

Diss. ETH Nr. 9009

Gravimetrisches Geoid der Schweiz: Potentialtheoretische Untersuchungen zum Schwerefeld im Alpenraum

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels

Doktor der Technischen Wissenschaften

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von
Alain Geiger
dipl. Phys. ETH

geboren am
8.8.1954
von Ermatingen, TG

Angenommen auf Antrag von:

Prof. Dr. H.-G. Kahle, ETHZ, Referent
Prof. Dr. H. Sünkel, TU Graz, Korreferent

H.G. Kahle
14/12/89

1989

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Abstract	3
1 Einleitung	
1.1 Vorbemerkungen zum Geoid	5
1.2 Bisherige Arbeiten zum Geoid in der Schweiz	10

Teil I Theoretische Betrachtungen zum Geoid

2 Mathematische Zusammenhänge	
2.1 Lösung der Laplace Gleichung in verschiedenen Koordinatensystemen	16
2.2 Allgemeines zur Separation der Laplacegleichung	17
2.3 Kartesische Koordinaten	19
2.3.1 Separation	19
2.3.2 Zusammenhang mit dem Fourierintegral und der Fouriertransformation	22
2.3.3 Homogene Polynome	25
2.4 Kugelkoordinaten	27
2.4.1 Zusammenhang mit Homogenen Polynomen	30
2.5 Ellipsoidische Koordinaten	31
2.6 Zur Konstruktion spezieller harmonischer Funktionen	33
2.7 Approximation von Funktionen im Hilbertraum H^0	36
2.7.1 Norm und Approximation	36
2.7.2 Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten	39
2.7.3 Einfluss der Ordnung der Entwicklung auf die Koeffizienten	41
2.7.4 Einfluss der Stützpunktverteilung	43
2.7.5 Häufig verwendete Systeme	44
2.8 Operatoren im Funktionalraum	45
2.8.1 Selbstdjungierte Operatoren	45
2.8.2 Integraloperatoren	48
2.8.3 Reproduzierende Kerne	50
2.9 Fehlerfortpflanzung bei Integralformeln und Reihenentwicklungen	52
2.9.1 Integraldarstellung	52
2.9.2 Reihenentwicklungen	54
2.9.3 Fehler von Reihenentwicklungen	55
2.9.4 Allgemeiner Kovarianz- und Gewichtsansatz bei reproduzierenden Kernen	55

3 Zum Randwertproblem

3.1	Problemstellung	57
3.2	Integrallösungen	59
3.2.1	Zur Bestimmung der Green'schen Funktion	61
3.2.2	Greensche Funktion als Integraloperator	63
3.3	Variationsproblem	67
3.3.1	Energie des Schwerefeldes	67
3.3.2	Variationsgleichung und Poissongleichung	69
3.4	Numerische Lösungen	71
3.4.1	Finite Differenzen und Finite Elemente	71
3.4.1	Spektralanalyse	72
3.4.1	Approximation und Interpolation	73

4 Beschreibung des Schwerefeldes

4.1	Funktionaldarstellung	74
4.2	Differentialgeometrisch	80
4.3	Flussberechnung im Gravitationsfeld	85
4.3.1	Zum Gauss'schen Satzes	85
4.3.2	Verallgemeinerte Stokesformel	86
4.3.3	Kugelsymmetrische Massenverteilungen	88
4.3.4	Ebene Bouguer - Korrektur	90
4.3.5	Bestimmung der Störmassen aus der Schwereanomalie	91
4.4	Berechnung von Potentialfeldern mittels Fouriertransformation	
4.4.1	Allgemeines zur Fouriertransformation	94
4.4.2	Allgemeine Formel zur Berechnung von Masseneffekten im Spektralbereich	95
4.5	Schwerefeldberechnungen mittels Multipolentwicklungen	104
4.5.1	Kugelfunktionsentwicklung des reziproken Abstandes	104
4.5.2	Multipolentwicklung im Aussenraum einer Massenverteilung	105
4.5.3	Schwerefeld einer schwach deformierten Kugel	106
4.5.4	Schwerefeld innerhalb von Massenverteilungen	108
4.6	Bestimmung von Trendfunktionen im Schwerefeld	110

Teil II Praktische Berechnung des Geoides

5 Störgrößen des Normal-Schwerefeldes

5.1	Zeitliche Änderungen des Schwerfeldes	117
5.1.1	Gezeiten	117
5.1.2	Rotationsschwankungen	118
5.1.3	Änderung der Drehachse	121
5.1.4	Massenumlagerungen	123
5.1.5	Zeitliche Änderung der Gravitationskonstanten	125
5.2	Dichteinhomogenitäten	127
5.2.1	Mathematisches Modell zur Dichtebestimmung	128
5.2.2	Schätzung variabler Dichten und Bestimmung von Moho-Parametern	133
5.3	Einfluss der Atmosphäre auf das Schwerfeld	143
5.3.1	Höhenabhängige Korrektur	145
5.3.2	Druckabhängige Korrektur	147
5.3.3	Einfluss auf das Potential	148

6 Gravimetrisches Geoid

6.1	Die Daten	151
6.1.1	Verwendete Daten	151
6.1.2	Referenzanomalien und Referenzgeoid	154
6.1.3	Bestehendes Astro-Geoid in der Schweiz	158
6.1.4	Zur Reduktion der Schweredaten	160
6.1.5	Stochastisches Verhalten der Daten	169
6.2	Zur Berechnung des Geoids	172
6.2.1	Vorgehen bei der Berechnung	172
6.2.2	Näherung der Stokes Funktion	173
6.2.3	Genauigkeitsabschätzungen des Integrals	174
6.2.4	Korrektur der einfachen Integration	179
6.2.5	Beziehung zwischen Höhenanomalie und Geoidundulation	183
6.3	Gravimetrisches Geoid	187
6.3.1	Verschiedene Geoide	187
6.3.2	Bestimmung von Datumparametern	192
6.3.3	Fehler	202

7	Zum Schluss	211
----------	--------------------	------------

8	Literatur	216
----------	------------------	------------

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist in zwei Teile gegliedert, die allerdings nicht völlig getrennt voneinander betrachtet werden dürfen. Dies soll die durchgehende Nummerierung der Kapitel andeuten.

In dem eher theoretischen Teil I werden einige mathematische Zusammenhänge bei der Approximation des Schwerfeldes zusammengestellt.

Die Lösung der Laplace-Gleichung, eines der zentralen Probleme der physikalischen Geodäsie, ist denn auch an den Anfang gestellt. Die Lösung erfolgt systematisch durch die Separation mit Hilfe der Stäkel-Bedingungen, primär in kartesischen und sphärischen Koordinaten und als Vervollständigung auch in ellipsoidischen Koordinaten. Dabei geht es darum, Zusammenhänge zwischen den Lösungen in den verschiedenen Koordinatensystemen aufzuzeigen. So ergeben sich zwanglos die Fourieransätze als Lösung in kartesischen Koordinaten. Ebenso wird gezeigt, dass die Kugelfunktionen völlig äquivalent zu den kartesischen Lösungen sind und auch aus diesen durch die Formulierung von homogenen Polynomen in Kugelkoordinaten ableitbar sind.

Begriffe aus der Funktionentheorie werden, soweit sie gebraucht werden zusammengestellt. Die Approximation durch Reihenentwicklungen, wie sie in der Geodäsie auftreten, werden behandelt. Insbesondere wird die Möglichkeit einer Orthogonalentwicklung bei ungleich-abständigen Stützwerten sowie deren Äquivalenz mit entsprechenden Schätzungen nach kleinsten Quadraten gezeigt. Der Begriff des Operators wird im Hinblick auf die Schwerfeldanwendung dargestellt und auf selbstadjungierte Operatoren spezialisiert. Daraus ergibt sich durch die Betrachtung von Eigenwertproblemen zwangsläufig der Begriff des reproduzierenden Kerns. Die Fehlerfortpflanzung wird ebenfalls funktional dargestellt.

Zur Behandlung des Randwertproblems werden die aufgearbeiteten Zusammenhänge verwendet und so die Herleitung der Stokes'schen Lösung konsequent auf einer funktionalen Basis erarbeitet. Dabei wird die Stokes'sche Lösung über Operatoren als Green'sche Lösung formuliert. Im Hinblick auf zukünftige, in dieser Arbeit nicht behandelte, vollnumerisch orientierte Lösungswege, wird das Randwertproblem als Variationsproblem formuliert. Dabei werden auch gewisse Lösungsansätze, wie die Methode der finiten Elemente, kurz erwähnt.

Ein den Teil I abschliessendes Kapitel soll einige konkrete Rechnungen im Schwerfeld demonstrieren. Der operationelle Ansatz wird wiederum funktional kurz zusammengefasst dargestellt. Ebenso wird auf die differentialgeometrische Beschreibung hingewiesen. Dabei wird die Analogie des Schwerfeldes zur Lichtausbreitung und der konformen Abbildung dargelegt.

Durch die physikalische Betrachtungsweise des Schwerfeldflusses kann man einige Formeln, die sonst umständlich hergeleitet werden müssen, recht einfach gewinnen. An dieses Exerzitium schliesst die spektrale Beschreibung des Schwerfeldes an. Dort wird durch den rigorosen Einsatz der Fouriertransformation eine neue Formel zur Berechnung der Schwere,

Lotabweichung und des Potentials gewonnen. Dabei ergibt sich die bekannte 'Parker'-Formel als Spezialfall. Die Darstellung durch Multipole soll die Anwendung der Kugelfunktionen bei Potentialproblemen erläutern. Im speziellen sind die Potentialberechnungen im Massenerinneren und die Berechnung globaler Topographieeffekte von Interesse. Ein letztes Kapitel ist dem immer wiederkehrenden Problem der Trendabspaltung gewidmet. Da der Formalismus bei der Dichte- und Parameterbestimmung appliziert wird, erfolgt die Darstellung relativ ausführlich.

Im Teil II erfolgt die praktische Berechnung des Geoides nach der Stokes'schen Lösung. Dabei kommen etliche im Teil I entwickelte Formeln zum Tragen. Vorgängig werden einige Störgrößen diskutiert, die jedoch für unsere Belange kaum ins Gewicht fallen. In einem neuen Ausgleichsmodell werden Trends, Mohoparameter sowie horizontal variierende Krustendichten geschätzt. Der Dichtekontrast an der Krusten-Mantelgrenze ergibt sich zu 0.33 bis 0.34 gr/cm^3 , während die topographischen Dichten im Bereich von $\pm 0.2 \text{ gr/cm}^3$ um 2.67 gr/cm^3 schwanken. Dieser Ansatz erlaubt es bereits mit wenigen Parametern, die Bougueranomalien auf eine Streuung von 6 mgal über die ganze Schweiz zu glätten. Im letzten Kapitel werden die Daten, Berechnungen und die Resultate dargestellt. Zur Integration der Stokesfunktion wird eine einfache Korrekturformel entwickelt, deren Herleitung ausführlich beschrieben ist. Ebenso wird eine Formel abgeleitet, die die Korrektur der Höhenanomalien oder die orthometrische Korrektur aus Bougueranomalien beschreibt.

Die Berechnung des Geoides erfolgt über ein Stokes-Differenzgeoid zum GEM10C-Geoid. Als Daten wurden europäische $6' \times 10'$ Freiluftanomalien verwendet. Im Gebiet der Schweiz griff man auf die zur Berechnung der Schwerekarte der Schweiz verwendeten Daten und auf Messungen des Institutes für Geodäsie sowie des Institutes für Geophysik zurück. Die Berechnung des Geoides im GRS80 erlaubt die Lagerung des bestehenden Astrogeoides im GRS80. Die Varianzen des gravimetrischen Geoids ergaben sich zu 12 - 30 cm. Dies entspricht auch etwa dem maximalen Relativfehler über die ganze Schweiz. Der Vergleich mit dem astro-geodätischen Geoid liefert 26 cm mittlerer Fehler an der Gewichtseinheit. Dazu ist zu sagen, dass der mittlere Fehler im Mittelland und in den Voralpen bei 16 cm liegt: Dies deckt sich gut mit den a priori Fehlern von 12 cm. Die grossen Klaffen sind alle im Bereich der Ivrea-Zone und des südlichen Wallis situiert. Zur Überprüfung dieser Probleme wurde vom 'Stokes'-Prinzip etwas abgerückt. Einige Freiluft-Problemwerte wurden mit Hilfe der Interpolation von Bougueranomalien und der Berechnung entsprechender Topographieeffekte neu gerechnet. Die Residuen im Geoid blieben, wenn auch weniger dominant, in derselben Gegend bestehen. Ebenso blieb der Transformationsfehler mit etwa 30 cm erhalten.

Abstract

The presented work is divided into two parts. Nevertheless, the two parts are not to be completely separated. This should be emphasized by the continuous numbering of the chapters.

In a first, more or less theoretical part I some mathematical foundations of the functional gravity field approximation are presented.

One of the most important problem of physical geodesy, the solution of Laplace's equation has systematically been reviewed by the mean of the Stäkel-Separation in cartesian, spherical and ellipsoidal coordinates. Special emphasis has been put onto the demonstration of the relations between the different solutions in different coordinate frames. The relation between spherical harmonics and the cartesian solution is made by means of homogeneous polynomials. The relation between fouriertransforms and the cartesian solution is shown as well.

A possibility to develop some orthogonal series approximation by least-square methods even for unevenly spaced data samples is shown. The Operator-calculus is introduced and specialized for self-adjoint operators like the Laplace-operator. By treating some eigenvalue problems the solution will appear in terms of reproducing kernels. The error propagation is briefly discussed.

The boundary value problem is treated using all the previously established and reviewed formalisms. The Stokes's solution is consequently elaborated by this functional approach. The Stokes'function is derived only by the use of operators solving for the Green's functions. In view of future numerical developments the boundary value problem has been formulated as a variational problem, which can be solved by numerical methods such as finite elements or finite differences. A brief overview of spectral and approximation methodes is given.

The last chapter of part I concentrates on real calculations in the framework of the gravity field. The operational approach is briefly rewied on the bases of functional theory. A small lookout onto differential geometry is given. Especially the analogies of the gravity field, the lightwave propagation and the conformal mapping is pointed out.

Some examples of applying Gauss' formula to describe some physical properties of the gravity field are carried out. The rigorous application of the Fourier transform leads to a new formula for calculating the gravity vector and the potential from known density distributions. 'Parker's'-formula will appear as a special case for the z-component. The multipole development might have some interest for calculating global topographic effects or for gravity field determination inside mass distributions.

In the second part the practical evaluation of Stokes'formula is carried out. Several formulas developed in the previous chapters of part I will be applied. Some disturbing effects, such as time dependent gravity changes etc. are discussed. Most of them are negligible for our purposes. In a newly formulated least squares model trend- and Moho parameters with

horizontally varying crustal densities are estimated. The density contrast at the Moho discontinuity ranges from 0.33 to 0.34 gr/cm^3 . The density of the topography varies in the order of $\pm 0.2 \text{ gr}/\text{cm}^3$ with respect to $2.67 \text{ gr}/\text{cm}^3$. The applied model allows to fit the Bouguer anomalies at the level of 6 mgal rms over the entire area of Switzerland.

A simple algorithm for correcting Stokes' formula in the near zone of integration is developed. The correction of height anomalies or orthometric height corrections are derived from Bouguer anomalies.

For the calculation of the geoid GEM10C in the GRS80 has been used as reference. The $6' \times 10'$ free air 'Wenzel' anomalies as well as our own data of Switzerland have been processed. By the calculation in the GRS80 it was possible to calibrate the existing astro-geodetic geoid with respect to this system. The a priori variances of the gravimetric geoid showed values from 12cm to 30 cm. The comparison with the astro-geodetic solution reveals a mean deviation of 26 cm rms. Here it is to say that the regions of the Molasse basin and the Alpine forelands showed a much lower discrepancy of the order of 16cm rms. The major contribution to the residuals are located in the Ivrea-zone and in the southern part of the canton of Valais. To examine this problem the pure 'Stokes' principle of free air anomalies has been left. Some suspect free air anomalies have been calculated by interpolation of Bouguer anomalies and by adding the corresponding topographic effect. The residuals remained in the same regions, but on a lower level. An overall turned out to be of the order of 30 cm.

