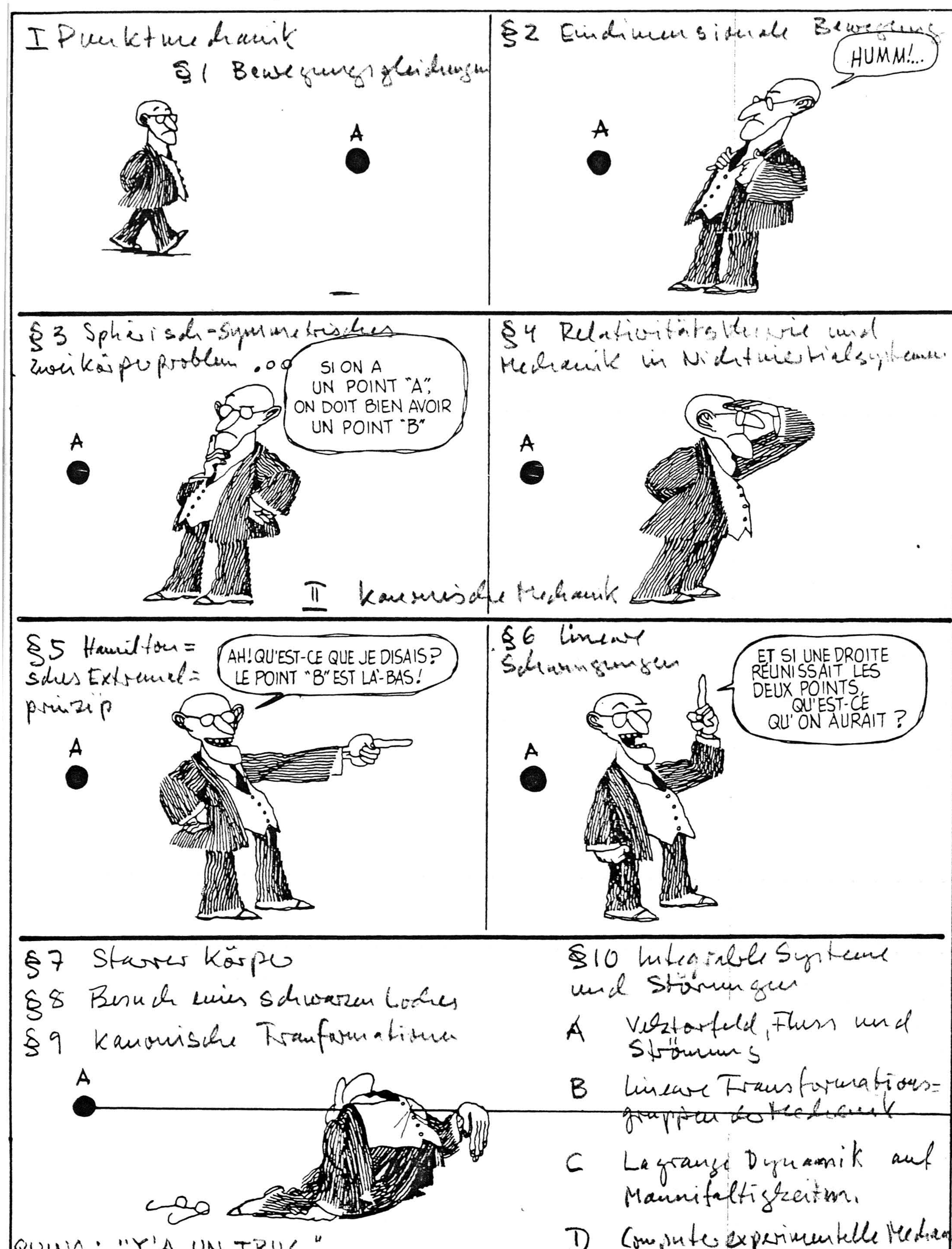
K. Hepp

Allgemeine Mechanik
Vorlesungsnotizen WS 1986/87

ALLGEMEINE MECHANIK

(K. Hepp WS 1986/87)



I Punktmechanik

§1 Bewegungsgleichungen

§2 Eindimensionale Bewegung

§3 Sphärisch-symmetrisches Zweikörperproblem

§4 Relativitätstheorie und Mechanik in Nichtinertialsystemen

II Kanonische Mechanik

§5 Hamiltonsches Extremalprinzip

§6 Lineare Schwingungen

§7 Starrer Körper

§8 Besuch eines schwarzen Loches

§9 Kanonische Transformationen

§10 Integrable Systeme und Störungen

A Vektorfeld, Fluss und Strömung

B Lineare Transformationsgruppen der Mechanik

C Lagrange Dynamik auf Mannigfaltigkeiten

D Computerexperimentelle Mechanik

QUINO: "Y'A UN TRUC"

Einleitung

Die "Allgemeine Mechanik" ist das Tor zur theoretischen Physik. Historisch ist die Mechanik der gemeinsame Vorfahre der heutigen Physik und Mathematik. Wir lernen hier in besonders einfacher Form Prinzipien der theoretisch-physikalischen Naturbeschreibung kennen, die auch in anderen Bereichen überaus fruchtbar sind. Es ist eigentlich ein Wunder, daß in unserer Welt Naturgesetze in mathematischer Form gelten ("Das Unbegreifliche der Welt ist, daß sie begreiflich ist" [A. Einstein]). Wir gewinnen die mathematischen Modelle der Physik zum Teil durch Abstraktion aus experimentellen Daten, zum Teil aber auch möglichen Erfahrungen vorausträumend. Ein mathematisches Modell hat Struktur (im Sinne von N. Bourbaki) und wird in der physikalischen Interpretation strukturerhaltend auf die Naturphänomene abgebildet. Ein gutes Modell veraltet dabei nie. Zwar wird es oft durch eine kompliziertere Theorie erweitert, aber es bleibt als einfachere Approximation und Grenzgesetz immer nützlich. In diesem Sinne hat die klassische Mechanik, die wir in dieser Vorlesung entwickeln wollen, alle Verallgemeinerungen in der Quantenmechanik und allgemeinen Relativitätstheorie glänzend überlebt. Zudem ist sie immer noch ein lebendiges Forschungsgebiet, in dem in den letzten Jahrzehnten durch bedeutende Mathematiker (C.L. Siegel, A.N. Kolmogorov, V.I. Arnold, J.K. Moser, S. Smale, E. Zehnder) und durch den Einsatz von Großrechnern wichtige Entdeckungen gemacht worden. In der Astrodynamik und in dem Bau von Robotern und Teilchenbeschleunigern erleben wir Triumphe der Technik, die auf diesen verfeinerten Analysen beruhen.

Es ist das Ziel dieser Vorlesung, nicht nur den begriff=lichen und mathematischen Apparat der Mechanik zu entwickeln, sondern auch Einblicke in die oft überraschenden physikalischen Phänomene zu geben, die durch die Mechanik vorausgesagt werden und experimentell bestens bestätigt sind. Wir werden die Theorie zunächst in der "einfachen" Sprache Newtons entwickeln und sie dann in möglichst durchsichtiger und aussagekräftiger Form nach Lagrange und Hamilton ausgestalten. Mit allen Entschuldigungen an die kompetenteren Kollegen der Nachbardisziplinen werden wir die Prinzipien der Mechanik auch in der Hydrodynamik, der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie anwenden. Leider reicht die Zeit nicht, die Stabilitäts- und Bifurkationstheorie dissipativer Systeme zu diskutieren und auf die herrlichen Computerexperimente fraktaler und chaotischer Strukturen einzugehen: die Mechanik als Natur=wissenschaft ist gewichtig genug.

<u>Unvollständige Literaturübersicht</u> (H: historisch, M: mathematisch, P: physikalisch)

[A1] R.H. Abraham, J.E. Marsden (M) "Foundations of Mechanics"

[A2] V.I. Arnold (MP) "Méthodes math. de la mécanique classique"

[A3] V.I. Arnold (M) "Equations différentielles ordinaires"

[A4] V.I. Arnold, A. Avez (M) "Probl. ergodiques de la méc. classique"

[B1] G.D. Birkhoff (M) "Dynamical Systems"

[B2] M. Born (P) "Vorlesungen über Atommechanik I"

[C1] A.J. Chorin, J.E. Marsden (M) "A math. introduction to fluid mechanics"

[C2] E.A. Coddington, N. Levinson (M) "Theory of ordinary diff. equ."

[C3] H. Corben, P. Stehle (P) "Classical Mechanics"

[F1] M. Fierz (P) "Allgemeine Mechanik"

[F2] M. Fierz (H) "Vorl. zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik"

[G1] I. Gelfand, S. Fomin (M) "Calculus of Variations"
[G2] L. Goldstein (P) "Klassische Mechanik"
[H1] Y. Hagihara (P) "Celestial mechanics" I, II, III, IV, V
[H2] G. Hamel (P) "Theoretische Mechanik"
[H3] M.W. Hirsch, S. Smale (M) "Diff. eq., dynamical systems and lin. alg."
[J1] J.D. Jackson (P) "Classical electrodynamics"
[J2] M. Jammer (H) "Concepts of Space", "Concepts of Force", "Concepts of Mass"
[J3] R. Jost (P) "Repetitorium zur allgemeinen Mechanik"
[K1] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib (M) "Topics in math. systems th."
[K2] U. Kirchgraber, E. Stiefel (M) "Meth. d. anal. Störungstheorie u. i. A."
[K3] F. Klein, A. Sommerfeld (P) "Theorie des Kreisels"
[K4] H.W. Knobloch, F. Kappel (M) "Gewöhnliche Differentialgl."
[L1] L.D. Landau, E.M. Lifschitz (P) "Mechanik", "Hydrodynamik"
[L2] J. LaSalle, S. Lefschetz (M) "Die Stabilitätstheorie von Ljapunow"
[L3] J.W. Leech (P) "Classical Mechanics"
[L4] A.J. Lichtenberg (P) "Phase space dynamics of particles"
[L5] L.H. Loomis, S. Sternberg (M) "Advanced calculus"
[M1] E. Mach (H) "Die Mechanik in ihrer Entwicklung hist. dargest."
[M2] W. Magnus (P) "Kreisel"
[M3] J.E. Marsden, M. McCracken (M) "The Hopf bifurcation and its appl."
[M4] V.P. Maslov (M) "Théorie des perturbations et méth. asymptotiques"
[M5] J.K. Moser (M) "Stable and random motions in dynamical systems"
[M6] J.K. Moser (MP) "Dynamical systems, theory and applications"
[N1] E. Nelson (M) "Topics in dynamics I: flows"
[N2] T.G. Northrop (P) "The adiabatic motion of charged particles"
[P1] H. Poincaré (M) "Les méth. nouvelles de la mécanique céleste"
[P2] L. Pontryagin (M) "Gewöhnliche Differentialgleichungen"
[R1] D. Ruelle (MP) "Dynamical systems and turbulence"
[R2] H. Rund (M) "Hamilton-Jacobi theory in cal. of variations"
[S1] R.U. Sexl, H.K. Urbantke (P) "Gravitation and cosmology"
[S2] C.L. Siegel, J.K. Moser (M) "Lectures on celestial mechanics"
[S3] A. Sommerfeld (P) "Mechanik"

