerwerk, Gips, Kalk, Glasuren,<br>Bronze, Eisen, Gusseisen, Portlandzement, Beton   |
| <i>Wissenschaftlich entwickelte Werkstoffe<br/>seit Beginn des 20. Jh.</i>            | Stahl, hochfeste und hochbeständige Metalle,<br>Halbleiter, Aluminiumlegierungen, organische<br>Kunststoffe, Legierungen mit Formgedächtnis,<br>faserverstärkte Werkstoffe |

*Bild 3.13: Zur Chronologie der Werkstoffe.*

Zwanzig Jahrtausende nach der Erfindung der Keramik im ostasiatischen Raum darf postuliert werden, dass der Techniker nun über den geeigneten Ansatz verfügt, um erstmals nachhaltig Struktur verkörpern zu können, anstatt wie bislang Materie strukturieren zu müssen. Diese Idee beinhaltet natürlich die Vorstellung einer aktiven Hylemorphie, das heisst die gegenseitige Anpassung und Entwicklung von Struktur und Materie, so dass beide innerhalb der gebildeten Einheit eine möglichst hohe Effizienz entfalten können. Das dafür unentbehrliche wissenschaftliche Potential ist heutzutage vorhanden. Es gilt nun, diese Möglichkeit wahrzunehmen und davon Gebrauch zu machen.

|                          |  |
|--------------------------|--|
| <i>Metalle</i>           | - Stahl, Edelstahl und sonstige legierte Nichteisenmetalle wie Aluminium, Magnesium und Titan<br>- Spannstahl  |
| <i>Polymere</i>          | - Polytetrafluoräthylengewebe PTFE   |
| <i>Verbundwerkstoffe</i> | - Mauerwerk<br>- Ferrozement, Stahl- und Spannbeton mit oder ohne integrierte Schalung<br>- faserverstärkte Betone wie Glas-, Kunststoff- und Stahlfaserbeton<br>- kohle- und hartfaserverstärkte Metalle, insbesondere Aluminium<br>- Metall- und glasfaserverstärkte Kunststoffe (GFK)<br>- PVC, PTFE, PVDF und Silikon beschichtete Baumwolle-, Aramid-Polyester-, Polyamid- und glasfaserverstärkte Kunststoffgewebe |

*Bild 3.14: Übliche Baustoffe bei den weitgespannten Flächentragwerken.*

## 4 Geometrie der gekrümmten Fläche

### 4.1 Geometrische Konstruktion gekrümmter Flächen

Jede beschriebene Form stellt eine vereinfachende Idealisierung einer real existierenden Form dar. Die zu dieser Erfassung des Wesens der Formen dienende Abstraktion erfolgt über einen Filtrationsprozess, durch welchen kontextbezogene überflüssige Informationen aussortiert werden und die beobachtete und zu beschreibende Form zu einer Perzeption wird. Die geometrische Perzeption erfolgt, indem die Eigenschaften der Form auf die abstrakt aber visuell darstellbaren Grundelemente Punkt, Gerade und Fläche zurückgeführt werden. Wie jede Sprache verfügt die Geometrie über eigene Zeichen, die nach bestimmten Regeln angeordnet werden. Als Kommunikationsmittel lässt sich Geometrie als ein System logischer Operationen auffassen, anhand dessen die Wirklichkeit in die Symbolik überführt wird. Die Vernüpfungsprozesse, welche der Geometrie zugrunde liegen, erlauben die weitumfängliche Erfassung der Möglichkeiten des allgemein betrachteten Phänomens Form und die konsequente geistige Konstruktion weiterer Formen. Diese Kreativität, Originalität und Phantasie stellt eine der erstaunlichsten Fähigkeiten des Menschen dar.

Die einfachste geometrische Formkonstruktion besteht in der Erfassung des Lokus eines nach bestimmten Gesetzmässigkeiten sich bewegenden Punktes der euklidischen Ebene. Dieser allgemeine geometrische Entwurf lässt sich anhand der Ellipse – dem geometrischen Ort aller Punkte, für die jeweils die Summe der Abstände zu zwei als Brennpunkten bezeichneten festen Punkten konstant ist – auslegen. Dementsprechend lässt sich eine Fläche über die Spur, welche die Bewegung einer beliebigen Kurve im dreidimensionalen Raum hinterlässt, erfassen. In der Regel wird hierfür eine eben gekrümmte Erzeugende einer Rotations- oder Translationsbewegung, gegebenenfalls einer kombinierten Rotations- und Translationsbewegung, unterworfen. Diese von den Generierungselementen und -moden ausgehende geometrische Betrachtung der Flächen dient als konzeptuelle Basis, welche das Verständnis der mannigfachen geometrischen Eigenschaften, die eine Fläche charakterisieren, erlaubt, ohne dass die Einzelheiten der begrifflichen Theorien miteinbezogen werden müssen.

Wie die analytische Beweisführung aufzeigt, sind alle ebenen Schnitte durch eine algebraische Fläche durch den gleichen Grad wie die Fläche selbst gekennzeichnet. Demgemäss entsprechen den in Bewegung gesetzten quadratischen Kurven Flächen gleichen Grades. Diese innere Verwandtschaft lässt sich mit den Mitteln der analytischen Geometrie verdeutlichen, da beide geometrischen Identitäten dem Ausdruck

$$x \cdot A \cdot x^T + 2 \cdot b \cdot x^T + c = 0 \quad (4.1)$$

genügen. Hierbei sind die ebenen Kurven durch

$$x = (x, y) \quad (4.2)$$

und die entsprechenden Flächen durch

$$x = (x, y, z) \quad (4.3)$$

gegeben. Alle ebenen quadratischen Kurven lassen sich als Kegelschnitte, das heisst als Schnittkurven eines Kegels mit einer Ebene, andeuten. Werden mit  $\alpha$  der halbe Öffnungswinkel eines Kegels und mit  $\beta$  der auf die Kegelachse bezogene Neigungswinkel einer Schnittebene, welche nicht durch die Kegelspitze verläuft, bezeichnet, so ergeben sich mit

$$v = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (4.4)$$

für  $v > 1$  eine Hyperbel, für  $v = 1$  eine Parabel und für  $v < 1$  eine Ellipse als nichtausgeartete Schnittkurven<sup>1</sup>.

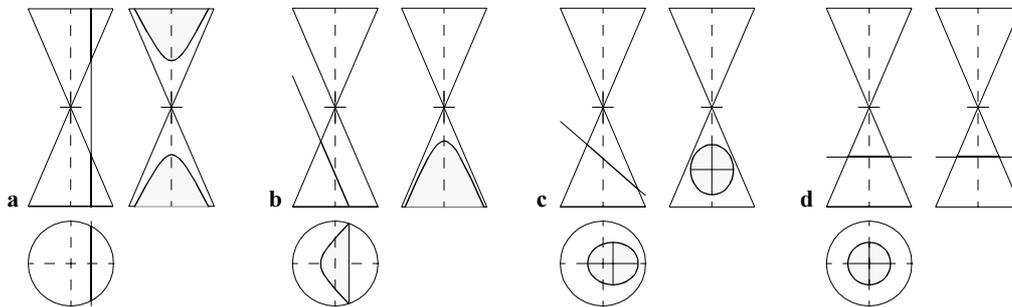


Bild 4.1: Die Kegelschnitte.

Die charakterisierende Eigenschaft, stets von jeder Ebene in einem eigentlichen oder uneigentlichen Kegelschnitt getroffen zu werden, verleiht den Flächen zweiter Ordnung ihre spezifische Nomenklatur. Der Drehung einer Parabel um ihre Symmetrieachse entspricht die Fläche des Rotationsparaboloides (Bild 4.2b). In gleicher Weise entsprechen den Rotationen einer Hyperbel und einer Ellipse um jeweils eine ihrer beiden Symmetrieachsen die zwei- und einschaligen Rotationshyperboloide (Bilder 4.2a,d) sowie die

1. Indem die Schnittkurven andeuten, dass  $v$  bei der Ellipse die Zahl eins nicht erreicht – “Mangel” –, bei der Hyperbel übertrifft – “Überschuss” – und bei der Parabel gerade erreicht – “Zusammenfall” –, beruht die griechische Namensgebung der Kegelschnitte auf ihrer Beziehung zu den Leitlinien. Die Entdeckung der Kegelschnitte entstand primär aus innermathematischen Problemen und wird Menaechmus, einem Mitglied der platonischen Schule, zugeschrieben. Die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte hat Apollonius von Perga (262-190 v. Chr.) in seinen Büchern festgehalten. Obschon für die antiken Wissenschaftler der Aufbau des Universums einzig auf den beiden geometrischen Elementen Kreis und Gerade beruht, nahmen die Kegelschnitte eine zentrale Rolle in der Mathematisierung der Naturwissenschaften ein. In diesem Zusammenhang seien beispielsweise die elliptischen Bahnen der Keplerschen Planetentheorie oder die parabolischen Wurfbahnen der Gallileischen Fallgesetze erwähnt. In der Flächentheorie stellen solche über die Kegelschnitte erzeugbaren Flächen die wichtigste Flächengruppe dar. Die Universalität dieser Flächen beruht nicht zuletzt auf deren zu einem besseren Verständnis und einer leichteren Erfassung führenden analytischen Einfachheit.

verlängerten und abgeflachten Rotationsellipsoide (Bild 4.2c) <sup>2</sup>. Die Rotationsflächen lassen sich über ein als Dilatation bezeichnetes Verformungsverfahren verallgemeinern. Hierbei werden alle Punkte einer beliebigen, durch die Rotationsachse verlaufenden Ebene festgehalten, während alle übrigen Punkte des Raumes gleichgerichtet und im selben Verhältnis auf die feste Ebene zu oder von ihr weg bewegt werden.

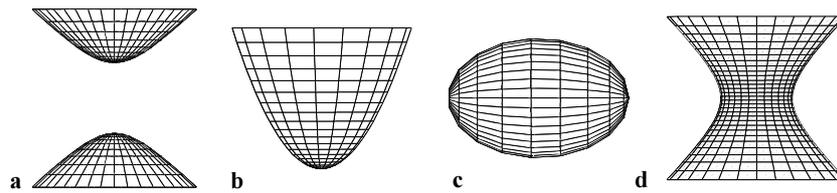


Bild 4.2: Doppelgekrümmte Rotationsflächen zweiter Ordnung.

Die Fläche des zweiseitigen Hyperboloids lässt sich ebenfalls durch eine translatorische Bewegung im Raum erzeugen. Hierbei werden alle Punkte einer Hyperbel entlang einer gleichgerichtet geöffneten hyperbolischen Leitlinie bewegt (Bild 4.3a). Auch das elliptische Paraboloid lässt sich als eine translatorische Bewegung einer Parabel entlang einer zweiten Parabel mit gleicher Öffnungsrichtung andeuten (Bild 4.3b). Die Umkehrung einer der beiden Parabeln führt zur geometrischen Konstruktion der Translationsfläche des hyperbolischen Paraboloids (Bild 4.3c).

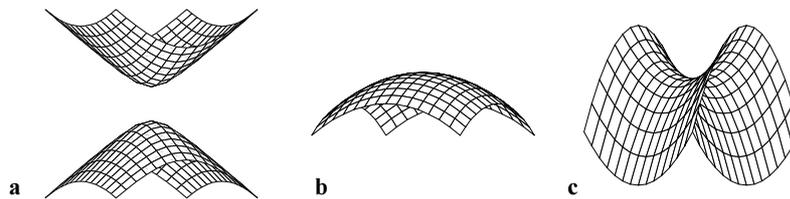


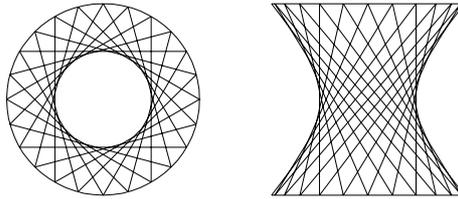
Bild 4.3: Doppelgekrümmte Translationsflächen zweiter Ordnung.

Die fünf eigentlichen Flächen zweiter Ordnung werden durch vier weitere einfach gekrümmte Flächen, nämlich durch die elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Zylinder sowie den Kegel, ergänzt. Alle drei zylindrischen Flächenarten lassen sich durch die translatorische Bewegung einer geradlinigen Erzeugenden entlang eines eigentlichen Kegelschnittes erzeugen. Die Rotation der gleichen Erzeugenden um eine Ellipse führt zum elliptischen Zylinder. Aus der Kreiselung der geradlinigen Erzeugenden entlang den verschiedenen Kegelschnitten ergibt sich stets ein Kegel.

Den einfach gekrümmten Flächen entsprechend verlaufen in der Fläche des einschaligen Hyperboloids unendlich viele Geraden, weswegen sich diese Fläche ebenfalls als Rotationsprodukt einer geradlinigen Erzeugenden um eine zu ihr windschief stehende Achse

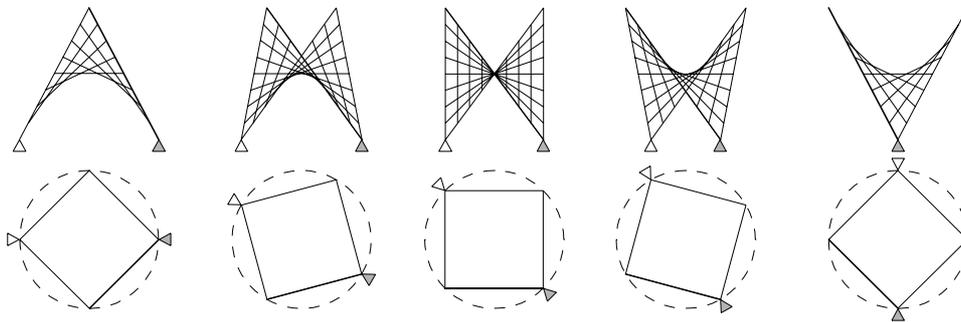
2. Aufgrund ihrer absoluten Symmetrie ist die Kugel die einzige auf mehr als eine Art, nämlich auf unendlich viele Arten, durch Rotation erzeugbare Fläche. Bei Hilbert und Cohn-Vossen (1932) werden die Eigenschaften der Kugel ausführlich diskutiert.

andeuten lässt. Diese doppeltgekrümmte Fläche ist durch drei zueinander windschief stehende Geraden stets eindeutig bestimmt.



*Bild 4.4: Das einschalige Rotationshyperboloid.*

Im Spezialfall können diese Geraden jedoch zu ein und derselben Ebene parallel sein, ohne selbst parallel zu sein, womit sie ein hyperbolisches Paraboloid definieren. Wie zu erkennen ist, erstreckt sich jeder an dieser Sattelfläche angelegte Schnitt bis in das Unendliche. Aus diesem Grund lässt sich das hyperbolische Paraboloid ebenso wie der parabolische und der hyperbolische Zylinder unmöglich über Rotation, sondern einzig durch die Translation einer stehenden Parabel an einer hängenden parabolischen Leitlinie erzeugen.



*Bild 4.5: Das hyperbolische Paraboloid.*

Unter den neun erwähnten Flächen zweiter Ordnung lassen sich sechs – die einfach gekrümmten Flächen des Kegels, des elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Zylinders sowie die doppelt gekrümmten Flächen des einschaligen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloides – durch Rotation oder Translation einer Geraden erzeugen. Die drei übrigen Flächen zweiter Ordnung – das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das zweischalige Hyperboloid – können schon deshalb keine Geraden in der Fläche enthalten, weil sie sich nicht ohne Unterbrechung in zwei entgegengesetzte Richtungen in die Unendlichkeit erstrecken.

| <i>Translation</i>   | <i>Translation / Rotation</i>   | <i>Rotation</i>                                |
|--|---|--|
| parabolischer Zylinder<br>hyperbolischer Zylinder<br>hyperbolisches Paraboloid | elliptischer Zylinder<br>elliptisches Paraboloid<br>zweischaliges Hyperboloid | Kegel<br>Ellipsoid<br>einschaliges Hyperboloid |

*Bild 4.6: Die Flächen zweiter Ordnung nach deren Erzeugungsart.*

## 4.2 Differentialgeometrie der Fläche

### Krümmungseigenschaften der Fläche

Die Flächenkrümmung – definiert als die Abweichung der umgebenden Flächenpunkte von der Tangentialebene eines betrachteten regulären Flächenpunktes – stellt ein entscheidendes Charakteristikum jeder Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes dar. Aus dem Schnitt einer betrachteten Fläche mit einer beliebigen Tangentenebene können grundsätzlich zwei Schnittkurven, eine Schnittkurve oder ein Punkt gebildet werden. Dementsprechend wird zwischen Punkten hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer Krümmung unterschieden.

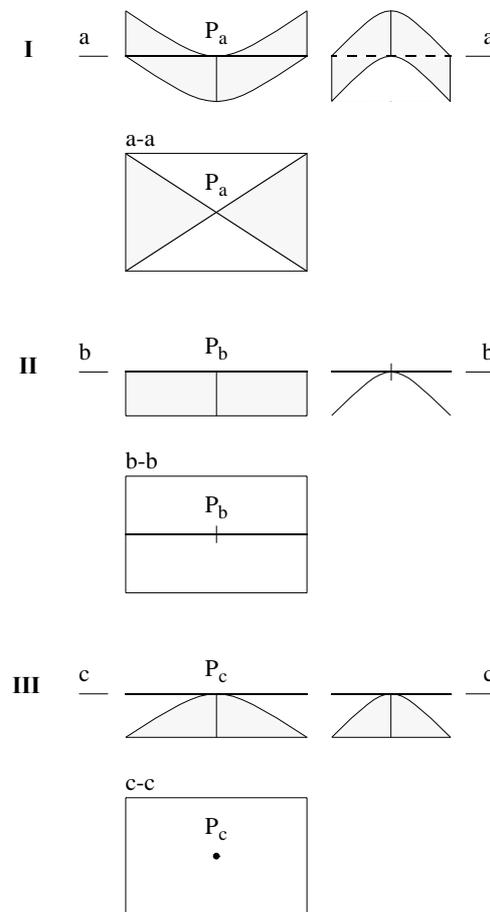


Bild 4.7: Punkte hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer Krümmung.

Eine anschauliche Differenzierung dieser drei verschiedenen Krümmungstypen ergibt sich über die Abflachung der “über” einer Tangentenebene liegenden Flächenbereiche einer hyperbolischen Fläche. Wird dieser metamorphose Prozess fortgeführt bis die beiden Schnittkurven ineinander übergehen und zu einer einzigen Berührungskurve werden, so ändert sich das Krümmungsverhalten der Fläche im betrachteten Flächenpunkt. Die

zu diesem Übergangsfall gehörige Krümmung wird als parabolisch bezeichnet. Die weitere Flächentransformation führt dazu, dass die Krümmung des somit als einzigem in der Tangentenfläche liegenden regulären Flächenpunktes elliptisch wird.

Jeder reguläre Punkt  $P$  einer betrachteten Fläche definiert eine normale Gerade  $n$ , die ihrerseits die normalen Ebenen  $N$  von  $P$  bestimmt. Jede normale Ebene  $N$  erzeugt eine Schnittkurve  $s$ , deren Krümmungsmittelpunkt  $\Omega$  auf der normalen Geraden  $n$  liegt. Bei der Rotation der Flächennormalen  $N$  um  $n$  wandern die Krümmungsmittelpunkte  $\Omega$  aller somit erzeugten Normalschnitte  $s$  auf  $n$ . Dadurch lässt sich ein quantifizierbares Abbild des Krümmungsverhaltens eines betrachteten Flächenstückes erzeugen. Die zu einem elliptischen Punkt zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $\Omega$  liegen stets auf ein und derselben Halbgeraden von  $n$ . Im Regelfall führen die Krümmungsmittelpunkte bei der Drehung von  $N$  eine Kolbenbewegung zwischen den zu einem bestimmten orthogonalen Normalenschnittpaar  $s_1$  und  $s_2$  gehörenden Hauptkrümmungsmittelpunkten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  aus. Kommen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  und dadurch die Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte aufeinanderzuliegen, so wird  $P$  zu einem Nabelpunkt. Im allgemeinen sind Nabelpunkte isolierte Erscheinungen in einer Fläche des euklidischen Raumes. Einzig die Kugel und die Ebene stellen ausschliesslich aus Nabelpunkten bestehende geometrische Gebilde dar.

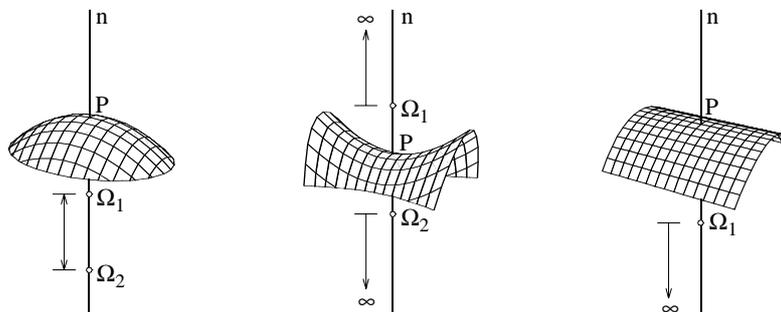


Bild 4.8: Zum Krümmungsverhalten von Flächen.

Bei einem Punkt hyperbolischer Krümmung lässt sich ein Hauptnormalschnitt  $s_1$  bestimmen, dessen zugehöriger Hauptkrümmungsmittelpunkt  $\Omega_1$  "oberhalb"  $P$  liegt. Lässt man die diesen Normalschnitt erzeugende Normalebene um  $n$  rotieren, so nimmt die Krümmung in  $P$  zunehmend bis null, das heisst bis zum Erreichen des in der Tangentenebene liegenden Normalschnittes, ab. Damit wandert der Krümmungsmittelpunkt auf dem Normalenstrahl bis in das Unendliche. Die Weiterführung dieser Rotation führt dazu, dass der Krümmungsmittelpunkt aus dem Unendlichen kommend bis zum Erreichen des zweiten Hauptkrümmungsmittelpunktes  $\Omega_2$  eine Bewegung auf dem "unteren" Normalenstrahl ausführt. Auch in diesem Fall lässt sich die Bewegung des Krümmungsmittelpunktes als Kolbenbewegung betrachten, indem nämlich der Kolbenweg von  $\Omega_1$  aus über das Unendliche zu  $\Omega_2$  und wieder zurück führt. Die parabolischen Punkte sind dadurch gekennzeichnet, dass eine der beiden Hauptkrümmungen stets den Wert null hat. Durch die Rotation der Normalebene  $N$  wandern die Krümmungsmittelpunkte einen einzigen Normalenstrahl entlang. Ausgehend von einem Extremwert  $\Omega_1$  führt diese Bewegung bis in das Unendliche und wieder zurück.

## Sphärische Abbildung und Gauss'sche Krümmung

Mit der Einführung eines vom umgebenden dreidimensionalen Raum unabhängigen Masses für die Flächenkrümmung über eine sphärische Flächenabbildung leistete Carl Friedrich Gauss einen entscheidenden Beitrag zur differentialgeometrischen Erfassung gekrümmter Flächen<sup>3</sup>. Die Konstruktion dieser sphärischen Flächenabbildung erfolgt, indem die Normalenparallele einer betrachteten Fläche durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel gezogen wird. Dadurch lässt sich die einer geschlossenen Flächenkurve  $k$  mit dem Flächeninhalt  $dA$  entsprechende geschlossene Kurve  $k'$  mit dem Flächeninhalt  $dF$  auf der Einheitskugel konstruieren. Im Grenzfall geht die Kurve  $k$  in einen Punkt  $P$  über, und der aus  $dF$  und  $dA$  gebildete Quotient nimmt einen bestimmten Grenzwert  $K$  an,

$$\lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF}{dA} = K, \quad (4.5)$$

welcher als Gauss'sche Krümmung der Fläche in  $P$  bezeichnet wird. Mit Ausnahme einiger spezieller geometrischer Gebilde, wie dem Torus oder dem Affensattel, die eine durch spezifische Merkmale gekennzeichnete sphärische Abbildung aufweisen, entspricht jeder doppeltpunktfreien geschlossenen Kurve einer doppeltgekrümmten Fläche eine ebenfalls doppeltpunktfreie geschlossene Kurve auf der Einheitskugel<sup>4</sup>.

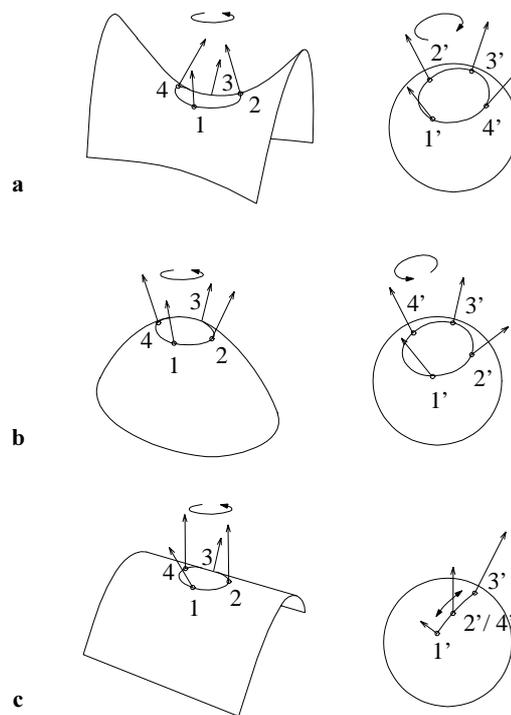


Bild 4.9: Sphärische Abbildung gekrümmter Flächen.

- 
3. Die Differentialgeometrie zweidimensionaler Flächen legte Carl Friedrich Gauss in seinem berühmten Werk *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828, nieder.
  4. Auf die sphärische Abbildung des Torus oder des Affensattels wird in Hilbert und Cohn-Vossen (1932) eingegangen.

Die Punkte mit hyperbolischer und elliptischer Krümmung unterscheiden sich durch den jeweiligen Umlaufsinn der Flächen- und Kugelkurven. Die Flächenkurve und die entsprechende Kugelkurve hyperbolisch gekrümmter Punkte weisen jeweils einen entgegengesetzten Umlaufsinn auf. Umgekehrt sind Punkte mit elliptischer Krümmung durch einen jeweils gleichen Umlaufsinn gekennzeichnet. Der analytischen Geometrie entsprechend, die den Inhalten zweier im gleichen und im entgegengesetzten Sinne umlaufender Flächenstücke ein gleiches, beziehungsweise ein entgegengesetztes Vorzeichen beizulegen pflegt, ist die hyperbolische Krümmung negativ und die elliptische Krümmung positiv definiert. Aus der sphärischen Abbildung eines parabolischen Punktes ergibt sich einzig eine Normalkurve. Da Kurven keinen Flächeninhalt aufweisen, muss die Gauss'sche Krümmung von parabolisch gekrümmten Punkten den Wert null annehmen.

Durch analytische Betrachtungen lässt sich die sehr bedeutende Verknüpfung zwischen der obigen historischen Definition der Gauss'schen Krümmung  $K$  und der Flächenkrümmungen  $\kappa$  herstellen:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2. \quad (4.6)$$

Der wesentliche Vorteil der Gauss'schen Krümmung besteht darin, dass sie das Erfassen und die Quantifizierung des Krümmungsverhaltens eines Flächenpunktes  $P$  anhand einer einzigen Grösse erlaubt. Das qualitative Verhalten einer Fläche in der Umgebung eines betrachteten Punktes  $P$  lässt sich anhand des von der Gauss'schen Krümmung  $K$  angenommenen Vorzeichens dem nachstehenden Schema entsprechend unterscheiden.

| Bezeichnung des Punktes $P_0$ | Analytische Definition              | Verhalten der Fläche um $P_0$ |
|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| Elliptischer Punkt            | $K > 0$                             | Ellipsoid                     |
| Nabelpunkt                    | $K > 0, \kappa_1 = \kappa_2$        | Kugel                         |
| Hyperbolischer Punkt          | $K < 0$                             | Einschaliges Hyperboloid      |
| Parabolischer Punkt           | $K = 0, \kappa_1 + \kappa_2 \neq 0$ | Zylinder                      |

Bild 4.10: Zur Gauss'schen Krümmung von Flächen.

Bei der Parkettierung stetig gekrümmter Flächen im Sinn der polyedrischen Körper wird die Krümmung der Fläche in den Kanten, welche die ebenen Parkettierungsflächen miteinander bilden, konzentriert. Zu jeder solchen Kante lässt sich ein Flächenabschnitt  $A$  bestimmen, welcher dem Einfluss des Kantenwinkels  $\beta$  untersteht. Mit Hilfe dieser beiden Grössen – dem Kantenwinkel  $\beta$  und der Einflussfläche  $A$  – lässt sich die mittlere Gauss'sche Krümmung des betrachteten Flächenabschnitts über den Ausdruck

$$K \approx \beta/A \quad (4.7)$$

bestimmen<sup>5</sup>.

---

5. Nach Calladine (1983).

## Die Fläche als analytisches Gebilde

Die mathematische Definition der Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes erlaubt die analytische Erfassung und Beschreibung spezifischer geometrischer Eigenschaften, wie der Raumlage und der Form dieser Punktmenge. Lassen sich die für einen betrachteten Punkt eines stetigen geometrischen Gebildes geltenden differentialgeometrischen Eigenschaften auf dessen Umgebung übertragen, so können in der Regel wesentliche Aussagen über den gesamten Verlauf dieser Fläche gemacht werden. Die implizite analytische Definition der Fläche erfolgt über die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 . \quad (4.8)$$

Eine besonders konzise Flächendefinition erfolgt über die vektorielle Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) . \quad (4.9)$$

Der Abstand zweier infinitesimal naheliegenden Punkte des dreidimensionalen Raumes lässt sich über den Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.10)$$

bestimmen. In vektorieller Form ergibt sich diese Beziehung zu

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} . \quad (4.11)$$

Mit

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot dv \quad (4.12)$$

wird das Quadrat des Differentials der Bogenlänge unter Verwendung der gebräuchlichen Abkürzungen

$$E = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{und} \quad G = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 \quad (4.13)$$

zu

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 . \quad (4.14)$$

Die obige Gleichung (4.14) wird als erste Fundamentalform bezeichnet. Sie beinhaltet die intrinsischen Eigenschaften der Fläche, welche bei isometrischer Verzerrung der Fläche invariant bleiben und somit unabhängig von der allgemeinen Form des geometrischen Körpers in dem ihn umgebenden dreidimensionalen Raum sind. Die erste Fundamentalform ermöglicht die Bestimmung aller metrischen Flächeneigenschaften, wie Kurvenlängen, Winkel zwischen Tangentenvektoren und Flächeninhalte.

Für die weitere Untersuchung von Flächen ist die Aufstellung des Differentials der Gauss'schen Abbildung von wesentlicher Bedeutung. Die Krümmungseigenschaften einer Fläche sind durch die Veränderungsrate des Einheitsnormalenvektorfeldes  $N$  auf einer Umgebung von  $P$  bestimmt. Die Bildung der Flächennormale eines Flächenpunktes erfolgt über das vektorielle Produkt der Vektoren, welche die Tangentialebene aufspannen. Mit

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (4.15)$$

gilt unter Berücksichtigung des Ausdruckes (4.12)

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2 . \quad (4.16)$$

Der Einheitsnormalenvektor  $\bar{N}$  durch den Punkt  $P$  ist somit durch

$$\bar{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (4.17)$$

bestimmt. Mit

$$d\bar{N} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \bar{N}}{\partial v} \cdot dv \quad (4.18)$$

wird das Produkt aus  $d\bar{N}$  und  $d\mathbf{r}$  mit

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial \bar{N}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -\bar{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad M = \frac{\partial \bar{N}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -\bar{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \cdot \partial v} \quad \text{und} \\ N &= \frac{\partial \bar{N}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\bar{N} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

zu

$$d\bar{N} \cdot d\mathbf{r} = L \cdot du^2 + 2 \cdot M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2 . \quad (4.20)$$

Dieser Ausdruck wird als zweite Fundamentalform bezeichnet. Die Krümmung  $\kappa$  eines Punktes  $P$  ergibt sich aus dem Quotienten, welcher durch die zweite und die erste Fundamentalform gebildet wird:

$$\kappa = \frac{L \cdot du^2 + 2 \cdot M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2}{E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2} . \quad (4.21)$$

Da die Determinante der ersten Fundamentalform (4.14) stets einen positiven Betrag aufweist,

$$EG - F^2 > 0, \quad (4.22)$$

sind die Krümmungseigenschaften einer Fläche, das heisst das Vorzeichen von  $\kappa$  in (4.21), einzig von der zweiten Fundamentalform abhängig. Das Krümmungsverhalten ist daher einzig durch die Determinante der zweiten Fundamentalform bestimmt. Für

$$LN - M^2 > 0, \quad LN - M^2 = 0 \quad \text{und} \quad LN - M^2 < 0 \quad (4.23)$$

wird zwischen Flächenpunkten elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Verhaltens unterschieden.

Bei jedem Flächenpunkt lassen sich zwei orthogonal zueinander stehende Tangentrichtungen bestimmen, für welche die zugehörigen Krümmungen Extremalwerte annehmen. Da die Krümmungslinien der Differentialgleichung

$$(EM - FL) \cdot du^2 + (EN - GL) \cdot du \cdot dv + (FN - GM) \cdot dv^2 = 0 \quad (4.24)$$

genügen, sind die Hauptkrümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  durch die Lösung der nachstehenden quadratischen Gleichung gegeben:

$$(EG - F^2) \cdot \kappa^2 - (LG - 2MF + NE) \cdot \kappa + LN - M^2 = 0. \quad (4.25)$$

Die Gauss'sche Krümmung  $K$  und die mittlere Krümmung  $H$ , die eine allgemeine und globale Charakterisierung einer Fläche ermöglichen, sind durch die beiden nachstehenden Ausdrücke gegeben:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (4.26)$$

und

$$H = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \quad (4.27)$$

Aus der nur skizzenhaft dargelegten differentiellen Flächentheorie ergibt sich die folgende Klassifizierung der Flächentypen:

|  |                          |
|--|--------------------------|
| <i>Abwickelbare Flächen</i>            | $L = N = 0, \quad K = 0$ |
| <i>Nicht abwickelbare Regelflächen</i> | $N = 0, \quad K < 0$     |
| <i>Translationsflächen</i>             | $M = 0$                  |
| <i>Rotationsflächen</i>                | $F = M = 0$              |

### 4.3 Regelflächen

Die Regelflächen sind durch den Locus einer im Raum translatorisch geführten Geraden gegeben. Regelflächen sind somit eine einparametrische Mannigfaltigkeit von Geraden. Dementsprechend erfolgt die analytische Beschreibung eines allgemeinen Punktes dieser Flächen anhand der Vektorgleichung

$$y(u, v) = x(u) + v \cdot t(u) . \quad (4.28)$$

Hierbei bezeichnet  $t(u)$  den Einheitsvektor in Richtung der geradlinigen Flächenerzeugenden, welche durch den Punkt  $A(u)$  von  $x(u)$  verläuft. Es lässt sich analytisch zeigen, dass der Koeffizient  $N$  der zweiten Fundamentalform für alle Punktmengen, welche die obige Gleichung erfüllen, den Wert null annimmt. Somit ergibt sich der Ausdruck für die Gauss'sche Krümmung einer Regelfläche zu

$$K = - \frac{M^2}{EG - F^2} . \quad (4.29)$$

Der Koeffizient  $M$  wird als Distributionsparameter  $p = p(u)$  bezeichnet:

$$M = p(u) . \quad (4.30)$$

Wie sich der obigen Gleichung entnehmen lässt, weisen alle Punkte, für welche

$$p(u) = 0 \quad (4.31)$$

gilt, eine parabolische Krümmung auf:

$$K = 0 . \quad (4.32)$$

Zudem bildet das Verschwinden des Distributionsparameters die analytisch beweisbare, notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit einer Fläche. Da der Determinantenwert des Nenners im Ausdruck (4.29) stets einen positiven Wert annimmt, gilt für alle durch

$$p(u) \neq 0 \quad (4.33)$$

gegebenen Fälle, dass die entsprechende Regelfläche hyperbolisch gekrümmt ist<sup>1</sup>:

$$K < 0 . \quad (4.34)$$

Allgemein lassen sich abwickelbare und nichtabwickelbare Regelflächen unterscheiden. Jede abwickelbare Fläche ist zugleich eine Regelfläche. Abwickelbare Flächen sind stets parabolisch gekrümmt. Alle Regelflächen hingegen, die nicht abwickelbar sind, weisen eine negative Gauss'sche Krümmung auf.

---

1. Die analytischen Herleitungen und Beweise sind in Struik (1961) ausführlich dargelegt.

## Abwickelbare Flächen

Jede über die verzerrungsfreie Verbiegung von Ebenstücken erzeugbare Fläche wird sinngemäss als abwickelbar bezeichnet. Solche Flächen besitzen stets die Eigenschaft, von einer einparametrischen Ebenschar eingehüllt zu werden. Da die Gesamtheit der über die veränderliche Umhüllebene mit einer ihrer Nachbarlagen gebildeten Schnittgeraden flächenerzeugend ist, weisen abwickelbare Flächen nur Punkte parabolischer Krümmung auf und sind demnach stets Regelflächen. Die Abwickelbarkeit einer Fläche lässt sich anhand eines zu einer kegelförmigen oder zylindrischen Fläche gewickelten Papierstückes anschaulich exemplifizieren.

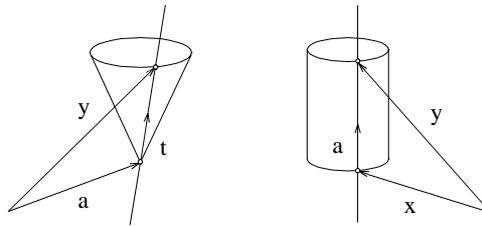


Bild 4.11: Die abwickelbaren Flächen Kegel und Zylinder.

Die einfachsten abwickelbaren Regelflächen sind der Kegel und der Zylinder. Die vektoriellen Gleichungen dieser Flächen entsprechen der jeweiligen Substitution der einparametrischen Vektorfunktionen  $x(u)$  und  $t(u)$  des Ausdruckes (4.28) durch einen konstanten Vektor  $a$ . Die beiden Flächen Kegel und Zylinder genügen dieser Substitution zufolge der Gleichung

$$y(u, v) = a + v \cdot t(u), \quad (4.35)$$

beziehungsweise der Gleichung

$$y(u, v) = x(u) + v \cdot a. \quad (4.36)$$

Mit Ausnahme des Kegels und des Zylinders lassen sich alle abwickelbaren Flächen dem Ausdruck (4.28) entsprechend als Tangentenflächen einer beliebigen Kurve des Raumes andeuten. Unter diesen Flächen nimmt die analytisch erfassbare Tangentenfläche der kreisförmigen Schraube - das abwickelbare Helikoid - eine besondere Stellung ein.

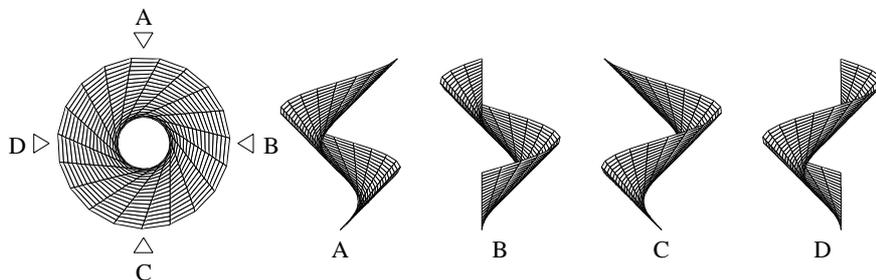


Bild 4.12: Die abwickelbare helikoidale Fläche.

## Nichtabwickelbare Regelflächen

Wie sich analytisch beweisen lässt, stellt das Vorhandensein eines endlich oder unendlich fern liegenden Schnittpunktes, welcher durch zwei benachbarte Erzeugende gebildet wird, eine notwendige Bedingung für die Abwickelbarkeit einer Regelfläche dar. Aus dieser Einsicht lässt sich die Schlussfolgerung ziehen, dass nicht abwickelbare Regelflächen diejenigen Flächen sein müssen, bei denen zwei benachbarte Erzeugende windschief zueinander im Raum verlaufen. Im allgemeinen sind die nicht abwickelbaren Regelflächen durch die Führung einer geradlinigen Erzeugenden entlang dreier Leitlinien bestimmt. In Abhängigkeit des Krümmungsverhaltens der im Regelfall als eben angenommenen Leitlinien werden die nichtabwickelbaren Regelflächen als Zylindroide, Konoide oder quadratische Regelflächen bezeichnet.

| Bezeichnung               | gekrümmte Leitlinien | geradlinige Leitlinien |
|---------------------------|----------------------|------------------------|
| Zylindroid                | 2                    | 1                      |
| Konoid                    | 1                    | 2                      |
| quadratische Regelflächen | 0                    | 3                      |

Bild 4.13: Die nichtabwickelbaren Regelflächen.

Beim allgemeinen Zylindroid kommen alle Leitlinien  $\Delta$  in den endlichen Raum zu liegen. Rückt die geradlinige Leitlinie in das Unendliche, so ergibt sich der Spezialfall unter den zylindroidischen Flächen, beim welchem die Erzeugenden zu ein und derselben Ebene parallel gerichtet sind.

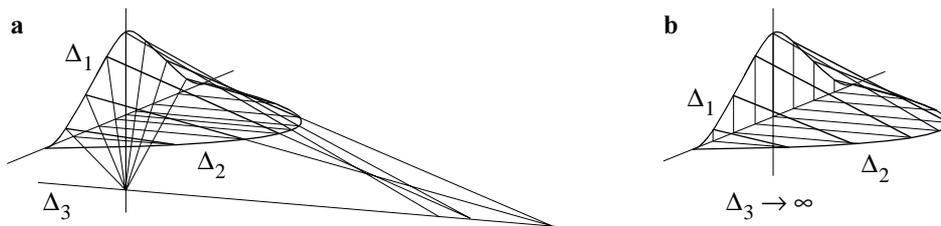


Bild 4.14: Die Regelflächen des Zylindroids.

Der Kehlpunkt einer Regelfläche ist durch den Grenzwert des Fusspunktes  $A$  auf einer Erzeugenden  $a$  des gemeinsamen Lotes von  $a$  und einer immer näher heranrückenden Erzeugenden  $b$  gekennzeichnet. Der Locus aller Kehlpunkte der Regelfläche bestimmt eine Kurve des Raumes, die als Striktionslinie bezeichnet wird. Es seien  $a$  und  $b$  zwei Flächenerzeugende, die die senkrecht zu den Flächenerzeugenden stehende geradlinige Striktionslinie in den Punkten  $A$  und  $B$  treffen<sup>1</sup>. Falls  $\alpha$  den Winkel zwischen den Erzeugenden und  $d$  den konstanten Drall der Fläche, das heisst das Mass für die Lageänderung

1. Im allgemeinen Fall muss die Striktionslinie die Erzeugenden keineswegs in einem rechten Winkel treffen. Beispielsweise wird die Striktionslinie des einschaligen Hyperboloids durch den zentralen Kehlpunkt gebildet, der nirgends senkrecht auf den geraden Erzeugenden des Hyperboloids steht.

der Tangentialebene längs einer Regelgeraden, bezeichnen, so gilt hierbei der eine Schraubenfläche beschreibende Ausdruck

$$\alpha = \overline{AB} \cdot d. \quad (4.37)$$

Somit sind alle dem obigen Ausdruck genügenden regelmässigen Helikoide zugleich zylindroidische Regelflächen. Die allgemeinsten Schraubenflächen sind durch die gleichmässige Schraubung einer beliebigen Raumkurve um eine feste Achse bestimmt.

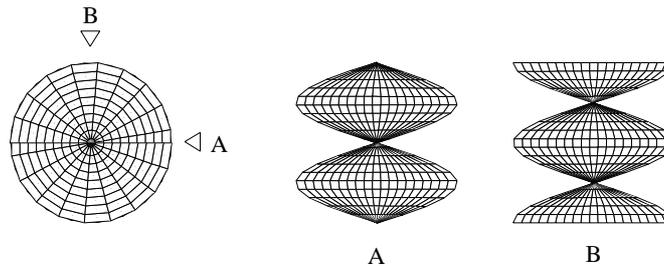


Bild 6. Die Schraubenfläche.

Die Schraubenfläche wird zur Birotationsfläche, falls der Striktionslinie des Helikoides ein endlicher konstanter Krümmungsradius zugeteilt wird. Regelmässige Birotationsflächen weisen einen konstanten Drehwinkel  $\varphi$  der geradlinigen Erzeugenden um die in der gleichen Ebene liegende feste Achse und einen konstanten Drehwinkel  $\gamma$  der um einen fixen Geradenpunkt rotierenden Geraden auf. Für

$$\gamma = n \cdot \varphi / 2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.38)$$

wird diese Fläche zu einem regelmässigen Möbius'schen Band. Das Möbius'sche Band lässt sich konstruieren, indem man ein Ende eines Papierstreifens mit seinem um das  $\pi$ -fache verdrehten zweiten Ende zusammenheftet. Im Gegensatz zu der zweiseitigen Fläche des zylindrischen Streifens, dessen Rand in zwei geschlossene Kurven zerfällt, besteht der Rand des Möbius'schen Bandes aus einer einzigen geschlossenen Kurve. Demzufolge führt jede von einem Flächenpunkt  $Q$  ausgehende Umlaufung entlang einem geschlossenen der einseitigen Existenz der Fläche gleichbedeutenden Weg zurück zu einem entgegengesetzt zugeordneten Punkt  $Q' = Q$ . Die topologische Geometrie pflegt daher die einseitigen Flächen als nicht orientierbar zu bezeichnen.

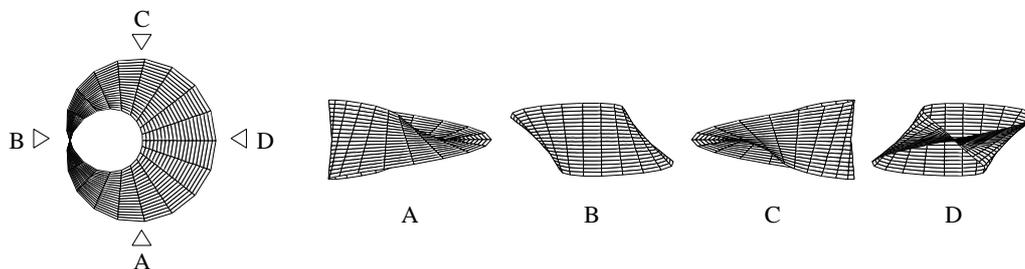


Bild 4.15: Das Möbius'sche Band.

Analog zu den Zylindroiden lassen sich die konoidischen Flächen durch die Lage der Leitlinien  $\Delta$  unterscheiden. Rückt eine der geradlinigen Leitlinien in das Unendliche, so nehmen alle Erzeugenden einen zur gleichen Ebene parallelen Verlauf an. Rückt zudem die zweite geradlinige Leitlinie in die unendliche Ferne, so wird die konoidische zu einer echten zylindrischen Fläche.

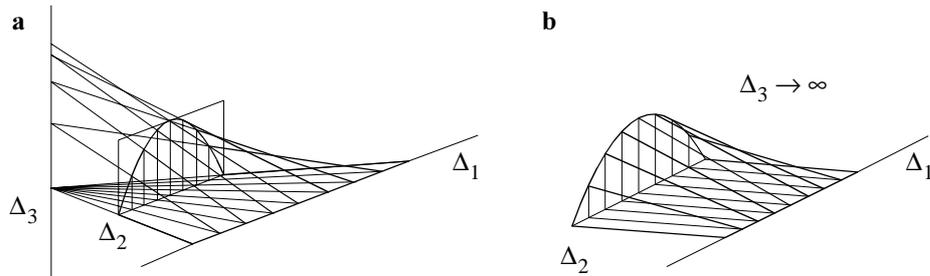


Bild 4.16: Die Regelflächen des Konoids.

Ausgehend von dem mit  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  bezeichneten algebraischen Grad der drei Leitlinien einer Regelfläche lässt sich der Grad der generierten Regelfläche über das Produkt der drei Größen mit einem konstanten Faktor zwei bestimmen. Dementsprechend führt das Gleiten einer geradlinigen Erzeugenden entlang dreier erstgradiger Leitlinien, wovon zwei nie zueinander koplanar sind, zur Erzeugung einer Fläche zweiten Grades. Die über beide durch jeweils eine Leitlinie  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  und einen auf der dritten Leitlinie  $\Delta_3$  liegenden Punkt  $E_3$  definierten Ebenen erzeugte Schnittgerade  $e$  hat mit der Regelfläche die drei Punkte  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  gemeinsam. Da keine Fläche zweiter Ordnung von einer Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, muss die Gerade  $e$  ganz in der Fläche liegen und somit ihre Flächenerzeugende sein. Werden umgekehrt die erhaltenen Erzeugenden  $e$ ,  $f$  und  $g$  als Leitlinien angedeutet, so ergeben sich auf äquivalente Weise die Ausgangsgeraden  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  und  $\Delta_3$ .

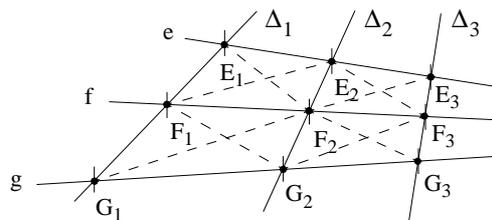


Bild 4.17: Zur Erzeugung einer quadratischen Regelfläche.

Die Geraden  $i$  und  $\Delta_n$  bilden somit die jeder quadratischen Regelfläche angehörigen zwei Scharen von Erzeugenden. Zwei scharungsgleiche, sich in einem bestimmten Punkt  $P_j$  treffende Flächenerzeugende  $j$  und  $\Delta_{n(j)}$  definieren die zu diesem Punkt zugehörige Tangentenfläche. Wie aus diesem Konstruktionsschema zu ersehen ist, liegen alle Geraden derselben Schar  $j$  oder  $\Delta_n$  windschief zueinander. Allgemein bestimmen beide Scharen von Geraden die Fläche eines einschaligen Hyperboloides. Im Ausnahmefall können die keine Parallelität aufweisenden Geraden einer Schar  $i$  oder  $\Delta_n$  zu ein und derselben Ebene parallel sein. Sämtliche zu je einer festen Ebene parallelen Geraden definieren die Fläche des hyperbolischen Paraboloides.

## 4.4 Minimalflächen

### Theoretische Grundlagen

Das Studium der Minimalflächen ist eng mit dem Versuch, Flächen über die Variationsrechnung durch eine Minimumseigenschaft des Flächeninhaltes der Form

$$\iint dA = \min. \quad (4.39)$$

zu charakterisieren, verknüpft. Die Aufstellung der Variationsrechnung durch die Basler Mathematiker Jakob und Johann Bernoulli und Leonhard Euler entstand aus der Notwendigkeit, die durch Minimumseigenschaften ausgezeichneten, in der Natur vorkommenden Gleichgewichts- und Bewegungszustände mit mathematischen Mitteln zu erfassen. Legt die Differentialgeometrie die Umgebungseigenschaften zugrunde, um aus ihnen Aussagen über den Gesamtverlauf eines Gebildes herzuleiten, so werden bei der Variationsrechnung Umgebungseigenschaften aus solchen dem Gebilde als Ganzem zukommenden Eigenschaften hergeleitet. Beispiele wie das Fermatsche Prinzip, nach welchem der Strahlenweg eines Lichtstrahls beim Durchlaufen eines Mediums mit variablem Refraktionsindex über die Minimierung des Weges erfolgt, oder auch die Kettenlinie bezeugen die grundlegende Bedeutung der Variationsrechnung in der theoretischen Physik.

Die Lösung der über die obige Gleichung formulierten Minimierungsaufgabe erfolgt über die Betrachtung einer Fläche

$$z = f(x, y) \quad (4.40)$$

mit kleinstem Inhalt in ihrer durch den Ausdruck

$$\delta f = \varepsilon(x, y) \quad (4.41)$$

gegebenen, infinitesimal deformierten Lage. Das Verschwinden des aus der Deformation herrührenden Zusatztermes für den Flächeninhalt,

$$\delta \iint dA = 0, \quad (4.42)$$

ist die notwendige Bedingung für die Existenz der Fläche, welche die gesuchten Eigenschaften aufweist.

Ausgehend von der in parametrischer Form gegebenen Gleichung (4.40),

$$\mathbf{r} = (x, y, f(x, y)), \quad (4.43)$$

und unter Verwendung der gebräuchlichen Abkürzungen

$$p = \partial f / \partial x, \quad q = \partial f / \partial y, \quad r = \partial^2 f / \partial^2 x, \quad s = \partial^2 f / \partial x \partial y \quad \text{und} \quad t = \partial^2 f / \partial^2 y \quad (4.44)$$

für die über die metrischen Komponenten

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq \quad \text{und} \quad G = 1 + q^2 \quad (4.45)$$

bestimmte Determinante  $g$  der metrischen Form,

$$g = 1 + p^2 + q^2, \quad (4.46)$$

ergibt sich (4.42) mit

$$\iint dA = \iint \sqrt{g} \, dx dy \quad (4.47)$$

zu

$$\iint \delta \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy = 0. \quad (4.48)$$

Die für die Bestimmung des Minimums notwendige Ableitung des Integranden ergibt

$$\iint \frac{p(\partial \varepsilon / \partial x) + q(\partial \varepsilon / \partial y)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \, dx dy = 0. \quad (4.49)$$

Durch partielle Integration und unter Berücksichtigung des Verschwindens des Wertes der Deformationsfunktion am Rand ergibt sich (4.49) zu

$$-\iint \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) \right] \, dx dy = 0. \quad (4.50)$$

Da die obige Gleichung auch für beliebige Störungen  $\varepsilon$  Gültigkeit behalten soll, muss der eckig eingeklammerte Ausdruck gleich null gesetzt werden. Diese Gleichsetzung führt zu der Aufstellung der als Lagrangesche Gleichung bezeichneten partiellen Differentialgleichung<sup>8</sup>

$$r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs = 0. \quad (4.51)$$

Jede die Lagrangesche Gleichung (4.51) erfüllende Funktion  $f$  ist eine Fläche kleinsten Inhaltes<sup>9</sup>.

---

8. Die Anfänge des Studiums der Minimalflächen ist eng mit der Arbeit von Joseph de Lagrange verknüpft, der den wiedergegebenen Gedankenzug in seiner Schrift *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, 1762, herleitete. Im gleichen Werk betrachtet Lagrange auch das Problem, den Inhalt einer Fläche, die ein vorgeschriebenes Volumen  $\iint z \, dx dy$  umhüllt, zu minimieren.

Die mittlere Krümmung jeder beliebigen Fläche  $z = f(x, y)$  ist durch den Ausdruck

$$H = [r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs] / [2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}] \quad (4.52)$$

gegeben. Unter Berücksichtigung der Lagrangeschen Gleichung folgt unmittelbar, dass die mittlere Krümmung jeder Fläche kleinsten Inhaltes den Wert null,

$$H = 0, \quad (4.53)$$

annehmen muss. Definitionsgemäss gilt demzufolge, dass eine Fläche kleinsten Inhaltes eine differentialgeometrische Fläche ist, welche die mittlere Krümmung  $H = 0$  in allen Punkten der parametrischen Punktmenge aufweist. Die Erkenntnis Meusniers, dass die Flächen kleinsten Inhaltes Hauptkrümmungen gleichen Betrages und entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen müssen, stellt die geometrische Fassung der Minimalflächengleichung von Lagrange dar<sup>10</sup>. Da die mittlere Krümmung als die halbierte Summe der beiden Hauptkrümmungen definiert ist, ergibt sich aus  $H = 0$  für alle nicht ebenen Flächen die Beziehung

$$\kappa_1 = -\kappa_2. \quad (4.54)$$

Hieraus folgt, dass die Gauss'sche Krümmung aller nicht ebenen Minimalflächen stets negativ sein muss:

$$K < 0. \quad (4.55)$$

Geprägt durch die der Oberflächenspannung unterliegenden Vorgänge weisen offene Seifenhäute stets eine Fläche minimalen Inhaltes auf<sup>11,12</sup>. Physikalisch können Minimalflächen durch das Tauchen eines beliebig geformten geschlossenen Drahtes in eine Seifenlösung realisiert werden<sup>13</sup>. Diese Betrachtung führt zur Charakterisierung der Minimalflächen als derjenigen Flächen, welche unter allen, über einer gegebenen Raumkurve aufgespannten Flächen den kleinsten Inhalt aufweisen. Daraus ergibt sich die als Plateausches Problem bezeichnete mathematische Frage, die in der Theorie der Minimal-

- 
9. Jede Minimalfläche kann lokal mit den Konstanten  $x_0, y_0$  und  $z_0$  und der komplex-analytischen Funktion  $F(\omega)$  der Variablen  $\omega = \alpha + i\beta$  beschrieben werden. Diese als Weierstrass'sche Formeln bezeichneten Gleichungen lassen erkennen, dass jeder analytischen Funktion  $F$  eine Minimalfläche entspricht und umgekehrt. Vgl. Jost (1994) und Nitsche (1989).
  10. Die Beweisführung, dass Minimalflächen Hauptkrümmungen gleichen Betrages und entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, wurde von Meusnier bereits 1776 vor der französischen Akademie vorgetragen, aber erst später publiziert. J. B. M. C. Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, 1785.
  11. Die in der begrenzenden Fläche einer Flüssigkeit auftretenden Spannungen ergeben sich aus den Anziehungskräften zwischen den Flüssigkeitsmolekülen. Ist im Innern einer Flüssigkeit jedes Molekül derart gleichmässig von Nachbarmolekülen umgeben, dass die resultierende Anziehungskraft null beträgt, so bildet die asymmetrische Molekülkonfiguration nahe der Oberfläche eine ins Flüssigkeitsinnere gerichtete resultierende Kraft.
  12. Die physikalische Theorie der Seifenhäutchen ist ein Teilgebiet der von Young und Laplace 1805 begründeten phänomenologischen Theorie der Kapillarität, die Gauss 1830 aus Johann Bernoullis Prinzip der virtuellen Arbeit abgeleitet und somit zu einem Teilgebiet der Variationsrechnung gemacht hat. T. Young, *An essay on the cohesion of fluids*, 1805; M. Laplace, *Traité de mécanique céleste*, 1805; C. F. Gauss, *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibræ*, 1830.

flächen eine zentrale Rolle einnimmt, ob nämlich jeder geschlossenen Raumkurve mindestens eine Minimalfläche entspricht<sup>14</sup>. Jede Minimalfläche lässt sich dementsprechend abschnittsweise durch eine in einen geeigneten Flächenrand eingespannte und unter dem Einfluss von Randkräften im Gleichgewicht befindliche homogene Haut realisieren. Physikalisch lässt sich eine solche Haut als eine schubweiche elastische Membran ohne Eigengewicht andeuten.



Bild 4.18: Minimalfläche als Seifenhaut.

Die Flächen kleinsten Inhaltes sind daher als die mathematische Modellierung der offenen Seifenhäute im stabilen Gleichgewicht zu betrachten. Über dieses Modell lassen sich aber zudem die sich im labilen Gleichgewicht befindenden Seifenhäute beschreiben. Obschon der mathematischen Untersuchung solcher Flächen wenig Beachtung geschenkt worden ist, können die Übergänge einer stabilen zu einer unstabilen Gleichgewichtslage in technischen Systemen von entscheidender Bedeutung sein – man denke beispielsweise an die Bifurkationsprobleme im Ingenieurwesen.