1 Einleitung

1.1 Vorbemerkungen zum Geoid

In Anbetracht der Möglichkeit, dass Leser ohne spezielle Kenntnisse der Geodäsie sich dieses Textes annehmen möchten, sollen einige allgemeine Erläuterungen zum Geoid angeführt werden. In dieser oder ähnlicher Form sind sie in sehr vielen, der Geodäsie und Vermessung zugewandten Lehrbüchern und Texten zu finden. Einige Worte zur Frage:

Was ist das Geoid?

Man denke sich die Erde als einen sich um eine feste Achse drehenden und von aussen unbeeinflussten starren Körper. Starr heisst einfach, dass die Massenelemente ihre gegenseitige Lage nicht verändern sollen. Der Begriff 'starr' beinhaltet neben der festen Erde auch Gewässer und Atmosphäre, deren Strömungen jedoch ausgeschlossen werden.

Ein Massenpunkt, der sich mit der Erde mitdreht, wird zwei Kräfte erfahren: Einmal die Gravitationskraft aller vorhandenen Massen und dann die Zentrifugalkraft bedingt durch die Erdrotation. Bekanntlich können Gravitations- und auch Zentrifugalbeschleunigungen durch entsprechende Potentiale beschrieben werden. Potentiale sind skalare Grössen, die sich linear superponieren (zusammenzählen) lassen. Die Beschleunigung entspricht dem Gradienten des Potentials.

Ein Punkt P, der mit der Erde rotiert, 'erspürt' das Potential $W(P)$

$$W(P) = V(P) + Z(P)$$

\uparrow \uparrow Zentrifugalpotential
 Gravitationspotential

$$V(P) = G \int \frac{dm}{d} \quad ; \quad Z(P) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

alle
Massenelemente

- G Gravitationskonstante
- ω Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation
- r Abstand von der Drehachse
- d Raumdistanz dm - P

Die Beschleunigung g im Punkt P ist demzufolge

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{g}(\mathbf{P}) &= \nabla W(\mathbf{P}) = \nabla V(\mathbf{P}) + \nabla Z(\mathbf{P}) \\
 \uparrow & \\
 \text{Gradient} & \\
 \text{grad} & \\
 &= G \int \nabla \left(\frac{1}{d} \right) dm + \omega^2 \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

\mathbf{r} ist der Radiusvektor von der Drehachse zum Punkt

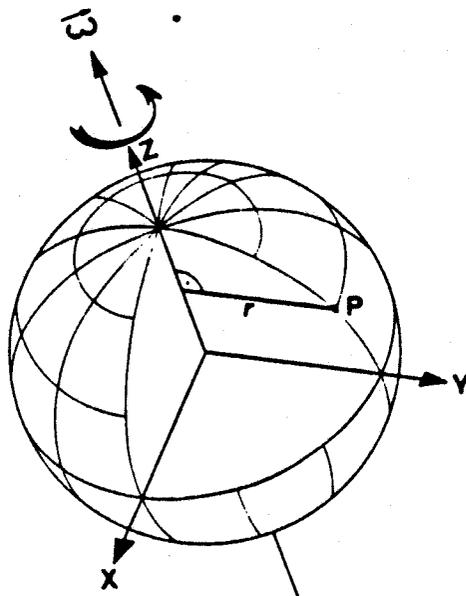


Abb.1.1 Zur Berechnung des Zentrifugalpotential (aus Kahle (1988))

Verbindet man alle Punkte mit gleichem Potential, so erhält man eine Fläche im Raum, die sog. Äquipotentialfläche.

Für eine andere Wahl des Potentialwertes müssen entsprechend andere Punkte verbunden werden. Die entstehenden Äquipotentialflächen schneiden einander i.a. nicht. Mehrdeutigkeiten können erst mit verschwindendem Gradienten auftreten. Für die Erde wäre dies in einem Abstand von etwa 40'000 Kilometern der Fall. Innerhalb dieses Abstandes sind die Äquipotentialflächen jedoch eindeutig und einfachzusammenhängend. Sie umschließen die Erde schalenförmig. Das Potential ist auch innerhalb der Erde definiert. Demzufolge lassen sich auch hier Äquipotentialflächen definieren. Die Gradienten (oder die Beschleunigungen) stehen immer senkrecht auf den entsprechenden Äquipotentialflächen (Niveaulinien), betrachtet man die eingangs erwähnte idealisierte Erde.

Da eine mit Wasser bedeckte idealisierte Erde keine Meeresbewegungen aufweist, schliesst man, dass nur Beschleunigungen senkrecht zur Oberfläche auftreten. Wir haben aber gesehen,

dass Flächen, die senkrecht zur Beschleunigung verlaufen, gerade Äquipotentialflächen sind. Die idealisierte Meeresoberfläche materialisiert also eine Äquipotentialfläche, die man sich unter den Kontinenten fortgesetzt denken kann, etwa durch ein Verbundnetz von Wasserkanälen. Diese spezielle Äquipotentialfläche wurde von Listing (1872) Geoid genannt.

Eng gekoppelt mit dem Geoid ist der Begriff des Normalpotentials, des Erdellipsoids oder Normalsphäroids.

Zur Beschreibung des oben erläuterten Potentials bedarf es, obwohl seine Struktur durch die eingangs erwähnten Annahmen stark vereinfacht wurde, eines gewissen mathematischen Aufwandes. Da Potentiale sich stets superponieren lassen, zur Illustration sei auf die Abbildung 1.1 hingewiesen, ist es statthaft zu schreiben

$$W = U + T .$$

Dabei soll U eine genügend gute Näherung von W sein, der Art, dass T nur als kleiner Störterm in Erscheinung tritt. Der Funktion U werden nun sinnvolle Auflagen gemacht.

Das Zentrifugalpotential von W soll in U enthalten sein. Dies bedeutet, dass sowohl die Rotationsachse als auch die Winkelgeschwindigkeit des Normalsphäroides (Potential U) genau mit der Erdachse bzw. mit der Drehgeschwindigkeit der Erde übereinstimmt. Eine ausgezeichnete Äquipotentialfläche, das sogenannte Normalsphäroid von U soll das Geoid (Äquipotentialfläche des Potentials W) möglichst gut annähern.

Wählt man für das etwas allgemeinere Sphäroid die Ellipsoidform, so spricht man vom Erdellipsoid. Die Symmetrie-Achse wird mit der Rotationsachse identifiziert. Weiter wird vereinbart, dass sich keine Massen ausserhalb des Ellipsoids befinden sollen. Mit diesen Bedingungen und der Vorgabe der Gesamtmasse M ist das Potential U vollständig bestimmt. Aus dem Potential lässt sich die Normalschwere als $g_{\text{norm}} = -\text{grad}U$ und deren Änderung mit dem Ort herleiten. Das Normalschwerefeld und dessen Potential sind also vollständig durch die Angabe der Winkelgeschwindigkeit ω , der Masse M und der Ellipsoidform (z.B. Halbachsen a und b) bestimmt. Im Prinzip ist das Normalpotential frei wählbar. Dementsprechend wurden auch Normalsphäroide höherer Ordnung, zwei von Bruns und Helmert vorgeschlagen. Wichtige Bedingungen sollten jedoch stets erfüllt sein, damit der Sinn der Näherung erhalten bleibt. Das Normalpotential muss mindestens in der Umgebung des Geoids das Potential W genügend genau beschreiben, so dass die Restgrösse T "klein" wird und dementsprechend mit linearen Methoden behandelt werden kann. Weiter soll das Störpotential T ausserhalb der Erdmassen harmonisch sein ($\Delta T = 0$). Daher muss man fordern, dass das Zentrifugalpotential voll und ganz im Normalpotential enthalten ist.

Abb. 1.2 zeigt das Gravitationspotential zweier (anziehender) Massen als 'Potentialtopf'. Im wesentlichen ist der Wert $-1/r$ aufgetragen. In der 'Topfmitte' sitzt die Erde. Die Wirkung der Anziehung kann nun so interpretiert werden, dass jeder Körper im Schwerfeld ein

Energieminimum sucht. Er wird also sozusagen in den 'Topf' hineinfallen oder anders ausgedrückt, er wird von der Erde angezogen.

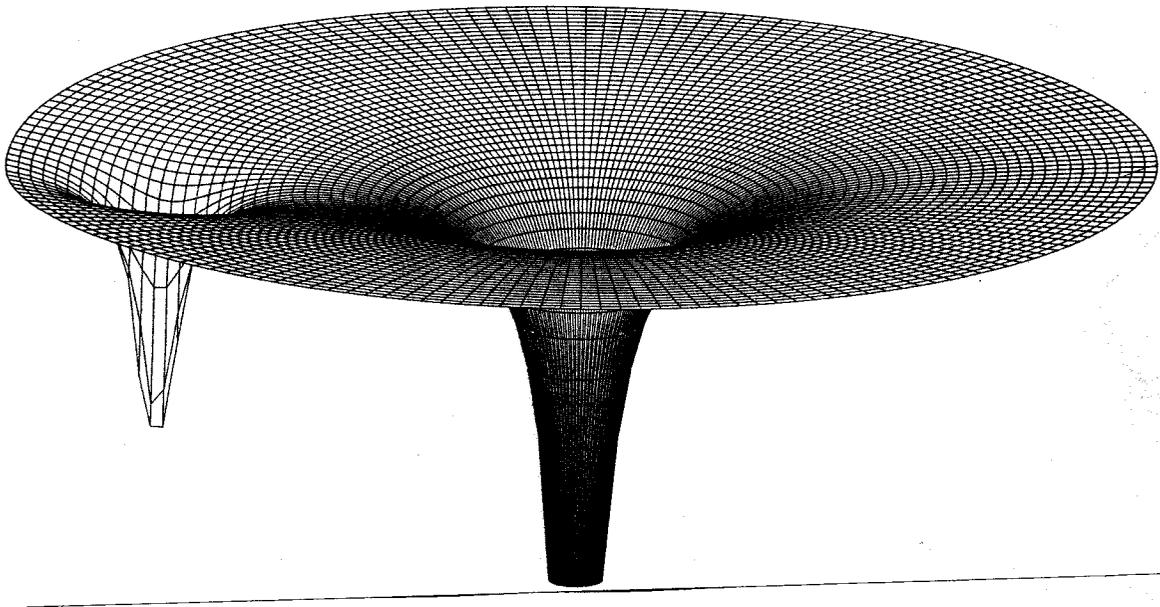


Abb.1.2 Potentialtöpfe zweier Körper

Die Wirkung einer zweiten Masse ist auf Grund des Superpositionsprinzips ebenfalls darstellbar. Jeder andere Körper wird mit seinem eigenen 'Topf' eine 'Delle' im Potentialrand verursachen. In Abbildung 1.3 ist das reale Verhältnis zwischen Erde und Mond (Abstand R in Erdradien) in einem Schnitt durch den 'Topf' dargestellt.

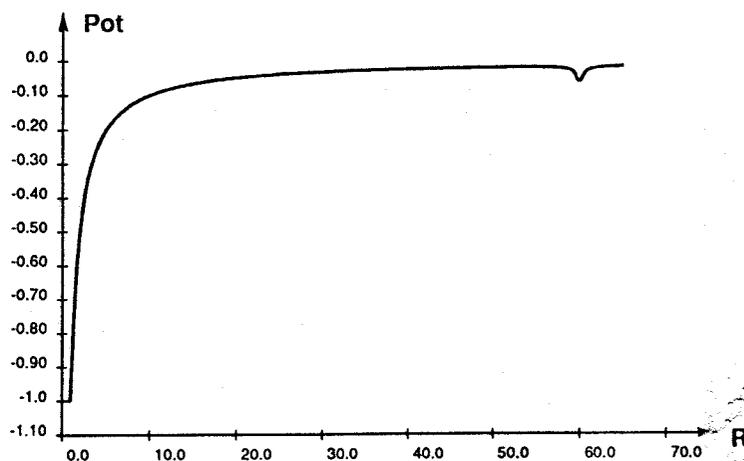


Abb.1.3 Potentialtöpfe von Erde und Mond

Bedeutung und Sinn der Geoidbestimmung

Das Geoid ist eigentlich als Hilfsmittel zur Beschreibung des gesamten Potentials und damit des ganzen Schwerefeldes der Erde aufzufassen. Das Schwerefeld ist in vielen Bereichen von grosser Bedeutung. Viele Anwendungen verlangen eine immer genauere Kenntnis des Schwerefeldes. Umgekehrt liefern neue Methoden und Erkenntnisse ein verfeinertes Bild des Schwerefeldes. Ein Beispiel hierfür ist die Interaktion von Ozeanographie, Altimetrie und Geodäsie. Ähnliche Wechselwirkungen offenbaren sich zwischen Geologie, Geophysik und Geodäsie. Die Kenntnis geologischer Strukturen sowie geophysikalische Messungen unterstützen eine genaue Schwerefeldbestimmung. Umgekehrt können genaue geodätische Messungen, gekoppelt mit geophysikalischen Daten, die geologische Interpretation wesentlich unterstützen. Die Kenntnis von Lotrichtungen ist für die genaue Vermessung unabdingbar. Dem könnte man jedoch entgegenhalten, dass die Vermessung sich auf Satellitensysteme stützen könne. Aber auch da kann man auf das Schwerefeld nicht ohne weiteres verzichten, da die Satellitenbahnen direkt durch das Schwerefeld beeinflusst sind. Umgekehrt können aus den Satellitenbahnen Schwerefeldparameter bestimmt werden. Ganz wichtig jedoch wird die Kenntnis des Geoides bei der Umrechnung der aus Satellitenmessungen gewonnenen ellipsoidischen Daten in geoidische Werte.

1.2 Arbeiten zum Geoid in der Schweiz

Einer der ersten Vermesser, die sich in der Schweiz um den Einfluss der Bergmassive auf die Lotlinie gekümmert hat, dürfte wohl Denzler gewesen sein. Seine Arbeiten gehen ins Jahr 1845 zurück, die er als Ingenieur der 1861 gegründeten Schweizerischen Geodätischen Kommission fortsetzte (erste Ausgabe des Jahrbuchs der Zürcher Naturforschenden Gesellschaft und Jahrbuch des Schweizerischen Alpen Clubs, 1866). Denzler benutzte bereits die Sektorenmethode, um aus mittleren Höhen und den mittleren Abständen zum Aufpunkt die Massenwirkungen zu rechnen. Die Rechnungen wurden für die Stationen Bern, Genf, Zürich und Milano durchgeführt. In den Jahren \approx 1860, 1870 wurden von Plantamour (1866) absolute Schweremessungen mit dem Repsold'schen Reversionspendel der Kommission durchgeführt. Die Stationen waren noch nicht so dicht verteilt (Genf, Bern, Weissenstein, Gäbris, Simplon). Scheiblauber führte Schweremessungen in Neuenburg und Chaumont und Messerschmitt in Zürich und auf Tête-de-Rang, Napf, Gurnigel, Friesenberg durch. Als wesentliche Erleichterung der Messungen wurde ein Relativgravimeter, ein Sterneck'scher Pendelapparat von der Kommission angeschafft. 1896 publiziert Messerschmitt 52 Schwerestationen (Abb.1.4) mit Freiluftanomalien und Bougueranomalien (Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. Zürich. Jahrg. XLI, Jubiläumsband II).