[S4] J.M. Souriau (M) 'Structure des systèmes dynamiques'
[S5] S. Sternberg (M) 'Celestial mechanics I, II'
[S6] E. Stiefel, G Scheifele (M) 'Linear and regular celestial mechanics'
[S7] E. Stiefel (M) 'Meth. math. Physik IIa: Darstellungstheorie'
[S8] K Stumpf (P) 'Himmelsmechanik I, II, III'
[S9] E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda (P) Classical dynamics'
[S10] V. Szebehely (P) 'Theory of orbits'
[T1] W. Thirring (P) Lehrbuch d. Math. Physik · 1 Klass. Dynamische S '
[A5] R H Abraham, C D Shaw (M) Dynamics I, II, III '
[C4] S. Chandrasekhar (P) Mathematical Theory of Black Holes'
[F3] A L Fetter, J D Walecka (P) Theor. Mech. of Particles and Continua'
[G3] G. Gallavotti (P) The Elements of Mechanics'
[G4] G. Gallavotti (P) Quasi-integrable Dynamical Systems'
(Les Houches Lectures, 1984, Osterwalder & Stora Hrsg.)
[K5] S. Koonin (P) Computational Physics'
[M7] Misner, Thorne, Wheeler (P) Gravitation'
[R3] N. Rasband (P) 'Dynamics'
[S11] Sexl, Urbantke (P) Gravitation und Kosmologie'
[S12] J. Sánchez Mondragón, K B Wolf (P) Lie Methods in Optics')
[W1] D.A. Wells (P) Lagrangian Dynamics'
[C4] W D Curtis, F R Miller (M) 'Differential Manifolds and Theor. Phys.'
[S13] N. Straumann 'Allg. Relativitätstheorie u. rel. Astrophys.'

Auf eine einsame Insel zur Vorbereitung der Vorlesung oder der Prüfungen würde der Dozent die Werke [A2], [G3] und [L1] mitnehmen

Teil I: PUNKTMECHANIK

In der von Newton (1642–1727) begründeten Punktmechanik wird die Zeitevolution von Systemen von Massenpunkten im dreidimensionalen euklidischen Raum untersucht. Für nichtrelativistische abgeschlossene Systeme sind die Galileitransformationen Symmetrien, die mit den 10 klassischen Erhaltungssätzen eng zusammenhängen. In der relativistischen Punktmechanik eines Massenpunktes in äusseren elektromagnetischen Feldern ist die Dynamik lorentzinvariant. Durch geschickte Ausnützung der Symmetrien lassen sich viele Systeme vollständig analysieren.

§ 1 Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel werden die Newton'schen Bewegungsgleichungen und Verallgemeinerungen für Systeme von Massenpunkten formuliert, ausgehend von einer Diskussion der kräftefreien Bewegung, des Fallgesetzes und der Planetenbewegung. Die Gesamtheit aller Lösungskurven definiert eine lokale Strömung in der Phasenraumzeit, für die die Theorie der Differentialgleichungen wichtige allgemeine Einsichten vermittelt.

a) <u>Kräftefreie Bewegung im Inertialsystem</u> In der Punktmechanik ist der physikalische Raum der euklidische $\mathbb{R}^3$ und die Zeit ein $\mathbb{R}^1$. Ein cartesisches Koordinatensystem, das sich gegen den Fixsternhimmel geradlinig gleichförmig bewegt und in dem die Zeit mit einer Swatch gemessen wird, ist in guter Approximation ein <u>Inertialsystem</u>, in dem für Teilchen, die von allen anderen weit entfernt sind und daher nicht mit ihnen wechselwirken, die Trajektorien sich geradlinig gleichförmig bewegen: (1.1)

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0 + \underline{v}_0 t \quad \Rightarrow \quad \ddot{\underline{q}}(t) \equiv \frac{d^2}{dt^2}\underline{q}(t) = 0$$

Offenbar lässt eine Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} {}'t &= \pm t + s \\ {}'\underline{q} &= R\underline{q} + \underline{v}t + \underline{a} \end{aligned} \qquad (1.2)$$

mit $s \in \mathbb{R}$, $\underline{a}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ und einer Drehung R aus der orthogonalen Gruppe $O(3)$ des $\mathbb{R}^3$ den Bewegungstypus (1.1) invariant. (1.2) entspricht in der nicht-relativistischen Punktmechanik (die wir, falls nicht anders vermerkt, stets zu Grunde legen) dem Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen. Bewegungen in Nichtinertialsystemen werden in § 4 diskutiert.

<u>b) Freier Fall</u> Ein frei fallender Körper im Vakuum in einem Inertialsystem hat in der Nähe der Erdoberfläche eine konstante <u>Beschleunigung</u> (Galilei 1564–1642):

$$\ddot{\underline{q}}(t) = -\underline{g} = (0,0,-g) \qquad (1.3)$$

mit $g \approx 9.8 \ m/s^2$. Die Gültigkeit von (1.3) für alle Zeiten und alle <u>Anfangsbedingungen</u> für $t = t_0$

$$\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0 \quad , \quad \dot{\underline{q}}(t_0) = \underline{v}_0 \qquad (1.4)$$

erlaubt es, (1.3) als <u>Differentialgleichung</u> zu interpretieren mit der eindeutigen Lösung

$$\underline{q}(t) = -\underline{g}(t-t_0)^2/2 + \underline{v}_0(t-t_0) + \underline{q}_0 \qquad (1.5)$$

Für die Fallbewegung weit entfernt von der Erdoberfläche kann man aus den Kepler'schen Gesetzen die richtige Verallgemeinerung von (1.3) erraten:

<u>c) Newton'sche Planetendynamik</u>. Kepler konnte 1609 aus den erstaunlich genauen Messungen von Brahe die folgenden beiden Gesetze abstrahieren:

"Die Bahn eines jeden Planeten ist eben, und zwar eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt."

"Der Vektor $\underline{q}(t)$ von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen."

Im ebenen Polarkoordinatensystem (Fig 1.1) in der Bahnebene mit Nullpunkt S in der Sonne und q^1-Achse durch das Perihel Q gilt:

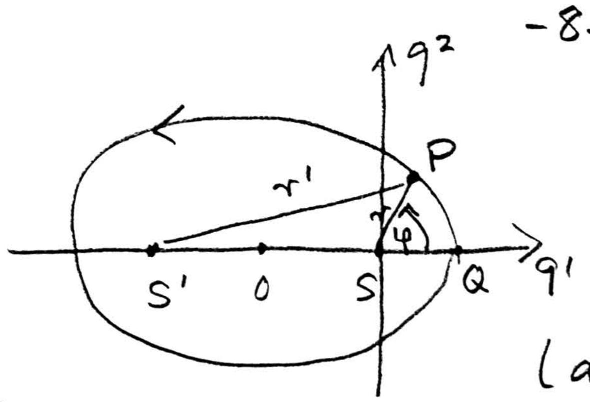


Fig. 1.1

S, S' Brennpunkte
$a = \overline{OQ}$ grosse Halbachse
$\varepsilon = \overline{OS}/a$ Exzentrizität
$(a, \varepsilon$: planetenabhängig$)$
$r = |\underline{q}(t)| = \overline{SP}$, $r' = \overline{S'P}$

$$q_1 = r\cos\varphi,\quad q_2 = r\sin\varphi,\quad r + r' = 2a$$

$$\Rightarrow r' = (r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ra\varepsilon\cos\varphi)^{1/2} = 2a - r$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{d}{1+\varepsilon\cos\varphi},\quad d = a(1-\varepsilon^2) \qquad (1.6)$$

Weiter folgt die Erhaltung des Drehimpulses

$$\underline{L}(\underline{q}(t), \underline{\dot q}(t)) \equiv m\,\underline{q}(t)\wedge\underline{\dot q}(t) \qquad (1.7)$$

d.h. längs jeder Planetenbahn ist $\underline{L}$ zeitlich konstant, $\underline{\dot L} = \underline{0}$. Denn nach Fig 1.2 gilt für die in einem kleinen Zeitintervall dt überstrichene Fläche df mit $d\varphi = \dot\varphi\, dt$:

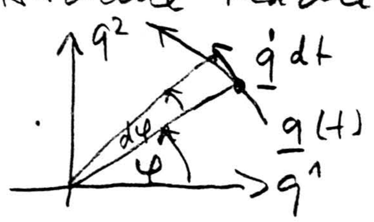


Fig. 1.2

$$df = \frac{1}{2} r^2\dot\varphi\, dt = \frac{1}{2}|\underline{q}(t)\wedge\underline{\dot q}(t)|\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot\varphi = \frac{1}{2m}|\underline{L}| = c \qquad (1.8)$$

nach dem Flächensatz. Das 1. Kepler'sche Gesetz impliziert die Konstanz der Richtung von $\underline{L}$ als Normale der Bahnebene. Merke: für jede Bewegung $\underline{q}(t)$ mit erhaltenem Drehimpuls hat $\underline{\ddot q}(t)$ die Richtung von $\underline{q}(t)$ (Zentralbeschleunigung)

$$\underline{0} = \frac{d}{dt}\,\underline{q}(t)\wedge\underline{\dot q}(t) = \underline{q}(t)\wedge\underline{\ddot q}(t) \qquad (1.9)$$

Für die Keplerellipsen gilt $\underline{\ddot q}(t) = \text{const}\,\dfrac{\underline{q}(t)}{|\underline{q}(t)|^3}$:

