Diss. ETH No 9209

# Interaction of Quasiparticles in the $\frac{1}{3}$ Quantum Hall State and Hierarchical Estimates of the Energy of Daughter States

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Natural Sciences
presented by

Pierre Béran
dipl. ing. ETHL
born on December 29, 1960
citizen of Geneva

accepted on the recommendation of
Prof. T.M. Rice, examiner
Prof. H. Kunz, co-examiner

1990

Hervé Kunz
T. M. Rice

# 2 Summary

The fractional quantum Hall states at filling factor $\nu = \frac{1}{3}$ and $\nu = \frac{1}{5}$ are nowadays admitted to be well understood within the Laughlin theory as incompressible fluids with fractionally charged excitations [4]. Building on this idea, it has been proposed to describe other observed fractional states within a hierarchical scheme [5, 6]. In the formulation of Halperin [6], the "daughter" state of the $\frac{1}{3}$ state which occurs e.g. at filling factor $\nu = 2/5$ or $\nu = 4/11$ is pictured as an electron system in the $\frac{1}{3}$ state *plus* an independent system of quasiparticle obeying fractional statistics. This quasiparticle system is in turn condensed into an incompressible fluid which is described by a *pseudo-wavefunction* of Laughlin-Jastrow type.

It is of great interest to find out if the hierarchical scheme correctly predicts energies and gaps of fractional states. The energy of the "parent" $\frac{1}{3}$ state and the creation energy of quasiparticles have been accurately determined [7, 9, 12, 13]. Thus, the determination of the energy of the daughter state reduces to the computation of the interaction energy of the dense anyon ( quasiparticle ) system.

Previous works [14, 13] have shown that the charge density of the quasiparticle excitation of the $\frac{1}{3}$ state is not point-like but rather ring-shaped, reflecting an important internal structure which may affect the interaction of quasiparticles at short distance.

The purpose of this work is to determine the interaction of quasiparticles at short distance and to derive accurate energy estimates for the Hall states at the first level of hierarchy using the fractional statistics representation of quasiparticles. This interaction at short distance plays an important role in the dense quasiparticle system. Indeed, using our accurate representation of the quasiparticle interaction instead of the bar Coulomb repulsion [6, 14] improves by one order of magnitude the agreement with extrapolation of diagonalization results for the energy of the $\frac{2}{5}$ state [8, 9].

In addition to the quasiparticles of the spin-polarized system, we also study the kind of quasiparticle involving an electron with reversed spin, which becomes the lowest quasiparticle excitation of the $\frac{1}{3}$ state at low magnetic field [17]. Using this kind of excitation in the hierarchical construction leads to a spin unpolarized $\frac{2}{5}$ state and to a partially polarized $\frac{4}{11}$ state instead of spin-polarized fractional states.

We determine the quasiparticle-quasiparticle interaction as follows:

a) Multipolar corrections originate from the finite size of quasiparticles. For large quasiparticle separation, these corrections can be calculated from the multipole expansion for the charge density of the single quasiparticle. This charge density is inferred from Monte-Carlo calculations for large electron systems using accurate trial wavefunctions. In the case of the quasiparticle involving an electron with reversed spin, this trial wavefunction is simply obtained by generalizing the Laughlin-Jastrow wavefunction for the pure $\frac{1}{3}$ state. For the quasiparticle of the spin polarized system, we use a related trial wavefunction which was originally proposed by Halperin [26].

This leads to an important quadrupole correction for the interaction between quasiparticles of the polarized system while the interaction of quasiparticles involving electrons with reversed spin is essentially given by the Coulomb repulsion of point charges. b) At short distance, complicated quantum polarization effects occur. The quasiparticle-quasiparticle interaction energy is thus directly inferred from the energy difference between microscopic states for one and two quasiparticles with various separations. This interaction energy is difficult to determine, because it is a small quantity compared to the quasiparticle creation energy. Fortunately, at short distance between quasiparticles, this interaction energy can be reliably estimated using *exact* results for small systems. Using the geometry of the sphere, which provides results showing small finite size effects [5], we perform exact calculations up to nine electrons using both diagonalizations and our accurate trial wavefunctions, which can be straightforwardly generalized to describe two quasiparticles as well. These trial wavefunctions lead to well-defined extrapolations to the bulk limit.