Abb. 1.4 Verteilung der Schwerestationen um die Jahrhundertwende
(nach Messerschmitt, 1887)

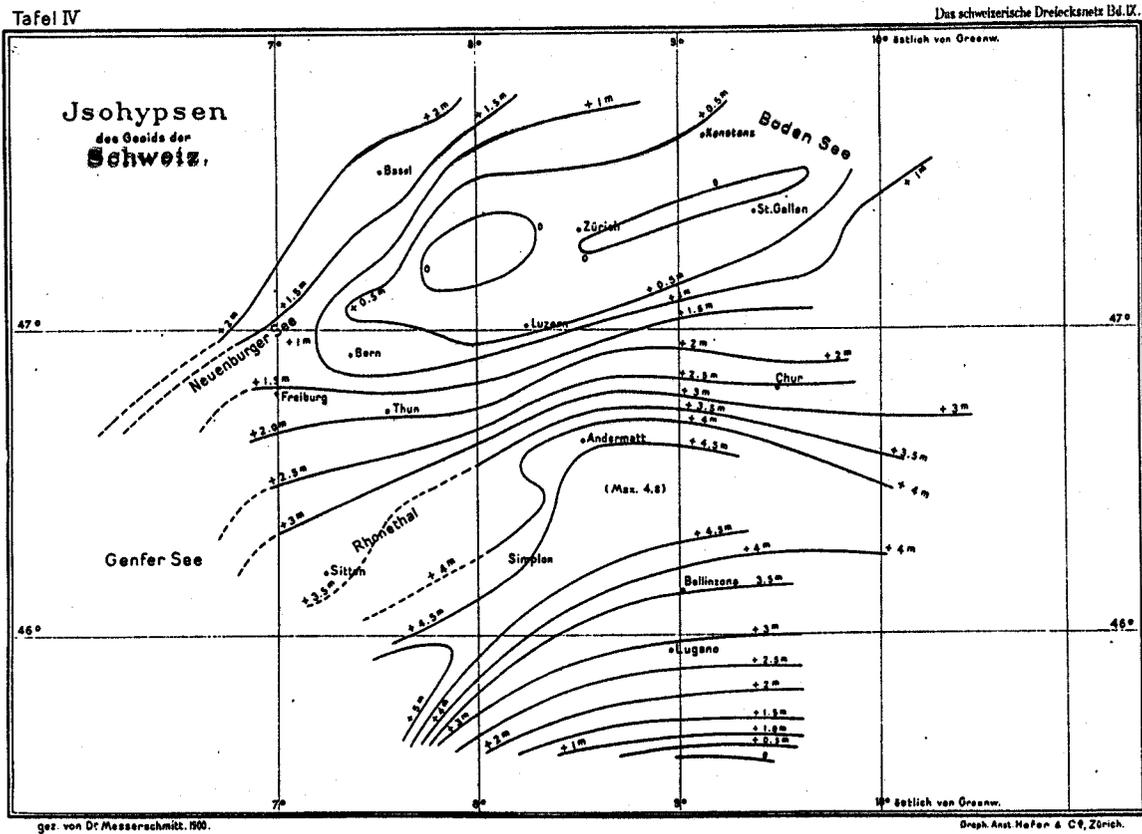


Abb. 1.6 Geoid der Schweiz (Messerschmitt, 1901)

Brillouin (1908) versuchte mit einer Eötvös'schen Drehwaage die 'Elliptizität des Geoides' im Tunnel des Simplon zu bestimmen. Das Problem der Lotabweichungen beschäftigte die Kommission weiterhin. Sie war von den Rechnungen der Vertikalen, eigentlich zu unrecht, auf Grund der auftretenden Diskrepanzen zwischen beobachteten und gerechneten Lotabweichungen nicht recht überzeugt. Auf die Ausschreibung eines Wettbewerbes hin brachten Otti und Lalive 1909 Lösungsansätze bezüglich der Lotabweichung. Allerdings wusste man nicht recht, wie die unsichtbaren Massen zu handhaben wären.

Im gleichen Jahr (1909) brachte die isostatische Theorie von Hayford eine Wende ins Problem "Lotabweichungen". Die erneute Ausschreibung eines Wettbewerbes hatte eine Arbeit von Niethammer und Lalive (1919), die im Band 17 der SGK (1925) publiziert wurde, zur Folge. Dort wurden die isostatischen Hypothesen von Pratt zur Anwendung gebracht. 1922 publizierte Niethammer im Bericht für die IAG Sitzung in Rom eine Isostatische und eine Bouguer Karte der Schweiz. Die Isostasie wurde mit dem Modell von Pratt und einer Ausgleichstiefe von 120 km mit 8 km X 8 km Topographieblöcken gerechnet. In die gleiche Zeitspanne fallen grössere Untersuchungen zur Geoidbestimmung mittels astronomischem Nivellements. 1916-1918 wurden astronomische Beobachtungen auf dem Meridian des St. Gotthardes durchgeführt (Band XIX der SGK, 1932). Die Resultate zeigten eine deutliche Beeinflussung des Geoides durch die Alpen (Band XX der SGK, Niethammer, 1939). Zur Bestimmung des Geoidprofils wurden nicht-beobachtete Lotabweichungen aus Massen

berechnet, natürlich mit damals beträchtlichem Aufwand. Den Meridian-Messungen folgten in den Jahren 1934-1936 Beobachtungen im Parallelkreis der Sternwarte Zürich. Sie sind mit den entsprechenden Auswertungen im Band XXII der SGK (Engi, Hunziker, 1944) dokumentiert. Zusätzliche Arbeiten wurden im Tessin zur Stützung und zur weiteren Untersuchung des im südlichen Teil stark abfallenden Geoides durchgeführt (Band XXIV der SGK, 1944).

Arbeiten von Finsterwalder (1937, 1951) veranlassten die Schweizerische Geodätische Kommission, Lotabweichungs- und damit Geoidbestimmungen mittels gegenseitigen Zenitdistanzen vorzunehmen. Vorerst wurden wiederum Messungen auf dem Gotthard-Meridian (Kobold, 1951) mit gutem Erfolg durchgeführt. Umfangreiche Messungen zur Geoidbestimmung mittels Höhenwinkeln erfolgten in den Jahren 1951-1964 (mit Unterbrüchen) im Berner Oberland, Wallis bis zum Gotthardmeridian (Wunderlin, 1967).

Parallel zu den astrogeodätischen Arbeiten wurden wesentliche gravimetrische Projekte realisiert. Die gravimetrische Anwendung zielte jedoch vornehmlich auf die geophysikalischen Implikationen. Durch den Einsatz von statischen Gravimetern, 1949 erstmals in der Schweiz eingesetzt, konnten detaillierte Schwerekarten erstellt werden. Vorerst am Institut für Geophysik der ETH Zürich (Gretener, 1954; Gassmann, 1959), ab 1954 auch am Geophysikalischen Laboratorium der Universität Genf (Poldini, 1963), wurden die Gravimetermessungen vor allem für geophysikalische Studien verwendet. Auf den Vorschlag von Gassmann hin erstellte die Schweizerische Geodätische Kommission in Zusammenarbeit mit dem Institut für Geophysik der ETH-Zürich und der Landestopographie ein Schweizerisches Schweregrundnetz. Die Messungen wurden von Hunziker (1959) zusammengestellt. Fischer hat auch einige Kontroll- und Anschlussmessungen in diesem Netz vorgenommen und eine entsprechende Ausgleichung durchgeführt (Fischer, 1970a, 1970b). Die Schweremessungen wurden bis etwa 1967 mit Worden-Gravimetern durchgeführt. Später waren vorwiegend LaCoste-Romberg Instrumente im Einsatz. Nach der Gründung der Schweizerischen Geophysikalischen Kommission (1971) wurde auf Vorschlag von Prof. C.Meyer de Stadelhofen hin die Erstellung einer neuen gravimetrischen Karte der Schweiz vorangetrieben (Präsident Prof. Dr. St.Müller). Am Projekt war die geophysikalische Gruppe der Universität Lausanne (R. Olivier) und die gravimetrische Gruppe des Geophysikalischen Institutes der ETH-Zürich (E. Klingelé) beteiligt. Die Finalisierung der Karte erfolgte durch Klingelé (Klingelé und Olivier, 1980).

Die Idee der rechnerischen Bestimmung von Lotabweichungen aus Massen wurde von Elmiger (1969) wieder aufgegriffen und sehr ausführlich behandelt. Insbesondere wurden dort Möglichkeiten zur Interpolation von Lotabweichungen und deren Darstellung mittels gewöhnlichen, Tschebicheff und Trigonometrischen Polynomen untersucht. Elmiger wendet sein Verfahren der Regularisierung mittels Massen (heute bekannt unter dem Namen

Remove-Restore-Technik) und der Interpolation (oder Prädiktion) mit Funktionalansätzen im Gebiet des Berner Oberlandes an. Die dort erreichten Genauigkeiten gibt er mit 5 bis 10 cm an. Elmiger präsentiert in (Elmiger, 1975a, 1975b) eine Berechnung des astrogeodätischen Geoides mit der Methode des Flächennivellements über die ganze Schweiz. Gurtner (1978) setzt für die Interpolation der reduzierten Lotabweichungen die Kollokation ein. Zusätzlich fließen für die Reduktionen der Messungen Informationen über den Ivrea-Störkörper und den Verlauf der Krusten-Mantel-Grenze ein. Zur Verdichtung der Lotabweichungsmessungen werden am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Zürich eine transportable Zenitkamera vom Hannoveranschen Typus (TZK 3) eingesetzt (Bürki, 1985a, Seeber, Torge, 1985). Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung stellt Kuhn (1981) in einer Diplomarbeit an. Die dortige, in der Schweiz erstmalige gravimetrische Berechnung des Differenzgeoides basiert auf der Stokes-Integration. Weitere Untersuchungen zur Interpolation von Schwereanomalien macht Frei (1984). Erst kürzlich wurden genaue astrogeodätische Geoidberechnungen in lokalen Gebieten, im speziellen in der Ivrea-Zone, von Marti (1985) durchgeführt. Er verwendet dort ebenfalls Funktionalansätze und in (Marti, 1988) empirische Kovarianzfunktionen. M. V. Müller (1986) wendet im lokalen Testnetz 'Turtmann' die Methoden der Integrierten Geodäsie zur Geoidbestimmung an. Durch die Entwicklungen im Bereich der Satellitengeodäsie, wurde es möglich, genaue ellipsoidische Positionen zu bestimmen. Aus dem Vergleich mit geodätisch bestimmten Positionen lässt sich direkt ein Geoid bestimmen. Eine derartige Geoidbestimmung erfolgte im Rahmen des von Marussi (1982) initiierten ALGEDOP mittels dem TRANSIT-System (Geiger, Wiget, 1986b, Geiger, Müller, 1987).

Gegenwärtig sind Arbeiten zur Geoidbestimmung im Gange, die das gegenüber TRANSIT wesentlich höhere Genauigkeitspotential von GPS ausnützen. Dazu wurde 1989 eine GPS-Kampagne ALGESTAR mit ≈ 40 über die Schweiz verteilten und an das Landesnivellement angeschlossenen Punkten gemessen. Ebenso sind Untersuchungen zur Kombination verschiedener Messgrößen im Gange. Die neuesten Arbeiten zur Kombination von Lotabweichungs- und Schweredaten mit Berücksichtigung der Masseneffekte von Topographie und Krustenstruktur werden gegenwärtig von Wirth (1990a) im lokalen Testnetz 'Turtmann' mit Erfolg durchgeführt (wenige mm Genauigkeit). Wirth (1990b) bearbeitet die Ausweitung der Lösungsmethode im Hinblick auf den Einbezug von GPS im schweizerischen Rahmen.

Teil I

Theoretische Betrachtungen zum Geoid

Mathematische Zusammenhänge

Zum Randwertproblem

Beschreibung des Schwerefeldes

2 Mathematische Zusammenhänge

2.1 Lösungen der Laplacegleichung in verschiedenen Koordinatensystemen

Die hier interessierenden Koordinatensysteme sind die

1. Kartesischen
2. Kugel
3. Ellipsoidischen

Koordinatensysteme.

Diese Koordinatensysteme sind sich von der Struktur ihrer Metrik g_{ij} her äquivalent, indem nur Diagonalterme auftreten. Dies heisst aber nichts anderes, als dass es sich um orthogonale Koordinaten handelt. Derartige Koordinatensysteme können z.B. durch das Studium von Flächenklassen und deren Orthogonalen Trajektorien (Darboux, Lamé) konstruiert werden. Marussi führt ein natürliches Koordinatensystem für gravitierende Körper ein, das die Äquipotentialflächen einerseits und deren orthogonalen Trajektorien, die Schwerevektoren, andererseits als Gerüst aufweist. Die Motivation zur Behandlung der Laplace-Gleichung ist dadurch gegeben, dass das Gravitationsfeld harmonisch ist, also die Laplace-Gleichung erfüllt. Dies liegt im $1/r$ -Verhalten des Potentials einer kleinen Probemasse begründet. Ob dieses Newtonsche Verhalten in allen Abstandsbereichen (Stacey et al., 1987, Schwarzschild, 1988, Jekeli, Eckhard u.a.) und für alle Materialien (ursprünglich Eötvös et al., 1922, Fischbach, 1986, Thieberger 1987 u.a.) tatsächlich gilt, ist gegenwärtig Gegenstand verschiedenster Untersuchungen. Unter dem Begriff der '5. Kraft' sind viele dieser Experimente bereits popularisiert worden (Spiegel, 1988, Vonarburg, 1988). Nimmt man jedoch die Harmonizität des Potentials weiterhin als gegeben an, was für den hier gebrauchten Genauigkeitsanspruch sicher berechtigt ist, so wird man zwangsläufig auf die Lösung der Laplace-Gleichung geführt. Hier ist allerdings zu bemerken, dass für unsere Betrachtungen ein stationäres Schwerfeld vorausgesetzt wird. Das Schwerfeld ist also konservativ. Geht man jedoch zu zeitlich variablen Feldern über (z.B. Lindlohr, 1987), so ist die Laplace-Gleichung nicht mehr erfüllt. Da in unseren Daten die wesentlichen zeitlichen Änderungen (Gezeiten) eliminiert sind, genügt es für unsere Zwecke, den stationären Fall zu betrachten.

2.2 Allgemeines zur Separation der Laplacegleichung

Um die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zu finden, kann man versuchen, durch einen Separationsansatz die partielle Gleichung auf einzelne gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Dieses Vorgehen wird in vielen Büchern explizite am Beispiel der Laplacegleichung vorgeführt. Da meist kartesische oder Kugelkoordinaten verwendet werden, könnte man vermuten, dass ein Separationsansatz in allen orthogonalen Koordinatensystemen zum Erfolg führt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Vielmehr müssen für die Separation der Laplacegleichung folgende notwendigen und hinreichenden Gleichungen erfüllt werden, Moon and Spencer (1971):

$$\frac{g_{ii}}{g_{jj}} = \frac{A_{j1}}{A_{i1}}$$

$$\frac{g^{1/2}}{g_{ii}} = f_1 f_2 f_3 A_{i1}$$

wo g_{ij} die Komponenten des Metrik-Tensors im unterlegten Koordinatensystem und $f_i(u^i)$ Funktionen einer Variablen sind.

$g^{1/2}$ bezeichnet die Determinante des Tensors g_{ij} .

Die A_{ij} sind die Unterdeterminanten (ohne Zeile i und Spalte j) der Stäckelmatrix S ,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}(u^1) & S_{12}(u^1) & S_{13}(u^1) \\ S_{21}(u^2) & S_{22}(u^2) & S_{23}(u^2) \\ S_{31}(u^3) & S_{32}(u^3) & S_{33}(u^3) \end{bmatrix}$$

Mit dem Separations-Ansatz

$$W = U^1 U^2 U^3$$

$$U^i = U^i(u^i)$$

und den obigen Bedingungen für die Separierbarkeit zerfällt die Laplacegleichung

$$\Delta W = 0$$

in die folgenden drei separierten Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{f_i} \frac{d}{du^i} \left(f_i \frac{dU^i}{du^i} \right) + U^i \sum_{j=1}^3 \alpha_j S_{ij} = 0$$

Im Falle der Laplacegleichung ist $\alpha_1 = 0$

Das Auffinden der Stäckel-Matrix ist jedoch nicht immer einfach. Oftmals führt das direkte Einsetzen des Separationsansatzes in die Laplacegleichung ebenso schnell zu den drei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dazu muss allerdings der Laplaceoperator in den entsprechenden Koordinaten bekannt sein.

Wir wollen nun die Lösungen in den drei erwähnten Koordinatensystemen anschreiben.