Sei $\underline{e} = \underline{q}/|\underline{q}| = \underline{q}/r$. Dann folgt mit (1.8)

$$\underline{e}\cdot\underline{e} = 1 \Rightarrow \underline{e}\cdot\dot{\underline{e}} = 0 \Rightarrow \underline{e}\cdot\ddot{\underline{e}} + \dot{\underline{e}}\cdot\dot{\underline{e}} = 0$$

$$0 = \underline{q}\wedge\ddot{\underline{q}} \Rightarrow \ddot{\underline{q}} = (\ddot{\underline{q}}\cdot\underline{e})\,\underline{e} \qquad (1.10)$$

$$\underline{q} = r\underline{e} \Rightarrow \ddot{\underline{q}} = \ddot{r}\underline{e} + 2\dot{r}\dot{\underline{e}} + r\ddot{\underline{e}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{q}}\cdot\underline{e} = \ddot{r} - r\dot{\underline{e}}\cdot\dot{\underline{e}} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - 4c^2/r^3$$

wegen $\underline{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow \dot{\underline{e}} = \dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Aus der Ellipsengleichung (1.6) folgt

$$\dot{r} = \frac{d\varepsilon\dot{\varphi}\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{2cd\varepsilon\sin\varphi}{r^2(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{2c\varepsilon\sin\varphi}{d}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{2c\varepsilon\dot{\varphi}\cos\varphi}{d} = \frac{4c^2\varepsilon\cos\varphi}{dr^2} \qquad (1.11)$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{q}} = (\ddot{\underline{q}}\cdot\underline{e})\,\underline{e} = -\frac{4c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon\cos\varphi}{d}\right)\underline{e} = -\frac{4c^2}{d}\,\frac{\underline{q}}{|\underline{q}|^3}$$

wobei für jeden Planeten c und d zeitunabhängig sind. Damit (1.11) eine Differentialgleichung 2. Ordnung ist, muss für jede Planetenbahn c^2/d eine Funktion von $\underline{q}, \dot{\underline{q}}$ und t sein. In der Tat ist c^2/d $\underline{q}(t)$-unabhängig, und dies folgt aus dem 3. Kepler'schen Gesetz von 1619:

"Für alle Planeten des Sonnensystems verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten T wie die Kuben der grossen Halbachsen a":

$$T^2/a^3 = b \qquad \text{Konstante des Sonnensystems}$$

Aus dem Flächensatz und der Ellipsengleichung folgt

$$cT = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2} \qquad a = d/(1-\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow T^2/a^3 = \frac{\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{c^2 a^3} = \frac{\pi^2 d}{c^2} = b \qquad (1.12)$$

und damit sind die Planetenbahnen um die Sonne Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{\underline{q}}(t) = -\left(\frac{4\pi^2}{b}\right) \underline{q}(t)/|\underline{q}(t)|^3 \qquad (1.13)$$

(1.13) hat neben Ellipsen auch Parabel- und Hyperbel= bahnen als Lösungen (→ §3). Diese Vorhersage wurde von der Astronomie glänzend bestätigt. In der Atomphysik beobachtet man die gleichen Bahntypen bei der Streuung eines geladenen Teilchens der Ladung e an einer festen Ladung e' im Nullpunkt. In diesem Fall gilt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{q}}(t) = e e' \underline{q}(t)/|\underline{q}(t)|^3 \qquad (1.14)$$

(1.13) ist (→ §3) für die Planetenbewegung nur richtig, falls die Masse der Planeten vernachlässigbar klein ist. Für N Massenpunkte $m_1, \dots m_N$ mit Ladungen $e_1, \dots e_N$ erfüllen die Trajektorien die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\underline{q}}_i(t) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (e_i e_j - \kappa m_i m_j)(\underline{q}_i(t) - \underline{q}_j(t))/|\underline{q}_i(t) - \underline{q}_j(t)|^2 \\ &= \underline{F}_i(\underline{q}_1(t), \dots \underline{q}_N(t)) \qquad (1 \leq i \leq N) \qquad (1.15) \end{aligned}$$

mit der Gravitationskonstanten κ. Für ein Proton gilt $e_p^2 \sim 10^{36} \kappa m_p^2$, so daß die Coulomb= wechselwirkung für geladene Elementarteilchen die Gravitationswechselwirkung stark dominiert. Bei makroskopischen Körpern dagegen, wo sich positive und negative Ladungen fast völlig abschirmen, während sich die Massen mit gleichem

Vorzeichen aufsummieren, kann (1.15) als ein gutes Modell für die Himmelsmechanik angesehen werden. Es zeigt sich nämlich, daß sphärisch-symmetrische starre Massenverteilungen im Äussern wie Massenpunkte wirken mit der Gesamtmasse im Zentrum. Die Bewegungsgleichung (1.15) gilt nur approximativ unter der Vernachlässigung von relativistischen Effekten, die erst durch die allgemeine Relativitätstheorie und Elektrodynamik befriedigend beschrieben werden.

d.) <u>Kraft und Masse</u> $\underline{F}_i$ in (1.15) ist die <u>Kraft</u> auf den i-ten Massenpunkt. Die <u>Masse</u> m_i auf der linken Seite äussert sich als <u>träge Masse</u> durch körperspezifische Skalierung der Beschleunigung bei gleicher Kraft. Auf der rechten Seite geht m_i als <u>schwere Masse</u> ein, und zwar multipliziert mit m_j für die gravitative Wechselwirkung der massiven Teilchen i und j, ebenso wie $e_i e_j$ in die Coulomb'sche Wechselwirkung der geladenen Teilchen i und j eingeht. Bei linearer Kopplung des Massenpunktes an eine elastische Feder, mit der Bewegungsgleichung (1.16)

$$m\ddot{\underline{q}}(t) = -f\underline{q}(t) \quad (f>0 : \text{Federkonstante})$$

erhält man Schwingungen: (1.17)

$$\underline{q}(t) = \underline{a}\cos\omega t + \underline{v}/\omega \,\sin\omega t$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = (f/m)^{1/2}$. Durch Kopplung an die gleiche Feder kann man zwei Massen dynamisch über ihre Schwingungsdauer vergleichen (Drehwaage). Das Fallgesetz (1.3) hat in der Form

$$m\underline{\ddot{q}}(t) = -m\underline{g} \qquad (1.18)$$

die bemerkenswerte Eigenschaft, daß jedes Teilchen gravitativ mit der Erde über seine schwere Masse gekoppelt ist, die gleich der trägen Masse ist. Daher fallen alle Körper (im Vakuum) gleich schnell, und dies ist eine der Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Letztere erklärt die Gravitationskraft geometrisch, während in der Mechanik die Kräfte aus dem Experiment bestimmt werden. Wichtige Erfahrungstatsachen sind in den

e.) <u>Philosophiae Naturalis Principia Mathematica</u>

enthalten, die Newton 1687 aufgestellt hat:

Lex prima: "Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern."

Dieser <u>Trägheitssatz</u> zeigt die Existenz von Inertialsystemen auf.

Lex secunda: "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt".

Dies ist der Impulssatz, denn wir verstehen heute den Impuls $\underline{p}$ als Bewegung(sgrösse). Für eine konstante Masse m und $\underline{p} = m\underline{\dot{q}}$ ist

$$\frac{d}{dt}\underline{p} = \underline{F} \qquad (1.19)$$

wieder ein Newton'sches Kraftgesetz. Mit geschwindigkeitsabhängiger Masse $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-|\underline{\dot{q}}|^2/c^2}}$ und konstanter Ruhemasse m_0 und mit der Lorentzkraft $\underline{F} = e(\underline{E} + \underline{\dot{q}} \wedge \underline{B}/c)$ auf die bewegte Ladung im elektrischen Feld $\underline{E}$ und magnetischen Feld $\underline{B}$ erhält man die Einstein'schen Gleichungen (1.20)

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\underline{\dot{q}}(t)}{\sqrt{1-|\underline{\dot{q}}(t)|^2/c^2}} = e\left(\underline{E}(\underline{q}(t),t) + \underline{\dot{q}}(t) \wedge \underline{B}(\underline{q}(t),t)/c\right)$$

deren physikalischer Inhalt in §4 diskutiert wird. Bemerkenswerterweise kann also (1.19) in die relativistische Mechanik gerettet werden, nicht aber $m\underline{\ddot{q}} = \underline{F}$.

Lex tertia: "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Das Reaktionsprinzip bezieht sich auf eine Zerlegung der Kräfte $\underline{F}_k$ auf ein System von Massenpunkten in äussere Kräfte $\underline{F}_k^a$ und innere

Kräfte $\underline{F}_k^i$, wobei $\underline{F}_k^i$ eine Vektorsumme (Parallelogrammgesetz) von 2-Körperkräften $\underline{F}_{k\leftarrow l}$ des k-ten Massenpunkts auf das l-te Teilchen ist:

$$\underline{F}_k^i = \sum_{l\neq k} \underline{F}_{k\leftarrow l} \quad , \quad \underline{F}_{k\leftarrow l} = -\underline{F}_{l\leftarrow k} \qquad (1.21)$$

Für die gravito-elektrostatische Wechselwirkung (1.15) gilt $\underline{F}_k^a = \underline{0}$ und (1.21). Eine wichtige Klasse von 2-Körperkräften, für die das Reaktionsprinzip gilt, sind <u>Zentralkräfte</u> mit

$$\underline{F}_{k\leftarrow l} = f_{kl}(|\underline{q}_k - \underline{q}_l|)\,\frac{\underline{q}_k-\underline{q}_l}{|\underline{q}_k-\underline{q}_l|} \qquad (1.22)$$
$$f_{kl}(r) = f_{lk}(r)$$

Hier hängt die Wechselwirkung zwischen dem k-ten und l-ten Teilchen nur vom Relativabstand ab in Richtung der Verbindungsgeraden. Offenbar erfüllen Gravitations- und Coulombwechselwirkung (1.22). Zentralkräfte haben ein <u>Potential</u>

$$\underline{F}_{k\leftarrow l} = -\underline{\nabla}_k V_{kl}(|\underline{q}_k-\underline{q}_l|) \qquad (1.23)$$
$$V_{kl}(|\underline{q}|) = -\int_{q_0}^{|\underline{q}|} ds\, f_{kl}(s) = V_{lk}(|\underline{q}|)$$

<u>f.) Erhaltungssätze für Systeme mit Zentralkräften</u>

Ein <u>Erhaltungssatz</u> für ein N-Teilchensystem ist eine Funktion $I(\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 \cdots \dot{\underline{q}}_N, t)$, die auf jede Lösungskurve $(\underline{q}_1(t), \cdots \underline{q}_N(t))$ der <u>Newton'schen Gleichungen</u>

$$m_k \ddot{\underline{q}}_k(t) = \underline{F}_k(\underline{q}_1(t), \cdots \underline{q}_N(t), \dot{\underline{q}}_1(t), \cdots \dot{\underline{q}}_N(t), t) \qquad (1.24)$$

zeitlich konstant ist:

Für $\underline{F}_i = \sum_{j\neq i} \underline{F}_{i\leftarrow j} + \underline{F}_i^a$ gilt für den Gesamtimpuls $\underline{P}$

$$\underline{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{q}}_i = M \dot{\underline{Q}} \qquad M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\underline{Q} \equiv M^{-1} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{q}_i \ , \quad \underline{F}^a = \sum_i \underline{F}_i^a \ . \qquad (1.25)$$

$$\Rightarrow \ \frac{d}{dt}\underline{P} = \sum_i m_i \ddot{\underline{q}}_i = \sum_i \sum_{j\neq i} \underline{F}_{i\leftarrow j} + \sum \underline{F}_i^a = \underline{F}^a$$

falls das Reaktionsprinzip $\underline{F}_{i\leftarrow j} = -\underline{F}_{j\leftarrow i}$ gilt. Ist $\underline{F}^a = \underline{0}$ so bleibt der Gesamtimpuls erhalten und der Schwerpunkt $\underline{Q}$ führt eine geradlinig gleichförmige Bewegung aus (Schwerpunktssatz)

$$\underline{P}(t) = \underline{P}_0 \ , \quad \underline{Q}(t) = t\,\underline{P}_0/M + \underline{Q}_0 \qquad (1.26)$$

Dabei sind die Konstanten $\underline{P}_0$ und $\underline{Q}_0$ durch die Anfangsbedingungen zur Zeit $t=0$ gegeben. (1.26) stellt 6 Erhaltungssätze dar.

