Diss. ETH Nr. 9231

Über Abbildungen zwischen klassifizierenden Räumen

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Mathematik,

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

Andreas Müller
dipl. Math. ETH
geboren am 14. Februar 1962
von Kreuzlingen TG

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. G. Mislin, Referent
Prof. Dr. B. Eckmann, Korreferent

G. Mislin

1990

Zusammenfassung

Beim Studium der Abbildungen zwischen klassifizierenden Räumen von kompakten Liegruppen $BG \to BH$ sind bisher in folgenden Situationen ziemlich vollständige Resultate gewonnen worden: für G eine endliche p-Gruppe durch Dwyer und Zabrodsky [DZ], für eine p-torale Gruppe G durch Notbohm [N2] und für und für Selbstabbildungen ($G = H$) durch Jackowski, McClure und Oliver [JMO]. Letzteres Resultat ist die Verallgemeinerung eines Satzes von Mislin ($G = SU(2)$) [M].

In dieser Arbeit wird die von Dwyer, Miller und Wilkerson [DMW] gegebene Homotopieapproximation von $BSU(2)$ bzw. $BSO(3)$ verwendet, um

$$[BG, BH] \quad \text{für} \quad \begin{cases} G = SU(2), SO(3) \\ H = U(n), SU(n), Sp(n), O(n), SO(n), Spin(n) \end{cases}$$

zu bestimmen. Es stellt sich heraus, dass Abbildungsklassen in $[BG, BH]$ durch Einschränkung auf den klassifizierenden Raum des Normalisators eines maximalen Torus in G entdeckt werden, und dass diese Einschränkungen homotop sind zu $B\rho$ für geeignete Darstellungen ρ des Normalisators in H. Es wird explizit angegeben, welche Darstellungen auftreten können.

Weiter wird die induzierte Abbildung in rationaler Kohomologie studiert. Für $H = U(n), SU(n), Sp(n), O(n)$ ist das dank der darstellungstheoretischen Beschreibung der Abbildungen einfach. $SO(n)$ verlangt eine gesonderte Behandlung, wenigstens für gerades n. Obstruktionstheorie und charakteristische Klassen ermöglichen dann auch den Fall $H = Spin(n)$ zu behandeln.

Es wird gezeigt, dass für $H = U(n), SU(n), Sp(n), O(n)$ Abbildungen bis auf Homotopie durch die rationalen Chernklassen klassifiziert werden, welche durch eine geeignete Einbettung von H in eine unitäre Gruppe definiert sind. Für $H = SO(n), Spin(n)$ genügt die Chernklasse nicht mehr in allen Fällen zur Klassifikation, die induzierte Abbildung in rationaler Kohomologie enthält aber immer noch genug Information, um die Homotopieklassen zu unterscheiden.

Damit kann der Satz von Mahmud [Ma] über die möglichen induzierten Abbildungen in rationaler Kohomologie

$$H^*(BSp(n); \mathbb{Q}) \to H^*(BSp(1); \mathbb{Q})$$

dahingehend verschärft werden, dass man eine hinreichende Bedingung für die Realisierbarkeit einer nach Mahmud zulässigen Abbildung in rationaler Kohomologie als induzierter Homomorphismus einer Abbildung der klassifizierenden Räume angeben kann.

ABSTRACT

In the study of maps between classifying spaces of compact Lie groups $BG \to BH$, so far more or less complete results have been obtained for the following situations: for G a finite p-group by Dwyer and Zabrodsky [DZ], for p-toral groups G by Notbohm [N2] and for selfmaps, i.e. $G = H$ by Jackowski, McClure and Oliver [JMO]. This last result is a generalization of a theorem of Mislin's [M].

In this work, the homotopy approximations of $BSU(2)$ and $BSO(3)$ given by Dwyer, Miller and Wilkerson [DMW] are used to determine

$$[BG, BH] \quad \text{for} \quad \begin{cases} G = SU(2), SO(3) \\ H = U(n), SU(n), Sp(n), O(n), SO(n), Spin(n) \end{cases}$$

We find that homotopy classes of maps are discovered by looking at their restriction to the classifying space of the normalizer of a maximal torus in G, and that this restriction is homotopic to $B\rho$, where ρ is some representation of the normalizer in H. We can also explicitely determine which representations may occur.

Further we study the induced map in rational cohomology. For $H = U(n), SU(n), Sp(n), O(n)$, this is easy thanks to the description of the maps in terms of representation theory. $SO(n)$ requires a special treatment, at least for even n. An obstruction theory argument using characteristic classes finally allows to determine $[BG, BSpin(n)]$.

It will be shown that, for $H = U(n), SU(n), Sp(n), O(n)$, maps are classified up to homotopy by the rational Chern class, defined by a suitable embedding of H into some unitary group. For $H = SO(n), Spin(n)$, the Chern class is no longer sufficient in any case, however the induced map in rational cohomology still contains enough information to distinguish the homotopy classes.

This allows to sharpen a theorem of Mahmud's [Ma] about necessary conditions for the realizability of homomorphisms

$$H^*(BSp(n); \mathbb{Q}) \to H^*(BSp(1); \mathbb{Q}),$$

we now also get a sufficient condition for the realizability of an admissible homomorphism as the induced homomorphism of a map between the classifying spaces.