2.3 Kartesische Koordinaten

2.3.1 Separation

Wir setzen:

$$u^1 = z, u^2 = y, u^3 = x$$

und $U^1 = Z(z), U^2 = Y(y), U^3 = X(x)$

Für die Stäkel-Matrix findet man:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$|S| = 1$$

und

$$f_1 = f_2 = f_3 = 1.$$

Daraus lassen sich die separierten Gleichungen durch Einsetzen in die allgemeinen Separationsgleichungen gewinnen:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha_3 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha_2 Y = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (\alpha_2 + \alpha_3) Z = 0$$

Dasselbe Ergebnis erhält man durch Einsetzen des Separationsansatzes in die Laplace-Gleichung:

$$\Delta W = \Delta (X \cdot Y \cdot Z) = Y \cdot Z \frac{d^2 X}{dx^2} + X \cdot Z \frac{d^2 Y}{dy^2} + X \cdot Y \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Schliesst man nun die triviale Nulllösung aus, so darf die Gleichung durch $W = X \cdot Y \cdot Z$ dividiert werden. Es ergibt sich mit der Bezeichnung Δ'' für die zweite Ableitung nach dem

jeweiligen Argument der Funktion:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Jeder Term der Summe hängt nur von einem Argument ab. Die drei Argumente x, y, z sind völlig unabhängig voneinander. Dies bedeutet, dass jeder Term für sich konstant sein muss. Man kann also setzen

$$\frac{X''}{X} = -\alpha_3 \quad \text{und} \quad \frac{Y''}{Y} = -\alpha_2$$

Es muss dann gelten:

$$\frac{Z''}{Z} = \alpha_2 + \alpha_3$$

Dies sind aber genau die obigen Separationsgleichungen.

Da Y gegenüber X nicht ausgezeichnet ist, setzen wir für α_2 und α_3 gleiches Vorzeichen.

$$\alpha_2 = p^2 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = q^2$$

oder

$$X'' + q^2 X = 0$$

$$Y'' + p^2 Y = 0$$

$$Z'' - (p^2 + q^2)Z = 0$$

Die Lösungen dieser drei Gleichungen können ohne weitere Rechnung angeschrieben werden:

$$X = A \sin qx + B \cos qx$$

$$Y = A \sin py + B \cos py$$

$$Z = A e^{(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} z} + B e^{-(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} z}$$

Da die Laplace-Gleichung homogen ist, können bekanntlich alle partikulären Lösungen überlagert werden. Den q und p werden keine weiteren Auflagen gemacht, wie etwa bei Kugelkoordinaten etc. Die Lösung W wird also:

$$W = X \cdot Y \cdot Z = \int X(q) \cdot Y(p) \cdot Z(q,p) \, dqdp$$

Die Integrationskonstanten A und B müssen den vorgegeben Randwerten der Funktion W angepasst werden. In unserem Fall ist eine Randbedingung für W die Beschränktheit der Potentialfunktion. Identifizieren wir die positive z-Achse mit der zunehmenden Höhe, so muss verlangt werden, dass $A(q,p)$ in Z verschwindet.

Durch einfaches Ableiten zeigt man, dass die Form

$$W = A e^{c \cdot x} ,$$

c beliebiger isotroper Vektor (d.h. $|c| = 0$),
die Laplacegleichung ebenfalls erfüllt.

$$\Delta W = A \Delta e^{c \cdot x} = A c^2 e^{c \cdot x} = 0.$$

Die Verwandtschaft dieses Lösungsansatzes mit dem eben skizzierten, üblicherweise praktizierten Separationsansatz, ist durch die Wahl der Komponenten des isotropen Vektors c gegeben. Die Komponenten müssen offensichtlich imaginäre Terme enthalten, da mindestens ein Quadrat negativ wird. Es können demnach auch periodische Lösungen produziert werden. Zur Bestimmung der 3 Komponenten steht eine Gleichung und damit zwei Freiheitsgrade zur Verfügung. Folgender Ansatz zur Bestimmung isotroper Vektoren (Stiefel, 1973) führt zum Ziel:

$$c_1 = \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2) , \quad c_2 = \frac{1}{2i} (\alpha^2 + \beta^2) , \quad c_3 = -\alpha\beta$$

α und β sind beliebige komplexe Zahlen.

2.3.2 Zusammenhang mit dem Fourierintegral und der Fouriertransformation

Die X- und Y-Anteile des Separationsansatzes können in ein komplexes Fourierintegral umgewandelt werden. Wir betrachten vorerst nur den X-Term. Der Y-Term ist analog zu behandeln. Dazu setzen wir

$$A(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \sin q\xi \, d\xi$$

und

$$B(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \cos q\xi \, d\xi$$

Damit wird der X-Term:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) (\cos qx \cos q\xi + \sin qx \sin q\xi) \, d\xi \, dq$$

Mit der trigonometrischen Formel $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$ wird das Integral vereinfacht zu:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \cos q(x-\xi) \, dq \, d\xi$$

Da die sin-Funktion ungerade ist, verschwindet das Integral über ein um den Nullpunkt symmetrisches Intervall. Das obige Integral kann daher um einen Summanden in folgender Weise erweitert werden:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) (\cos q(x-\xi) + i \sin q(x-\xi)) \, dq \, d\xi$$

Und mit der Eulerschen Formel wird

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) e^{i q (x-\xi)} dq d\xi$$

Wir führen nun noch einen "Wellenzahl"-Vektor k ein:

$$k = (u, v) = 1/2\pi (q, p)$$

Setzt man weiter den Koeffizienten

$$C(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) e^{-2\pi i u \xi} d\xi \quad ,$$

so erhält man schlussendlich

$$X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(u) e^{2\pi i u x} du \quad .$$

Dies entspricht aber der Fourierdarstellung von X , wie sie in Kapitel 3.3 verwendet wird.
Wir können anhand dieser Herleitung die Funktion

$$W = \int X(x, q) Y(y, p) Z(z, q, p) dq dp$$

umschreiben in

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-|k| z} e^{2\pi i k x} du dv$$

Dabei ist die Funktion C gegeben durch

$$C(k) = \iint_{-\infty}^{+\infty} X(x) Y(y) e^{-2\pi i k x} dx dy$$

Jede harmonische Funktion $W(x,z)$ lässt sich also, ausgehend von den Randwerten $W(x,z_0)$ in der Ebene z_0 , in kartesischen Koordinaten in folgender Weise ausdrücken:

$$W(x,z) = F_{uv} \left\{ e^{-|k|(z-z_0)} F_{xy} \{ W(x, z_0) \} \right\}$$

$F_{uv} \{ . \}$ bezeichnet die Inverse-2D-Fouriertransformation

$u,v \rightarrow x,y.$

$F_{xy} \{ . \}$ bezeichnet die 2D-Fouriertransformation

$x,y \rightarrow u,v.$

Dies ist eine Formel zur analytischen Feldfortsetzung nach oben. Sie kann auch auf anderem Wege gefunden werden, z.B. Jekeli (1984). Diese Formel zeigt deutlich den Effekt der Fortsetzung nach oben. Mit zunehmendem z nimmt der Einfluss des von z unabhängigen Koeffizienten C ab. D.h. die auf der Höhe z_0 bestimmten $C(k)$ werden in einer Höhe z stark abgeschwächt auftreten. Diese Abschwächung nimmt mit anwachsendem $|k|$ zu. Dies entspricht der Aussage, dass höher frequente Terme stärker "herausgefiltert" werden als tiefer frequente.

2.3.3 Homogene Polynome

Wir wollen einen weiteren Lösungsansatz in kartesischen Koordinaten beschreiben, der einen direkten Zusammenhang mit den Kugelfunktionen beinhaltet. Er geht von einer Potenzreihenentwicklung nach harmonischen Polynomen aus. Als harmonische Polynome werden homogene Polynome eingesetzt, die in einem dim -dimensionalen Raum die allgemeine Form haben:

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{p}|=n} A_{\mathbf{p}} x^{\mathbf{p}}$$

mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{\text{dim}})$$

$$|\mathbf{p}| = p_1 + \dots + p_{\text{dim}}$$

$$p_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$x^{\mathbf{p}} = x_1^{p_1} \dots x_{\text{dim}}^{p_{\text{dim}}}$$

Für den uns hier interessierenden 3 dim. Fall schreibt sich ein solches Polynom

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = n} A_{p_1 p_2 p_3} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3}$$

Dass harmonische Funktionen in solche Polynome entwickelt werden können, folgt aus dem folgenden Satz aus der Potentialtheorie:

Ist W harmonisch in einem Gebiet G , dann ist W analytisch in G , d.h., W lässt sich um jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in G$ in eine dim -fache Potenzreihe

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}$$

entwickeln. Für den Beweis und für Konvergenzbetrachtungen sei z.B. auf Walter (1971, p.45) verwiesen. Dabei ist dim die Dimension des behandelten Raumes, hier $\text{dim} = 3$.

Es ist offensichtlich, dass die Terme der Potentialreihenentwicklung neu arrangiert werden können und die Reihe dann in eine Summe homogener Polynome übergeht

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbf{x})$$

Wir wollen nun eine derartige Entwicklung für den 3 dim Fall berechnen. Ein homogenes Polynom kann in 3-dim z.B die Form

$$P_n(\mathbf{x}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^n = (ax + by + cz)^n$$

haben.

Dabei ist $\mathbf{c} = (a, b, c)$ ein konstanter Koeffizientenvektor. Dieses Polynom soll nun die Laplacegleichung erfüllen, also:

$$\Delta P_n = n(n-1) \mathbf{c}^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^{n-2} = 0$$

Es muss also gefordert werden:

$$\mathbf{c}^2 = 0$$

Sämtlichen isotropen (Länge = 0) Vektoren \mathbf{c} sind demnach homogene (harmonische) Polynome als partikuläre Lösungen der Laplacegleichung zugeordnet.

Die Aufgabe besteht also darin, alle Vektoren \mathbf{c} zu finden, deren Länge 0 ist. Diese Aufgabe wurde bereits bei der Separation in kartesischen Koordinaten vorgeführt (Kap. 2.3.1). Dort fand man:

$$c_1 = \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2), \quad c_2 = \frac{1}{2i} (\alpha^2 + \beta^2), \quad c_3 = -\alpha\beta$$

α und β sind beliebige komplexe Zahlen. Setzen wir diese Koeffizienten in den Polynomansatz ein, so erhält man

$$P_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^n} \left(\alpha^2 (x-iy) - \beta^2 (x+iy) - 2\alpha\beta z \right)^n$$

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbf{x})$$

Die komplexen Größen α und β müssen den Randbedingungen angepasst werden. Der Zusammenhang mit den Kugelfunktionen wird im nächsten Kapitel kurz gestreift.

2.4 Kugelkoordinaten

Meistens werden für die sphärischen Koordinaten die Größen

$$\begin{aligned} u^1 &= r & \text{Radius} & \quad 0 \leq r < \infty \\ u^2 &= \vartheta & \text{Poldistanz} & \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ u^3 &= \varphi & \text{Länge} & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

eingeführt. Die Separationsfunktionen sind dann

$$U^1 = R(r), \quad U^2 = \Theta(\vartheta), \quad U^3 = \Phi(\varphi)$$

Die Transformationsgleichungen sind mit obigen Variablen dann bekanntlich:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die metrischen Koeffizienten zu

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta \quad |g| = r^2 \sin \vartheta$$

Die Stäkel-Matrix wird

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daraus gewinnt man die Separationsgleichungen

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{\alpha_2}{r^2} R = 0$$

$$\Theta'' + \cot \vartheta \Theta' + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

$$\Phi'' + \alpha_3 \Phi = 0$$

Dabei werden die Separationskonstanten

$$\alpha_2 = p(p+1) \quad \text{und} \quad \alpha_3 = q^2 \quad \text{gesetzt.}$$

Partikuläre Lösungen dieser Gleichungen lauten:

$$R = A r^p + B r^{-(p+1)}$$

$$\Theta = A P_p^q(\cos \vartheta) + B Q_p^q(\cos \vartheta)$$

$$\Phi = A \sin q\varphi + B \cos q\varphi$$

P und Q sind die Legendre-Funktionen 1. bzw. 2. Art. Diese Funktionen sind vorerst noch zu unterscheiden von den spezielleren Legendre-Polynomen, die erst durch die Randbedingungen oder vielmehr durch die Periodizitätsbedingungen der Lösung entstehen.

Obige Differentialgleichung in ϑ ist ein Spezialfall der allgemeinen Legendre-Wellen-Gleichung:

$$(z^2 - 1) Z'' + 2z Z' + \left(\tau^2 a^2 (z^2 - 1) - p(p+1) - \frac{q^2}{z^2 - 1} \right) Z = 0$$

Lösungen davon sind:

$$Z(z) : P_p^q(\tau a, z) \quad \text{und} \quad Q_p^q(\tau a, z)$$

Dabei muss weder p noch q ganzzahlig sein.

Unsere Gleichung erhält man mit $\tau = 0$ und durch die Variablensubstitution $z = \cos \vartheta$. Dabei wird $Z = \Theta$ gesetzt:

$$\Theta'' + \cot \vartheta \Theta' + \left(p(p+1) - \frac{q^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

Als Folge der Geschlossenheit der Kugeloberfläche müssen wir im Azimut nur 2π -periodische Funktionen betrachten. Also muss für den azimutabhängigen Teil gelten:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

Es gilt demnach

$$\text{trig}(q\varphi) = \text{trig}(q(\varphi + 2\pi)) = \text{trig}(q\varphi + q2\pi)$$

was nur erfüllt werden kann, wenn q eine ganze Zahl $q = m$ ist. Zudem ergeben sich

physikalisch interessante Lösungen nur bei ganzzahligem p . Dies wird im nächsten Kapitel klargestellt. Die Partikulärlösungen werden also:

$$R = A r^n + B r^{-(n+1)}$$

$$\Theta = A P_n^m(\cos \vartheta) + B Q_n^m(\cos \vartheta)$$

$$\Phi = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi$$

Hierin sind nun die P und Q die für ganzzahlige Indizes spezialisierten Legendre-Funktionen 1. bzw. 2. Art, die sogenannten zugeordneten Legendre-Polynome. Die Koeffizienten müssen den gegebenen Randbedingungen angepasst werden. Fordert man etwa die Beschränktheit des Potentials für $r \rightarrow \infty$, so muss der Term A in R verschwinden. (Die Lösung ist dann aber im Nullpunkt nicht regulär.) Ebenso B in Θ , da Q_n an den Polen (Argument = ± 1) divergiert. Wir finden also als Partikulärlösung der Laplacegleichung in gebräuchlicher Schreibweise

$$W_n^m = R_n \Theta_n^m \Phi^m = r^{-(n+1)} P_n^m(\cos \vartheta) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi)$$

und mithin die Gesamtlösung:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^n Y_n^m$$

Dass die Summation über m nur bis n zu laufen braucht, ist direkt aus der Definition der zugeordneten Legendre-Polynome zu entnehmen

$$P_n^m = \frac{d^m}{dz^m} P_n = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n$$

Die höchste vorkommende Potenz beträgt $2n$. Alle Ableitungen grösser als $2n$ werden also 0. Damit kann man schreiben $n+m \leq 2n$ oder $m \leq n$. Dies wird auch durch Betrachtungen der Vollständigkeit des Kugelfunktionssystems gezeigt.

2.4.1 Zusammenhang mit Homogenen Polynomen

Im Kapitel 2.3.3 hatten wir ein homogenes Polynom P_n in kartesischen Koordinaten gefunden, das für beliebige komplexe α und β die Laplacegleichung erfüllt.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \left(\alpha^2 (x-iy) - \beta^2 (x+iy) - 2\alpha\beta z \right)^n$$

Führt man nun Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) ein, so kann man schreiben:

$$x \pm iy = r \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta$$

$$P_n = r^n \frac{1}{2^n} \left(\alpha^2 e^{-i\varphi} \sin \vartheta - \beta^2 e^{i\varphi} \sin \vartheta - 2\alpha\beta \cos \vartheta \right)^n$$

oder: $P_n = r^n \cdot Y_n$

Nach längerer Rechnung (z.B. Stiefel, 1973) findet man aus den erzeugenden Funktionen Y_n durch Ableiten die Kugelfunktionen Y_n^m

$$Y_n^m = \frac{1}{2^n} \frac{1}{(m+n)!} \sin^m \vartheta e^{im\varphi} \frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}} (1-z^2)^n$$

oder

$$Y_n^m = (-1)^n \frac{n!}{(m+n)!} e^{im\varphi} P_n^m$$

Dabei ist $z = \cos \vartheta$ und $-n \leq m \leq +n$.