Für Zentralkräfte $\underline{F}_{i\leftarrow j}$ gilt $(\underline{q}_i - \underline{q}_j) \wedge \underline{F}_{i\leftarrow j}(\underline{q}_i - \underline{q}_j) = 0$. Dies hat eine wichtige Konsequenz für den Gesamtdrehimpuls $\underline{L}$

$$\underline{L} \equiv \sum_i m_i \underline{q}_i \wedge \dot{\underline{q}}_i \ , \qquad \underline{M}^a \equiv \sum_i \underline{q}_i \wedge \underline{F}_i^a \qquad (1.27)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{L} = \sum_i m_i \underline{q}_i \wedge \ddot{\underline{q}}_i = \sum_i \underline{q}_i \wedge \underline{F}_i^a + \sum_i \sum_{j\neq i} \underline{q}_i \wedge \underline{F}_{i\leftarrow j}$$

$$= \sum_i \underline{q}_i \wedge \underline{F}_i^a + \sum_{i<j} (\underline{q}_i - \underline{q}_j) \wedge \underline{F}_{i\leftarrow j} = \underline{M}^a$$

wobei $\underline{M}^a$ das Drehmoment der äusseren Kräfte ist. Ist $\underline{M}^a = \underline{0}$, so bleibt $\underline{L}$ erhalten (Drehimpulssatz).

Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\underline{P} = \underline{F}^a \ , \quad \frac{d}{dt}\underline{L} = \underline{M}^a \qquad (1.28)$$

beschreibt die Zeitevolution eines starren Körpers ($\rightarrow$ §7), wenn man diesen durch Massenpunkte modelliert, die durch Zentralkräfte in festen Relativabständen $|\underline{q}_i - \underline{q}_j| = r_{ij}$ gehalten werden.

Für Systeme mit inneren Kräften, die Gradienten einer potentiellen Energie $V(\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_N)$ sind, d.h. mit

$\underline{F}_k^i = -\underline{\nabla}_k V$, wie z.B. bei Zentralkräften, gilt für die Gesamtenergie E längs jeder Trajektorie

$$E \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\underline{q}}_i|^2/2 + V(\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_N) \tag{1.29}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E = \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\underline{q}}_i \cdot \ddot{\underline{q}}_i + (\underline{\nabla}_i V) \cdot \dot{\underline{q}}_i) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^a \cdot \dot{\underline{q}}_i = A$$

wobei A die Leistung der äusseren Kräfte ist. Für $\underline{F}_i^a = \underline{0}$, $1 \le i \le N$, bleibt die Gesamtenergie erhalten (Energiesatz). Man nennt Systeme von Massenpunkten ohne äussere Kräfte, für die die inneren Kräfte Zentralkräfte sind, abgeschlossen. Für abgeschlossene Systeme gelten die obigen 10 klassischen Erhaltungssätze, die das Studium der Mechanik gewaltig vereinfachen

g.) Autonome und nichtautonome Systeme. Ein System von Massenpunkten heisst autonom, falls die Kräfte $\underline{F}_k$ nicht explizit von der Zeit abhängig sind, d.h. $\underline{F}_k = \underline{F}_k(\underline{q}_1, \cdots \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 \cdots \dot{\underline{q}}_N)$. Abgeschlossene Systeme, wie (1.15), sind autonom. Nichtautonom dagegen ist die Bewegung eines geladenen Massenpunkts in einem zeitabhängigen äusseren elektromagnetischen Feld, z.B. unter dem Einfluss einer Lichtwelle, die durch (1. beschrieben wird. Fordert man, daß die Sonne unabhängig von der Lage des Planeten relativ zur Sonne geradlinig gleichförmig sich bewegt, so erhält man eine (approximativ gültige) autonome Bewegungsgleichung, für die das Reaktionsprinzip verletzt ist:

$$m_S \ddot{\underline{q}}_S = \underline{0} \quad , \quad m_P \ddot{\underline{q}}_P = -\frac{\varkappa m_P m_S}{|\underline{q}_P - \underline{q}_S|^3} (\underline{q}_P - \underline{q}_S) \tag{1.30}$$

$$\Rightarrow \underline{F}_{S\leftarrow P} = \underline{0} \neq \underline{F}_{P\leftarrow S}$$

Löst man $m_S \ddot{\underline{q}}_S = \underline{0}$ mit der Anfangsbedingung $\underline{q}_S(0) = \underline{a}$, $\dot{\underline{q}}_S(0) = \underline{v}$ und setzt diese in die Planetengleichung ein, so erhält man eine nichtautonome Bewegungsgleichung

$$m_P \ddot{\underline{q}}_P = -\frac{\varkappa m_P m_S}{|\underline{q}_P - \underline{a} - \underline{v}t|^3}\,(\underline{q}_P - \underline{a} - \underline{v}t) \qquad (1.31)$$

Dies ist ein typisches Beispiel dafür, wie bei zeitlich konstanten Naturgesetzen der Physik nicht=autonome Bewegungsgleichungen entstehen können durch Vernachlässigung der Rückwirkung des Systems auf die Umwelt. In der Elektrodynamik untersucht man die Rückwirkung der bewegten Ladung auf das elektromagnetische Feld. Nicht=autonome Bewegungsgleichungen findet man auch in Nichtinertialsystemen (→ § 4) und bei Linearisierung um eine Trajektorie eines autonomen Systems (→ § 5).

h.) <u>Phasenraum</u>. Die Bewegungsgleichungen (1.15) sind ein System von 3N gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Äquivalent dazu ist das System von 6N Gleichungen 1. Ordnung

$$\dot{\underline{q}}_i = \underline{p}_i/m_i\,, \quad \dot{\underline{p}}_i = \underline{F}_i(\underline{q}_1, \ldots \underline{q}_N, \underline{p}_1/m_1, \ldots \underline{p}_N/m_N, t) \qquad (1.32)$$

oder in kompakter Schreibweise

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^{6N} \end{pmatrix}, \quad \xi^1 = q_1^1,\ \xi^2 = p_1^1,\ \xi^3 = q_1^2, \ldots$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma^1 \\ \vdots \\ \Gamma^{6N} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1 = p_1^1/m_1,\ \Gamma^2 = F_1^1, \ldots \qquad (1.33)$$

$$\Rightarrow \dot{\xi} = \Gamma(\xi, t) \equiv \Gamma_t(\xi)$$

Man nennt $(q_1, \ldots q_N)$ eine Konfiguration des mechanischen Systems und die Menge der möglichen Konfigurationen den Konfigurationsraum M. In der Punktmechanik ist M global eine offene Menge im $\mathbb{R}^{3N}$. Bei allgemeineren mechanischen Systemen, wie z.B. beim starren Körper (1.), ist M lokal ein Gebiet im $\mathbb{R}^f$ ($f = 6$ für (1.)) und global eine f-dimensionale Mannigfaltigkeit ($\rightarrow$ §6). Man nennt f die Zahl der Freiheitsgrade des Systems. Die Menge aller Punkte ξ heisst der Phasenraum P des Systems und die Menge aller (ξ, t) die Phasenraumzeit.

Ist das aus den Kräften bestimmte (Kraft-) Vektorfeld Γ genügend glatt, so gibt es ($\rightarrow$ Arnold od. Knobloch & Kappel "gewöhnliche Differentialgleichungen) zu jedem Anfangspunkt $\eta \in P$ und zu jeder Anfangszeit $s \in \mathbb{R}$ ein Zeitintervall J um s und genau eine Lösungskurve $\xi(t, s, \eta)$ für $t \in J$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(t, s, \eta) = \Gamma(\xi(t, s, \eta), t)$$
$$\xi(s, s, \eta) = \eta \tag{1.34}$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen hat wichtige physikalische und philosophische Folgerungen für die Mechanik: Ein System mit den von Newton aufgestellten Bewegungs=

gleichungen ist <u>deterministisch</u> in dem Sinne, daß aus der Kenntnis des "<u>Zustandes</u>" η in der Gegenwart zu einer beliebigen festen Zeit der Zustand zu allen späteren und früheren Zeiten im maximalen Intervall J der Lösungskurve $\xi(t,s,\eta)$ eindeutig bestimmt ist (Laplace 1749-1827). Das System ist <u>endlichdimensional</u>, weil die Zahl der unabhängigen reellen Parameter, die η charakterisieren, gleich $2f < \infty$ ist. Für gewisse Grenzdynamiken, wie eine schwingende Saite (→ § 5) oder die Euler'schen Gleichungen einer Flüssigkeit (→ A1) ist der Zustandsraum unendlichdimensional. Da die Zeitevolution der Punktmechanik meist differenzierbare Kräfte hat und die Lösungen dann differenzierbar von allen Parametern abhängen, gehört die Punktmechanik zur Theorie der <u>differenzierbaren dynamischen Systeme</u>.

Die Lösungen $\xi(t,s,\eta)$ von $\dot{\xi} = T(\xi,t)$ ergeben sich für kleine $|t-s|$ durch das konvergente Iterationsschema von Picard. Wichtige physikalische Fragen, wie z.B. die Existenz und der Verlauf von periodischen Lösungen und deren Stabilität als Funktion der Anfangsbedingungen oder im anderen Extrem die Natur von chaotischen Bewegungen, werden hierdurch nicht gelöst. Wir werden versuchen, einfache Systeme mit speziellen Methoden über lange Zeiten zu verfolgen.