Der erbrachten Beweisführung entsprechend verschwindet die mittlere Krümmung in jedem Punkt einer Fläche kleinsten Inhaltes. Wie sich bereits aus dem zuvor Ausgeführten entnehmen lässt, gilt die Umkehrung dieses Satzes nicht, da solche, die Bedingung  $H = 0$  erfüllenden Minimalflächen existieren, zu denen sich in beliebiger Nachbarschaft andere, die selbe Randkurve, aber einen kleineren Flächeninhalt aufweisenden Flächen bestimmen lassen. Die Aussage  $H = 0$  ist somit eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung dafür, dass der Inhalt einer Fläche minimal ist. Grundsätzlich sind alle Flächen, welche den Bedingungen

$$H = 0 \quad \text{und} \quad \iint dA = \min. \quad (4.56)$$

genügen, stabile stationäre Minimalflächen. Solche Flächen, die die Krümmungsbedingung, nicht aber die Minimumeigenschaft erfüllen, werden als unstabile stationäre Minimalflächen bezeichnet.

13. Es sei hier in diesem Zusammenhang auf die ausführliche photographische Dokumentation der am Institut für leichte Flächentragwerke in Stuttgart durchgeführten experimentellen Forschungsarbeiten hingewiesen. Das Ersetzen der Seife-Glycerin Lösung durch chemische Lösungen erlaubt die Herstellung stabilerer und ausdauernderer Modelle. Vgl. Bach, Burkhardt und Otto (1987).

14. Plateau hat mit seinen umfangreichen theoretischen und experimentellen Arbeiten grosse Verdienste um die Erforschung der physikalischen Theorie der Kapillarität erworben. J. A. P. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, 1873. Die von Plateau geäußerte, sich auf experimentelle Evidenz und geometrische Überlegungen stützende Vermutung, dass sich in jede Raumkurve endlicher Länge eine Fläche kleinsten Inhalt einspannen lasse, fand erst 1930 durch J. Douglas und T. Radó eine befriedigende Antwort.

## Analytisch erfassbare Minimalflächen

### *Katenoid und Helikoid*

Anhand der verwandten Minimalflächen Katenoid und Helikoid konnte erstmals die Existenz von Flächen, welche der Lagrangeschen Gleichung genügen, analytisch bewiesen werden<sup>15</sup>. Nach dem Theorem von Meusnier stellt das Katenoid – die durch Rotation der Kettenlinie  $y = a \cdot \cosh(x/a)$  erzeugbare Fläche – die einzige nicht ebene, durch Rotation erzeugbare Minimalfläche dar. Andererseits gilt nach dem Theorem von Catalan, dass das Helikoid die einzige Regelfläche minimalen Flächeninhaltes ist<sup>16</sup>.

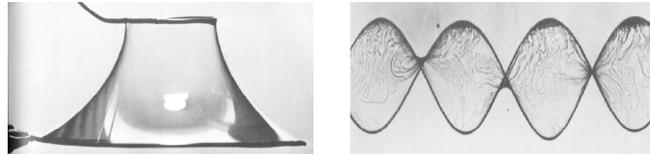


Bild 4.19: Seifenhautmodelle des Katenoids und des Helikoids.

Mit der Abbildung

$$u' = \pm \sinh u \quad \text{und} \quad v' = v \quad (4.57)$$

werden die ersten Fundamentalformen der durch die Ausdrücke

$$r = (\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u) \quad \text{und} \quad r' = (u' \cdot \cos v', u' \cdot \sin v', v') \quad (4.58)$$

gegebenen Flächen des Katenoids und des Helikoids identisch, falls sie in den entsprechenden Punkten mit den gleichen Parametern,

$$E' = E, \quad F' = F \quad \text{und} \quad G' = G \quad (4.59)$$

ausgedrückt werden. Das bedeutet, dass jedes einfach zusammenhängende Stück einer Kettenfläche verzerrungsfrei in ein Stück einer Wendelfläche verbogen werden kann und umgekehrt. Diese isometrische Deformation beider Flächen lässt sich durch eine einparametrische Schar assoziierter Minimalflächen wiedergeben und stellt dadurch eine interessante Illustration des Gauss'schen Theorema Egregium dar. Diese isometrische Deformation ist durch die folgende einparametrische Schar assoziierter Minimalflächen erfassbar:

$$x = \cosh u \cdot \cos v \cdot \cos(\pi t/2) + \sinh u \cdot \sin v \cdot \sin(\pi t/2),$$

$$y = \cosh u \cdot \sin v \cdot \cos(\pi t/2) - \sinh u \cdot \cos v \cdot \sin(\pi t/2),$$

15. J. B. M. C. Meusnier, *Mémoire sur la corbure des surfaces*, 1776. Euler hatte schon vor der Aufstellung der Lagrangeschen Gleichung erkannt, dass die Kettenfläche des bis Plateau als Alysseid bezeichneten Katenoids eine Fläche kleinsten Inhaltes ist. L. Euler, *Methodus inveniendi*, 1744.

16. Beweisführung in Nitsche (1989).

$$z = u \cdot \cos(\pi t/2) + v \cdot \sin(\pi t/2), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.60)$$

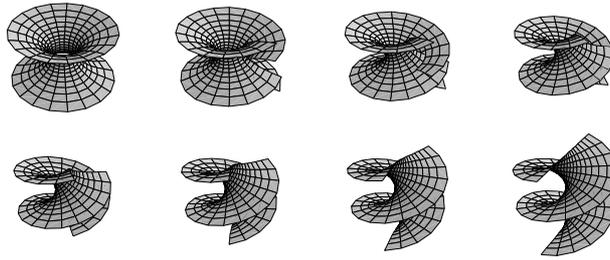


Bild 4.20: Adjungierte Minimalflächen Katenoid und Helikoid.

Die Abwicklung des Helikoids auf das Katenoid lässt sich anschaulich mit der Verbiegung einer auf der Schraubenfläche verlaufenden Schraubenlinie zu einem dieser unendlich langen Linie entsprechenden, unendlich oft umlaufenden Kreises wiedergeben. Bei dieser Verbiegung nehmen auch alle übrigen Schraubenlinien die Kreisform von selbst an. Da alle Kreise dieselbe Achse besitzen, ergibt sich dadurch eine Rotationsfläche, deren Breitenkreise aus den Schraubenlinien der Ausgangsfläche hervorgegangen sind. Das Katenoid stellt eine kettenlinienförmige Meridiankurven aufweisende hyperboloid-ähnliche Rotationsfläche dar, welche durch eine zwei parallele, kreisförmige Drähte mit gleicher Achse einspannende Seifenhaut physikalisch gegeben wird.

#### Scherksche Minimalflächen

Die vergleichsweise einfache explizite Scherksche Gleichung

$$z = a \cdot \log \left[ \sqrt{r^2 + b^2} + \sqrt{r^2 - a^2} \right] - b \cdot \arctan \frac{a\sqrt{r^2 + b^2}}{b\sqrt{r^2 - a^2}} + b\theta + c \quad (4.61)$$

ergibt sich mit der Aufstellung der Bedingung  $H = 0$  für die allgemeinen helikoidalen Flächen, das heisst für solche Flächen, die durch die Schraubung einer Raumkurve gegeben sind. Für  $a = 0$  wird die Scherksche Minimalfläche zu einem Katenoid, für  $b = 0$  zu einem Helikoid.

Die Menge aller Minimalflächen, welche die Gleichung

$$z = f(\eta) + g(\xi) \quad (4.62)$$

erfüllen, lässt sich bei geeigneter Umformung über den Ausdruck

$$\tanh(z/a) = \tan(x/a \cdot \cos \alpha) \cdot \tan(y/a \cdot \sin \alpha) \quad (4.63)$$

angeben. Hierbei ist die  $(x,y)$ -Ebene Trägerebene eines aus Flächengeraden bestehenden Rautenmusters, wobei die Fläche nur in den "gleichfarbigen Feldern" dieses Schachbret-

tes definiert ist. Anhand einer solchen Fläche wird der Raum in prismatische Bereiche, die sich in Richtung der  $z$ -Achse nach beiden Seiten in das Unendliche erstrecken, unterteilt<sup>17</sup>. Im partikulären Fall ergibt sich die obige Gleichung (4.63) mit  $\alpha = \pi/4$  und  $a = 2/b$  sowie durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems zu der Scherkschen Minimalfläche

$$e^{zb} \cos bx = \cos by. \quad (4.64)$$

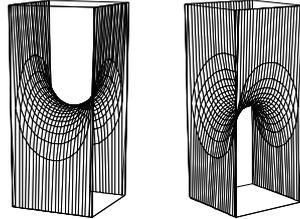


Bild 4.21: Element der periodischen Scherkschen Minimalfläche.

Für die vom Randbereich genügend weit weg liegenden Gebiete weisen die Scherksche Minimalfläche und das hyperbolische Paraboloid sehr geringfügige Abweichungen auf<sup>18</sup>.

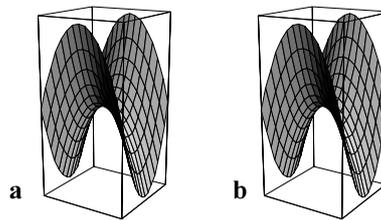


Bild 4.22: a) Scherksche Minimalfläche und b) hyperbolisches Paraboloid.

Ausgehend von solchen in der Form

$$f(x) + g(y) + h(z) = 0 \quad (4.65)$$

darstellbaren Minimalflächen lässt sich eine durch den Ausdruck

$$\alpha^2 \cosh \beta x - \beta^2 \cosh \alpha y = \cos \alpha \beta z \quad (4.66)$$

gegebene einparametrische Schar von Minimalflächen bestimmen, welche sich im partikulären Fall zu einer weiteren Scherkschen Minimalfläche umformen lässt, nämlich

$$\sin z = \sinh x \cdot \sinh y. \quad (4.67)$$

17. Vgl. Graf und Thomas (1947).

18. Die Ausdrücke  $z = (-1/0.12006) \cdot \log[\cos(-0.12006 y)/\cos(-0.12006 x)]$  – erhaltbar durch die Einsetzung von  $b = -0.12006$  in (4.64) – und  $x^2 - y^2 = 16z$  – ein durch die gleichen Eckpunkte definiertes hyperbolisches Paraboloid – weisen für  $-4 \leq x, y \leq 4$  eine maximale Diskrepanz von weniger als 1% auf. Vgl. Clarke (1966).

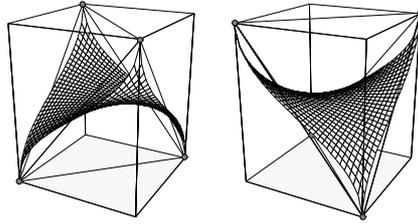


Bild 4.23: Eine weitere Scherksche Minimalfläche.

### Ennepersche Minimalfläche

Aus der durch die Symmetrieebene gebildeten Umhüllenden an den kofokalen Parabeln

$$\{x^2 = (8/3) \cdot z + 8/9, y = 0\} \quad \text{und} \quad \{y^2 = -(8/3) \cdot z + 8/9, x = 0\} \quad (4.68)$$

lässt sich die durch die parametrische Form

$$x = u + u \cdot v^2 - (1/3) \cdot u^3, \quad y = -v - v \cdot u^2 + (1/3) \cdot v^3, \quad z = u^2 - v^2 \quad (4.69)$$

gegebene Ennepersche Minimalfläche bestimmen<sup>19</sup>. Die Festsetzung von konstanten Grössen für die Parameter  $u$  und  $v$  in den Ausdrücken (4.69) ergibt die ebenen Kurven, welche das Netz der Krümmungslinien der Enneperschen Fläche bilden.

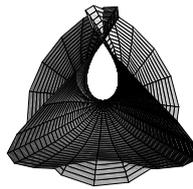


Bild 4.24: Ennepersche Minimalfläche.

### Catalansche Minimalfläche

Innerhalb derjenigen Minimalflächen, die eine bestimmte geodätische Linie, Asymptotenlinie oder Krümmungslinie beinhalten, ist die durch eine zyklodische geodätische Linie gegebene Catalansche Fläche besonders bedeutend<sup>20</sup>. Die Gleichung dieser Minimalfläche, die sich mittels Elimination des Parameters  $\alpha$  aus den beiden Beziehungen

$$(x - \alpha) \cos \alpha = (y - 1) \sin \alpha, \quad z^2 \cos \alpha + 4y(1 - \cos \alpha) = 4(1 - \cos \alpha)^2 \quad (4.70)$$

19. A. Enneper, *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, 1864.

20. E. Catalan, *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires*, 1855.

bestimmen lässt, ist durch eine einparametrische Schar von Parabeln gegeben, deren Scheitel auf dem durch die Gleichung

$$x(\alpha) = \alpha - \sin \alpha, \quad y(\alpha) = 1 - \cos \alpha \quad \text{und} \quad z(\alpha) = 0 \quad (4.71)$$

gegebenen Zykloid liegen.

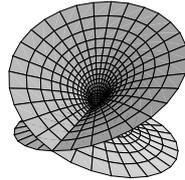


Bild 4.25: Catalansche Minimalfläche.

Analytisch gesehen stellt die Catalansche Minimalfläche einen Spezialfall der durch eine einparametrische Schar von Parabeln gegebenen und durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \alpha - a \cdot \sin \alpha \cdot \cosh \beta + b \cdot \sin(\alpha/2) \cdot \sinh(\beta/2), \\ y &= a - \cos \alpha \cdot \cosh \beta + b \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \sinh(\beta/2), \\ z &= 4a \cdot \sin(\alpha/2) \cdot \sinh(\beta/2) - (b/2) \cdot \alpha \end{aligned} \quad (4.72)$$

definierten Enneperschen Minimalfläche dar<sup>21</sup>. Für  $a = 1$  und  $b = 0$  wird die Ennepersche Schar von Minimalflächen zur Catalanschen Minimalfläche. Für  $a = 0$  und  $b \neq 0$  ergibt sich die Minimalfläche des Helikoids.

### *Hennebergsche Minimalfläche*

Die Hennebergsche Minimalfläche ist diejenige Minimalfläche, welche die in der durch  $y = 0$  gegebenen Ebene liegende und durch den Ausdruck

$$(z - 2)^3 = 9x^2 \quad (4.73)$$

gegebene Neilsche Parabel als geodätische Linie enthält<sup>22</sup>. In parametrischer Form ist diese Fläche durch die folgenden Beziehungen gegeben:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \sinh \alpha \cdot \cos \beta - (2/3) \cdot \sinh 3\alpha \cdot \cos 3\beta, \\ y &= 2 \cdot \sinh \alpha \cdot \sin \beta + (2/3) \cdot \sinh 3\alpha \cdot \sin 3\beta, \\ z &= 2 \cdot \cosh 2\alpha \cdot \cos 2\beta. \end{aligned} \quad (4.74)$$

21. A. Enneper, *Über Flächen mit besonderen Meridiankurven*, 1882.

22. L. Henneberg, *Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Kurve zur geodätischen Linie haben*, Dissertation, Zürich, 1875.

Bei geeigneter Wahl der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ , nämlich

$$\{(\alpha, -0.6, 0.6), (\beta, \pi/6, \pi/3) ; (\alpha, -0.6, -0.4), (\beta, \pi/3, 4\pi/3)\} , \quad (4.75)$$

lässt sich die Hennebergsche Fläche als eine sich nicht schneidende geschlossene Raumfläche darstellen. Da der Normalvektor beim Durchlaufen dieser Fläche seine Orientierung ändert, ist die Hennebergsche Fläche eine einseitige Fläche des Typs Möbius'sches Band. Die Hennebergsche Fläche lässt sich abschnittsweise derart angeben, dass die deren geodätische Kurve darstellende Neilsche Parabel und deren Einseitigkeit ersichtlich sind.

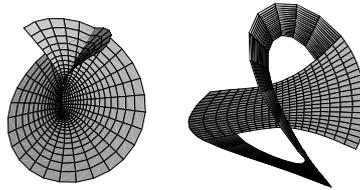


Bild 4.26: Ausschnitte aus der Hennebergschen Minimalfläche.

### Schwarzsche Minimalflächen

Die Umrandung der Minimalfläche von Schwarz besteht in einem vierseitigen Polygon, welches durch vier der sechs Kanten eines regulären Tetraeders gebildet wird. Anhand dieser Fläche wurde das von Plateau gestellte Problem erstmals für eine nicht ebene Kontur  $\Gamma$  in konkreter und expliziter Form gelöst<sup>23</sup>.

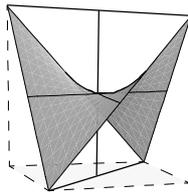


Bild 4.27: Schwarzsche Minimalfläche.

In optischer Hinsicht besticht die Schwarzsche Fläche durch eine frappante Ähnlichkeit mit einer durch die gleiche polygonale Randkurve  $\Gamma$  begrenzten hyperbolisch paraboloiden Fläche. Tatsächlich weisen diese Minimalfläche und eine der Gleichung

$$z = \sqrt{2} \cdot (x^2 - y^2) \cdot (1/a) \quad (4.76)$$

genügende Fläche eine maximale Diskrepanz von 0.12 % auf<sup>24</sup>.

23. Bis zum letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts blieb das Plateausche Problem für alle unebenen Flächen vollständig ungelöst. Die Arbeit, in der Schwarz seine Ergebnisse im Detail vorgestellt hatte, wurde der Berliner Akademie 1867 vorgelegt und erhielt deren Preis. H. A. Schwarz, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 1890. B. Riemann hatte das gleiche Problem schon 1861-62 gelöst, aber seine Resultate blieben zunächst unveröffentlicht.

Die Schwarzsche Minimalfläche weist einen hohen Symmetriegrad auf. Sie enthält den Mittelpunkt des Tetraeders, welcher durch den Schnittpunkt der drei Geraden, die die drei Paare gegenüberliegender Seiten verbinden, gegeben ist. Zudem verlaufen zwei dieser Geraden in der Fläche. Die dritte Gerade bildet die normale Gerade der Fläche in dem angesprochenen Mittelpunkt. Diesen Symmetrieeigenschaften und den entsprechenden Schwarzschen Spiegelungsprinzipien zufolge lässt sich diese Fläche als Grundelement einer periodischen Minimalfläche andeuten<sup>25</sup>.

Die Randkurve  $\Gamma$ , welche durch sechs gegenüberliegende Ecken miteinander verbundener Würfelkanten gebildet wird, führt zu einer weiteren Schwarzschen Minimalfläche. Die somit erhaltene Fläche lässt sich ebenfalls durch Addition von vier sattelförmigen Schwarzschen Minimalflächen erzeugen.

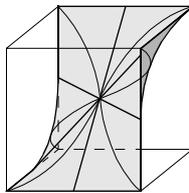


Bild 4.28: Eine weitere Schwarzsche Minimalfläche.

Neben den durch eine geschlossene Randkurve  $\Gamma$  begrenzten Minimalflächen lassen sich sowohl experimentell als auch mathematisch solche Minimalflächen bestimmen, die einen freien Rand  $\Sigma$  entlang einer Stützfläche  $S$  aufweisen. Nach den Schwarzschen Spiegelungsprinzipien muss die Minimalfläche die Stützfläche  $S$  entlang der Spurkurve  $\Sigma$  rechtwinklig schneiden. Diese Art von Flächen lässt sich anhand der Gergonneschen Minimalfläche exemplifizieren<sup>26</sup>.

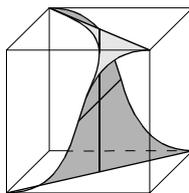


Bild 4.29: Gergonnesche Minimalfläche.

24. Nitsche (1989).

25. Die Schwarzschen Prinzipien für die Spiegelung von Minimalflächen lassen sich wie folgt formulieren: (1) Grenzt eine Minimalfläche  $M$  an eine gerade Linie, so stellt ihr Spiegelbild  $M'$  an dieser Linie ebenfalls eine Minimalfläche dar, wobei die Vereinigung von  $M$  und  $M'$  gleichermassen eine glatte Minimalfläche bildet. (2) Grenzt eine Minimalfläche  $M$  an eine Ebene und schneidet sie diese in einem rechten Winkel, so stellt ihr Spiegelbild  $M'$  an dieser Ebene ebenfalls eine Minimalfläche dar, welche in Verbindung mit  $M$  eine erweiterte glatte Minimalfläche bildet. Vgl. Hildebrandt und Tromba (1985). Vgl. ebenfalls Burt (1969).

26. Gergonne versuchte erfolglos, eine einen Würfel teilende Fläche kleinsten Inhalts zu bestimmen, deren zwei Ränder durch zwei gegenüberliegende zueinander inverse Würfelseiten gebildet werden. Diese Aufgabe stellt das älteste Problem bei Minimalflächen mit freiem Rand dar. J. D. Gergonne, *Questions proposées*, 1816. Fünfzig Jahre später gelangte Schwarz zur Lösung des Problems.

## 4.5 Flächen konstanter Krümmung

### Sphärische und pseudosphärische Flächen

Analytisch betrachtet muss jede Fläche, die eine konstante, nicht verschwindende Gauss'sche Krümmung aufweist, der Bedingung

$$K = (LN - M^2)/(EG - F^2) = \text{konst.} \neq 0 \quad (4.77)$$

genügen. Die einfachste und zugleich wichtigste Fläche, welche die obige Beziehung erfüllt, ist die konstant positiv gekrümmte Kugel. Bei der Kugel ist das Krümmungsmass  $K$  der inversen Quadratur des Radius  $R$  gleich. In geometrischer Sicht beschreibt die Kugel den Locus einer Punktmenge, die durch einen konstanten Abstand zu einem festen Punkt gekennzeichnet ist. Als einzige Fläche weist die Kugel daher unendlich viele Rotationsachsen und ebensoviele Symmetrieebenen auf. Das Verhältnis der Oberfläche  $A$  zu dem eingeschlossenen Volumen  $V$  einer Kugel lässt sich durch den vom Radius unabhängigen Ausdruck  $A^3 = 36 \cdot \pi \cdot V^2$  angeben. Es ist von besonderer Bedeutung, dass die Kugel unter allen Körpern gleichen Volumens die kleinste Oberfläche und umgekehrt unter allen Körpern gleicher Oberfläche das grösste Volumen aufweist. Während der analytische Nachweis dieser bedeutenden geometrischen Eigenschaften mittels der Variationsrechnung nur mühsam zu führen ist, lässt sich der Beweis experimentell durch jede frei schwebende ideale Seifenblase einfach darstellen. Bedingt durch die Oberflächenspannungen hat eine unter Innenüberdruck stehende geschlossene gewichtslose Seifenfläche das Bestreben, den Inhalt ihrer Oberfläche zu minimieren und somit die Gestalt einer Kugel anzunehmen.

Da jede verzerrungsfreie Verbiegung einer Fläche ihre inneren Eigenschaften invariant lässt, führt jede Abwicklung eines Kugelausschnittes zu weiteren Flächen konstanter positiver Krümmung. Die Verallgemeinerung dieses Erkenntnis führt zu dem 1839 aufgestellten Mindingschen Theorem, welches besagt, dass alle Flächen gleicher konstanter Krümmung isometrisch zueinander sind. Die über verzerrungsfreie Verbiegung erzeugbare isometrische Abbildung setzt die Beibehaltung der Bogenlänge  $ds^2$  entsprechender Punkte für die gesamte Punktmenge voraus. Ebenso wie alle Flächen verschwindender Gauss'scher Krümmung auf der Ebene abwickelbar sind, lassen sich alle positiv gekrümmten Flächen auf einer Kugel mit dem Radius  $R = K^{-1/2}$  isometrisch abbilden. Die Flächen konstanter negativer Krümmung gestatten ebenfalls die gleiche Manigfaltigkeit isometrischer Abbildung.

Für die bei weitem am meisten untersuchten Flächen konstanter Krümmung, die Rotationsflächen, ergibt sich die Bedingung (4.77) mit  $F = M = 0$  zu

$$K = LN/EG = \text{konst.} \quad (4.78)$$

Für  $LN > 0$  entspricht der obige Ausdruck den sphärischen Flächen. Pseudosphärische Flächen sind dementsprechend durch  $LN < 0$  gegeben. In ihrer parametrischen Form lassen sich diese Flächen über die Ausdrücke

$$x = u \cdot \cos v, \quad y = u \cdot \sin v \quad \text{und} \quad z = f(u) \quad (4.79)$$

angegeben. Die Bestimmung der gesuchten Funktion  $f(u)$  erfolgt über die Gleichsetzung der über den Ausdruck (4.78) bestimmten Differentialgleichung mit einer konstanten Grösse. Für  $K = a^{-2}$  ergibt sich die Funktion  $f(u)$  in (4.79) zu

$$z = \int \sqrt{1 - a^{-2} (-c_1 \cdot \sin u/a + c_2 \cdot \cos u/a)^2} \, du \quad (4.80)$$

In Abhängigkeit der durch die Integrationskonstanten  $c$  angenommenen Werte werden über die obige Gleichung (4.80) die Kugel, die elliptischen beziehungsweise die hyperbolischen sphärischen Flächen definiert.

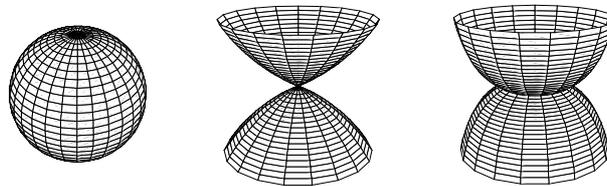


Bild 4.30: Kugel, elliptische und hyperbolische sphärische Flächen.

Dementsprechend führt die Gleichsetzung der gleichen Differentialgleichung mit einer konstanten negativen Grösse,  $K = -b^{-2}$ , zu der Funktion

$$z = \int \sqrt{1 - b^{-2} (-c_1^{(u/b)} - c_2^{(-u/b)})^2} \, du \quad (4.81)$$

welche die pseudosphärischen Flächen beschreibt. In Abhängigkeit von der Integrationskonstanten  $c$  lassen sich hierbei die durch Rotation einer Tractrix erzeugbare Pseudosphäre mit Pseudoradius  $b$  und die elliptische beziehungsweise die hyperbolische pseudosphärische Fläche unterscheiden. Den sphärischen Flächen entsprechend lässt sich jede eine konstante negative Krümmung  $K = -b^{-2}$  aufweisende Fläche isometrisch auf eine Pseudosphäre mit Pseudoradius  $b$  abbilden<sup>27</sup>.

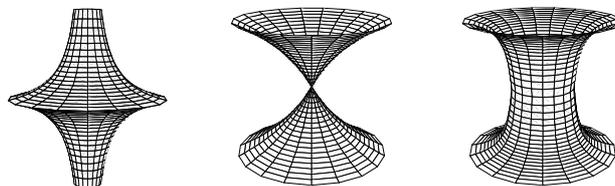


Bild 4.31: Pseudosphäre, elliptische und hyperbolische pseudosphärische Flächen.

27. Beweisführungen und analytische Herleitungen in Struik (1961).

## Nichteuklidische Geometrie

Die in der Ebene geltenden grundlegenden und allgemeinsten geometrischen Aussagen sind ebenfalls auf alle weiteren Flächen konstanter Krümmung übertragbar. Die Abweichung zwischen der Ebene und den Flächen positiver und negativer konstanter Gauss'scher Krümmung erfolgt erst an einer höheren Stelle des Aufbaus der Geometrie. Das Erkennen dieser Unterschiede durch Lobatschewsky und Bolyai führte zur Spaltung der Geometrie in eine euklidische und eine nichteuklidische Geometrie <sup>28</sup>.

Während des ganzen Mittelalters und bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts wurde vergeblich versucht, das Parallelenaxiom, welches besagt, dass es zu jedem nicht auf einer Geraden  $a$  liegenden Punkt genau eine  $a$  nicht schneidende Gerade gibt, aus den übrigen Axiomen Euklids abzuleiten. Anhand der hyperbolischen Ebene - ein widerspruchsfreies geometrisches Modell, in welchem die geodätischen Linien als nichteuklidische Geraden betrachtet werden - konnte erstmals die zwischen dem Parallelenaxiom und den übrigen euklidischen Axiomen bestehende Unabhängigkeit aufgezeigt werden. Die Ursache dafür ist, dass das Parallelenaxiom das einzige in der hyperbolischen Ebene nicht erfüllte Axiom darstellt. Diese Theorie wurde allerdings erst dann weitgehend akzeptiert, als Beltrami den Beweis erbringen konnte, dass die Konsistenz der Euklidischen Geometrie diejenige der Lobatschewsky-Bolyaischen Geometrie impliziert <sup>29</sup>.

Die philosophische Relevanz dieser Entdeckung rührt daher, dass nach Kant der Raum und die Zeit als Erkenntniskategorien angesehen wurden, welche die Strukturierung der an sich amorphen menschlichen Erscheinungswelt ermögliche. Dem euklidischen räumlichen Vorstellungsvermögen entsprechend wirke die euklidische Geometrie als synthetisches Urteil a priori, das heisst als eine begrifflich vor jeder Erfahrung liegende Konstruktion des menschlichen Geistes. Obwohl die menschliche Erfahrung zweifellos die euklidische Geometrie, insbesondere in ihrer kartesischen Auffassung, als Hilfsmittel verwendet, liess sich mittels der hyperbolischen Geometrie zeigen, dass bestimmte Eigenschaften der Geometrie nicht a priori deduziert werden können, sondern aus der Erfahrung gewonnen werden müssen. Diese bedeutende Entwicklung führte zum Konzept der Riemannschen Metrik, mit welchem die Massenverhältnisse des Raumes erst a posteriori aus der Erfahrung gewonnen werden. Diese Theorie erfuhr eine Bestätigung durch die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins, in der die Geometrie des Raumes durch die Verteilung der Massen bestimmt wird <sup>30</sup>.

---

28. Die Aufstellung der hyperbolischen Geometrie ist N. I. Lobatschewsky, 1829, und J. Bolyai, 1832, zu verdanken. Gauss hatte vermutlich schon zuvor die nichteuklidische Geometrie erkannt. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen wurden jedoch nicht publiziert.

29. Beltrami argumentierte, dass eine Inkonsistenz in dieser Geometrie eine Inkonsistenz in der sich auf die Euklidischen Postulate stützenden Theorie der Flächen konstanter negativer Krümmung bedeuten würde. E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, 1868.

30. Schon Gauss hatte versucht, die Krümmung des Raumes, in ähnlicher Weise wie diejenige einer Fläche definiert, empirisch zu bestimmen.

## 4.6 Diskrete Punktsysteme des Raumes

### Diskontinuierliche Geometrie

Mit Hilfe differentialgeometrischer Mittel lassen sich wesentliche Aussagen über den Gesamtverlauf eines stetigen Gebildes formulieren, falls sich die auf die unmittelbare Umgebung eines betrachteten Punktes beziehenden Eigenschaften auf jeden der Punkte dieses Gebildes übertragen lassen. Die diskrete Geometrie betrachtet hingegen ein Gebilde ganzheitlich als ein aus isolierten Punktelementen aufgebautes System. Die Theorie diskontinuierlicher Punktgebilde umfasst eine Fülle praxisrelevanter theoretischer Ansätze, über welche diskontinuierliche Eigenschaften untersucht und beschrieben werden können. Mit Hilfe der Theorie diskontinuierlicher Punktgebilde lassen sich bestimmte in der Natur und in den technischen sowie in den künstlerischen Schöpfungen des Menschen vorkommende strukturelle Eigenschaften präzise und synthetisch beschreiben. Zudem kann der Versuch, Membranen mit bestimmten Eigenschaften konzeptionell zu verwirklichen, dazu führen, dass ein zu erzeugendes kontinuierliches Gebilde als Grenzfall eines diskontinuierlichen aufgefasst werden kann.

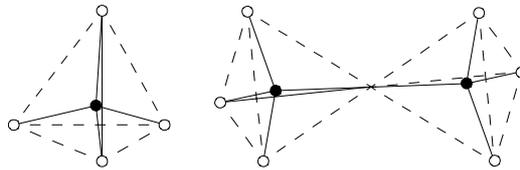


Bild 4.32: Strukturformel  $CH_4$  (Methan) und  $C_2H_6$  (Äthan).

Die Kristallographie stellt ein wichtiges Anwendungsgebiet und einen Entwicklungskatalysator der Theorie diskontinuierlicher regelmässiger Punktgebilde dar. Das regelmässige makroskopische Äussere und die Spaltbarkeit der Kristalle lässt erwarten, dass die einzelnen als Punkt aufgefassten Atome oder Moleküle eine Elementarzelle bilden, die kongruent zu sich selbst über den ganzen Raum fortgesetzt werden kann. Dieser Ansatz ermöglicht das Verständnis des Aufbaues und der Symmetrieeigenschaften kristallographischer Strukturen, womit die geometrischen Eigenschaften des Diskontinuums und das physikalische Verhalten des Kristalls in einen engen Zusammenhang gebracht werden können<sup>31</sup>. Der Unterschied in der Anschauung ist sehr auffällig und deutet an, wie sehr unser geometrisches Denken die atomistische Auffassung bevorzugt.

31. Als Kristall bezeichnet man jeden echten Festkörper, dessen Bausteine sich räumlich periodisch in einem Gitter wiederholen. Im Rahmen der Geometrie der Kristalle wird zwischen dem makroskopischen Scheinkontinuum und dem mikroskopischen Raumgitter unterschieden. Die Klassifikation der Kristalle erfolgt aufgrund der Symmetrieeigenschaften des strukturellen Diskontinuums. Es lassen sich hierbei sieben Kristallsysteme und 32 Kristallklassen unterscheiden. Als erster bedeutender Schritt zur Aufklärung der Kristallstrukturen mittels mathematischer Theorie werden Arbeiten von R. J. Häüy (1743-1822) gewertet. Wichtige Beiträge lieferten ferner J. F. C. Hessel in 1830, A. Bravais in 1850 und C. Jordan (1838-1922). Eine vollständige Auflistung aller Raumgruppen haben unabhängig voneinander E. S. Fedorow 1890 und A. Schönflies 1891 aufgestellt. Vgl. Burckhardt (1988).

In der Zahlentheorie spielen die ebenen und räumlichen Punktgitter ebenfalls eine bedeutende Rolle. Bereits das einfache ebene quadratische Gitter hat Anlass zu wichtigen mathematischen Untersuchungen gegeben, deren erste von Gauss stammt<sup>32</sup>. Der Gauss'sche Ansatz, welcher dem Beweis der Leibnizschen Reihe

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots \quad (4.82)$$

zugrundeliegt, besteht in dem Versuch, die Anzahl  $f(r)$  Gitterpunkte zu bestimmen, welche auf einer Kreisscheibe vom Radius  $r$  liegen<sup>33</sup>. Mit der additiven Zahlentheorie, welche sich mit der Darstellung natürlicher Zahlen durch Summen gewisser natürlicher Zahlen beschäftigt, findet die Zahlentheorie ein bedeutendes Modell für die Beschreibung von mittels Addition erfassbaren homothetischen Wachstumsprozessen der Natur oder für die Erstellung spezieller Kriterien in der Chaostheorie. Neben den Pythagoreischen Polygonalzahlen, auf welche in einem der nachstehenden Kapitel eingegangen wird, stellen insbesondere die nach der Rekursionsformel

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = (F_{n+1} + F_n), \quad n \geq 0 \quad (4.83)$$

bestimmbare Fibonacci'sche Zahlenreihe

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, \quad (4.84)$$

sowie die von ihr abgeleitete Koeffizientenreihe

$$1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, \dots, \quad (4.85)$$

ein in dieser Hinsicht bedeutendes Beispiel dar. Diese Zahlenreihe weist die charakterisierende Eigenschaft auf, dass der Quotient aus  $F_n$  und  $F_{n+1}$  gegen

$$\Phi = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180\dots \quad (4.86)$$

konvergiert. Dieser Konvergenzwert wird als Goldener Schnitt bezeichnet<sup>34,35</sup>.

---

32. Zahlentheoretische Probleme wurden schon von den Pythagoräern formuliert. Eine erste Darstellung damals bekannter Ergebnisse findet sich in Euklids *Elementen*. Diophantos behandelte in seinem Werk *Arithmetika* im dritten nachchristlichen Jahrhundert Gleichungen mit rationalen und ganzzahligen Lösungen. Ähnlich formulierte Probleme fanden sich in der chinesischen, indischen, arabischen und, um 1200 durch L. Fibonacci, in der europäischen Mathematik. P. de Fermat gilt als Begründer der modernen Zahlentheorie. L. Euler und J. L. de Lagrange leisteten bedeutende Beiträge im 18. Jahrhundert, und A.-M. Legendre, *Essai sur la Théorie des Nombres*, 1798, entwickelte erstmals eine systematische Darstellung dieses Teilgebietes der Mathematik. Eine entscheidende Fortentwicklung fand die Zahlentheorie durch C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.

33. Vgl. Hilbert und Cohn-Vossen (1932).

34. Bereits Kepler zeigte in seinem *De Nive Sexangula* wie die Fibonacci'sche Zahlenreihe in einem engen Zusammenhang zum Goldenen Schnitt sowie den Mustern und Wachstumsprozessen der Botanik steht. Als Beispiele der Botanik lassen sich in diesem Zusammenhang die Samenmuster der Sonnenblume sowie die Muster der Pinienzapfen oder der Ananas erwähnen. Die mystische und geheime *sectio aurea* war den Ägyptern und später den Pythagoräern bekannt und wurde dementsprechend bei den architektonischen Konstruktionen und den künstlerischen Erzeugnissen angewendet. Vgl. COMAP (1989), Ghyka (1927), Jaeger (1917).

## Punktsysteme als topologische Modelle konvexer Netze

Jedes räumliche Punktsystem lässt sich physikalisch als räumliches Netz auffassen. In den folgenden Ausführungen soll auf solche konvexe Punktsysteme eingegangen werden, welche eine periodische Wiederholung gewisser Punktmuster aufweisen. Einen diesbezüglich möglichen Ansatz stellen solche Punktsysteme dar, welche die Eulersche topologische Gesetzmässigkeit

$$F + E = K + 2 \quad (4.87)$$

erfüllen. Hierbei bezeichnen die parametrischen Grössen  $F$ ,  $E$  und  $K$  die Anzahl Flächen, Ecken und Kanten des betrachteten Gebildes<sup>36</sup>. In topologischer Hinsicht lässt sich ein Netz über seine  $p$ -fach verknüpften Punkte und als  $n$ -Gone ausgebildete Flächen charakterisieren. Die topologische Uniformität eines Netzes bedingt, dass das gesamte System durch mindestens eine Kanten- oder Flächengleichheit geprägt ist. Nomenklatorisch kann zwischen topologisch regulären  $(n,p)$ -Netzen und topologisch quasiregulären  $(\bar{n},p)$ -, beziehungsweise  $(n,\bar{p})$ -Netzen unterschieden werden<sup>37</sup>.

|                            |                      |                     |
|----------------------------|----------------------|---------------------|
| <i>Reguläre Netze</i>      | $(n,p)$ -Netze       | Platonische Netze   |
| <i>Quasireguläre Netze</i> | $(\bar{n},p)$ -Netze | Archimedische Netze |
|                            | $(n,\bar{p})$ -Netze | Catalansche Netze   |

*Bild 4.33: Klassifikation uniformer Netze.*

Die hier verwendeten Symbole  $\bar{n}$  und  $\bar{p}$  bezeichnen die gewichteten Mittelwerte der verschiedenen in jedem Punkt zusammentreffenden  $n$ -Gone, beziehungsweise der im System vorkommenden  $p$ -fachen Anschlüsse. Die Punktäquivalenz eines Netzes ist für solche Systeme gegeben, welche dem Ausdruck

$$n \cdot F = p \cdot E = 2 \cdot K \quad (4.88)$$

genügen<sup>38</sup>. Mit

$$F = (p/n) \cdot E \quad \text{und} \quad K = (p/2) \cdot E \quad (4.89)$$

35. Zusätzlich umfasst die Theorie regulärer Punktsysteme die diskontinuierlichen Bewegungsgruppen, über welche solche Mustergruppen wie Rosetten und Friese wiedergegeben werden können. Markante künstlerische und technische Erzeugnisse dieser Art sind die Fensterrosetten in sakralen Bauten der Romanik und der Gotik. Dieses Ornamentmotiv ist aus Teilen zusammengesetzt, welche ähnlich wie eine Blüte innerhalb eines Kreises regelmässig um ein Zentrum angeordnet sind. Rotierende Elemente in der Technik, welche über eine regelmässige Anordnung eine gleichmässige und optimale Stabilität oder Wirkung anstreben, weisen auffällige und ausgeprägte Symmetrieeigenschaften der Rosettengruppen auf.

36. Das Eulersche Gesetz stellt einen partikulären Fall des Gesetzes von Schläfli für die regulären Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes dar. Das Eulersche Gesetz wird durch alle regulären und quasiregulären Polyeder, deren Duale sowie die in einer unendlichen Anzahl existierenden regulären Prismen und Antiprismen erfüllt.

37. Nomenklatur nach Wells (1977).

38. Nach Quaißer (1994) gilt für jeden eckenäquivalenten konvexen Polyeder  $Ep = 2K$  und  $3F \leq 2K$ .

ergibt sich die Eulersche Gleichung (4.87) zu

$$E = [4 \cdot n] / [4 - (n - 2)(p - 2)] \quad . \quad (4.90)$$

Diesem Ausdruck zufolge ist die Grösse  $E$ , das heisst die Anzahl Punkte des Systems, durch das Produkt

$$\chi = (n - 2)(p - 2) \quad (4.91)$$

bestimmt<sup>39</sup>. Unter der Berücksichtigung, dass stets  $p \geq 3$  und  $n \geq 3$  gelten muss, lassen sich drei Lösungsbereiche unterscheiden, nämlich

$$1 \leq \chi < 4, \quad \chi = 4 \quad \text{und} \quad \chi > 4, \quad (4.92)$$

welche das Verhalten der Grösse  $E$  bestimmen.

|     |    | $n$ |   |    |    |   |   |   |    |    |    |
|-----|----|-----|---|----|----|---|---|---|----|----|----|
|     |    | 3   | 4 | 5  | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $p$ | 3  | 1   | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|     | 4  | 2   | 4 | 6  | 8  |   |   |   |    |    |    |
|     | 5  | 3   | 6 | 9  | 12 |   |   |   |    |    |    |
|     | 6  | 4   | 8 | 12 | 16 |   |   |   |    |    |    |
|     | 7  | 5   |   |    |    |   |   |   |    |    |    |
|     | 8  | 6   |   |    |    |   |   |   |    |    |    |
|     | 9  | 7   |   |    |    |   |   |   |    |    |    |
|     | 10 | 8   |   |    |    |   |   |   |    |    |    |
|     | 11 | 9   |   |    |    |   |   |   |    |    |    |
|     | 12 | 10  |   |    |    |   |   |   |    |    |    |

Bild 4.34: Natürliche  $\chi$ -Werte.

Für die drei obigen Fälle (4.92) folgt

$$E > 0, \quad E \rightarrow \infty, \quad E < 0. \quad (4.93)$$

Jeder  $(n,p)$ -Kombination, die der Gleichung

$$(n - 2)(p - 2) = 4 \quad (4.94)$$

genügt, entspricht ein netzartiges Gebilde, welches aus einer unendlichen Anzahl Punkte zusammengesetzt ist. Dieses Netz gleicht der infiniten Parkettierung der euklidischen Ebene. Aus diesem Ausdruck lässt sich die Schlussfolgerung ziehen, dass die Ebene auf nur drei Arten regulär unterteilbar ist. Den drei  $(n,p)$ -Kombinationspaaren  $(3, 6)$ ,  $(4, 4)$  und  $(6, 3)$  entsprechen die trianguläre, die quadratische und die hexagonale Parkettierung der Ebene.

39. Im Leibnizschen Manuskript von 1676 des um 1620 von René Descartes (1596-1650) verfassten *Pro-gymnasmata de solidorum elementis* wird die Existenz von einzig fünf regulären Polyedern bewiesen. Die Ausdrücke  $E = 4(a + 2)/(4 - ab)$  und  $F = 4(b + 2)/(4 - ab)$ ,  $a, b \in N$ , die sich aus diesem Manuskript entnehmen lassen, gleichen den hier niedergelegten, falls die Substitutionen  $n = a + 2$  und  $p = b + 2$  vorgenommen werden. Vgl. Descartes (1987).

Alle Systeme, die hingegen der Gleichung

$$1 \leq (n-2)(p-2) < 4 \quad (4.95)$$

genügen, sind durch eine endliche Ausbreitung gekennzeichnet. Die entsprechenden Netze sind daher geschlossen und konvex. Die räumliche minimale regulär-konvexe Elementarzelle ergibt sich über das Kombinationspaar  $n_{min} = p_{min} = 3$  und weist die Gestalt des regulären Tetraeders auf. Wie die geometrische Anschauung erkennen lässt, ist die Konvexität eines Punktes durch die Summe aller in diesem Punkt zusammenkommenden Polygonwinkel

$$p \cdot \beta < 2\pi, \quad (4.96)$$

bestimmt. Die als Winkelüberschuss  $\alpha$  bezeichnete Differenz zwischen der Summe aller Polygonwinkel und dem planaren Grenzwinkel  $2\pi$ ,

$$p \cdot \beta + \alpha = 2\pi, \quad (4.97)$$

stellt das Mass der Abweichung der konvexen Punktstruktur von der Ebenheit dar.

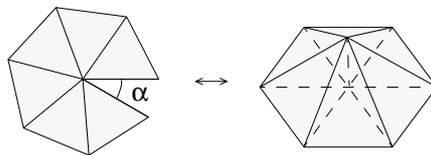


Bild 4.35: Zum Winkelüberschuss  $\alpha$ .

Es lässt sich zeigen, dass die Summe aller Winkel  $\beta$  und die Anzahl der Punkte  $E$  des Systems durch die lineare Beziehung

$$\sum \beta = (2\pi E) - 4\pi \quad (4.98)$$

miteinander verknüpft sind <sup>40</sup>. Wie hierbei zu erkennen ist, nimmt der Einfluss des konstanten Überschussfaktors  $4\pi$  bei zunehmender Anzahl Systempunkte ab. Gleichzeitig nähert sich die Summe der Anschlusswinkel jedes Punktes dem die Ebenheit charakterisierenden Grenzwert  $2\pi$  an, womit der Krümmungsradius des Systems gegen das Unendliche strebt. Nicht zu übersehen ist hierbei, dass der Überschussfaktor  $4\pi$  der Summe

$$E \cdot p \cdot \beta = 4 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi \quad (4.99)$$

der Flächenwinkel  $\beta$  eines Tetraeders gleich ist und somit eine nukleare Grösse darstellt. Alle  $(n-p)$ -Kombinationen, die der Ungleichung  $(n-2)(p-2) > 4$  genügen, erhalten im betrachteten dreidimensionalen Raum keine Bedeutung. In der Kristallographie wird jedoch auch diesen Kombinationen eine bedeutende Rolle beigemessen.

40. In seinem *Progymnasmata de solidorum elementis* untersucht Descartes die Krümmungseigenschaften der Polyeder. Ihm wird die Entdeckung der Beziehung (4.98) zugeschrieben. Ibid.

## Reguläre Polyeder

Reguläre Polyeder sind konvexe Gebilde, welche der hergeleiteten Ungleichung

$$\chi = (n - 2)(p - 2) < 4 \quad (4.100)$$

genügen. Da die beiden Parameter  $n$  und  $p$  der Regularitätsbedingung zufolge einzig natürliche Werte annehmen dürfen, und weil diese grösser als zwei sein müssen, lässt sich die obige Bedingung einzig durch die fünf  $(n,p)$ -Kombinationen

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3) \text{ und } (5, 3) \quad (4.101)$$

erfüllen. Die charakterisierende Eigenschaft eines jedes regulären Punktgebildes stellt eine Funktion des Differenzproduktes  $\chi$  dar. Diese Abhängigkeit lässt sich ebenfalls anhand der Summe  $p \cdot \beta$  der Anschlusswinkel veranschaulichen.

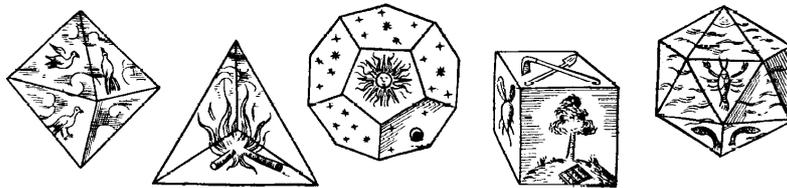


Bild 4.36: Die fünf Platonischen Polyeder nach Kepler.

Den fünf  $(n,p)$ -Kombinationen (4.101) entsprechen die fünf als Platonische Polyeder bezeichneten Figuren. Die Namensgebung dieser Polyeder ist auf den Pythagoräer Plato zurückzuführen, der bei seinem Studium der Struktur und der perzeptiblen und errechenbaren Invarianten des Universums die fünf regulären Körper des Tetraeders, des Oktaeders, des Ikosaeders, des Hexaeders und des Dodekaeders den Elementen Feuer, Luft, Wasser und Erde und der Himmelsmaterie zuordnete<sup>41,42</sup>.

41. Die fünf regulären Polyeder waren bereits im Kreise der Pythagoräer bekannt. Pythagoras (580-500 v. Chr.) vertrat die Ansicht, dass das Wesen aller Dinge die Zahl sei – vgl. Ghyka (1987), Spengler (1923). In seinem Dialog *Timaios* ordnet Plato (427-347 v. Chr.) die regulären Vielflächner den *Elementen des Alls* zu. Nach Plato formte und fügte Gott den Weltbau geometrisch aus den elementaren Zuständen des Wärmehaften, des Gasförmigen, des Flüssigen und des Festen zusammen. Nach der Platonischen Auffassung symbolisiert der Tetraeder die alles durchdringende Strahlenkraft der Wärme und ist somit dem Feuerelement zuzuordnen. Der allseitig im Raum verstrahlende Oktaeder ist dem Gasförmigen vergleichbar und repräsentiert somit das Element Luft. Die hexagonale Formtendenz des Ikosaeders, welche sich bei der frontalen Projizierung des Ikosaeders offenbart, findet sich im Wasser, wenn es im Schnee auskristallisiert. Der Ikosaeder symbolisiert daher das Wasserelement. Die scheinbare Schwere und Kompaktheit des Würfels führt dazu, den Hexaeder dem Element Erde zuzuordnen. Zuletzt stellt der in einem engen Verhältnis zum Goldenen Schnitt stehende Dodekaeder ein Symbol der Himmelsmaterie dar, woraus Gott durch Gestaltung und Zahlen die Elemente schuf.

42. Die Gestalten niedrigerer Entwicklung der lebenden Natur sind durch mehrfache Symmetrien geprägt. Unter den von E. Häckel gegen Ende des 19. Jahrhunderts aufgezeichneten mikroskopischen Organismen der Radiolarie lässt sich die Gestalt aller fünf Platonischen Polyeder antreffen. In der Kristallographie kommen hingegen die beiden regulären Polyeder Dodekaeder und Ikosaeder nie vor. Vgl. Jaeger (1917) und Thompson (1942).

Jeder der fünf regulären Körper lässt sich in jeden anderen einschreiben, nicht aber, der Tetraeder ausgeschlossen, in sich selbst. Es ergeben sich daraus 21 Einschreibungsbeziehungen, bei welchen die Umkugel des eingeschriebenen Körpers gleichzeitig Inkugel des umhüllenden Körpers ist. Das berühmt gewordene Keplersche Modell der Planetenbahnen beruht auf diesem Zusammenspiel der Radienverhältnisse der Um- und Inkugeln der Platonischen Polyeder<sup>43</sup>.

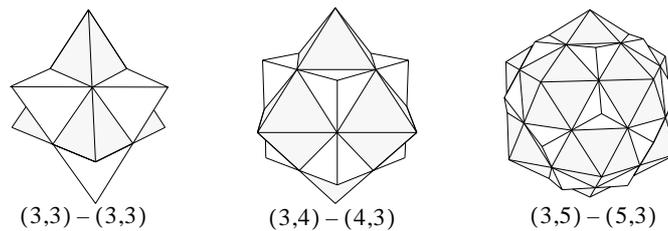


Bild 4.37: Die  $(n,p)$ -Dualitäten der regulären Polyeder.

Die fünf platonischen Polyeder lassen sich in eine Kugel einschreiben, so dass die Ecken ein System äquivalenter Punkte darstellen. Falls an die Ecken eines solchen Polyeders die Tangentialebenen der Umkugel gelegt werden, so müssen diese Ebenen einen zweiten Polyeder begrenzen, welcher ebenfalls regulär sein muss. Die beiden betrachteten Gebilde sind dadurch gekennzeichnet, dass die Ecken der eingeschriebenen Körper auf die Flächenmittelpunkte der umhüllenden Körper zu stehen kommen. Dieses Prinzip der Dualität ist bei den drei Paaren Tetraeder-Gegentetraeder, Hexaeder-Oktaeder und Dodekaeder-Ikosaeder anzutreffen. Der duale Polyeder hat dann gleichviele Kanten wie die Anzahl Flächen des Ausgangspolyeders, und umgekehrt weist er gleich viele Flächen wie die Anzahl Kanten des Ausgangspolyeders auf. Die dualen Beziehungen zwischen den Platonischen Polyedern lassen sich in den Symmetrieeigenschaften der  $(n-p)$ -Matrix erkennen. Bei geeigneter Massstabwahl zweier betrachteter dualer platonischer Polyeder kommen die Kanten in ihren Mitten rechtwinklig zum Kreuzen, und es findet eine gegenseitige Durchdringung statt. Das Paar dualer Polyeder umhüllt dann die gleiche Kantenkugel, welche tangential zu den Berührungspunkten liegt.

43. Die regulären Polyeder nahmen stets eine zentrale Rolle im Werdegang der westlichen Geometrie ein und sind mit grossen Denkern, darunter Pythagoras, Plato, Euklid, Hero und Pappus von Alexandria, Leonardus Pisanus (Fibonacci), Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, Albrecht Dürer, Johannes Kepler und René Descartes, eng verknüpft. Bei dem Euklidischen Werk *Elemente* (um 300 v. Chr.) wird die Konstruktion der fünf regulären Polyeder als ein vorrangig abstraktes Problem der Mathematik behandelt. In der Renaissance entwickelte sich die Konstruktion dieser Körper zu einem Problem der Perspektive, über welche die korrekte Wiedergabe der Regulären Polyeder als Gebilde des dreidimensionalen Raumes erfolgen sollte. Sowohl in Pacioli's *Divina Proportione*, 1509, als auch in Keplers *Harmonice Mundi*, 1619, wird die im Platonischen System implizierte hierarchische Anordnung der Regulären Polyeder übernommen. *Ils [les corps réguliers] – so Fra Luca Pacioli – correspondent aux cinq corps simples dans la nature, à savoir Terre, Eau, Air, Feu, et Quinte Essence, c'est à dire la Vertu Céleste qui maintient tous les autres dans leur être.* Das im *Mysterium Cosmographicum*, 1597, und im *Harmonice Mundi* dargelegte und berühmt gewordene Keplersche Modell der Planetenbahnen stellt die Bahnen der damals bekannten Planeten Saturn, Jupiter, Mars, Erde, Venus und Merkur in Bezug zu den In- und Umkugeln der fünf platonischen Körper. Vgl. Kepler (1940), Pacioli (1980).

## Quasireguläre Polyeder

Die quasiregulären Punktsysteme unterscheiden sich von den regulären dadurch, dass in jedem Punkt reguläre, aber ungleiche Polygone zusammentreffen. Die Summe der Polygonwinkel um jeden Punkt lässt sich über den Ausdruck

$$\sum \beta_i = p \cdot \bar{\beta} \quad (4.102)$$

ermitteln, wobei die Winkelgrösse  $\bar{\beta}$  dem gewichteten Mittel der regulär-polygonalen Anschlusswinkel entspricht:

$$\bar{\beta} = \sum (p_i \cdot \beta_i) / \sum p_i \quad (4.103)$$

Den regulären Punktsystemen entsprechend ist die Konvexitätsbedingung quasiregulärer Punktsysteme durch die Ungleichung

$$p \cdot \bar{\beta} < 2\pi \quad (4.104)$$

bestimmt. Jedes Punktsystem, das durch die Quasiregularität und die Konvexität charakterisiert ist, muss in entsprechender Weise die durch die gewichtete Mittelgrösse  $\bar{n}$  substituierte Ungleichung (4.100), das heisst

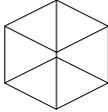
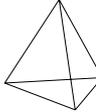
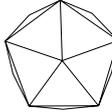
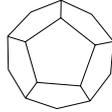
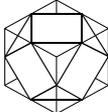
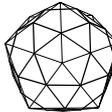
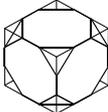
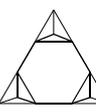
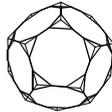
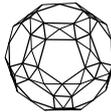
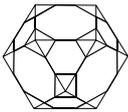
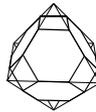
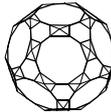
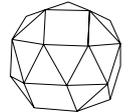
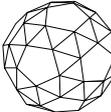
$$\chi = (\bar{n} - 2)(p - 2) < 4 \quad , \quad (4.105)$$

erfüllen. Wie sich durch geometrische Konstruktion zeigen lässt, existieren genau 13 eine nichtprismatische Gestalt aufweisende Punktsysteme, welche die obige Bedingung erfüllen. Diese Punktsysteme quasiregulären konvexen Charakters werden als Archimedische Polyeder bezeichnet<sup>44</sup>. Die Archimedischen Polyeder stehen in einer engen Beziehung zu den Platonischen Körpern und sind ausnahmslos aus diesen herleitbar. Es ist eine bemerkenswerte Eigenschaft aller Archimedischen Polyeder, sich derart in einen regelmässigen Tetraeder umschreiben zu lassen, dass vier ihrer Oberflächen auf den Flächen des Tetraeders liegen. In geometrischer Hinsicht lassen sich 11 der 13 Archimedischen Polyeder als Platonische Polyeder höherer Frequenzen auffassen, und sind somit aus diesen direkt herleitbar. Bei der geometrischen Konstruktion Platonischer Polyeder höherer Frequenzen wird die Tangentialebene der Umkugel eines betrachteten Eckpunktes des Ausgangspolyeders entlang der durch diesen Punkt verlaufenden Flächennormalen verschoben. Der sich daraus ergebende Polyeder entspricht dementsprechend dem Kern zweier sich in bestimmten Stärkeverhältnissen gestaltbildend wirkender durchdringender Platonischer Duale. Die Archimedischen Polyeder zweiter Frequenz entsprechen dem Kern von in gleicher Stärke ausgebildeten Platonischen Dualen. Aufgrund der sich

---

44. Die Beschreibung der 13 eckenäquivalenten Polyeder, deren Seitenflächen zwar regulär sind, die aber nicht alle die gleiche Kantenzahl besitzen, geht auf Archimedes (285-212 v.Chr.) zurück. Aus der Antike wurden jedoch keine Aufzeichnungen dieser quasiregulären Polyeder überliefert. Einige Archimedische Polyeder erscheinen bereits in Pacioli's *Divina Proportione*. Die erste vollständige und systematische Beschreibung aller dreizehn Polyeder ist in Keplers *Harmonice Mundi* zu finden. Zusätzlich zu den 13 Archimedischen Polyedern existiert eine unendliche Anzahl von aus regulären Polygonen zusammengesetzten Prismen und Antiprismen. Ibid.

aus zwei Tetraederzwillingen ergebenden oktaedrischen Durchdringungsfigur stellt der zweifach unterteilte Tetraeder keinen zusätzlichen Archimedischen Körper dar. Die Archimedischen Polyeder dritter Frequenz entsprechen dem Kern dualer Polyeder, welche dadurch definiert sind, dass die Tangentenebenen durch die Drittelpunkte der Kanten des Ausgangspolyeders verlaufen. Die Archimedischen Körper, welche sich durch zweifache und dreifache Frequenzbildung aus den Archimedischen Polyedern zweiter Frequenz ableiten lassen, weisen nichtquadratische viereckige Polygone auf, welche der Regulation über einen Dilatationsprozess bedürfen.

| <i>Freq.</i> | <i>Platonische Polyeder</i>   |   |   |   |  |
|--------------|---|---|---|---|--|
| $f = 1$      |    |    |      |   |   |
|              | <i>Hexaeder</i>   | <i>Oktaeder</i>   | <i>Tetraeder</i>  | <i>Ikosaeder</i>  | <i>Dodekaeder</i>  |
|              | <i>Archimedische Polyeder</i>   |   |   |   |  |
| $f = 2$      |    |    |     |  |  |
|              | <i>Kuboktaeder</i>  | <i>Oktaeder</i>   | <i>Ikosidodekaeder</i>  |   |  |
| $f = 3$      |   |   |     |  |  |
|              | <i>Hexaederstumpf</i>   | <i>Oktaederstumpf</i>   | <i>Tetraederstumpf</i>  | <i>Ikosaederstumpf</i>  | <i>Dodek.-stumpf</i>   |
| $f = 4$      |  |  |  |   |  |
|              | <i>Rhombenkuboktaeder</i>   | <i>Kuboktaeder</i>  | <i>Rhombenikosidodekaeder</i>   |   |  |
| $f = 6$      |  |  |  |   |  |
|              | <i>Kuboktaederstumpf</i>  | <i>Oktaederstumpf</i>   | <i>Ikosidodekaederstumpf</i>  |   |  |
|              |  |   |  |   |  |
|              | <i>Cubus simus</i>  |   | <i>Dodecaedron simus</i>  |   |  |

*Bild 4.38: Die Platonischen und die Archimedischen Polyeder.*

Im Gegensatz zu allen übrigen Archimedischen Polyedern lassen sich der Cubus simus und der Dodecaedron simus nicht als Kernfiguren dualer Platonischer Körper auffassen<sup>45</sup>. Diese ungewöhnlich viele äquilaterale Dreiecke aufweisenden Polyeder zeigen einen rechts- oder linksgerichteten Drall, so dass viele Symmetrieebenen der anderen regelmässigen und halbregelmässigen Polyeder entfallen.