Dies ist eine komplexe Schreibweise der bekannten Kugelfunktionen, die sich sofort als Real- und Imaginärteil der obigen Funktion ergeben. Dann allerdings muss m nur von 0 bis n laufen.

Die auf der Einheitskugel normierten Kugelflächenfunktionen sehen dann wie folgt aus:

$$Y_n^m = (-1)^{n+m} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\varphi} P_n^m$$

Es gelten dann die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\iint Y_n^{m*} Y_{n'}^{m'} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

dabei ist

$$Y_n^{m*} = (-1)^m Y_n^{-m}$$

2.5 Ellipsoidische Koordinaten

Wir setzen entsprechend Moon and Spencer (1971) für die Variablen in ellipsoidischen Koordinaten die Größen

$$\begin{aligned} u^1 &= \eta & \text{Radius} & \quad 0 \leq \eta < \infty \\ u^2 &= \vartheta & \text{Poldistanz} & \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ u^3 &= \varphi & \text{Länge} & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

Die Separationsfunktionen heissen dann

$$U^1 = H(\eta), \quad U^2 = \Theta(\vartheta), \quad U^3 = \Phi(\varphi)$$

Als konstanter Parameter wird die lineare Exzentrizität $E = e \cdot a$ eingeführt.

Die Transformationsgleichungen sind mit obigen Variablen dann:

$$\begin{aligned} x &= E \cosh \eta \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= E \cosh \eta \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= E \sinh \eta \cos \vartheta \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die metrischen Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = E^2 (\cosh^2 \eta - \sin^2 \vartheta), \quad g_{33} = E^2 \cosh^2 \eta \sin^2 \vartheta, \\ |g| &= E^3 (\cosh^2 \eta - \sin^2 \vartheta) \cosh \eta \sin \vartheta \end{aligned}$$

Die Stäkel-Matrix wird

$$S = \begin{bmatrix} E^2 \cosh^2 \eta & -1 & \frac{1}{\cosh^2 \eta} \\ -E^2 \sin^2 \vartheta & 1 & -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich die Separationsgleichungen

$$H'' + \tanh \eta H' + \left(-\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\cosh^2 \eta} \right) H = 0$$

$$\Theta'' + \cot \vartheta \Theta' + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

$$\Phi'' + \alpha_3 \Phi = 0$$

Dabei werden die Separationskonstanten wiederum

$$\alpha_2 = p(p+1) \quad \text{und} \quad \alpha_3 = q^2 \quad \text{gesetzt.}$$

Interessanterweise unterscheidet sich nur die erste Gleichung von den Kugelgleichungen. Die ellipsoidische Form hat sozusagen nur einen Effekt auf den 'radialen Term'. Die Gleichung in H stellt ebenfalls eine Legendre-Differentialgleichung dar. Durch gleiche Betrachtungen, wie im Falle des Kugelproblems, kommt man zum Schluss, dass sowohl p als auch q ganzzahlig sein müssen.

Partikuläre Lösungen der Separationsgleichungen lauten mit $p = n$ und $q = m$:

$$H = A P_n^m(i \sinh \eta) + B Q_n^m(i \sinh \eta)$$

$$\Theta = A P_n^m(\cos \vartheta) + B Q_n^m(\cos \vartheta)$$

$$\Phi = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi$$

P und Q sind, da n und m bereits ganzzahlig gesetzt sind, wie bei der Kugellösung die zugeordneten Legendre-Polynome 1. bzw. 2. Art. Die Beschränktheit des Potentials fordert wiederum, dass B in Θ verschwindet. Wenn wir auch hier den Nullpunkt ausklammern, also $0 < \eta < \infty$, so muss zusätzlich A in H verschwinden, da die P 's mit zunehmendem Argument divergieren. Wir gelangen somit zur Partikulärlösung der Laplace-Gleichung

$$W_n^m = H_n \Theta_n^m \Phi^m = P_n^m(i \sinh \eta) P_n^m(\cos \vartheta) (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) .$$

Die Gesamtlösung sieht formal gleich wie die Kugellösung aus, allerdings muss man beachten, dass die Koeffizienten a_{nm} und b_{nm} imaginär sind:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(i \sinh \eta) Y_n^m$$

Die Laplace-Gleichung ist also in die Funktionen H, Θ, Φ separierbar. Dabei ist zu beachten, dass H eine Funktion der ellipsoidischen Koordinaten η ist und nicht der geodätisch definierten Höhe h entspricht. Im geodätischen System (ϕ, λ, h) ist die Gleichung nicht separierbar. Dies zeigt Grafarend (1988) ebenfalls anhand der Separationsbedingungen mit Stäckelfunktionen.

2.6 Zur Konstruktion spezieller harmonischer Funktionen

Es sollen hier einfache Funktionen, die bei verschiedenen Rechnungen und Herleitungen auftreten können, auf ihre Harmonizität hin untersucht werden.

u sei eine harmonische Funktion,

$$\Delta u = 0 .$$

Damit erhält man für den Gradienten in euklidischen Koordinaten

$$g = \nabla u \quad \text{und} \quad \Delta g_i = \Delta u_{,i} = (\Delta u)_{,i} = 0$$

D.h. die Komponenten des Gradienten sind wieder harmonisch.

Diese Konstruktion kann verallgemeinert werden durch den Ausdruck

$$H = \frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$$

H ist wieder harmonisch.

Dies ist anhand der Vertauschbarkeit der Ableitungen leicht zu zeigen.

$$\Delta H = \Delta \frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \Delta u = 0$$

Über diese Konstruktion (Courant, Hilbert) kommt man zur Maxwell(-Sylvester'schen) Darstellung der Kugelfunktionen (siehe Kap. 3.4) und den Multipolen. Diese Formulierung kommt bei Flächenbelegungspotentialen wieder zum Vorschein (Meissl, Hofmann-Wellenhof).

Weitere nützliche Funktionen lassen sich einfacher in Kugelkoordinaten beschreiben. Der Laplace-Operator kann dann geschrieben werden als:

$$\Delta u = \frac{1}{r} (ru)'' + \frac{1}{r^2} \Lambda u$$

oder in der selbstadjungierten Form (siehe Kap. 2.9) des Radialteils:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u')' + \frac{1}{r^2} \Lambda u$$

mit den Abkürzungen

$$\partial/\partial r = '$$

Δ Laplace(-Beltrami)-Operator auf der Kugel (Winkelanteil).

Für harmonische Funktionen muss also gelten

$$\Delta u = - r (ru)''$$

Setzt man etwa

$$u = r^n ,$$

dann ergibt sich wegen $\Delta r^n = 0$ sofort

$$(n+1) n r^{n-1} = 0 .$$

Dies ist für beliebige r nur mit $n = -1$ erfüllbar.

Eine weitere Klasse von Funktionen wäre

$$u = r^n H ,$$

H harmonisch, d.h. es muss gelten

$$\Delta H = - r (rH)''$$

und mithin

$$n r^{n-1} ((n+1) H + 2 H') = 0 .$$

Dies ist für ein beliebiges H nur im Falle von $n = 0$ erfüllt. Dies heisst also, dass mit r multiplizierte harmonische Funktionen nicht mehr harmonisch sein können.

Ein interessanter Fall ergibt sich bei Funktionen der Form:

$$u = r^n H' ,$$

wo H wiederum harmonisch ist. Beachtet man die Linearität der Ableitungsoperatoren, d.h:

$$(\Delta H) = (\Delta H)' = -r(rH)''',$$

so bleibt

$$(n-1)r^{n-2}((n+2)H' + 2rH'') = 0$$

und damit $n = 1$. Die Multiplikation mit r von Radialableitungen harmonischer Funktionen ist wieder harmonisch. Setzt man in der letzten Formel $n = 0$, so ist ersichtlich, dass H' alleine i.a. nicht harmonisch sein kann. Diese Tatsache wird bei der Stoke'schen-Lösung des Randwertproblems berücksichtigt. Dort gilt in sphärischer Approximation

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial r} = T',$$

was i. a. nicht harmonisch ist, ganz im Gegensatz zu rT' .

Beim Lösen des Randwertproblems für die Kugel taucht manchmal die Kelvintransformation auf. Die Transformation entspricht der Spiegelung an der Einheitskugel. In z.B. Courant-Hilbert ist gezeigt, dass falls

$$u(\mathbf{x}) \text{ harmonisch ist}$$

auch

$$v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{\mathbf{x}}{r^2}\right)$$

harmonisch wird.

Für $n = 3$ Dimensionen gilt also

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} u\left(\frac{\mathbf{x}}{r^2}\right)$$

Aus der Funktion u lässt sich somit sofort eine weitere harmonische Funktion konstruieren.

2.7 Approximation von Funktionen im Hilbertraum H^0

In diesem Kapitel wird kurz auf die Approximation von Funktionen eingegangen. Im speziellen können die Formeln auf die Kugelfunktionsentwicklungen angewendet werden. Es wird ein Verfahren (2.7.4) aufgezeigt, wie auch unregelmässig verteilte Stützpunkte durch entsprechende Gewichtung in Ausgleichsansätze (oder Kollokation) einzuführen sind.

2.7.1 Norm und Approximation

Wir betrachten Funktionen im Hilbertraum H^0 über G , wo die folgende übliche Norm definiert sein soll (Sobolevnorm 0. ter Ordnung, Lebesgue-Norm)

$$\|f\| := \int_G f^2 dG$$

Das Skalarprodukt schreibt sich dann

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \cdot g dG$$

Definitionsgemäss existiert in H^0 ein vollständiges ortho(normiertes) Basissystem e_j mit $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Etwas allgemeiner kann ein "gewichtetes" Skalarprodukt definiert werden

$$\langle f, g \rangle := \int_G f \cdot g \cdot \mu dG$$

mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion

$$\mu = \mu(x), \quad x \in G$$

Bei komplexwertigen Funktionen ist f^* zu setzen.

Die Funktion f kann also als Reihe dargestellt werden ([] stelle die Summe dar):

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i = [c_i \cdot e_i]_0^{\infty}$$

Wird die Funktion f nur bis zum Term N approximiert, so bleibt ein Approximationsfehler von

$$\Delta f_N = f - [c_i e_i]_0^N$$

Offensichtlich (z.B. Stiefel, 1973) ist der Fehler Δf_N normal zum Unterraum R^N , der durch $\{e_i \mid i = 0, \dots, N\}$ aufgespannt wird und damit auch senkrecht auf der Approximation f_N . Dies zeigt man durch folgende Multiplikation (man beachte dabei die Linearität des Skalarproduktes):

$$\begin{aligned} \langle \Delta f_N, f_N \rangle &= \langle f, f_N \rangle - \langle f_N, f_N \rangle \\ &= \langle f, [c_i e_i]_0^N \rangle - \langle [c_i e_i]_0^N, [c_j e_j]_0^N \rangle \\ &= [c_i \langle f, e_i \rangle]_0^N - [[c_i c_j \langle e_i, e_j \rangle]_0^N]_0^N \\ &= [c_i^2]_0^N - [[c_i c_j \delta_{ij}]_0^N]_0^N \\ &= [c_i^2]_0^N - [c_i^2]_0^N = 0 \end{aligned}$$

Durch eine ähnliche Rechnung zeigt man, dass die obige Approximation die Funktion f im Sinne der kleinsten Quadrate approximiert. Es gilt also zu zeigen, dass

$$\int_G (f - f_N)^2 dG = \min.$$

gilt, oder in obiger Schreibweise:

$$\langle f - f_N, f - f_N \rangle = \min.$$

Die Stationarität im Parameterraum muss also gewährleistet sein:

$$\begin{aligned} d \langle f - f_N, f - f_N \rangle &= -2 \langle f - f_N, df_N \rangle = -2 \langle f - f_N, [dc_i \cdot e_i] \rangle \\ &= -2 \left([dc_i \langle f, e_i \rangle] - [dc_i \langle [c_j \cdot e_j] e_i \rangle] \right) \\ &= -2 \left([dc_i c_i] - [dc_i c_i] \right) = 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die obige orthogonale Reihenentwicklung tatsächlich eine beste Approximation im Sinne der Kleinsten Quadrate. Die Koeffizienten ergeben sich sofort aus den entsprechenden Projektionen

$$c_i = \langle f, e_i \rangle$$

Dass eine Reihe mit zunehmendem N eine monoton besser werdende Approximation einer Funktion f liefert, kann auf Grund der Definition der Norm gezeigt werden:

$$\|\Delta f_N\| = \langle \Delta f_N, \Delta f_N \rangle = \langle f - f_N, \Delta f_N \rangle = \langle f, \Delta f_N \rangle - \langle f_N, \Delta f_N \rangle$$

Mit der oben gezeigten Orthogonalität der Näherung und des Fehlers erhält man:

$$\|\Delta f_N\| = \langle f, \Delta f_N \rangle$$

Weitere Umformungen liefern:

$$\begin{aligned} \|\Delta f_N\| &= \langle f, f - f_N \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, f_N \rangle = \|f\| - \langle f, [c_i e_i]^N \rangle \\ &= \|f\| - [c_i \langle f, e_i \rangle]^N \end{aligned}$$

oder

$$\|\Delta f_N\| = \|f\| - [c_i^2]^N$$

Dies ist die bekannte Bessel'sche Formel.

Es gilt offensichtlich:

$$\|\Delta f_{N+1}\| \leq \|\Delta f_N\|$$

Der Fehlerbetrag im Sinn der oben definierten Norm wird also im allgemeinen tatsächlich mit zunehmendem N kleiner. Ob er gegen 0 konvergiert, ist damit jedoch nicht gezeigt. Betrachten wir jedoch Funktionen im Hilbertraum, so muss der Fehler infolge der Vollständigkeit des Basissystems definitionsgemäss gegen 0 konvergieren. Die Norm der Funktion wird also (vergl. Satz von Pythagoras):

$$\|f\| = [c_i^2]^\infty$$

Wählt man etwa Polynome als Basisfunktionen, so ist die gleichmässige Konvergenz der Reihenentwicklung einer stetigen Funktion (wie sie durch das Potential gegeben ist) laut dem Weierstrass'schen Approximationssatz gewährleistet (z.B. Smirnov, II, 509). Vergleichbares gilt für Fourier-Entwicklungen. Da ist jedoch der Satz von Dirichlet anzuwenden (z.B. Smirnov, II, 465).

2.7.2 Zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten

Das Problem liegt nun darin, die Koeffizienten c_i aus einer endlichen Anzahl diskreter Messungen (Stützwerten) von f zu bestimmen. Insbesondere stellen sich zwei Fragen: Ändern sich die Koeffizienten c_i ($i = 1, \dots, N$), falls ein weiterer Näherungsterm $N+1$ hinzugefügt wird und ergeben sich aus einem least square fit und aus der Projektion die gleichen Koeffizientensätze?

Im kontinuierlichen Fall wurden beide Fragen im vorangestellten Abschnitt beantwortet. Da orthogonale Basisfunktionen verwendet werden, sind auch die Koeffizienten entkoppelt und ändern sich beim Hinzufügen höherer Terme nicht mehr. Es wurde ebenfalls gezeigt, dass eine Entwicklung im obigen Sinne genau einem least square fit gleichkommt.

Die Antworten komplizieren sich im Falle einer diskreten Stützwertverteilung. Die diskretisierte Form der Projektion $c_i = \langle f, e_i \rangle$ lautet dann:

$$c_i = [f_k e_{ik} \Delta G_k]_k$$

- f_k Funktion f an der Stelle x_k
- e_{ik} Basisfunktion e_i an der Stelle x_k
- ΔG_k Integrationselement
- P_k Gewichtsfunktion

Diese Formel entspricht der Mittelpunktsregel im Eindimensionalen. Sie hat, wie die Trapezregel einen Näherungsfehler der Ordnung $O(h^2)$ (Henrici, 1972). h ist die Schrittweite und entspricht ΔG_k . Zur diskreten Berechnung des Skalarproduktes können auch andere ausgefeiltere Methoden der numerischen Integration benutzt werden.