§2.) Eindimensionale Bewegung

Bei nichtlinearen dynamischen Systemen ist es im allgemeinen unmöglich, sich einen Überblick über alle Lösungen der Bewegungsgleichungen zu machen. Die Schwierigkeiten wachsen rasch mit der Dimension s des Phasenraums. Für $s=1$ lässt sich die autonome Differentialgleichung

$$\dot{\xi} = \Gamma(\xi(t)) \tag{2.1}$$

durch Trennung der Veränderlichen integrieren:

$$d\xi = \Gamma dt \Rightarrow dt = \frac{d\xi}{\Gamma} \Rightarrow t(\xi_1) - t(\xi_0) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{\Gamma(\xi)} \tag{2.2}$$

Für $s=2$ kann man für die Lösungen von (2.1) i.A. keinen geschlossenen analytischen Ausdruck finden: das System ist "nicht integrabel". Eine Ausnahme bildet 1-dimensionale Punktmechanik

$$m\ddot{q} = F(q) \tag{2.3}$$

wenn die Kraft nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Denn hier existiert ein Potential V für F:

$$V(q) = -\int_{q_0}^{q} ds\, F(s) \Rightarrow F(q) = -\frac{\partial V}{\partial q} \tag{2.4}$$

und die Energie, Hamiltonfunktion genannt,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad , \quad p = m\dot{q} \tag{2.5}$$

bleibt nach (1.29) erhalten. Wir werden in diesem Abschnitt die 1-dimensionale Bewegung eines Massenpunktes in einem nur ortsabhängigen Kraftfeld mit Hilfe des Energiesatzes geometrisch und analytisch lösen.

a.) Geometrische Lösung: Phasenportrait. Ein typischer Potentialverlauf V ist in Fig. 2.1 dargestellt:

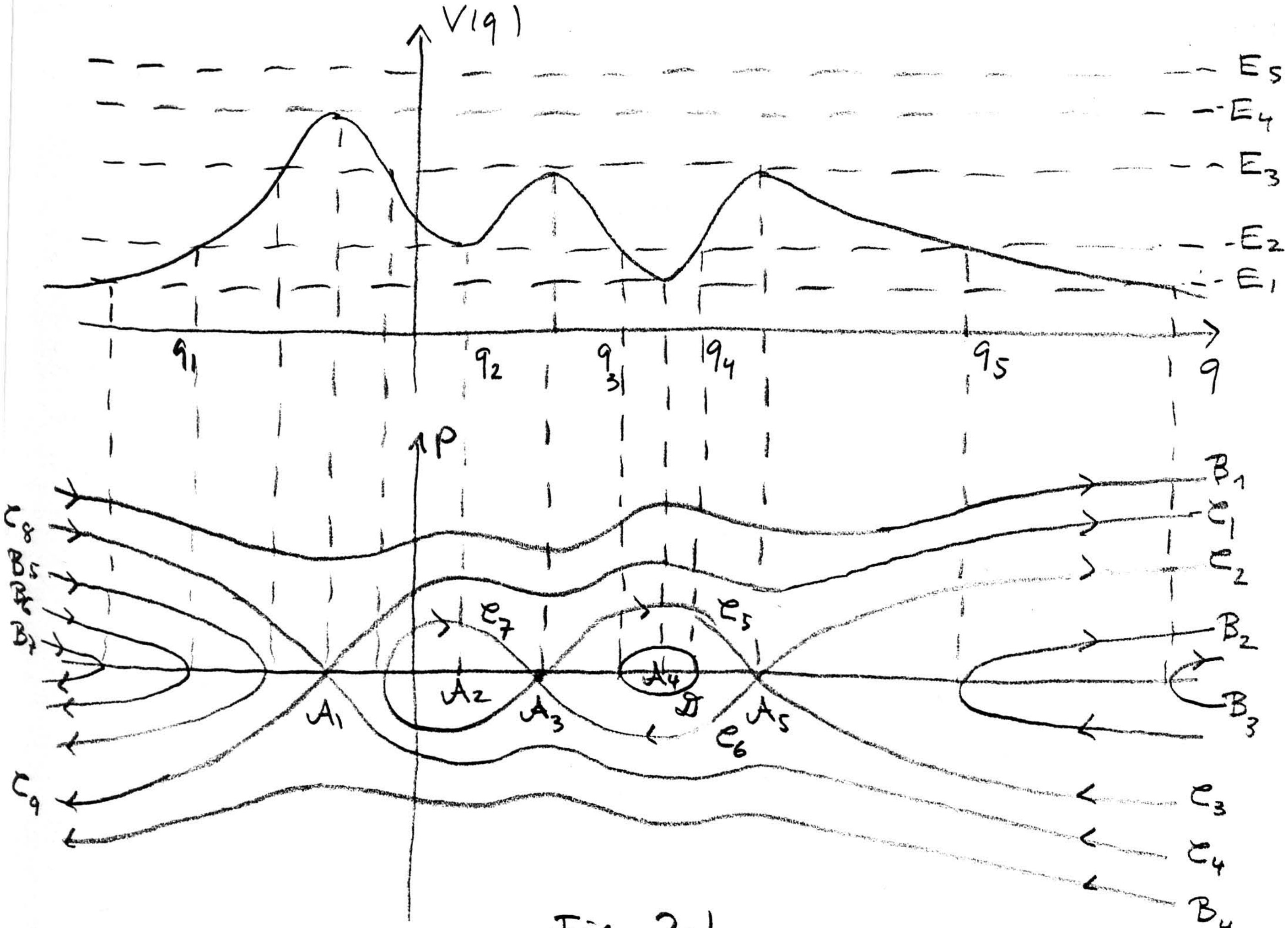


Fig. 2.1

Für jeden Energiewert $E \geq \min_q V(q)$ kann man die *Energiefläche* $\{\xi : p^2/2m + V(q) = E\}$ oder

$$p(q,E) = \pm\sqrt{2m(E - V(q))} \qquad (2.6)$$

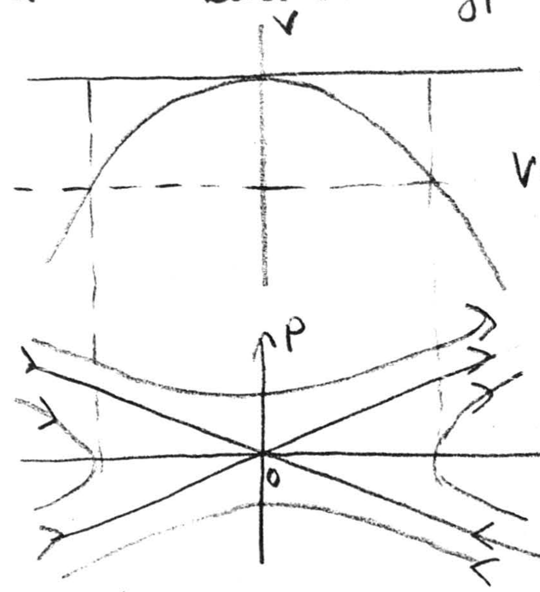
nach Fig. 2.1 graphisch darstellen. Da jeder Phasenpunkt zu allen Zeiten auf seiner Energiefläche bleibt, gibt das *Phasenportrait* ohne Rechnung die Gesamtheit aller Lösungskurven von (2.3). ξ_0 ist kritischer Punkt oder *Fixpunkt* des Vektorfelds Γ, falls $\Gamma(\xi_0) = 0$ ist. Für (2.3) gelten die *kanonischen Gleichungen*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \qquad (2.7)$$

$$\Rightarrow \Gamma(q,p) = \begin{pmatrix} p/m \\ -\frac{\partial V}{\partial q} \end{pmatrix} = 0 \iff \text{grad } H = 0$$

Also sind die kritischen Punkte die Extrema von V auf der q-Achse, und ausserhalb der kritischen Punkte ist die Energiefläche $\{H=E\}$ glatt (für glattes V).

<u>Hyperbolische Fixpunkte</u>: A_1, A_3, A_5 zu Maxima von V. Hier stimmt das Phasenportrait <u>lokal</u> mit der linearen hyperbolischen Bewegung überein:



$$V = -\frac{\omega^2 q^2}{2}$$

$$\ddot{q} = \omega^2 q \qquad \omega^2 > 0$$

$$H = \frac{1}{2}(p^2 - \omega^2 q^2)$$

$$q(t) = q_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$$

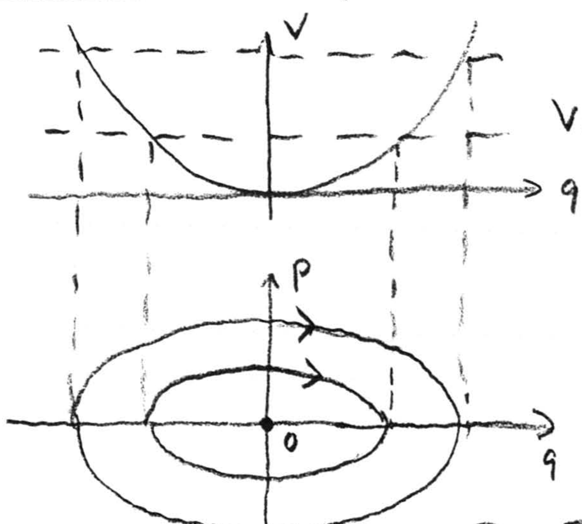
$$m = 1$$

(2.8)

0 ist <u>instabil</u>, d.h. (*) (s.u.) ist nicht erfüllt.

Fig. 2.2

<u>Elliptische Fixpunkte</u>: A_2, A_4 zu Minima von V.



$$m = 1$$

$$V = \frac{\omega^2 q^2}{2}$$

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

(2.9)

Der Fixpunkt 0 ist <u>stabil</u>: zu jeder kleinen Umgebung U von 0 (*) gibt es eine Umgebung V von 0, derart daß bei Beschränkung der Anfangsbedingung η auf V $\xi(t,0,\eta)$ zu allen Zeiten in U bleibt.

Fig. 2.3

Aus der lokalen "Diffeomorphie" der Strömung um $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ und $\mathcal{A}_5$ mit dem hyperbolischen Fixpunkt (2.8) und $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4$ mit dem elliptischen Fixpunkt (2.9) folgt die Instabilität von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5$ und Stabilität von $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4$.