45. Die Nomenklatur der Archimedischen Polyeder geht auf Keplers *Harmonice Mundi* zurück. Die lateinische Bezeichnung dieser beiden Polyeder wurde bis in die heutigen Tage beibehalten. Ibid.

## Duale der quasiregulären Polyeder

Den Platonischen Polyedern entsprechend ist die Anzahl Ecken  $E$  der Archimedischen Körper gleich der Anzahl Flächen  $F$  der zugehörigen, als Catalansche Polyeder bezeichneten dualen Gebilde und umgekehrt. Bedingt durch den Zusammenstoss verschiedener Flächenarten sind ungleich grosse Vieleckwinkel an der Eckenbildung der Archimedischen Polyeder beteiligt, so dass bei dem die dualen Gebilde hervorbringenden Prozess unregelmässige Vielecke, wie beispielsweise gleichschenklige oder ungleichseitige Dreiecke, Rhomben, Deltoide oder ungleichseitige Fünfecke entstehen.

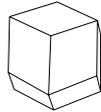
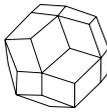
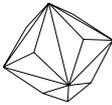
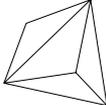
|   |   |   |  |   |
|---|---|---|--|---|
| <i>Kuboktaeder</i>  |   | <i>Ikosidodekaeder</i>  |  |   |
|    |   |    |  |   |
| <i>Rhombendodekaeder</i>  |   | <i>Rhombentrikontaeder</i>  |  |   |
| <i>Hexaederstumpf</i>   | <i>Oktaederstumpf</i>   | <i>Tetraederstumpf</i>  | <i>Iksaederstumpf</i>  | <i>Dodek.-stumpf</i>  |
|    |  |      |  |  |
| <i>Triakisoktaeder</i>  | <i>Tetrakisoktaeder</i>   | <i>Triakistetraeder</i>   | <i>Pentakisdodek.</i>  | <i>Triakisikosaeder</i>   |
| <i>Rhombenkuboktaeder</i>   |   | <i>Rhombenikosidodekaeder</i>   |  |   |
|  |   |  |  |   |
| <i>Deltoidikositetraeder</i>  |   | <i>Deltoidhexacontaeder</i>   |  |   |
| <i>Cubus simus</i>  |   | <i>Dodecaedron simus</i>  |  |   |
|  |   |  |  |   |
| <i>Pentagonikositetraeder</i>   |   | <i>Pentagonhexecontaeder</i>  |  |   |

Bild 4.39: Die Catalanschen Polyeder.

Die sich aus der Dualität ergebenden Polyeder weisen Ecken mit zweierlei oder dreierlei Kantenzahl auf, was darauf zurückzuführen ist, dass zwei oder drei Flächenarten an der Bildung der Archimedischen Körper beteiligt sind. Die Konvexität des Catalanschen Punktgebildes ist der Ungleichung (4.105) entsprechend über den Ausdruck

$$\chi = (n - 2)(\bar{p} - 2) < 4 \quad (4.106)$$

gegeben. Hierbei stellt die Grösse  $\bar{p}$  das gewichtete Mittel der Anzahl Anschlusswinkel aller Punkte des Gebildes dar. Die wichtigsten Eigenschaften dieser und aller weiteren regulären und quasiregulären Polyeder sind im Anhang A1 dieser Arbeit aufgelistet<sup>46</sup>.

46. Vgl. Adam und Wyss (1984), Critchlow (1969), Lalvani (1977), Pearce und Pearce (1978) und Pugh (1976).

## 5 Parkettierungen gekrümmter Flächen

### 5.1 Homonomische Zerlegung ebener Punktfiguren

Jedes wachsende System unterliegt einem Formgesetz, das mit mathematischen Mitteln erfassbar ist. Gewisse wachsende Formen sind durch die singuläre Eigenschaft der kontinuierlichen Similarität gekennzeichnet. Bei dem Wachstumsprozess des Similaritätskontinuums wird eine betrachtete Ausgangsform  $u$  durch ein Gnomon  $w$  jeweils derart ergänzt, dass  $u$  zu einer ähnlichen Subform der sich ergebenden Form  $v$  wird. *Es gibt manches, das zunimmt, ohne verändert zu werden; so nimmt ein Quadrat, wenn man ein Gnomon hinzufügt, zwar zu, aber es ist dadurch nicht verändert; ebenso verhält es sich auch in anderen derartigen Fällen*<sup>1</sup>. Dieses Aristotelische “Manches”, das zunimmt, ohne verändert zu werden, lässt sich anhand eines Quadrates, welches sich aus dem Zusammenspiel zwischen einer quadratischen Ausgangsfigur kleinerer Magnitude und einer gleichschenkligen L-förmigen gnomonischen Figur ergibt, exemplifizieren.

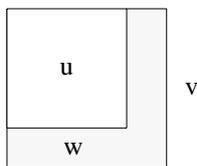


Bild 5.1: Das Quadrat als Similaritätskontinuum.

Jede Form  $w$ , welche zu einer anderen beliebigen Form  $u$  derart addiert werden kann, dass die sich ergebende Form  $v$  der Ausgangsform gleich, ist gnomonisch. Das Similaritätskontinuum lässt sich für eine  $n$ -te Progressionsstufe über die Zahlenreihe

$$u_n + w_n = v_n, \quad u_n = v_{n-1} \quad (5.1)$$

modellieren. Falls die gnomonische Formvariable  $w$  einen linearen Zuwachs aufweist, so ergibt sich über den obigen Ausdruck eine polygonale Zahlenreihe zweiten Grades. Der dargestellten quadratischen Figur entsprechen beispielsweise die gnomonische Zahlenreihe  $(2n-1)$  und die quadratische Reihe  $n^2$ .

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 1^2 \\ 1^2 + 3 &= 2^2 \\ 2^2 + 5 &= 3^2 \\ 3^2 + 7 &= 4^2 \\ 4^2 + 9 &= 5^2 \\ (n-1)^2 + (2n-1) &= n^2 \end{aligned}$$

---

1. Aristoteles (1986).

Indem jeder Zahl eine Figur zugeordnet wird, die sich aus einer dieser Zahl gleichenden Anzahl von Punkten zusammensetzt, lassen sich die den polygonalen Zahlenreihen zugrunde liegenden Regelmässigkeiten geometrisch illustrieren. Jeder Zahlenreihe entspricht eine formkonstante Gestalt, deren Magnitude durch den Progressionsgrad gegeben ist. Über diese Systematik und Rigorosität lässt sich das Aristotelische Beispiel des gnomonisch ergänzten Quadrates quantitativ anhand graphischer Hilfsmitteln erfassen <sup>2</sup>.

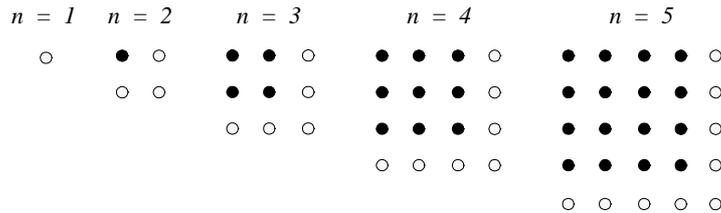


Bild 5.2: Quadratische Punktreihe.

Jede durch eine gnomonische Ergänzung erzeugte Form weist ein durch Progressionslinien geprägtes Muster und einen polaren Ursprung als Similaritätszentrum auf. Die Progressionsarten sind durch die Symmetrieeigenschaften der polygonalen Figur vorgegeben. Aufgrund der Kongruenzbedingung des Similaritätskontinuums ist jede polygonale Progression durch die jeweilige trianguläre Grundeinheit, das heisst den kleinsten gemeinsamen geometrischen Nenner einer polygonalen Figur, gegeben. Im Fall des äquilateralen Dreieckes ergeben sich über die drei durch die Mittelkantensenkrechten gegebenen Symmetrieachsen sechs trianguläre Grundeinheiten, welche sechs Hexanten definieren. Jede trianguläre Grundeinheit weist die drei Winkelgrössen  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  und  $\pi/6$  auf und ist durch ihre Klappbarkeit um ihre auf die Symmetrieachsen fallenden Kanten gekennzeichnet. Bei kontinuierlicher Umklappung überdeckt eine Grundeinheit alle sechs Hexanten des äquilateralen Dreieckes.

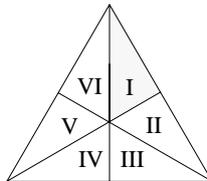


Bild 5.3: Zur triangulären Grundeinheit.

Wie die Anschauung zeigt, ist die Kongruenzbedingung des äquilateralen Dreieckes – die sechs dem äquilateralen Dreieck entsprechenden Grundeinheiten ausgenommen – für drei jeweils aus drei, zwei und einer Grundeinheit zusammengesetzte trianguläre Figuren

2. Auch für die Untersuchung biologischer Wachstumsgesetze kann die Aristotelische kontinuierliche Similarität herangezogen werden. Bei D'Arcy Thompsons *On Growth and Form* heisst es in diesem Zusammenhang: *We see that the successive chambers of a spiral Nautilus or of a straight Orthoceras, each whorl or part of a whorl of a periwinkle or other gastropod, each new increment of the operculum of a gastropod, each additional increment of an elephant's tusk, or each new chamber of a spiral foraminifer, has its leading characteristic at once described and its form so far explained by the simple statement that it constitutes a gnomon to the whole previously existing structure.* Vgl. Thompson (1992).

erfüllt. Die triangulären Progressionsarten sind demzufolge durch die Symmetrie- oder Umklappungsachsen dieser zusammengesetzten Figuren gegeben. Der Anzahl vorhandener Symmetrieachsen, das heisst dem Gnomonengrad der zugehörigen polygonalen Zahlenreihe entsprechend, lassen sich die triangulären Progressionen ersten, dritten und sechsten Grades unterscheiden.

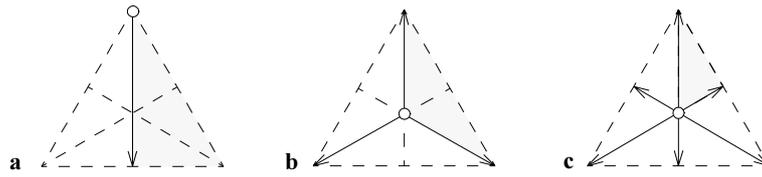


Bild 5.4: a) Erst-, b) drei-, und c) sechsgradige trianguläre Progression.

Im allgemeinen Fall lassen sich die unigerichtete und die plurigerichtete Progression unterscheiden, bei welchen das Similaritätszentrum jeweils geometrischer Eckpunkt beziehungsweise geometrisches Zentrum ist. Die unigerichtete polygonale Progression ergibt sich aus der durch den Ausdruck

$$i(n-1) + 1 \quad (5.2)$$

gegebenen Gnomonenreihe  $i$ -ten Grades. Die Anzahl Punkte der urpolygonalen Figur lässt sich jeweils aus dem zweiten Glied der polygonalen Zahlenreihe entnehmen. Der über die Gnomonen ersten Grades gegebenen polygonalen Zahlenreihe entspricht erwartungsgemäss die minimale Polygonsfigur des Dreieckes.

| $i$ | Gnomonenreihe $i(n-1) + 1$     | polygonale Zahlenreihe             | Polygonsform |
|-----|--------------------------------|------------------------------------|--------------|
| 1   | 1, 2, 3, 4, 5, ..., n          | 1, 3, 6, 10, 15, ..., $n(n+1)/2$   | Dreieck      |
| 2   | 1, 3, 5, 7, 9, ..., $(2n-1)$   | 1, 4, 9, 16, 25, ..., $n^2$        | Quadrat      |
| 3   | 1, 4, 7, 10, 13, ..., $(3n-2)$ | 1, 5, 12, 22, 35, ..., $n(3n-1)/2$ | Pentagon     |
| 4   | 1, 5, 9, 13, 17, ..., $(4n-3)$ | 1, 6, 15, 28, 45, ..., $n(2n-1)$   | Hexagon      |

Bild 5.5: Unigerichtete polygonale Progression.

Bedingt durch die Tatsache, dass das durch die erste Progressionsstufe gegebene Similaritätszentrum gleichzeitig das geometrische Symmetriezentrum der polygonalen Figur ist, weist die plurigerichtete polygonale Progression eine Ursprungsirregularität auf. Aufgrund dieser Irregularität weist jedes Urpolygon den geometrischen Symmetriepunkt als zusätzlichen Punkt auf. Die erste Progressionsstufe ausgenommen, für welche das erste Gnomon stets den Wert eins annimmt, ist die plurigerichtete Progression durch die Gnomonenreihe  $i$ -ten Grades

$$i(n-1) \quad (5.3)$$

gegeben. Wie die geometrische Anschauung erkennen lässt, stellen die Gnomonenreihen (5.3) ersten und zweiten Grades degenerierte Fälle der dreiecksförmigen Figur entsprechenden Gnomonenreihe dritten Grades dar<sup>3</sup>.

| $i$ | Gnomonenreihe $i(n-1)$          | Polygonale Zahlenreihe               | Polygonsform |
|-----|---------------------------------|--------------------------------------|--------------|
| 3   | 1, 3, 6, 9, 12, ..., $3(n-1)$   | 1, 4, 10, 19, 31, ..., $1+3n(n-1)/2$ | Dreieck      |
| 4   | 1, 4, 8, 12, 16, ..., $4(n-1)$  | 1, 5, 13, 25, 41, ..., $1+4n(n-1)/2$ | Quadrat      |
| 5   | 1, 5, 10, 15, 20, ..., $5(n-1)$ | 1, 6, 16, 31, 51, ..., $1+5n(n-1)/2$ | Pentagon     |
| 6   | 1, 6, 12, 18, 24, ..., $6(n-1)$ | 1, 7, 19, 37, 61, ..., $1+6n(n-1)/2$ | Hexagon      |

Bild 5.6: Plurigerichtete polygonale Progression.

Da jeder polygonalen Zahl eine aus kongruenten Subpolygonen zusammengesetzte similaritätskontinuierliche polygonale Figur entspricht, lässt sich die Zahlenreihe (5.1) durch den äquivalenten Ausdruck

$$S_n^u + S_n^w = S_n^v, \quad S_n^u = S_{n-1}^v \quad (5.4)$$

ersetzen. Hierbei bezeichnen  $S^u$ ,  $S^v$  und  $S^w$  die Anzahl Subpolygone der Ausgangs- und der Endform sowie des gnomonischen Zuwachses. Wird für die Magnitude der polygonalen Figuren das mathematische Zeichen des Betrages herangezogen, so ist jede beliebige Progressionsstufe durch

$$|S_n^u| < |S_n^v| \quad \text{und} \quad |S_n^w| / |S_n^u| = |S_n^w| / |S_n^v| = \textit{konst.} \quad (5.5)$$

charakterisiert. Diese äusseren Rahmenbedingungen lassen sich nun derart ändern, dass die Magnitude der sich jeweils aus den Progressionsstufen ergebenden polygonalen Endfigur konstant gehalten wird. Mit

$$|S_n^u| = |S_n^v| = \textit{konst.} \quad (5.6)$$

gilt notwendigerweise

$$|S_n^w| < |S_{n-1}^w|. \quad (5.7)$$

Die similaritätskontinuierliche Progression bei konstant gehaltener äusserer Magnitude entspricht einer kontinuierlichen Unterteilung einer Figur. Die durch die Progression gegebenen Unterteilungsstufen entsprechen der Frequenz dieser Figur. Die Frequenz entspricht dem Unterteilungsgrad jeder Kante der betrachteten Figur.

Der erstgradigen Gnomonenreihe (5.2) entspricht für  $i = 1$  die lineare Dreiecksprogression. Aus der Zahlenreihe lassen sich durch die Bildung der ersten und der zweiten Differenz die Gnomonenreihe und der Gnomonengrad ableiten:

- 
3. In seinem *Progymnasmata de solidorum elementis* untersucht René Descartes die zwischen den Polyedern, den Gnomonen und den Polygonalzahlen bestehenden Zusammenhänge: *Les cinq polyèdres réguliers, simplement considérés tels qu'ils apparaissent par eux-mêmes, se forment par addition d'un gnomon, comme avaient été formées les surfaces. Lorsque nous penserons ces figures comme mesurables, ce devra être avec des unités de même nature que chaque figure.* Vgl. Descartes (1987).

|                                      |    |    |    |     |     |     |            |
|--------------------------------------|----|----|----|-----|-----|-----|------------|
| <i>Progressionsstufe:</i>            | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | ... | $n$        |
| <i>Gnomonengrad (2. Differenz):</i>  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | ... | 1          |
| <i>Gnomonenreihe (1. Differenz):</i> | 1, | 2, | 3, | 4,  | 5,  | ... | $n$        |
| <i>lineare Dreiecksreihe:</i>        | 1, | 3, | 6, | 10, | 15, | ... | $n(n+1)/2$ |

Das sich aus der linearen Dreiecksprogression ergebende geometrische Muster ist durch das terminale Similaritätszentrum und eine einzige Progressionslinie gekennzeichnet. Bei jeder Progressionsstufe wird die trianguläre Punktfigur um eine dieser Stufe entsprechende Anzahl Gnomonenpunkte ergänzt. Die entsprechende trianguläre Zahl gibt die gesamte Anzahl Dreieckspunkte an.

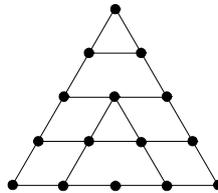


Bild 5.7: Trianguläre Progression ersten Grades.

Für die Bestimmung der Punktzahl progressiver Polyeder ist es angebracht, die Punkte des Dreiecks in Abhängigkeit von den geometrischen Grundelementen Kante und Fläche des Urdreiecks zu definieren:

|                           |   |   |    |    |    |     |                |
|---------------------------|---|---|----|----|----|-----|----------------|
| <i>Progressionsstufe:</i> | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | ... | $n$            |
| <i>Punkte:</i>            | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | ... | $n(n+1)/2$     |
| <i>Eckpunkte:</i>         | 3 | 3 | 3  | 3  | 3  | ... | 3              |
| <i>Urkantenpunkte:</i>    | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | ... | $(n-2)$        |
| <i>Urflächenpunkte:</i>   | 0 | 0 | 1  | 3  | 6  | ... | $(n-3)(n-2)/2$ |

Beispielsweise kommen bei der oben für die fünfte Progressionsstufe dargestellten triangulären Punktfigur ersten Grades drei Punkte auf jeder der drei Urkanten und weitere drei Punkte auf die Urfläche zu liegen. Bei der Darstellung der somit definierten Regelmässigkeiten lassen sich erwartungsgemäss die erstgradige gnomonische und die trianguläre Zahlenreihe erkennen. Über den somit hergeleiteten Ausdruck

$$P = E + K(n-2) + F[(n-3)(n-2)/2]. \quad (5.8)$$

lässt sich die Anzahl Punkte  $P$  eines aus  $E$  Ecken,  $K$  Kanten und  $F$  Flächen zusammengesetzten progressiven Polyeders bestimmen. Die gesamte Anzahl Subflächen  $F^S$ , aus welcher das Dreieck in der  $n$ -ten Progressionsstufe zusammengesetzt ist, lässt sich über den Ausdruck

$$F^S = (n-1)^2 \quad (5.9)$$

bestimmen. Die entsprechende Frequenz des Dreieckes, das heisst der Grad der Kantenunterteilung, ergibt sich über den Ausdruck

$$f = n - 1. \quad (5.10)$$

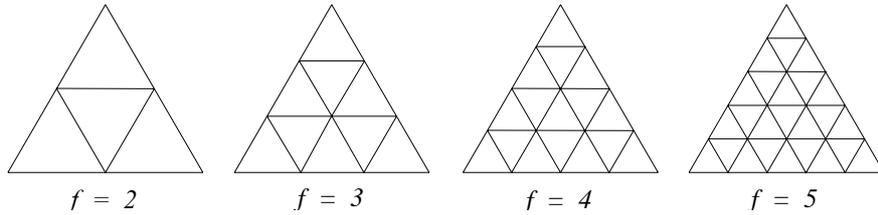


Bild 5.8: Dreiecke mit linearen Frequenzen.

Die tiefgreifende Korrelation, welche zwischen der linearen zahlentheoretischen Dreiecksprogression und den entsprechenden geometrischen Figuren besteht, lässt sich anhand des Pascalschen Dreieckes illustrieren. Wie eine nähere Betrachtung erkennen lässt, gleichen die Zahlenreihen der ersten drei Kolonnen des Pascalschen Dreieckes der zweiten und der ersten Differenz der linearen Dreiecksreihe sowie dieser linearen Dreiecksreihe selbst.

|   |   |    |    |    |   |   |
|---|---|----|----|----|---|---|
| 1 |   |    |    |    |   |   |
| 1 | 1 |    |    |    |   |   |
| 1 | 2 | 1  |    |    |   |   |
| 1 | 3 | 3  | 1  |    |   |   |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |   |   |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1 |   |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

Bild 5.9: Das Pascalsche Dreieck.

Die vierte Kolonne, welche die zweite und die dritte Kolonne als zweite und erste Differenz hat, liefert erwartungsgemäss die lineare tetraedische Zahlenreihe:

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \dots, \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \quad (5.11)$$

Dem  $n$ -ten Glied dieser Zahlenreihe entspricht die Anzahl Punkte der aus  $n$  linearen Progressionsstufen gebildeten tetraedischen Punktfigur. Die der vierten folgenden Kolonnen führen in die lineare Dreiecksgeometrie des Raumes höherer Dimensionen. Aus der  $k$ -ten Kolonne lässt sich demzufolge die Punktsumme des linearprogressiven Hypertetraeders des  $(k-1)$ -dimensionalen Raumes über den Ausdruck

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \quad (5.12)$$

entnehmen. Der  $k$ -ten Kolonne des Pascalschen Dreieckes lässt sich das geometrische Grundelement der  $(k-1)$ -ten Dimension und dementsprechend der  $n$ -ten Zeile das trian-

gulgäre Gebilde des  $(n-1)$ -dimensionalen Raumes zuordnen. Über diese matrizielle Zuordnung lassen sich die geometrischen Eigenschaften eines triangulären Gebildes des  $(n-1)$ -dimensionalen Raumes entnehmen. Jedem Matrixelement  $(n,k)$  entspricht nämlich eine Pascalsche Zahl, welche angibt, aus wievielen geometrischen Grundelementen der  $(k-1)$ -ten Dimension eine lineare Dreiecksfigur des  $(n-1)$ -dimensionalen Raumes besteht.

|                | Punkt | Kante | Fläche | Volumen | Hypervol. |
|----------------|-------|-------|--------|---------|-----------|
| Punkt          | 1     | 0     | 0      | 0       | 0         |
| Kante          | 2     | 1     | 0      | 0       | 0         |
| Dreieck        | 3     | 3     | 1      | 0       | 0         |
| Tetraeder      | 4     | 6     | 4      | 1       | 0         |
| Hypertetraeder | 5     | 10    | 10     | 5       | 1         |

Wie sich der obigen Matrix entnehmen lässt, besteht die trianguläre Figur des dreidimensionalen Raumes, des Tetraeders, aus vier Punkten, sechs Kanten, vier Flächen und einem Volumen. Mit diesen hier angegebenen Algorithmen lassen sich folglich die geometrischen Eigenschaften aller triangulären Gebilde des mehrdimensionalen Gebildes herleiten.

Der triangulären Punktfigur dritten Grades entspricht die sich aus der dreigradigen Gnomonenreihe (5.3) ergebende polygonale Zahlenreihe:

$$\begin{aligned}
 \text{Progressionsstufe:} & \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad n \\
 \text{Gnomonengrad (2. Differenz):} & \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad \dots \quad 3 \\
 \text{Gnomonenreihe (1. Differenz):} & \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad \dots, \quad 3(n-1) \\
 \text{trianguläre Dreiecksreihe:} & \quad 1, \quad 4, \quad 10, \quad 19, \quad 31, \quad \dots, \quad 1 + 3n(n-1)/2
 \end{aligned}$$

Die trianguläre Dreiecksprogression weist ein urpolares Similaritätszentrum auf. Die musterbestimmenden Progressionslinien sind durch die drei Symmetrieachsen gegeben.

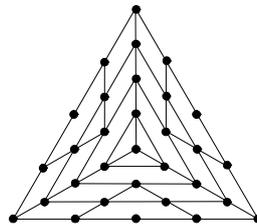


Bild 5.10: Trianguläre Progression dritten Grades.

Bei der in Abhängigkeit zu den geometrischen Grundelementen des Urpolygons dargestellten Punktprogression einer drittgradigen Dreiecksfigur lassen sich die folgenden Regelmässigkeiten erkennen:

|                           |   |    |    |    |    |     |                     |
|---------------------------|---|----|----|----|----|-----|---------------------|
| <i>Progressionsstufe:</i> | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | ... | $n$                 |
| <i>Punkte:</i>            | 4 | 10 | 19 | 31 | 46 | ... | $1 + 3n(n-1)/2$     |
| <i>Eckpunkte:</i>         | 3 | 3  | 3  | 3  | 3  | ... | 3                   |
| <i>Urkantenpunkte:</i>    | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | ... | $(n-2)$             |
| <i>Urflächenpunkte:</i>   | 1 | 4  | 10 | 19 | 31 | ... | $1 + 3(n-1)(n-2)/2$ |

In Äquivalenz zum Ausdruck (5.8) lässt sich somit die Anzahl Punkte  $P$  einer progressiven polyedrischen Punktfigur unter Verwendung der folgenden Beziehung bestimmen:

$$P = E + K(n-2) + F[1 + 3(n-1)(n-2)/2]. \quad (5.13)$$

Die totale Anzahl similärer Subformen  $F^S$  des drittgradig progressiven Dreieckes beträgt

$$F^S = 3(n-1)^2 \quad (5.14)$$

und die lineare Frequenz ergibt sich zu

$$f = n - 1. \quad (5.15)$$

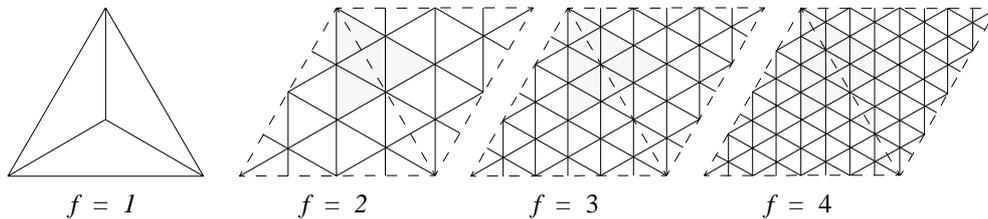


Bild 5.11: Dreiecke mit triangulären Frequenzen.

Durch trianguläre Progression dritten Grades unterteilte Dreiecksfiguren weisen die charakterisierende Eigenschaft auf, dass die aussenliegenden Kanten der am Rand liegenden Subdreiecke ab der dritten Progressionsstufe nicht mit der Urkante zusammenfallen. Wie eine nähere Betrachtung erkennen lässt, entspricht diese dritte Progressionsstufe der auf eine doppelte trianguläre Einheit bezogenen dritten Progressionsstufe einer linearen Progression. Diese Regelmässigkeit ist auch für alle weiteren Progressionsstufen gültig.

Die der hexagonalen Dreiecksprogression entsprechende Zahlenreihe ergibt sich aus der sechsgradigen gnomonischen Zahlenreihe (5.3).

|                                      |   |   |    |    |    |     |                 |
|--------------------------------------|---|---|----|----|----|-----|-----------------|
| <i>Progressionsstufe:</i>            | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | ... | $n$             |
| <i>Gnomonengrad (2. Differenz):</i>  | 1 | 5 | 6  | 6  | 6  | ... | 6               |
| <i>Gnomonenreihe (1. Differenz):</i> | 1 | 6 | 12 | 18 | 24 | ... | $6(n-1)$        |
| <i>hexagonale Dreiecksreihe:</i>     | 1 | 7 | 19 | 37 | 61 | ... | $1 + 6n(n-1)/2$ |

Das der hexagonalen Dreiecksprogression zugrunde liegende Muster weist alle Symmetrieachsen des äquilateralen Dreieckes als Progressionslinien auf.

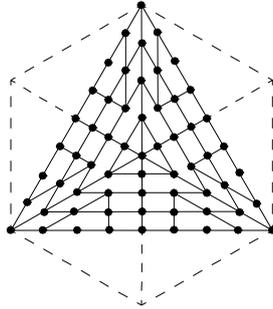


Bild 5.12: Trianguläre Progression sechsten Grades.

Über die zwischen den Dreieckspunkten und den geometrischen Grundelementen des Urdreiecks bestehenden progressiven Abhängigkeiten

|                         |   |    |    |    |    |     |                     |
|-------------------------|---|----|----|----|----|-----|---------------------|
| Progressionsstufe:      | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | ... | $n$                 |
| Anzahl Punkte:          | 7 | 19 | 37 | 61 | 91 | ... | $1 + 6n(n-1)/2$     |
| Anzahl Eckpunkte:       | 3 | 3  | 3  | 3  | 3  | ... | 3                   |
| Anzahl Urkantenpunkte:  | 1 | 3  | 5  | 7  | 9  | ... | $(n-3)$             |
| Anzahl Urflächenpunkte: | 1 | 7  | 19 | 37 | 61 | ... | $1 + 6(n-1)(n-2)/2$ |

lässt sich die Anzahl Punkte  $P$  einer progressiven polyedrischen Figur in Analogie zu den Ausdrücken (5.8) und (5.13) über den Ausdruck

$$P = E + K(n-3) + F[1 + 6(n-1)(n-2)/2] \quad (5.16)$$

bestimmen. Die gesamte Anzahl ähnlicher Subdreiecke  $F^S$  ergibt sich zu

$$F^S = 6(n-1)^2. \quad (5.17)$$

Die über den Ausdruck

$$f = 2(n-1) \quad (5.18)$$

erhaltene hexagonale Frequenz des sechsgradig progressiven Dreiecks weist die partikuläre Eigenschaft auf, nur gerade Werte anzunehmen.

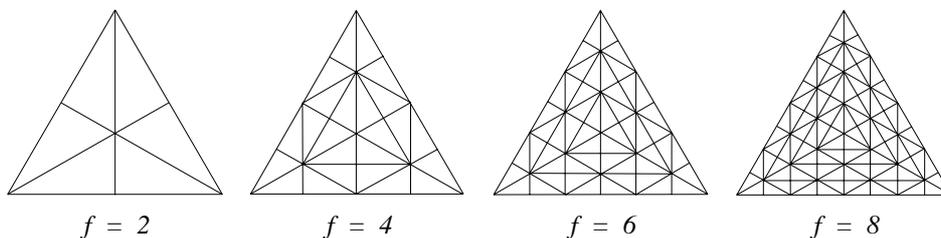


Bild 5.13: Dreiecke höherer hexagonaler Frequenzen.

## 5.2 Diskrete sphärische Punktgruppen

### Differentialgeometrische Flächenabbildung

Die Abbildung einer Fläche auf eine andere setzt die Aufstellung eines Homomorphismus zwischen den beiden geometrischen Identitäten voraus. Die allgemeinste Abbildung, die der Anschauung zugänglich ist, ist die stetige Abbildung. Bei ihr wird verlangt, dass sie umkehrbar eindeutig ist und dass benachbarte Punkte benachbart bleiben. Eine stetige Abbildung kann also jede Figur beliebig verzerren, nur dürfen zusammenhängende Teile nicht auseinandergerissen und getrennte Teile nicht zusammengeheftet werden. Die Abbildung einer durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (5.19)$$

gegebenen Fläche  $\Phi$  auf eine Fläche  $\bar{\Phi}$ ,

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}), \quad (5.20)$$

lässt sich über die Abbildungsfunktionen

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (5.21)$$

beschreiben. Im allgemeinen Fall erfährt eine Kurve  $K$  von  $\Phi$  bei ihrer Abbildung auf  $\bar{\Phi}$  eine Verzerrung. Mit den Bogenelementen

$$\begin{aligned} ds^2 &= E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot dudv + G \cdot dv^2 \quad \text{und} \\ d\bar{s}^2 &= \bar{E} \cdot du^2 + 2 \cdot \bar{F} \cdot dudv + \bar{G} \cdot dv^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

ergibt sich das Quadrat der Längenverzerrung  $\lambda$  in Richtung von  $K$ , beziehungsweise  $\bar{K}$  im Punkt  $(u, v)$  zu

$$\lambda_l^2 = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E} \cdot du^2 + 2 \cdot \bar{F} \cdot dudv + \bar{G} \cdot dv^2}{E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot dudv + G \cdot dv^2}. \quad (5.23)$$

Formal betrachtet gleicht die obige Definition der Längenverzerrung dem Ausdruck für die Normalkrümmung. Dementsprechend lassen sich bei der Abbildung einer Fläche  $\Phi$  auf eine andere Fläche  $\bar{\Phi}$  in jedem Punkt zwei Hauptverzerrungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bestimmen. Analog zu den Krümmungsmassen ergeben sich das Verzerrungsmass  $k$  und die mittlere Verzerrung  $h$  der Abbildung von  $\Phi$  auf  $\bar{\Phi}$  zu

$$k^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{EG - F^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \quad \text{und} \quad (5.24)$$

$$h^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\overline{EG} - 2\overline{FF} + \overline{GE}}{\overline{EG} - \overline{F}^2}. \quad (5.25)$$

Über die Flächenverzerrung  $S$  einer Abbildung von  $\Phi$  auf  $\overline{\Phi}$  lässt sich das Verzerrungsmass ebenfalls geometrisch deuten:

$$S = 1/k = \lambda_1 \cdot \lambda_2. \quad (5.26)$$

Das getreueste Bild einer Fläche gibt die längengetreue Abbildung, bei welcher die geodätische Entfernung zweier Punkte stets der geodätischen Entfernung ihrer Bildpunkte gleich ist, alle Winkel erhalten bleiben und geodätische Linien in geodätische Linien übergehen. Für die längengetreue Abbildung müssen in entsprechenden Punkten die Gauss'schen Krümmungen der Flächen übereinstimmen. Daher kann man auf ein Stück der Ebene nur solche Flächenstücke längentreu abbilden, deren Gauss'sche Krümmung überall verschwindet, also beispielsweise kein Stück der Kugel. Jede Landkarte weist infolgedessen Verzerrungen auf.

Die winkelgetreue konforme Abbildung ist durch die Forderung gekennzeichnet, dass die Winkel, unter denen sich zwei Kurven schneiden, unverzerrt wiedergegeben werden. Bei dieser Abbildung ist  $\lambda_1 = \lambda_2$ , so dass die über den Ausdruck

$$W = 2 \cdot \arcsin \left| (\lambda_1 - \lambda_2) / (\lambda_1 + \lambda_2) \right| \quad (5.27)$$

gegebene Winkelverzerrung  $W$  zu null wird.

Bei der flächentreuen Abbildung entspricht einem Flächenelement  $dA$  auf  $\Phi$  ein inhaltsgetreues Flächenelement  $d\overline{A}$  auf  $\overline{\Phi}$ . Da der Flächeninhalt eines Flächenstückes über den Ausdruck

$$dA = \sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2} \quad (5.28)$$

gegeben ist, ist die flächentreue Abbildung durch die folgende Beziehung definiert:

$$\overline{EG} - \overline{F}^2 = \overline{\overline{EG}} - \overline{\overline{F}}^2. \quad (5.29)$$

Geodätische Linien sind Kurven mit verschwindender geodätischer Krümmung  $\kappa_g$ . Es folgt daher für die geodätischen Kurven – falls  $s$  den Seitenvektor,  $x'$  den Tangentenvektor und  $x''$  den Krümmungsvektor der Kurve  $x = x(s)$  bezeichnen –, dass

$$\kappa_g = s \cdot x'' = (n \times x') \cdot x'' = (nx'x'') = 0. \quad (5.30)$$

Bei einer echten geodätischen Abbildung erfüllt nicht nur die Flächenkurve  $K$  auf  $\Phi$ , sondern ebenfalls die Bildkurve  $\overline{K}$  auf  $\overline{\Phi}$  die obige Bedingung (5.30).

## Sphärische Abbildung eines Polyeders

Die azimutale Projektion stellt ein geeignetes Abbildungsschema dar, nach welchem sich die zwei geometrischen Identitäten der Kugel und der Ebene homomorphisch eindeutig verknüpfen lassen. Die charakterisierenden Eigenschaften jeder azimutalen Verknüpfungsart sind durch die Lage des Projektionspunktes  $P$  gegeben. Bei den kartographischen Entwürfen wird zwischen der gnomonischen, der stereographischen und der orthographischen normalen Projektion unterschieden, je nachdem, ob der Projektionspunkt  $P$  im Kugelmittelpunkt, im azimutalen Gegenpol oder in der unendlichen Ferne liegt<sup>4</sup>.

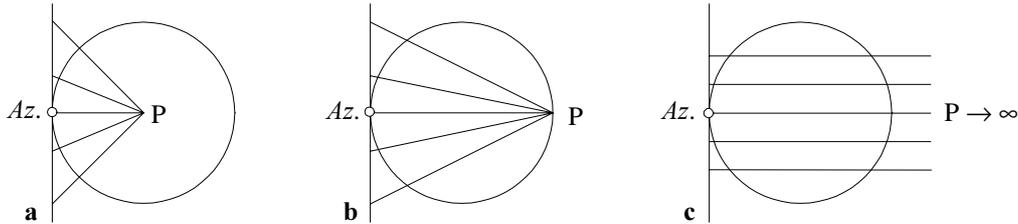


Bild 5.14: Gnomonische, stereographische und orthographische azimutale Projektionen.

Jeder in eine Kugel einschreibbare konvexe Polyeder definiert ein diskontinuierliches Punktsystem der Kugel. Da der Kugelmittelpunkt gleichzeitig geometrisches Zentrum des konvexen Polyeders ist, lässt sich über die gnomonische Zentralprojektion eine geeignete Homomorphie zwischen den beiden geometrischen Körpern herstellen. Jedem Punkt der azimutalen Ebene entspricht ein Diametralpunktepaar der Kugel, so dass maximal eine Hemisphäre über die Zentralprojektion planar abgebildet werden kann. Da aber der Polyeder einen durch Ebenen abgeschlossenen konvexen Raum einschreibt, lässt sich die gesamte Kugel zentralprojektiv auf den Polyeder abbilden<sup>5</sup>. Bei der Zentralprojektion erzeugt das durch den Polyeder definierte System äquivalenter Kugelpunkte eine diskontinuierliche Deckgruppe der projizierten Ebene. Diese projektive Ebene lässt sich direkt als ein Modell der elliptischen Ebene ansehen, wenn die Gleichheit von Längen und Winkeln in diesem Modell nicht euklidisch, sondern durch die sphärische Trigonometrie einer Hilfskugel bestimmt werden. Den euklidischen Geraden

4. Die Kartographie befasst sich mit der Abbildung der als Kugel oder Ellipsoid modellierten Erde auf die Ebene. Da es nach dem Gauss'schen *Theorema egregium* unmöglich ist, die Kugel längentreu auf die Ebene abzubilden, weisen alle Karten mehr oder weniger ausgeprägte Verzerrungen auf, so dass die Wahl der zwischen den beiden geometrischen Gebilden zuzuordnenden Verknüpfungsart von dem Nutzungszweck abhängig ist. In der Geographie, in der Geodäsie und in der Navigation sowie in Verkehrsdarstellungen werden die flächentreuen (äquivalenten), die winkeltreuen (konformen) und die teilweise längentreuen Projektionen bevorzugt. Beim kartographischen Entwurf lassen sich bei einer Gliederung nach der Art der Abbildungs-, beziehungsweise Abbildungshilfsfläche die azimutale, die zylindrische (nach G. Mercator auch als Mercatorprojektion bezeichnet) und die konische Abbildung unterscheiden. Bei der Gliederung nach der Stellung der Abbildungsfläche zur Erdachse werden die eben angeführten Entwürfe normale Abbildungen genannt. Über eine Koordinatentransformation können zudem die schiefwinkligen und die transversalen Entwürfe berechnet werden. Vgl. Hoschek (1984) sowie Lord und Wilson (1984). Die kartographischen Entwürfe waren den griechischen und vermutlich schon den ägyptischen Kartographen des Altertums bekannt. Die exakte Anleitung zur Konstruktion von Gradnetzen nach Ptolemäus bildete die Grundlage der in Verbindung mit den Seekarten des 15. und den Mathematikern des 18. Jahrhunderts entstandenen modernen Kartographie.

und Strecken entsprechen in der elliptischen Geometrie die Grosskreise und die Grosskreisbögen. Daraus ergeben sich zwei die Unterschiede zwischen der euklidischen und elliptischen Geometrie charakterisierende grundsätzliche Merkmale. Erstens entsprechen den sich in das Unendliche erstreckenden euklidischen Geraden die geschlossenen Kurven der elliptischen Geraden, und zweitens existieren parallele, das heisst sich nicht-schneidende euklidische Geraden, während zwei elliptische Geraden stets einen Schnittpunkt aufweisen<sup>6</sup>. Die Zentralprojektion besitzt die wichtige Eigenschaft, dass bei der Abbildung die Grosskreise der Kugel als euklidische Geraden abgebildet werden. Da beide Kurven gleichzeitig geodätische Linien sind, ist die Zentralprojektion eine geodätische Abbildung. Nach dem Beltramischen Theorem gibt es ausser den Flächen konstanter Gauss'scher Krümmung keine Fläche, die auf die Ebene geodätisch abgebildet werden kann<sup>7</sup>.

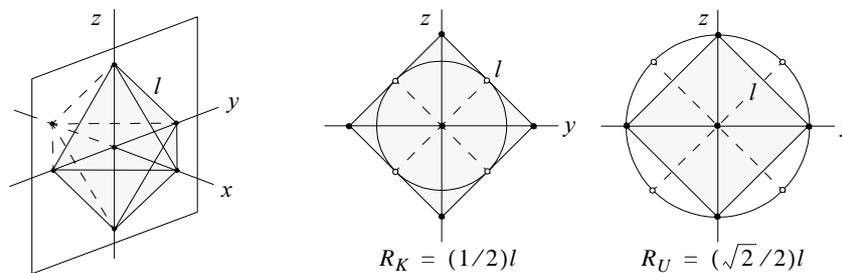


Bild 5.15: Die sphärische Zentralprojektion des Oktaeders.

Allgemein lässt sich eine geodätische Linie als die ökonomischste Beziehung zwischen zwei Erscheinungen andeuten. Geometrisch lassen sich die geodätischen Linien als die Linien der kürzesten Entfernung zwischen zwei Punkten auf einer Fläche deuten. Wenn ein materieller Punkt, der gezwungen ist, auf einer vorgegebenen Fläche zu bleiben, von einem anderen auf der gleichen Fläche befindlichen materiellen Punkt angezogen wird, dann bewegt er sich in Abwesenheit äusserer Kräfte auf einer geodätischen Linie. Auch nimmt ein über eine vorgegebene Fläche gespannter elastischer Faden die Form einer geodätischen Linie an. Diese Verknüpfung mit den physikalischen Energieminimalprinzipien lässt erkennen, dass die geodätischen Linien die Lösung des Variationsproblems

5. Der kartographische Entwurf von Buckminster Fullers *Dymaxion map* der Erde beruht auf der Zentralprojektion einer Kugel auf einen eingeschriebenen regulären oder semiregulären konvexen Polyeder. Beispielsweise werden bei der Ikosaederabbildung 20 geodätische Dreiecke, deren Kanten Grosskreise der Kugel sind, auf 20 äquilaterale planare Dreiecke abgebildet. Bei der ikosaedrischen Projektion beträgt der neutralisierte sphärische Exzess einzig  $12^\circ$ , so dass die Distorsion dementsprechend klein gehalten werden kann. Durch die als Abwicklung bezeichnete Auseinanderfaltung des Polyeders werden die Dreiecke auf der gleichen Kartenebene dargestellt. Bei der *Dymaxion map* wird eine bestimmte Anzahl Kugelgrosskreise als Polyederkanten geodätisch abgebildet. Die weitere Unterteilung der entsprechenden sphärischen und planaren Polygone erfolgt jedoch nicht über Zentralprojektion, da bei jeweilig äquidistanter Unterteilung die Distorsion kleiner gehalten wird. Vgl. Buckminster Fuller (1983), Lord und Wilson (1984).
6. In der Geometrie dienen die gnomonische Zentralprojektion und die dem Poincaréschen Modell zugrunde liegende stereographische Abbildung als Modelle für die nichteuklidischen elliptischen und hyperbolischen Ebenen.
7. *The only surfaces which can be geodesically mapped upon the plane are those of constant curvature.* Die Beweisführung des Beltramischen Theorems ist bei Struik (1961) auffindbar.

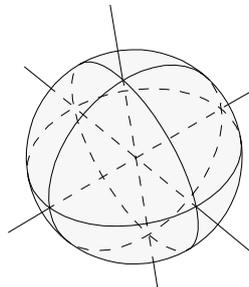
$$\delta s = 0 \quad (5.31)$$

darstellen, wobei  $s$  die Bogenlänge zwischen zwei Punkten bezeichnet. Die Forderung (5.31) lässt sich dann erfüllen, falls die geodätische Krümmung  $\kappa_g$  auf der Verbindungskurve verschwindet:

$$\kappa_g = 0. \quad (5.32)$$

Die geodätische Linie ist somit eine Kurve auf einer Fläche, deren Hauptnormale in jedem Flächenpunkt in die Richtung der Flächennormalen fällt <sup>8</sup>.

Unter Verwendung der soeben aufgezeichneten zentralprojektiven Homomorphie und in Umkehrung der Abbildungsrichtung lässt sich eine diskontinuierliche Punktgruppe der Ebene auf ein Stück der Kugeloberfläche abbilden. Bei einem eingeschriebenen konvexen Polyeder gehen bei der Zentralprojektion die die Eckpunkte verbindenden Polyederkanten in Grosskreise der Kugel über, so dass der euklidisch geodätische Polyeder als ein elliptischer geodätischer Polyeder abgebildet wird <sup>9</sup>.



*Bild 5.16: Der sphäroide Oktaeder.*

Die Polyeder höherer Frequenzen bestimmen bei der Zentralprojektion ein diskontinuierliches System äquivalenter Kugelpunkte, welches einige Lösungen für die hier verfolgte ebene Pflasterung der Kugel ergibt. Das erhaltene sphäroidische geometrische Gebilde lässt sich als derjenige Körper deuten, welcher über die Dilatation eines Polyeders höherer Frequenzen entsteht, falls die Dilatation der Forderung unterliegt, dass alle Punkte nach dem Dilatationsprozess den gleichen Abstand zum geometrischen Zentrum aufweisen sollen. Es ist naheliegend, dass bei zunehmendem Frequenzgrad die sphärische Gestalt approximiert wird <sup>10</sup>.

8. Vgl. Struik (1961).

9. Der sphäroide Oktaeder diente der Erstellung einer berühmten Weltkarte, welche Leonardo da Vinci zugeschrieben wird, und bei welcher jeweils die vier hemisphäregleichen sphärischen Dreiecke durch azimutale Projektion und durch Umklappung in der azimutalen Ebene dargestellt werden. Vgl. Veltman (1986).

10. Demzufolge lässt sich die in Platos *Timaios* als *durch Drehung kugelförmig, mit allseitig gleichem Abstand von der Mitte aus nach der abschliessenden Oberfläche, gerundet* bezeichnete Gestalt der Kugel nur dann erhalten, wenn die Anzahl Punkte des diskontinuierlichen Systems gegen das Unendliche strebt. Bei der Erzeugung kugelförmiger Gestalten, wie beispielsweise der gewichtlosen Seifenblase, verfügt die Natur einzig über eine endliche Anzahl atomarer Teilchen. Bei einer mikroskopischen Betrachtung sind demzufolge solche Konstruktionen der Natur als sphäroidische Polyeder zu deuten.

## Sphärische Geometrie

Die zentralprojektive sphärische Abbildung einer dreieckigen ebenen Fläche  $ABC$  unterteilt die Kugeloberfläche in zwei sphärische trianguläre Bereiche. Falls die ebene Fläche  $ABC$  den Kugelmittelpunkt nicht beinhaltet, muss notwendigerweise jeder der Kantenwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  einer der beiden sphärischen Flächen kleiner als  $\pi$  sein. Die durch diese drei Winkelgrößen gegebene Summe muss jedoch grösser als  $\pi$  sein:

$$\alpha_i < \pi, \quad \sum \alpha_i > \pi, \quad \alpha_i = \{\alpha, \beta, \gamma\}. \quad (5.33)$$

Die Differenz  $\delta$  zwischen der Summe der drei sphärischen Kantenwinkel und derjenigen des entsprechenden Dreiecks der euklidischen Ebene wird als sphärischer Exzess des sphärischen Dreiecks bezeichnet:

$$\delta = \sum \alpha_i - \pi. \quad (5.34)$$

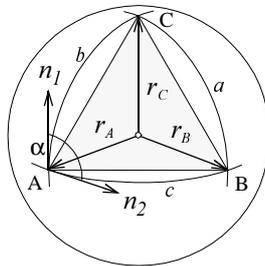


Bild 5.17: Sphärische Abbildung eines planaren Dreiecks  $ABC$ .

Die geodätischen Dreiecksseiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind durch die Winkel zwischen den Ortsvektoren gegeben, und lassen sich somit über die Skalarprodukte bestimmen. Für die Bogenlänge  $a$  gilt beispielsweise:

$$\cos a = (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C) / (|\mathbf{r}_B| \cdot |\mathbf{r}_C|). \quad (5.35)$$

Die Kantenwinkel des sphärischen Dreiecks lassen sich über die senkrecht zu den drei durch das Vektortrio  $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{r}_b$  und  $\mathbf{r}_c$  aufgespannten Ebenen bestimmen. Die Normalenvektoren  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$  des Punktes  $A$  ergeben sich über das Vektorprodukt zu

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_C. \quad (5.36)$$

Über das Skalarprodukt beider normaler Vektoren,  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2| \cos \alpha$ , folgt für den Winkel  $\alpha$  zwischen den Kanten  $b$  und  $c$  des sphärischen Dreiecks:

$$\cos \alpha = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_C) / |\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B| |\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_C|. \quad (5.37)$$

Die sphärische Dreiecksfläche ist durch den nachstehenden Ausdruck gegeben:

$$A = r^2 \cdot \delta. \quad (5.38)$$

## Bestimmung der Polyederpunkte der Kugel

Jeder beliebige Punkt  $P$  des Raumes lässt sich über drei linear unabhängige nichtkoplanare Grundvektoren  $e_I$ ,  $e_{II}$  und  $e_{III}$  eindeutig festlegen. Die drei Einheitsvektoren des dreidimensionalen Koordinatensystems definieren sechs Oberflächenpunkte und den Symmetriepunkt einer Einheitskugel. Im Spezialfall des rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems bilden die durch die drei Einheitsvektoren festgelegten Richtungen ein senkrechtetes Richtungstripel, welches den Raum in acht Oktanten zerlegt. In diesem partikulären Fall entsprechen die sechs Oberflächenpunkte den sechs Ecken eines Oktaeders.

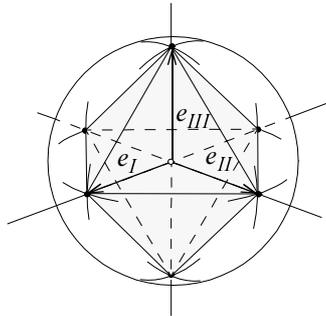


Bild 5.18: Das orthonormale Basissystem  $\{e_i\}$ .

Offensichtlich definiert jede reguläre Punktanordnung auf einer Kugeloberfläche ein multidimensionales reguläres Koordinatensystem, dessen Ursprung durch den Kugelmittelpunkt gegeben ist. Da jeder der in eine Kugel einschreibbaren regulären Polyeder eine diskontinuierliche Punktgruppe der Kugel erzeugt, ist die Anzahl und die Konfiguration regulärer Punktanordnungen durch die fünf Platonischen Polyeder gegeben. Unter den Platonischen Körpern weist einzig der Tetraeder keine Ursprungspunktsymmetrie auf. Zusammen mit seinen vier Gegenpolpunkten definieren die vier tetraedischen Eckpunkte die acht Eckpunkte des Hexaeders. Dementsprechend definieren die vier tetraedischen Eckpunkte nur die positiven Richtungen des durch den Hexaeder gegebenen, den Raum in sechs Hexanten zerteilenden vierdimensionalen Koordinatensystems. Zusätzlich zu den durch den Oktaeder und den Hexaeder beziehungsweise den Tetraeder gegebenen drei- und vierdimensionalen Koordinatensystemen existieren zwei weitere reguläre Koordinatensysteme, welche durch den Ikosaeder und den Dodekaeder gegeben sind. Aufgrund der durch die Winkelgröße  $\pi/3$  gegebenen Konfiguration ist die Kantenlänge des Ikosaeders dem Radius der Umkugel gleich, womit das ikosaedrische sechsdimensionale Koordinatensystem durch seine Omniäquidistanz geprägt ist.

Drei beliebige auf der Oberfläche der Einheitskugel liegende Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  definieren drei Einheitsvektoren  $e_i$ ,  $\{i = I, II, III\}$ . Der Ortsvektor  $r$  jedes Punktes  $P$ , welcher in der durch die drei Punkte aufgespannten Ebene liegt, lässt sich als eine Summe von parallel zu den Grundvektoren  $e_i$  stehenden Vektoren darstellen:

$$\mathbf{r} = r_1 \cdot \mathbf{e}_I + r_2 \cdot \mathbf{e}_{II} + r_3 \cdot \mathbf{e}_{III}. \quad (5.39)$$

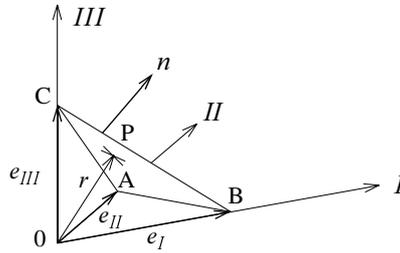


Bild 5.19: Der in Abhängigkeit der Grundvektoren  $e_i$  definierte Vektor  $r$ .

Eine beliebige durch das Punkttupel  $ABC$  – jeweils durch die Ortsvektoren  $a, b$  und  $c$  definiert – gegebene Ebene enthält die Kantenvektoren  $(b - a)$ ,  $(c - a)$  und  $(c - b)$ . Falls der Ortsvektor  $r$  einen Punkt  $P$  der Ebene definiert, lässt sich diese Ebene als der geometrische Ort aller Vektoren  $(r - a)$ ,  $(r - b)$  und  $(r - c)$  andeuten. Das Skalarprodukt dieser Flächenvektoren mit dem normal zur Ebene stehenden Vektor  $n$ , welcher sich aus dem Vektorprodukt zweier dieser Kantenvektoren ergibt,

$$n = (b - a) \times (c - a), \tag{5.40}$$

muss dann null ergeben:

$$(r - a) \cdot n = (r - b) \cdot n = (r - c) \cdot n = 0. \tag{5.41}$$

Jeder dem obigen Ausdruck genügende Ortsvektor  $r$  definiert einen Flächenpunkt  $P$ .

Bei mehrfach unterteilten Dreiecken lassen sich die durch die Unterteilung gegebenen Schnittpunkte  $P$  in Abhängigkeit vom Frequenzgrad  $f$  bestimmen. Für die Koordinaten  $a_f, b_f$  und  $c_f$  des Punktes  $P$  gilt mit

$$\lambda_i = n_i / f, \quad n = \{1, 2, 3, \dots, f\}, \quad i = \{a, b, c\} \tag{5.42}$$

die Beziehung

$$a_f^i = a^i \cdot \lambda_i, \quad \text{wobei } a^i = \{a, b, c\}. \tag{5.43}$$

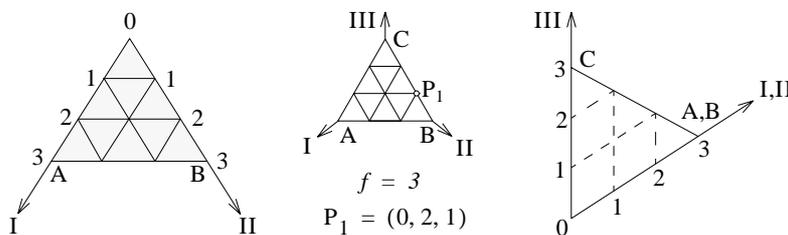


Bild 5.20:  $(p_{i,n})$ -Werte.