Die Koeffizientenbestimmung kann auch durch eine Parameterschätzung nach kleinsten Quadraten erfolgen:

$$[P_k (f_N - f_k)^2] = [P_k ([c_i e_{ik}]_i - f_k)^2]_k = \min$$

Damit erhält man nach der Ableitung in üblicher Weise die Gleichungen für die gesuchten c_j :

$$[P_k ([c_i e_{ik}]_i - f_k) e_{jk}]_k = 0$$

Die Lösung ergibt sich als:

$$c_i = \left[\left[e_{jk} P_k e_{ik} \right]_k^{-1} \cdot \left[e_{jk} P_k f_k \right]_k \right]_j$$

Dabei ist das Inverse -1 als Matrixinversion aufzufassen.

Die Formeln werden in Matrixnotation etwas übersichtlicher. Dazu setzen wir:

$$\begin{array}{lll} c_i & \rightarrow & \mathbf{c} \\ f_k & \rightarrow & \mathbf{f} \\ e_{ik} & \rightarrow & \mathbf{A} \\ \Delta G_k & \rightarrow & \mathbf{G} \\ P_k & \rightarrow & \mathbf{P} \end{array}$$

Dabei ist zu beachten, dass \mathbf{G} diagonal ist.

Die Bestimmung der Koeffizienten durch Projektion lautet dann:

$$\mathbf{c}_{\text{Proj}} = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{f}$$

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert:

$$\mathbf{c}_{\text{Quad}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$$

Identifiziert man nun die Gewichtsmatrix \mathbf{P} mit der Matrix \mathbf{G} der Integrationsschritte, so kann man sofort schreiben:

$$\mathbf{c}_{\text{Quad}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{c}_{\text{Proj}}$$

Wäre die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$ gleich der Einheitsmatrix \mathbf{E} , so würden die Lösungen beider Methoden absolut gleich ausfallen. Die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$ entspricht dem Skalarprodukt der Basisfunktionen untereinander. Da wir orthonormierte Basen voraussetzen wollen, wird die Matrix bis auf die Effekte der Diskretisation der \mathbf{E} -Matrix entsprechen. (Die numerische Integration liefert eine Fehlermatrix \mathbf{S} von der Ordnung $O(h^2)$.) Wir setzen demzufolge:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \approx \mathbf{E} + \mathbf{S}$$

Die Inverse wird dann näherungsweise

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \approx \mathbf{E} - \mathbf{S} .$$

Damit findet man eine Abschätzung für die Übereinstimmung der beiden Lösungen

$$\mathbf{c}_{\text{Quad}} = \mathbf{c}_{\text{Proj}} - \mathbf{S} \mathbf{c}_{\text{Proj}}$$

Die Übereinstimmung ist also ebenfalls von der Ordnung $O(h^2)$. Im übrigen ist zu bemerken, dass die Lösungen mit $O(h^2)$ gegen \mathbf{c} konvergieren.

2.7.3 Einfluss der Ordnung der Entwicklung auf die Koeffizienten

Die Frage nach der Änderung von \mathbf{c} infolge der Erweiterung der Reihenentwicklung auf $N+1$ Terme ist im Falle der Projektion sofort zu beantworten. Anhand der Gleichung $\mathbf{c}_{\text{Proj}} = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{f}$ ist ersichtlich, dass das Hinzufügen eines Terms oder entsprechend einer Zeile in \mathbf{A}^T keinen Einfluss auf die N ersten Koeffizienten hat.

Dagegen werden bei der Minimumsapproximation durch Hinzufügen eines $N+1$ ten Terms alle früheren N Terme verändert. Die Grössenordnung dieser Änderung wollen wir grob abschätzen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{f} \quad \text{und} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Dann werden die N Terme \mathbf{c}_0 durch folgende Gleichung gegeben:

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{l}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{l} \end{bmatrix}$$

Werden nun die Zusatzkoeffizienten \mathbf{d} angefügt, so erhält das System eine Ränderung in folgender Weise:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{U} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die ersten N Terme nun lauten

$$\mathbf{c} = \mathbf{M} \mathbf{l} + \mathbf{R} \mathbf{k}$$

und

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}^T \mathbf{l} + \mathbf{V} \mathbf{k}$$

Aus der Bedingung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

erhält man:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{U} - \mathbf{Q}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q})^{-1}$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{V}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{Q} \mathbf{R}^T)$$

Die ersten N Koeffizienten werden also

$$\mathbf{c} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R}^T \mathbf{l} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{V} \mathbf{k} = \mathbf{c}_0 - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{d}$$

Für orthonormierte Basissysteme muss gelten:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} + \mathbf{S} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \mathbf{O}(h^2)$$

und

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0} + \mathbf{O}(h^2)$$

Die N ersten Koeffizienten werden demnach

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 - (\mathbf{E} - \mathbf{S}) \mathbf{Q} \mathbf{d} \approx \mathbf{c}_0 - \mathbf{Q} \mathbf{d}$$

Wird demnach ein $N+1$ ter Term c^{N+1} der Entwicklung zugefügt, so ändern sich die alten N Terme nach folgender Gleichung:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 - c^{N+1} \mathbf{Q} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0} + \mathbf{O}(h^2)$$

2.7.4 Einfluss der Stützpunktverteilung

Mit dem vorhin entwickelten Formalismus ist diese Frage relativ leicht zu lösen. Die Wahl der Gewichte G im ungleichabständigen Fall ist nicht ganz einfach zu treffen. Wir nehmen an, dass G die richtige sei. Dann wird ein Fehler δG auf einen Fehler in den durch Projektion erhaltenen Koeffizienten führen:

$$c_{\text{Proj}} + \delta c_{\text{Proj}} = A^T(G+\delta G)f$$

$$\delta c_{\text{Proj}} = A^T \delta G f$$

Der Fehler geht hier also linear ein. Bei der Lösung über kleinste Quadrate wird

$$c_{\text{Quad}} + \delta c_{\text{Quad}} = (A^T(G+\delta G)A)^{-1} A^T(G+\delta G)f$$

Die Inverse wird unter der Beachtung eines kleinen numerischen Fehlers S :

$$(A^TGA + A^T \delta GA)^{-1} \approx (E+S + A^T \delta GA)^{-1} \approx E - S - A^T \delta GA$$

Vernachlässigt man quadratische Terme in δG und S , so erhält man:

$$\delta c_{\text{Quad}} = A^T \delta G f - A^T \delta G A A^T G f = A^T \delta G (E - A A^T G) f$$

Wir berechnen den Klammerausdruck und setzen vorübergehend:

$$D = E - A A^T G \quad \text{und} \quad DA = A - A A^T GA = -AS$$

Daraus ergibt sich:

$$D = -AS A^T G$$

und damit

$$\delta c_{\text{Quad}} = -A^T \delta G A S A^T G f \approx 0$$

Ist die numerische Integration 'genau', so wird

$$\delta c_{\text{Quad}} = 0$$

Dies heisst aber, dass der Einfluss durch die Ungleichabständigkeit durch die Ausgleichung mindestens mit $O(h^2)$ zum Verschwinden gebracht wird, während bei der Projektion der

Fehler δG linear einget. Führt man als Gewichte in der Ausgleichung das Mass für das durch die entsprechende Stützstelle repräsentierte Raumelement (Matrix G) ein, so wird die Orthogonalität lediglich im Rahmen von $O(h^2)$ zerstört. Auf diese Weise lässt sich also auch bei ungleichabständigen Stützpunktverteilungen eine orthogonale Entwicklung durch kleinste Quadrate Ausgleichung gewinnen.

2.7.5 Häufig verwendete Systeme

Als Beispiele seien die in der Geodäsie häufig angetroffenen orthogonalen Systeme erwähnt. Im Intervall $[-1,1]$ und mit der Gewichtsfunktion $\mu \equiv 1$ bilden die (zugeordneten) Legendre Polynome bezüglich

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f \cdot g \, dG$$

ein orthogonales System. Es gilt bekanntlich:

$$\langle P_k^m, P_n^m \rangle = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nk}$$

Führt man die Gewichtsfunktion

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ein, so erhält man das Orthogonal-System der Tschebyscheff-Polynome 1. Art

$$\langle T_m, T_n \rangle = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \delta_{n0} \right) \delta_{nm}$$

In zwei Dimensionen kommt in der Geodäsie häufig die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen (über der Einheitskugel) zum Tragen:

$$\langle Y_k^l, Y_n^m \rangle = \int Y_k^l \cdot Y_n^m \, d\Omega = \delta_{lm} \delta_{kn}$$

Die Integration wird ausgeschrieben als:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta$$

2.9 Operatoren im Funktionalraum

Da im Zusammenhang mit der Lösung des Randwertproblems die Greensche Funktion als Operator aufgefasst wird (Kap. 3.2.2), soll hier der Operator-Begriff im Zusammenhang mit dem Funktionalraum kurz erwähnt werden.

Lineare Operatoren bilden die Elemente f_i eines linearen Raumes in folgender Weise ab:

$$f \rightarrow Af \quad \text{und} \quad A[\alpha_i f_i] = [\alpha_i Af_i]$$

Falls der Raum endlich-dimensional ist und durch die orthonormierte Basis e_i aufgespannt wird, so kann die Koeffizientenmatrix

$$a_{ik} = \langle Ae_k, e_i \rangle$$

definiert werden. Der Operator kann also bezüglich einer Basis e_i in Matrixschreibweise dargestellt werden (die Elemente sind abhängig von der gewählten Basis). Insbesondere werden die für die Lösung des Randwertproblems wichtigen reproduzierende Kerne (Kap. 2.8.3) nochmals hergeleitet.

2.8.1 Selbstadjungierte Operatoren

Für unsere Betrachtungen sind hermitesche oder selbstadjungierte Operatoren von Bedeutung. Für sie gilt:

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

Die entsprechende Matrix wird:

$$a_{ik} = \langle Ae_k, e_i \rangle = \langle e_k, Ae_i \rangle = \langle Ae_k, e_i \rangle^* = a_{ki}^*$$

* bezeichnet die komplex konjugierte. Damit ist a_{ik} hermitesch. Im reellen Raum, wie er hier vorliegt ist die Matrix symmetrisch. Man kann nun in einem Funktionalraum die Metrik so wählen, dass ein bestimmter Operator gerade selbstadjungiert wird. Der Operator A wird so gewählt, dass das Eigenwertproblem die einfache Gestalt

$$A f = \lambda f$$

erhält.

In Smirnov (IV, 1973, p.370) ist gezeigt, dass Differentialoperatoren der Form

$$L(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + c f$$

selbstadjungiert sind. Setzt man $\alpha_{ik} = \delta_{ik}$ und $c = 0$, so erhält man für L den Laplace-Operator:

$$L(f) = \Delta f$$

Dies gilt auch in anderen Koordinatensystemen. Schreibt man den Δ -Operator in Kugelkoordinaten (Kap 2.10)

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta f$$

so ist direkt ersichtlich, dass der Radialanteil

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

genau der obigen Formulierung entspricht.

Ein weiterer interessanter Operator ist durch die Fundamentalgleichung der Physikalischen Geodäsie gegeben. In der bekannten (genäherten) Form wird

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

oder

$$\Delta g = L T$$

mit

$$L = - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}$$

Im Raum der regulären Funktionen mit homogenen Randwerten wird L bezüglich der L^2 -Norm selbstadjungiert, da gilt:

$$\langle Lf, g \rangle = - \int \left(f' g + \frac{2}{r} f g \right) dr$$

$$\langle f, Lg \rangle = - \int \left(f g' + \frac{2}{r} f g \right) dr$$

$$\Rightarrow \langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

Eine wichtige Eigenschaft bilden nun die Inversen von selbstadjungierten Operatoren. Gilt etwa

$$u = Af$$

$$v = Ag$$

und

$$Bu = f$$

$$Bv = g$$

mit

$$AB = E,$$

so folgt

$$\langle Af, g \rangle = \langle ABu, Bv \rangle = \langle u, Bv \rangle$$

und da nach Voraussetzung A selbstadjungiert ist

$$= \langle f, Ag \rangle = \langle Bu, ABv \rangle = \langle Bu, v \rangle$$

also ist der Inverse Operator B ebenfalls selbstadjungiert. Falls ein Operator lediglich in einem Unterraum des anderen operiert, so gilt die Beziehung $AB = E$ nur im Unterraum.

Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators sind reell, dies zeigt folgende Rechnung (Stiefel, 1973):

Aus $Af = \lambda f$ folgt

$$\langle Af, f \rangle = \lambda \langle f, f \rangle \text{ und } f \neq 0 \text{ also } \langle f, f \rangle > 0$$

also

$$\lambda = \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

und

$$\langle Af, f \rangle = \langle f, Af \rangle^* = \langle f, Af \rangle \in \mathfrak{R}$$

damit wird

$$\lambda = \frac{\langle Af, f \rangle}{\langle f, f \rangle} \in \mathfrak{R}$$

Ist der Operator zudem positiv

$$\langle Af, f \rangle \geq 0,$$

so sind sämtliche Eigenwerte positiv

$$\lambda \geq 0$$

Für die Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren lässt sich nach ähnlichen Rechnungen (z.B. Messiah, 1975, p.232) zeigen, dass sie ein orthogonales System bilden müssen:

u und v sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ und μ , es gilt also:

$$Au = \lambda u$$

$$Av = \mu v$$

und da nach Voraussetzung A selbstadjungiert ist, folgt

$$0 = \langle v, Au \rangle - \langle Av, u \rangle = (\lambda - \mu) \langle v, u \rangle$$

damit gilt

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \text{für } \lambda \neq \mu$$

2.8.2 Integraloperatoren

Eine weitere in der physikalischen Geodäsie häufige Form von Operatoren stellen die Integraloperatoren dar. Speziell seien die Integrale mit Kernfunktionen betrachtet

$$Af(x) = \int K(x, y) f(y) dy$$

Man kann nun einfach zeigen, dass im Falle von selbstadjungierten Operatoren A der Kern symmetrisch sein muss.

$$\langle Af, g \rangle = \iint K(x, y) f(y) g(x) dx dy$$

$$\langle f, Ag \rangle = \iint f(x) K(x, y) g(y) dx dy = \iint f(y) K(y, x) g(x) dx dy$$

Da A selbstadjungiert ist:

$$\langle Af, g \rangle - \langle f, Ag \rangle = 0 = \iint [K(x, y) - K(y, x)] f(y) g(x) dx dy$$

Daraus folgt aber, dass der Kern symmetrisch in den Argumenten sein muss:

$$K(x, y) = K(y, x)$$

Existiert das Eigenwertproblem

$$Af = \lambda f$$

für den Integraloperator A, so kann man auch von reproduzierenden Integralkernen sprechen. Z.B. stellen Greensche Funktionen im Falle vom Dirichletproblem reproduzierende Kerne dar. Im diskretisierten Fall stellen zum Beispiel Kovarianzmatrizen bei Interpolationsproblemen reproduzierende Kerne dar. In gewissen regulären Fällen ist es möglich reproduzierende Kerne mit Hilfe des inversen Operators zu erzeugen:

- A Differentialoperator
- B dazu inverser Integraloperator

$$Ag = f(x) = ABf = A \int K(x, y) f(y) dy = \int A_x K(x, y) f(y) dy$$

Es gilt also

$$f = Cf$$

mit

$$C = \int A K(x, y) \cdot dy$$

AK ist dann offensichtlich ein reproduzierender Kern. Gehören x und y zum gleichen Gebiet, so folgt, dass

$$AK(x, y) = \delta(x, y)$$

sein muss, da die Ausblendungseigenschaft

$$f(x) = \int \delta(x, y) f(y) dy$$

gilt.