In contrast to the case of quasiparticles involving electrons with reversed spin, the interaction between quasiparticles of the polarized system shows large polarization effects at short distance. Indeed, this interaction at short distance is characterized by a *small* value for the interaction energy $\widetilde{V}_L$ of two quasiparticles with relative angular momentum $L = 2$ and by *large* values of $\widetilde{V}_L$ for $L = 0$ and $L = 4$.

This interaction at short distance plays an important role in the hierarchical construction. Indeed, the hard-core character of this interaction determines whether or not quasiparticles can condense, leading to a Hall state at the next hierarchical level [5, 28]. Namely, the large value of $\widetilde{V}_0$ and the small one of $\widetilde{V}_2$ result in a large gap for the polarized $\frac{2}{5}$ state ( reflecting the stability of the incompressible fluid of quasiparticles ) while the small value of $\widetilde{V}_2$ and the large one of $\widetilde{V}_4$ are responsible for the *absence* of a gap for the polarized $\frac{4}{11}$ state, consistent with diagonalization results. On the other hand, the Coulomb character of the interaction between quasiparticles involving electrons with reversed spin ensures the existence of gaps in both unpolarized $\frac{2}{5}$ and partially polarized $\frac{4}{11}$ states.

# 3 Résumé

Il est à présent admis que les états Hall $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ sont correctement décrits par la théorie de Laughlin [4] comme des fluides incompressibles d'électrons dont les excitations portent une charge *fractionnelle.* En se fondant sur cette théorie, Haldane [5] et Halperin [6] ont proposé de décrire les autres états fractionnels observés au moyen d'une *construction hiérarchique.* Dans la formulation de Halperin [6], l'état "fils" de l'état $\frac{1}{3}$, qui apparaît au facteur de remplissage $\nu = 2/5$ ou $\nu = 4/11$, est décrit comme un système d'électrons dans l'état $\frac{1}{3}$ *plus* un système *indépendant* de quasi-particules dont la statistique est *fractionnelle.* Ce système de quasi-particules est lui-même condensé en un fluide incompressible qui est décrit au moyen d'une *pseudo*-fonction d'onde de type Laughlin-Jastrow.

Il est du plus haut intérêt de savoir si la construction hiérarchique prédit correctement l'énergie et le gap des états Hall fractionnels. L'énergie de l'état "parent" $\frac{1}{3}$ ainsi que l'énergie de création des quasi-particules ont été déterminées de façon précise [7, 9, 12, 13], de sorte que la détermination de l'énergie de l'état "fils" se réduit à l'estimation de l'énergie d'interaction du système dense de quasi-particules, ou d'anyon.

De précédents travaux [13, 14] ont montré que la densité de charge des quasi-particules n'est pas ponctuelle, mais possède une forme *d'anneau.* Cette propriété reflète l'importance de la structure interne des quasi-particules, qui est susceptible d'influencer leur interaction à courte distance.

Le but de ce travail est de déterminer cette interaction à courte distance et d'en déduire des estimations précises pour l'énergie et le gap des états fractionnels de premier niveau hiérarchique. Cette interaction à courte distance joue un rôle important dans le cas de systèmes denses de quasi-particules. En effet, l'emploi de notre représentation précise de l'interaction entre quasi-particules en lieu et place d'une répulsion coulombienne entre charges ponctuelles [6, 14] améliore d'un ordre de grandeur l'accord avec l'extrapolation de résultats exacts pour l'énergie de l'état $\frac{2}{5}$ obtenus par diagonalisation pour des systèmes de taille finie [8, 9].