Für jeden durch die Ausdrücke (5.43) eindeutig definierten Frequenzpunkt muss die Summe der Skalare  $a_f^i$  der Frequenz  $f$  gleich sein:

$$a_f + b_f + c_f = f. \quad (5.44)$$

Jeder aus  $n$  Eckpunkten bestehende konvexe Polyeder definiert eine bestimmte Anzahl linear unabhängiger Grundvektoren  $e_i$ ,  $\{i = I, II, III, \dots, N\}$ . Bei den in eine Einheitsumkugel einschreibbaren Platonischen und Archimedischen Körpern sind die Grundvektoren sogar gleich den Ortsvektoren dieser Eckpunkte. Jeder innerhalb einer durch drei Ortsvektoren definierten Ebene liegende Punkt  $P$  lässt sich vorteilhaft mit Hilfe der entsprechenden Grundvektoren nach der oben beschriebenen Systematik definieren. Grundsätzlich besteht jedoch der Bedarf, die somit bestimmte Punktanordnung über ein einziges orthogonales kartesisches Grundkoordinatensystem konzis zu erfassen. In der Folge wird daher die dazu nötige Koordinatentransformation dargelegt.

Für die Transformation der schiefwinkligen Koordinaten werden die Vektoren  $e_i$  in einem ursprungsgleichen rechtwinkligen Koordinatensystem derart eingelegt, dass einer der Grundvektoren,  $e_{III}$ , mit der  $z$ -Koordinatenachse zusammenfällt. Ferner soll einer der zwei übrigen Grundvektoren in einer Koordinatenfläche liegen. Der Winkel zwischen den die Ebene  $\Sigma$  aufspannenden Vektoren  $e_I$  und  $e_{II}$  sei mit  $\varphi$  und derjenige zwischen dieser Ebene und dem dritten Grundvektor  $e_{III}$  mit  $\vartheta$  bezeichnet.

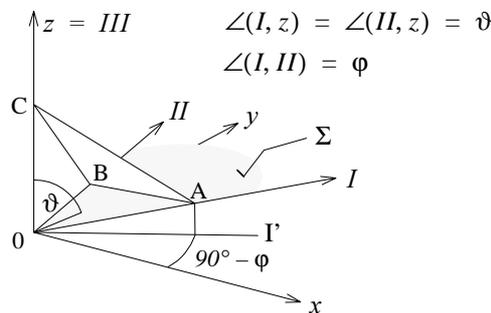


Bild 5.21: Zur Koordinatentransformation.

Das durch die Grundvektoren bestimmte schiefwinklige Koordinatensystem sei in der Folge als  $(\xi, \eta, \zeta)$  und die zugehörigen Einheitsvektoren mit  $e_\xi$ ,  $e_\eta$  und  $e_\zeta$  bezeichnet. In diesem Koordinatensystem ist ein betrachteter Punkt  $P$  über die Koordinaten  $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)$  bestimmt. Die weiteren Betrachtungen erfolgen über die Projektion des Punktes  $P$  und der Ebene  $\Sigma$  in die  $(x, y)$ -Grundriss- und in die  $(y, z)$ -Seitenrissebene. Bei der Projektion auf die Grundrissebene erfährt die durch die Vektoren  $e_\xi$  und  $e_\eta$  aufgespannte Ebene  $\Sigma$  eine Projektionsverzerrung  $\lambda = \Sigma/\Sigma'$ , welche durch den Ausdruck

$$\lambda = |e_\xi| / |e_\xi'| = |e_\eta| / |e_\eta'| = 1 / (\sin \vartheta) \quad (5.45)$$

gegeben ist. Die Abhängigkeiten der Koordinaten  $\xi_P$  und  $\eta_P$  des Punktes  $P$  zu den projizierten Koordinaten  $\xi_P'$  und  $\eta_P'$  lassen sich demzufolge in folgender Form darlegen:

$$\xi_P' = \xi_P \cdot \sin \vartheta, \quad (5.46)$$

$$\eta_P' = \eta_P \cdot \sin \vartheta. \quad (5.47)$$



bestimmen. Wie ersichtlich ist, werden die orthogonalisierten schiefwinkligen Ausgangskoordinaten nur im Ausnahmefall denjenigen des Grundkoordinatensystems entsprechen, da das betrachtete  $(x,y,z)$ -Koordinatensystem innerhalb eines  $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ -Grundkoordinatensystems gedreht liegen kann.

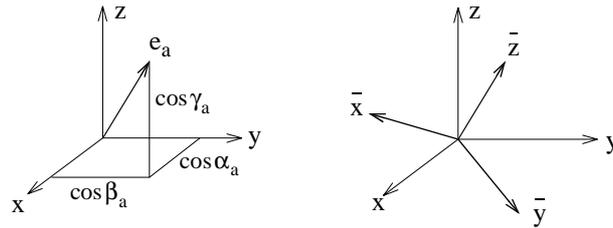


Bild 5.23: Zur Transformation zweier ursprungsgleicher Koordinatensysteme.

Jeder Einheitsvektor  $e_a$  ist in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem durch seinen Richtungskosinus, das heisst den Kosinus der Winkel zwischen der zu beschreibenden Richtung und den positiven Koordinatenachsen, definiert:

$$e_a \{ \cos \alpha_a, \cos \beta_a, \cos \gamma_a \} . \quad (5.56)$$

Im  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -Grundkoordinatensystem sind dementsprechend die orthogonal zueinander stehenden Einheitsvektoren  $e_x, e_y$  und  $e_z$  durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$e_i \{ \cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i \}, \quad i = \{x, y, z\} . \quad (5.57)$$

Unter Verwendung einer Drehmatrix  $D$ ,

$$D = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \cos \alpha_y & \cos \alpha_z \\ \cos \beta_x & \cos \beta_y & \cos \beta_z \\ \cos \gamma_x & \cos \gamma_y & \cos \gamma_z \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

können die orthogonalisierten Koordinaten  $(x,y,z)$  über den Ausdruck

$$\bar{x}_p = D \cdot x_p, \quad \bar{x}_p \{ \bar{x}_p, \bar{y}_p, \bar{z}_p \} \quad \text{und} \quad x_p \{ x_p, y_p, z_p \} \quad (5.59)$$

in Koordinaten des Grundsystems transformiert werden. Wie sich aus der Zusammensetzung beider Ausdrücke (5.55) und (5.59) ergibt, erfolgt die Transformation der Ausgangskoordinaten  $(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$  in das Grundkoordinatensystem unter Verwendung einer allgemeinen Transformationsmatrix  $\bar{T}$ ,

$$\bar{T} = T \cdot D, \quad (5.60)$$

über die Beziehung

$$\bar{x}_p = \bar{T} \cdot \xi_p . \quad (5.61)$$

## Kugelpflasterung

Die zentralprojektive Abbildung eines mehrfach unterteilten Polyeders erlaubt die Erzeugung einer diskontinuierlichen sphärischen Punktgruppe. Diese Punktgruppe ist durch die Äquidistanz zu einem fixen geometrischen Zentralpunkt gekennzeichnet. Bei der Zentralprojektion wird ein durch den Ortsvektor  $r = |r| e_r$  eindeutig bestimmter, auf einer Polyederfläche liegender Punkt  $P$  auf die Kugeloberfläche  $\bar{P}$  abgebildet. Aufgrund der zentralprojektiven Eigenschaften ist der Abbildungspunkt  $\bar{P}$  durch den Ortsvektor

$$\bar{r} = |\bar{r}| e_r \quad (5.62)$$

gegeben. Die zentralprojektive Abbildung  $P \rightarrow \bar{P}$  lässt sich über den Verknüpfungsvektor

$$u = |u| e_r \quad (5.63)$$

erfassen. Für die Ortsvektoren beider Punkte  $P$  und  $\bar{P}$  gilt somit die Beziehung

$$\bar{r} = r + u. \quad (5.64)$$

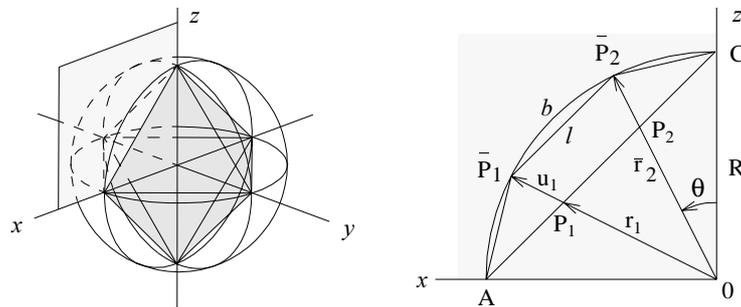


Bild 5.24: Zur zentralprojektiven Abbildung.

Betragsmässig sind die Ortsvektoren  $|\bar{r}|$  und  $|r|$  durch ein Dilatationsmass  $\lambda$ ,

$$\lambda |r| = |r| + |u| = |\bar{r}|, \quad (5.65)$$

miteinander verknüpft. Der durch Umformung erhaltene Ausdruck

$$\lambda = |\bar{r}| / |r| \quad (5.66)$$

lässt sich durch das Einsetzen der bekannten Grössen für  $|\bar{r}|$  und  $|r|$  in die Form

$$\lambda = R / [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \quad (5.67)$$

umschreiben. Der gesuchte Vektor  $\bar{r}$  des sphärischen Punktes  $\bar{P}$  ist durch den Ausdruck

$$\bar{r} = \lambda r \quad (5.68)$$

gegeben. Die gesuchten Koordinaten lassen sich somit über das Gleichungstrio

$$\bar{x}_i = x_i R / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \bar{x}_i = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}, \quad x_i = \{x, y, z\} \quad (5.69)$$

bestimmen. Für den Abstand  $l$  zweier auf der Kugeloberfläche liegender projizierter Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gilt

$$\overline{P_1 P_2} = l = [(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2]^{1/2}. \quad (5.70)$$

Der gesuchte Ortsvektor  $\vec{r}$  lässt sich vorteilhaft unter Anwendung sphärischer Koordinaten bestimmen. Der betrachtete Punkt  $P$  des Polyeders ist durch die kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  gegeben. Mit den Transformationsgleichungen

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \varphi = \text{atan}(y/x), \quad \theta = \text{atan}(x^2 + y^2)^{1/2}/z^2 \quad (5.71)$$

lässt sich der Ortsvektor des Punktes  $P$  durch die Kugelkoordinaten  $r(r, \varphi, \theta)$  angeben. Der zentralprojektive Einheitsvektor des Punktes  $P$  und der gesuchte Ortsvektor  $\vec{r}$  haben die Koordinaten

$$e_r(1, \varphi, \theta) \quad \text{und} \quad \bar{r}(R, \varphi, \theta) \quad (5.72)$$

Der obige Ausdruck (5.70) für den Abstand  $l$  zwischen zwei benachbarten Punkten  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  ergibt sich unter Berücksichtigung der Transformationsgleichungen (5.71) zu

$$l = [2R^2 - 2R^2(\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2)]^{1/2}. \quad (5.73)$$

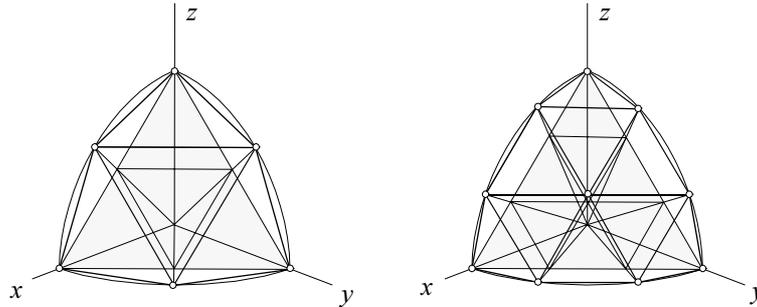


Bild 5.25: Sphärische Abbildung eines Oktaeders zwei- und dreifacher Frequenz.

Für die Veranschaulichung soll nun auf die zentralprojektive Abbildung des Oktaeders dreifacher Frequenz quantitativ eingegangen werden. Die oktaedrische Punktgruppe weist den Vorteil auf, dass die Grundvektoren der Eckpunkte mit dem Grundkoordinatensystem zusammenfallen. Aus diesem Grund lässt sich der Ausdruck (5.61) in die folgende Form vereinfachen:

$$\bar{x}_p = \xi_p. \quad (5.74)$$

Die Koordinaten der in der oktaedrischen Fläche liegenden Frequenzpunkte  $P$  lassen sich unter Berücksichtigung der obigen Gleichung (5.74) und unter Verwendung der hergeleiteten Beziehung (5.43) bestimmen. Die Bedingung (5.44) – konstante Quersumme für alle Punkte – ist hierbei stets erfüllt.

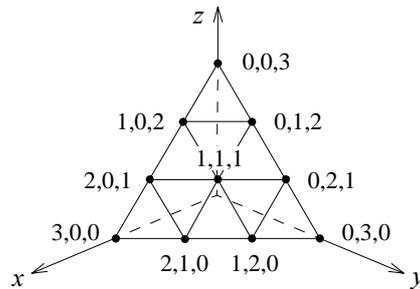


Bild 5.26:  $(x,y,z)$ -Punktwerte der oktaedrischen Dreiecksfläche dreifacher Frequenz.

Die gesuchten zentralprojizierten Punkte lassen sich über den Ausdruck (5.68) beziehungsweise (5.69) bestimmen. Für eine Einheitskugel lassen sich die gesuchten Koordinaten aus der nachstehenden Tabelle entnehmen. Die gesuchten Kantenlängen ergeben sich über die Beziehung (5.70). Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des äquilateralen Dreiecks – vgl. Bild 5.3, pp. 80 – ist die Geometrie der aus 108 Stäben bestehenden sphäroiden oktaedrischen Struktur dreifacher Frequenz mit nur vier Stablängen, wovon zwei gleich sind, eindeutig bestimmt<sup>11</sup>.

| $P$ | $x$ | $y$ | $z$ | $\bar{x}$    | $\bar{y}$    | $\bar{z}$    | $\lambda$    |
|-----|-----|-----|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 003 | 0   | 0   | 3   | 0            | 0            | 1            | $1/3$        |
| 030 | 0   | 3   | 0   | 0            | 1            | 0            | $1/3$        |
| 300 | 3   | 0   | 0   | 1            | 0            | 0            | $1/3$        |
| 102 | 1   | 0   | 2   | $1/\sqrt{5}$ | 0            | $2/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ |
| 201 | 2   | 0   | 1   | $2/\sqrt{5}$ | 0            | $1/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ |
| 012 | 0   | 1   | 2   | 0            | $1/\sqrt{5}$ | $2/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ |
| 021 | 0   | 2   | 1   | 0            | $2/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ |
| 210 | 2   | 1   | 0   | $2/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ | 0            | $1/\sqrt{5}$ |
| 120 | 1   | 2   | 0   | $1/\sqrt{5}$ | $2/\sqrt{5}$ | 0            | $1/\sqrt{5}$ |
| 111 | 1   | 1   | 1   | $1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ |

| $P_i - P_j$ | 003-102 | 102-201 | 102-111 | 102-012 |
|-------------|---------|---------|---------|---------|
| $l$         | 0.4595  | 0.6325  | 0.6714  | 0.6325  |

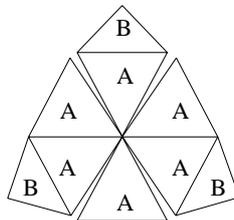


Bild 5.27: Aufgeklappte Parkettierung eines Kugeloktanten.

11. Vgl. Buckminster Fuller (1975), Kenner (1976), Migliari (1975).

### 5.3 Dilatationen der sphärischen Punktgruppe

#### Kartesische Sphärendilatation

Jeder auf der Oberfläche einer Einheitskugel liegende Punkt  $P$  ist durch seinen Ortsvektor  $r = e_r$  bestimmt. Während des Dilatationprozesses wird der betrachtete Punkt  $P$  entlang einer durch den Ortsvektor  $e_r$  definierten Trajektorienachse ex- oder implisiv bewegt. Die durch den Betrag des Dilatationsvektors  $v$  bestimmte Endlage dieser Bewegung definiert einen Abbildungspunkt  $P'$  im Raum, dessen Ortsvektor  $r'$  durch den Ausdruck

$$\overrightarrow{OP'} = r' = r + v = (1 + v)e_r = \lambda e_r \quad (5.75)$$

gegeben ist. Die Raumlage des Abbildungspunktes  $P'$  lässt sich demzufolge in Abhängigkeit einer einzigen Parametergrösse, dem Dilatationsmass  $\lambda$ , eindeutig bestimmen. Der Transformationsprozess einer gesamten sphärischen Punktgruppe ist durch ein Dilatationsfeld  $V$  bestimmt, über welches jedem Punkt  $P_i$  ein Dilatationsmass  $\lambda_i$  eindeutig zugeordnet wird:

$$r' = V e_r, \quad V = \{\lambda_i\}. \quad (5.76)$$

Über diese ganzheitliche Betrachtung lassen sich bei der Dilatation der sphärischen Punktgruppe topologische Konfigurationen, Formen und Kräfte in einen eindeutigen Zusammenhang bringen<sup>12</sup>. Die Dilatation wird als orthogonal-regulär bezeichnet, falls das neugebildete Punktsystem drei senkrecht aufeinanderstehende Symmetrieebenen aufweist, und falls die Dilatationsmasse für die auf den kartesischen Achsen liegenden Punkte Hauptwerte annehmen und somit dilatationscharakterisierende Eigenschaften besitzen. Diese Dilatationseigenschaften lassen sich in diesem Fall formell über den Ausdruck

$$D(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) \quad (5.77)$$

herleiten. Für die Formbestimmung ist es sinnvoll, einen der Dilatationshauptwerte als eine Einheitsdilatation anzunehmen:

$$D(\lambda_x = 1, \lambda_y/\lambda_x, \lambda_z/\lambda_x) \leftrightarrow D(1, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z). \quad (5.78)$$

Alle sphärischen Punktgruppen, welche nach der Transformation auf eine analytisch beschreibbare Oberfläche der Form

$$(x^k/a^k) + (y^m/b^m) + (z^n/c^n) = 1 \quad (5.79)$$

12. Diese Überlegungen knüpfen an die sphärischen Vektorfelder  $V$  der Physik an, bei denen die Länge des an einem Punkt angreifenden Kraftvektors vom Betrag  $r$  des Ortsvektors  $r$  abhängt. Beispiele hierfür liefern die über den Ausdruck  $V = (c/r^3)r = (c/r^2)(r/r)$  hergeleiteten Newtonschen und Coulombschen Kraftfelder.

zu liegen kommen, unterliegen einer orthogonal-regulären Dilatation. Unter Verwendung der Dilatationscharakterisierung (5.78) lässt sich der obige Ausdruck in die Form

$$x^k + (y^m / \bar{\lambda}_y^m) + (z^n / \bar{\lambda}_z^n) = 1 \quad (5.80)$$

umschreiben. Falls die drei Exponentenvariablen den Wert zwei annehmen, bildet die dilatierte Punktmenge ein Ellipsoid mit den Hauptachsen  $(1, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z)$ .

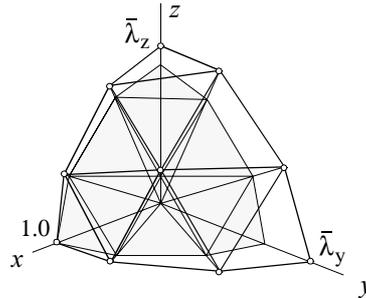


Bild 5.28: Dilatation eines sphärischen Oktaeders dreigradiger Frequenz.

Die Richtung des Ortsvektors  $r' = r' e_r$  eines Abbildungspunktes  $P'$  ist durch den bekannten Einheitsvektor  $e_r(\varphi, \theta, 1)$  gegeben. Für die Bestimmung der unbekannt Parametergrösse  $r'$  ist es zweckmässig, den Ortsvektor

$$r' = r' e_r = r_\varphi e_\varphi, \quad e_\varphi(\varphi, \theta = \pi/2, 1) \quad (5.81)$$

aller in der  $(x,y)$ -Ebene liegender Abbildungspunkte  $P'$  erstmals zu bestimmen. Alle sich aus der orthogonal-regulären Dilatation ergebenden Punkte  $P'$  der  $(x,y)$ -Ebene müssen der durch den Ausdruck

$$x^k + (y^m / \bar{\lambda}_y^m) = 1 \quad (5.82)$$

definierten ebenen Kurve genügen. Mit

$$x = r_\varphi \cdot \cos \varphi, \quad y = r_\varphi \cdot \sin \varphi \quad (5.83)$$

ergibt sich die Komponente  $r' = r_\varphi$  der Ortsvektoren  $r'$  aller auf der Kurve (5.82) liegender Punkte über die Lösung der Exponentialgleichung

$$r_\varphi^k + \left( \frac{\sin^m \varphi}{\cos^k \varphi} \frac{1}{\bar{\lambda}_y^m} \right) \cdot r_\varphi^m - \frac{1}{\cos^k \varphi} = 0. \quad (5.84)$$

Falls die beiden Exponenten gleich sind,  $k = m$ , so ergibt sich die gesuchte Grösse über den Ausdruck

$$r_\varphi = \left( \frac{\bar{\lambda}_y^m}{\bar{\lambda}_y^m \cdot \cos^m \varphi + \sin^m \varphi} \right)^{1/m}. \quad (5.85)$$

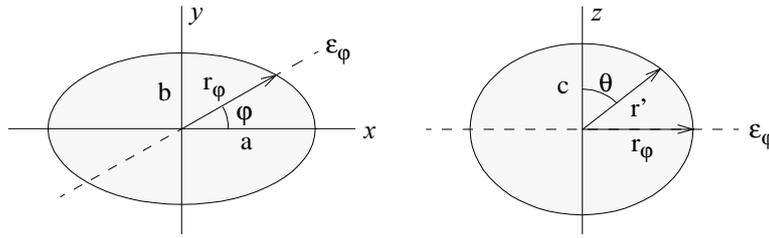


Bild 5.29: Zur ellipsoiden Dilatation der Sphäre.

Zusammen mit der  $z$ -Achse spannt die durch die Winkelkoordinate  $\varphi$  definierte Achse  $\varepsilon_\varphi$  eine Ebene auf, welche eine Schnittkurve enthält, die durch die Gleichung

$$(\varepsilon_\varphi^l / r_\varphi^l) + (z^n / \bar{\lambda}_z^n) = 1 \quad (5.86)$$

definiert ist. Für die Koordinate  $\varepsilon_\varphi$  gilt:

$$\varepsilon_\varphi = x^k \cdot \cos \varphi + (y^m / \bar{\lambda}_y^m) \cdot \sin \varphi. \quad (5.87)$$

Unter Verwendung der Ausdrücke für die Koordinatentransformationen

$$z = r' \cdot \cos \theta, \quad \varepsilon_\varphi = r' \cdot \sin \theta \quad (5.88)$$

ergibt sich die gesuchte sphärische Koordinate  $r'$  über die Gleichung

$$r'^n + \left( \frac{\sin \theta}{r_\varphi} \right)^l \left( \frac{\bar{\lambda}_z}{\cos \theta} \right)^n \cdot r'^l - \left( \frac{\bar{\lambda}_z}{\cos \theta} \right)^n = 0. \quad (5.89)$$

Bei Exponentengleichheit  $l = n$  lässt sich der obige Ausdruck in die Form

$$r' = \left( \frac{(r_\varphi \cdot \bar{\lambda}_z)^n}{(\bar{\lambda}_z \cdot \sin \theta)^n + (r_\varphi \cdot \cos \theta)^n} \right)^{1/n} \quad (5.90)$$

umschreiben. Bei gewissen geometrischen Gebilden können die zwei Exponentenparameter  $m$  und  $n$  den gleichen Wert annehmen. Mit  $n = m$  ergibt sich durch das Einsetzen des Ausdruckes (5.85) in (5.90):

$$r' = \left( \frac{(\bar{\lambda}_y \cdot \bar{\lambda}_z)^n}{(\bar{\lambda}_z \cdot \sin \theta)^n [(\bar{\lambda}_y \cdot \cos \varphi)^n + \sin^n \varphi] + (\bar{\lambda}_y \cdot \cos \theta)^n} \right)^{1/n}. \quad (5.91)$$

## Lokale Dilatationen

Über die dargelegten Ausdrücke lässt sich die sphärische Punktgruppe derart abbilden, dass alle Punkte ein regelmässiges Muster auf einer durch die Gleichung (5.80) definierbaren Oberfläche bilden. Die Formgruppe dieser Oberfläche ist durch die drei Exponentenvariablen  $k$ ,  $m$  und  $n$  gegeben. Bei gegebener Formgruppe ergibt sich die der kartesischen Orthogonalität unterliegende Proportionsform des geometrischen Gebildes aus den den beiden Achsenpunktpaaren zugeordneten Dilatationsmassen  $\bar{\lambda}_y$  und  $\bar{\lambda}_z$ . Die Dilatationsmasse

$$\lambda = f(\varphi, \theta) \quad (5.92)$$

des Dilatationsfeldes  $V$  müssen jedoch keineswegs diesen aufgezeichneten differentialgeometrischen Zwängen unterliegen. Sicherlich ist in diesem Zusammenhang von Interesse, einem beliebigen sphärischen kardinalen Punkt  $K$  ein Dilatationsmass  $\lambda^K$  willkürlich zuzuordnen und gleichzeitig eine Störungsfläche  $A^S$  zu bestimmen, innerhalb welcher die Punkte ein vom Wert eins verschiedenes Dilatationsmass annehmen:

$$r' = v^S e_r \quad v^S = \begin{cases} \lambda & \forall P \in A^S \\ 1.0 & \forall P \notin A^S \end{cases} \quad (5.93)$$

Gleichzeitig soll aber die Funktion  $f(\varphi, \theta)$  für die innerhalb dieser Fläche liegenden Punkte den sich aus den praktischen Zweckmässigkeiten ergebenden Stetigkeitserfordernissen genügen. Bei einem automatisierten Dilatationsprozess liessen sich über diese Methode beliebige Dilatationen erzeugen. Insbesondere liessen sich mehrere kardinale Punkte bestimmen und automatisch superponieren. Der hier vorgeschlagene Ansatz stellt lediglich eine der vielen denkbaren Möglichkeiten dar. Es wird hier von einer sinusinalen Dilatation ausgegangen.

Der die Störung verursachende kardinale Punkt  $K$  der Einheitskugel sei durch die beiden Winkelkoordinaten  $\varphi^K$  und  $\theta^K$ ,

$$r^K = e_r^K(\varphi^K, \theta^K), \quad (5.94)$$

eindeutig bestimmt. Die Richtung  $(\varphi^K, \theta^K)$  des Ortsvektors  $r^K$  definiert eine kardinale Achse  $\zeta$ ,

$$e_\zeta = e_r^K, \quad (5.95)$$

entlang welcher der Punkt  $K$  eine Verschiebung erfahren soll. Die Abbildung des Punktes  $K$  ist durch den Ortsvektor

$$K': \bar{r}^K = (\varphi^K, \theta^K, \lambda^K) \quad (5.96)$$

gegeben. Die sich aus der Einheitskugel und der durch die beiden Achsen  $z$  und  $\zeta$  aufgespannten Ebene ergebende Schnittkurve stellt einen Grosskreis  $g$ , das heisst einen Ein-

heitskreis, dar. Bei der Verschiebung erzeugt  $K$  eine in der durch  $(\varphi = \varphi^K)$  gegebenen  $(z, \zeta)$ -Ebene liegende Störungskurve, deren Anfangs- und Endpunkte  $S_1$  und  $S_2$  durch die Störungswinkel

$$(\theta^K + \theta_1^S) \text{ und } (\theta^K - \theta_2^S) \quad (5.97)$$

gegeben sind. Die Bogenlänge der auf der sphärischen geodätischen Kurve liegenden abzubildenden Punkte beträgt demzufolge  $(\theta_1^S + \theta_2^S)$ .

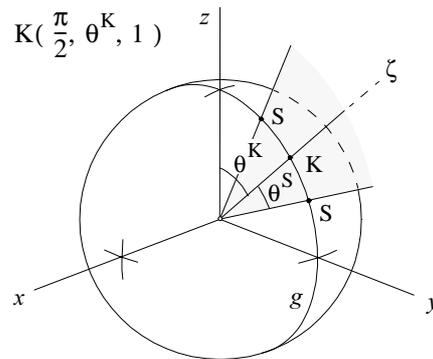


Bild 5.30: Zur Definition des Punktes  $K$  und der Störungslänge des Grosskreises  $g$ .

In der Folge wird mit dem gleichen Störungswinkel,

$$\theta_1^S = \theta_2^S = \theta^S, \quad (5.98)$$

operiert. Im hier angenommenen Fall soll die Störungskurve, um die Stetigkeitserfordernisse zu gewährleisten, einen im rechtwinkligen kartesischen  $(x, z)$ -Koordinatensystem durch den Ausdruck

$$z = A \sin(\omega x + \mu_0) \quad (5.99)$$

gegebenen sinusidalen Verlauf annehmen.

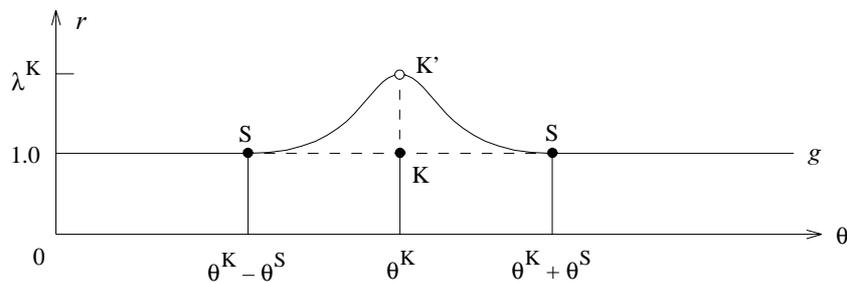


Bild 5.31: Darstellung von  $r$  für  $\varphi = \varphi^K$  in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$ .

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned}
A &= \lambda^K, \\
\omega &= \pi/2\theta^S, \\
\mu_0 &= (\pi/2)(1 - \theta^K/\theta^S)
\end{aligned} \tag{5.100}$$

für die Dilatation des kardinalen Punktes  $K$ , respektive die Störungslänge und den Störungsanfang, ergibt sich das Dilatationsmass  $\lambda(\varphi^K) = f(\theta)$  für die im Störungsbereich liegenden Punkte der geodätischen Linie zu

$$\lambda = \lambda^K \sin\{[\pi/2\theta^S] \theta + [(\pi/2)(1 - \theta^K/\theta^S)]\} \tag{5.101}$$

für alle

$$(\theta^K - \theta^S) \leq \theta \leq (\theta^K + \theta^S), \quad \varphi = \varphi^K. \tag{5.102}$$

Für die Definition der die Störungsfläche  $A^S$  umrandenden Störungskurve  $s$  ist es sinnvoll, die Störungskurve auf die definierte  $\zeta$ -Achse zu beziehen.

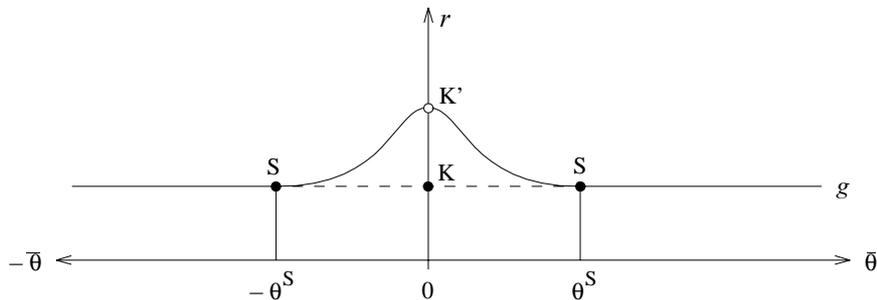


Bild 5.32: Darstellung von  $r$  für  $\varphi = \varphi^K$  in Abhängigkeit des Winkels  $\bar{\theta}$ .

Bezieht man das über den obigen Ausdruck gegebene Dilatationsmass  $\lambda$  auf die durch den Ortsvektor des Punktes  $K$  definierte  $\zeta$ -Achse ( $\bar{\theta} = 0$ ), so gilt mit  $\bar{\theta} = \theta + \theta^S$  der umgeformte Ausdruck (5.101)

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda^K \sin\{[\pi/(2\theta^S)] \bar{\theta} + [\pi/2]\}, \\
\forall (-\theta^S \leq \bar{\theta} \leq \theta^S), \quad (\bar{\varphi} = \varphi^K).
\end{aligned} \tag{5.103}$$

Die Störungskurve  $s$ , welche die Störungsfläche  $A^S$  umrandet, lässt sich vorteilhaft über die Koordinaten  $\bar{\theta}$  und  $\bar{\varphi}$  des rechtwinkligen  $(\bar{x}, \bar{y}, \zeta)$ -Koordinatensystems herleiten. Die Raumlage dieses Koordinatensystems bezüglich des  $(x, y, z)$ -Grundkoordinatensystems ergibt sich über eine Drehung um die  $z$ -Achse um die Winkelgröße  $\varphi^K$  und eine Rotationsbewegung um die  $\bar{y}$ -Achse um den Betrag  $\theta^K$ . Die durch die beiden Koordinatenachsen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  aufgespannte Ebene  $\Pi$  schneidet somit die  $(x, y)$ -Ebene entlang der  $\bar{y}$ -Achse.

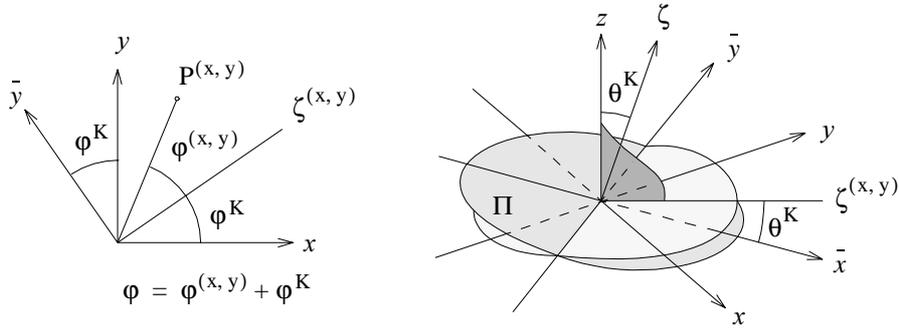


Bild 5.33: Zur Raumlage des  $(\bar{x}, \bar{y}, \zeta)$ -Koordinatensystems.

Die Koordinaten  $\varphi$  und  $\theta$  eines im  $(\bar{x}, \bar{y}, \zeta)$ -Koordinatensystem definierten Punktes  $P$  lassen sich über die nachstehenden Transformationsgleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(x,y)} + \varphi^K = [\arctan(\tan \bar{\varphi} / \cos \theta^K)] + \varphi^K, \\ \sin \varphi^{(x,y)} \cdot \cot[\arcsin(\sin \theta^K \cdot \sin \varphi^{(x,y)} / \sin \bar{\theta})] &= \\ &= \cot \theta^K \cdot \sin \theta - \cos \varphi^{(x,y)} \cdot \cos \theta \quad \forall \varphi^{(x,y)} \neq 0, \pi. \end{aligned} \quad (5.104)$$

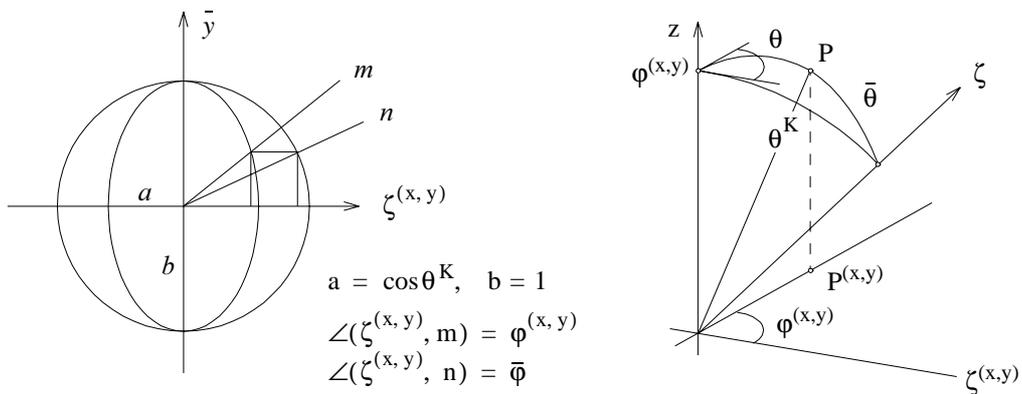


Bild 5.34: Zur Transformation der Koordinaten  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\theta}$ .

Falls für alle  $\bar{\varphi}$ -Werte die Koordinate  $\bar{\theta}$  den konstanten Wert  $\theta^S$  annimmt,

$$\bar{\theta} = \theta^S \quad \forall \bar{\varphi}, \quad (5.105)$$

stellt die Störungskurve  $s$  einen Kleinkreis der Einheitskugel dar, und die Ortsvektoren der die Kurve  $s$  bildenden Punkte  $S$  stellen die Mantelfläche eines Rotationskegels dar. Der Rotationskegel lässt sich zum allgemeinsten Kegel umformen, falls die Koordinate  $\bar{\theta}$  keinen konstanten Wert  $\theta^S$  annimmt

$$\bar{\theta} = f(\bar{\varphi}). \quad (5.106)$$

In diesem Fall schneidet der unregelmässige Kegel eine nichtebene unreguläre geschlossene Kurve  $s$  auf der Einheitskugel.

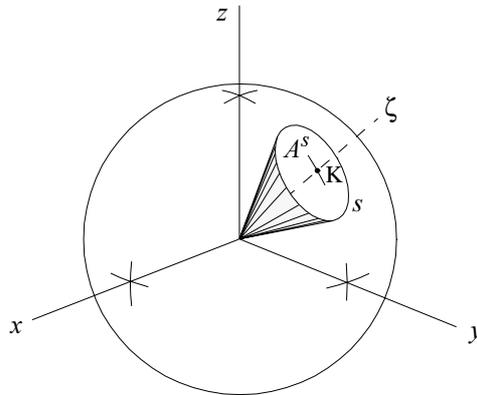


Bild 5.35: Zur durch den kardinalen Punkt  $K$  erzeugten Störungsfläche  $A^S$ .

Für den Rotationskegel stellt das auf die  $\zeta$ -Achse bezogene Dilatationsmass innerhalb der Störungsfläche einzig eine Funktion der Koordinate  $\bar{\theta}$  dar, und der Ausdruck (5.101) ist für alle  $\bar{\varphi}$  gültig. In diesem Fall lässt sich (5.102) wie folgt umschreiben:

$$-\theta^S \leq \bar{\theta} \leq \theta^S \quad \forall \bar{\varphi} . \tag{5.107}$$

Falls die Schnittkurve  $s$  eine Funktion der Winkelkoordinate  $\bar{\varphi}$  darstellt, so gilt

$$\bar{\theta}^S = f(\bar{\varphi}) , \tag{5.108}$$

wobei, damit die Störungskurve  $s$  geschlossen ist, die Bedingung

$$\bar{\theta}^S(\bar{\varphi} = 0) = \bar{\theta}^S(\bar{\varphi} = 2\pi) , \tag{5.109}$$

erfüllt werden muss, und der Ausdruck (5.101) wird zu

$$\lambda = \lambda^K \sin \{ [\pi / (2 f(\bar{\varphi}))] \bar{\theta} + [\pi / 2] \} . \tag{5.110}$$

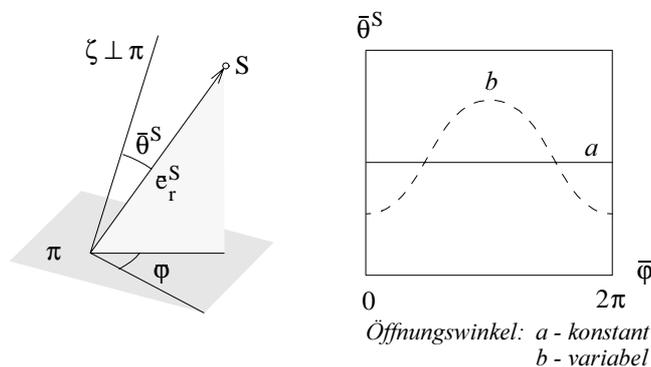


Bild 5.36: Die Störungskurve  $s$  als Schnittkurve der Kugeloberfläche mit einem Kegel.

### Zum Gradienten des Verzerrungsmasses

Bei der Dilatation wird jedem abzubildenden Punkt  $P$  über ein Dilatationsfeld  $V$  ein Dilatationsmass  $\lambda$  zugeteilt. Dabei wird ein betrachtetes Grosskreissegment der Einheits-sphäre mit der Bogenlänge  $\alpha$  durch Deformation und Verzerrung als eine ebene Kurve mit der Bogenlänge  $\bar{\alpha}$  abgebildet. Die sich aus dieser Dilatation ergebende Längenverzerrung  $\lambda_l$  lässt sich differentialgeometrisch über den Ausdruck (5.23) bestimmen. Da der Gradient der Dilatationsmasse der auf einem Grosskreis liegenden Punkte  $P$  verhältnismässig hohe Werte annehmen kann, ergeben sich bei der Dilatation benachbarte Abbildungssegmente, deren Bogenlängen die entsprechende Disparität aufweisen.

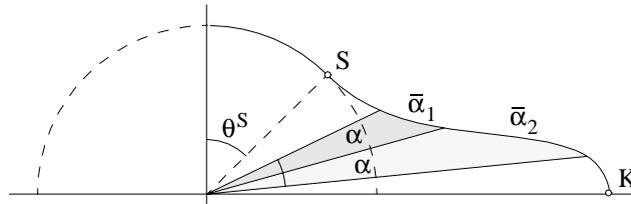


Bild 5.37: Zum Problem der unterschiedlichen Längenverzerrung  $\lambda$ .

Dem zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  verbindenden Grosskreissegment der Einheitskugel mit der Bogenlänge  $\alpha$  entspricht bei einer diskreten sphärischen Punktmenge die Sehne mit der über den Ausdruck

$$l = 2 \cdot \sin(\alpha/2). \quad (5.111)$$

gegebenen Länge  $l$ . Beim Dilatationsprozess erfährt die Sehne eine kombinierte Lage- und Längenänderung. Wird den beiden betrachteten Punkten  $P_1$  und  $P_2$  das gleiche Dilatationsmass  $\lambda_1$  zugeordnet, so erfährt die Verbindungsstrecke  $l$  eine translatorische Bewegung, deren vektorieller Betrag  $|w|$  durch die Beziehung

$$|w| = [\lambda_1 - 1] \cos(\alpha/2) \quad (5.112)$$

gegeben ist. Die gleichzeitige Längenänderung  $\Delta l$  dieser Strecke beträgt

$$\Delta l = 2[\lambda_1 - 1] \cos(\alpha/2). \quad (5.113)$$

Die Ortsvektoren der Endpunkte der translatorisch abgebildeten Strecke sind durch die Einheitsvektoren  $e_r(P_1)$ , beziehungsweise  $e_r(P_2)$  und das Dilatationsmass  $\lambda_1$  bestimmt. Falls einem der beiden Punkte eine zusätzliche Dilatation  $\Delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1)$  erteilt wird, so erfährt die betrachtete Strecke eine Rotation  $\omega$  um den festgehaltenen Punkt. Der Betrag dieser Rotation, welche die Kreissehne als Nullreferenz aufweist, ergibt sich über den nachstehenden Ausdruck

$$\tan \omega = (\lambda_2 - \lambda_1) / (\lambda_2 + \lambda_1). \quad (5.114)$$

Die sich aus der translatorischen und rotatorischen planaren Bewegung und der damit zusammenhängenden Längenverzerrung ergebende Streckenlänge  $\bar{l}$  beträgt

$$\bar{l} = \sin(\alpha/2) [2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]^{1/2}. \quad (5.115)$$

Der Längenunterschied  $\Delta \bar{l}$  zweier benachbarter abgebildeter Strecken stellt bei konstant gehaltenem Öffnungswinkel  $\alpha$  eine Funktion des Gradienten des Betrages der Rotation  $\omega$  dar.

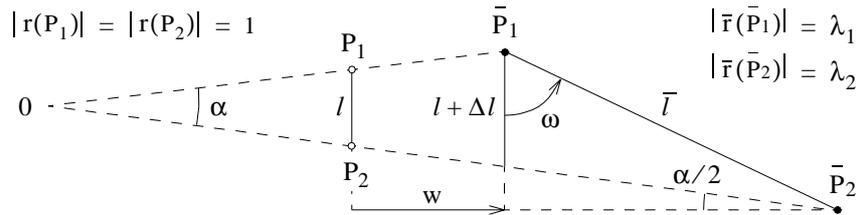


Bild 5.38: Zur Abbildung einer zwei sphärische Punkte verbindenden Strecke  $l$ .

Sowohl aus statischen als auch aus konstruktiven Gründen empfiehlt es sich, die über den Ausdruck (5.70) beziehungsweise (5.73) gegebenen Abstände benachbarter abgebildeter Punkte  $P$  nur innerhalb festgelegter Grenzen zu variieren. Diese Forderung lässt sich erfüllen, indem der Frequenzgrad  $f$  eines betrachteten sphärischen Polygons in Abhängigkeit des Betrages  $\omega$  des Rotationsvektors abgestuft verändert wird:

$$f = \phi(\omega). \quad (5.116)$$

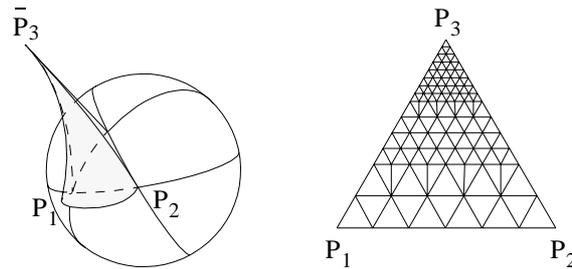


Bild 5.39: In Abhängigkeit des Rotationsgradienten bestimmte Frequenz  $f$ .

Die den hier niedergelegten Überlegungen dienenden Berechnungen liessen sich vorteilhaft mit Hilfe automatisierter Prozesse durchführen. Insbesondere würden graphisch unterstützte Berechnungsvorgänge den Dilatationsprozess durch Visualisierung leicht erfassbar machen. Über lokale Dilatation liessen sich einzelne kardinale Punkte in Hinsicht auf deren Auswirkung verschieben. Durch die Visualisation könnten die diesem Prozess zugrunde liegenden Parameter beliebig und zielgerichtet geändert werden. Einzig unter der Verwendung solcher Mittel könnten beliebige, eventuell sich gegenseitig beeinflussende kardinale Punkte verschoben werden. Aufgrund der gestellten Stetigkeitserfordernisse lassen sich beliebige Störungsfelder überlappen, wobei die entsprechenden Dilatationswerte superponiert werden können. Im automatisierten Prozess liesse sich eine obere und eine untere Schranke für die Verbindungsstrecke zweier miteinander verknüpfter Punkte festlegen. In Abhängigkeit dieser Angabe liesse sich die Frequenz jedes sphärischen Polygons automatisch der hier aufgezeichneten Systematik folgend generieren.

## 6 Formfindung von gekrümmten Flächentragwerken

### 6.1 Mechanik der gekrümmten Fläche

Die konzeptuelle Untersuchung struktureller Zusammenhänge bedarf des grundsätzlichen Verständnisses der mechanischen Verhältnisse. *Richtiges Konstruieren* – mit den Worten Girkmanns – *setzt die Kenntnis des Spiels der inneren Kräfte voraus, und der Konstrukteur muss zugleich wissen, durch welche Massnahmen er das Kräftespiel günstig zu beeinflussen vermag*<sup>1</sup>. Hierbei gilt es, die Intuition und das statische Gefühl im Sinne einer vernünftigen Kombination von Einfachheit und Genauigkeit zu lenken<sup>2</sup>. Dass das Bauwerk niemals der Berechnung entstammen sollte, müsste eigentlich – wie bereits Torroja und Nervi zum Ausdruck gebracht haben – weiterhin fester Bestandteil des ingenieurmässigen Denkens sein. *Nur wenn man das Tragwerk "von Hand" analysiert hat, kann man den Kraftfluss verfolgen und danach konstruieren*<sup>3</sup>. Es sollte somit umgekehrt die Berechnung sein, die für die Überprüfung der Standsicherheit und der Festigkeit der Skizze des Tragwerks entspringt.

Oft bildet die Plastizitätstheorie den geeigneten mechanischen Ansatz für die qualitative und quantitative Erfassung des Tragverhaltens einer unter Lasteinwirkung stehenden Struktur. Die plastizitätstheoretischen Untersuchungen sind durch eine Visualisierungsmacht und einen engen Bezug zu den phänomenologischen Ereignissen geprägt, die der klassischen elastischen Theorie unerreichbar bleiben. Dass für die Ermittlung der Beanspruchungen gekrümmter Flächentragwerke dennoch die Elastizitätsgesetze herangezogen werden, dürfte primär mit dem mangelhaften räumlichen Überblick, den das Studium dem Ingenieur vermittelt, zusammenhängen. Darüberhinaus darf grundsätzlich postuliert werden, dass der Ausnutzungsgrad der Materialien eines solchen Tragwerkes eher gering ausfällt, womit sich die Annahmen des ungerissenen Zustandes, der Homogenität, der Isotropie und der Linearelastizität grundsätzlich vertreten lassen. In Anbetracht dieser Tatsachen empfiehlt es sich, die Untersuchung elementarer Zusammenhänge bei der Lastabtragung mit Hilfe der Elastizitätstheorie nachzuvollziehen<sup>4</sup>. Der qualitativen Untersuchung instabilitätsgefährdeter gekrümmter Flächen liegt hingegen ein rein geometriebehaftetes Problem zugrunde, da das Tragverhalten von Schalen durch das überkritische Verhalten, das heisst durch die Last-Deformationsbeziehung nach Erreichen der linearen kritischen Last, bestimmt ist. Im allgemeinen ist eine markante Traglastabnahme im überkritischen Bereich zu verzeichnen, was für die Imperfektions-sensibilität von Schalen verantwortlich ist<sup>5</sup>.

---

1. Girkmann (1963).

2. Bereits einfache Überlegungen können statisch überzogene Konzepte verwerfen. In diesem Zusammenhang seien die – trotz allem ästhetisch vollkommenen – punktgestützten Schalen des Sydney Opera House von Jørn Utzon erwähnt, die aufgrund realitätsfremder Vorstellungen über das Tragverhalten und die Herstellung zu einem finanziellen und terminlichen Misserfolg wurden.

3. Schlaich (1986).

4. Vgl. Anhang A 2, pp. 161.

5. Selbstverständlich bedarf die quantitative Erfassung des Beulens der Berücksichtigung aller materialbedingter Nichtlinearitäten. Vgl. hierzu Anhang A 3, pp. 163.

## Membrantheorie

Der Versuch, das Kräftefeld einer Fläche mechanisch zu erfassen, führt zur Vorstellung des zweidimensionalen Kontinuums, das heisst der materialisierten Fläche, welche Kräfte übertragen und Formänderungen erleiden kann. Um die Schnittgrössen, welche in diesem Kontinuum wirken, dem Studium des mechanischen Verhaltens von Flächen zugänglich zu machen, bedarf es der Berücksichtigung der an jeder Einheit der Schnittlängen wirkenden Spannungskomponenten. Innerhalb des Kontinuums werden jedem Flächenelement einer imaginären Schnittfläche eine Normalspannungskomponente und zwei Schubspannungskomponenten – zur Mittelfläche parallel und normal wirkend – übertragen. Bei einem im kartesischen Koordinatensystem definierten Flächenelement sind diese Komponenten als  $\sigma_x$ ,  $\tau_{yx}$  und  $\tau_{zx}$  in einem durch  $x = \text{konst.}$  festgelegten Schnitt und dementsprechend als  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{zy}$  in einem Schnitt parallel zur  $y$ -Achse definiert. Nach dem bekannten Satz der elementaren Festigkeitslehre gilt hierbei die Gleichheit  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

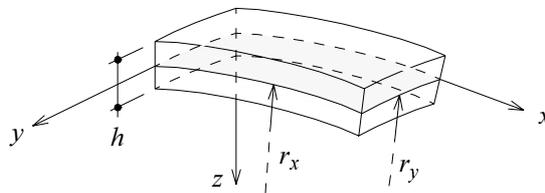


Bild 6.1: Zur Definition der Schnittkräfte.

Die gesuchten Schnittkraftgrössen folgen aus der Integration dieser Komponenten über die Stärke der Fläche. Die Membrankräfte ergeben sich in diesem Sinn aus den Ausdrücken

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1 - z/r_y) dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (1 - z/r_x) dz \quad \text{und} \quad (6.1)$$

$$n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} (1 - z/r_y) dz, \quad n_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (1 - z/r_x) dz. \quad (6.2)$$

Aus den beiden letzten Formeln geht hervor, dass die beiden Schubkräfte trotz der Gleichheit der Schubspannungen nur bei Nabelpunkten gleich sind. Aus der entsprechenden Integration der dritten Schubspannungskomponente folgen die Querkräfte:

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} (1 - z/r_y) dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} (1 - z/r_x) dz. \quad (6.3)$$

Zur Kennzeichnung der möglichen Ungleichmässigkeit der Spannungsverteilungen wird der Begriff des Momentes herangezogen. Es ergeben sich daraus die durch die Ausdrücke

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (6.4)$$

definierten Biegemomente sowie die entsprechenden Drillmomente

$$m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz. \quad (6.5)$$

Bei gekrümmten dehnsteifen Flächenstrukturen ohne Biegesteifigkeit dürfen die zur Mittelfläche parallel wirkenden Spannungen als gleichmässig über die Flächenstärke  $h$  verteilt angenommen werden <sup>6</sup>. In diesem Fall werden die Biege- und Drillmomente (6.4) und (6.5) sowie demzufolge die Querkräfte (6.3) zu null,

$$m_x = m_y = m_{xy} = m_{yx} = v_x = v_y = 0, \quad (6.6)$$

und die 10 unbekannt Grössen reduzieren sich auf nur drei Membrankräfte, die durch die vereinfachten Ausdrücke

$$n_x = \sigma_x \cdot h, \quad n_y = \sigma_y \cdot h \quad \text{und} \quad n_{xy} = n_{yx} = \tau_{xy} \cdot h \quad (6.7)$$

bestimmt werden können <sup>7</sup>. Die Membranfläche setzt demzufolge einer Verbiegung, das heisst einer Änderung der Krümmungsverhältnisse der Mittelfläche, keinen elastischen Widerstand entgegen und ist umgekehrt imstande, bei geeigneten Randbedingungen spannungslose Formänderungen auszuführen, die nicht einmal unendlich klein sein müssen.

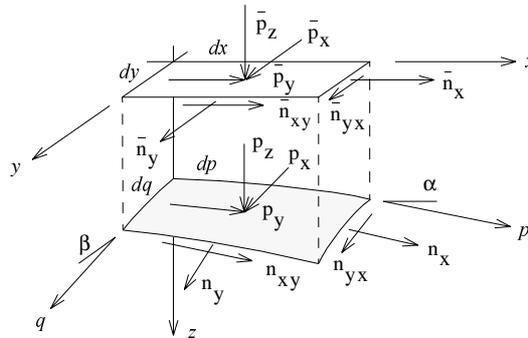


Bild 6.2: Definition der positiven Membranschnittkräfte.

Für die Aufstellung der Grundgleichung der Membrantheorie werden die Untersuchungen der Einfachheit halber an einem ebenen Schalenelement durchgeführt und angenom-

- 
6. Damit der Spannungszustand in einer Fläche als biegefrei angesehen werden kann, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein: Die Mittelfläche muss stetig gekrümmt sein; die Flächenstärke darf sich nur stetig ändern; die Flächenlasten müssen stetig verteilt sein; die Randkräfte müssen tangential zur Mittelfläche gerichtet sein; bei den Auflagern darf die Formänderung der Fläche nur soweit behindert werden, dass die dadurch erzeugten Zwangskräfte ebenfalls tangential zur Mittelfläche gerichtet sind. Vgl. Girkmann (1963).
  7. Diese können somit im Fall einer statisch bestimmten Lagerung aus den Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmt werden, ohne dass dazu die elastischen Formänderungen herangezogen werden müssen. Vgl. Billington (1982), Flügge (1957), Kollár (1984).

men, dass es sich um gewöhnliche kartesische Koordinaten handelt. Aus den Ergebnissen in der  $(x,y)$ -Ebene können die realen Schnittkräfte ermittelt werden. Die Verknüpfungen zwischen den Membranschnittkräften und deren Projektionen auf die horizontale Ebene sind durch die Beziehungen

$$\bar{n}_x = n_x \cos \alpha / \cos \beta, \quad \bar{n}_y = n_y \cos \beta / \cos \alpha, \quad \bar{n}_{xy} = n_{xy} \quad (6.8)$$

gegeben. Definitionsgemäss lässt sich eine Spannungsfunktion  $F(x, y)$  einführen, deren zweite Ableitungen den horizontalen Projektionen der Membranschnittkräfte gleich sind:

$$\begin{aligned} \bar{n}_x &= \partial^2 F / \partial y^2, \\ \bar{n}_y &= \partial^2 F / \partial x^2, \\ \bar{n}_{xy} &= \partial^2 F / \partial x \cdot \partial y. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Daraus lässt sich eine einzige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $F(x, y)$  aufstellen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= q, \\ q &= -\bar{p}_z + \bar{p}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int \bar{p}_x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int \bar{p}_y dy, \end{aligned} \quad (6.10)$$

die das Kraftprojektions-Gleichgewicht jedes Flächenelementes ausdrückt<sup>8</sup>. Für den wichtigen Fall, dass nur normale Lasten auftreten, gilt mit

$$\bar{p}_x = \bar{p}_y = 0 \quad \text{und} \quad -\bar{p}_z = q \quad (6.11)$$

die Membrangleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\bar{p}_z. \quad (6.12)$$

Die Randbedingung für diese Gleichung besteht in einer Vorschrift über den Wert einer Schnittkraft am Rande, also in einer Vorschrift über die zweite Ableitung von  $F(x, y)$ . Wie sie sich im Einzelfall auswirkt, hängt von der Funktion  $z(x, y)$  ab. Strenge Lösungen der Differentialgleichung sind nur für wenige Sonderfälle der Schalenform und der Belastungsverteilung bekannt, so dass daher die Integration zumeist auf numerischem Wege erfolgen muss<sup>9</sup>.

8. Vgl. Billington (1982), Flügge (1957), Girkmann (1963).

9. Kollár (1984) untersucht die notwendigen und hinreichenden Randbedingungen, die zur eindeutigen Lösung der Membrangleichung führen, in Abhängigkeit von der Gauss'schen Krümmung der Fläche.