Bahnen, auf denen das Teilchen aus dem räumlich Unendlichen ($q = \pm\infty$) kommt und wieder ins Unendliche läuft*), heissen <u>Streubahnen</u>. Für alle eingezeichneten Energien ausser E_4 gibt es Streubahnen: $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_7$ für E_1; $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6$ für E_2; $\mathcal{B}_5$ für E_3; $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4$ für E_5. <u>Kriechbahnen</u> sind Bewegungen des Teilchens auf einen kritischen Punkt zu (<u>Einfangbahnen</u>) oder von ihm weg (<u>Fluchtbahnen</u>). Auf grund des Eindeutigkeitssatzes kann der kritische Punkt nicht in endlicher Zeit erreicht werden. Kriechbahnen gibt es zu allen Maximalwerten der Energie: $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_7$ zu E_3 und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_9$ zu E_4. Zu E_2 gibt es eine periodische Bahn $\mathcal{D}$. Bei dieser Energie sind im Konfigurationsraum (q-Raum) die offenen Intervalle (q_1, q_2), (q_2, q_3) und (q_4, q_5) unzugänglich (aber nicht in der Quantenmechanik: Tunneleffekt!)

b.) <u>Analytische Lösung der Bewegungsgleichung</u>. Der Energiesatz

$$\frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) = E$$

"integriert" die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq} \qquad (2.10)$$

zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{q} = \pm\sqrt{2(E-V(q))/m}$$

$$\Rightarrow\ t(q) - t(q_0) = \pm\int_{q_0}^{q} dx\,\left(2(E-V(x))/m\right)^{-1/2} \qquad (2.11)$$

wobei in q_0 $V(q_0) < E$ sei.

*) möglicherweise in endlicher Zeit! (s.u.)

(2.11) liefert den Zeitverlauf auf der Bahnkurve, die durch q_0, p_0, bzw. durch q_0, E und durch das Vorzeichen der Anfangsgeschwindigkeit charakterisiert ist. Im Phasenportrait Fig. 2.1 ist der Durchlauf=sinn für wachsende t durch Pfeile markiert. Man bemerkt, daß das Phasenportrait symmetrisch bezgl. der q-Achse ist, wenn man die Pfeilrichtungen umkehrt. Dies beruht auf der Tatsache, daß wenn $q(t)$ Lösung von $m\ddot{q} = F(q)$ ist mit Anfangsbedingung $q(0) = q_0$, $p(0) = m\dot{q}(0) = p_0$, so auch $q_T(t) = q(-t)$ mit Anfangsbedingung $q_T(0) = q_0$, $p_T(0) = -p_0$:

$$m\frac{d^2}{dt^2}q_T(t) = m\frac{d^2}{d(-t)^2}q(-t) = F(q(-t)) = F(q_T(t)) \qquad (2.12)$$

Man nennt die Transformation T <u>Zeitspiegelung</u>. T operiert auf dem Phasenportrait als $q \to q$, $p \to -p$ mit Umkehrung des "Pfeils der Zeit". (Mehr in §4).

Das zeitliche Verhalten einer Lösung $q(t)$ mit Energie E in der Nähe eines <u>Umkehrpunktes</u> q_1 mit $V(q_1) = E$ kann aus (2.11) und der Taylorreihe

$$V(q) = V(q_1) + (q-q_1)V'(q_1) + O((q-q_1)^2) \qquad (2.13)$$

für $q \to q_1$ abgeschätzt werden*. Für $V'(q_1) \neq 0$ ist

$$t(q_1) \simeq t(q_0) + \sqrt{\frac{m}{2|V'(q_1)|}}\int_{q_0}^{q_1}\frac{dx}{\sqrt{|q_1 - x|}} \qquad (2.14)$$

denn nach Fig. 2.4 gilt $V'(q_1)(q_1 - x) > 0$. Das Teilchen erreicht in endlicher Zeit den Umkehrpunkt, wo sich das Vorzeichen der Geschwindigkeit ändert. Falls $V'(q_1) = 0$ ist, so divergiert $t(q)$

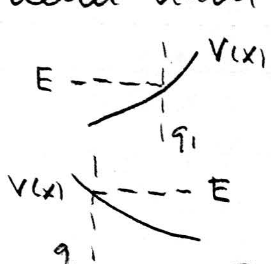


Fig. 2.4

* $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_1$ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $|f(x)/g(x)|$ beschränkt für $x \to x_1$

für $q \to q_1$. In diesem Fall nähert sich das Teilchen dem Umkehrpunkt q_1 auf einer Kriechbahn, ohne q_1 in endlicher Zeit zu erreichen. Dies ist verträglich mit dem Eindeutigkeitssatz: für $V(q_1) = E$ und $V'(q_1) = 0$ ist $(q_1, 0)$ Gleichgewichtslage und verschieden von (2.11).

Aus (2.11) folgt für eine periodische Lösung, z.B. für die in Fig. 2.2 gezeichnete mit Umkehrpunkten $q_3(E), q_4(E)$, daß die Periodendauer $T(E)$ erfüllt:

$$T(E) = 2\int_{q_3(E)}^{q_4(E)} dx\,[2(E-V(x))/m]^{-1/2} = \frac{dS(E)}{dE}$$

$$S(E) = 2\int_{q_3}^{q_4} dx\,[2m(E-V(x))]^{1/2} = \oint p\,dq, \qquad (2.15)$$

wobei $S(E)$ die von der periodischen Trajektorie eingeschlossenen Fläche ist (Mehr zu (2.15) in Teil II). Hat V Minimum, $V(q_0) = E_0$, mit $V''(q_0) > 0$, so gilt

$$\lim_{E \to E_0} T(E) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{V''(q_0)}} \qquad (2.16)$$

weil dann $V(q) = E_0 + \frac{1}{2}(q-q_0)^2 V''(q_0) + O(q-q_0)^3$ gilt und deshalb die lineare Gleichung (1.7) mit $f = V''(q_0)$ für $T(E)$ im Grenzfall $E \to E_0$ den richtigen Wert liefert.

Wenn V nach unten beschränkt ist, d.h. $V(q) \geq V_0 > -\infty$ für alle q, dann hat die 1-dim. Bewegungsgleichung (2.5) für alle Anfangsbedingungen <u>globale</u> Lösungen, d.h. $q(t)$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Denn lokale eindeutige Lösungen gibt es immer für glatte V, und wegen

$$|p(t)| \leq [2m(E-V_0)]^{1/2} \Rightarrow |q(t)| \leq |q_0| + [2m(E-V_0)]^{1/2}|t| \qquad (2.17)$$

kann das Teilchen nicht in endlicher Zeit entweichen.

<u>Katastrophen</u> treten nur auf, wenn $V(q) \to -\infty$ für ein endliches q_0 oder wenn V im Unendlichen hinreichend rasch gegen $-\infty$ strebt. Im ersten Fall wächst die Geschwindigkeit in endlicher Zeit ins Unend=

liche, wenn das Teilchen über die Singularität q_0 von V läuft (s. Fig. 2.5). In höherdimensionalen Problemen kann der Drehimpulserhaltungssatz oft eine solche Katastrophe verhindern (s. §3). Die zweite Gefahr, $V(q) \to -\infty$ für $q \to +\infty$, ist in Fig. 2.6 dargestellt:

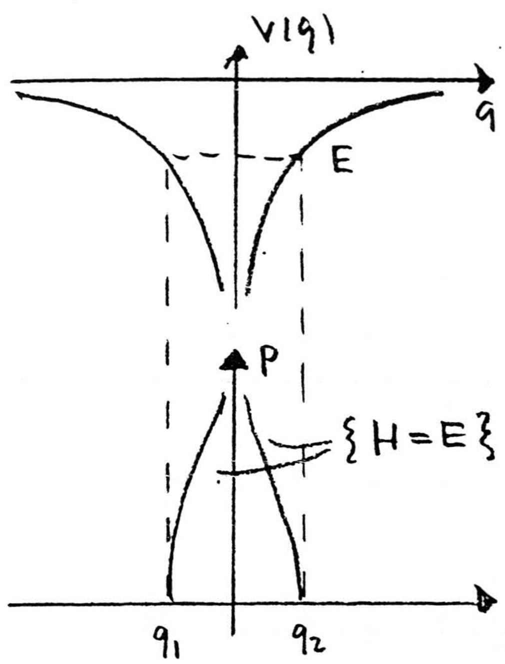


Fig. 2.5

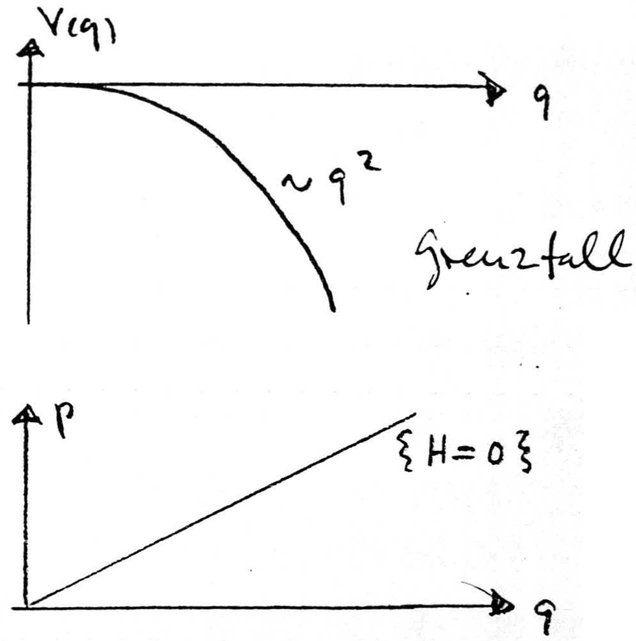


Fig. 2.6.

