1. Sep. 1995

Diss. ETH No. 11182

Cohomology Operations from S^1-Cobordisms in Floer Homology

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
Matthias Schwarz
Dipl. Math., Ruhr-Universität Bochum
born October 16, 1967
citizen of the Federal Republic of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Helmut Hofer, examiner
Prof. Dr. Eduard Zehnder, co-examiner

1995

Abstract

In this work, Floer homology is considered as a relative Morse theory for the symplectic action functional on the loop space of a symplectic manifold (M, ω). It is assumed that M is closed and the cohomology classes $\{\omega\}, c_1(TM) \in H^2(M)$ vanish on $\pi_2(M)$. In Floer homology the relative gradient flow for the Hamiltonian action functional is analysed by means of a class of nonlinear Fredholm operators for maps of the infinite standard cylinder $\mathbb{R} \times S^1$ into M. The operators involved are elliptic partial differential operators of Cauchy-Riemann type. The boundary conditions are given by contractible non-degenerate 1-periodic solutions of a fixed Hamiltonian equation.

It is shown that the analytical concept of Floer homology for these nonlinear Cauchy-Riemann operators can be generalized from the standard cylinder to arbitrary Riemann surfaces which are either closed or have ends which are endowed with the standard cylindrical structure and carry a specified orientation. A nonlinear Fredholm analysis is used to define algebraic operations on the Floer homology groups. In our work the equivalent description as a cohomology theory is chosen. Under the specified conditions these groups are known to be canonically isomorphic to the singular homology of M as a graded $\mathbb{Z}_2$-vector space. The cohomological operations associated to Riemann surfaces give rise to further algebraic structures on this graded vector space.

The main result is that the Floer cohomology $HF^*(M, \mathbb{Z}_2)$ carries the structure of a $\mathbb{Z}$-graded associative and commutative algebra over $\mathbb{Z}_2$ with unit and with a non-degenerate symmetric bilinear form.

The operation $Z(\Sigma)$ on Floer cohomology associated to a Riemann surface Σ is defined by counting solutions of nonlinear Cauchy-Riemann type partial differential equations under generic conditions. It is proven that the operator $Z(\Sigma)$ is uniquely determined by the topological type of the model surface Σ, that is, the oriented homeomorphisms class of the compactified surface. Here, the oriented cylindrical ends are compactified as $(0,1] \times S^1$ and $[-1,0) \times S^1$, respectively. Thus, every such surface can be viewed as an oriented S^1-cobordism. It turns out that our theory leads to a functor Z which assigns to each such cobordism Σ with $a+b$ ends of specified orientation a multi-linear operator $Z(\Sigma)\colon \bigotimes^a HF^* \to \bigotimes^b HF^*$. It is proven that this functor Z satisfies the axioms of a topological field theory in dimension $1+1$ in the sense of Atiyah, [3]. This is equivalent to describing the vector space HF^* as an algebra over $\mathbb{Z}_2$ with unit and non-degenerate bilinear form compatible with the multiplication.

Altogether, our work establishes a multiplicative structure on Floer homology. The multiplication is associated to the topological type of a model surface with oriented boundary given by the standard compact 2-disk where two open disks are removed from the interior. The so-called the pair-of-pants product is a multiplicative operation of degree n on the Floer cohomology HF^*, if $\dim M = 2n$. The unit element is associated to the standard disk and has the degree n. The non-degenerate bilinear form is represented by an annulus with boundary circles oriented in opposite direction. The latter bilinear form on HF^* of degree 0 corresponds to the Poincaré duality under the canonical vector space isomorphism $HF^*(M, \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-*}(M, \mathbb{Z}_2)$. With respect to this isomorphism, it is legitimate to denote the operators $Z(\Sigma)$ as cohomology operations.

The emphasis of this work lies on the construction of the cohomology operations based on the analysis of the nonlinear Fredholm operators in Floer homology theory.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird Floer-Homologie in der Version einer relativen Morse-Theorie für das Wirkungsfunktional auf dem Schleifenraum einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) behandelt. Es wird angenommen, daß die Mannigfaltigkeit M geschlossen ist und die Cohomologieklassen $\{\omega\}, c_1(TM) \in H^2(M)$ auf $\pi_2(M)$ verschwinden. In der Floer-Homologietheorie wird der relative Gradientenfluß für das Hamiltonsche Wirkungsfunktional mit Hilfe einer Klasse nichtlinearer Fredholm-Operatoren für Abbildungen des unendlich langen Standardzylinders $\mathbb{R} \times S^1$ in M definiert. Diese Operatoren sind elliptische partielle Differentialoperatoren von dem Typ eines quasilinearen Cauchy-Riemann-Operators. Die Randbedingung ist durch zusammenziehbare nichtdegenerierte 1-periodische Lösungen einer Hamilton-Gleichung gegeben.