## Biegetheorie

Bei biegesteifen Flächen – Schalen – darf nicht von einer konstanten Spannungsverteilung über die Querschnittsfläche ausgegangen werden. Für das Erfassen der Beanspruchungen müssen demzufolge die Gleichungen (6.1) bis (6.5) herangezogen werden. Dieses Verhalten der Schale lässt sich auf die drei Ursachen statisch bedingte Biegung, Biegung aus der Unverträglichkeit der Verformungen und starke Krümmungsänderung der Fläche zurückführen. Die statisch bedingte Biegung ist eine Folge von auf der biegesteifen Fläche konzentriert oder linienförmig wirkenden Lasten, von Auflagerbedingungen, die das Einleiten bestimmter Randkräfte, die zur Erhaltung des Membranspannungszustandes notwendig sind, nicht gewährleisten können, oder von Flächenbereichen mit zu grossen Krümmungsradien. Bei Behinderung der dem Membranspannungszustand entsprechenden Verformungen entstehen zusätzliche Biegedeformationen aus den Randstörungen – Biegung aus der Unverträglichkeit der Verformungen –, anhand welcher die Kontinuität hergestellt wird. Eine zu starke Krümmungsänderung der Fläche, welche sich beispielsweise aus unbehinderter Deformation ergeben kann, kann lokalen oder globalen Charakter haben. Falls die Störung rasch abklingt, kann der Membranspannungszustand, der allein das statische Gleichgewicht der Schale sichert, durch die Biegebeanspruchungen überlagert werden. Haben diese Biegebeanspruchungen jedoch einen globalen Charakter, so muss das aus Membrankräften und Biegung bestehende globale Kräftespiel untersucht werden.

Strenge Lösungen für die Erfassung der Biegebeanspruchungen existieren einzig für einige analytisch einfache Flächen wie die Rotations- und Zylinderflächen<sup>10</sup>. Die Ursache dafür besteht primär in dem grossen Aufwand, welcher mit der analytischen Ermittlung der Biegebeanspruchungen allgemein geformter Flächen verbunden ist<sup>11</sup>. Einige bedeutende Vereinfachungen sind jedoch möglich, falls die betrachtete Fläche als “flach” charakterisiert werden kann, das heisst wenn das Verhältnis der Stichhöhe zur Spannweite etwa 1:5 nicht übersteigt. Unter dieser Annahme darf für den Neigungswinkel  $\alpha$  der Fläche

$$\cos\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \alpha \quad (6.13)$$

angenommen werden<sup>12</sup>. Die Bestimmung der Beanspruchungen der biegesteifen Fläche erfolgt entweder direkt anhand der Verschiebungsfunktion oder über die Erstellung des Gleichgewichtes. Für die Lösung über die Verschiebungsfunktionen wird von den drei unbekanntem Verschiebungsfunktionen

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z) \quad \text{und} \quad w = w(x,y,z) \quad (6.14)$$

10. Vgl. Billington (1982), Flügge (1957), Girkmann (1963), Wlassow (1958).

11. Andererseits erübrigt es sich aufgrund der heutzutage zur Verfügung stehenden Methode der Finiten Elemente, eine allgemeine komplexe analytische Theorie aufzustellen.

12. Wlassow (1958). Für eine parabelförmige Leitlinie entspricht die Bedingung  $f/l = 1/5$  einer maximalen Randneigung von  $\alpha = 38^\circ$ .

in kartesischen Koordinaten ausgegangen. Das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an einem Flächenelement und die Substitution aller statischen Grössen durch die obigen Funktionen und deren Ableitungen nach dem Elastizitätsgesetz führt zu einem Gleichungssystem, welches aus drei gekoppelten Differentialgleichungen besteht. Dieses Gleichungssystem weist als unbekannte Grössen neben den Last- und Formfunktionen

$$p = p(x,y,z) \quad \text{und} \quad z = z(x,y,z) \quad (6.15)$$

die unbekanntes Verschiebungsfunktionen auf. Die Lösung der drei Gleichungen erfolgt unter Einbezug der Randbedingungen für die Verschiebungsfunktionen. Aus den Verschiebungen lassen sich dann auch die gesuchten Schnittgrössen ermitteln.

Bei der Lösung über Gleichgewichtserstellung werden die unbekanntes statischen Grössen durch eine Spannungsfunktion  $F(x, y)$  und die senkrecht zur Mittelfläche wirkende Verschiebung durch die Verschiebungsfunktion  $w(x,y,z)$  ausgedrückt. Für

$$p = p_z \quad \text{und} \quad v = 0 \quad (6.16)$$

führt dieser Ansatz zu dem Gleichungspaar

$$L F - \{ E t^3 / [12(1 - \nu^2)] \} \Delta \Delta w + \bar{p}_z = 0 \quad , \quad (6.17)$$

$$\Delta \Delta F + (E t) L w = 0. \quad (6.18)$$

Hierbei gilt für die verwendeten Operatoren

$$L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \quad , \quad (6.19)$$

$$\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} \quad . \quad (6.20)$$

In physikalischer Hinsicht drücken die erste Gleichung die Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Flächennormalen und die zweite Gleichung die Verträglichkeitsbedingung aus. Für schwach gekrümmte Flächen lässt sich also das mechanische Geschehen auf ein System, welches aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen für zwei skalare Funktionen besteht, zurückführen. Die Membranschnittkräfte der Fläche lassen sich über die ermittelte Spannungsfunktion  $F(x, y)$  mit Hilfe der Ausdrücke (6.8) bestimmen. Die aus der Biegesteifigkeit herrührenden Momente und die Querkräfte lassen sich über die Verschiebungsfunktion  $w(x,y,z)$  anhand der folgenden Ausdrücke bestimmen:

$$m_x = - D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (6.21)$$

sowie

$$v_x = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta w \quad \text{und} \quad v_y = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta w. \quad (6.22)$$

Für die Biegesteifigkeit gilt

$$D = E \cdot t^3 / [12(1 - \nu^2)]. \quad (6.23)$$

Die krümmungslose Fläche entspricht dem Spezialfall der Platte beziehungsweise der Scheibe. Für diese wird der Pucher-Operator (6.19) zu null, so dass das Gleichungspaar (6.17) und (6.18) sich auf

$$-[E t^3 / 12(1 - \nu^2)] \Delta \Delta w + \bar{p}_z = 0, \quad (6.24)$$

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (6.25)$$

reduziert. Die Plattengleichung (6.24) gestattet es, die Verzerrungen, Momente und Querkräfte einer Platte über ihre Durchbiegung  $w$  auszudrücken. Der in der Elastizitätstheorie als Airysche Biharmonische Gleichung bezeichnete Ausdruck (6.25) dient der Beschreibung des ebenen Spannungszustandes einer Scheibe. Die im Pucher-Operator enthaltenen Krümmungseigenschaften der Fläche üben einen wesentlichen Einfluss auf die Verteilung der Schnittgrößen der Fläche, das heisst auf den gegenseitigen Einfluss der Kräftesysteme der Platte und der Scheibe, aus. Bei Flächen mit zu vernachlässigter Biegesteifigkeit,

$$D = 0, \quad (6.26)$$

entfallen die zweiten Glieder der Ausdrücke (6.17) und (6.18). Das Gleichungspaar reduziert sich dementsprechend auf

$$LF + \bar{p}_z = 0, \quad (6.27)$$

$$\Delta \Delta F + (E t) L w = 0. \quad (6.28)$$

Die Integration der Membrangleichungen kann durch die Bestimmung der Airyschen Spannungsfunktion aus dem ersten Ausdruck – der Gleichung (6.12) entsprechend – und die konsequente Ermittlung der Verschiebungsfunktion aus dem zweiten Ausdruck schrittweise erfolgen. In vollkommener Analogie zu der Balkentheorie ist die Membran demzufolge ein innerlich statisch bestimmtes System.

## Elastische Beultheorie

Das Beulen von auf Druck beanspruchten imperfektionsfreien, linear elastischen Flächenstrukturen entspricht einer Gleichgewichtsverzweigung des Membranspannungszustandes. Bei apriorischer Wirkung zusätzlicher Biegebeanspruchungen, die sich aus der Belastungsanordnung oder aus geometrischen Imperfektionen ergeben, liegt ein Spannungsproblem nach der Theorie zweiter Ordnung vor, welches allgemein und in Analogie zur Knick- und Kippbiegung als Beulbiegung bezeichnet wird. Bei der ideal elastischen Fläche führen die auf kleine Deformationen begrenzten Differentialrechnungen aus Gleichgewicht und Verträglichkeit zu einem Eigenwertproblem. Der daraus resultierende kleinste Wert entspricht der linearen kritischen Last der Fläche. Diese Beullast wurde erstmals für den unter achsialer Belastung stehenden imperfektionsfreien, linear elastischen elastischen Zylinder bestimmt<sup>13</sup>. Hierbei gilt der Ausdruck

$$P_{cr}^{lin} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot E \cdot \frac{h^2}{R}. \quad (6.29)$$

Der analoge Ausdruck für den unter Aussendruck stehenden Kreiszyylinder lautet<sup>14</sup>

$$P_{cr}^{lin} = \frac{1}{\sqrt{4(1-\nu^2)}} \cdot E \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^3. \quad (6.30)$$

Für die unter Aussendruck stehende ideale Kugel ist die lineare kritische Last durch die folgende Beziehung bestimmt<sup>15</sup>:

$$P_{cr}^{lin} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot E \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (6.31)$$

Allgemein lässt sich die linear kritische Beullast über den Ausdruck

$$P_{cr}^{lin} \sim E \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^n \quad (6.32)$$

erfassen<sup>16</sup>. Diese Proportionalitätsbeziehung lässt erkennen, dass die linear kritische Last direkt von dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Verhältnis der Flächenstärke  $h$  zum Krümmungsradius  $R$  abhängt. Insbesondere verdeutlicht dieser Ausdruck, welchen Einfluss die einfache und die doppelte Krümmung auf die Beullast ausüben. Im Extremfall Zylinder/Kugel unterscheiden sich die Beullasten um eine ganze Potenz von  $(h/R)$ .

13. Die kritische Beullast des unter achsialer Beanspruchung stehenden Zylinders wurde 1908 durch Lorenz und 1910 durch Timoshenko hergeleitet. Lorenz und Southwell haben 1911 und 1914 die Lösungen für die antimetrische Beulfigur verallgemeinert. Vgl. Lorenz (1908) und (1911) sowie Timoshenko (1910).

14. Herleitung durch Southwell und von Mises. Vgl. Mises (1914) und Southwell (1913/15).

15. Die symmetrische kritische Beullast wurde von Zoelly 1915 hergeleitet. Wie 1932 van der Neut beweisen konnte, ist die symmetrische der antimetrischen Beullast gleich. Vgl. Neut (1932), Zoelly (1915).

16. Isler schlägt allgemein vor, für unter Manteldruck stehende Schalen für den Exponenten  $n$  zwischen 2 und 3 liegende Werte anzunehmen:  $2 \leq n \leq 3$ . Vgl. Isler (1982).

Bei der unter Aussendruck stehenden Kugelfläche kann neben dem erwähnten Verzweigungsproblem ebenfalls ein Divergenzproblem vorliegen. Divergenzprobleme sind durch das Durchschlagen der Fläche unter Einfluss einer bestimmten Last in eine neue, ebenfalls stabile Gleichgewichtslage gekennzeichnet<sup>17</sup>. Die Art der Instabilitäterscheinung einer sphärischen Fläche – Verzweigung oder Durchschlag – ist von den geometrischen Verhältnissen und vom Belastungsbild abhängig<sup>18</sup>.

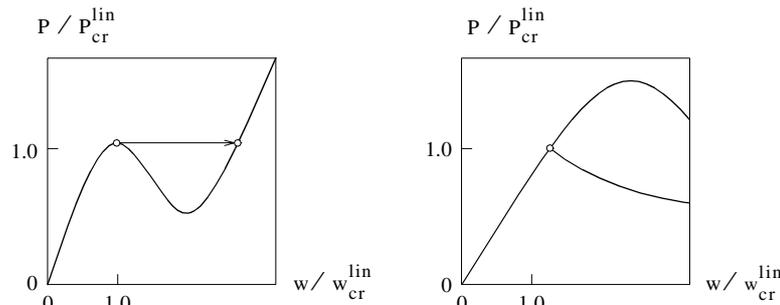


Bild 6.3: Durchschlagungs- und Verzweigungsproblem.

Bei den elastischen Stabtragwerken ist im allgemeinen eine gute Übereinstimmung zwischen den mit der linear elastischen Theorie erhaltenen theoretischen Knicklasten und den experimentellen Ergebnissen festzustellen. Bei der Platte liefert die linear elastische Beullast sogar konservative Werte, was auf die Kräfteumlagerung, welche auf der Aktivierung der Dehnsteifigkeit beruht, zurückzuführen ist. Bei den Schalen ist hingegen im allgemeinen eine Abnahme der Traglast im überkritischen Bereich zu beobachten. Erste experimentelle Untersuchungen wiesen darauf hin, dass die Traglast der zentrisch gedrückten Kreiszyinderschale um 60% der ideal elastischen Beullast geringer ausfallen kann<sup>19</sup>. Diese abfallende Tendenz wurde durch alle weiteren experimentellen Tätigkeiten bestätigt. Die bis 1960 durchgeführten Versuche zeigten, dass die tatsächliche Traglast der zentrisch gedrückten Kreiszyinderschale beim 0.11- bis 0.83-fachen der ideal linearen kritischen Last liegen kann<sup>20</sup>. Diese Ergebnisse lassen erkennen, dass das Verständnis und die korrekte Erfassung des Tragverhaltens gekrümmter Flächentragwerke im überkritischen Bereich unentbehrlich ist.

In analytischer Hinsicht lässt sich das überkritische Verhalten einiger gekrümmter Flächen durch die Einführung nichtlinearer Glieder in die Differentialgleichung erfassen<sup>21</sup>. Anhand dieses Ansatzes lässt sich die bedeutende Traglastabnahme, welche nach dem Erreichen des Verzweigungspunktes einsetzt, mit analytischen Mitteln nachvollziehen<sup>22</sup>. Auf der Basis der nichtlinearen Theorie lässt sich zudem der bedeutende Einfluss geome-

17. Vgl. Huang (1964). Das Umschlagen einer Fläche in eine neue Gleichgewichtslage weist primär einen theoretischen Wert auf. Im praktischen Fall impliziert die damit verbundene Querschnittsrotation meist das Versagen der Tragstruktur.

18. Vgl. Popov und Medwadowski (1981).

19. Robertson (1928).

20. Vgl. Seide (1981).

21. v. Kármán und Tsien haben erstmals die Gleichungen hergeleitet, die das Erfassen des überkritischen Verhaltens der Zylinderschale unter achsialem Druck und der Kugelschale unter Aussendruck ermöglichen. Vgl. v. Kármán und Tsien (1939) und (1941).

22. Physikalisch gesehen bildet sich im Verzweigungsfall ein Beulmuster, welches im Vergleich zum Grundradius aus grösseren und kleineren Krümmungsradien besteht. Die Traglast dieses Beulmusters ist geringer als diejenige des planmässigen unterkritischen Zustandes. Vgl. Petersen (1982).

trischer Imperfektionen auf die Beullast berücksichtigen. Für den Fall der Zylinderschale lässt sich dieser Einfluss aus dem nachstehenden Bild entnehmen.

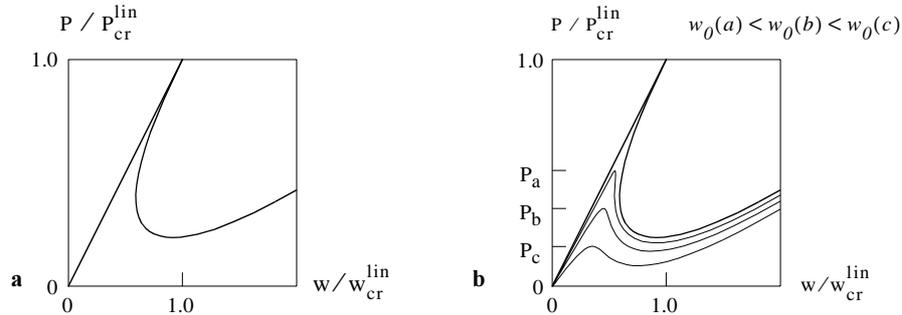


Bild 6.4: Überkritisches Verhalten der zylindrischen Fläche.

Grundsätzlich ist die Imperfektionssensibilität einer Fläche durch das überkritische Verhalten, das heisst durch die Last-Deformationsfunktion nach Erreichen des Verzweigungspunktes, definiert<sup>23</sup>. In qualitativer Hinsicht und der Koiterschen Theorie zufolge lassen sich hierbei drei grundlegende überkritische Verhaltensweisen unterscheiden<sup>24</sup>. In die erste Kategorie entfallen solche Flächen, die – wie die Platten – durch eine symmetrische überkritische Laststeigerung gekennzeichnet sind (Bild 6.5a). Diese Flächen weisen demgemäss keine besondere Empfindlichkeit hinsichtlich Imperfektionen auf. Die meisten Schalen sind hingegen durch eine Traglastabnahme im überkritischen Bereich geprägt und sind dadurch extrem imperfektionsempfindlich<sup>25</sup>. Solche gekrümmten Flächentragwerke können ein symmetrisches (Bild 6.5b) oder ein asymmetrisches (Bild 6.5c) postkritisches Last-Deformationsverhalten aufweisen.

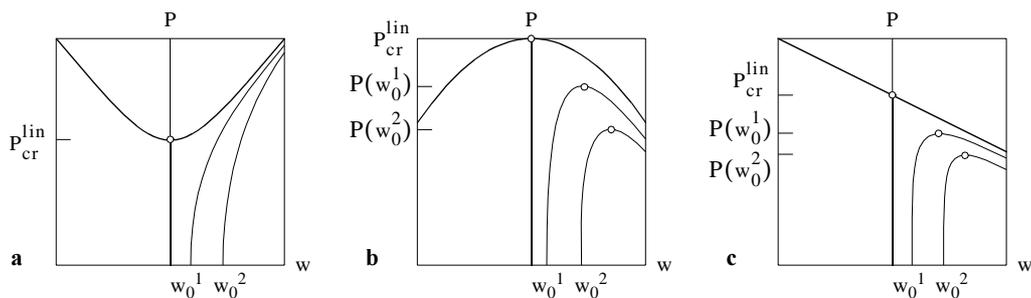


Bild 6.5: Charakteristische Last-Deformationsdiagramme nach Koiter.

23. Vgl. Gioncu (1985) und Kollár und Dulácska (1984).

24. Mit der Koiterschen Theorie konnten die anhand der zylindrischen Fläche und anhand weiterer partikulärer Fälle gesammelten Erkenntnisse verallgemeinert werden. Koiter stellte seine linearisierte Theorie 1945 auf. Allerdings blieb seine in Holländisch verfasste Dissertation bis zur Übersetzung ins Englische 1963 weitgehend unbekannt. Vgl. Koiter (1970).

25. Neben den geometrischen Nichtlinearitäten sind eventuelle materialbedingte Nichtlinearitäten zu berücksichtigen. Für die qualitative Beurteilung von Instabilitätserscheinungen ist jedoch einzig die Bestimmung des überkritischen Verhaltens von entscheidender Bedeutung. Im allgemeinen verursacht die Inelastizität "nur" eine zusätzliche Abnahme der Traglast. Vgl. Anhang A 2.

## Die Formfindungsaufgabe

Bedingt durch die historische Entwicklung und aus einer Gewohnheit, welche ihre Wurzeln in einer psychologischen Trägheit hat, wird unserem Anschauungsraum ein geometrischer Formenkanon apriorisch vorgeschrieben, welcher von der euklidischen Geometrie – dem logischen Monolith, der mit dem Bedürfnis entstand, einfache Regeln für Vermessungsaufgaben herzuleiten – und der kartesischen Orthogonalität ausgeht. In analytischer Hinsicht lassen sich solche Formen durch eine analytische Funktion

$$z = f(x, y) \quad (6.33)$$

beschreiben und untersuchen. Im allgemeinen Fall monopolisiert dieses invariante Konzept die räumliche Ordnungsfunktion unseres Anschauungsapparates vor jeder Wahrnehmung oder Vorstellung. Demzufolge besteht der klassische Ansatz bei der mechanischen Untersuchung einer Fläche in der Bestimmung des Spannungszustandes einer unter bekanntem Lasteinfluss stehenden analytisch beschreibbaren Fläche. Zu diesem Zweck wurden die dargelegten analytischen Ausdrücke hergeleitet, die Geometrie, Belastung und Spannungszustand durch eindeutige Verknüpfungsvorschriften assoziieren. Bei der eigentlich naheliegenden Umkehrung dieses Ansatzes kann die Geometrie über die Festlegung von Spannungszuständen und Belastungsanordnung anhand der gleichen Ausdrücke bestimmt werden. Aus statischen Überlegungen, das heisst um den Querschnitt einer betrachteten Fläche homogen zu beanspruchen, wird in diesem Zusammenhang die Membrangleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\bar{p} \quad (6.12)$$

herangezogen. In theoretischer Hinsicht beinhaltet die Membrangleichung den Gedanken, dass jeder Kombination aus einer beliebigen Spannungsverteilung und einer beliebigen Belastungsanordnung eine Membrangeometrie entspricht. Bezogen auf den analytisch beschreibbaren Formenkanon stellt die Erkenntnis, dass der Anzahl möglicher Kombinationen zufolge eine unendliche Anzahl Membranformen existieren, eine Negation und eine Rebellion gegen das rigide Etablierte dar. Weil der praktischen analytischen Tätigkeit die gleichen Schranken wie der geometrischen Formenwelt gesetzt sind, reduziert sich die Formbestimmung von Membranen anhand des Ausdruckes (6.12) auf nur wenige partikuläre Fälle, wie beispielsweise die Kuppel gleicher Festigkeit oder der Tropfenbehälter. Aus diesem Grund muss die Formfindung von Membranen die Prädisposition, die Grenzen der mathematischen Analytik zu überspringen, beinhalten. Grundsätzlich besteht die Lösung der Formfindungsaufgabe in der Auffindung sogenannter freier Formen, die die anhand der Membrangleichung dargelegten logischen Zusammenhänge erfüllen, ohne jedoch dabei dem Zwang, einer analytischen Funktion genügen zu müssen, unterliegen. Neben der inhärenten praktischen Zweckmässigkeit stellen die Entwicklung experimenteller und insbesondere mechanisch-mathematischer Verfahren, welche die Erfassung der dargelegten Prinzipien ohne den Zuzug analytischer Mittel ermöglichen sollen, und die Abbildung über die zur Verfügung stehende Computertechnik eine der reizvollsten intellektuellen Herausforderungen im Bereich des konstruktiven Ingenieurwesens dar.

## 6.2 Experimentelle Formfindungsmethoden

### Experimentelle Untersuchung mechanischer Zusammenhänge

In ihrer Gesamtheit betrachtet lässt sich die *scientia experimentalis*, wie zuerst Roger Bacon die Naturforschung bezeichnet hatte, nicht von der mathematischen und philosophischen Logik trennen. Denn nur die theoretischen Kenntnisse der Naturgesetze erlauben es, vom sinnlichen Eindruck auf den zugrunde liegenden Vorgang zu schliessen. Die Wahrnehmung natürlicher Ereignisse ist somit lediglich in Verbindung mit der produktiv-schöpferischen Funktion des menschlichen Bewusstseins erfassbar. In diesem Sinne und anknüpfend an Karl Poppers Philosophie ist die Perzeption ein durch die Theorie gesteuertes Ereignis – nicht umgekehrt – und somit eine Hypothese<sup>26</sup>.

Die Quintessenz jedes Experimentes besteht grundsätzlich in der Verbindung bildlicher Vorstellungen und begrifflicher Erkenntnisse sowie in der praktischen Umsetzung von Ideen, die sich ihrerseits auf bereits vorhandenes Wissen stützen. Indem mittels der physikalischen Modellierung bestimmte Erscheinungen unter bestimmten Bedingungen durch Analogien bewusst erzeugt werden, können die zwischen verschiedenen Theorien bestehenden Zusammenhänge hergestellt werden. Die Synthesis der somit neu gewonnenen Erkenntnisse erlaubt das Erkennen neuer Verfahren und die Gestaltung neuer Systemstrukturen. Mit der experimentellen Physik werden allgemeingültige Gesetzmässigkeiten aus speziellen Phänomenen abgeleitet. Im Bereich des Konstruktionswesens werden solche Gesetzmässigkeiten für die Lösung konkreter Probleme herangezogen.

Mit der experimentellen Formfindung von Flächentragwerken werden die zwischen der Geometrie und der Belastung bestehenden Verknüpfungen anhand eines treuen Modelles untersucht. Diese Analogie ist absolut zulässig, da die formbildende Spannungsverteilung in einer gegebenen Fläche – oder, im weitesten Sinn, in einer gegebenen Struktur – eine Funktion der geometrischen Verhältnisse sowie der Beanspruchungsart, nicht jedoch des Massstabes ist. Allgemein darf angenommen werden, dass das mechanische Verhalten der Modellmembran in Analogie zu den Differentialgleichungen (6.27) und (6.28) durch das Gleichungspaar

$$L'F' + \bar{p}_z' = 0, \quad \Delta\Delta'F' + (E't')L'w' = 0 \quad (6.34)$$

eindeutig beschrieben ist. Zur Herstellung der zwischen Modell und Prototyp bestehenden Zusammenhänge wird ein geometrisches und physikalisches Verzerrungsmass  $\lambda$  herangezogen. In diesem Zusammenhang stellen die Ausdrücke

$$F' = \lambda_F \cdot F, \quad x' = \lambda_l \cdot x, \quad y' = \lambda_l \cdot y, \quad z' = \lambda_l \cdot z, \quad p' = \lambda_p \cdot p, \\ w' = \lambda_w \cdot w, \quad E' = \lambda_E \cdot E \quad \text{und} \quad t' = \lambda_t \cdot t \quad (6.35)$$

---

26. Vgl. Popper (1984).

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer massstäblichen Analogie dar<sup>27</sup>. Somit lässt sich das obige Gleichungspaar in die Form

$$\frac{\lambda_F}{\lambda_l^3} LF + \lambda_p \bar{p}_z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_F}{\lambda_l^4} \Delta\Delta F + \lambda_E \lambda_t \frac{\lambda_w}{\lambda_l^3} (E t) L w = 0 \quad (6.36)$$

umschreiben. Demzufolge darf die Konversion der am Modell erhaltenen Aussagen dann erfolgen, wenn die Bedingungen

$$\lambda_F / (\lambda_l^3 \lambda_p) = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_F / (\lambda_l \lambda_E \lambda_t \lambda_w) = 1 \quad (6.37)$$

eingehalten werden. Falls das Verzerrungsmass  $\lambda_w$  der Verschiebungsfunktion und die beiden geometrischen Verzerrungsmasse  $\lambda_l$  und  $\lambda_t$  zusammenfallen,

$$\lambda_l = \lambda_t = \lambda_w, \quad (6.38)$$

reduzieren sich die beiden Ausdrücke (6.37) auf die Identität

$$\lambda_p = \lambda_E. \quad (6.39)$$

Unter Verwendung der Verzerrungsbeziehungen (6.35) ergibt sich diese Gleichheit zu

$$p' / p = E' / E. \quad (6.40)$$

Folglich gilt, dass die Verschiebungen zweier geometrisch vollständig ähnlicher Membrane ( $\lambda_l = \lambda_t$ ) durch das gleiche geometrische Verzerrungsmass miteinander verknüpft sind, falls die Flächenbelastungen und die Elastizitätsmodule beider Körper im gleichen Verhältnis zueinander stehen<sup>28</sup>. Wie sich der Bedingung (6.37) entnehmen lässt, stellt die optimale Magnitude einer nach rein statischen Kriterien entworfenen Tragstruktur mit vorgegebener Form – konstante Fallbeschleunigung vorausgesetzt – eine Funktion des Materials, aus welchem sie zusammengesetzt ist, und des geometrischen Massstabes dar. Das eigentliche Skalenphänomen lässt sich darauf reduzieren, dass einige physikalische Kräfte flächenproportional, andere aber – insbesondere die Gravitationskraft – massenproportional wirken. Wie bereits Archimedes anmerkte, nehmen die Oberflächen und die Volumina ähnlicher Figuren in der zweiten und dritten Potenz der linearen Dimension zu. Beim aufgehängten Volumen nimmt bei jeder Vergrößerung des Massstabs die Krafteinwirkung in der Schnur mit der dritten, der Flächeninhalt jedoch nur in der zweiten Potenz zu. Demzufolge nehmen die massgebenden Spannungen linear zu. Die hier zugrunde liegenden Prinzipien, erstmals von Galilei im 17. Jahrhundert formuliert, fasst Goethe im anschaulichen Bild *“Es ist dafür gesorgt, dass die Bäume nicht in den Himmel wachsen”* zusammen.

27. Vgl. Hossdorf (1972).

28. Des öfteren sind Abweichungen zwischen den durch Ähnlichkeitsgesetze aus den physikalischen Modellen abgeleiteten Erkenntnissen und den Beobachtungen am Prototyp feststellbar. Die Ursache für die Divergenzen, die sich aus solchen sogenannten Massstabeffekten ergeben, rührt daher, dass die Ähnlichkeitsgesetze, anhand welcher das Modell und der Prototyp miteinander verknüpft werden, starke und unvollständige Vereinfachungen der physikalischen Prozesse der Natur darstellen.

## Geschichtliche Entwicklung der Formfindung

Der Versuch, empirisch gesammelte Konstruktionsregeln anhand geometrischer Verhältnisse zu fassen, geht auf die Ursprünge der abendländischen Zivilisation zurück. Die Entwicklung dieser empirischen Bautechnik führte bis zu den gotischen Wölb- und Strebenkonstruktionen und kulminierte in der Renaissance mit den weit verbreiteten Bemessungsregeln von Leon Battista Alberti, Carlo Fontana und François Blondel <sup>29</sup>. Mit der Entstehung der systematischen Naturbeobachtung und der Mechanik durch Leonardo da Vinci und Galileo Galilei wurden die exakten Wissenschaften für die Lösung praktischer Bauaufgaben durch die Aufstellung der zwischen Geometrie, Werkstoff und Lastabtragung bestehenden Zusammenhänge zunehmend herangezogen.

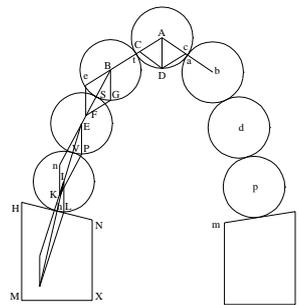


Bild 6.6: Zur Theorie der Wölbungsstützlinie nach Poleni

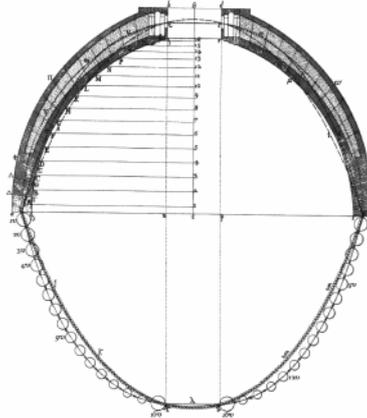
Gegen Ende des 17. Jahrhunderts forderte Philippe de la Hire erstmals, dass die Formgebung eines Gewölbes nicht nach geometrischen, sondern nach physikalischen Prinzipien erfolgen sollte. Zusammen mit Antoine Parent stellte de la Hire ein mechanisches Modell auf, nach welchem die Steine eines Gewölbes widerstandslos *comme des corps de surface infiniment polie* entlang den Fugen gegeneinander gleiten können. Nach diesem Modell müssen die Fugen derart angeordnet werden, dass die resultierende Kraft aus Eigengewicht und Gewölbeschub stets senkrecht zu ihnen wirkt <sup>30</sup>. Wie David Gregory kurz darauf explizit darlegen konnte, entspricht diese theoretische Bogenachse der nur wenige Jahre zuvor analytisch hergeleiteten Kettenlinie <sup>31</sup>. Gegen Mitte des 18. Jahrhunderts konnte Giovanni Poleni das Prinzip der Umkehrung der Kettenlinie anhand eines aus Kugeln zusammengesetzten Modells veranschaulichen. Für die mechanische Erfassung des sich im labilen Gleichgewicht befindenen strukturellen Systems hat Poleni bewusst den nach Isaac Newton im Hinblick auf die Dynamik formulierten Satz vom Kräfteparallelogramm auf die Verhältnisse der Statik übertragen.

29. Leon Battista Alberti empfiehlt in seinem Werk *De re aedificatoria* (Zehn Bücher über die Baukunst), Florenz, 1485, einige geometrische Normen – Verhältnisse der Pfeilerstärke zur Brückenhöhe und Spannweite – für die Bemessung von steinernen Brücken. Carlo Fontana gibt in seinem *Il Tempio Vaticano e sua origine*, Rom, 1694, ähnliche geometrische Regeln – Verhältniss der Tambourstärke zum lichten Durchmesser sowie zur Kämpferstärke – für die Formgebung und Bemessung einer gemauerten Kuppel. Die Blondelsche Regel für die Bemessung der Gewölbewiderlager wird noch von Viollet-Le-Duc im 19. Jahrhundert zitiert. Nicolas François Blondel, *Résolution des quatres principaux problèmes d'architecture*, Paris, 1673. Vgl. Benvenuto (1990) und Straub (1992).

30. Philippe de la Hire, *Traité de Mécanique*, 1695. Ibid.

31. David Gregory, *Properties of Catenaria*, 1697. Ibid. Vgl. Kap. 3.2.

Bei den Untersuchungen, die er im Auftrag von Papst Benedikt XIV. im Hinblick auf die Aufklärung der Schäden und Risse, die an der Peterskuppel in Rom aufgetreten waren, durchführte, bestimmte Poleni die Form, welche eine mit ungleichen, den einzelnen Abschnitten des Gewölbes proportionalen Gewichten belastete Kette annimmt. Hieraus konnte er die Schlussfolgerung ziehen, dass die Standfestigkeit eines Bogens oder Gewölbes dann gewährleistet ist, wenn die Drucklinie stets innerhalb des Mauerwerksquerschnittes verläuft<sup>32</sup>.

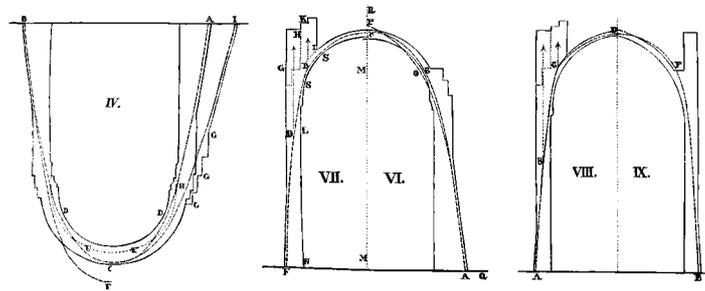


*Bild 6.7: Polenis Hängeversuch zur Überprüfung des Wölbprofils.*

Die theoretischen Erkenntnisse, zu welchen Poleni gelangt war, wurden erst in der Romantik unter Heinrich Hübsch in die Praxis umgesetzt. Hübsch bestimmte die Querschnittsform seiner Bauwerke, indem er an ein senkrecht stehendes Zeichenbrett auf dem Kopf stehende Schnittzeichnungen anheftete, über die er Schnüre hing, die in regelmäßigen Abständen mit kleinen Schlingen versehen waren. In die Schlingen wurden Gewichte gehängt, die dem Gewicht des jeweiligen Wölbungsabschnittes entsprachen. Anhand dieser Methode konnte Hübsch ein aus Wölbung, Pfeiler und Widerlager bestehendes Gebäudeprofil nach Polenis Prinzip der Umkehrung der Kettenlinie iterativ bestimmen<sup>33</sup>. Anhand seiner experimentellen Tätigkeit erkannte Hübsch beispielsweise, dass gemauerte Auflasten am Wölbungsfuss die Stützlinie in die Senkrechte umlenken, wodurch sich Konstruktionen entwerfen lassen, welche ein schlankeres Profil aufweisen<sup>34</sup>.

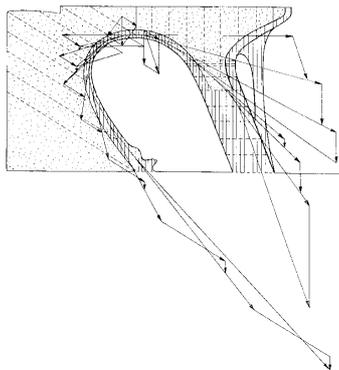
32. Giovanni Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano e de' danni di essa, e de' ristoramenti loro*, Padova, 1748. Ibid.

33. *Ich bediene mich dieser Methode (deren meines Wissens noch nirgends anderwärts erwähnt ist) mit grossem Vorteil bei meinen Entwürfen zu gewölbten Gebäuden. Ich finde hierin ein sicheres Mittel, um in ganz kurzer Zeit das Profil eines Gebäudes so zu gestalten, dass mit dem Minimum von Material und mit möglichster Schonung der Räumlichkeit die Aufgabe gelöst werden kann.* Heinrich Hübsch, in Graefe (1983). Die analytische Ermittlung der Kettenlinie hat Hübsch für die Baupraxis abgelehnt, weil diese zu kompliziert und zeitraubend sei. Mit Hilfe der experimentellen Formfindung entwarf Hübsch mehrere Kirchen, nämlich die Bischofskathedrale in Rottenburg, die Kirche in Bulach bei Karlsruhe, die katholische sowie die evangelische Kirche in Karlsruhe und die Kirche in Bietigheim. Für den ersten Bau, die Kirche in Bulach, errichtete Hübsch einen Versuchsbau im Masstab 1:2 und nahm eine Reihe von Belastungsversuchen vor. Heinrich Hübsch veröffentlichte die von ihm verwendete Methode 1838 unter dem Titel *„Methode zur Bestimmung der erforderlichen Bogen- und Widerlags-Stärken bei jeder Gattung und Zusammenstellung von Gewölben mittels eines graphischen Verfahrens“*.



*Bild 6.8: Untersuchungen verschiedener Wölbformen nach Hübsch.*

Im Gegensatz zu Hübsch, der die statisch günstige Tragform zugunsten einer zeitgemäßen architektonischen Sprache kaschierte, verwendete Antonio Gaudí das Prinzip der Umkehrung als Grundlage für die architektonische Gestaltung. Bei Gaudí wurden die am räumlichen Hängemodell erzeugten Formen bewusst zur Ausführung gebracht, so dass die geneigten Aussenwände und die schräggestellten verzweigten Stützen zu selbstverständlichen Elementen seiner Bauten wurden. Auch wenn Gaudí für damalige Verhältnisse über solide mathematische Kenntnisse verfügte, bevorzugte er für die Formbestimmung und die damit eng verknüpfte rechnerische Erfassung seiner Bauten die graphischen und die experimentellen Methoden. Dieses Streben nach Visualisierung des Tragverhaltens einer Struktur und der direkten Vermessung am Modell stellt eine Erbschaft des durch Viollet-Le-Duc verkörperten Rationalismus des 19. Jahrhunderts dar und wurde zu einem wesentlichen Erbe späterer Tragwerksingenieure.



*Bild 6.9: Drucklinie im Stützgewölbe des Park Güell nach Gaudí.*

Für das Projekt der nur teilweise ausgeführten Kirche der Colonia Güell konstruierte Gaudí ein Hängemodell im Massstab 1:10<sup>35</sup>. Das Modell bestand im wesentlichen aus einem textilen netzartigen Gebilde, das mit Ballastsäckchen belastet wurde<sup>36</sup>. Die Gewichte wurden den Gebäudeteilen entsprechend in minuziöser Weise im Massstab

34. Viollet-Le-Duc weist darauf hin, dass dieses Prinzip bereits beim Bau gotischer Kathedralen angewendet wurde. Vgl. Viollet-Le-Duc (1984). Im modernen Bauwesen können die durch zusätzliche Lasten erzeugten Umlenkungskräfte durch Vorspannkkräfte elegant ersetzt werden. Diese Technik wurde von Heinz Isler vielfach angewendet.

1:10 000 bestimmt. Die Versuchsdurchführung und die Messungen erfolgten nach einer rigorosen Methodik. Nebst der Geometrie wurden auch die Hauptkräfte im Sinne der Modellstatik mit Hilfe von Dehnungsmessern bestimmt<sup>37</sup>. Durch das Aufbringen von zusätzlichen Auflasten oder durch Änderungen der Geometrie passte Gaudí die gebildeten Formen seinen Vorstellungen an. Zur Darstellung und Gestaltung der Innen- und Aussenseiten der Kirche Güell wurden die sukzessiven Etappen im Formfindungsprozess am Hängemodell photographisch aufgenommen und mit farbiger Gouache überzeichnet.

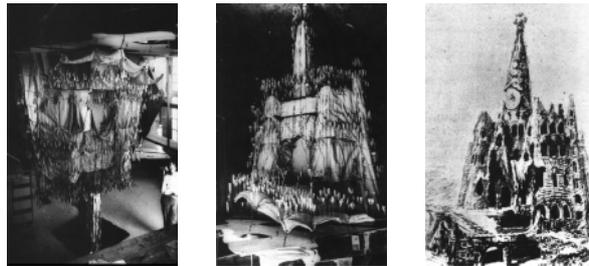


Bild 6.10: Das Hängemodell und die darauf erstellte Skizze.

In Gaudís Werk überwiegen die aus Stein und Backstein bestehenden Bauten, welche im wesentlichen einer formbildenden Druckbeanspruchung ausgesetzt sind. Einige kleinere ausgeführte Details in Gusseisen wie die hängende Treppe des Palacio Güells, insbesondere aber sein Vorschlag für einen zentralen Bahnhof für Barcelona, dessen Überdachung durch eine weitgespannte Zugkonstruktion erfolgen sollte, deuten darauf hin, dass Gaudí die konstruktiven, statischen und materialtechnologischen Zusammenhänge im weitesten Sinn beherrschte und seiner Zeit voraus war<sup>38</sup>. *Komponieren, so Gaudí, heisst vereinigen, Beziehungen zwischen Teilen herstellen und nicht unterteilen. Das Ziel ist die Bildung eines harmonischen Ganzen auf der Basis verschiedener Elemente und mit dem Kriterium einer umfassenden Einheit*<sup>39</sup>.

35. Zwischen 1908 und 1914 kam ein Teil des Entwurfs der Kirche der Colonia Güell zur Ausführung, nämlich das Untergeschoss der Kirche mit der Krypta und dem Portikus, über welchen eine Treppe zum Untergeschoss führt. Der Bau wurde aufgrund der durch den Krieg bedingten prekären wirtschaftlichen Lage im neutralen Spanien unterbrochen und nicht fortgesetzt. Die Krypta des ausgeführten Baus wurde 1915 als Kirche eröffnet.

36. Die Möglichkeit, das Prinzip der Umkehrung räumlich anzuwenden, wurde bereits im 18. Jahrhundert von Johann Silberschlag erkannt, der vorschlug, bei dem Entwurf von Kirchengewölben räumliche Hängemodelle aus Netzen zu verwenden. Johann E. Silberschlag, *Ausführliche Abhandlung der Hydrotechnik oder des Wasserbaus*, Leipzig, 1772. Vgl. Graefe (1983).

37. Auf Antrag des Kunsthauses Zürich wurde 1982 am Institut für Leichte Flächentragwerke in Stuttgart eine Rekonstruktion von Gaudís Hängemodell im Masstab 1:15 gebaut. Das Modell wurde 1983 im Rahmen der Zürcher Ausstellung "Der Hang zum Gesamtkunstwerk" dem Publikum gezeigt. Vgl. Tomlow (1989).

38. Gaudí hatte vorgeschlagen, die Decken durch hängende Seile aus Eisen tragen zu lassen und somit eine Umhüllende mit über 200 m Spannweiten zu konstruieren. *Haciendo trabajar el hierro a extensión se obtendría una especie de "envelat" monstruoso, con distancias de 200 m entre soportes [...] Respecto a las dificultades técnicas de las cubiertas sostenidas con tirantes funiculares, haría los ensayos previos pertinentes y todo se resolvería.* Gaudí nach Isidre Puig i Boada, in Tarragó (1977). Vgl. auch Collins (1970) und Flores (1982).

39. Tomlow (1987).

## Formfindung von Bogenmauern mit der Membrananalogie

Bis zum Ende des letzten Jahrhunderts wurde angenommen, dass bei den Bogenmauern die horizontalen Wasserdrücke von den einzelnen Gewölberingen aufgenommen werden. Aus diesem Grund war die Form solcher Mauern durch die Geometrie des Kreises bestimmt. Die ersten Bogenmauern weisen eine zylindrische Innen- und eine kegelförmige Aussenseite auf – das Ergebnis der Rotation eines dreieckförmigen Querschnittes um eine feste Achse<sup>40</sup>. Mit der Entstehung der wissenschaftlichen Technik entstanden die ersten Ansätze wie die “Trial Load Method of Analysis” für die analytische Erfassung des räumlichen Tragverhaltens dieser Strukturen<sup>41</sup>.

Der “Constant-Angle Arch Dam” entstand zu einer Zeit, in welcher die Baukosten einer solchen Struktur primär vom Materialaufwand abhängig waren. Diese Bauwerke weisen die charakteristische Eigenschaft auf, dass sie aus Kreissegmenten mit variablen Radien und Zentren, aber gleichen Öffnungswinkeln zusammengesetzt sind. Da der Kreisradius indirekt proportional zu der hydrostatischen Belastung ist, führen gleiche Spannungsintensitäten zu konstanten Wandstärken, falls für den Krümmungsradius variable Werte eingesetzt werden<sup>42</sup>. Lange Zeit wurde den in vertikaler Richtung auftretenden Zugspannungen aus Eigengewicht keine Bedeutung beigemessen. Aus diesem Grund war die Profilform der Bogenmauer durch geringe Krümmungen gekennzeichnet. Durch experimentelle Tätigkeit und mit dem Fortschritt der analytischen Mittel liess sich jedoch zeigen, dass diese auftretenden Spannungen durchaus die Zugfestigkeit von Beton übertreffen können<sup>43</sup>. Demzufolge wurden Bogenmauern mit wahrer doppelter Krümmung entwickelt, bei welchen die dreidimensionale Lastabtragung erstmals bewusst ausgenutzt wurde<sup>44</sup>. Im Gegensatz zu älteren Bogenmauern bestehen die Querschnitte dieser moderneren Tragwerke aus mehreren Kreissegmenten mit verschiedenen Radien.

Diese schrittweise Annäherung an die statisch günstigste Form kulminierte in der Theorie der Membrananalogie und der damit verbundenen experimentellen Tätigkeit. Die primäre Schwierigkeit bei der Projektierung einer Bogenmauer besteht darin, dass die der Talquerschnittsform angepasste Fläche die Übertragung der Lasten aus hydrostati-

---

40. Es erscheint wahrscheinlich, dass schon die Römer das Bogenprinzip für Staumauern verwendet haben. Unter den Byzantinern kam jedenfalls die Bogenmauer zur Anwendung. Vgl. Thomas (1972).

41. Ähnlich wie die Streifenmethode setzt die “Trial Load Method” voraus, dass die Tragwirkung des räumlichen Tragwerks als eine Interaktion aus Bogen- und Konsolenwirkung erfasst werden kann. Bei der Erstellung des “Bear Valley Dam” in den Vereinigten Staaten 1884 war man sich bereits bewusst, dass die Bogenmauer aufgrund der verhinderten Achsialverformung der Ringe als eine *combined action of arches and cantilevers* tragen muss. Ibid. Vereinzelt wurde versucht, das räumliche Tragverhalten durch konstruktive Lösungen auf das Zweidimensionale zu reduzieren. Bei der 1921 erbauten Mauer des Rio Turia in Spanien wurden dafür Gleitfugen zwischen den einzelnen auf Rollen gelagerten Ringen angebracht. Die Ergebnisse konnten den Erwartungen nicht genügen. Vgl. Fialho (1955).

42. Mit  $\sigma = p \cdot R / t$  gilt für  $\sigma \cdot t = konst.$  und  $p = \gamma \cdot h$  der Ausdruck  $R \sim 1 / h$ .

43. Diese theoretische Erkenntnis wurde durch Schäden in der Praxis, insbesondere beim in den Vereinigten Staaten vom “Committee on Arch Dam Investigation” 1927 errichteten “Stevenson Creek Dam” bestätigt. Ibid.

44. Beispiele hierfür sind der 1928 in den Vereinigten Staaten erbaute Coolidge Dam sowie die Staumauern von Marege in Frankreich und Osiglietta in Italien aus dem Jahr 1937 und 1939.

schem Druck und Eigengewicht über Membrankräfte ermöglichen sollte. Das zugrunde liegende Problem lässt sich vorteilhaft anhand einer biegeweichen Membran mit der Membranalogie experimentell bestimmen. Zu diesem Zweck wird eine Gummimembran dem Umriss des Tales entsprechend eingespannt. Durch die aufgebrachte Belastung – dem hydrostatischen Druck und die der Gravitation entgegengesetzt wirkende Eigenlast – verformt sich die Membran und nimmt die dem Kräftegleichgewicht zwischen der Belastung und den Membrankräften äquivalente Form an<sup>45</sup>. Nach dem Prinzip der Umkehrung entspricht diese reine Zugmembran der ideal druckbeanspruchten Membranschale. Voraussetzung für diese Analogie ist allerdings, dass die deformierte Zugmembran keine Falten aufweist und die Auflagerung der Schale keine Biegebeanspruchung aus Kompatibilität erzeugt<sup>46</sup>.

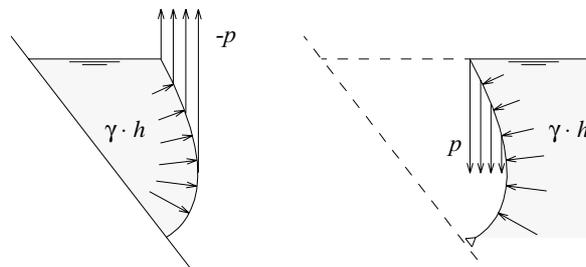


Bild 6.11: Zum Umkehrungsprinzip einer Bogenmauermembran.

Für die Modellvermessung müssen photogrammetrische Mittel herangezogen werden, da bei der mechanischen Messung Ungenauigkeiten entstehen, die auf die Berührung zwischen dem Messinstrument und der Membran zurückzuführen sind.

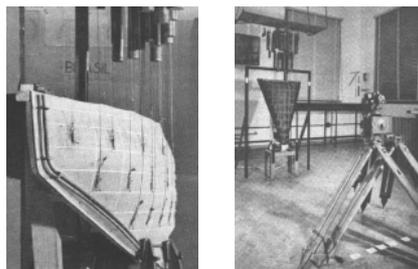


Bild 6.12: Formbestimmung von Mauern nach der Membranalogie.

Die räumlichen Spannungsfelder, die zusammen mit der äusseren Lasteinwirkung einen stabilen Gleichgewichtszustand bilden, lassen sich ebenfalls in einer ersten Näherung über die Messung der Membranverzerrungen experimentell bestimmen. Hierfür wird ein Vergleich zwischen der undeformierten und der deformierten Membran angestellt. Den auf der undeformierten Membran entlang geometrischer Achsen eingezeichneten Kreisen mit gleichem Durchmesser  $D_0$  entsprechen nämlich Ellipsen mit den geneigten

45. Für die Versuchsdurchführung wird die Belastung aus Eigengewicht durch diskret wirkende Einzelkräfte, die dem jeweiligen Volumensegment entsprechen, ersetzt.

46. Zu diesem Zweck muss die Schale auf einem Gleitlager aufgesetzt werden, so dass einzig tangential zur Fläche wirkende Kräfte eingeleitet werden können.

Hauptachsen  $D_m$  und  $D_M$  bei der deformierten Fläche. Die Neigung  $\alpha$  der Hauptachsen gibt die Richtung der Hauptspannungen an. Die gesuchten mittleren Verzerrungen  $\varepsilon_m$  ergeben sich über die gemessenen Verformungen dieser Achsen zu

$$\varepsilon_{\max} = \int_{D_0}^{D_M} \frac{dl}{l} = \log \frac{D_M}{D_0} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\min} = \int_{D_0}^{D_m} \frac{dl}{l} = \log \frac{D_m}{D_0} . \quad (6.41)$$

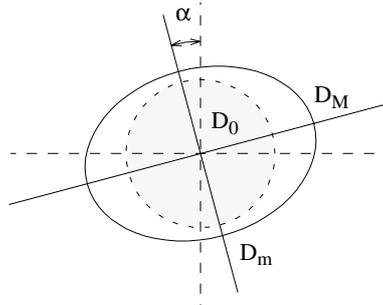


Bild 6.13: Hauptspannungen und -richtungen an der deformierten Membranschale.

Die Hauptspannungen in der Membran lassen sich anschliessend – nachdem der Elastizitätsmodul und die Poissonsche Zahl erfasst worden sind – über die Ausdrücke

$$\sigma_M = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{m,\max} + \nu \cdot \varepsilon_{m,\min}) \quad \text{und} \quad (6.42)$$

$$\sigma_m = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{m,\min} + \nu \cdot \varepsilon_{m,\max}) \quad (6.43)$$

bestimmen. Für eine bekannte mittlere Membranstärke  $e_m$  werden die Hauptkräfte zu

$$n_M = \sigma_M \cdot e_m \quad \text{und} \quad n_m = \sigma_m \cdot e_m . \quad (6.44)$$

Die Hauptspannungen  $\sigma$  in der Bogenmauer lassen sich folglich nach dem Prinzip der Umkehrung anhand des Ausdruckes

$$\sigma = -(n \cdot \zeta^2) / t \quad (6.45)$$

bestimmen. Hierbei bezeichnen  $n$  die Hauptzugkraft in der Membran,  $1/\zeta$  den Massstab des Modells und  $t$  die Querschnittstärke der Mauer<sup>47</sup>. Die anhand des Ausdruckes (6.45) ermittelten Spannungen dürfen allgemein nur als eine erste Näherung angesehen werden, da die Umkehrung der Kräfte eine Deformation der nicht biegeweichen Fläche zur Folge haben kann, die zu einer Spannungsumlagerung führt<sup>48</sup>.

47. Vgl. Fialho (1955) sowie Rocha und Serafim (1957).

48. Im allgemeinen Fall weist die Wand jedoch eine genügende Stärke auf, womit die Spannungen und somit die Dehnungen gering gehalten werden können. Die grössten Störungen des Spannungszustandes sind normalerweise auf die auflagerbedingten Inkompatibilitäten zurückzuführen.



Islers pneumatische Formfindungsmethode unterliegt dem gleichen physikalischen Vorgang wie die aufgeblasene Seifenmembran, weist jedoch insbesondere aufgrund der einfacheren Formerfassung einige Vorteile im Hinblick auf die praktische Anwendung auf<sup>50</sup>. Der Versuchsaufbau besteht aus einer mit der gewünschten Grundrissform fest eingespannten Gummimembran und gleicht somit im wesentlichen demjenigen, der im Hinblick auf die Formfindung von Bogenmauern entwickelt worden ist. Für die annähernde Reproduktion der Last aus Eigengewicht wird die Membran durch die Erzeugung eines Druckunterschiedes auf die gewünschte Höhe aufgewölbt und für alle weiteren Modellarbeiten mit Kunstharz oder Gips festgehalten<sup>51</sup>. Die Modellmembran weist einen Spannungszustand auf, der durch den starren Rahmen bestimmt ist. Aus diesem Grund muss die Membranschale für die Aufrechterhaltung des analogen Membranspannungszustandes auf starre Randträger aufgelagert werden. Ihrem Erscheinungsbild entsprechend bezeichnet Isler diese druckbeanspruchten Membranen als Buckelschalen<sup>52</sup>.

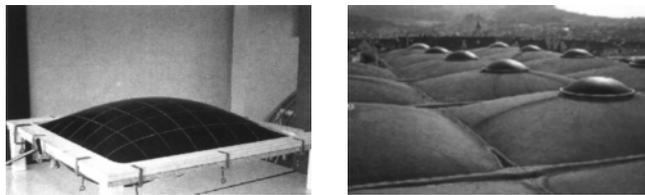


Bild 6.16: Formfindung nach der pneumatischen Methode.

Für die Erzeugung einer Hängeform wird ein Tuch oder Gewebe dem gewünschten Grundriss und der Auflagerung entsprechend aufgehängt. In physikalischer Hinsicht ergibt sich eine solche Form aufgrund des Strebens der Natur, die potentielle Energie jedes Systems auf ein Minimum zu reduzieren:

$$\int y \, dA \rightarrow \min. \quad (6.46)$$

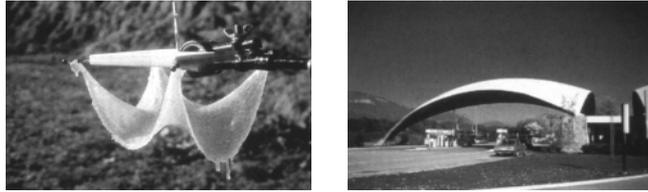
In qualitativer Hinsicht hängt die Steifigkeit jedes Gewebes vom Beanspruchungswinkel ab. Die Fadenrichtung, die die Membran in bezug auf die Auflager aufweist, stellt demzufolge einen interessanten Parameter für die Formbildung dar. Bei Tränkung des Gewe-

50. Isler entwickelte diese Methode 1954, als er den Versuch unternahm, eine Schale mit abgerundeten Ecken zu entwerfen. Die Antwort auf sein Problem fand Isler in der doppeltgekrümmten Form eines rechteckförmigen Kopfkissens. Aus diesem Grund bezeichnet er diese Methode als die Kissenmethode. Vgl. Ramm und Schunk (1986). Angewendet im Masstab 1:1 lässt sich die aufgeblasene Membran als Schalung für Schalenbauten verwenden. Vgl. Isler (1979), Nichols (1986), Sobek (1987) und Vittore (1987). In der Praxis wird die aufgeblasene Membran zudem als Überdachung von Hallen angewendet.

51. Der Neigungsunterschied, der zwischen den Vektoren der flächennormalen Belastung im Modell und der lotrechten Belastung aus Eigengewicht am ausgeführten Bauwerk besteht, kann auch für die Randbereiche vernachlässigt werden.

52. Buckelschalen eignen sich insbesondere für die Überdachung von Industriehallen. Isler verwendet hierfür quadratische und rechteckige Grundrisse mit Abmessungen ab 15 m x 15 m. Die grösste gebaute Buckelschale (Olten) weist einen Grundriss von 52 m x 56 m auf. Nach Isler (1992) wären Spannweiten von bis zu 100 m realisierbar. Beispiele ausgeführter Bauten sind das Autohaus Moser in Thun, 1959-60, und in Lyssach, 1964, die Kunststoffabrik Eschmann in Thun, 1958, und die Lager- und Verteilerhalle in Wangen bei Olten, 1960. Vgl. Ramm und Schunk (1986).

bes in einer sich erhärtenden Flüssigkeit wie gefrierendes Wasser oder Kunststoff versteift die aufgehängte Form. Die analoge Druckmembran weist im Fall einer Punktauflagerung freie Ränder auf, so dass die volle Leistungsfähigkeit der Membranschale auch visuell zum Ausdruck gebracht werden kann <sup>53</sup>.