Das Wachstumsverhalten von $t(q)$ für $q \to \infty$ wird durch $\sqrt{\frac{m}{2}}\int^q dx\,[-V(x)]^{-1/2}$ bestimmt. Das uneigentliche Integral divergiert für $V(q) = O(q^m)$, falls $m \leq 2$ ist, und dann kann das Teilchen nicht in endlicher Zeit ins ∞ entweichen. Für $m > 2$ "lebt" das Teilchen "weit draussen" nicht mehr ewig.

c.) <u>Asymptotenbedingung und Streufunktion</u>. Es sei V glatt und $V(q) \equiv V_0$ für $|q| \geq r$. Ferner habe V nur endlich viele Extremwerte $V(q_i)$ mit $V'(q_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$. Dann gibt es für jedes $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ mit $p \neq 0$ Lösungen $(q_\pm(t), p_\pm(t))$ der 1-dim. Bewegungsgleichung (2.10) und Zeiten $t_\pm$ mit

$$\begin{aligned} q_-(t) &= q + \frac{pt}{m}, \quad p_-(t) = p \quad \text{für alle } t \leq t_- \\ q_+(t) &= q + \frac{pt}{m}, \quad p_+(t) = p \quad \text{für alle } t \geq t_+ \end{aligned} \tag{2.18}$$

Der Beweis von (2.18) folgt aus dem Phasenportrait:

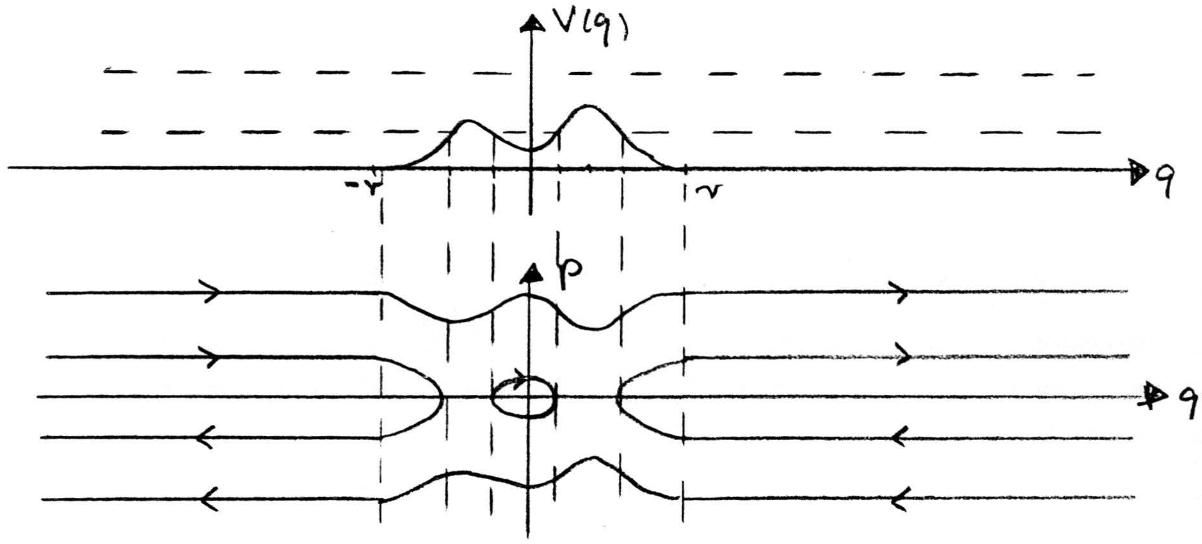


Fig. 2.7

Denn es sei z.B. $p>0$ und $t \to +\infty$. Nach Fig. 2.8 ist $q_0(t) = r + pt/m$ eine Lösung von (2.10) für $t \geq 0$, und diese hat für alle Zeiten eine eindeutige Fortsetzung, wieder $q_0(t)$ genannt, aber verschieden von $r + pt/m$. Für das autonome System ist $q_0(t+s)$ ebenfalls Lösung von (2.10) für alle s. Sei $s_+ = m(q-r)/p$. Dann erfüllt $q_+(t) = q_0(t+s_+)$ (2.18) für alle $t \geq t_+ = -s_+$.

Jede Lösung $q(t)$ von (2.10) mit Energie $\neq V(q_i), 0 \leq i \leq n$, ist entweder eine periodische Lösung oder eine Streulösung. Im letzteren Falle gibt es $(q_\pm, p_\pm) \in \mathbb{R}^2$ und Zeiten $t_\pm$ mit

$$\begin{aligned} q(t) &= q_- + p_- t/m, \quad p(t) = p_- \quad \text{für alle } t < t_- \\ q(t) &= q_+ + p_+ t/m, \quad p(t) = p_+ \quad \text{für alle } t > t_+ \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Denn für $E \neq V(q_i)$, $0 \leq i \leq n$, sind keine Kriechbahnen möglich. Falls $q(t)$ nicht periodisch ist, läuft $(q(t), p(t))$ für $t \to \pm\infty$ parallel zur q-Achse. Diese geradlinig gleichförmige Bewegung erfüllt (2.19).

Die physikalische Interpretation von (2.18) ist, daß die freie Bewegung $q + pt/m$ für $p \neq 0$ <u>Asymptote</u>

ist zu je einer Lösung $q_\pm(t)$ von (2.10) für $t \to \pm\infty$, d.h. jede freie Bewegung ist vor oder nach grossen Zeiten auch eine Bewegung des wechselwirkenden Systems. (2.19) beinhaltet, daß ausser in gewissen Ausnahmefällen jede nicht periodische Lösung $q(t)$ von (2.10) freie Bewegungen $q_\pm + p_\pm t/m$ als Asymptoten für $t \to \pm\infty$ hat. Offenbar kann man den Beweis dieser Asymptotenbedingung auf Potentiale V verallgemeinern, für die $V(q) \to V_0$ genügend rasch konvergiert für $q \to \pm\infty$. Dann ist das Gleichheitszeichen in (2.18), (2.19) durch "$\to$" zu ersetzen. Man beachte den Unterschied von (2.18) u. (2.19)

Zu jedem (q_-, p_-) mit $p_- \neq 0$, $p_-^2/2m \notin \{V(q_i), 0 \le i \le n\}$, gibt es eine Streubahn $q(t)$ des Systems mit $q(t) = q_- + p_- t/m$ für $t \to -\infty$, und diese hat genau eine Asymptote $q_+ + p_+ t/m$ für $t \to +\infty$. Man nennt

$$S : (q_-, p_-) \to (q_+, p_+) \tag{2.20}$$

die Streuabbildung des Systems. S ist eine 1-1-deutige Abbildung im Phasenraum und ist zeittranslationsinvariant:

$$S(q_- + p_- \tau/m, p_-) = (q_+ + p_+ \tau/m, p_+) \qquad \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

Denn wenn $q(t) \to q_\pm + p_\pm t/m$, $p(t) \to p_\pm$ für $t \to \pm\infty$, so gilt $q(t+\tau) \to q_\pm + p_\pm(t+\tau)/m$ für $t \to \pm\infty$, weil die Bewegungsgleichung autonom ist. Auf Grund des Energiesatzes gilt in (2.19) $|p_+| = |p_-|$. Aus Fig. 2.7 entnimmt man

$$p_+ = p_- \text{ für } p_-^2/2m > \max V, \quad p_+ = -p_- \text{ für } p_-^2/2m < \max V \tag{2.22}$$

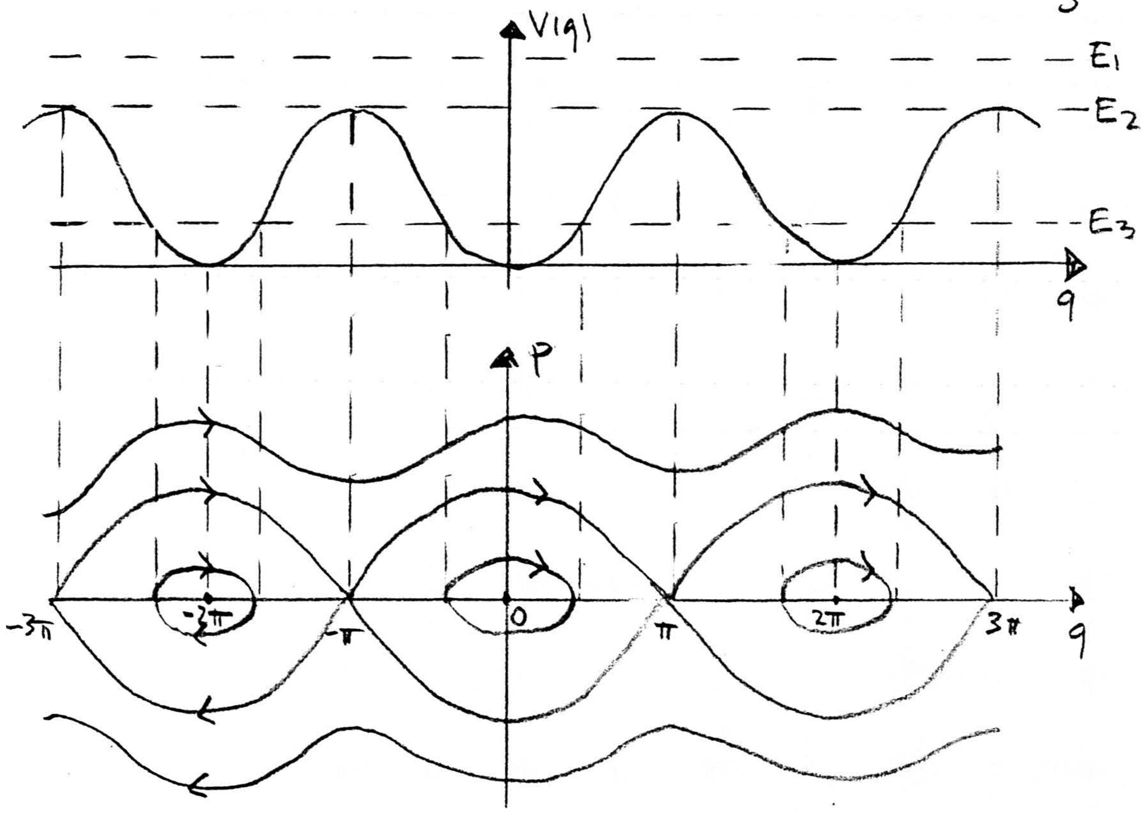
Aus (2.21), (2.22) folgt die Differenzierbarkeit der Streuabbildung für $p_-^2/2m \neq V(q_i)$, $0 \le i \le n$. Die Streuabbildung zeigt nicht nur an, ob das Teilchen durchläuft oder reflektiert wird, sondern bestimmt auch die Stoßzeit:

$$\Delta T = \lim_{\substack{t_1 \to +\infty \\ t_2 \to -\infty}} \left(\frac{m q(t_1)}{p(t_1)} - t_1 - \frac{m q(t_2)}{p(t_2)} + t_2 \right) = \frac{m q_+}{p_+} - \frac{m q_-}{p_-} \qquad (2.23)$$

ΔT ist zeittranslationsinvariant.

