Diss. ETH No. 10286

Surface Order Large Deviation Behavior of the Ising Model in the Phase Transition Regime: A Fortuin-Kasteleyn Percolation Analysis

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels
DOKTOR DER MATHEMATIK
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von
ÁGOSTON PISZTORA
Dipl. Math. ETH
geboren am 19.8.1958
von Ungarn

angenommen auf Antrag von:
Prof. Dr. J.-D. Deuschel, Referent
Prof. C. M. Newman, Korreferent
Prof. Dr. A. S. Sznitman, Korreferent

1993

Abstract

We consider the d-dimensional Ising model for $d \geq 3$ in a large box Λ_n with ferromagnetic nearest neighbour interaction at inverse temperature β and denote by $\mu_{\Lambda_n}^{+,\beta}$ and $\mu_{\Lambda_n}^{0,\beta}$ the corresponding probability measures with + resp. free boundary conditions. Let $m_{\Lambda_n} = |\Lambda_n|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x$ be the (relative) magnetization inside the box. Assuming that β is above a limit of "slab thresholds" $\widehat{\beta}_c$, conjectured to coincide with the critical inverse temperature β_c, we show with the aid of an appropriate renormalization of the Fortuin-Kasteleyn (FK) model that $\lim_{n\to\infty} \int |m_{B(n)}| \, d\mu_{\Lambda_n}^{0,\beta} =: m^{*,0}(\beta)$ exists and for any a, b with $-m^{*,0} < a < b < m^{*,0}$ the probabilities $\mu_{\Lambda_n}^{+(0),\beta}\left(m_{\Lambda_n} \in [a,b]\right)$ decay exponentially with $|\Lambda_n|^{(d-1)/d}$. It is well-known that $m^{*,0}(\beta)$ is equal to the spontaneous magnetization up to some (at most countable many) "exceptional" points. Actually, it is expected that they coincide for all values of inverse temperature.

This behaviour of the Ising model is, in fact, a simple consequence of the following result for FK percolation (which holds for all $q \geq 1$, in particular for independent bond percolation) in a finite box Λ. Denote by θ^w and θ^f the percolation probability in the infinite volume limit with wired resp. free boundary conditions. For $\varepsilon > 0$ and $l \geq 1$ denote by $K_\Lambda(\varepsilon, l)$ the following event: there exists a unique cluster C_m of maximal size, $|\Lambda|^{-1}|C_m| \in [\theta^f - \varepsilon, \theta^w + \varepsilon]$, and *the total volume of all "l-intermediate" clusters* (having a size larger than l but smaller than the maximal cluster) is smaller than $\varepsilon|\Lambda|$. Then for all $\varepsilon > 0$ there exists a constant $L(\varepsilon) \geq 1$ such that the probability of $K_\Lambda(\varepsilon, L(\varepsilon))^c$ decays exponentially with $|\Lambda|^{(d-1)/d}$. We establish this result for $d \geq 3$ and $p > \widehat{p}_c = 1 - e^{-\widehat{\beta}_c}$ (which is conjectured to be the critical parameter) for wired and free boundary conditions.

Kurzfassung

Betrachten wir das d dimensionale Ising-Modell in einer grossen Box Λ_n mit ferromagnetischer Wechselwirkung zwischen den benachbarten Spins. Wir bezeichnen mit $\mu_{\Lambda_n}^{+,\beta}$ und $\mu_{\Lambda_n}^{0,\beta}$ die entsprechende Wahrscheinlichkeitsmasse bei inverser Temperatur β mit + bzw. freien Randbedingungen. Die relative Magnetisierung m_{Λ_n} ist folgendermassen definiert: $m_{\Lambda_n} = |\Lambda_n|^{-1} \sum_{x \in \Lambda_n} \sigma_x$. Wir zeigen mithilfe einer geeigneten Renormierung des Fortuin-Kasteleyen-Modells, dass, sobald β grösser ist als ein gewisser kritischer Wert $\widehat{\beta}_c$, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int |m_{B(n)}| \, d\mu_{\Lambda_n}^{0,\beta} =: m^{*,0}(\beta)$ existiert und für beliebige a, b, mit $-m^{*,0} < a < b < m^{*,0}$, die Wahrscheinlichkeiten $\mu_{\Lambda_n}^{+(0),\beta}\big(m_{\Lambda_n} \in [a, b]\big)$ exponentiell in $|\Lambda_n|^{(d-1)/d}$ abfallen. Es wird allgemein vermutet, dass $\widehat{\beta}_c$ mit der kritischen inversen Temperatur β_c übereinstimmt, ausserdem, dass $m^{*,0}(\beta)$ gleich der spontanen Magnetisierung ist. Dies letztere ist bekannt bis auf abzählbar viele mögliche Werte von β, die alle in einem kompakten Intervall liegen müssen.

Das oben beschriebene Verhalten vom Ising-Modell ist eine einfache Konsequenz des folgenden Resultates über das FK-Modell für $q \geq 1$ in einer endlichen Box Λ. Wir bezeichnen mit θ^w und θ^f die Perkolationswahrscheinlichkeit im FK-Modell im thermodynamischen Limes mit vernetzten und freien Randbedingungen. (Es wird vermutet, dass $\theta^w \neq \theta^f$ nur im kritischen Punkt auftreten kann; bekannt ist, dass diese Punkte höchstens abzählbar sind.) Für $\varepsilon > 0$ und $l \geq 1$ bezeichne $K_\Lambda(\varepsilon, l)$ das folgende Ereignis: "es existiert genau ein Cluster C_m von maximaler Grösse, $|\Lambda|^{-1}|C_m| \in [\theta^f - \varepsilon, \theta^w + \varepsilon]$ und das Gesamtvolumen der "l-mittleren" Cluster ist kleiner als $\varepsilon|\Lambda|$". Ein Cluster wird dabei als l-mittleres bezeichnet, falls sein Volumen nicht maximal, aber grösser als l ist. Sei $d \geq 3$, $q \geq 1$ und $p > \widehat{p}_c = 1 - e^{-\widehat{\beta}_c}$. (Es wird allgemein vermutet, dass $\widehat{p}_c = p_c$.) Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $L(\varepsilon) \geq 1$, so dass die Wahrscheinlichkeit, bezüglich des FK-Modells mit sowohl freien als auch vernetzten Randbedingungen, dass das Ereignis $K_\Lambda(\varepsilon, L(\varepsilon))$ *nicht* zutrifft, exponentiell in $|\Lambda|^{(d-1)/d}$ abfällt.