*Bild 6.17: Formfindung nach der Hängemethode.*

Islers Fließformen unterscheiden sich von den pneumatischen und hängenden Formen dadurch, dass sie nicht das Ergebnis einer direkten physikalischen Analogie sind. Für die Erzeugung von Fließformen wird nämlich ein quellender Kunststoffschaum – Polyurethanschaum – beim Austreten eines Rohres mit gewünschter Querschnittsform zum Erstarren gebracht. Es entsteht dabei eine Hügelform, die auf den Reibungswiderstand, der sich zwischen dem Schaum und der Rohrwand aufbaut, und die damit verbundene Austrittsgeschwindigkeitsverteilung zurückzuführen ist. Obschon die entsprechende Fläche eine harmonische doppelte Krümmung aufweist, bedarf sie mehrerer Korrekturen im Hinblick auf eine praktische Anwendung. Die grössten und wichtigsten Abweichungen sind im Bereich der Punktstützungen der Schale festzustellen. Hier werden weit ausragende Stützungen erfordert, die das Modell nicht liefern kann. Im Entwurf lassen sich grosse Auflagerungsneigungen durch die Verwendung von durch vertikale Spannglieder verursachten Umlenkungskräften dennoch erzielen <sup>54</sup>.

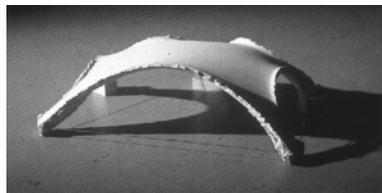


*Bild 6.18: Formfindung nach der Fließmethode.*

53. Islers Hängemethode entstand 1955, als er auf einer Baustelle ein vom nächtlichen Regen durchnässtes Jutegewebe, das über einem quadratischen Bewehrungsnetz durchhängend lag, näher beobachtete. Mit der Gravitationsmethode wurden zahlreiche Schalen erstellt, darunter die Autobahntankstelle bei Deitingen, 1968, die Fabrikhalle Sici in Genf, 1969-70, die Überdachung des Naturtheaters in Grötzingen bei Stuttgart, 1977, das Hallenbad der Stadt Brugg beim Aare Freibad, 1981, das Sportzentrum Solothurn, 1982, die Tennishallen des Tenniszentrum Marin-La Thène bei Neuenburg, 1983, und die Tennishallen Düdingen, 1978, und Heimberg, 1979. Ibid.

54. Iser entwickelte die Fließform aufgrund einer Beobachtung, die er in einer Fabrik machte. Obschon der sich aus der Fließmethode ergebenden Geometrie keine direkte physikalische Analogie zugrunde liegt, wurden einige der gelungensten Schalen Islers wie diejenige von Camorino nach dieser Methode projektiert. Beispiele ausgeführter Objekte sind die Fabrikhalle Kilcher in Rechterswil, 1965, die Ausstellungs- und Verkaufsräume des Garten-Centers Bürgi in Camorino und des Garten-Centers Florérites Clause in Paris – insgesamt 10 zwischen 1969 und 1982 ausgeführte Objekte – und die Tanzschule in Chur. Ibid.

Im Hinblick darauf, dass die experimentell ermittelten Formen mit grösster Genauigkeit für die Ausführung quantitativ erfasst werden müssen, führte Isler die Modelltechnik zu einem hohem Perfektionsgrad. Am Modell werden die Koordinaten beliebiger Schnitte, Punkte oder Kurven in vorher mit dem Bauunternehmer abgesprochenen Abständen und Teilungen in Parallel- oder Radialsystemen mit sehr empfindlichen und genauen mechanischen Instrumenten gemessen<sup>55</sup>. Die Bögen der somit diskret erfassten Fläche, die der Erstellung der Schalungselemente dienen, werden anschliessend in einem vergrösserten Massstab gezeichnet. Aus der somit erhaltenen Schar von Kurven werden die stets unvermeidbaren Fehler visuell erkannt und auf einfache und sichere Weise korrigiert. Die experimentell erzeugten Formen werden mit Gips, Kunstharz, Beton, Kunststoff, Eis und sogar Lehm versteift. Der anfänglich flüssige oder zumindest viskose Zustand dieser Materialien erlaubt es, sie beliebig zu gestalten. Durch die physikalisch oder chemisch bedingte Erhärtung entsteht ein monolithischer Körper, der Steifigkeit besitzt und somit Druckkräfte abtragen kann.



*Bild 6.19: Arbeitsmodell.*

Theoretisch betrachtet liesse sich die experimentelle Formfindung wesentlich vereinfachen, falls für die Modellierung ein Material mit steuerbar variabler Steifigkeit herangezogen werden könnte. Dies stellt wahrscheinlich die Leitidee dar, welche zur Entwicklung der selbstversteifenden Membran geführt hat. Mit der in Anlehnung an biologische Prozesse als “Homeostatic Model Technique” bezeichneten Methode sollen Gravitationsformen anhand einfacher Modelle erzeugt werden<sup>56</sup>. Die Grundlage für die Versuchsdurchführung bildet ein dem gewünschten Grundriss entsprechend geformtes Plastikelement, auf welches eine Flächenbelastung wirkt. Zu diesem Zeitpunkt ist die Tragwirkung der Plastikfläche durch die allgemeine Gleichgewichtsgleichung

$$LF - \{ E t^3 / [12(1 - \nu^2)] \} \Delta \Delta w + \bar{p}_z = 0 \quad (6.17)$$

beschrieben, wobei der die Membranwirkung betreffende Term LF verschwindet. Anschliessend wird das belastete Plastikelement einer erhöhten Lufttemperatur ausgesetzt. Durch die temperaturbedingte Abnahme des Elastizitätsmoduls der Platte und der entsprechenden Zunahme der Verformungen wird die Membranwirkung aktiviert. Während dieser homeostatischen Evolution ändert sich die Plattentragwirkung in einer invers proportionalen Beziehung zur Zunahme der Membranaktivierung. Der reine Membranspannungszustand wäre für das Verschwinden des Elastizitätsmoduls gegeben, eine Bedingung, die mit der erwähnten Modellierung nur annähernd erreichbar ist. Bei Abkühlung der Lufttemperatur lässt sich die verformte Fläche umkehren und im idealen Fall durch Membrandruckkräfte beanspruchen.

55. Nach Isler (1992) sollte hierbei der Zehntelmillimeter erreicht werden.

56. Andres und Ortega (1991).

## Der Wendepunkt: Frei Ottos Seilnetzkonstruktionen

Seit Beginn der fünfziger Jahre wurden unter der Leitung von Frei Otto verschiedene Formfindungsmethoden entwickelt, die zu einer Erweiterung des Formenkanons weitgespannter Flächentragwerke und zu einem neuen Verständnis des Prinzipes des Leichtbaus geführt haben. Die vermutlich interessantesten und zugleich wichtigsten Erkenntnisse konnten anhand des Experimentierens mit Seifenhautflächen gesammelt werden. Im Experiment werden die Minimalflächen für vorgegebene Umrisse mit Hilfe von Flüssigkeitslamellen oder viskosen Flüssigkeiten erzeugt. Hierbei bildet das physikalische Gesetz der Seifenhautanalogie die methodische Grundlage, mit welcher der formbildende Prozess gesteuert wird. Im gleichen Rahmen wurden pneumatische Flächen wie Tropfen, Blasen, Schläuche oder Unterdruckpneus, Hängeflächen aus Nylon oder Vinyl, Seilnetzflächen und Gitterflächen systematisch untersucht<sup>57</sup>. Aufgrund der physikalischen Analogien und anknüpfend an Buckminster Fullers Diktum *“natural is what nature permits”* bezeichnet Otto diese Modelle und die daraus abgeleiteten Flächentragwerke als natürliche Konstruktionen.

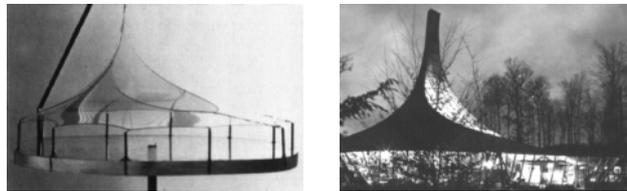


Bild 6.20: Formfindung mit dem Seifenhautmodell.

Die meisten Entwürfe Ottos sind Studien, welche aus Forschungsarbeiten hervorgingen. Aus diesem Grund ist die erarbeitete experimentelle Grundlagenforschung durch einen eminent wissenschaftlichen Charakter gekennzeichnet<sup>58</sup>. Dadurch wurde der Zugang zu bis dahin kaum erschlossenen Bereichen des Konstruktionswesens eröffnet. Mit den natürlichen Konstruktionen werden die logische und konsequente Anwendung der wissenschaftlichen Kenntnisse und der Technik mit dem ästhetischen Verständnis der Form zu einer Einheit vereinigt. Den zugrunde liegenden Ansatz konzentriert Otto in dem Satz *“Der Meinung [folgend], dass man bei jeder Gestaltungsarbeit die architektonischen Probleme mit geringstem technischem Aufwand lösen sollte, [...] wurde versucht, das natürliche Tragwerk zu finden”*<sup>59</sup>. Anhand der Selbstbildungsprozesse wird somit versucht, die konstruktive und in weitem Sinn auch die architektonische Form von Leichtbauten unter Berücksichtigung bestimmter Randbedingungen und primärer formbestimmender Parameter zu optimieren. Mit dem Studium der nach den Gesetzen der Natur gebildeten Gestalten und der damit verbundenen Entstehungsprozesse konnte eine innovationsreiche Grundlage geschaffen werden, die das Verständnis eines der wesentlichen Merkmale des Leichtbaus, nämlich die interdependente Verknüpfung zwischen Form, formbildender Belastung und Konstruktionsmethoden, ermöglicht hat.

57. Vgl. Otto (1990) und Otto et al. (1985).

58. Die Fachveröffentlichungen der Ergebnisse dieser Forschungsarbeiten erfolgen anhand der IL-Bandreihe *“Mitteilungen des Instituts für leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart”*.

59. Otto (1990). Vgl. auch Andres (1971).

Anhand Ottos Arbeit wurden zudem die entscheidenden Impulse für die Entwicklung physikalisch-mathematischer Formfindungsmethoden ausgelöst. Der Grund hierfür rührt daher, dass an den Zuschnitt vorgespannter Zugkonstruktionen grosse Genauigkeitsansprüche, wie sie von keiner anderen Bautechnik her bekannt sind, gestellt werden müssen. Diese Erfordernisse – beispielsweise darf der Zuschnittsfehler bei vorgespannten Seilnetzkonstruktionen maximal 0.03 % betragen – lassen sich grösstenteils bei der physikalischen Modellierung nicht erfüllen, da die experimentelle Tätigkeit mit Seifen-, Draht- oder Stoffmodellen stets mit Ungenauigkeiten behaftet ist<sup>60</sup>. Die unvermeidbaren Fehlerquellen entstehen bereits bei der Modellherstellung sowie bei der eindeutigen Punktidentifikation und den photogrammetrischen Aufnahmen.



Bild 6.21: Formfindung mit gleichmaschigem Gittergewebe.

Für die Bewältigung komplexer Aufgaben muss die Zuschnittsermittlung mit Hilfe mathematischer Mittel erfolgen. Auch in diesem Zusammenhang hat sich die Mathematik – mit den pythagoräischen Worten Roger Bacons – als *porta et clavis scientiarum* erwiesen. Der Aufstieg physikalisch-mathematischer Methoden beinhaltet jedoch keineswegs den Untergang der teilweise bereits als obsolet deklarierten physikalischen Modellierung. Für das Verständnis der essentiellen Verknüpfungen, die zwischen Form, Steifigkeit und Krümmungseigenschaften bestehen, oder des Tragverhaltens einer Membranfläche bei der Einwirkung nicht formbildender Lasten wie Wind oder Schnee reichen das rein logische Denken und die damit verbundenen Deduktionen nicht aus. Die Partikularität der Leichtbauweise verlangt das Sammeln von Erfahrungen, um alle im Formbildungsprozess involvierten Parameter zu erfassen, was einzig über die stets unersetzbare physikalische Modellierung erfolgen kann. *La superiorità del metodo sperimentale per la ricerca dell'effettivo funzionamento statico di un sistema teorico, è di una evidenza che non richiedi ulteriori chiarimenti*<sup>61</sup>. In dem hier angesprochenen Zusammenhang dürfte Nervis Schlussfolgerung kaum etwas an Bedeutsamkeit für die unmittelbare Gegenwart eingebüsst haben.

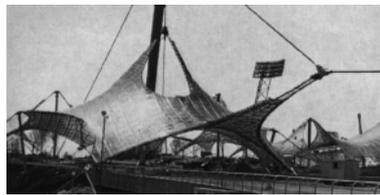
60. Die Ermittlung des Zuschnittes, das heisst die Bestimmung aller Seillängen und die Darstellung der räumlich gekrümmten Netze in möglichst verzerrungsfreien Plänen, gilt als eine der entscheidenden Voraussetzungen für die Verwirklichung einer Seilnetzkonstruktion. Im spannungslosen Zustand muss das Netz nämlich exakt um das Mass seiner Dehnung infolge Vorspannung kleiner hergestellt werden. Da Längenfehler sich als Dehnungsfehler und damit als Kräftefehler auswirken, können schon kleine Einzelabweichungen zu unkontrollierbaren Umlagerungen führen. Um die Kräfte mit wenigstens  $\pm 15\%$  Genauigkeit erhalten zu können, muss der zulässige Längenfehler  $\epsilon$  bei  $\pm 0.03\%$  angesetzt werden. Aufgrund der gestellten Genauigkeitsansprüche an den Zuschnitt müssen in der Praxis nebst Seildehnungen ebenfalls die Verkürzungen allfälliger Masten und Fundamentbewegungen berücksichtigt werden. Vgl. Leonhardt und Schlaich (1973) sowie Linkwitz und Schek (1972). Dem heutigen Entwicklungsstand der Technik zufolge liesse sich der Zuschnitt anhand einer numerisch gesteuerten, vollautomatischen Zuschnideanlage bewerkstelligen.

61. Nervi (1965).

## 6.3 Numerische Formfindung vorgespannter Seilnetze

### Zum Tragverhalten vorgespannter Seilnetze

Bei den zugbeanspruchten Strukturen wie Hängebrücken und -dächern sind die hohen Werkstofffestigkeiten optimal ausgenützt, was die Überbrückung grosser Spannweiten bei geringem Werkstoffaufwand ermöglicht. Im allgemeinen bedürfen solche Seilstrukturen einer Versteifung, was auf die Erfordernisse, die an die Gebrauchstauglichkeit und die Schwingungsanfälligkeit gestellt sind, zurückzuführen ist. Des öfteren besteht die Tendenz, diese Tragwerke über eine auf die Wechsellasten bezogene schwere ständige Auflast zu versteifen. Hierdurch lässt sich allerdings das mit Seilen erreichbare minimale Konstruktionsgewicht nicht erreichen<sup>62</sup>. Die bedeutend effizientere Möglichkeit, das Steifigkeitsproblem einer Seilkonstruktion zu lösen, erfolgt über die Anwendung einer aussteifenden Vorspannung. In diesem Fall lässt sich das Tragwerk als ein gewichtsloser Gleichgewichtszustand gegeneinander vorgespannter Trag- und Spannbauteile andeuten. Bei Flächentragwerken ergibt sich durch die gegenseitig gekrümmten Seilscharen der Trag- und der Spannseile die für diese Tragwerke charakteristische Form der Sattelfläche, da nur die antiklastische Krümmung, das heisst die negative Gauss'sche Krümmung, in jedem Punkt des Netzes den nötigen Vorspannungszustand erzeugen kann<sup>63</sup>.



*Bild 6.22: Antiklastisch gekrümmte Fläche.*

Aus dieser geometrischen Notwendigkeit lässt sich die einfache und übliche Betrachtungsweise des Tragverhaltens von Seilnetzkonstruktionen ableiten. In dieser Deutung werden die Netzseile der Seilschar, bei denen die Wirkung der äusseren Lasten vom Krümmungsmittelpunkt zum Seil hin gerichtet sind, als Tragseile definiert. Demgemäss werden die Seile der quer zu diesen verlaufenden Seilschar als Spannseile bezeichnet. In diesem Sinn hat eine Erhöhung der zu tragenden Last eine Zunahme der Kräfte in den Tragseilen und eine Kräfteverminderung in den Spannseilen zur Folge<sup>64</sup>. Evidenterweise besteht bei den vorgespannten Seilnetzkonstruktionen eine vollkommene Untrennbarkeit zwischen der Geometrie und dem Vorspannungszustand. Zusammen und auf interaktive Weise bestimmen diese beiden Parameter Geometrie und Vorspannungszustand die Steifigkeit und somit das Tragverhalten jeder vorgespannten Seilnetzkonstruktion.

62. Vgl. Peters (1980). Als Beispiel für die durch Eigengewicht stabilisierten Hängedächer sei hier beispielsweise auf Kenzo Tanges Sporthalle der olympischen Spiele in Tokyo hingewiesen.

63. Bei ausgedehnten Konstruktionen, bei denen die einzelnen Seilscharen Änderungen in der Krümmungsrichtung aufweisen, entstehen notwendigerweise lokale Flachpunkte, denen in der Projektierung grosse Aufmerksamkeit geschenkt werden muss.

64. Vgl. Bild 6.25, pp. 145.

## Nichtlineare Ausgleichsrechnung vorgespannter Seilnetze

Das Gleichgewicht eines Seilnetzes ist dann gegeben, wenn die Netzknoten eine solche räumliche Lage relativ zueinander annehmen, dass der Summe der vorhandenen Stabkräfte ein geschlossenes räumliches Kräftepolygon entspricht. Dadurch, dass sowohl der Betrag als auch die Raumrichtungen dieser Kräfte geometriebehaftete Größen sind, weist dieses System einen nichtlinearen Charakter auf. Aufgrund dieser zwischen der Flächenform und den inneren Kräften bestehenden Interdependenzen müssen an die Ermittlung der Gleichgewichtsfigur hohe Ansprüche gestellt werden, so dass den Erfordernissen in bezug auf Gestaltung, Tragverhalten und geodätischen Zuschnitt genügt werden kann. Entsprechend der zwischen der Ausgleichsrechnung und der Elastomechanik bestehenden Analogie lässt sich die Berechnung vorgespannter Netze auf die Ausgleichung eines räumlichen Bogenschnittes zurückführen<sup>65</sup>. Weil der Ansatz über den konventionellen Bogenschnitt zu keiner Lösung des Problems führt, muss hierbei die nichtkonventionelle nichtlineare Ausgleichsrechnung herangezogen werden. Zu diesem Zweck wird die Forderung nach der Minimierung der Summe der quadratischen Beobachtungsverbesserungen,

$$v^T \cdot P \cdot v \rightarrow \min., \quad (6.47)$$

bereits in die nichtlineare Verbesserungsgleichung

$$v = f(x) - l \quad (6.48)$$

eingesetzt. Mit (6.47) und (6.48) folgt der Ausdruck

$$v^T \cdot P \cdot v = [ f(x)^T - l^T ] \cdot P \cdot [ f(x) - l ] \rightarrow \min. \quad (6.49)$$

Der Minimierungsforderung entspricht die notwendige Bedingung

$$\partial \frac{v^T \cdot P \cdot v}{\partial x} = 0, \quad \text{das heisst} \quad 2 \cdot v^T \cdot P \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6.50)$$

Ausgehend von der Verbesserungsgleichung (6.48) und unter Berücksichtigung, dass

$$\partial v / \partial x = \partial f / \partial x = A, \quad (6.51)$$

folgt – mit  $a^T \cdot b = b^T \cdot a$  – für die gesuchte nichtlineare Normalgleichung

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \cdot P \cdot [ f(x) - l ] = 0. \quad (6.52)$$

Für die Lösung dieser nichtlinearen Gleichung werden Verfahren der numerischen Mathematik herangezogen, welche die Lösung durch einzelne lineare Iterationsschritte

---

65. Vgl. Anhang A 5, pp. 168.

ermöglichen. Hierbei ist die linearisierte Endgleichung für ein Inkrement  $\Delta x$  der Iteration durch den Ausdruck

$$N \cdot \Delta x = A^T \cdot P \cdot [ l - f(x_0) ] \quad (6.53)$$

gegeben. Für die Normalgleichungsmatrix gilt der Ausdruck

$$N = ( C^T \cdot Q \cdot C ) + ( X^T \cdot P \cdot L \cdot W^{-3} \cdot X ) . \quad (6.54)$$

Hierbei bezeichnen  $C$  die Kantenknotenmatrix,  $Q$  die Hyperdiagonalmatrix – und nicht die übliche Gewichtsreziprokenmatrix –,  $X$  die Matrix der Knotendifferenzen,  $W$  die Matrix der Knotenverschiebungen und  $L$  die Matrix der gedehnten Stablängen.

Die nichtlineare Ausgleichung des räumlichen Bogenschnittes lässt sich in die analoge elastomechanische Berechnung des vorgespannten Netzes transformieren, falls dazu die Substitution

$$P = H \cdot L^{-1} \quad (6.55)$$

in der nichtlinearen Normalgleichung (6.52) vorgenommen wird. Unter Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes für die Stabkräfte  $s$  folgt somit der Ausdruck

$$A^T \cdot s = 0 . \quad (6.56)$$

Die Bestimmung der Normalgleichung sowie der Normalgleichungsmatrix erfolgt in Analogie zu (6.53) und (6.54). Die Kofaktoren  $Q_{x,x}$  der Knotenpunktkoordinaten sind durch den Ausdruck

$$Q_{x,x} = N^{-1} ( A^T \cdot P \cdot A ) N^{-1} \quad (6.57)$$

gegeben. Der erste Summand der Normalgleichungsmatrix,

$$C^T \cdot Q \cdot C , \quad (6.58)$$

ist nahezu identisch mit den Normalgleichungen der linearen Ausgleichung und hängt ausschliesslich von der geometrischen Konfiguration des Netzes ab. Übertragen auf die Verhältnisse der Elastomechanik beschreibt dieser Ausdruck die Nachgiebigkeit eines Knotens unter einer Einheitsbelastung aufgrund der geometrischen Konfiguration des Netzes. Der zweite Term,

$$X^T \cdot P \cdot L \cdot W^{-3} \cdot X , \quad (6.59)$$

ist dagegen nur von der Grösse der Verbesserungen, oder, analog dazu, von der Grösse der elastischen Längenänderungen, welche die Netzvorspannung verursachen, abhängig. Hiermit lässt sich die wichtige Schlussfolgerung ziehen, dass die Steifigkeit und somit das Tragverhalten einer Netzkonstruktion eine Funktion der geometrischen Flächenkonfiguration und des Vorspanngrades des Netzes darstellt.

## Gleichgewichtsgleichungen

Es ist naheliegend, dass sich die über geodätisch-mechanische Analogien hergeleitete allgemeine Gleichgewichtsgleichung

$$A^T \cdot s = 0 \quad (6.60)$$

über die Aufstellung konventioneller Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lässt. Das bei den Seilnetzen zugrunde liegende Problem lässt sich anhand der Gleichungen

$$u_j = x_i - x_k, \quad v_j = y_i - y_k \quad \text{und} \quad w_j = z_i - z_k, \quad (6.61)$$

über welche die Koordinatendifferenzen  $u$ ,  $v$  und  $w$  zweier durch ein Stabelement  $j$  verbundener Knotenvariablen  $i$  und  $k$  festgehalten werden, darlegen<sup>66</sup>.

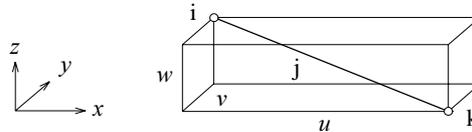


Bild 6.23: Raumlage des Stabes  $j$ .

Bei Zuzug der Kanten-Knoten-Matrix  $C_s = [CC_f]$  gilt allgemein

$$\begin{aligned} u &= C_s \cdot x = C \cdot x + C_f \cdot x_f, & v &= C_s \cdot y = C \cdot y + C_f \cdot y_f, \\ w &= C_s \cdot z = C \cdot z + C_f \cdot z_f. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Der räumliche Abstand zweier Knotenpunkte ist durch die Längen der Seilstücke im gedehnten vorgespannten Zustand definiert. Falls den Vektoren  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $l$  die Diagonalmatrizen  $U$ ,  $V$ ,  $W$  und  $L$  zugeordnet werden, lassen sich die gesuchten Knotenabstände über die Gleichung

$$L = [U^2 + V^2 + W^2]^{1/2} \quad (6.63)$$

bestimmen. Zur Erfassung der Richtung des Stabes  $j$  werden die Richtungscosinuswerte  $a_{x,j}$ ,  $a_{y,j}$  und  $a_{z,j}$  herangezogen. Diese Koeffizienten sind durch die Ableitungen

$$a_{x,j} = \partial l_j / \partial x_i, \quad a_{y,j} = \partial l_j / \partial y_i \quad \text{und} \quad a_{z,j} = \partial l_j / \partial z_i \quad (6.64)$$

gegeben. Mit

$$\frac{\partial l_j}{\partial x_i} = \frac{u_j}{l_j}, \quad \frac{\partial l_j}{\partial y_i} = \frac{v_j}{l_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial l_j}{\partial z_i} = \frac{w_j}{l_j} \quad (6.65)$$

66. Die im folgenden dargelegten Überlegungen stützen sich auf die Arbeiten von Gründig (1976), Linkwitz (1977), Linkwitz, Schek und Gründig (1974), Linkwitz et. al (1984) und Schek (1974).

folgt der Ausdruck

$$a = \frac{1}{l_j} \cdot \{ u_j, v_j, w_j \}. \quad (6.66)$$

Dementsprechend ergeben sich die Matrizen der Stabrichtungen des Netzes zu

$$\frac{\partial l}{\partial x} = L^{-1} \cdot U \cdot C, \quad \frac{\partial l}{\partial y} = L^{-1} \cdot V \cdot C, \quad \frac{\partial l}{\partial z} = L^{-1} \cdot W \cdot C. \quad (6.67)$$

Mit dem Vektor  $s$  der Stabkräfte und den Jakobimatrizen (6.67) ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung durch Gleichsetzung der inneren Kräfte und der äusseren Belastung zu

$$C^T \cdot U \cdot L^{-1} \cdot s = p_x, \quad C^T \cdot V \cdot L^{-1} \cdot s = p_y \quad \text{und} \quad C^T \cdot W \cdot L^{-1} \cdot s = p_z. \quad (6.68)$$

Somit gilt, dass bei vorgegebener Belastung  $p$  die voneinander abhängigen gesuchten Stabkräfte  $s$  und Koordinaten  $x$  diese Gleichgewichtsgleichungen zu erfüllen haben. Bei unbelasteten vorgespannten Seilnetzen verschwindet der Belastungsterm  $p$ . In diesem Fall nehmen die Gleichgewichtsbedingungen die Form

$$A^T \cdot s = 0 \quad (6.60)$$

an. Falls  $h_j$  die Zugsteifigkeit,  $l_{0,j}$  die Stablänge des ungespannten Zustandes und  $l$  den unbekanntem Knotenabstand bezeichnen, folgt für das Hookesche Gesetz der Ausdruck

$$s_j = h_j \cdot (l_j - l_{0,j}) / l_{0,j}. \quad (6.69)$$

Bei Zuzug der Diagonalmatrizen  $H$  und  $L_0$  gilt für das Hookesche Gesetz die Beziehung

$$s = H \cdot L_0^{-1} \cdot (l - l_0). \quad (6.70)$$

Durch Substitution folgt für die Gleichgewichtsgleichungen

$$C^T \cdot U \cdot L^{-1} \cdot H \cdot L_0^{-1} \cdot (l - l_0) = p_x, \quad C^T \cdot V \cdot L^{-1} \cdot H \cdot L_0^{-1} \cdot (l - l_0) = p_y, \\ C^T \cdot W \cdot L^{-1} \cdot H \cdot L_0^{-1} \cdot (l - l_0) = p_z. \quad (6.71)$$

Dieses Gleichungssystem bildet den geeigneten Ansatz, mit dem die Formfindungsaufgabe gelöst werden kann. Die Kanten-Knoten-Matrix  $C$ , über welche die topologischen Netzeigenschaften festgehalten werden, die Stabzugsteifigkeitsmatrix  $H$ , die Matrix der ungedehnten Stablängen  $L_0$ , die die Form des Netzes im unbelasteten Zustand eindeutig bestimmt, und der äussere Belastungsvektor  $p$  stellen vorgegebene Grössen dar. Für die Bestimmung der Raumkoordinaten  $x$  der Netzknotenpunkte müssen hierbei allerdings Rohwerte  $x_0$ , das heisst Näherungswerte aus Modellmessungen, für die anfängliche Geometrie herangezogen werden. In diesem Fall können die  $3n$  gesuchten Koordinaten  $x$  mit Hilfe der insgesamt  $3n$  vorliegenden Bestimmungsgleichungen ermittelt werden.

## Fest- und Ausgleichungsansatz

Falls Näherungswerte  $x_0$  für die Geometrie vorliegen, lässt sich das zugrunde liegende nichtlineare Gleichungssystem (6.71) durch Linearisierung nach  $x$  iterativ mit dem Newtonverfahren lösen. Die ebenfalls unbekanntenen Seilkraftgrößen lassen sich aus der ermittelten Geometrie mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (6.70) bestimmen. Grundsätzlich liefert dieser Ansatz die Möglichkeit, die genaue Geometrie eines experimentell bestimmten Zuschnittes zu ermitteln. Die eigentliche Lösung der Formfindungsaufgabe liegt jedoch nicht innerhalb der Reichweite dieser Methode.

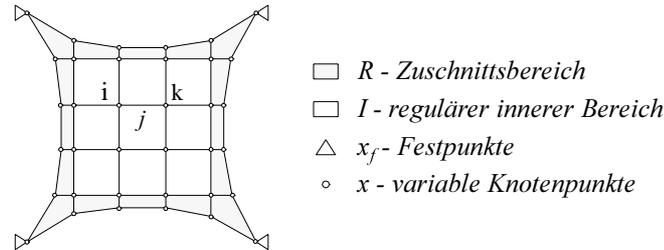


Bild 6.24: Zur Netzdefinition.

Für die praktische Behandlung von Seilnetzkonstruktionen ist es sinnvoll, die Gleichung (6.71) in zwei Terme zu spalten, so dass der regelmässige innere Bereich  $I$  und der heterogene äussere Bereich des Zuschnittes  $R$  getrennt erfasst werden können. Diese Operation beinhaltet die Unterteilung der insgesamt  $m$  Seilstücke des Netzes in  $m_I$  Stücke des regulären inneren Bereiches  $I$  und  $m_R$  Stücke des Zuschnittsbereiches  $R$ . Mit der allgemein gültigen Umformung  $L \cdot u = U \cdot l$  und unter Zuzug des Hookeschen Gesetzes folgt für die Gleichgewichtsgleichungen jeder vorgespannten Seilnetzkonstruktion

$$\begin{aligned}
 C_I^T \cdot H \cdot (L_0^{-1} - L^{-1}) \cdot u_I + C_R^T \cdot U_R \cdot L_R^{-1} \cdot s_R &= p_x, \\
 C_I^T \cdot H \cdot (L_0^{-1} - L^{-1}) \cdot v_I + C_R^T \cdot V_R \cdot L_R^{-1} \cdot s_R &= p_y, \\
 C_I^T \cdot H \cdot (L_0^{-1} - L^{-1}) \cdot w_I + C_R^T \cdot W_R \cdot L_R^{-1} \cdot s_R &= p_z.
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Dieses Gleichungssystem umfasst  $3n$  Bedingungsgleichungen für die Bestimmung der  $3n$  unbekanntenen Koordinaten  $x$  und der  $m_R$  unbekanntenen Komponenten der Stabkräfte  $s_R$  und ist dadurch unterbestimmt. Sofern gute Näherungswerte aus Modellmessungen für die Geometrie bekannt sind, lässt sich das Gleichungssystem durch die Eingabe der im Berechnungsablauf konstant gehaltenen Grösse  $s_R$  mit Hilfe des Festansatzes exakt und eindeutig lösen. Die Schätzung der unbekanntenen Seilkraft  $s_R$  erfolgt aus Modellmessungen, Überschlagsrechnungen oder vorhandenen Erfahrungen entweder auf direktem Weg oder aber über die ungedehnte Seillänge  $l_0$ . Der Berechnungsablauf erfolgt mit Hilfe eines Iterationsverfahrens der numerischen Mathematik durch die Eingabe einer Anfangsgeometrie  $x_0$ . Die Suche nach einer Gleichgewichtsfigur, die zugleich den gestalterischen und statischen Anforderungen genügen soll, ist bei diesem Vorgang mit einem langen und mühsamen Iterationsprozess verknüpft.

Um dieses Problem zu umgehen, müssen auch die Seilkräfte  $s_R$  des Zuschnittes als unbekannt angenommen werden. Diesem Ansatz entspricht jedoch ein unterbestimmtes Problem. Beim Ausgleichungsansatz wird das Problem der Unterbestimmtheit gelöst, indem die Koordinaten  $x$  und die Zuschnittskräfte  $s_R$  durch ein verträgliches System miteinander verknüpft werden. Dadurch erübrigt sich die beim Festansatz unentbehrliche Vorgabe fester Zuschnittskräfte. Zu diesem Zweck wird gefordert, dass die Summe der quadratischen Abweichungen aus angenommener Ausgangsgeometrie  $x_0$  und Gleichgewichtsgeometrie  $x$  sowie aus den Näherungswerten  $s_{R,0}$  und den Gleichgewichtskräften  $s_R$  ein Minimum annimmt:

$$(x - x_0)^T \cdot P_1 \cdot (x - x_0) + (s_R - s_{R,0})^T \cdot P_2 \cdot (s_R - s_{R,0}) \rightarrow \min. \quad (6.73)$$

Mit den Gewichtungsmatrizen  $P_1$  und  $P_2$  lassen sich hierbei gestalterische beziehungsweise statische Aspekte des Entwurfs betonen. Eine Zunahme der Gewichtungsfaktoren  $P_2$  der gewünschten Kräfte  $s_{R,0}$  minimiert den Unterschied dieser Kräfte zu  $s_R$  und führt zu einer Gleichgewichtsgeometrie, die derjenigen des Festansatzes näher kommt. Im Extremfall gilt mit  $P_2 = \infty$  die Gleichheit  $s_{R,0} = s_R$ . Zusammen mit der Nebenbedingung (6.73) lässt sich das nichtlineare Ausgleichungsproblem (6.72) durch die Linearisierung der Bedingungsgleichungen über eine Folge linearer Ersatzgleichungsaufgaben und der hierfür gültigen Standardformeln lösen<sup>67</sup>.

Der Ausgleichungsansatz führt zu einer ersten Gleichgewichtsgeometrie aus einem ersten Berechnungslauf. Diese Geometrie lässt sich durch eine abgeänderte Vorgabe der Zuschnittskräfte  $s_{R,0}$  und durch gezielt gewählte Bewertungszahlen  $P_2$  iterativ verbessern. Allerdings sind hierbei die Zuschnittskräfte, die zur Erzielung eines erwünschten Kräfteverlaufs im inneren Bereich erforderlich sind, nicht bekannt. Beim Entwurf werden jedoch der Berücksichtigung geometrischer und statischer Nebenbedingungen wie Gleichmaschigkeit oder konstantem Kräfteverlauf grosse Bedeutung beigemessen. Gemäss der erweiterten Ausgleichungsrechnung können solche Nebenbedingungen den Unbekannten des Problems auferlegt werden. In diesem Zusammenhang gilt es hierbei, das um die Gleichung

$$g(x, l, s) = 0 \quad (6.74)$$

erweiterte System (6.72) mit der Nebenbedingung (6.73) zu lösen. Für die Gleichmaschigkeit wird gefordert, dass die endgültigen Stablängen  $l_z$  den gewünschten Knotenabständen  $l_{v,z}$  gleich sind. Für die praktische Lösung müssen die Gleichungen (6.72) und (6.74) unter der Verwendung von Näherungskordinaten und -kräften  $x_0$  und  $s_{R,0}$  linearisiert werden. Da der Kräfteverlauf des gesamten Netzes sich im Innern auswirkt, lassen sich für die Kräfte im Zuschnittbereich grobe Vorgaben, die im Hinblick auf erwartete grosse Änderungen mit kleinen Gewichtungszahlen versehen werden, wählen. Weitere Zusatzbedingungen beinhalten die Forderung nach knickfreien Zuschnittsbereichen<sup>68</sup>.

67. Die Berechnung der Überdachungen des Olympiastadions sowie von Zwischenteilen des Olympiageländes in München erfolgte nach dem Ausgleichungsansatz.

68. Bei der Formfindung entstehen üblicherweise beim Übergang vom Netzzinnern zu den Endstäben geometrische und kraftmässige Inhomogenitäten – Knicke –, welche iterativ oder aber durch eine Zusatzbedingung beseitigt werden müssen.

## Kraftdichtemethode

Grundsätzlich lassen sich wesentliche Vereinfachungen erzielen, falls die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$A^T \cdot s = 0 \quad (6.75)$$

mit Hilfe einer als Quotient aus Stabkraft und Stablänge definierten Kraftdichte  $q$ ,

$$q = s / l , \quad (6.76)$$

linearisiert wird. Durch Substitution folgt aus (6.75) das lineare Gleichungssystem

$$C^T \cdot U \cdot q = p_x, \quad C^T \cdot V \cdot q = p_y, \quad C^T \cdot W \cdot q = p_z. \quad (6.77)$$

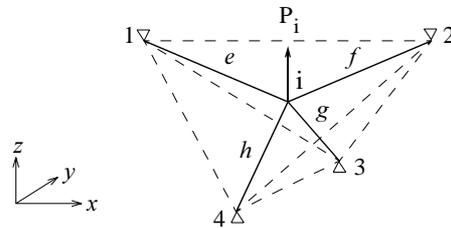


Bild 6.25: Grundelement eines vorgespannten Netzes.

In ausführlicher Schreibweise nehmen die Ausdrücke (6.77) für das aus vier Stäben zusammengesetzte dargestellte Grundsystem die Form

$$\begin{aligned} u_e \cdot q_e + u_f \cdot q_f + u_g \cdot q_g + u_h \cdot q_h &= p_{x,i}, & v_e \cdot q_e + v_f \cdot q_f + v_g \cdot q_g + v_h \cdot q_h &= p_{y,i}, \\ w_e \cdot q_e + w_f \cdot q_f + w_g \cdot q_g + w_h \cdot q_h &= p_{z,i} \end{aligned} \quad (6.78)$$

an. Unter Berücksichtigung der Ausdrücke (6.61) und (6.76) entsprechen diese Gleichungen der elementaren Erstellung der Gleichgewichtsbedingung am Knoten  $i$ . Mit  $Uq = Qu$  lässt sich das Gleichungssystem (6.77) in die Form

$$C^T \cdot Q \cdot u = p_x, \quad C^T \cdot Q \cdot v = p_y, \quad C^T \cdot Q \cdot w = p_z \quad (6.79)$$

umschreiben. Mit der Spaltung der Kanten-Knoten-Matrix  $C_s$ ,  $C_s = [ C C_f ]$ , folgen mit

$$\begin{aligned} u &= C_s \cdot x = C \cdot x + C_f \cdot x_f, & v &= C_s \cdot y = C \cdot y + C_f \cdot y_f, \\ w &= C_s \cdot z = C \cdot z + C_f \cdot z_f \end{aligned} \quad (6.80)$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} C^T \cdot Q \cdot C \cdot x + (C^T \cdot Q \cdot C_f \cdot x_f) &= p_x, & C^T \cdot Q \cdot C \cdot y + (C^T \cdot Q \cdot C_f \cdot y_f) &= p_y, \\ C^T \cdot Q \cdot C \cdot z + (C^T \cdot Q \cdot C_f \cdot z_f) &= p_z. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Mit den Substitutionen

$$D = C^T \cdot Q \cdot C \quad \text{und} \quad D_f = C^T \cdot Q \cdot C_f \quad (6.82)$$

ergeben sich die vereinfachten Ausdrücke

$$D \cdot x = p_x - D_f \cdot x_f, \quad D \cdot y = p_y - D_f \cdot y_f, \quad D \cdot z = p_z - D_f \cdot z_f. \quad (6.83)$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass die Kraftdichten und die Netzgeometrie bei vorgegebenen Knotenlasten und Auflagerknoten durch eine eindeutige Vorschrift miteinander verknüpft sind. Die gesuchten Koordinaten lassen sich somit anhand einer angenommenen Kraftdichte über die umgeformten Ausdrücke (6.83) bestimmen:

$$x = D^{-1}(p_x - D_f \cdot x_f), \quad y = D^{-1}(p_y - D_f \cdot y_f), \quad z = D^{-1}(p_z - D_f \cdot z_f). \quad (6.84)$$

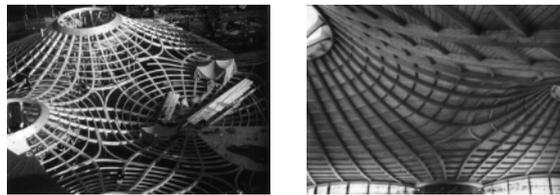


Bild 6.26: Formfindung mit dem Kraftdichteansatz.

Diese Gleichungen ermöglichen eine direkte Bestimmung der Gleichgewichtsgeometrie über die Verknüpfungsvorschriften der Knoten, die Festpunktkoordinaten und die geschätzten Kraftdichten. Hierbei bildet die Kraftdichte den geeigneten Parameter für die Beschreibung der Netzform. Bei der praktischen Tätigkeit hat sich gezeigt, dass bestimmte Schätzungen für das Netzzinnere und für die Randbereiche eine brauchbare Ausgangsgleichgewichtsgeometrie liefern. Die unbekanntes Stabkraftgrößen, die einer berechneten Gleichgewichtsgeometrie entsprechen, ergeben sich aus dem Produkt der zugehörigen Stablängen,

$$L = [ (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 ]^{1/2}, \quad (6.85)$$

mit den angenommenen Kraftdichtewerten:

$$s = L \cdot q. \quad (6.86)$$

Dem erweiterten Ausgleichungsansatz entsprechend lassen sich nach Vorhandensein einer ersten Gleichgewichtsform zusätzliche geometrische oder statische Forderungen berücksichtigen.

## Spezielle Anwendungen des Ausgleichungsansatzes

### Geometrische Minimalnetze

Die rechnerische Formfindung vorgespannter Seilnetze anhand der aufgezeichneten Methoden erlaubt die Aufstellung einer interessanten Verbindung zu den geometrischen Minimalnetzen. Geometrische Minimalnetze liegen dann vor, wenn die Abstände benachbarter Knotenpunkte das Prinzip der kleinsten Quadrate erfüllen. Diese Forderung ist durch den Ausdruck

$$l^T \cdot l = u^T \cdot u + v^T \cdot v + w^T \cdot w \rightarrow \min. \quad (6.87)$$

gegeben. Für die Koordinatendifferenzen gelten die hergeleiteten Gleichungen

$$u = C \cdot x + C_f \cdot x_f, \quad v = C \cdot y + C_f \cdot y_f, \quad w = C \cdot z + C_f \cdot z_f. \quad (6.62)$$

Hieraus folgt unmittelbar die Identität

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = C. \quad (6.88)$$

Die Lösung der Minimalbedingung (6.87) erfolgt naturgemäss über Differentiation gemäss der Operation (6.50). Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(l^T \cdot l)}{\partial x} &= \frac{\partial(u^T \cdot u)}{\partial x} = 2 \cdot u^T \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial(l^T \cdot l)}{\partial y} &= \frac{\partial(v^T \cdot v)}{\partial y} = 2 \cdot v^T \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial(l^T \cdot l)}{\partial z} &= \frac{\partial(w^T \cdot w)}{\partial z} = 2 \cdot w^T \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.89)$$

und unter Berücksichtigung des Ausdruckes (6.88) folgt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C^T \cdot C \cdot x &= -C^T \cdot C_f \cdot x_f, & C^T \cdot C \cdot y &= -C^T \cdot C_f \cdot y_f, \\ C^T \cdot C \cdot z &= -C^T \cdot C_f \cdot z_f, \end{aligned} \quad (6.90)$$

anhand dessen die Koordinaten  $x$  des Systems mit minimaler Raumverteilung bestimmt werden können. Dieses Gleichungssystem lässt sich direkt aus dem Gleichungssystem (6.81) herleiten, falls hierbei die äussere Belastung zu null und die Kraftdichten zu Einheitskraftdichten –  $Q$  repräsentiert in diesem Fall eine Einheitsmatrix – gesetzt werden. Diesem engen Zusammenhang zufolge lässt sich das Minimalnetz als ein vorgespanntes Netz mit gleicher Kraft in allen Stäben betrachten. Diese Tatsache bedeutet zugleich, dass die Aufstellung einer einzigen geometrischen Minimalbedingung bereits zu einem Gleichgewichtszustand des unbelasteten vorgespannten Netzes führt. Die Forderung (6.87) lässt sich durch Zuzug einer Gewichtung erweitern. Mit

$$l^T \cdot P \cdot l = u^T \cdot P \cdot u + v^T \cdot P \cdot v + w^T \cdot P \cdot w \rightarrow \min. \quad (6.91)$$

ergibt sich das Gleichungssystem (6.90) zu

$$\begin{aligned} (C^T \cdot P \cdot C) \cdot x &= -(C^T \cdot P \cdot C_f) \cdot x_f, \\ (C^T \cdot P \cdot C) \cdot y &= -(C^T \cdot P \cdot C_f) \cdot y_f, \\ (C^T \cdot P \cdot C) \cdot z &= -(C^T \cdot P \cdot C_f) \cdot z_f. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Es gilt somit, dass jede Gleichgewichtsgeometrie eines unbelasteten vorgespannten Netzes die obigen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. In formaler Hinsicht gleichen sich die Gleichungssysteme (6.81) und (6.90), da  $P$  wie  $Q$  Diagonalmatrizen darstellen. Dieser Analogie zufolge lassen sich die Kraftdichten als Gewichtungsfaktoren des geometrischen Minimumproblems andeuten. Jeder Gleichgewichtszustand eines unbelasteten vorgespannten Netzes mit den Kraftdichten  $q$  ist demnach identisch mit demjenigen eines Netzes, dessen durch die Kraftdichten  $q$  gewichtete Summe der quadratischen Längen ein Minimum ergibt<sup>69</sup>.

### Hängenetze

Dem Umkehrungsprinzip zufolge lassen sich Gitterschalen als analoge Gebilde von Hängenetzen andeuten, die als ideale Stabwerke ausgebildet sind. Damit der Gleichgewichtszustand von Hängenetzen erfüllt ist, müssen die Netzknoten eine solche räumliche Lage relativ zueinander annehmen, dass die Summe der Raumrichtungen der zwischen ihnen liegenden Stabstücke mit den vorhandenen Stabkraftgrößen und der äusseren Knotenlast ein geschlossenes räumliches Kräftepolygon ergeben. Bei parallel oder flächennormal wirkendem Lastangriff ist die sich einstellende Geometrie dementsprechend durch ihre positive Gauss'sche Krümmung charakterisiert.

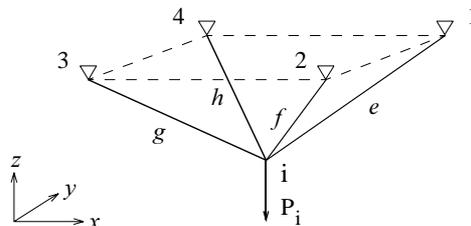


Bild 6.27: Grundelement eines hängenden Netzes.

Prinzipiell dürfen für die Formfindung hängender Netze die Methoden, die im Hinblick auf die antiklastischen vorgespannten Netze entwickelt worden sind, herangezogen werden. Allerdings ist der Lösungsprozess mit Konvergenzschwierigkeiten verknüpft. Die

69. Vgl. Schek (1974).

Ursache hierfür ist auf die geringen Stabverformungen, die durch die verhältnismässig niedrige Beanspruchung entstehen, zurückzuführen. Diese numerischen Schwierigkeiten können durch die Erhöhung der effektiven Elastizitäten umgangen werden. Nach Bestimmung einer Gleichgewichtsform – der sogenannten Gumminetzgeometrie – an dem durch eine fiktive Elastizität gekennzeichneten Ersatznetz kann die gesuchte Geometrie durch schrittweise Erhöhung des Elastizitätsmoduls bis hin zum effektiven Wert bestimmt werden.

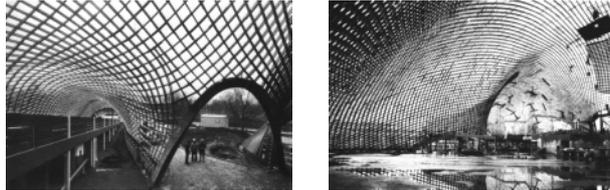


Bild 6.28: Gitterschale.

Die mit dem Ansatz des Gumminetzes verbundenen Schwierigkeiten lassen sich beseitigen, falls der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung

$$A^T \cdot s = p \quad (6.93)$$

eine zusätzliche Abstandsbedingung für die Koordinaten der ausgeglichenen Punkte jedes einzelnen Stabes aufgezwungen wird. Der Forderung

$$l_m = l_{m,0} \quad (6.94)$$

entspricht ein aus absolut dehnungslosen Stabelementen zusammengesetztes Hängernetz. Anhand dieses erweiterten Ausgleichungsansatzes kann die Formfindung hängender Netze auf direktem Weg erfolgen<sup>70</sup>. Der somit bestimmten Geometrie entspricht nach dem Umkehrungsprinzip eine analoge druckbeanspruchte Gitterschale. Zusätzliche statische Berechnungen am Gitternetz zur Erfassung der Beanspruchungen aus ungleichmässig wirkenden Lasten wie Schnee oder Wind und Stabilitätsuntersuchungen lokaler und globaler Art sind selbstverständlich unentbehrlich. Es ist ersichtlich, dass die Lösung der Formfindungsaufgabe anhand der um die Bedingung (6.94) erweiterten Ausgleichungsrechnung den geeigneten Ansatz für die Rationalisierung des Bauablaufs von nach statischen Gesichtspunkten entwickelten Flächentragwerken liefert. Die Vereinheitlichung der Knotenabstände bei Gleichgewichtsformen setzt allerdings eine Topologie voraus, die die notwendigen Freiheitsgrade im Formbildungsprozess gewährleisten kann<sup>71</sup>.

70. Vgl. Gründig (1976), Linkwitz et al. (1984) und Nguyen-Tong (1980). Die Formfindung und die statische Berechnung von Frei Ottos Holzgitterschale für die Bundesgartenschau Mannheim 1975 erfolgte anhand dieses Ansatzes.

71. Im allgemeinen werden Netze mit viereckigen Maschen bevorzugt. Bei der gleichschenkligen viereckigen Masche beschreibt der Ort der Maschenkanten des virtuellen Bewegungszustandes eine Schar zweier durch die gleiche Rotationsachse definierter spiegelsymmetrisch angeordneter Kegel, die sich mit der gleichen Gewichtung durchdringen. Falls die Kantenlänge  $R$  beträgt, so ist die Kegelschar durch den Kegel mit der Höhe  $L$  und den halben Öffnungswinkel  $\alpha/2 = \arccos(L/R)$ ,  $0 \leq L \leq R$ , definiert.

### Formfindung von Membranen nach dem Kraftdichteansatz

Bei der mathematischen Modellierung der Membran nach der Methode der Finiten Elemente werden Dreieckselemente mit ebener konstanter Spannung definiert. Infolge der Flächenkontinuität und der Querkontraktionseigenschaften des Elements hängt die Dehnung und die damit zusammenhängende Kraft einer Kante vom Dehnungszustand der anderen Kanten des gleichen Elementes ab. Unter gewissen Bedingungen können diese Flächenelemente diskretisiert und durch Stabwerke ersetzt werden, wobei zwischen zwei Knoten nun zwei Stäbe vorhanden sind, die von weiteren Stäben abhängen. In solchen Fällen lässt sich die Formfindungsaufgabe bei Anwendung der gleichen Ansätze auf diejenige der vorgespannten Seilnetze zurückführen. Die gesuchte Beziehung zwischen Membranspannungen und Kraftdichte erfolgt durch die Formulierung der Beziehungen zwischen den Membranspannungen und den Kantenkräften sowie durch die Ausdehnung des Begriffes der Kraftdichte auf den Quotienten aus Kantenkraft durch Kantenlänge.

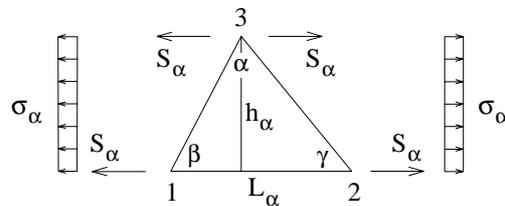


Bild 6.29: Membranspannungen und Kantenkräfte für  $\alpha$  am Dreieckselement.

Für ein Dreieckselement mit der Fläche  $\Omega$ , der Stärke  $t$ , der Querkontraktion  $\nu$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  sind die zwischen den Membranspannungen und den Kantenkräften bestehenden Abhängigkeiten durch die Gleichgewichtsgleichung

$$2 \cdot S_{\alpha} = \sigma_{\alpha} \cdot h_{\alpha} \cdot t \quad (6.95)$$

gegeben. Äquivalent dazu gilt

$$S_{\alpha} = (\Omega \cdot t / L_{\alpha}) \cdot \sigma_{\alpha} \cdot \quad (6.96)$$

Unter Zuzug des Ausdrucks (6.76) folgt für die Kraftdichte in Richtung  $a$

$$Q_{\alpha} = (\Omega \cdot t / L_{\alpha}^2) \cdot \sigma_{\alpha} \cdot \quad (6.97)$$

Die Aufstellung der Kraftdichtematrix  $Q$  erfolgt über die Bildung der Kraftdichten für die Richtungen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Die topologische Matrix  $C$  nimmt hierbei die Form einer Element-Knoten-Matrix an. Einem Dreieckselement entsprechen somit drei Stäbe. Anhand der Gleichungen (6.84) kann die Gleichgewichtsform einer Membran in linearer Abhängigkeit der Kraftdichte bestimmt werden. Für die Berechnung werden mit Hilfe eines linearen Verschiebungsansatzes in einem ebenen Spannungszustand und unter Berücksichtigung der Querkontraktion Gleichungen für das einzelne Element aufgestellt<sup>72</sup>.

72. Vgl. Nguyen-Tong (1980).

## 7 Epilog

### 7.1 Wissenschaft, Kunst und Baukultur

Dieser Arbeit liegt der Versuch zugrunde, die Logik des Raumes als Zusammenspiel geometrischer Erfordernisse und physikalischer Tatbestände aufzudecken. Zur Veranschaulichung der Vereinbarkeit räumlicher und energetischer Zwänge wird hierbei das zweidimensionale geometrische Gebilde des Raumes herangezogen, da bei dieser Raumeinschliessung und Struktur wie beim Ei oder beim Gehäuse des Nautilus koinzident sind. Die Betrachtung von Form als abstrakte Widerspiegelung räumlich-physikalischer Gesetzmässigkeiten bedingt die Überschreitung des hylemorphischen Ansatzes, nach welchem jedes gegenständliche Etwas eine Synthese aus Form und Materie verkörpert, um sie im Sinne einer energetischen Erscheinung zum ontologischen Prinzip der Natur zu erheben. Die Erkennung der anhand des morphologischen Studiums gewonnenen kausalen Zusammenhänge erlaubt die Herleitung neuer Verfahren und die logisch zwingende Gestaltung neuer Systemstrukturen.

Es muss Absicht jeder ontologischen Analyse der Form sein, die universellen Gesetzmässigkeiten, die ihre Omnipräsenz regeln, zu untersuchen und deren grundsätzliche Bedeutung und Reichweite aufzudecken. Dieser Ansatz setzt das Verständnis des Verhältnisses der Form zum Raum und zur Zeit ebenso wie zur Natur und zum Geist voraus. Als logisches Prinzip der räumlichen Anordnung, das heisst als metaphysisches Strukturierungsprinzip des Raumes, verleiht Form – wie in dieser Arbeit gezeigt werden konnte – dem Partiellen eine Totalität und der Pluralität eine Einheitlichkeit. Dementsprechend ist der im weitesten Sinne aufgefasste morphologische Gedanke Goethes durch die Suche nach der Beständigkeit innerhalb des kontinuierlichen Wandels, das heisst durch die Suche nach der Wahrheit, charakterisiert. Morphologie ist daher eine Wissenschaft, die alle weiteren Disziplinen menschlicher Denktätigkeit umfasst, um zugleich die zwischen Natur- und Geisteswissenschaften bestehenden Verflechtungen wiederherzustellen.

Nach Vitruvius muss die Baukunst in ihrem Wesen durch Kohärenz und Ganzheit gekennzeichnet sein. Wie bei allen geistigen Verrichtungen, müssten nach ihm auch in der Baukunst die zwei wesentlichen Begriffe *quod significatur* und *quod significat*, das heisst die Wahl des Motives der Bauschöpfung und die entsprechende wissenschaftlich-künstlerische Vergegenwärtigung, herrschen. Dieser Ansatz setzt die kulturelle Einheit intellektueller, emotioneller und politischer Umstände, wie es Athen unter Perikles und Rom unter Augustus bezeugt haben, voraus. Diese anzustrebende kulturelle Einheit ist durch die Affinität, die zwischen den Methoden des logischen Denkens und den seelischen Empfindungen besteht, gegeben. Dementsprechend ist auch die Bildung jedweder Kultur durch den Wesensverwandschaftsgrad von Wissenschaft und Kunst bestimmt.

Dadurch, dass sie das Unbekannte des menschlichen Geistes erforschen, sind Wissenschaft und Kunst bewusstseinsweiternd. Das Fortschreiten der Wissenschaft beruht auf

dem Versuch, das Verständnis des Geschehens der Natur auszubauen. Der Wissenschaftler setzt eine Invarianz der Naturgesetze voraus, um somit Hypothesen herzuleiten, die er als Antworten zu den Fragen, die er der Natur gestellt hat, festsetzt. Die Standhaftigkeit der wissenschaftlichen Hypothese ist durch ihren Bewährungswert im betrachteten Anwendungsgebiet, das heisst innerhalb eines bestimmten Referenzrahmens, gegeben. Beim künstlerischen Prozess werden Ideen und Empfindungen als bildende, darstellende, literarische oder musikalische Kunstwerke zum Ausdruck gebracht. Wie der Wissenschaftler legt der Künstler seine Produktionen dem Publikum zur Bewährungsprüfung vor, ohne jedoch eine Invarianz im Urteil voraussetzen zu können.

Wenn die Wissenschaft zu einer besseren Visualisierung des natürlichen Geschehens beiträgt, so stellt die Kunst ein zeitgemässes Abbild der menschlichen Gesellschaft und deren Problematik dar. Dementsprechend muss Kunst – dem Beispiel der Altgriechen folgend – zur Regelung und Anpassung sozialer, moralischer und ethischer Prinzipien, die ihrerseits durch die wissenschaftliche Progression beeinflusst sind, herangezogen werden. Die Bedeutung der prozessualen Unterschiede und Analogien, die zwischen dem wissenschaftlichen und dem künstlerischen Ansatz bestehen, kann also kaum genügend hervorgehoben werden. Andererseits verdeutlicht diese Idee, welche zivilisatorischen Gefahren ein Missverhältnis zwischen Wissenschaft und Kunst in sich bergen kann.

