

Diss. ETH No. 10925

Long-time Behaviour of the Yang-Mills Flow in four Dimensions

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
ANDREAS ERNST SCHLATTER
dipl. Math.
born May 22, 1966 in CH-Zürich
citizen of Gontenschwil (Switzerland)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Michael Struwe, examiner
Prof. Dr. Corneliu Constantinescu, co-examiner

1994

ABSTRACT

In this work we are going to investigate the long-time behaviour and the behaviour at singularities of the Yang-Mills heat flow in four dimensions with weak initial data. In addition we shall give an upper bound for the total number of singularities and improve this bound in a special situation.

Short-time existence and uniqueness of the Yang-Mills flow was recently shown by M.Struwe ([S₂], Theorem 2.3). Based on these results we shall prove in section 3 that, as the flow approaches a singular time, the energy of the flow concentrates in smaller and smaller neighbourhoods around singular points, and that in the limit, after an appropriate rescaling, a Yang-Mills connection over S^4 breaks off, taking a certain amount of energy with it.

In section 4 we shall show that, after a suitable gauge transformation, the Yang-Mills flow can be continued beyond the singularities and that only a finite number of singularities in space-time can occur. Furthermore we prove that the Yang-Mills flow converges to a limiting Yang-Mills connection on some limiting vector bundle, as time tends to infinity.

In the last section we give an upper bound for the total number of singularities provided the initial value was chosen to be close to an energy-minimizing (self-dual) connection.

KURZFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird das Langzeitverhalten und das Verhalten in der Nähe von Singularitäten des Yang-Mills Gradientenflusses in vier Dimensionen betrachtet. Zusätzlich wird eine obere Schranke für die totale Anzahl Singularitäten angegeben, die in einer speziellen Situation noch verbessert wird.

Kurzzeit Existenz und Eindeutigkeit des Yang-Mills Flusses wurden kürzlich von M. Struwe gezeigt ([S₂], Theorem 2.3). Basierend auf diesen Resultaten werden wir im dritten Abschnitt zeigen, dass sich die Energie des Flusses bei Annäherung an einen singulären Zeitpunkt in immer kleiner werdenden Umgebungen singulärer Punkte konzentriert und dass im Limes, nach einer geeigneten Reskalierung, ein Yang-Mills Zusammenhang über S^4 entsteht, der einen Teil der Gesamtenergie absorbiert.

Im vierten Abschnitt wird gezeigt, dass nach einer geeigneten Eichtransformation der Yang-Mills Fluss über die Singularitäten hinaus fortgesetzt werden kann und dass insgesamt höchstens eine endliche Anzahl Singularitäten in der Raum-Zeit auftreten können. Ferner wird bewiesen, dass der Fluss im Unendlichen gegen einen Yang-Mills Zusammenhang konvergiert.

Im letzten Abschnitt wird eine obere Schranke für die Anzahl Singularitäten angegeben unter der Voraussetzung, dass die Anfangsenergie nahe bei einem Energieminimum gewählt wurde.