

Diss. ETH Nr. 10752

Über
die projektiven
Moduln einer
Gruppenalgebra

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels
DOKTORIN DER MATHEMATIK
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von
Flavia Lanini
dipl. Math. ETH
geboren am 11. August 1964
von Frasco (TI)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. Urs Stammbach, Referent
Dr. Jacques Thévenaz, Korreferent

1994

Zusammenfassung

Für eine endliche Gruppe G mit Normalteiler N und zugehörigem Quotienten Q , einen Körper K und einen einfachen KQ -Modul S , der als KG -Modul durch Inflation betrachtet wird, werden Beziehungen zwischen den projektiven Überdeckungen $P_Q(S)$ und $P_G(S)$ von S untersucht.

Ausgehend von der Arbeit [1] von J. L. Alperin, M. J. Collins und D. A. Sibley, wo die Kompositionsfaktoren von $P_G(S)$ als Kompositionsfaktoren eines Tensorproduktes von einem KG -Modul mit $P_Q(S)$ beschrieben werden, wird die Frage untersucht, ob es einen KG -Modul M gibt so, dass $P_G(S)$ isomorph zum Tensorprodukt von M mit $P_Q(S)$ ist. Diese Frage ist äquivalent zur Frage, ob die projektive Überdeckung $P_N(K)$ vom trivialen KN -Modul K zu einem KG -Modul erweitert werden kann.

Ist N abelsch, dann gibt es ein cohomologisches Kriterium für die Existenz einer Erweiterung von $P_N(K)$, wie J. Thévenaz in [20] beweist. Falls N zusätzlich eine p -Gruppe ist, dann kann dieses Kriterium verwendet werden, um interessante Eigenschaften von G und von KG zu beweisen, die aus der Existenz einer Erweiterung der regulären Darstellung von N über K folgen.

Ferner wird die Loewy-Reihe der projektiven unzerlegbaren KG -Moduln beschrieben, falls N ein direkter Faktor von G ist und falls der Quotient Q eine p' -Gruppe ist. Besondere Aufmerksamkeit wird dann, für eine p -auflösbare Gruppe G , der zweiten und der dritten Loewy-Schicht der projektiven unzerlegbaren KG -Moduln gewidmet.

Abstract

Given a finite group G with a normal subgroup N and the corresponding quotient Q , a field K and a simple KQ -module S , some relationships between $P_Q(S)$, the projective cover of S , and $P_G(S)$, the projective cover of S considered as a KG -module, are studied.

The starting point is the work [1] by J. L. Alperin, M. J. Collins and D. A. Sibley, where a description of the composition factors of $P_G(S)$ is given in terms of composition factors of a tensor product of a KG -module with $P_Q(S)$. One of the aims of this work is to understand whether there is a KG -module M such that $P_G(S)$ is isomorphic to the tensor product of M with $P_Q(S)$. This is equivalent to the question whether $P_N(K)$, the projective cover of the trivial KN -module K , can be extended to a KG -module.

If one considers an abelian normal subgroup N , there is a cohomological criterion for the existence of an extension of $P_N(K)$, as described in [20] by J. Thévenaz. For an abelian normal p -subgroup N this criterion can be used to prove some interesting properties of G and of KG , which follow from the existence of an extension of KN .

Finally, the Loewy series of the projective indecomposable KG -modules is described when N is a direct factor of G and when the quotient Q is a p' -group. Furthermore, for any p -solvable group G , the second and the third Loewy layers of the projective indecomposable KG -modules are studied.