Der soziale, politische und wissenschaftliche Wandel im Europa des 19. Jahrhunderts hat zu einer intellektuellen Spezialisierung des Massenmenschen geführt. Parallel dazu wurde eine Vernachlässigung der emotionalen Erziehung eingeleitet. Diese von Radikalismus gekennzeichnete Entwicklung führte dazu, dass die faktischen Erkenntnisse der Wissenschaft keine angemessene Humanisierung anhand einer äquivalenten emotionalen Entwicklung fanden. Dadurch entstand der widersprüchliche Mensch der postindustriellen Gesellschaft, der nach Ortega y Gasset Weisheit und Ignoranz zugleich verkörpert. Mit ihm entstand auch das nach Karl Popper als Idol der Sicherheit bezeichnete Missverständnis des Besitzes von wissenschaftlichem Wissen, welches heutzutage eines der grössten Hemmnisse für eine harmonische Entfaltung unserer Zivilisation bildet. Für den Menschen ist Wahrheit kein Absolutum, sondern eine geistige Haltung. Dementsprechend kann auch die wissenschaftlich-künstlerische Progression – das Ingenium – nur aus der rücksichtslos kritischen und unablässigen Suche nach Wahrheit in Wissenschaft und Kunst – dem erwähnten *quod significatur* und *quod significat* – entspringen.

Die Diskrepanz, die nun zwischen Intellekt und Emotionalität besteht, stellt einen massgebenden Faktor dar, aufgrund dessen keine organische Entwicklung von Kultur feststellbar ist. Der euphorischen Illusion eines Triumphes des Menschen über die Natur, die sich mit der industriellen Revolution bildete, muss heutzutage energisch entgegengetreten werden. Die gewaltige Komplexität des Universums, in welche der Mensch eingefügt ist, verlangt kohärente und ganzheitliche Ansätze zur Lösung der bevorstehenden Herausforderungen. Zu diesem Zweck muss der Bewährungsgrad wissenschaftlicher Erkenntnisse auch innerhalb eines menschlichen Referenzrahmens andauernd überprüft werden. Es scheint, dass die allgemeine Akzeptanz dieses Ansatzes zur Beseitigung der im Hinblick auf die weitere Entwicklung unserer Zivilisation im allgemeinen und der Baukultur im speziellen bestehenden Unsicherheiten entscheidend beitragen könnte.

## 7.2 Die morphologische Aufgabe: Ergebnis und Ausblick

*To them, I said, the truth would be literally nothing  
but the shadow of the images.*

*Plato*

Nach der pythagoräisch-platonischen Lehre unterliegt das natürliche Geschehen einer ontologischen Synthese, auf welche die Kohärenz des Pluralismus der Natur zurückzuführen ist. Dieser von der deterministischen Chaostheorie verfolgte Ansatz beinhaltet die Vorstellung, dass jede reale oder potentielle Existenz ein Dasein in sich hat, das in der Anlage mit dem Ganzen übereinstimmen muss. Konfrontiert mit der ausserordentlichen Variabilität dieser pluralistischen Einheit versucht der Mensch, durch Beobachtung, Anschauung und Nachdenken Begriffe zu bilden, anhand welcher die kosmische Logik nachvollzogen werden soll. In erkenntnistheoretischer Sicht stellt aber das Weltbild, das der Mensch sich schafft, eine *“Welt seiner Erfahrungswirklichkeit”*, das heisst eine unter vermutlich unendlich vielen logisch möglichen Welten, dar<sup>1</sup>. Tatsächlich erfolgt die wissenschaftliche Progression anhand von Fakten, die aus isoliert gesammelten und dementisprechend isoliert gewerteten Erfahrungen abgeleitet werden, und die somit, im kategorischen Gegensatz zu Idee, in Raum und Zeit beschränkt sind.

Die Gegensätzlichkeit, welche Begrenzung und Schrankenlosigkeit hervorrufen, führt zu einer Inkongruenz zwischen Erfahrung und Idee. Dieses bereits von Goethe aufgezeigte, jedoch meist unbeachtet und unbewusst gebliebene Missverhältnis ruft im menschlichen Verstand einen Widerstreit hervor, der sich bei der Naturforschung sehr hinderlich auswirkt<sup>2</sup>. Diese These führt unausweichlich zur Forderung, Erfahrungen in möglichst allen ihren Facetten und Modifikationen zu prüfen, zu erforschen und durchzuarbeiten, und knüpft dadurch am Ansatz des hier verfolgten Formgedankens unmittelbar an. In Anlehnung an Teilhard de Chardins Postulat *“Rien que le Phénomène; mais aussi tout le Phénomène”* gilt es also, die Verbindung zwischen scheinbar abgesonderten Gegebenheiten herzustellen, um somit der ontologischen Synthese der Natur nachzugehen<sup>3</sup>. Es erscheint naheliegend, dass nicht die schlichte Anhäufung und Anordnung von Erfahrungen, sondern die Überbrückung der zwischen Erfahrung und Idee bestehenden Kluft, zu einer wissenschaftlichen Annäherung an ein konsistentes Weltbild führen kann. In diesem Ansatz muss die Morphologie ihre *“apologia pro vita sua”* geradezu finden.

Um ihre dargelegte Absicht zu verfolgen, bedarf die Morphologie einer Methodik und eines Gegenstandes. Hierbei gilt es, ganz im Sinne Francis Bacons, den betrachteten partikulären Gegenstand – im vorliegenden Fall die gekrümmten Flächentragwerke der Ingenieurbaukunst – abzusondern und hervorzuheben, um mit Hilfe von logisch-deduktiv abgeleiteten konkreten Folgerungen fachübergreifende Verflechtungsnetze wahrnehmen zu können. Das Verständnis der kausalen Zusammenhänge, die jedes dieser

---

1. Popper (1984).

2. Vgl. Goethe (1954).

3. Teilhard de Chardin (1955).

Verknüpfungsschemas bestimmen, und die Prüfung des Bewährungswertes der abgeleiteten Hypothesen setzen allerdings eine von Universalismus geprägte geistige Haltung voraus, die eine bereitwillige Mobilisierung aller Disziplinen menschlicher Denktätigkeit erforderlich macht.

Der Begriff Form wurde auf latente Weise zur unwiderruflichen Idee der europäischen Baukultur, als gegen Ende des 17. Jahrhunderts Philippe de la Hire und David Gregory erkannt hatten, dass die baulichen Ordnungszustände der Natur physikalisch-räumlichen Gesetzmässigkeiten unterliegen. Diesem tautologisch abgeleiteten Prinzip zufolge gilt – in Anlehnung an Goethe und D’Arcy Thompson –, dass das Besondere als das Allgemeine, das unter verschiedenen Bedingungen zum Erscheinen gebracht wird, ausgelegt werden muss<sup>4</sup>. In esoterischer Hinsicht müssen daher solche scheinbar abgesonderten baukünstlerischen Werke, wie die nur teilweise ausgeführte Kirche der Colonia Güell oder die Überdachung des Olympiastadions München, als mannigfache Ansichten eines einzigen Prinzips gedeutet werden. Umgekehrt stellen die erwähnten Bauten subjektive Nachprüfungen objektiver wissenschaftlicher Erkenntnisse dar. In diesem Zusammenhang ist die Subjektivität primär auf die Erlebnisse der entsprechenden Konstrukteure, die Objektivität hingegen auf die erkannte Zufalls- und Willkürunabhängigkeit zurückzuführen. Erlebnis und Erkenntnis rufen dementsprechend eine Polarität hervor, die die beiden jeweils zeitgebundenen und zeitlosen Weltbilder der Wirklichkeit, Geschichte und Natur, zum Gegenstand hat.

Dem angesprochenen Sachverhalt lässt sich entnehmen, dass planmässiges Handeln auf einem realitätsbezogenen Ausblick in zukünftige Entwicklungsmöglichkeiten beruhen muss und des tiefen Verständnisses historischer Zusammenhänge bedarf. Hierbei gilt es nicht, greifbare historische Tatsachen “per se” willkürlich zu untersuchen und aneinanderzureihen, sondern die Bedeutung und die Andeutungen ihrer Erscheinungen – die Form der Geschichte – zu eruieren und sie unter einem gegenwartsbezogenen und universellen Gesichtspunkt darzulegen. Da sowohl das Ereignis als auch die historische Analyse in Raum und Zeit stattfinden, weist die Geschichte einen metamorphischen Charakter auf, der ihr die Bedeutung einer Lehre des Werdenden – und nicht des Gewordenen – verleiht. Die Bildung neuer, bis anhin nicht wahrgenommener Ansichten über Ideen, die in der Vergangenheit dargelegt worden sind, setzt allerdings die tiefe Auseinandersetzung mit gegenwärtigen Begriffsvermögen ebenso wie die Berücksichtigung alltäglicher Verhältnisse und Umstände, die zum betrachteten Zeitabschnitt geherrscht haben, voraus. Dieser hier proklamierte Ansatz fordert, dass der übliche Perspektivismus zugunsten einer ganzheitlichen Betrachtung aufgegeben werden muss.

Die Umformung von Form in eine Quantität erfolgt durch Zuzug des Begriffes Struktur. Der strukturelle Ansatz erlaubt die Zurückführung erkannter komplexer Daten einer gegenständlichen oder phänomenologischen Form auf eine endliche Anzahl Komponenten, die nach einem logischen Organisationsprinzip miteinander verknüpft sind. Das entscheidende Merkmal dieses Konstruktes besteht darin, dass die Betonung vielmehr auf den Bezügen, das heisst auf dem logischen Aufbau, als auf den Einheiten liegt. Diese

---

4. Vgl. Ibid., Thompson (1992).

charakterisierende Eigenschaft lässt erkennen, dass Struktur eine topologische und dadurch mathematisch erfassbare Erscheinung ist, die sich dementsprechend mittels der Geometrie – der Wissenschaft der Beschreibung von Strukturen – und der Physik – der Wissenschaft des Strukturierungsprinzips der Natur – untersuchen lässt. Daher der pythagoräische Ausspruch Galileis, nach welchem die Natur das Zählbare – *scritta in lingua matematica* – sei<sup>5</sup>. Anhand dieses atomistischen Ansatzes können relevante Zusammenhänge, die Gleichgewicht, Stabilität und Beständigkeit eines baulichen Organisationsprinzips bestimmen, durch präzise Formulierung hervorgehoben und im Hinblick auf die Konstruktion neuer Ordnungsgefüge miteinander kombiniert werden.

Das in dieser Arbeit verfolgte formwissenschaftliche Studium beruht grundsätzlich auf dem morphologischen Urtrieb des faustischen Bewusstseins, das wahrnehmbare Äussere – das “eidos” des Altgriechischen und die “forma” des Lateinischen – im vollständigen Zusammenhang zu erfassen und es als Andeutung einer immanenten, wesensbestimmenden Essenz aufzunehmen. Die Parallelität, die zwischen diesem wissenschaftlichen Verlangen und dem künstlerischen Ausdruckstrieb des Menschen besteht, ist unverkennbar. Ziel jeder künstlerischen Schöpfung ist nämlich – wie gezeigt werden konnte –, innerlich verarbeitete Empfindungen als ontologisch kohärente Kunstwerke zum gegenständlichen Ausdruck zu bringen. Die Subjektivität auszudrückender Gefühlseindrücke deutet unmissverständlich an, dass Kunst ein historisches Abbild menschlicher Gesellschaftsordnungen ist und dementsprechend zur Regelung und Abstimmung sozialer, politischer und ethischer Normen herangezogen werden muss.

Die Gegenüberstellung von Wissenschaft und Kunst offenbart den Dualismus, der zwischen rationalem Intellekt und den Urempfindungen Emotionalität, Intuition und Instinkt besteht. Die Hervorhebung dieses Dualismus lässt erkennen, dass jede organische Bildung und Entwicklung von Kultur – Ausdruck und Abbild des menschlichen Daseins – das einstimmige Zusammenspiel beider Weltgefühle voraussetzt. Mit dem postindustriellen Zeitalter wurde jedoch ein Wandel eingeleitet, der die Ausbildung der Fähigkeit zu denken ohne zu fühlen und umgekehrt zu fühlen ohne zu denken hervorgerufen hat. Dieser Verfall des ästhetischen Bildungsgrades fand einen warnenden Ausdruck im Mutationsprozess, der die Entwicklung der Baukunst bestimmt hat. Das Verständnis dieser unwiderlegbaren Tatsache beinhaltet das Desiderat, den Menschen erneut als Schnittpunkt von Bezügen anzudeuten und die bereits von Vitruvius proklamierte Kohärenz und Ganzheit wiederherzustellen. Es gilt, den Bewährungsgrad wissenschaftlich erworbenen technischen Wissens auch innerhalb eines vom Humanismus geprägten Referenzrahmens andauernd zu überprüfen.

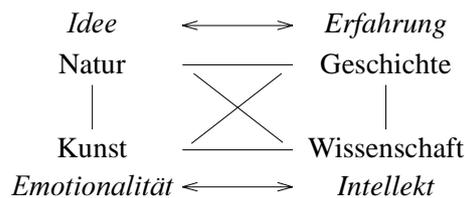
Die bevorzugte Methodik der Moderne, isolierte Erfahrungen durch entsprechende vorsätzliche Wiederholung so oft hervorzubringen, dass sie zur uneingeschränkten Gewissheit werden, birgt Gefahren und Unumgänglichkeiten in sich, die nicht länger ignoriert werden können. Obschon die vorausgesetzte Invarianz der Naturvorgänge die Unveränderlichkeit der experimentell unmittelbar überprüfbaren Regelmässigkeiten beinhaltet, kann die blosser Bewährung von Erfahrungswissen unmöglich zum Besitz von Wahrheit,

---

5. Galilei (1980).

der selbst die Ausgeburt eines Gefühls der Überheblichkeit ist, führen. Nach der quasiinduktiven Methode Poppers können Theorien, die aus bewährtem Erfahrungswissen abgeleitet werden, nicht absolut sein, da sie stets von allgemeineren Theorien überholt werden können, die ihrerseits die bereits früher bewährten enthalten <sup>6</sup>. Dieses Fortschreiten zu allgemeineren Theorien beruht nicht, wie allgemein angenommen wird, auf der Sammlung neuer Erfahrungen oder auf der besseren Ordnung der bereits vorhandenen, sondern auf der Ausbildung der mannigfaltigsten Ansichten, die in einer Erfahrung enthalten sind. Aus diesem Grund setzt das unablässige Suchen nach Wahrheit die von Goethe proklamierte *Vermannichfaltigung eines jeden einzelnen Versuches* voraus <sup>7</sup>.

Selbst die strengste vorurteilslose Untersuchung unterliegt zwangsläufig der gedanklichen Betrachtungsweise des Menschen. Aus diesem Grund ist jedes wissenschaftliche Abbild des Kosmos durch die gleichen Wesenszüge geprägt, die die Struktur des Denkens ausmachen. Diese verschmelzende Eingliederung von Objekt und Subjekt führt dazu, dass beide wechselseitig aufeinander einwirken und dadurch den evolutionären Akt der Selbsterkenntnis gemeinsam lenken. Als Verbindungspol zwischen allgemein anerkannten und vertrauten Lehren verfolgt die Morphologie die Absicht, die strukturellen Zusammenhänge, die zwischen allen Disziplinen menschlicher Denktätigkeit bestehen, aufzudecken, um somit die geforderte *Vermannichfaltigung* einer jeden Erfahrung zu erzielen. Morphologie ist daher die Wissenschaft des Strukturierungsprinzips, das die bewusste Existenz des Menschen – aufgefasst als eine *volonté de vivre universelle qui converge et s'hominise en lui* – innerhalb des natürlichen Geschehens bestimmt <sup>8</sup>. Das nachstehende Schema veranschaulicht den dargelegten Ansatz und lässt die Tragweite und die Fruchtbarkeit dieser Methode erkennen.



Für den Positivisten, der die Verselbständigung der rationalen Intelligenz gegenüber dem sophistischen Gesamtsubjekt Mensch verkörpert, mögen die hier verfolgten Absichten und Methoden als ein dilettantischer Exkurs ausserhalb der eigentlichen Wissenschaft erscheinen. Diese Haltung verrät eine tief verwurzelte ptolemäische Weltanschauung, nach welcher der Mensch als statisches Zentrum seines Universums auszulegen sei. Dieser cäsarische Anthropozentrismus führt dazu, dass die vom Menschen betriebene Wissenschaft ihn selbst – aufgefasst als evolutionsbestimmendes Phänomen und nicht als isolierte körperliche Erscheinung – unberücksichtigt lässt. Wie aber die fortlaufende Dehumanisierung des menschlichen Lebensraumes mit unmissverständlicher Deutlichkeit erkennen lässt, bedarf jedes kohärente Abbild des Objektes der bewussten Eingliederung des Subjektes. Diesen allumfassenden Ansatz ist der Mensch dem endgültig entfesselten Prometheus schuldig.

6. Ibid.

7. Ibid.

8. Teilhard de Chardin (1955).

# Anhang

## A 1 Geometrische Eigenschaften der Polyeder

Topologische Eigenschaften der Platonischen und Archimedischen Polyeder

|                        |                        |   | Anzahl n-Gone |    |    |    |   | Anzahl Elemente |    |     | Netzeigenschaften |               |   |        |
|------------------------|------------------------|---|---------------|----|----|----|---|-----------------|----|-----|-------------------|---------------|---|--------|
|                        |                        |   | 3             | 4  | 5  | 6  | 8 | 10              | F  | E   | K                 | $n / \bar{n}$ | p | $\chi$ |
| Reguläre Polyeder      | Tetraeder              |    | 4             |    |    |    |   |                 | 4  | 4   | 6                 | 3             | 3 | 1      |
|                        | Hexaeder               |    |               | 6  |    |    |   |                 | 6  | 8   | 12                | 3             | 4 | 2      |
|                        | Oktaeder               |    | 8             |    |    |    |   |                 | 8  | 6   | 12                | 4             | 3 | 2      |
|                        | Ikosaeder              |    | 20            |    |    |    |   |                 | 20 | 12  | 30                | 5             | 3 | 3      |
|                        | Dodekaeder             |    |               |    | 12 |    |   |                 | 12 | 20  | 30                | 3             | 5 | 3      |
| Quasireguläre Polyeder | Kuboktaeder            |  | 8             | 6  |    |    |   |                 | 14 | 12  | 24                | 24/7          | 4 | 20/7   |
|                        | Ikosidodekaeder        |  | 20            |    | 12 |    |   |                 | 32 | 30  | 60                | 15/4          | 4 | 14/4   |
|                        | Tetraederstumpf        |  | 4             |    |    | 4  |   |                 | 8  | 12  | 18                | 9/2           | 3 | 5/2    |
|                        | Hexaederstumpf         |  | 8             |    |    |    | 6 |                 | 14 | 24  | 36                | 36/7          | 3 | 22/7   |
|                        | Oktaederstumpf         |  |               | 6  |    | 8  |   |                 | 14 | 24  | 36                | 36/7          | 3 | 22/7   |
|                        | Ikosaederstumpf        |  |               |    | 12 | 20 |   |                 | 32 | 60  | 90                | 45/8          | 3 | 29/8   |
|                        | Dodekaederstumpf       |  | 20            |    |    |    |   | 12              | 32 | 60  | 90                | 45/8          | 3 | 29/8   |
|                        | Rhombenkuboktaeder     |  | 8             | 12 |    |    |   |                 | 26 | 24  | 48                | 48/13         | 4 | 44/13  |
|                        | Rhombenikosidodekaeder |  | 20            | 30 | 12 |    |   |                 | 62 | 60  | 120               | 120/31        | 4 | 116/31 |
|                        | Kuboktaederstumpf      |  |               | 12 |    | 8  | 6 |                 | 26 | 48  | 72                | 72/13         | 3 | 46/13  |
|                        | Ikosidodekaederstumpf  |  |               | 30 |    | 20 |   | 12              | 62 | 120 | 180               | 180/31        | 3 | 118/31 |
|                        | Cubus Simus            |  | 32            | 6  |    |    |   |                 | 38 | 24  | 60                | 60/19         | 5 | 66/19  |
|                        | Dodecaedron Simus      |  | 80            |    |    | 12 |   |                 | 92 | 60  | 150               | 75/23         | 5 | 87/23  |

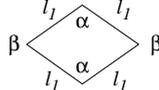
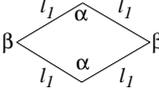
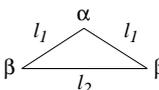
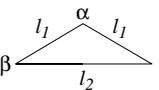
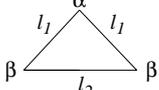
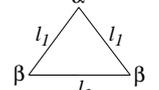
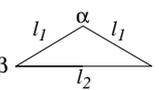
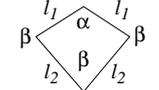
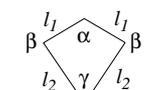
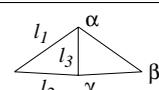
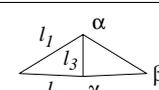
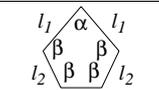
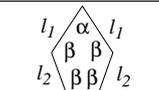
Topologische Eigenschaften der Catalanschen Polyeder

|                                  |                         |   | Anzahl $p$ Punktverknüpfungen |    |    |    |   |    | Anzahl Elemente |     |     | Netzeigenschaften |   |        |
|----------------------------------|-------------------------|---|-------------------------------|----|----|----|---|----|-----------------|-----|-----|-------------------|---|--------|
|                                  |                         |   | 3                             | 4  | 5  | 6  | 8 | 10 | E               | F   | K   | $\bar{p}$         | n | $\chi$ |
| Duale der Quasireguläre Polyeder | Rhombendodekaeder       |    | 8                             | 6  |    |    |   |    | 14              | 12  | 24  | 24/7              | 4 | 20/7   |
|                                  | Tricontaeder-rhombus    |    | 20                            |    | 12 |    |   |    | 32              | 30  | 60  | 15/4              | 4 | 14/4   |
|                                  | Triakis-tetraeder       |    | 4                             |    |    | 4  |   |    | 8               | 12  | 18  | 9/2               | 3 | 5/2    |
|                                  | Triakis-oktaeder        |    | 8                             |    |    |    | 6 |    | 14              | 24  | 36  | 36/7              | 3 | 22/7   |
|                                  | Tetrakis-hexaeder       |    |                               | 6  |    | 8  |   |    | 14              | 24  | 36  | 36/7              | 3 | 22/7   |
|                                  | Pentakis-dodekaeder     |    |                               |    | 12 | 20 |   |    | 32              | 60  | 90  | 45/8              | 3 | 29/8   |
|                                  | Triakis-ikosaeder       |    | 20                            |    |    |    |   | 12 | 32              | 60  | 90  | 45/8              | 3 | 29/8   |
|                                  | Deltoidikosi-tetraeder  |    | 8                             | 12 |    |    |   |    | 26              | 24  | 48  | 48/13             | 4 | 44/13  |
|                                  | Deltoid-hexacontaeder   |   | 20                            | 30 | 12 |    |   |    | 62              | 60  | 120 | 120/31            | 4 | 116/31 |
|                                  | Hexakis-oktaeder        |  |                               | 12 |    | 8  | 6 |    | 26              | 48  | 72  | 72/13             | 3 | 46/13  |
|                                  | Hexakis-ikosaeder       |  |                               | 30 |    | 20 |   | 12 | 62              | 120 | 180 | 180/31            | 3 | 118/31 |
|                                  | Pentagon-ikositetraeder |  | 32                            | 6  |    |    |   |    | 38              | 24  | 60  | 60/19             | 5 | 66/19  |
|                                  | Pentagon-hexacontaeder  |  | 80                            |    |    | 12 |   |    | 92              | 60  | 150 | 75/23             | 5 | 87/23  |

## Metrische Eigenschaften der Platonischen und Archimedischen Polyeder

|                        |                        |   | Flächenwinkel                               | Radien und Volumen   |                       |                      |           |
|------------------------|------------------------|---|---|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------|
|                        |                        |   | $\gamma / \gamma (n_1-n_2)$                 | $r_{\text{Umkugel}}$ | $r_{\text{Kantenk.}}$ | $r_{\text{Inkugel}}$ | $V [l^3]$ |
| Reguläre Polyeder      | Tetraeder              |    | 70.53°                                      | 1.7321               | 1.00                  | 0.5774               | 0.11785   |
|                        | Hexaeder               |    | 90.00°                                      | 1.2247               | 1.00                  | 0.7071               | 1.00      |
|                        | Oktaeder               |    | 109.47°                                     | 1.4142               | 1.00                  | 0.8165               | 0.47140   |
|                        | Icosaeder              |    | 138.18°                                     | 1.1756               | 1.00                  | 0.9342               | 2.18170   |
|                        | Dodekaeder             |    | 116.57°                                     | 1.0705               | 1.00                  | 0.8507               | 7.66312   |
| Quasireguläre Polyeder | Kuboktaeder            |    | 3-4 125°16'                                 | 1.1547               | 1.00                  | 0.8660               | 2.37      |
|                        | Ikosidodekaeder        |    | 3-5 142°37'                                 | 1.0515               | 1.00                  | 0.9511               | 14.31     |
|                        | Tetraederstumpf        |   | 3-6 109°28'<br>6-6 70°32'                   | 1.1055               | 1.00                  | 0.9045               | 0.394     |
|                        | Hexaederstumpf         |  | 3-8 125°16'<br>8-8 90°00'                   | 1.0420               | 1.00                  | 0.9597               | 17.76     |
|                        | Oktaederstumpf         |  | 4-6 125°16'<br>6-6 109°28'                  | 1.0541               | 1.00                  | 0.9487               | 12.71     |
|                        | Icosaederstumpf        |  | 5-6 142°37'<br>6-6 138°11'                  | 1.0210               | 1.00                  | 0.9794               | 57.56     |
|                        | Dodekaederstumpf       |  | 3-10 142°37'<br>10-10 116°34'               | 1.0145               | 1.00                  | 0.9857               | 97.45     |
|                        | Rhombenkuboktaeder     |  | 3-4 144°44'<br>4-4 135°00'                  | 1.0707               | 1.00                  | 0.9340               | 8.74      |
|                        | Rhombenikosidodekaeder |  | 3-4 159°06'<br>4-5 148°17'                  | 1.0260               | 1.00                  | 0.9747               | 42.01     |
|                        | Kuboktaederstumpf      |  | 4-6 144°44'<br>4-8 135°00'<br>6-8 125°16'   | 1.0241               | 1.00                  | 0.9765               | 45.63     |
|                        | Ikosidodekaederstumpf  |  | 4-6 159°06'<br>4-10 148°17'<br>6-10 142°37' | 1.0087               | 1.00                  | 0.9914               | 21.79     |
|                        | Cubus Simus            |  | 3-3 153°14'<br>3-4 142°59'                  | 1.0773               | 1.00                  | 0.9282               | 7.68      |
|                        | Dodecaedron Simus      |  | 3-3 164°11'<br>3-5 152°16'                  | 1.0280               | 1.00                  | 0.9727               | 37.72     |

*Metrische Eigenschaften der Catalanschen Polyeder*

|                              |   | Geometrie des Polygons  |   | Flächenaufbau   | $\gamma$        |
|------------------------------|---|---|---|---|-----------------|
| Rhombisches Dodekaeder       |    |    | $\alpha = 109^\circ 28'$<br>$\beta = 70^\circ 32'$                            | $p^\alpha = 3, p^\beta = 4$                                     | $120^\circ 12'$ |
| Rhombisches Tricontaeder     |    |    | $\alpha = 116^\circ 34'$<br>$\beta = 63^\circ 26'$                            | $p^\alpha = 3, p^\beta = 5$                                     | $144^\circ 00'$ |
| Triakis Tetraeder            |    |    | $\alpha = 112^\circ 53'$<br>$\beta = 33^\circ 33'$                            | tetragonaler Anschluss von 4 Pyramiden mit triangulärer Basis   | $129^\circ 31'$ |
| Triakis Oktaeder             |    |    | $\alpha = 117^\circ 12'$<br>$\beta = 31^\circ 24'$                            | oktaedrischer Anschluss von 8 Pyramiden mit triangulärer Basis  | $147^\circ 21'$ |
| Tetrakis Hexaeder            |    |    | $\alpha = 83^\circ 37'$<br>$\beta = 48^\circ 11'$                             | kubischer Anschluss von 6 Pyramiden mit quadratischer Basis     | $143^\circ 07'$ |
| Pentakis Dodekaeder          |   |   | $\alpha = 68^\circ 37'$<br>$\beta = 55^\circ 41'$                             | dodekadischer Anschluss von 12 Pyramiden mit pentagonaler Basis | $156^\circ 43'$ |
| Triakis Ikosaeder            |  |  | $\alpha = 119^\circ 02'$<br>$\beta = 30^\circ 29'$                            | ikosadischer Anschluss von 20 Pyramiden mit triangulärer Basis  | $160^\circ 37'$ |
| Trapeziodaler Ikositetraeder |  |  | $\alpha = 115^\circ 16'$<br>$\beta = 81^\circ 35'$                            | oktaedrischer Anschluss von 8 dreiecksähnlichen Figuren.        | $138^\circ 07'$ |
| Trapeziodaler Hexecontaeder  |  |  | $\alpha = 118^\circ 17'$<br>$\beta = 86^\circ 58'$<br>$\gamma = 67^\circ 46'$ | ikosadischer Anschluss von 20 dreiecksähnlichen Figuren.        | $154^\circ 07'$ |
| Hexakis Oktaeder             |  |  | $\alpha = 55^\circ 01'$<br>$\beta = 37^\circ 46'$<br>$\gamma = 87^\circ 12'$  | oktaedrischer Anschluss von 8 dreiecksähnlichen Figuren.        | $155^\circ 05'$ |
| Hexakis Ikosaeder            |  |  | $\alpha = 58^\circ 14'$<br>$\beta = 32^\circ 46'$<br>$\gamma = 88^\circ 59'$  | oktaedrischer Anschluss von 8 dreiecksähnlichen Figuren.        | $164^\circ 53'$ |
| Pentagonales Ikositetraeder  |  |  | $\alpha = 80^\circ 45'$<br>$\beta = 114^\circ 48'$                            | Anschluss von 6 vierblättrigen Figuren                          | $136^\circ 19'$ |
| Pentagonales Hexecontaeder   |  |  | $\alpha = 67^\circ 28'$<br>$\beta = 118^\circ 08'$                            | Anschluss von 12 fünfblättrigen Figuren                         | $153^\circ 11'$ |

## A 2 Zur Plastizitätstheorie gekrümmter Flächen

Die mechanische Erfassung gekrümmter Flächen kann mit Hilfe der elastischen oder der plastischen Theorien erster und zweiter Ordnung erfolgen <sup>1</sup>.

|                                | <i>Elastizitätstheorie</i> | <i>Plastizitätstheorie</i> |
|--------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <i>Theorie erster Ordnung</i>  | Membran- und Biegetheorie  | Fliessgelenklinientheorie  |
| <i>Theorie zweiter Ordnung</i> | Elastische Beultheorie     | Inelastische Beultheorie   |

*Bild A 1: Mechanische Theorien der gekrümmten Fläche.*

Wie im Abschnitt 6.1 dieser Arbeit bereits erwähnt, erfolgt die rechnerische Erfassung gekrümmter Flächentragwerke im allgemeinen anhand der Elastizitätstheorie. Folglich stützen sich alle Untersuchungen auf die Annahmen, dass das beanspruchte Material ungerissen, homogen, isotrop und linear elastisch ist und das Tragwerk – Instabilitätserscheinungen ausgeschlossen – nur kleine Verschiebungen zu erleiden hat. Dieser Ansatz hat sich in vielen Fällen als befriedigend erwiesen. Andererseits aber kann die Untersuchung des Tragverhaltens gekrümmter Flächentragwerke eine raffiniertere Methode, die alle spezifischen Materialeigenschaften berücksichtigt, erfordern. Im bedeutenden Fall des Stahlbetonbaus sollte, da Beton bereits bei geringer Einwirkung von Zugspannungen reißt, für allfällige Untersuchungen ein theoretisches Modell beigezogen werden, bei welchem die Druckkräfte durch Beton und Stahleinlagen gemeinsam und die Zugkräfte im wesentlichen durch die Bewehrung aufgenommen werden. Die elastizitätstheoretische Annahme, dass für die rechnerische Erfassung ungerissene Querschnitte sowie Homogenität und Isotropie beigezogen werden dürfen, sollte deshalb im Stahlbetonbau grundsätzlich nur nach einer kritischen Überprüfung aller materialbedingten Nichtlinearitäten als zulässig akzeptiert werden.

Im allgemeinen liefert die Membrantheorie in Verbindung mit den Transformationsregeln die Längs- und Schubkräfte in jedem Flächenpunkt und für jede beliebige Schnitt- richtung. Die Transformation erfolgt mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises und erlaubt anhand des Ausdruckes

$$n_{I, II} = (1/2)(n_x + n_y) \pm [(1/4)(n_x - n_y)^2 + n_{x, y}^2]^{1/2} \quad (A 1)$$

die Bestimmung der beiden orthogonalen Trajektorienscharen, die den Weg angeben, auf dem die Lasten durch reine Zug- und Druckkräfte zu den Auflagern abgeleitet werden. Im Fall des Stahlbetonbaus stellt die Spannungsberechnung die Aufgabe, Stahl und Beton die ihnen zukommenden Anteile dieser Schnittkräfte zuzuweisen. Das hier zugrunde liegende Problem besteht darin, dass die Normalkrafttrajektorien und die Bewehrungsanordnung im Regelfall nicht koinzident sind. Eine streng trajektoriale Bewehrungsanordnung wäre konstruktiv sehr aufwendig, ist praktisch aber gar nicht erforderlich. Meist wird eine orthogonale Bewehrung gewählt. Für die wirklichkeitsnahe

1. Marti, pers. Mitteilung.

Erfassung der Tragwirkung orthogonal bewehrter Schalen sollte eine von der Elastizitätstheorie differenzierte Betrachtungsweise herangezogen werden. In Anlehnung an die Scheibentheorie kann hierbei zum Beispiel von Fachwerkmodellen ausgegangen werden. Bei Vernachlässigung der Krümmung, das heisst bei Reduzierung der räumlichen auf die ebene Dimension, lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen,

$$\sigma_x = \sigma_{xc} + \sigma_{xs}, \quad \sigma_y = \sigma_{yc} + \sigma_{ys}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xyc} + \tau_{xys} \quad (\text{A } 2)$$

an einem ebenen Element mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises aufstellen. Nach Bestimmung der Neigung der Rissrichtung  $\theta$  nach der Baumannschen Formel können die Spannungskomponenten  $\sigma_{xc}$ ,  $\sigma_{yc}$ ,  $\tau_{xyc}$  der Betondiagonalen und  $\sigma_{xs}$ ,  $\sigma_{ys}$ ,  $\tau_{xys}$  der im Scheibenelement unter den Winkeln  $\beta_i$  geneigten Stahleinlagen ermittelt werden<sup>2</sup>.

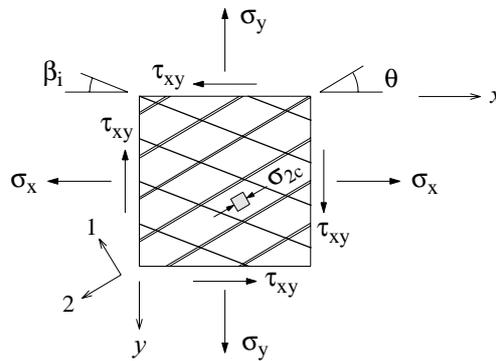


Bild A 2: Gleichgewicht am gerissenen Scheibenelement.

Im Fall der Schalen sind strenge plastizitätstheoretische Kollapsmechanismen noch nicht genügend erforscht worden. In der Literatur wird der obere Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie hauptsächlich auf unter Manteldruck stehende Zylinder, Kegel und Kugeln angewendet. Für diese Flächen existieren vollständige Lösungen, das heisst statisch zulässige Spannungszustände samt den damit verträglichen Mechanismen<sup>3</sup>. Obschon die experimentelle Tätigkeit vereinzelte Untersuchungen theoretischer Art an zylindrischen und paraboloidförmigen Schalen bestätigt hat, ist die allgemeine Anwendbarkeit plastizitätstheoretischer Lösungen nicht gegeben, da bei vielen weiteren Versuchen ein lokales Versagen aufgrund einer Betonstauchung oder eines Schubbruches zu beobachten war, bevor sich ein Mechanismus überhaupt einstellen konnte<sup>4,5</sup>. Grundsätzliche Aspekte der Fliessgelenklinienmethode wie die Rotationsfähigkeit von Fliessgelenken unter erhöhter Druckeinwirkung oder der Einfluss grosser Rotationen vor der Bildung eines Mechanismus bedürfen sicherlich einer weiteren experimentellen Tätigkeit mit entsprechenden theoretischen Untersuchungen.

2. Vgl. Baumann (1972) und Marti (1991).

3. Vgl. Olszak und Sawczuk (1980).

4. Vgl. Gioncu (1979).

5. Gestützt auf experimentelle Ergebnisse wurden die Versagensmechanismen von Faltwerken – vgl. Dykes (1964) und Enami (1964) – und von zylindrischen Stahlbetonschalen – vgl. Kavyrchine (1961) und Sawczuk (1961) – erforscht. Weitere Untersuchungen an paraboloidförmigen Stahlbetonschalen fanden eine gute Übereinstimmung mit ausgeführten Versuchen. Vgl. Kolleger und Mehlhorn (1989) und Gioncu (1979).

### A 3 Inelastische Beultheorie

In qualitativer Hinsicht lässt sich der Einfluss materialbedingter Nichtlinearitäten auf das Beulen von Flächen anhand des Ausdrucks

$$P_{cr}^{lin} \sim E \cdot \left( \frac{h}{R} \right)^n \quad (6.32)$$

untersuchen. Die Stoffgrösse des Elastizitätsmoduls  $E$  umfasst alle kurz- und langzeitbezogenen materialbedingten Nichtlinearitäten. Die effektive geometrische Grösse  $h$  – die Querschnittsstärke – ist durch die eventuelle Bildung von Rissen beeinflusst. Im Fall von Stahl- und Spannbeton ist die Rissbildung wiederum von der Bewehrungsanordnung abhängig. Auch können auftretende Langzeitdeformationen den Krümmungsradius  $R$  der Fläche beträchtlich beeinflussen. Für die quantitative Erfassung des inelastischen Beulphänomens werden hauptsächlich empirisch hergeleitete Beziehungen herangezogen, die eine entsprechende Reduktion der Beullast zur Folge haben. Die damit verbundenen Unsicherheiten werden über vergrösserte Sicherheitsfaktoren abgedeckt.

#### *Einflüsse plastischer Verformungen*

Mit der Annahme eines linearen Formänderungsgesetzes wird der Theorie ein in Wirklichkeit nicht existenter Idealwerkstoff zugrunde gelegt. Die meisten Werkstoffe folgen dem Hookeschen Gesetz nur innerhalb bestimmter Beanspruchungsgrenzen, die bei der praktischen Ausnutzung überschritten werden können – und sollten. Ersichtlicher Weise kann die Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungsbeziehung einen bedeutenden Einfluss auf die Instabilitäterscheinung ausüben. Bedingt durch die in anderen Bereichen des Ingenieurwesens durchgeführten Untersuchungen beziehen sich die meisten Erkenntnisse über die Instabilitäterscheinungen im plastischen Bereich auf die metallischen Werkstoffe. Das Ergebnis dieser Untersuchungen lässt sich allerdings nicht ohne weiteres auf andere Baustoffe wie Stahlbeton übertragen. Nach Engesser wird in der Stabtheorie das elastoplastische Verhalten von Stahlbeton dadurch berücksichtigt, dass allen Fasern des Querschnittes ein Tangentenmodul  $E_t$  zugeschrieben wird. Diese Methode liefert einen unteren Grenzwert für die Traglast des zentrisch gedrückten elastoplastischen Stabes. In Analogie zur Engesserschen Theorie wurde für den Elastizitätsmodul druckbeanspruchter Flächentragwerke aus Stahlbeton der Ausdruck

$$E_c = 2(f_c/\epsilon_c)[1 - (\sigma_c/f_c)]^{1/2} \quad (A 3)$$

hergeleitet<sup>6</sup>. Für zentrische und exzentrische Belastung wurden die Beziehungen

$$E_{c,1} = E_{c,0} [1 - (\sigma_c/f_c)^2] \quad \text{und} \quad E_{c,2} = E_{c,red} [1 - (\sigma_c/f_c)^2]^{1/2} \quad (A 4)$$

---

6. Griggs (1971).

vorgeschlagen <sup>7</sup>. Ein weiterer Ansatz geht von der Ausnahme aus, dass die Traglast der elastoplastischen Schale über die untere elastische und die obere plastische Traglast anhand des Ausdruckes

$$\left(\frac{p_{cr}^{(e,p)}}{p_{cr}^{(e)}}\right) + \left(\frac{p_{cr}^{(e,p)}}{p^{(p)}}\right)^2 = 1 \quad (\text{A } 5)$$

bestimmbar ist <sup>8</sup>. Hierbei bezeichnet  $p^{(p)}$  die Last, die durch die Bildung eines starr-plastischen Mechanismus zum Kollaps der Schale führt.

### *Kriechbeulung*

Bei Schalen kann die Zunahme des Krümmungsradius durch Kriechverformungen zu einer bedeutenden Reduktion der Beullast führen. Der kriechbedingte Kollaps ausgeführter Stahlbetonschalen weist auf die Bedeutung dieses Phänomens hin <sup>9</sup>. Zur mathematischen Erfassung der mechanischen Eigenschaften viskoelastischer Materialien wie Metalle unter erhöhtem Temperatureinfluss, Beton, Holz oder Kunststoffe werden lineare oder nichtlineare konstitutive Gleichungen herangezogen. Nach der linearen viskoelastischen Theorie werden keine Umlagerungen zwischen Membran- und Biegespannungen berücksichtigt. Die Kriecheinwirkung drückt sich demzufolge in der Zeitabhängigkeit der Spannungen und in der Amplitude der Deformationen, nicht aber in der Spannungsverteilung aus. Der nichtlinearen viskoelastischen Theorie liegen hingegen nichtlineare Gleichungen zugrunde, anhand welcher die Biegemomente und die Membrankräfte mit den Deformationen verknüpft werden. Diese Spannungsumlagerung ist umso bedeutender, je ausgeprägter die Nichtlinearität ist. Die nichtlineare Kriechtheorie weist die Partikularität auf, dass bei erhöhter Spannungseinwirkung das Kriechen nicht mehr konvergieren muss. Der kritische Zeitpunkt für die Divergenz des Kriechens lässt sich mit entsprechenden Beziehungen bestimmen und ist von besonderer Bedeutung für die Stabilitätsuntersuchungen von Bögen und Schalen <sup>10</sup>.

Im allgemeinen werden die zeitabhängigen Stoffgesetze von Beton durch einen linearen Ansatz berücksichtigt. Die Linearitätsannahme der  $\sigma$ - $\varepsilon$ - und der  $\varepsilon$ - $\dot{\varepsilon}$ -Beziehungen ermöglicht die Superposition von Verformungen infolge eines zeitlichen Spannungsverlaufs und dürfte bei konstantgehaltener niedriger Spannungseinwirkung recht gute Resultate liefern <sup>11</sup>. Es darf jedoch angenommen werden, dass die Nichtlinearität bei einer veränderlich wirkenden Spannung besonders ausgeprägt ist <sup>12</sup>. Mit der Einführung numerischer Methoden, welche die Anwendung nichtlinearer Stoffgesetze bei einem vernünftigen Rechenaufwand ermöglichen, sollte daher die Spannungsumlagerung im

7. Dulácska (1978).

8. Ibid.

9. Vgl. Isler (1982) und Schnobrich (1991).

10. Vgl. Olszak und Sawczuk (1980), Shen (1992).

11. Im allgemeinen ist es zulässig, Beton bei niedriger Spannungsintensität –  $\sigma_c \leq (0.35 \div 0.45) \cdot f_c$  nach Kabir und Scordelis (1978),  $\sigma_c \leq 0.30 \cdot f_c$  nach Kollegger (1988) – und konstanten hydrothermischen Bedingungen als ideal linear-viskoelastisch anzunehmen.

12. Vgl. Bazant und Panula (1979).

Gebrauchszustand berücksichtigt werden<sup>13</sup>. Die physikalische Modellierung linearer Stoffgesetze erfolgt dabei im allgemeinen anhand zweier verschiedener rheologischer Modelle, dem Maxwell'schen Modell (für Metalle unter erhöhtem Temperatureinfluss, Kunststoffe und Eis) und dem "three-parameter-solid"-Modell (für Beton und Holz). Bei diesen Modellen erfolgt die Simulation des überkritischen Verhaltens über die Variation der Federsteifigkeit –  $E = konst.$  für konstantes,  $E \sim w$  für zunehmendes und  $E \sim 1/w$  für abnehmendes Tragvermögen im überkritischen Bereich. Für das "standard linear three-parameter solid"-Modell strebt das Kriechen stets gegen einen Endwert. Es genügt daher unabhängig vom Tragverhalten im überkritischen Bereich, den Wert  $\varphi_c$  der Kriechfunktion  $\varphi(t)$  für  $t = \infty$  zu kennen, um den reduzierten Elastizitätsmodul  $E_c$  über den Ausdruck

$$E_c = E_{c,0} / (1 + \varphi_c) \quad (\text{A } 6)$$

zu bestimmen<sup>14</sup>. Der Kriechwert  $\varphi_c$  ist abhängig von der Schalenstärke, vom Wasser-Zement-Wert und von der Luftfeuchtigkeit, lässt sich jedoch unter durchschnittlichen Bedingungen als Funktion der Würfeldruckfestigkeit darstellen<sup>15</sup>. Die somit erhaltenen theoretischen Werte fanden gute Übereinstimmung mit an Modellen aus Mikrobeton durchgeführten Versuchen<sup>16</sup>. Weil es sich jedoch um eine starke Vereinfachung eines sehr komplexen, noch nicht genügend erfassten Problems handelt, ist die rechnerische Erfassung anhand dieser Modelle mit Unsicherheiten verbunden, die nur mit erhöhten Sicherheitsfaktoren abgedeckt werden können<sup>17,18</sup>.

### *Einfluss der Risse auf die Stabilität von Stahlbetonschalen*

Die Rissbildung bildet – nebst dem Fließen der Bewehrung – die wesentliche Werkstoff-nichtlinearität jedes Stahlbetontragwerkes. Bei Schalen aus Stahlbeton kann der rissbedingte Steifigkeitsabfall die Beullast bedeutend verringern. Im Bericht der Untersuchungskommission, die das Versagen der Kühltürme in Ferrybridge 1965 untersucht hat, wird angenommen, dass die Abnahme der Biegesteifigkeit in Ringrichtung infolge vertikaler Rissbildung zur Instabilitäterscheinung beigetragen hat<sup>19</sup>. Aus Vergleichsversuchen, die an zylindrischen Schalen aus bewehrtem Beton und Plexiglas durchgeführt worden sind, konnte entnommen werden, dass die Rissbildung die Beullast bis 50% redu-

13. Zienkiewicz und Taylor (1991).

14. Vgl. Dulácska (1980), Popov und Medwadowski (1981).

15. Vgl. Medwadowski et al. (1979). Nach ACI gilt pauschal  $\varphi_c \geq 2.0$ . Vgl. Tedesco et al. (1987).

16. Vandepitte et al. (1979).

17. Allerdings wird hierbei von den am einachsigen Spannungszustand gesammelten Erfahrungen ausgegangen. In der Fläche herrschen jedoch zwei-, beziehungsweise sogar dreiachsige Spannungszustände. Nach Gopalakrishnan, Neville und Ghali (1969) ist dies zulässig, weil die multiachsiale Beanspruchung das Kriechverhalten verbessert.

18. Durch die Wahl geeigneter Massnahmen – Anwendung hoher Betonqualitäten bei nicht allzu grossen Bewehrungsgehalten, Sicherstellung verhältnismässig niedriger Spannungen im Gebrauchszustand und Ausschalung nach längerer Erhärtungsphase – lässt sich ein Einfluss auf das Kriechverhalten ausüben. Nach Tandon (1988) können die Langzeitdeformationen um 40% reduziert werden, falls beispielweise die Spannung in einer Schale 2.5 statt 5.0 Mpa beträgt, und falls nach 28 statt 14 Tagen ausgeschalt wird.

zieren kann<sup>20</sup>. Experimentelle Untersuchungen an Rotationshyperboloiden ergaben eine Abnahme der kritischen Beullast von 20% und 25% aufgrund vertikaler respektive horizontaler Rissbildung<sup>21</sup>. Bei diesen Versuchen konnte kein Einfluss der Rissbildung auf die Beulfigur beobachtet werden<sup>22</sup>. Ergänzende Versuche, mit welchen die Rissbildung gezielt simuliert wurde, zeigten eine Abnahme der kritischen Last gegenüber den gleichen ungerissenen Modellen aufgrund vertikaler Rissbildung über die volle Schalenhöhe von 45%<sup>23</sup>. Trotz genügender Evidenz wurde noch keine analytische Methode entwickelt, die den Einfluss der Rissbildung auf das Stabilitätsverhalten von Schalen aus Stahlbeton zufriedenstellend beschreiben könnte<sup>24</sup>. Um die Risswirkung bei Kühltürmen analytisch zu berücksichtigen, wurde vorgeschlagen, die Wandstärke zu halbieren<sup>25</sup>. Diese Annahme dürfte allerdings zu stark konservativen Werten führen, da keine Versuche bekannt sind, bei denen die Abnahme der linearen kritischen Last infolge Rissbildung mehr als 50% betragen würde<sup>26</sup>. Weitere Ansätze erfolgen über eine Reduzierung des Elastizitätsmoduls<sup>27</sup>:

$$E_c^{\text{II}} \leq 0.50 \cdot E_c. \quad (\text{A } 7)$$

Auf entsprechende Weise lässt sich eine reduzierte Schalensteifigkeit  $K^{\text{II}}$  bestimmen. Das Quadrat der Schalensteifigkeit  $K$  ist hierbei als das Produkt aus Biegesteifigkeit  $B$  und Dehnungsteifigkeit  $T$  der Schale definiert, und der Steifigkeitsreduktionsbeiwert  $\psi$  stellt eine Funktion der Überdeckungstärke und des Armierungsgehaltes dar<sup>28</sup>:

$$K^{\text{II}} = \psi \cdot K = \psi \cdot \sqrt{B \cdot T} \approx \psi \cdot (E_c \cdot t^2) / \sqrt{12}. \quad (\text{A } 8)$$

Bei hyperbolischen Kühltürmen lässt sich bereits unter normalen thermischen Benützungsbedingungen eine vertikale Rissbildung beobachten<sup>29</sup>. Zudem kann auch Schwinden zu einem bedeutenden Störfaktor werden<sup>30</sup>. Diese erwähnten Einflüsse bleiben jedoch normalerweise sowohl bei den experimentellen als auch bei den analytischen Stabilitätsuntersuchungen unbeachtet.

- 
19. Nach Billington (1982). Es sei hier jedoch erwähnt, dass nach Abel und Gould (1981) das Versagen der Kühltürme in Ferrybridge, England, sowie Aerdeer, Schottland und Port Gibson, Mississippi nicht eindeutig auf eine Instabilitätserscheinung zurückzuführen ist.
20. Griggs (1971).
21. Der und Fidler (1968).
22. Gioncu (1979).
23. Hayman und Chilver (1971).
24. Die IASS Richtlinien empfehlen pauschale Werte, ohne jedoch ein Modell für die Erfassung der Risse vorzuschlagen. Vgl. Medwadowski et al. (1979). Vgl. auch Abel et al. (1982). Bereits einfache Überlegungen lassen beispielsweise erkennen, dass für das Deformationsverhalten die doppelte Bewehrungsanordnung gegenüber einer einzigen Bewehrungslage klar zu begünstigen ist. Vgl. Isler (1982).
25. Buchert (1972).
26. Nach Der und Fidler (1968) ist die kritische Last für Rotationshyperboloide durch den Ausdruck  $q_{cr} = C \cdot E \cdot (h/R)^{2.3}$  gegeben. Hierbei bezeichnet  $C$  einen empirischen Koeffizienten. Der Halbierung der Wandstärke entspricht daher eine Reduktion der kritischen Last um 80%.
27. Isler (1982).
28. Vgl. Dulácska (1981), Cole, Abel und Billington (1975), Hayman und Chilver (1971).
29. Larrabee, Billington und Abel (1974).
30. Kollegger (1988).

## A 4 Numerische Berechnungsverfahren

Bedingt durch die Masstabsbegrenzung, die sich aus dem geringen Verhältnis der Querschnittshöhe zu allen weiteren Bauwerksabmessungen ergibt, ist die Versuchsdurchführung für die experimentelle Analyse eines Flächentragwerkes mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Die analytische Berechnung andererseits ist auf Spezialfälle beschränkt und im allgemeinen nicht anwendbar auf beliebige Geometrien, Lastfälle, unregelmässige Versteifungen und Lagerungsbedingungen, Ausschnitte und viele andere Aspekte des praktischen Entwurfs. Ebenfalls lassen sich auf analytischem Weg einige wichtige mechanische Eigenschaften kaum berücksichtigen.

Die Einführung elektronischer Rechenmaschinen ermöglichte eine rasche Entwicklung numerischer Methoden, anhand welcher viele dieser Schwierigkeiten umgangen werden konnten. Mit der Entwicklung nichtlinearer Finite-Elemente-Programme für Stahl- und Spannbetonschalen entstanden auch spezielle Elemente für Randträger und Versteifungen sowie Materialmodelle für physikalisch wirklichkeitsnahe Berechnungen (Rissbildungskriterien für Stahl und Beton, Schwinden und Kriechen des Betons, Temperatureinflüsse, Zugversteifung, Stahlrelaxation sowie Vorspannverluste aus Reibung und Klemmeinzug), so dass nun "alle" geometrischen, materialbedingten und zeitabhängigen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden können.

Im Regelfall erfolgt die Erfassung der geometrischen Nichtlinearität bei den Schalenelementen über eine totale Lagrangesche Formulierung, nach welcher sich die momentanen Spannungen und das Green-Lagrange-Verzerrungsfeld auf den ursprünglichen geometrischen Zustand beziehen. Um das Verhalten von Materialien mit nichtlinearem Verhalten, insbesondere Stahlbeton, in der elastischen und in der inelastischen Phase zu verfolgen, wurden zwei Modelle entwickelt. Bei dem modified-stiffness-Modell wird die Steifigkeit nach einem empirischen Momenten-Krümmungs-Diagramm als eine Funktion der Beanspruchung erfasst. Beim geschichteten Modell wird das finite Element derart in Schichten aufgeteilt, dass jeder Schicht einzelne materialspezifische Eigenschaften zugeteilt werden. Mit dem geschichteten Modell können alle materialbedingten Nichtlinearitäten erfasst werden. Zudem lassen sich somit ebenfalls heterogene, anisotrope und faserverstärkte Materialien sowie Sandwichstrukturen modellieren.

Insgesamt kann mit den heutigen nichtlinearen Finite-Elemente-Programmen auf die unterschiedlichsten und verwickeltsten Probleme eingegangen werden. Erst die Auswahl der zugrunde liegenden Theorie und der entsprechenden Materialmodelle sowie zugehöriger Parameter bestimmt jedoch den Lösungsbereich des Verfahrens und die Grenzen der Anwendung. Prinzipiell ermöglichen die nichtlinearen finiten Elemente die Berechnung beliebiger Flächenformen aus beliebigen Materialien, unter beliebigem Lasteinfluss und beliebiger Auflagerung. Zusammen mit den zur Verfügung stehenden CAD-Programmen erlaubt diese sehr leistungsfähige Berechnungsmethode, dass man von den konventionellen analytisch definierbaren Flächen Abstand nimmt und sich effizienteren, materialgerechten Formen annähert. Leider ist eine solche Entwicklung im Entwurf und in der Forschung nicht feststellbar.

## A 5 Ausgleichsrechnung und Elastomechanik

Die Ausgleichsrechnung stellt ein Verfahren für die Auswertung geodätischer Messwerte dar. Mit der Gauss'schen Methode der kleinsten Quadrate werden die Unverträglichkeiten, die sich aus den fehlerbehafteten Beobachtungen ergeben, über die Forderung nach der Minimierung der quadratischen Form

$$v^T \cdot P \cdot v \rightarrow \min. \quad (6.47)$$

beseitigt. Die Entwicklung der Minimalprinzipien entstand mit der theoretischen Physik und führte zur Formulierung der Variationsaufgaben in der Mathematik. Neben dem Prinzip der kleinsten Quadrate, aufgestellt am Anfang des 19. Jahrhunderts durch Carl Friedrich Gauss, bildet das Prinzip von Castigliano, nach welchem die potentielle Energie der Formänderung eines beanspruchten elastischen Körpers bei stabilem Gleichgewicht ein Minimum aufweist, ein typisches Beispiel für solche Extremumsprobleme. Bei der konventionellen linearen Ausgleichung vermittelnder Messungen werden aus  $n$  unabhängigen Messwerten  $n$  nichtlineare Verbesserungsgleichungen

$$v = f(x) - l \quad (6.48)$$

für die Bestimmung der  $u$  Unbekannten –  $u < n$  – herangezogen<sup>40</sup>. Durch Zuzug von Näherungswerten für die Unbekannten ergeben sich die linearen Fehlergleichungen zu

$$v = A \cdot \Delta x - [l - f(x_0)]. \quad (A 9)$$

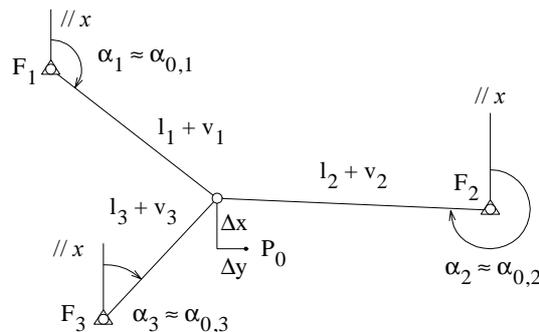


Bild A 3: Einfach überbestimmter Bogenschnitt nach der Ausgleichung.

Für die Bestimmung der unbekannt Grössen wird nun die Forderung des Prinzips der kleinsten Quadrate aufgestellt. Demzufolge müssen der Vektor  $v$  der Verbesserungen und die Gewichtsmatrix  $P$  der Messwerte der Minimalbedingung genügen. Folglich gilt für die Normalgleichungen der Ausdruck

$$(A^T \cdot P \cdot A) \Delta x = A^T \cdot P [l - f(x_0)]. \quad (A 10)$$

40. Die in der Folge dargelegte Übersicht über die geodätische Ausgleichsrechnung vermittelnder Messungen wurde aus Bahndorf (1991), Linkwitz (1977) und Reissmann (1980) entnommen. Auf die Ausgleichsrechnung bedingter Beobachtungen wird hier nicht eingegangen.