Es wird gezeigt, daß das analytische Konzept der Floer-Homologietheorie für diese nichtlinearen Cauchy-Riemann-Operatoren von dem Standardzylinder auf Riemannsche Flächen verallgemeinert werden kann, die entweder geschlossen sind, oder deren Enden die Struktur des Standardzylinders tragen und jeweils mit einer festen Orientierung versehen sind. Diese erweiterte nichtlineare Fredholm-Analysis im Rahmen der Floer-Homologietheorie führt zu algebraischen Operationen auf den Floer-Homologiegruppen. In der vorliegenden Arbeit wird die äquivalente Beschreibung als eine Cohomologie-Theorie gewählt. Es ist bekannt, daß diese Cohomologie-Gruppen unter den gegebenen Bedingungen zur singulären Homologie der Mannigfaltigkeit M in kanonischer Weise isomorph sind, und zwar als graduierter Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$. Die Operationen, die den Riemannschen Flächen zugeordnet werden, führen zusätzliche algebraische Strukturen auf diesem graduierten Vektorraum ein.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit besagt, daß die Floer-Cohomologie $HF^*(M, \mathbb{Z}_2)$ die Struktur einer $\mathbb{Z}$-graduierten assoziativen und kommutativen Algebra über $\mathbb{Z}_2$ mit Eins und mit einer nichtdegenerierten symmetrischen Bilinearform trägt.

Die einer Riemannschen Fläche Σ zugeordnete Operation $Z(\Sigma)$ auf der Floer-Cohomologie wird durch Zählen von Lösungen einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung von Cauchy-Riemann-Typ unter generischen Bedingungen definiert. Es wird bewiesen, daß die den Riemannschen Flächen zugeordneten Operatoren auf der Floer-Cohomologie durch den topologischen Typ der Fläche *eindeutig bestimmt sind. Dieser Typ bezeichnet die* Homöomorphieklasse der jeweiligen kompaktifizierten Fläche, wobei die orientierten

zylindrischen Enden als $(0,1] \times S^1$ bzw. $[-1,0) \times S^1$ kompaktifiziert werden. Auf diese Weise wird eine solche Fläche als orientierter S^1-Cobordismus betrachtet. Es stellt sich heraus, daß die vorliegende Erweiterung der Floer-Homologietheorie einen Funktor Z beschreibt, der jedem solchen Cobordismus Σ mit $a+b$ Enden entsprechender Orientierung einen multilinearen Operator $Z(\Sigma)\colon \bigotimes^a HF^* \to \bigotimes^b HF^*$ zuordnet. Es wird gezeigt, daß dieser Funktor Z die Axiome einer topologischen Feldtheorie der Dimension $1+1$ gemäß [3] erfüllt. Dies ist zu einer Darstellung von HF^* als Algebra über $\mathbb{Z}_2$ mit Eins und nichtdegenerierter Bilinearform äquivalent. Es wird also in dieser Arbeit eine multiplikative Struktur in der Floer-(Co)-Homologie hergeleitet. Diese Produkt-Struktur wird dem topologischen Typ einer Fläche mit orientiertem Rand zugeordnet, die durch die kompakte Standard-Kreisscheibe gegeben ist, aus der zwei offene disjunkte Kreisscheiben entfernt worden sind. In der Floer-Cohomologie HF^* ist dieses sogenannte Hosen-Produkt eine Multiplikation vom Grad n, wobei $\dim M = 2n$ gilt. Das neutrale Element folgt aus dem Typ der Standard-Kreisscheibe und hat den Grad n. Die nichtdegenerierte Bilinearform ist durch einen kompakten Zylinder gegeben, dessen Randkurven entgegengesetzt orientiert sind. Diese Bilinearform auf HF^* entspricht unter dem kanonischen Vektorraum-Isomorphismus $HF^*(M,\mathbb{Z}_2) \cong H_{n-*}(M,\mathbb{Z}_2)$ der Poincaré-Dualität. Aufgrund dieser natürlich auftretenden Darstellung der Poincaré-Dualität werden an der gebräuchlichen Bezeichnung Floer-Homologie festgehalten und dennoch die Operatoren $Z(\Sigma)$ als Cohomologie-Operationen bezeichnet.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt in der Konstruktion der Cohomologie-Operationen mit Hilfe einer erweiterten Analysis für die nichtlinearen Fredholm-Operatoren der Floer-Homologietheorie.