2.8.3 Reproduzierende Kerne

Das Problem besteht nun darin, den Kern $\delta(x,y)$ tatsächlich zu berechnen oder darzustellen. Das Integral

$$f(x) = \int \delta(x,y) f(y) dy$$

kann als Definition der Distribution δ herangezogen werden. Betrachtet man nun Funktionen f in H^0 mit der entsprechenden Norm (siehe Kap 2.7.1), so kann man versuchen den Kern im unterlegten Raum darzustellen. Den Integraloperator

$$Af = \int K(x,y) f(y) dy$$

kann man als Skalarprodukt $\langle f(y), K(x,y) \rangle$ auffassen. D.h. es gilt:

$$Af = \langle f, K \rangle$$

Damit erhält man erneut die Schreibweise, wie sie in der Funktionaltheorie verwendet wird. Nach z.B. Tscherning (1986) kann ein reproduzierender Kern linear durch die Basisvektoren des betrachteten Vektorraumes dargestellt werden:

$$K(x,y) = [e_i(x) \cdot e_i(y)]$$

Die eckigen Klammern bezeichnen die Summe. Sie erstreckt sich über die Dimension des betrachteten Vektorraumes (Index i). Die e_i stellen die Basisvektoren (-funktionen) dar. Wird dies in Af eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} Af &= \langle f, [e_i(x) \cdot e_i(y)] \rangle = \langle f, [e_i(x) \cdot e_i(y)] \rangle \\ &= [\langle f, e_i(x) \cdot e_i(y) \rangle] = [\langle f, e_i(y) \rangle e_i(x)] = [c_i e_i(x)] = f \end{aligned}$$

Mit obiger Vorgehensweise findet man tatsächlich einen reproduzierenden Kern. Im vorangehenden Kapitel 2.8.2 hatten wir eine Möglichkeit der Konstruktion von reproduzierenden Kernen mit Hilfe der inversen Operatoren gezeigt. Da bei der Lösung des Randwertproblems die Harmonischen Funktionen eine Rolle spielen, sei hier der reproduzierende Kern auf der Einheitssphäre angeschrieben. Der betrachtete Vektorraum sei der Unterraum der harmonischen Funktionen mit der Norm

$$\langle f, g \rangle = \int f^* g d\Omega$$

Dazu verwenden wir als Basis die auf der Einheitssphäre normierten Kugelflächenfunktionen (Kap. 2.4). Für sie gelten dann die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\left\langle Y_n^m, Y_{n'}^{m'} \right\rangle = \delta_{n n'} \delta_{m m'}$$

Die Y-Funktionen können in Kugelkoordinaten sehr einfach von der Einheitssphäre analytisch fortgesetzt werden (siehe auch die Lösung der Laplacegleichung in Kugelkoordinaten, Kap. 2.4). Wir erhalten dann für unsere Basis e_i oder e_{nm} die folgenden Funktionen:

$$e_{nm} = \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n^m$$

Des weiteren wird das Additionstheorem verwendet:

$$P_n(\cos(x,y)) = \frac{4\pi}{2n+1} \left[Y_n^{m*}(x) Y_n^m(y) \right]_{m=-n}^n$$

Der reproduzierende Kern wird also mit:

$$K_0(x,y) = [e_i(x) \cdot e_i(y)]_i = [[e_{nm}(x) \cdot e_{nm}(y)]_m]_n$$

und mit obiger Basis und dem Additionstheorem:

$$\begin{aligned} K_0(x,y) &= \left[\left[\left(\frac{R}{r(x)} \right)^{n+1} Y_n^{m*}(x) \left(\frac{R}{r(y)} \right)^{n+1} Y_n^m(y) \right]_m \right]_n \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[(2n+1) \left(\frac{R^2}{r(x)r(y)} \right)^{n+1} P_n(\cos(x,y)) \right]_n \end{aligned}$$

2.9 Fehlerfortpflanzung bei Integralformeln und Reihenentwicklungen

Da das Problem der Fehlerfortpflanzung in Integralformeln immer wieder auftaucht, etwa beim Stokes-Integral, sollen hier die im jeweiligen Fall zu spezialisierenden allgemeinen Formeln hergeleitet werden.

2.9.1 Integraldarstellung

Betrachtet man die stochastische Funktion $\varepsilon(x)$ und eine Funktion $S(x,y)$ mit $x,y \in G$ (G ist meistens in \mathfrak{R}^2) und setzt man etwa eine zentrierte Normalverteilung voraus, so kann man für die Erwartungswerte schreiben:

$$E\{ \varepsilon(x) \} = 0$$

$$E\{ \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) \} = C(x,y)$$

Dabei steht der Erwartungswert-Operator für:

$$E\{ \cdot \} = \int \cdot dG / \int dG$$

Betrachten wir das folgende Integral

$$F(y) = \int_G f(x) \cdot S(x,y) dG$$

wo $f(x)$ mit dem Fehler $\varepsilon(x)$ behaftet ist, so wird der Erwartungswert für die Funktion $F(y)$:

$$\begin{aligned} E\{ F(y) \} &= E\left\{ \int_G (f(x) + \varepsilon(x)) \cdot S(x,y) dG \right\} \\ &= \int_G E\{ (f(x) + \varepsilon(x)) \} \cdot S(x,y) dG \\ &= \int_G (f(x) + E\{ \varepsilon(x) \}) \cdot S(x,y) dG = F(y) \end{aligned}$$

Für die Streuung erhält man

$$\begin{aligned}\sigma_F^2(y) &= E \left\{ \int_G \varepsilon(x) S(x,y) dG \cdot \int_G \varepsilon(x') S(x',y) dG' \right\} \\ &= \int_G E \left\{ \varepsilon(x) \varepsilon(x') \right\} S(x,y) S(x',y) dG dG' \\ &= \int_G C(x,x') S(x,y) S(x',y) dG dG'\end{aligned}$$

Durch ein isotropes, homogenes Verhalten der stochastischen Funktion $\varepsilon(x)$

$$C(x,x') = \sigma_f^2 \delta(x-x')$$

vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\begin{aligned}\sigma_F^2(y) &= \sigma_f^2 \int_G \delta(x-x') S(x,y) S(x',y) dG dG' \\ &= \sigma_f^2 \int_G [S(x,y)]^2 dG\end{aligned}$$

Setzt man etwa ein isotropes, nicht aber ein homogenes Verhalten voraus, so erhält man das etwas allgemeinere Resultat:

$$C(x,x') = \sigma_f(x) \delta(x-x') \sigma_f(x')$$

$$\sigma_F^2(y) = \int [\sigma_f(x) S(x,y)]^2 dG$$

oder für die Kovarianzen erhält man analog:

$$\sigma_F(y,y') = \int \sigma^2(x) S(x,y) S(x,y') dG$$

2.9.2 Reihenentwicklungen

Hier interessieren die Fehler, die bei der Bestimmung von Reihenentwicklungen an den Koeffizienten c_i auf Grund des Fehlers in der Funktion f selbst entstehen. Werden die Koeffizienten durch eine Ausgleichung bestimmt, so erhält man die Fehler direkt durch N^{-1} (siehe Kap.2.8.2 zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten). Um die Fehler bei der Bestimmung der Koeffizienten durch Projektion zu behandeln, verwenden wir die Notation aus Kapitel 2.8. Danach kann man schreiben:

$$c_i = \langle f, e_i \rangle$$

Für den Fehler schreiben wir :

$$\sigma_i^2 = E \{ \langle \varepsilon(x), e_i(x) \rangle \langle \varepsilon(x'), e_i(x') \rangle \}$$

und unter Beachtung der Linearität des Skalarproduktes und des Erwartungswert-Operators kann man setzen:

$$= \langle \langle E \{ \varepsilon(x) \varepsilon(x') \} e_i(x), e_i(x') \rangle \rangle$$

Für den Erwartungswert schreiben wir :

$$E \{ \varepsilon(x) \varepsilon(x') \} = C(x, x') = \sigma_f(x) \delta(x-x') \sigma_f(x')$$

eingesetzt in obige Formel

$$\sigma_i^2 = \langle \langle \sigma_f(x) \delta(x-x') \sigma_f(x') e_i(x), e_i(x') \rangle \rangle$$

und Integration nach x' ergibt:

$$\sigma_i^2 = \langle \sigma_f(x) \sigma_f(x) e_i(x), e_i(x) \rangle$$

Bei isotropem Verhalten von f erhält man

$$\sigma_i^2 = \sigma_f^2 \langle e_i(x), e_i(x) \rangle = \sigma_f^2 \| e_i(x) \|^2$$

Wird zusätzlich eine normierte Basis gewählt, so ergibt sich die einfache Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_i^2 = \sigma_f^2$$

2.9.3 Fehler von Reihenentwicklungen

Eine umgekehrte Fragestellung ergibt sich, falls der Fehler einer Reihenentwicklung gesucht wird, der sich durch fehlerhafte Koeffizienten einschleicht. Wiederum mit Kapitel 2.8 können wir für eine Approximation schreiben:

$$f = [c_i e_i]^N$$

In Matrixschreibweise lautet dann die Formel:

$$f = \mathbf{c}^T \mathbf{e}$$

Setzt man für die Koeffizienten eine Kovarianz \mathbf{C} an, die z.B. aus der Ausgleichung folgt, so ergibt sich auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes und bei Berücksichtigung einer Isotropie

$$\mathbf{C} = \sigma_c^2 \mathbf{E}$$

der Fehler an f als:

$$\sigma_f^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{C} \mathbf{c} = \sigma_c^2 \mathbf{c}^T \mathbf{c} = \sigma_c^2 [c_i^2]^N$$

2.9.4 Allgemeiner Kovarianz- und Gewichtsansatz bei Integralgleichungen

Da viele Gleichungen in der Physikalischen Geodäsie als Integralgleichungen aufgefasst werden können, sei hier ein allgemeiner Ansatz zur Beschreibung von Kovarianzen und Gewichten von derartigen Gleichungen hergeleitet. Im speziellen interessieren harmonisch entwickelbare Kerne.

Wir gehen wiederum vom Integral

$$F(y) = \int_G f(x) \cdot S(x,y) dG$$

aus. Dabei fragen wir nach der Kovarianz von F . Benutzen wir die funktionale Schreibweise, so erhalten wir bei unabhängigen σ (siehe Kap.2.9.1):

$$C(y,y') = \langle \sigma(x) S(y,x), \sigma(x) S(x,y') \rangle = \sigma^2 \langle S(y,x), S(x,y') \rangle$$

Die Gewichtsfunktion P ist dann bekanntlich durch die Inversion von \mathbf{C} gegeben, was im

Kontinuierlichen auf die Inversion der Integralgleichung führt, die wir in folgender Art schreiben wollen::

$$\delta(y-y') = \langle P(y,x), C(x,y') \rangle$$

Um nun diese Gleichung explizit nach P aufzulösen, spezialisieren wir den Kern S auf harmonisch entwicklbare Funktionen. Also kann man nach Kap. 2.8 schreiben:

$$S(x,y) = [s_i e_i(x) e_i(y)]$$

Damit wird unter Beachtung der Orthogonalität der Basis e die Covarianz C:

$$C(y,y') = \sigma^2 \langle [s_i e_i(y) e_i(x)] , [s_j e_j(x) e_j(y')] \rangle$$

$$C(y,y') = \sigma^2 [[\langle s_i e_i(y) e_i(x) , s_j e_j(x) e_j(y') \rangle]] = \sigma^2 [s_i^2 e_i(y) e_i(y')]$$

Wir machen nun für das Gewicht P einen harmonischen Ansatz.

$$P(x,y) = [p_i e_i(x) e_i(y)]$$

Ebenso für δ , die als reproduzierender Kern ebenfalls in eine derartige Reihe (jedoch nicht konvergent) entwickelt werden kann. Die Koeffizienten sind dabei 1 zu setzen (Kap.2.9.3):

$$\delta(x,y) = \delta(x-y) = [e_i(x) e_i(y)]$$

Wir setzen in die zu invertierende Gleichung ein und können dann durch Koeffizientenvergleich die unbekanntenen Koeffizienten p_i bestimmen.

$$\begin{aligned} \delta(y-y') &= \langle P(y,x), C(x,y') \rangle \\ [e_i(y) e_i(y')] &= \langle [p_i e_i(y) e_i(x)] , \sigma^2 [s_k^2 e_k(x) e_k(y')] \rangle = [p_i \sigma^2 s_i^2 e_i(y) e_i(x)] \end{aligned}$$

Der Vergleich ergibt sofort :

$$p_i = \frac{1}{\sigma^2 s_i^2}$$

Damit hat man aber neben einer Covarianzfunktion direkt eine Gewichtsfunktion gefunden. Die Anwendung dieser Herleitungen erfolgt bei der Covarianzbetrachtung im Zusammenhang mit der funktionalen Beschreibung des Schwerefeldes.

3 Zum Randwertproblem

3.1 Problemstellung

Eine zentrale Fragestellung der Physikalischen Geodäsie betrifft die Bestimmung des Geoides der Erde. Das Geoid als solches kann als Hilfsgrösse betrachtet werden, da die eigentlich interessierenden Potentialgrössen in sehr vielen Fällen auf der Erdoberfläche gebraucht werden. Es ist offensichtlich, dass die Fragestellung als Randwertproblem formuliert werden kann. Allerdings sind dann noch etliche, vor allem den Rand und die Randwerte betreffende Fragen zu lösen. Dies soll im folgenden kurz erläutert werden.

Wir betrachten zwei im \mathbb{R}^3 komplementäre Gebiete Γ und Σ . Σ bezeichne das Gebiet innerhalb der Erde, Γ das Gebiet ausserhalb der Erde. Die Trennfläche beider Gebiete ist offensichtlich die Erdoberfläche $\partial\Gamma$. Die Masse der Atmosphäre sei vernachlässigt oder entsprechend dem Kap. 5.3. korrigiert. Dann kann man also folgende Problemstellungen formulieren.

Für den äusseren Bereich gilt die homogene Laplace-Gleichung:

Dirichlet-Problem:

$$\begin{aligned}\Delta V &= 0 & \mathbf{x} \text{ in } \Gamma \\ V &= f & \mathbf{x} \text{ auf } \partial\Gamma\end{aligned}$$

Neumann-Problem:

$$\begin{aligned}\Delta V &= 0 & \mathbf{x} \text{ in } \Gamma \\ \partial V / \partial n &= g & \mathbf{x} \text{ auf } \partial\Gamma\end{aligned}$$

oder gemischte Randwerte

Entsprechend gilt für den inneren Bereich die inhomogene Poisson-Gleichung:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -4\pi G\rho & \mathbf{x} \text{ in } \Sigma \\ V &= f & \mathbf{x} \text{ auf } \partial\Gamma\end{aligned}$$

oder

$$\partial V / \partial n = g \quad \mathbf{x} \text{ auf } \partial\Gamma$$

Zur Lösung der verschiedenen Probleme sind unterschiedliche Methoden anwendbar. Beim Dirichlet-Problem taucht eine lineare, homogene Differentialgleichung auf. Die Gesamtheit der Lösungen bilden daher einen linearen Funktionenraum, wie er im Kap.2.7 dargestellt wurde. Das Dirichlet-Problem kann daher durch Separation, wie sie in den Kapiteln 2.2.-2.5. beschrieben ist, und anschliessende Entwicklung der Lösungsfunktion und der Randwerte in Eigenfunktionen gelöst werden (Koeffizientenvergleich). Die Gesamtlösung entsteht durch die Superposition aller Teillösungen.

Diese Methode der Separation versagt beim Poisson-Problem, da bekanntlich die Lösungen

einer inhomogenen Differentialgleichung keinen linearen Raum mehr bilden. Es genügt jedoch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, ihr können dann die Lösungen der homogenen Gleichung überlagert werden.