Anhand der Normalgleichungen können die gesuchten Grössen bestimmt werden. Definitionsgemäss gilt für die Normalgleichungsmatrix  $N$  die Beziehung:

$$N = A^T \cdot P \cdot A. \quad (\text{A } 11)$$

Aus der Fehlergleichung (A 9) und der Normalgleichung (A 10) folgt durch Gleichsetzung der Ausdruck

$$A^T \cdot P \cdot A = 0. \quad (\text{A } 12)$$

Diese Gleichung eignet sich insbesondere dafür, als Rechenprobe für die Berechnung der Verbesserungen angewendet zu werden. Die Matrix der Gewichtskoeffizienten – Kofaktoren –  $Q_{x,x}$  ergibt sich aus dem Gewichtsfortpflanzungsgesetz zu

$$Q_{x,x} = A^T \cdot P^{-1} \cdot A. \quad (\text{A } 13)$$

Aus (A 11) und (A 13) folgt die Identität

$$Q_{x,x} = N^{-1}. \quad (\text{A } 14)$$

Folglich lässt sich der Ausdruck (A 10) wie folgt umschreiben:

$$\Delta x = Q_{x,x} \cdot A^T \cdot P \cdot [1 - f(x_0)]. \quad (\text{A } 15)$$

Um die Jahrhundertwende erkannte Sebastian Finsterwalder, dass die Begriffe und Rechenverfahren der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ebenfalls in mechanischer Hinsicht interpretierbar sind <sup>41</sup>. Diese enge Beziehung zwischen der Ausgleichsrechnung und der Elastostatik lässt sich am einfachsten anhand eines überbestimmten ebenen Bogenschnittes und eines äquivalenten statisch einfach unbestimmten ebenen Fachwerkes zeigen.

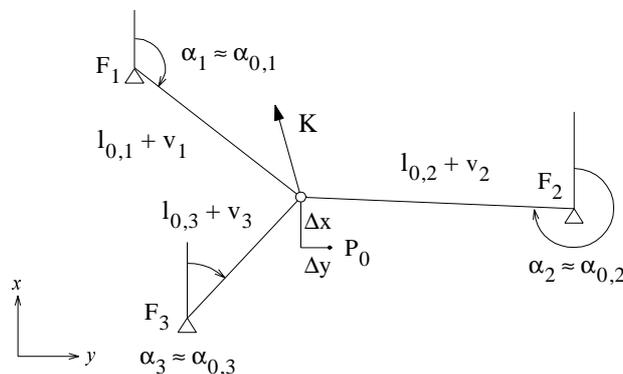


Bild A 4: Einfach statisch unbestimmtes Fachwerk mit Belastung  $K$ .

41. Vgl. Linkwitz (1977).

Das Gleichgewicht im Knoten  $P$  des im obigen Bild dargestellten Fachwerkes lässt sich über die Forderung, dass die Summe der an diesem Punkt wirkenden Kräfte null ergibt, untersuchen und bestimmen. In matrizieller Schreibweise ist diese Bedingung durch den Ausdruck

$$A^T \cdot s = k \quad (\text{A } 16)$$

gegeben, falls hierbei  $A$  die Richtungsmatrix,  $s$  den Stabkraftvektor und  $k$  den Vektor der äusseren Last bezeichnen. Durch Zuziehen des Hookeschen Gesetzes

$$s = H \cdot L_0^{-1} \cdot v \quad (\text{A } 17)$$

–  $H$  bezeichnet hierbei die Zugsteifigkeit, das heisst das aus Querschnittsfläche und Elastizitätsmodul gebildete Produkt,  $L_0$  die ungedehnte Stablänge und  $v$  die elastische Längenänderung – ergibt sich die obige Gleichgewichtsbedingung zu

$$A^T \cdot (H \cdot L_0^{-1}) \cdot v = k. \quad (\text{A } 18)$$

Im deformierten Zustand beträgt die Länge der Stäbe  $(l_{0,i} + v_i)$ . Die entsprechende deformierte Lage  $P + \Delta P$  des Punktes  $P$  ist durch die Koordinaten  $x + \Delta x$  bestimmt. Demzufolge ist die Verträglichkeitsbedingung durch den Ausdruck

$$v = A \cdot \Delta x \quad (\text{A } 19)$$

gegeben. Durch Einsetzen der Verträglichkeitsbedingung in die Gleichgewichtsgleichung (A 18) lässt sich die Koordinatenänderung  $\Delta x$  in Abhängigkeit der Last  $k$  ermitteln:

$$\Delta x = [A^T \cdot (H \cdot L_0^{-1}) \cdot A]^{-1} \cdot k. \quad (\text{A } 20)$$

Mit dem behandelten Problem wurde ein in sich widerspruchsfreies System betrachtet, welches einer Belastung ausgesetzt wurde. Aus diesem Grund erscheinen in den zu der geodätischen Ausgleichsrechnung analogen Gleichungen zusätzliche Terme, mit welchen diese äussere Einwirkung berücksichtigt wird. Der vollständigen Analogie entspricht ein nicht belastetes Stabwerk, welches einer Zwangsbeanspruchung ausgesetzt ist. Hierbei, wie beim analogen geodätischen Problem, sollen innere Widersprüche, die sich aus der geometrischen Überbestimmtheit ergeben, beseitigt werden. Dem Ausdruck (A 16) entsprechend lässt sich die Gleichgewichtsbedingung für den Knoten  $P$  des gezwängten Fachwerkes durch den Ausdruck

$$A^T \cdot s = 0 \quad (\text{A } 21)$$

erfassen. Durch Zuzug der Hookeschen Gesetzmässigkeit folgt für die Gleichgewichtsgleichung

$$A^T \cdot (H \cdot L^{-1}) \cdot v = 0. \quad (\text{A } 22)$$

Wie ersichtlich ist, entspricht der soeben hergeleitete Ausdruck der Gleichung (A 12), falls die Substitution  $H \cdot L^{-1} = P$  vorgenommen wird. Die Verträglichkeitsbedingungen dieses Systems sind durch die Beziehung

$$l_{0,i} + \Delta l_i + v_i = [ (x_0 - x_i + \Delta x)^2 + (y_0 - y_i + \Delta y)^2 ]^{1/2} \quad (\text{A } 23)$$

gegeben. Sie lässt sich durch eine Entwicklung des Wurzelausdruckes nach Taylor in Matrixschreibweise ausdrücken:

$$v = A \cdot \Delta x - \Delta l . \quad (\text{A } 24)$$

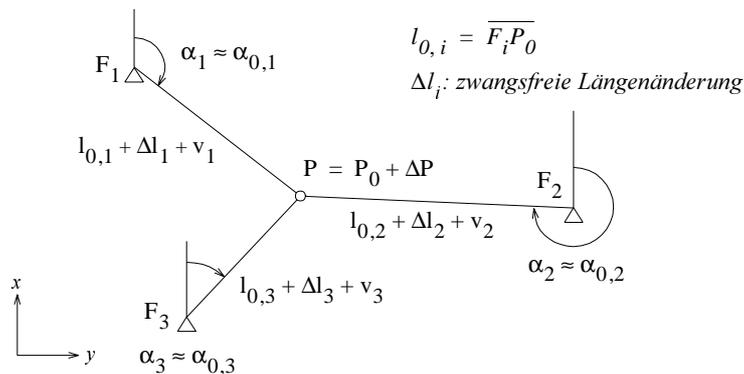


Bild A 5: Unter Zwang stehendes, einfach statisch unbestimmtes Fachwerk.

Mit (A 22) und (A 24) folgt der zu (A 10) analoge Ausdruck

$$A^T \cdot (H \cdot L^{-1}) \cdot A \cdot \Delta x = A^T \cdot (H \cdot L^{-1}) \cdot \Delta l , \quad (\text{A } 25)$$

über welchen die gesuchte Koordinatenänderung  $\Delta x$  bestimmt werden kann.

Mit  $k = e$ , wobei  $e$  den Einheitslastvektor bezeichnet, lässt sich der Ausdruck (A 20) ausgleichungstechnisch wie folgt formulieren:

$$\Delta x = Q_{x,x} \cdot e . \quad (\text{A } 26)$$

Somit lässt sich die Gewichtsreziproke  $Q_{x,x}$  einer Koordinate  $x$  als die Verschiebung des Knotens  $P$  unter der Wirkung einer Einheitsbelastung  $e$  deuten<sup>42</sup>. Bei Vertiefung der zwischen der geodätischen Ausgleichsrechnung und der Elastomechanik bestehenden Analogien lässt sich zeigen, dass die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen der Deformationsmethode und die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen der Kraftmethode entsprechen<sup>43</sup>.

42. Somit eröffnet sich beispielsweise die Möglichkeit, das Fehlerfortpflanzungsgesetz in die Elastomechanik zu übersetzen, um die Fehlerfortpflanzung in schematisch gebildeten Streckennetzen mit den übersichtlicheren Mitteln der Elastomechanik untersuchen zu können. Vgl. Linkwitz (1977).

43. Bahndorf (1991) leitet die entsprechenden Grundgleichungen her und stellt die Analogien in tabellarischer Form dar.

## A 6 Weitere Ansätze für die numerische Formfindung von Membranen

In analytischer Hinsicht lässt sich die Membrangeometrie  $z(x,y)$  anhand der partiellen Differentialgleichung (6.12) bestimmen, falls für den formerzeugenden Lastfall  $p(x,y)$  eine erwünschte Spannungsverteilung  $F(x,y)$  angenommen wird. Die Lösung des hier zugrunde liegenden Problems erfolgt nach Einführung von Randbedingungen mit der Methode der finiten Differenzen. Dieser direkten analytischen Methode sind Schranken gesetzt, die ihr eine nur bescheidene Reichweite verleihen. Aus diesem Grund kam diese Methode nur bei partikulären Fällen zur Anwendung<sup>44</sup>. Vereinzelt wurde versucht, die Methode der linearen sowie der nichtlinearen finiten Elemente zur Auffindung von Membran- und Schallengeometrien heranzuziehen. Hierbei wird von einer dem Grundriss entsprechend geformten flachen Membran, die bei Belastung eine neue Gleichgewichtslage annimmt, ausgegangen<sup>45</sup>. Diese Methode erlaubt die Untersuchung beliebiger Grundrissformen, Materialeigenschaften und Randbedingungen bei variablen Biege- und Dehnsteifigkeitsverhältnissen. In diesem Zusammenhang sei jedoch darauf hingewiesen, dass die auf der Methode der finiten Elemente beruhenden mathematischen Simulationsmodelle des öfteren mit physikalischen Inkompatibilitäten verknüpft sind, die sich in diesem Fall nur schwer überblicken lassen.

In letzter Zeit wurde auch die mathematische Strukturoptimierung zur Auffindung von Schallengeometrien herangezogen. Hierbei werden verschiedene Komponenten wie Geometriebeschreibung mit CAGD (Computer Aided Geometric Design), mathematische Optimierung, Sensibilitätsanalyse, Tragwerksberechnung nach der Methode der finiten Elemente und interaktive graphische Kontrolle für die Visualisierung des Optimierungsfortschrittes zu einer funktionellen Einheit der Strukturoptimierung zusammengefasst<sup>46</sup>. Aus mathematischer Sicht besteht das Ziel eines Optimierungsverfahrens in der Minimierung einer Zielfunktion  $f(x)$  unter Berücksichtigung von Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen – beispielsweise  $h(x) = 0$  und  $g(x) < 0$  – und bei der Setzung von Schranken für die Variablen. Als Optimierungsziele können neben der Minimierung des Volumens eine Homogenisierung der Spannungen oder eine Minimierung der Formänderungsenergie,

$$W = \int \rho \, dV, \quad S = \int (\sigma - \sigma_m) dA, \quad E = (1/2) \int (\sigma \cdot \epsilon) dV, \quad (\text{A } 27)$$

gesetzt werden. Die Optimierungsziele “minimale Formänderungsenergie” oder “Spannungsausgleich” bezwecken die Modellierung der Minimierung der Systemenergie, die dem physikalischen Experiment zugrunde liegt. Anhand der Sensibilitätsanalyse können allfällige Änderungen im Tragverhalten bei Variation eines Entwurfsparameters untersucht werden, was die Definition einer Optimierungsstrategie ermöglicht. Es ist allerdings nicht eindeutig, ob sich die Vorteile, die anhand der Tragwerksoptimierung in den Bereichen der Luft- und Raumfahrttechnik sowie der Maschinen- und Automobiltechnik erzielt werden konnten, auf die Verhältnisse des Bauwesens übertragen lassen.

44. Vgl. Alpa et. al (1978) und Csonka (1973).

45. Vgl. Smith (1969) sowie Kolleger und Mehlhorn (1989).

46. Vgl. Bletzinger (1990), Ramm, Bletzinger und Kimmich (1990).

## Literatur

Abel, J. F.; Gould, P. L.

“Buckling of Concrete Cooling Tower Shells”

*Concrete Shell Buckling*, E. P. Popov and S. J. Medwadowski, Eds., American Concrete Institute, Publication SP-67, Detroit, Michigan, 1981, pp. 135-160

Abel, J. F.; Billington, D. P.; Nagy, D. A.; Wiita-Dworkin, C.

“Buckling of Cooling Towers”

*Journal of the Structural Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ASCE, Vol.108, No. ST10, October, 1982, pp. 2162-2174

Adam, P.; Wyss, A.

*Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*

Verlag Paul Haupt, Bern, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1984, 136 pp.

Alpa, G.; Bozzo, E.; Corsanego A.; Grosso, A.

“Shape Determination for Shell Structures on Pointlike Supports”

*Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, n. 67, Aug. 1978, pp. 3-10

Andres, O. A.; Ortega, N. F.

“Experimental Design of Free Form Shell Roofs”

*Proceedings of the International IASS Symposium, “Spatial Structures at the Turn of the Millennium”*, September 2-6, 1991, Copenhagen, Denmark, Volume II - Structural Form, Kunstakademiets Forlag Arkitektskolen, pp. 69-74

Andres, O. A.

“Hacia la forma libre en las estructuras laminares”

*Informes de la Construcción*, no. 236, Dic. 1971, pp. 77-80

Aristoteles

*Kategorien*

Übers. und erl. von K. Oehler, 2. durchges. Aufl., Akademie Verlag, Berlin, 1986, 359 pp.

Aristoteles

*Metaphysik*

Übersetzt und erläutert von Dr. theol. E. Rolfes, Verlag von Felix Meiner, Leipzig; Erste Hälfte, Buch I-VII, zweite, verb. Aufl., 1920, 209 pp.; Zweite Hälfte, Buch VIII-XIV, 1904, 200 pp.

Bach, K.; Burkhardt, B.; Otto, F.

*Seifenblasen*

Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke (IL), Universität Stuttgart, Hrsg. Frei Otto, Nr. 18, Stuttgart, 1987, 400 pp.

Bacon, F.

*Novum Organum*

1620; *The Physical and Metaphysical Works of Lord Bacon*, incl. his *Dignity and Advancement of Learning, in nine books*; and his *Novum Organum; or, Precepts for the Interpretation of Nature*; by J. Devey, M.A., London, Henry G. Bohn, York Street, Covent Garden, 1853, pp. 380-567

Badr, I. E. A.

*Vom Gewölbe zum räumlichen Tragwerk*

Von der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften genehmigte Promotionsarbeit, Prom. Nr. 3275, Akerets Erben, Dielsdorf, 1962, 236 pp.

Bahndorf, J.

*Zur Systematisierung der Seilnetzrechnung und zur Optimierung von Seilnetzen*

Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft Nr. 373, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München, München, 1991, 69 pp.

Baumann, T.

“Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken”

*Der Bauingenieur*, 47. Jahrgang, 1972, pp. 367-377

Bazant, Z. P.; Panula, L.

“Practical Prediction of Time-Dependent Deformations of Concrete. Part V: Temperature Effect on Drying Creep. Part VI: Cyclic Creep, Nonlinearity and Statistical Variability”

*Matériaux et Constructions/Materials and Structures*, Bulletin, RILEM, Vol.12, No.69, Mai-Juin 1979, pp. 169-183

Beltrami, L.

*Il Pantheon rivendicato ad Adriano 117-138 d. D.*

Milano, 1929, 97 pp.

Benvenuto, E.

*An Introduction to the History of Structural Mechanics. Part II, Vaulted Structures and Elastic Systems*  
Springer Verlag, New York Inc., 1991, pp. 309-554

Bill, M.

“Der künstlerische Ausdruck der Konstruktion”

*Robert Maillart*, Bill, M., Verlag für Architektur AG, Erlenbach-Zürich, 1949, pp. 27-30

Billington, D. P.

*Thin Concrete Shell Structures*

Second Edition, McGraw-Hill Book Company, 1982, 373 pp.

Billington, D. P.

*The Tower and the Bridge*

Basic Books Inc., Publishers, New York, 1983, 306 pp.

Bletzinger, K.-U.

*Formoptimierung von Flächentragwerken*

Bericht Nr. 11 (1990), Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990, 253 pp.

Brockhaus-Enzyklopädie

“Struktur”

19. völlig neubearb. Aufl., 21. Band, Sr-Teo, F. A. Brockhaus, Mannheim, 1993, pp. 350-351

Buchert, K. P.

“Preliminary Stability Analysis of Concrete Cooling Towers”

*Proceedings of Symposium held at the University of Calgary, July 3-6, International Association for Shell Structures, IASS, Shell Structures and Climatic Influences*, P. G. Glockner, A. Ghali, Calgary, Canada, 1972, pp. 473-478

Buckminster Fuller, R.

*Inventions: the Patented Works of R. Buckminster Fuller*

St. Martin's Press, New York, 1983, 316 pp.

Buckminster Fuller, R.

*Synergetics. Exploration into the Geometry of Thinking*

Macmillan Publishing Co., Inc., New York, Collier Macmillan Publishers, London, 1975, 876 pp.

Burckhardt, J. J.

*Die Symmetrie der Kristalle. Von René-Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich*

Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1988, 196 pp.

- Burt, M.  
 “Surfaces Minimales et Polyèdres-Seles”  
*L'Architecture d'Aujourd'hui*, n. 143, Avril-Mai 1969, pp. 89- 96
- Calladine, C. R.  
*Theory of Shell Structures*  
 Cambridge University Press, Cambridge, 1983, 763 pp.
- Caminos, H.  
 “Research on Shape”  
*Bulletin of the International Association for Shell Structures*, n. 9, 1962
- Cardellach, F.  
*Filosofía de las Estructuras*  
 Librería de Agustín Bosch, Barcelona, 1910; Selección de textos, Tres Aportaciones Españolas a la  
 Concepción de las Estructuras, Instituto Técnico de Materiales y Construcciones, Intemac, Madrid, 1993,  
 pp. 15-32
- Cassirer, E.  
*Grundprobleme der Ästhetik*  
 Entnommen aus *Philosophie der Aufklärung*, J. C. B. Mohr (Paul Siebeck) Verlag, 3. Aufl., Tübingen,  
 1932; Schriften zur Kunsttheorie, Bd. V, H. Stünke, Hrsg., Alexander Verlag, Berlin, 1989, 99 pp.
- Clarke, J. H.  
 “The Hyperbolic Paraboloid as an Approximation to a Surface of Minimal Area”  
*Architectural Science Review*, Vol. 9, No. 2, pp. 53-54
- Cole, P. P.; Abel, J. F.; Billington, D. P.  
 “Buckling of Cooling-Tower Shells: State-of-the-Art”  
*Journal of the Structural Division*, Proceedings ASCE, Vol. 101, No. ST6, June, 1975, pp. 1185-1203
- Collins, G. R.  
 “Antonio Gaudí and the Uses of Technology in Modern Architecture”  
*Civil Engineering: History, Heritage and the Humanities*, Selected Papers from The First National  
 Conference, Vol. I, D. P. Billington, R. Mark, Conference Co-directors, Princeton University, Oct. 14, 15  
 and 16, 1970
- COMAP - Consortium for Mathematics and Its Applications; Garfunkel, S.; Steen, L. A.; (Hrsg.)  
*Mathematik in der Praxis. Anwendungen in der Wirtschaft, Wissenschaft und Politik*  
 Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg, 1989, 294 pp.
- Critchlow, K.  
*Order in Space. A Design Source Book*  
 Thames and Hudson, London, 1969, 120 pp.
- Csonka, P.  
 “Point-Supported Shells with Free Boundary”  
*Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Tomus 75 (1-4), 1973, pp. 121-136
- Culmann, C.  
*Die Graphische Statik*  
 Zweite neu bearbeitete Auflage, Erster Band, Verlag von Meyer & Zeller, Zürich, 1875, 644 pp.
- Der, T. J.; Fidler, R.  
 “A Model Study of the Buckling Behavior of Hyperbolic Shell”  
*Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Vol.41, Sept. 1968, pp.105-118
- Descartes, R.  
*La Géométrie*  
 “The Geometry of René Descartes”, transl. from the French and Latin by D. E. Smith and M. L. Latham,  
 with a facsimile of the first edition, 1637, Dover Publications, 1954, 243 pp.

- Descartes, R.  
*Progymnasmata de solidorum elementis*  
*Exercices pour les éléments des solides. Essai en complément d'Euclide*; Ed. critique avec introd., trad., notes et commentaires par P. Costabel, Presses Universitaires de France, Paris, 1987, 119 pp.
- Dulácska, E  
 "Buckling of Elastic-Plastic Shells"  
*Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, n. 68, Dec. 1978, pp. 15-20
- Dulácska, E  
 "Buckling of Reinforced Concrete Shells"  
*Journal of Structural Division*, Proc. ASCE, Vol. 107, ST 12, 1981, pp. 2381-2401
- Dulácska, E.  
 "The Influence of Creep on the Stability of Shells"  
*Proceedings of the IASS Symposium*, 9-14 June 1980, University of Oulu, Oulu, Finland, Acta Univ. Oul. C 16, 1980, Artes Constr. 3, pp. 87-97
- Dykes, A. R.  
 "Experimental and Theoretical Studies of some Folded Plate Structures"  
*Proceedings IASS Symposium*, Warsaw, Sept., 2-5, 1963, Non-Classic Shell Problems, W. Olszak and A. Sawczuk, Eds., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964, pp. 941-976
- Eco, U.  
*The Aesthetics of Thomas Aquinas*  
 Prev. publ. as *Il problema estetico in Tommaso Aquino*, Milan, 1970; Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1988, 287 pp.
- Einstein, A.; Infeld, L.  
*Die Evolution der Physik*  
 Paul Zsolnay Verlag, Wien, 1950, 352 pp.
- Emerton, N. E.  
*The Scientific Reinterpretation of Form*  
 Cornell University Press, Ithaca and London, 1984, 318 pp.
- Emmerich, D. G.  
 "Les Structures"  
*L'Architecture d'Aujourd'hui*, n. 141, Decembre 1968 - Janvier 1969, pp. 4-14
- Enami, A.  
 "Some Experiments and the Mechanism Conditions of Reinforced Concrete Prismatic Folded Plate Structures"  
*Proceedings IASS Symposium*, Warsaw, Sept., 2-5, 1963, Non-Classic Shell Problems, W. Olszak and A. Sawczuk, Eds., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964, pp. 1041-1065
- Esquillan, N.  
 "Palais des Expositions au Centre National des Industries et des Techniques à Paris"  
*Bulletin of the International Association for Shell Structures*, n. 4, a-16, 1960
- Fenves, S. J.; Branin, F. H.  
 "Network-Topological Formulation of Structural Analysis"  
*Journal of the Structural Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ASCE, Vol. 89, No. ST4, August 1963, pp. 483-514
- Ferguson, E. S.  
*Engineering and the Mind's Eye*  
 The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1992, 241 pp.

- Fialho, J. F. L.  
*Princípios Orientadores do Projecto de Barragens Abóbada*  
 Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Publ. 65, Lisboa, 1955, 33 pp.
- Flores, C.  
*Gaudí, Jujol y el Modernismo Catalán*  
 Colección Imagen de España, Aguilar, Madrid, 1982, Vol.1, 373 pp., Vol. 2, 307 pp.
- Flügge, W.  
*Statik und Dynamik der Schalen*  
 Zweite Auflage, Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1957, 286 pp.
- Friedmann, H.  
*Die Welt der Formen. System eines morphologischen Idealismus*  
 Zweite, veränderte und ergänzte Auflage, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1930, 519 pp.
- Gabo, N.  
 "Plastik: Bildnerie und Raumkonstruktion"  
 zum ersten Mal erschienen in *Circle*, 1937; *Naum Gabo, Ein russischer Konstruktivist in Berlin, 1922-1932*, Verlag Dirk Nishen, 1989, pp. 132-139
- Gabriel, K.  
 "Die Bewertung der Qualität von Ingenieurbauten"  
*DAfStb-Forschungskolloquium*, Beiträge zum 30. Forschungskolloquium am 04. und 05. November 1994 an der Universität Stuttgart, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, 1994, pp. 103-110
- Galilei, G.  
*Il Saggiatore*  
 Roma, 1623; Ed. française, C. Chauviré, *L'Essayeur de Galilée*, Annales Littéraires de l'Université de Besançon, 234, Les Belles Lettres, Paris, 1980, 307 pp.
- Ghyka, M. C.  
*Esthétique des Proportions dans la Nature et dans les Arts*  
 Librairie Gallimard, 1927; Collection Gnose, J.-P. Bertrand, Ed., Le Rocher, Monaco, 1987, 320 pp.
- Giedion, S.  
*Space, Time and Architecture. The Growth of a New Tradition*  
 The Harvard University Press, Cambridge, Mass., U.S.A., 1941, sixth printing, 1946, 601 pp.
- Gioncu, V.  
*Thin Reinforced Concrete Shells. Special Analysis Problems*  
 A Wiley-Interscience Publication, Editura Academiei, Bucaresti, John Wiley & Sons, Chichester New York Brisbane Toronto, 1979, 500 pp.
- Girkmann, K.  
*Flächentragwerke*  
 Sechste Auflage, Springer Verlag, Wien, 1963, 632 pp.
- Goethe, J. W. v.  
*Zur Morphologie*  
 Erster Band, 1817-1822, zweiter Band, 1823-1824, und spätere Erweiterungen; Goethe, Die Schriften zur Naturwissenschaft, hrsg. im Auftr. der Deutschen Akademie der Naturforscher (Leopoldina) zu Halle, R. Matthaei, W. Troll, L. Wolf, Bearb. von D. Kuhn, Hermann Böhlau Nachfolger, Weimar, Neunter Band, *Morphologische Hefte*, 1954, 389 pp., Zehnter Band, *Aufsätze, Fragmente, Studien zur Morphologie*, 1964, 408 pp.
- Gopalakrishnan, K. S.; Neville, A. M.; Ghali, A.  
 "Creep Poisson's Ratio of Concrete under Multiaxial Compression"  
*Journal of the American Concrete Institute*, No. 12, V. 66, December, 1969, pp. 1008-1020

Graefe, R.

“Heinrich Hübsch als Konstrukteur”

*Heinrich Hübsch, 1795-1863, Der große badische Baumeister der Romantik*, Ausstellung des Stadtarchivs Karlsruhe und des Instituts für Baugeschichte der Universität Karlsruhe, Prinz-Max-Palais, 17. Dez. 1983 - 25. März 1984, Verlag C. F. Müller, Karlsruhe, 1983, pp. 184-189

Graf, H.; Thomas, H.

“Zur Frage des Gleichgewichts von Vierecksnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden. Zweiter Teil: Rückungsfadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur auf den Scherkschen Minimalflächen und auf den Wendelschrauben”

*Mathematische Zeitschrift*, 51. Band, Springer-Verlag, Berlin, 1947, pp. 166-196

Griggs, P. H.

“Buckling of Reinforced Concrete Shells”

*Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings, ASCE, Vol. 97, No. EM3, June 1971, pp. 687-700

Gründig, L.

*Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängenetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichsrechnung*

Sonderforschungsbereich 64, Weitgespannte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Mitteilungen 34/1975, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, 1976, 159 pp.

Gunten, H. v.

“Gedanken zur Brückenästhetik”

*Schweizer Ingenieur und Architekt*, Heft 6, 1983, pp. 157-160

Hanssmann, F.

*Einführung in die Systemforschung. Methodik der modellgestützten Entscheidungsvorbereitung* 3., völlig überarb. Aufl., R. Oldenbourg Verlag, München, 1987, 242 pp.

Harries, K. A.

“Concrete Construction in Early Rome”

*Concrete International*, Vol. 17, No. 1, January, 1995, pp. 58-62

Hartmann, F.

*Ästhetik im Brückenbau unter besonderer Berücksichtigung der Eisenbrücken*

Franz Deuticke, Leipzig und Wien, 1928, 148 pp.

Hayman, B.; Chilver, A. H.

*The Effects of Structural Degeneracy on the Stability of Cooling Towers*

Report 71-17, Department of Engineering, University of Leicester, Leicester, England, June, 1971, 22 pp.

Hegel, G. W. F.

*Vorlesungen über die Ästhetik*

Erster und zweiter Teil, nach der zw. Aufl. von H. G. Hoto, 1842; R. Bubner, Hrsg., Philipp Reclam Jun. Stuttgart, 1989, 693 pp.

Hersch, J.

*L'Être et la Forme*

Thèse présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Genève pour obtenir le Grade de Docteur Ès Lettres, Thèse n°. 114, Éditions de la Baconnière, Genève, 1946, 247 pp.

Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S.

*Anschauliche Geometrie*

Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932, 310 pp.

Hildebrandt, S.; Tromba, A.

*Mathematics and Optimal Form*

Scientific American Books, New York, 1985, 215 pp.

- Hornbogen, E.  
*Werkstoffe*  
Zweite, Neub. u. erw. Aufl., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1979, 355 pp.
- Hoschek, J.  
*Mathematische Grundlagen der Kartographie*  
2., überarb. u. erw. Aufl., Bibliographisches Institut, Mannheim Wien Zürich, 1984, 210 pp.
- Hossdorf, H.  
*Modelos reducidos. Método de cálculo*  
Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, Madrid, 1972, 270 pp.
- Huang, A.C.  
"Unsymmetric Buckling of Thin Shallow Spherical Shells"  
*Journal of Applied Mechanics*, Transaction of ASME, Vol. 31, Sept. 1964, pp. 447-457
- Hume, D.  
*Of the Standard of Taste*  
"Four Dissertations, I. The Natural History of Religion, II. Of the Passions, III. Of Tragedy, IV. Of the Standard of Taste", Printed for A. Millar, in the Strand, London, MDCCLVII, pp. 204-240
- Huning, A.  
*Das Schaffen des Ingenieurs. Beiträge zu einer Philosophie der Technik*  
Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage, Verein Deutscher Ingenieure, Hrsg., VDI-Hauptgruppe Der Ingenieur in Beruf und Gesellschaft, Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure, Düsseldorf, 1978, 226 pp.
- Huxley, J.  
"The Evolutionary Process"  
*Evolution as a Process*, Ed. by Julian Huxley, A. C. Hardy, E. B. Ford, George Allen & Unwin Ltd, 1954, pp. 1-23
- Isler, H.  
"Moderner Schalenbau"  
*Zum Werk von Felix Candela: die Kunst der leichten Schalen*, Arcus, Architektur und Wissenschaft, 18, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller, Köln, 1992, pp. 50-66
- Isler, H.  
"The Stability of Thin Concrete Shells"  
*Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium, Buckling of Shells*, Universität Stuttgart, Germany, May 6-7, 1982, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, pp. 645-672
- Isler, H.  
"Zur Korrelation von Formgebung und Stabilität bei dünnen Schalenträgwerken"  
*2. Internationales Symposium, Weitgespannte Flächentragwerke*, 14.-18. Mai 1979, Stuttgart, 2: Berichtsheft, Sonderforschungsbereich 64, Weitgespannte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, pp. 175-194
- Jaeger, F. M.  
*Lectures on the Principle of Symmetry and its Applications in All Natural Sciences*  
Publishing Company Elsevier, Amsterdam, 1917, 333 pp.
- Janet, P.  
*Les Causes Finales*  
Deuxième Édition, Librairie Germer Baillière et Cie., Paris, 1882, 756 pp.
- Joedicke, J.  
*Schalentragwerke. Konstruktion und Gestaltung*  
Dokumente der Modernen Architektur, Beiträge zur Interpretation und Dokumentation der Baukunst, herausgeg. von J. Joedicke, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1962, 304 pp.

- Jonas, H.  
*Das Prinzip Verantwortung. Versuch einer Ethik für die technologische Zivilisation*  
 Lizenzausgabe mit freundl. Genehmigung des Insel Verlag, Frankfurt am Main, Suhrkamp Taschenbuch Verlag, erste Auflage, 1984, 426 pp.
- Jost, J.  
*Differentialgeometrie und Minimalflächen*  
 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994, 151 pp.
- Kabir, A. F.; Scordelis, A. C.  
 "Analysis of RC Shells for Time Dependent Effects"  
*Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, n. 69, Apr. 1979, pp. 3-13
- Kant, I.  
*Kritik der reinen Vernunft*  
 Neu hg. von T. Valentiner, Zehnte, um ein Sachreg. vermehrte Aufl., Der Philosophischen Bibliothek Bd. 37, Verlag von Felix Meiner, Leipzig, 1913, 861 pp.
- Kármán, T. v.; Tsien, H.-S.  
 "The Buckling of Spherical Shells by External Pressure"  
*Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 7, No. 2, 1939, pp. 43-50
- Kármán, T. v.; Tsien, H.-S.  
 "The Buckling of Thin Cylindrical Shells Under Axial Compression"  
*Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 8, No. 8, 1941, pp. 303-312
- Kavyrchine, M.  
 "Essais sur Voiles Minces en Vraie Grandeur"  
*Proceedings of the Symposium on Shell Research, RILEM-IASS.*, Delft, August 30 - September 2, 1961, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961, pp. 346-349
- Kenner, H.  
*Geodesic Math, and How to Use It*  
 University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., London, Engl., 1976, 172 pp.
- Kepler, J.  
*Harmonice Mundi*  
 1619; Johannes Kepler, Gesammelte Werke, Max Caspar, Hrsg., Bd. VI, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, MCMXXXX
- Kepler, J.  
*Mysterium Cosmographicum de Stella Nova*  
 1597; Johannes Kepler, Gesammelte Werke, Max Caspar, Hrsg., Bd. I, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, MCMXXXX
- Klowski, J.  
 "Das Entstehen der Begriffe Substanz und Materie"  
*Archiv für Geschichte der Philosophie*, Begr. von L. Stein, neu hg. von P. Wilpert, Walter de Gruyter & CO., Berlin, Band 48, 1966, pp. 2-42
- Koiter, W. T.  
*The Stability of Elastic Equilibrium*  
 Dissertation, *Over de stabiliteit van het Elastisch Evenwicht*, Technische Universiteit Delft, Nederland, 1945; Techn. Rept. AFFDL-TR-70-25, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright Patterson Air Force Base, Feb. 1970, 306 pp.
- Kollár, L.; Dulácska, E.  
*Buckling of Shells for Engineers*  
 A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Chichester New York Brisbane Toronto Singapore, 1984, 303 pp.

- Kollár, L.  
 “Schalenkonstruktionen”  
*Beton-Kalender 1984*, Bd. II, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1984, pp. 515-640
- Kolleger, J.; Mehlhorn, G.  
*Traglastversuch an einer freigeformten Stahlbetonschale*  
 Forschungsbericht aus dem Fachgebiet Massivbau der GhK, Nr. 7, Gesamthochschule Kassel - Universität, Fachbereich 14, Bauingenieurwesen, 1989, 53 pp.
- Kolleger, J.  
*Ein Materialmodell für die Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken*  
 Dissertation im Fachbereich Bauingenieurwesen der Gesamthochschule Kassel - Universität, Kassel 1988, 142 pp.
- Krätz, O.  
*Goethe und die Naturwissenschaften*  
 Verlag Georg D. W. Callwey, 1992, 236 pp.
- Lalvani, H.  
*Transpolyhedra, Dual Transformations by Explosion-Implosion*  
 Papers in Theoretical Morphology 1, Haresh Lalvani, New York, 1977, 84 pp.
- Larrabee, R. D.; Billington, D. P.; Abel, J. F.  
 “Thermal Loading of Thin Shell Concrete Cooling Towers”  
*Journal of the Structural Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, ASCE, Vol. 100, No. ST12, Dec., 1974, pp. 2367-2383
- Le Corbusier  
*Vers une Architecture*  
 Nouvelle Édition, revue et augmentée, Éditions Vincent, Fréal & Cie, Paris, 1958, 243 pp.
- Le Ricolais, R.  
 “Approche intuitive et approche raisonnée de la forme”  
*L'Architecture d'aujourd'hui*, n. 128, Oct.-Nov. 1966, pp. 81-83
- Léger, F.  
 “L'Esthétique de la Machine. L'Object fabriqué - L'Artisan et L'Artiste”  
*Bulletin de "L'Effort Moderne"*, no. 1, Janvier, 1924, pp. 5-7, no. 2, Février, 1924, pp. 8-12
- Leibniz, G. W.  
*Monadologie*  
 Neu übersetzt, eingeleitet und erläutert von H. Glockner, Philipp Reclam Jun., Stuttgart, 1994, 70 pp.
- Leonhardt, F.; Schlaich, J.  
*Vorgespannte Seilnetzkonstruktionen. Das Olympiadach in München*  
 Sonderforschungsbereich 64, Weitgespannte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Mitteilungen 19/1973, 1973, 54 pp.
- Leonhardt, F.  
 “Engineering structures and environment”  
*Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, n. 60, April, 1976, pp. 25-28
- Licht, K. de F.  
*The Rotunda in Rome. A Study of Hadrian's Pantheon*  
 Jutland Archeological Society, Publications VIII, Copenhagen, 1968, 344 pp.
- Linkwitz, K.; Gründig, L.; Hangleiter, U.; Bahndorf, J.  
*Mathematisch-numerische Methoden der Netzberechnung. Abschlußbericht Teilprojekt F2*  
 Sonderforschungsbereich 64, Weitgespannte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Mitteilungen 72/1984, Oktober 1984, 40 pp.

- Linkwitz, K.; Schek, H.-J.; Gründig, L.  
 “Die Gleichgewichtsbedingung von Seilnetzen unter Zusatzbedingungen”  
*Ingenieur-Archiv*, 43, 1974, pp. 183-192
- Linkwitz, K.  
 “Über eine neue Anwendung der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate: die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängernetzen”  
*Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, Festschrift zur 200. Wiederkehr des Geburtstages von Carl Friedrich Gauß, Band XXVII, 1977, pp. 121-153
- Lord, E. A.; Wilson, C. B.  
*The Mathematical Description of Shape and Form*  
 Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984, 260 pp.
- Lorenz, R.  
 “Achsenymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern”  
*Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, Bd. 52, Nr. 43, 1908, pp. 1706-1713
- Lorenz, R.  
 “Die nichtachsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder”  
*Physikalische Zeitschrift*, Bd. XII, 1911, pp. 241-260
- Luebkeman, C. H.  
*Structural Form of Large Public Halls of Reinforced Concrete. The Development of the Structural Form of Large Public Halls of Reinforced Concrete from 1898 to 1939 in Europe*  
 A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degree of Doctor of Technical Sciences, Diss. ETH No. 9795, 1992, 152 pp.
- MacDonald, W. L.  
*The Pantheon; Design, Meaning and Progeny*  
 Allen Lane, Penguin Books, London, 1976, 160 pp.
- Mark, R.  
 “Reinterpreting Ancient Roman Structure”  
*American Scientific*, Vol. 75, No. 2, March-April 1987, pp. 142-150
- Marrey, B.  
*Nicolas Esquillan. Un Ingénieur d'Entreprise*  
 Picard Éditeur, Association des amis de Nicolas Esquillan, Paris, 1992, 175 pp.
- Marti, P.  
 “Dimensioning and Detailing”  
*IABSE Colloquium*, Stuttgart 1991, IABSE, ETH-Hönggerberg, Zürich, 1991, pp. 411-443
- Mattheck, C.  
*Design in der Natur. Der Baum als Lehrmeister*  
 Rombach Wissenschaft, Reihe Ökologie, H. Steinlin, Hrsg., Bd. 1, Rombach Verlag, Freiburg, 1992, 242 pp.
- Medwadowski, S. J. et al. (IASS Working Group No. 5)  
*Recommendations for Reinforced Concrete Shells and Folded Plates*  
 International Association for Shell and Spatial Structures, Madrid, 1979, 66 pp.
- Migliari, R.  
*Le cupole geodetiche: guida all'uso di un'utopia*  
 Libreria Editrice, Roma, 1975, 103 pp.
- Mimram, M.  
*Structures et Formes. Étude appliquée à l'oeuvre de Robert Le Ricolais*  
 Dunod, Presses Pont et Chaussées, Paris, 1983, 124 pp.

- Mittelstraß, J. (Hrsg.)  
 “Ästhetik”  
*Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Band 1: A-G, Bibliographisches Institut, Mannheim  
 Wien Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1980, pp. 191-198
- Mises, R. v.  
 “Der kritische Aussendruck zylindrischer Rohre”  
*Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, Bd. 58, Nr. 19, 1914, pp. 750-755
- Motro, R.  
 “An Approach to Structural Morphology”  
*Structural Morphology / Morphologie Structurale*, Proceedings of the First International Seminar on  
 Structural Morphology, Montpellier, 7-11 Sept., 1992, IASS Working Group 15, Laboratoire de Mécanique  
 et Génie Civil (Université de Montpellier II), Groupe Recherche et Réalisation de Structures Légères pour  
 l'Architecture (Ecole d'Architecture Languedoc Roussillon), pp. 1-11
- Nachtigal, W.  
*Phantasie der Schöpfung. Faszinierende Entdeckungen der Biologie und Biotechnik*  
 Hoffmann und Campe Verlag, Hamburg, 1974, 424 pp.
- Nervi, P. L.  
*Costruire Correttamente. Caratteristiche e Possibilità delle Strutture Cementizie Armate*  
 Seconda edizione riveduta ed ampliata, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1965
- Neut, A. v. d.  
*Die elastische stabiliteit van den dunwandigen bol*  
 Dissertation, Technische Universität Delft, Amsterdam, 1932, 105 pp.
- Nguyen-Tuong, B.  
*Eine nichtlineare Stabwerkstheorie und ihre Anwendungen zur Lösung von Problemen weitgespannter  
 Flächentragwerke*  
 Sonderforschungsbereich 64, Weitgespannte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, Mitteilungen 55/  
 1980, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, 1980, 102 pp.
- Nichols, R. L.  
 “Inflate It First”  
*Concrete International*, January 1986, pp. 61-64
- Nitsche, J. C. C.  
*Lectures on Minimal Surfaces*  
 Volume 1, Introduction, Fundamentals, Geometry and Basic Boundary Value Problems, Cambridge  
 University Press, Cambridge, 1989, 563 pp.
- Olszak, W.; Sawczuk, A.  
 “Inelastic Response of Thin Shells. Basic Problems and Applications”  
*Thin Shell Theory New Trends and Applications*, W. Olszak, Ed., CISM Courses and Lectures No. 240,  
 International Centre for Mechanical Sciences, Springer Verlag, Wien New York, 1980, pp. 211-241
- Ortega y Gasset, J.  
*La Rebelión de las masas*  
 Primera edición, 1930; Revista de Occidente en Alianza Editorial, Madrid, 1992, 294 pp.
- Otto, F.  
*Das hängende Dach: Gestalt und Struktur*  
 Nachdruck der 1954 im Bauwelt Verlag erschienenen Ausgabe, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1990,  
 166 pp.
- Otto, F. et al.  
*Natürliche Konstruktionen: Formen und Strukturen in Natur und Technik und Prozesse ihrer Entstehung*  
 Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 2. Aufl., 1985, 136 pp.

- Ove Arup & Partners  
*Ove Arup & Partners. 1946-1986*  
 Academy Editions, London / St. Martin's Press, New York, 1986, 216 pp.
- Pacioli, L.  
*Divine Proportion*  
 Ed. française de la "Divina Proportione de Fra Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro, 1509"; Librairie du Compagnonnage, 1980, 200 pp.
- Pearce, P; Pearce, S.  
*Polyhedra Primer*  
 Van Nostrand Reinhold Company, New York Cincinnati Toronto London Melbourne, 1978, 134 pp.
- Peccei, A.  
*Die Zukunft in unserer Hand. Gedanken und Reflexionen des Präsidenten des Club of Rome*  
 Verlag Fritz Molden, Wien München Zürich New York, 1981, 224 pp.
- Pessoa, F.  
*Livro do desassossego*  
 Organização e fixação de inéditos: Teresa Sobral Cunha, Editorial Presença, Lisboa, Vol. I, 1. ed., 1990, 270 pp., Vol. II, 1. ed., 1991, 275 pp.
- Peters, T. F.  
*Bauen und Technologie 1820-1914. Die Entstehung des modernen Bauprozesses*  
 Abhandlung zur Erlangung des Titels eines Doktors der Technischen Wissenschaften der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Diss. ETH Nr. 5919, 1977, 279 pp.
- Peters, T. F. et al.  
*Die Entwicklung des Grossbrückenbaus*  
 ETH Zürich, Verlag der Fachvereine an den Schweizerischen Hochschulen und Techniken, 2. Auflage, Januar 1980, 188 pp.
- Petersen, C.  
*Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*  
 2. Aufl., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1982, 959 pp.
- Piñero, E. P.  
 "Structures Réticulées"  
*L'Architecture d'Aujourd'hui*, no. 141, Decembre 1968 / Janvier 1969, pp. 76-81
- Plato  
*Platons Dialoge Timaios und Kritias*  
 Übers. und erläut. v. O. Apelt, Verlag von Felix Meiner, Leipzig, 1919, 224 pp.
- Popov, E. P.; Medwadowski, S. J.  
 "Stability of Reinforced Concrete Shells: State-of-the-Art Overview"  
*Concrete Shell Buckling*, E. P. Popov and S. J. Medwadowski, Eds., American Concrete Institute, Publication SP-67, Detroit, Michigan, 1981, pp. 1-42
- Popper, K. R.  
*Logik der Forschung*  
 1. Auflage 1935; Achte, weiter verbesserte und vermehrte Auflage, J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen, 1984, 477 pp.
- Pugh, A.  
*Polyhedra, a Visual Approach*  
 University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., London, Engl., 1976, 118 pp.
- Quaisser, E.  
*Diskrete Geometrie*  
 Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1994, 310 pp.

- Ramm, E.; Schunck, E. (Hrsg.)  
*Heinz Isler, Schalen. Katalog zur Ausstellung*  
 Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1986, 107 pp.
- Ramm, E.; Bletzinger, K.-U.; Kimmich, S.  
 "Trimming of Structures by Shape Optimisation"  
*Proceedings*, 2nd International Conference, Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures,  
 N. Bicanic and H. Mang, Eds., Pineridge Press, Swansea, U.K., 1990, pp. 491-501
- Reissmann, G.  
*Die Ausgleichsrechnung. Grundlagen und Anwendungen in der Geodäsie*  
 Fünfte, erweiterte und bearbeitete Auflage, VEB, Verlag für Bauwesen, Berlin, 1980, 368 pp.
- Rice, P.  
*An Engineer Imagines*  
 Artemis, London Zurich Munich, 1994, 191 pp.
- Robertson, A.  
 "The Strength of Tubular Struts"  
*Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, Vol. CXXI, No. A 788, 1928, pp. 558-585
- Rocha, M.; Serafim, J. L.  
*Détermination Expérimentale de la Forme du Barrage de Vajont*  
 Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbonne, Janvier 1957
- Rosenberg, N.; Vincenti, W. G.  
*The Britannia Bridge. The Generation and Diffusion of Technological Knowledge*  
 The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1978, 107 pp.
- Rostásy, F. S.  
*Baustoffe*  
 Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart Berlin Köln Mainz, 1983, 230 pp.
- Russell, B.  
*An Inquire into Meaning and Truth*  
 George Allen and Unwin, Ltd., 1940, fourth impression, 1951, 352 pp.
- Saarinen, E.  
*The Search for Form in Art and Architecture*  
 Orig. publ. *Search for Form*, Reinhold Pub. Corp., N. Y., 1950; Dover Publications, Inc., New York, 1985,  
 354 pp.
- Saint-Éxupéry, A. de  
*Terre des Hommes*  
 Éditions Gallimard, 1939, Collection Folio, 1992, 183 pp.
- Sanchez del Rio, I. de P.  
 "Sur l'importance des formes dans la construction de grands voûtes pouvant surpasser les 200 m de portée"  
*Bulletin of the International Association for Shell Structures*, n. 9, 1962, (24 pp.)
- Sawczuk, A.  
 "On Experimental Foundations of the Limit Analysis Theory of Reinforced Concrete Shells"  
*Proceedings of the Symposium on Shell Research*, RILEM-IASS., Delft, August 30 - September 2, 1961,  
 North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961, pp. 217-231
- Schek, H.-J.  
 "The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks"  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, 1974, pp. 115-134

- Schlaich, J.  
 “Zur Gestaltung der Ingenieurbauten oder Die Baukunst ist unteilbar”  
*Bauingenieur*, 61. Jahrgang, 1986, pp. 49-61
- Schnobrich, W. C.  
 “Reflections on the Behaviour of Reinforced Concrete Shells”  
*Engineering Structures*, Vol. 13, April 1991, pp. 199-210
- Seide, P.  
 “Stability of Cylindrical Reinforced Concrete Shells”  
*Concrete Shell Buckling*, E. P. Popov and S. J. Medwadowski, Eds., American Concrete Institute, Publication SP-67, Detroit, Michigan, 1981, pp. 43-62
- SFB 230  
*Design und Optimierung in Natur und Technik?*  
 Arbeitsgespräch des SFB 230, Stuttgart, 18. u. 19. Feb., 1991, Sonderforschungsbereich 230, Natürliche Konstruktionen, Universität Stuttgart, Universität Tübingen, Konzepte SFB 230, Heft 35, Feb. 1991, 54 pp.
- Shen, J.-H.  
*Lineare und nichtlineare Theorie des Kriechens und der Relaxation von Beton unter Druckbeanspruchung*  
 Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfSbt), Beuth Verlag, Berlin, 1992, 36 pp.
- Smith, C. O.  
*The Science of Engineering Materials*  
 Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977, 491 pp.
- Smith, P. G.  
*Membrane Shapes for Shell Structures*  
 PhD. Dissertation in Engineering, University of California, Berkeley, Dec. 1969, 249 pp.
- Sobek, W.  
*Auf pneumatisch gestützten Schalungen hergestellte Betonschalen*  
 Verlag Ursula Sobek, Stuttgart, 1987, 128 pp.
- Southwell, R. V.  
 “On the Collapse of Tubes by External Pressure”  
*The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. XXV, No. CXLIX, May, 1913, pp. 687-698, Vol. XXVI, No. CLIII, Sept., 1913, pp. 502-510, Vol. XXIX, Jan. 1915, pp. 67-76
- Spengler, O.  
*Der Untergang des Abendlandes. Umriss einer Morphologie der Weltgeschichte*  
 C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung (Oskar Beck), München, 1923; Nachdruck, Verlag C. H. Beck, München, 1969, 1249 pp.
- Straub, H.  
*Die Geschichte der Bauingenieurkunst. Ein Überblick von der Antike bis in die Neuzeit*  
 4., überarb. und erw. Aufl., P. Zimmermann, Hrsg., N. Schnitter, H. K. Straub Jun., Mitarb., Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1992, 437 pp.
- Struik, D.  
*Lectures on Differential Geometry*  
 Second Ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1961, 232 pp.
- Tandon, M.  
 “Practical Aspects of Improved Buckling Strength of Concrete Shells”  
*Proceedings of the Intern. Symposium on Innovative Applications of Shells and Spatial Forms*, Nov. 21-25, 1988, Bangalore, India, Oxford & IBH Publishing Co., New Delhi, 1988, pp. 383-391

- Tarragó, S.  
 “Gaudí entre la Estructura y la Forma”  
*Architecture and Urbanism*, A+U, Tokyo, No. 86, Dec. 1977, pp. 12-152
- Tedesko, A. et al. (ACI Committee 334)  
*Concrete Shell Structures - Practice and Commentary*  
 ACI 334.1R-64, ACI Manual of Concrete Practice, 1987, Part 4, American Concrete Institute, Detroit, Michigan
- Teilhard de Chardin, P.  
*Hymne de l'Univers*  
 Éditions du Seuil, Paris, 1961, 169 pp.
- Teilhard de Chardin, P.  
*Le Phénomène Humain*  
 Éditions du Seuil, Paris, 1955, 148 pp.
- Temko, A.  
*Eero Saarinen*  
 George Braziller, New York, 1962, 128 pp.
- Thomas, H. H.  
*The Engineering of Large Dams*  
 John Wiley & Sons, London New York Sydney Toronto, 1976, Part I; 376 pp.
- Thompson, D. W.  
*On Growth and Form*  
 First Edition, 1917, 793 pp., Second enlarged Edition, 1942, 1116 pp.; Abridged Edition, J. T. Bonner, Ed., Cambridge University Press, 1961, Canto Edition, 1992, 346 pp.
- Timoshenko, S.  
 “Einige Stabilitätprobleme aus der Elastizitätstheorie”  
*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 58. Bd., 1910, pp. 337-385
- Tomlow, J.  
*Das Modell*  
 Mitteilungen des Instituts für leichte Flächentragwerke, Publikation IL 34, F. Otto, Hrsg., Universität Stuttgart, 1989, 272 pp.
- Torroja, E.  
*Razón y Ser de los Tipos Estructurales*  
 Reimpresión de la quinta edición, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, Madrid, 1984, 403 pp.
- Usher, A. P.  
*A History of Mechanical Inventions*  
 Harvard University Press, 1929, Revised Edition, 1954, 450 pp.
- Vandepitte, D; Rathé, J.; Weymeis, G.  
 “Experimental Investigation into the Buckling and Creep Buckling of Shallow Spherical Caps Subjected to Uniform Radial Pressure”  
*Proceedings*, World Congress and 20th Anniversary of IASS, Madrid, Sept., 1979, Vol. 1, pp. 1.1-1.16
- Veltman, K. H.  
*Studies on Leonardo da Vinci I. Linear Perspective and the Visual Dimensions of Science and Art*  
 Deutscher Kunstverlag, München, 1986, 534 pp.
- Viollet-le-Duc, E.  
*L'Éclectisme Raisoné*  
 Choix de textes et préface de Bruno Foucart, Éditions Denoël, Paris, 1984, 335 pp.

- Vitruvius, M. P.  
*Zehn Bücher über Architektur*  
*De architectura libri X*, Übersetzt und erläutert von J. Prestel, 3. Aufl. Verlag Valentin Koerner, Baden-Baden, 1974, 603 pp.
- Vittore, P. J.  
 "Thin Shell Structures using inflated Forms & Techniques"  
*Proceedings of the International Conference on the Design and Construction of Non-Conventional Structures*, London, 8th-10th Dec., 1987, Civil-Comp Press, Edinburgh, Volume 1, pp. 161-166
- Wagner, R.  
*Technisches Handeln als formerzeugender Vorgang beim Bauen*  
 Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung, Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion, Universität Stuttgart, 1991, 210 pp.
- Weizsäcker, C. F. v.  
 "Technik als Menschheitsproblem"  
*Literatur im Industriezeitalter 1*, Vortrag zur Ausstellung "Literatur im Industriezeitalter" in Marbach am Neckar, 9. Mai 1987, Deutsche Schillergesellschaft, Marbach am Neckar, 1987, pp. 1-16
- Wells, A. F.  
*Three-Dimensional Nets and Polyhedra*  
 A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York London Sydney Toronto, 1977, 268 pp.
- Whyte, L. L.  
 "Atomismus, Struktur und Form. Über die Naturphilosophie der Form"  
*Struktur in Kunst und Wissenschaft*, G. Kepes, Hrsg., George Braziller, Inc., New York, La Connaissance, Brüssel, Alleinauslieferung Weber, Paris, 1967, pp. 20-28
- Williams, D. C.  
 "Form and Matter"  
*The Philosophical Review*, Cornell University, Ithaca, New York, Vol. LXVII, 1958, pp. 291-312, 499-521
- Wilpert, P.  
 "Das Phänomen Technik"  
*VDI-Zeitschrift*, Verein Deutscher Ingenieure, Bd. 104, Nr. 15, 1962, pp. 684-688
- Wlassow, W. S.  
*Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*  
 Erschienen im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, Moskau, 1949; Akademie-Verlag, Berlin, 1958, 661 pp.
- Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.  
*The Finite Element Method*  
 4th Ed., Vol. 2, "Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity", McGraw-Hill Book Comp., London, 1991, 807 pp.
- Zoelly, R.  
*Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale*  
 Promotionsarbeit zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften, Eidg. Technische Hochschule Zürich, Zürich, 1915, 84 pp.
- Zwicky, F.  
*Entdecken, Erfinden, Forschen im Morphologischen Weltbild*  
 Fritz Zwicky-Stiftung, Glarus, Verlag Baeschlin, Glarus, 2. Aufl., 1989, 268 pp.

## Bildnachweise

- Bild 2.2, pp. 16: Licht (1968)
- Bild 2.3, pp. 19: Peters (1979) / Marray (1992)
- Bild 2.4, pp. 20: Otto (1985)
- Bild 2.5, pp. 23: Becker, H.-J., *Concorde*, Motorbuch Verlag, Stuttgart, 1991, 149 pp.
- Bild 2.6, pp. 26: Di Crescenzo, C. et al., *Alberto Giacometti. Sculture, Dipinti, Disegni*, Palazzo Reale, Milano, 26 gennaio - 2 aprile 1995, Artificio Ed. S.r.l., Firenze, 1995, 335 pp.
- Bild 2.7, pp. 27: Temko (1962)
- 
- Bild 3.3, pp. 30: Thompson (1992)
- Bild 3.7, pp. 33: Otto (1985)
- Bild 3.10, pp. 35: Wagner (1991)
- Bild 3.11, pp. 36: Otto (1985)
- 
- Bild 4.18, pp. 58: Bach, Burkhardt und Otto (1978)
- Bild 4.19, pp. 59: Ibid.
- Bild 4.35, pp. 78: Kepler (1978)
- 
- Bild 6.7, pp. 126: Straub (1992)
- Bild 6.8, pp. 127: Graefe (1983)
- Bild 6.9, pp. 127: Flores (1983)
- Bild 6.10, pp. 128: Ibid.
- Bild 6.12, pp. 130: Rocha, M. et al., "Études Expérimentales de Barrages a Voûtes Multiples: Membranes et Modèles", *Bulletin RILEM*, Juin, 1961, pp. 40-51
- Bild 6.14, pp. 132: Caminos (1962)
- Bild 6.15, pp. 132: Goethe (1954) / Isler, H., "New Shapes for Shells", *Bulletin of the International Association for Shell Structures*, n. 9, 1961
- Bild 6.16, pp. 133: Ramm und Schunck (1986)
- Bild 6.17, pp. 134: Ibid.
- Bild 6.18, pp. 134: Ibid.
- Bild 6.19, pp. 135: Isler (1992)
- Bild 6.20, pp. 136: Otto (1986)
- Bild 6.21, pp. 137: Bach, Burkhardt und Otto (1987) / Otto (1986)
- Bild 6.22, pp. 138: Leonhardt und Schlaich (1973)
- Bild 6.26, pp. 146: Linkwitz, K., "Formfindung eines Computermodells", *Deutsche Bauzeitung*, 123. Jahrgang, 4. April 1989, pp. 64-69
- 
- Bild A2, pp. 162: Marti (1991)
- Bild A3, pp. 168: Linkwitz (1977)
- Bild A4, pp. 169: Ibid.
- Bild A5, pp. 171: Ibid.