En plus des quasi-particules du système avec spin polarisé, nous étudions aussi le type de quasi-particule impliquant la présence d'un électron avec spin inversé, qui constitue l'excitation de l'état $\frac{1}{3}$ de plus basse énergie à faible champ magnétique [17]. L'utilisation de ce type de quasi-particule dans la construction hiérarchique mène à un état $\frac{2}{5}$ non-polarisé et à un état $\frac{4}{11}$ partiellement polarisé au lieu d'états complètement polarisés.

Nous déterminons l'interaction entre quasi-particules comme suit:
a) Des corrections multipolaires proviennent de la taille finie des quasi-particules. Lorsque les quasi-particules sont suffisamment distantes l'une de l'autre, ces corrections peuvent être estimées à partir du développement multipolaire de la densité de charge d'une quasi-particule isolée. Cette densité de charge est obtenue au moyen de calculs Monte-Carlo pour des systèmes de grandes tailles à l'aide de fonctions d'onde d'essai décrivant l'état fondamental de façon précise. Dans le cas de la quasi-particule

impliquant un électron avec spin inversé, cette fonction d'onde est fournie par une généralisation naturelle de la fonction d'onde de Laughlin pour l'état fractionnel $\frac{1}{3}$. Dans le cas de la quasi-particule du système polarisé, nous utilisons une fonction d'onde proposée initialement par Halperin [6], en étroite relation avec le cas précédent.

Ce traitement mène à une importante correction quadrupolaire pour l'interaction entre les quasi-particules du système polarisé, alors que l'interaction entre quasi-particules impliquant des électrons avec spin inversé est essentiellement décrite par la répulsion coulombienne entre charges ponctuelles.

b) A courte distance, l'interaction entre quasi-particules est compliquée par l'apparition d'effets de polarisations. C'est pourquoi cette interaction à courte distance est directement inférée de la différence d'énergie entre états microscopiques contenant respectivement une quasi-particule et deux quasi-particules à différentes distances l'une de l'autre. Cette énergie d'interaction est petite comparée à l'énergie propre des quasi-particules et constitue par conséquent une quantité difficilement mesurable. Heureusement, les calculs *exacts* pour systèmes de taille réduite permettent precisément d'estimer cette énergie d'interaction à courte distance. En utilisant une géométrie sphérique, qui réduit considérablement les effets de taille finie [5], nous avons effectué des calculs pour des systèmes contenant jusqu'à neuf électrons à l'aide des états fondamentaux exacts *et* de nos fonctions d'essai précises, qui peuvent être aisément généralisées pour deux quasi-particules. Ces fonctions d'onde d'essai mènent à des extrapolations bien définies à la limite du système infini.

A la différence des quasi-particules impliquant des électrons avec spin inversé, l'interaction entre les quasi-particules du système polarisé montre d'importants effets de polarisation à courte distance entre quasi-particules. En effet, cette interaction à courte distance est caractérisée par une *petite* valeur de l'énergie d'interaction $\widetilde{V}_L$ de deux quasi-particules avec moment angulaire relatif $L = 2$ et par de *grandes* valeurs de $\widetilde{V}_L$ pour $L = 0$ et $L = 4$.

Cette interaction à courte distance joue un rôle important dans la construction hiérarchique. En effet, la présence d'une répulsion de type "coeur dur" à scourte distance détermine si oui ou non le système de quasi-particule peut se condenser en un fluide incompressible menant à un état fractionnel au prochain niveau hiérarchique [5, 28]. En l'occurrence, la grande valeur de $\widetilde{V}_0$, jointe à la petite valeur de $\widetilde{V}_2$, est responsable de la présence d'un gap bien défini dans l'état $\frac{2}{5}$ polarisé ( ce gap reflète la stabilité du fluide incompressible de quasi-particules ) alors que la petite valeur de $\widetilde{V}_2$, jointe à la grande valeur de $\widetilde{V}_4$, est responsable de *l'absence* d'un gap à $\nu = 4/11$ dans le système polarisé. En revanche, le caractère coulombien de l'interaction entre quasi-particules impliquant des électrons avec spin inversé garantit l'existence d'un gap dans l'état $\frac{2}{5}$ non-polarisé et dans l'état $\frac{4}{11}$ partiellement polarisé.