Dabei ist zu beachten, dass inhomogene Randwerte durch die Wahl irgendeiner, die Randwerte erfüllende Funktion zum Verschwinden gebracht werden können. Wählt man also die Funktion U mit

$$U(\mathbf{x}) = f \quad \mathbf{x} \text{ auf } \partial\Gamma$$

Damit wird eine Funktion

$$W = V - U$$

definiert, die folgender Gleichung genügt:

$$\begin{aligned} \Delta W &= -4\pi G\rho - \Delta U & \mathbf{x} \text{ in } \Sigma \\ W &= 0 & \mathbf{x} \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned}$$

Die Funktionen, die diese Gleichungen erfüllen, bilden dann wieder einen linearen Funktionenraum. Diese Tatsache führt auf die Methode der Quellpunktdarstellung. Dazu ist es nötig, nicht nur einen Ort P , sondern zwei ausgezeichnete Punkte $P(\mathbf{x})$ und $Q(\mathbf{y})$ zu betrachten. P stelle in üblicher Weise den Aufpunkt der Rechnung dar. Mit Q werde der Quellpunkt bezeichnet. Es ist zu beachten, dass in diesem Kapitel die Inhomogenität der Differentialgleichung der Einfachheit halber mit 1 normiert wird:

$$-4\pi G\rho \rightarrow \rho$$

Schreibt man obiges Poisson-Problem für homogene Randwerte um, kann man setzen:

$$\begin{aligned} \Delta V &= f & P \text{ in } \Sigma \\ V &= 0 & P \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned}$$

3.2 Integrallösung

Die Lösung dieses Problems lässt sich mit Hilfe der Green'schen Funktion $K(P,Q)$ schreiben als:

$$V(P) = \int_{\Sigma} K(P,Q) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q$$

Dabei erfüllt die Green'sche Funktion die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta K(P,Q) &= \delta(P,Q) && P \text{ in } \Sigma \\ K(P,Q) &= 0 && P \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned}$$

Um das anfängliche Problem zu lösen, muss vorgängig die Greensche Funktion aufgrund dieser beiden Gleichungen gefunden werden. Dass das obige Integral mit den zusätzlichen Bedingungen das Poisson-Problem zu lösen vermag, zeigt man auf heuristische Weise durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta_P V(P) &= \Delta_P \int_{\Sigma} K(Q,P) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q = \int_{\Sigma} \Delta_P K(Q,P) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q \\ &= \int_{\Sigma} \delta(Q,P) \cdot f(Q) \, d\Sigma_Q = f(P) \end{aligned}$$

Zur Verifizierung der Randwertgleichung wenden wir einen Satz von Green auf die zwei Funktionen K und V an:

$$\int_{\Sigma} (\Delta_P V \cdot K - V \cdot \Delta_P K) \, d\Sigma_P = \int_{\partial\Gamma} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \cdot K - V \cdot \frac{\partial K}{\partial n} \right) \, d\partial\Gamma_P$$

Führt man die Differentiationen durch und beachtet, dass $K(P,Q)$ für P auf dem Rand gleich null wird, so erhält man:

$$\int_{\Sigma} (f(P) \cdot K(P,Q) - \delta(P,Q) \cdot V(P)) \, d\Sigma_P = \int_{\partial\Gamma} -\frac{\partial K}{\partial n} \cdot V \, d\partial\Gamma_P$$

Die Berechnung der Integrale gibt:

$$V(Q) - V(Q) = 0 = \int_{\partial\Gamma} -\frac{\partial K}{\partial n} \cdot V \, d\partial\Gamma_P$$

Da keine Voraussetzungen über die Ableitungen von K gemacht wurden, muss V auf dem Rande verschwinden, um das Integral zu null zu machen, also:

$$V = 0 \quad P \text{ auf } \partial\Gamma$$

Aufgrund der Quellendarstellung kommt man nun sehr einfach zu bekannten Formeln der Potentialtheorie, die eine Integral-Lösung des Dirichlet-Problems liefern. Dazu verwenden wir nochmals den Green'schen Satz für zwei Funktionen V und k . Die Funktionen sollen die partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta V(P) = \rho(P)$$

und

$$\Delta k(P) = \delta(P, Q)$$

erfüllen. In die Green'sche Formel eingesetzt, wird das Raumintegral

$$\int_{\Sigma} (\Delta V \cdot k - V \cdot \Delta k) d\Sigma = \int_{\Sigma} \rho k d\Sigma - \int_{\Sigma} V(P) \cdot \delta(P, Q) d\Sigma = \int_{\Sigma} \rho k d\Sigma - V(Q) .$$

Dies muss nach dem Greenschen Satz mit dem Integral über den Rand übereinstimmen.

$$= \int_{\partial\Sigma} V_n k - V k_n d\partial\Gamma$$

Damit erhält man direkt den Wert der gesuchten Funktion V im Inneren des Gebietes. Allerdings muss man die Funktion k kennen (z.B. Greensche Funktion).

$$V(Q) = \int_{\partial\Gamma} \left(\frac{\partial k}{\partial n} \cdot V - k \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\partial\Gamma + \int_{\Sigma} \rho k d\Sigma$$

Des weiteren müssen die Randwerte von V und deren Ableitungen gegeben sein. Dazu ist zu bemerken, dass diese Lösung überbestimmt ist, da $V(Q)$ sowohl durch Randwerte von V als auch durch solche von $\partial V/\partial n$ bestimmt ist. Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung wäre z.B. $k = - (4\pi)^{-1}$. Führt man etwa die Green'sche Funktion K (sie muss ja im Fall von Dirichlet-Randbedingungen am Rand verschwinden) ein, so lässt sich die Formel weiter vereinfachen zu:

$$V(Q) = \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial n} V d\partial\Gamma + \int_{\Sigma} \rho K d\Sigma$$

Für Neumannsche Randbedingungen erhält man eine analoge Formel. Allerdings ist dabei zu beachten, dass die Randbedingungen für die Normalableitung der Greenschen Funktion nicht homogen sein dürfen, da sonst der Fluss des Gradientenfeldes (im Schwerfeld entspricht dies dem Schwerevektor in Richtung der Flächennormalen) durch die Oberfläche ebenfalls verschwinden würde. Nach dem Gauss'schen Satz erhält man (sh. auch Kap. 4.3.1)

$$\int \nabla \nabla K \, d\Sigma = \int \Delta K \, d\Sigma = \int \delta \, d\Sigma = 1 = \int \nabla K \, d\partial\Gamma = \int \frac{\partial K}{\partial n} \, d\partial\Gamma$$

Der einfachste Ansatz, der dieses Integral erfüllt, entspricht der Randbedingung:

$$\frac{\partial K(P,Q)}{\partial n} = \frac{1}{|\partial\Gamma|} \quad P \text{ auf } \partial\Gamma$$

Dabei ist $|\partial\Gamma|$ die Fläche der Berandung. Mit dieser Randbedingung kann das Potential in folgender Weise ausgedrückt werden.

$$V(Q) = \frac{1}{|\partial\Gamma|} \int V \, d\partial\Gamma - \int_{\partial\Gamma} K \frac{\partial V}{\partial n} \, d\partial\Gamma + \int_{\Sigma} \rho K \, d\Sigma$$

Der erste Term entspricht dem Mittelwert von V über den Rand $\partial\Gamma$.

3.2.1 Zur Bestimmung der Green'schen Funktion

Es ist das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta K(P,Q) &= \delta(P,Q) & P \text{ in } \Sigma \\ K(P,Q) &= 0 & P \text{ auf } \partial\Gamma \end{aligned}$$

zu lösen.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt, dass die Lösung inhomogener Differentialgleichungen durch die Überlagerung einer speziellen (partikulären) Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung bewerkstelligt werden kann. Die spezielle Lösung sei k und die allgemeine κ . Im 3-dim. wird (sh. z.B. Courant-Hilbert)

$$k = -(4\pi)^{-1}$$

und

$$K(P,Q) = - (4\pi l)^{-1} + \kappa(P,Q)$$

mit

$$\Delta \kappa = 0$$

und

$$\kappa(P,Q) = -k(P,Q) \quad , \quad P \text{ auf } \partial\Gamma.$$

Damit hat man aber die Lösung K gefunden, da κ als Lösung eines Dirichletproblems zu finden ist. Für Gebiete von einfacher Form können die Green'schen Funktionen explizit angegeben werden. Hier interessiert etwa der eben begrenzte Halbraum und die Kugel. Für die Kugel setzt man für die Green'sche Funktion

$$K(P,Q) = - (4\pi l)^{-1} + \kappa(P,Q') = (4\pi)^{-1} (-l^{-1} + \alpha l'^{-1})$$

Man wählt nun Q' so, dass $K = 0$ auf dem Rand der Kugel erfüllt ist. Durch eine einfache geometrische Überlegung (Satz von Apollonius) wird α als R/a bestimmt.

$$\alpha = R/a$$

$$K(P,Q) = - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{l(P,Q)} - \frac{R}{a} \frac{1}{l(P,Q')} \right)$$

Um das Integral anwenden zu können, muss die Funktion K nach der Normalen n abgeleitet werden. Auf einer Kugeloberfläche entspricht die Normalenableitung gerade der Ableitung nach r .

$$\partial/\partial n \rightarrow \partial/\partial r$$

Ist die Ableitung durchgeführt, so setzt man $r = R$ und $l' = l \cdot R/a$. Der Integralkern wird damit

$$\frac{\partial K(P,Q)}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{R^2 - a^2}{R} \frac{1}{l(P,Q)} \quad , \quad P \text{ auf } \partial\text{Kugel}.$$

Setzt man diese Formel in das Integral ein, so folgt die Poissonsche Integralformel für die Kugel:

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{R^2 - a^2}{R} \int_{\partial\text{Kugel}} \frac{1}{l^3(P,Q)} V(P) d\partial K$$

Sind also die Randwerte einer harmonischen Funktion auf der Kugel bekannt, so lässt sie sich relativ einfach im ganzen Raum bestimmen. Für den Aussenraum der Kugel erhält man:

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 - R^2}{R} \int_{\partial K_{\text{Kugel}}} \frac{1}{r^3(P,Q)} V(P) d\partial K$$

3.2.2 Greensche Funktion als Integraloperator

Nach dem vorangegangenen Kapitel findet man eine Lösung der inhomogenen Potentialgleichung durch das Integral der Greenschen Funktion

$$V(P) = \int_{\Sigma} K(P,Q) \cdot f(Q) d\Sigma_Q$$

Beschreibt x den Punkt P und y entsprechen den Punkt Q und schreiben wir das Integral als Operator

$$A = \int K(x,y) \cdot dy$$

so ist die Analogie zur Schreibweise in Kapitel 2.8 gegeben. Wir setzen also

$$V(x) = A f(y)$$

Da dieses die Lösung des Problems $\Delta V = f$ oder in Operatoren Schreibweise $L V = f$ darstellt, können wir setzen:

$$AL = E$$

Weiter ist bekannt (Kap. 2.8.1), dass der Δ -Operator selbstadjungiert ist. Damit ist auch der Greensche Operator selbstadjungiert und somit muss der Kern oder in diesem Falle die Greensche Funktion symmetrisch sein

$$K(x,y) = K(y,x)$$

Das geodätische Randwertproblem auf der Sphäre besteht darin,

$$\Delta T = 0$$

mit den Randwerten

$$LT = - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T = \Delta g = f$$

zu lösen. Die Greensche Lösung lässt sich mit dem obigen Operator A ansetzen als

$$T = Af = \langle K, f \rangle$$

Der Operator A könnte auch als 'Stokes-Operator' interpretiert werden. Damit ist das Problem gelöst, formell mindestens. Die Greensche Funktion K ist noch unbekannt. Mit dem in 2.8.2 beschriebenen Verfahren können wir jedoch einen reproduzierenden Operator konstruieren. Und mit den Entwicklungen für reproduzierende Kerne im harmonischen Funktionenraum (Kap. 2.8.3) kann die Greensche Funktion explizite durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Sünkel (1984) entwickelte diesen Koeffizientenvergleich, der hier verwendet wird. Nach 2.8.2 können wir also schreiben:

$$LT = LAf = f(x) = \int LK(x,y) f(y) dy = L\langle K, f \rangle = \langle LK, f \rangle$$

Dabei ist das Skalarprodukt auf der Einheitssphäre definiert. Die Reproduktionseigenschaft bezieht sich also auf den Unterraum der harmonischen Funktionen auf der Sphäre. Dabei ist zu bemerken, dass LK dem Poissonkern entsprechen muss.

Für reproduzierende Kerne in harmonischer Basis gilt (Kap. 2.8.3):

$$K_0(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[(2n+1) \left(\frac{R^2}{r(x)r(y)} \right)^{n+1} P_n(\cos(x,y)) \right]_n$$

Restringiert auf die Sphäre erhält man:

$$K_0(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[(2n+1) P_n(\cos(x,y)) \right]_n$$

Nach Sünkel (1984) wird auch die Greensche Funktion K(x,y) in harmonische Funktionen entwickelt. Dabei ist zu beachten, dass y auf den Rand der Sphäre ($|y| = R$) beschränkt bleibt.

$$K(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left[k_n \left(\frac{R}{r(x)} \right)^{n+1} P_n(\cos(x,y)) \right]_n$$

Wird nun L auf K ausgeübt, so erhält man (L operiert nur auf r(x)):

$$LK = \frac{1}{4\pi r} \left[k_n (n-1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Es muss also auf der Sphäre $r = R$ gelten:

$$LK = K_0$$

Und durch Koeffizientenvergleich von LK und K_0 :

$$k_n = R \frac{2n+1}{n-1}$$

Damit werden die gesuchten Kerne:

'Stokes-Kern'

$$K = \frac{R}{4\pi} \left[\frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Poisson-Kern

$$LK = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r} \left[(2n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Die Summen (eckige Klammern) sind Reihenentwicklungen geschlossener Ausdrücke. Sie finden sich in Heiskanen & Moritz (1967). Danach entspricht der erste Ausdruck genau der erweiterten Stokesfunktion (sie enthält noch den 0-ter Ordnung Term):

$$S(x,y) = \left[\frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Die zweite Summe wird (Heiskanen & Moritz, 1967, p.35):

$$l = |x - y| \quad \text{und} \quad r = |x|$$

$$\frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} = \left[(2n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n \right]$$

Wir setzen die Abkürzung P für den Poisson-Kern

$$P(x,y) = \frac{R}{r} \frac{(r^2 - R^2)}{l^3}$$

Damit sehen die Lösungen des obigen Randwertproblems recht einfach aus:

Stokesche Lösung für das Potential im Aussenraum:

$$T = \frac{R}{4\pi} \langle S, \Delta g \rangle$$

Poisson-Integral für Schwereanomalien (Feldfortsetzung in Kugelkoordinaten in den Aussenraum):

$$\Delta g = \frac{R}{4\pi} \langle P, \Delta g \rangle$$

3.3 Variationsproblem

Das Variationsproblem in Bezug auf das Schwerfeld kann analog zum elektrostatischen Fall formuliert werden. Man sucht eine Feldfunktion mit vorgegebenen Randwerten, die ein Funktional minimiert. Als Funktional wird ein Energiemass eingesetzt (Brauer, 1988). Dazu muss dieses Mass jedoch bestimmt werden. Es wird gezeigt, dass bei geeigneter Wahl des Funktionals die Variationsgleichung genau der Poissongleichung entspricht. D.h., wenn eine Lösung des Extremalproblems vorliegt, dann hat man auch eine Lösung des Potentialproblems mit Randwerten gefunden.

3.3.1 Energie des Schwerfeldes

Der Begriff der Energie kann in formal analoger Weise wie in der Elektrostatik behandelt werden. Allerdings sind dabei einige grundlegende, theoretische Argumente, die eine derartige Vorgehensweise verbieten, nicht beachtet. In Thorne, Wheeler, Misner wird erläutert, warum die Gravitationsenergie nicht lokalisierbar ist.

Die Energie des Feldes kann durch die Arbeit charakterisiert werden, die notwendig ist, um eine Punktmasse $\delta\rho$ vom Unendlichen an den Ort x zu bringen.

Um also eine ganze Dichteverteilung $\delta\rho(x)$ aus dem Unendlichen im Potential U heranzuführen, muss Arbeit im Potential U geleistet werden:

$$dE = \int_V \delta\rho U dv$$

(Dieses Integral entspricht auch der in der Geodäsie üblichen Definition des Schwerepotentials).

Die Änderung ($\delta\rho(x)$) der Dichteverteilung ρ bewirkt nach der Poisson-Gleichung eine Änderung δU im Potential U :

$$\Delta\delta U = -4\pi G\delta\rho$$

also

$$dE = \frac{1}{4\pi G} \int_V \Delta\delta U U dv$$

Mit der Beziehung $\nabla(U \nabla\delta U) = \nabla U \nabla\delta U + U \Delta\delta U$