Die Streuabbildung, oder in der Quantenmechanik die Streu- oder S-Matrix, ist von grosser Wichtigkeit in der modernen Physik, besonders in der relativistischen Quantenmechanik, wo S weitgehend durch Grössen ausdrückbar ist, die am Teilchenbeschleuniger messbar sind. Theoretische Vorhersagen für S liefern dann Relationen zwischen beobachtbaren Grössen, z.B. in den Dispersionsrelationen der Pion-Nukleon Streuung. Für die 1-dim. klassische Bewegung ist S trivial (aber verständlich!). Im §3 werden wir im 3-dim. Streuproblem interessantere Verhältnisse antreffen.

d.) Nichtlineare Schwingungen entsprechen geschlossenen Bahnen im Phasenportrait. Das Paradebeispiel ist das ebene Pendel, dessen Differentialgleichung (2.24) wir im Teil II begründen werden. Man sieht aus Fig. 2.8



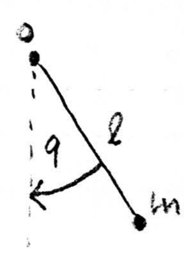


Fig. 2.8

zeitl. Änderung des Drehimpulses $= m\ell^2\ddot{q} =$ Drehmoment $= -mg\ell \sin q$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2I} + I\omega^2(1-\cos q) \qquad I = m\ell^2,\ \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (2.24)$$

$\xi_k = (2\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sind stabile und $\xi'_k = (2\pi k + \pi, 0)$ instabile Gleichgewichtslagen. Der Energiewert E_2 gehört zur Separatrix, die die oszillatorischen Bahnen für $H < E_2$ von den rotatorischen für $H > E_2$ trennt. Wegen $q + 2\pi = q$ ist der Phasenraum des Pendels ein Zylinder (s. §7).

Wie bei den meisten nichtlinearen Systemen ist die Schwingungsdauer von der Amplitude abhängig und daher sind die periodischen Lösungen mit endlicher Amplitude instabil: gewisse Trajektorien $\xi(t,\eta)$ zu benachbarten Anfangsbedingungen entfernen sich in langen Zeiten von $\xi(t,\eta_0)$, auch wenn η beliebig nahe an $\eta_0 \neq (0,0)$ gewählt wird. Es sei $E = I\omega^2(1-\cos q(E))$ $< E_2$. Dann folgt für $T(E)$ als Funktion der Amplitude $q(E)$:

$$T(E) = 4\int_0^{q(E)} \frac{dq}{[2(E - I\omega^2\{1-\cos q\})/I]^{1/2}} = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2\frac{q(E)}{2}\sin^2 x}}$$

$$\equiv \frac{4}{\omega} K\left(\sin\frac{q(E)}{2}\right) = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{q(E)^2}{16} + O(q(E)^4)\right) \qquad (2.25)$$

In (2.25) tritt das "vollständige elliptische Integral 1. Art" $K(x)$ auf, mit $K(0) = \frac{\pi}{2}$, $K'(x) > 0$ für $0 < x < 1$, $K(1) = +\infty$. Das Pendel ist ein "weicher" nichtlinearer Oszillator, denn die Schwingungsdauer nimmt mit der Amplitude zu und wird unendlich für $q(E) = \pi$. Man sieht aus der Entwicklung für kleine $q(E)$, daß gegenüber einer harmonischen Schwingung (1.8) mit der Frequenz ω merkliche Abweichungen erst bei großen Amplituden auftreten.

Für eine 1-dim. Bewegung in einem Potential $V(q)$ sei der qualitative Verlauf von Fig. 2.10 bekannt

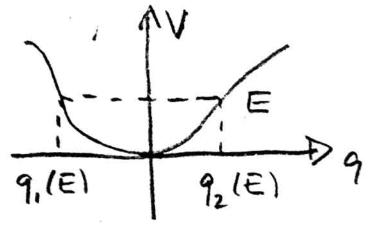


Fig. 2.9

und die Schwingungsdauer $T(E)$ für alle Energien $E \leq E_0$. Wie weit wird dadurch V bestimmt, bzw. die Umkehrpunkte $q_1(E)$, $q_2(E)$ für $E \leq E_0$?

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}} = \sqrt{2m} \left\{ \int_0^E \frac{dq_2(V)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{E-V}} + \int_E^0 \frac{dq_1(V)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{E-V}} \right\} \tag{2.26}$$

Wir multiplizieren $T(E)$ mit $\frac{1}{\sqrt{F-E}}$ und integrieren über $E \in (0,F)$:

$$\int_0^F \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{F-E}} = \sqrt{2m} \int_0^F dE \int_0^E dV \left\{ \frac{dq_2(V)}{dV} - \frac{dq_1(V)}{dV} \right\} \frac{1}{\sqrt{(F-E)(E-V)}} \tag{2.27}$$

$$= \sqrt{2m} \int_0^F dV \left\{ \frac{dq_2(V)}{dV} - \frac{dq_1(V)}{dV} \right\} \underbrace{\int_V^F \frac{dE}{\sqrt{(F-E)(E-V)}}}_{\pi} = \pi \sqrt{2m} \left\{ q_2(F) - q_1(F) \right\}$$

Mit $F = V$ erhält man aus $T(E)$ für $0 \leq E \leq E_0$ $q_2(V) - q_1(V)$ für $0 \leq V \leq E_0$. Wenn man zusätzlich weiss, daß $V(q) = V(-q)$ gilt, d.h. $q_1(E) = -q_2(E)$, so ergibt sich V aus (2.27) durch Umkehrung. Im allgemeinen reicht jedoch die Messung von $T(E)$ nicht aus, um V eindeutig zu bestimmen.

§3. Sphärisch-symmetrisches Zweikörperproblem

Im letzten Kapitel haben wir eindimensionale Bewegungen vollständig geometrisch und analytisch beschreiben können. Wesentlich war dabei der Energieerhaltungssatz. Auf autonome kanonische Systeme mit $f > 1$ Freiheitsgraden ist die Methode der Phasenportraits nicht mehr anwendbar. Denn obwohl die Energie in diesem Fall wieder erhalten bleibt, ist dann eine Energiefläche $\{H = E\}$ i.A. lokal eine $(2f-1)$-dimensionale glatte Hyperfläche im Phasenraum, die viel zu viel Spielraum für eine 1-dim. Trajektorie lässt.

Eine Ausnahme bilden Systeme, bei denen zusätzlich zum Energiesatz genügend viele weitere Erhaltungssätze gelten. Die allgemeine Theorie dazu werden wir in Teil II entwickeln. In diesem Abschnitt wollen wir den "Triumph der Erhaltungssätze" im sphärisch-symmetrischen 2-Körperproblem verfolgen und so das Keplerproblem auf zwei verschiedene Weisen analytisch lösen. Wir werden die Streutheorie entwickeln und mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt und der Stoßzeit eine für viele Anwendungen nützliche Parametrisierung von 2-Teilchen-Stoßprozessen gewinnen.

a.) <u>Separation der Schwerpunktsbewegung</u>: Die Newton'schen Gleichungen für ein 2-Teilchensystem mit autonomen Zentralkräften haben in einem 12-dim. Phasenraum die Form:

$$m_1 \ddot{\underline{q}}_1 = \underline{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\underline{q}}_2 = \underline{F}_{21} \qquad \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = -\underline{\nabla}_1 V(\|\underline{q}_1 - \underline{q}_2\|)$$

$$H = \sum_{i=1}^{2} \|\underline{p}_i\|^2 / 2m_i + V(\|\underline{q}_1 - \underline{q}_2\|) \tag{3.1}$$

Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\underline{Q} = M^{-1}(m_1 \underline{q}_1 + m_2 \underline{q}_2), \quad \underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2, \quad M = m_1 + m_2$$

$$\underline{q} = \underline{q}_1 - \underline{q}_2, \quad \underline{p} = M^{-1}(m_2 \underline{p}_1 - m_1 \underline{p}_2), \quad \mu = m_1 m_2 / M \tag{3.2}$$

sind linear und nichtsingulär und transformieren H in

$$\frac{\underline{P}^2}{2M} + \frac{\underline{p}^2}{2\mu} + V(\|\underline{q}\|) \tag{3.3}$$

Nach §1 gilt der Schwerpunktssatz für die Schwerpunktsbewegung. Wegen

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\underline{q}}_1 &= -\frac{1}{m_1} \underline{\nabla}_1 V(|\underline{q}_1 - \underline{q}_2|) \\ \ddot{\underline{q}}_2 &= +\frac{1}{m_2} \underline{\nabla}_1 V(|\underline{q}_1 - \underline{q}_2|) \end{aligned}\right. \Rightarrow \mu \ddot{\underline{q}} = -\underline{\nabla} V(\|\underline{q}\|) \tag{3.4}$$

ist die Relativbewegung entkoppelt und beschreibt die Mechanik eines Massenpunktes der <u>reduzierten Masse</u> μ im Kraftfeld $-\underline{\nabla} V(\|\underline{q}\|)$. Die Erhaltung der Energie und des Drehimpulses der Schwerpunktsbewegung sowie der totalen Energie und des Gesamtdrehimpulses nach §1 implizieren die Erhaltung der Energie und des Drehimpulses der Relativbewegung

$$H_{rel}(\underline{q},\underline{p}) = \frac{\underline{p}^2}{2\mu} + V(\|\underline{q}\|) \tag{3.5}$$

$$\underline{L}_{rel}(\underline{q},\underline{p}) = \underline{q} \wedge \underline{p} \qquad \underline{p} = \mu \dot{\underline{q}}$$

b.) <u>Bestimmung der Relativbewegung via (3.5)</u>: Aus dem Drehimpulssatz und dem Eindeutigkeitssatz folgt, daß alle Bahnen eben sind: für $\underline{L}_{rel} \neq \underline{0}$ ist die Bahnebene senkrecht zu $\underline{L}_{rel}$, für $\underline{L}_{rel} = \underline{0}$ und Anfangskoordinate $\underline{q}$ oder $\underline{p} \neq \underline{0}$ gilt $\underline{q} \parallel \underline{p}$ und die Bewegung ist eindimensional und $\underline{p} = \underline{q} = \underline{0}$ ist, wenn überhaupt im Phasenraum mit differenzierbarem $\underline{\nabla} V$, eine Gleichgewichtslage. In Polarkoordinaten der Bahnebene lauten die Erhaltungssätze ("rel" unterdrückt)

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \tag{3.6}$$

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U(r) \qquad U(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

wobei L, E, ebenso wie die Richtung von $\underline{L}$, aus den Anfangsbedingungen bestimmt sind. Energie- und Drehimpulssatz zusammen bestimmen die radiale Bewegung, mathematisch die 1-dim. Bahn eines Punktes der Masse μ auf dem Strahl $0 \leq r < \infty$ unter dem Einfluss eines <u>effektiven</u> Potentials $U(r)$, in dem zu $V(r)$ noch der Beitrag der <u>Zentrifugalkraft</u> $-\frac{\partial}{\partial r}\frac{L^2}{2\mu r^2} = \mu r \dot{\varphi}^2$ hinzukommt.

Wir sehen aus Fig. 3.1, daß bei singulären Potentialen wie $V(r) = -\frac{\alpha}{r^m}$, $\alpha > 0$, die Zentrifugalkraftbarriere "heilende" Wirkung zeigt. Dieses Potential dominiert für $r \downarrow 0$ nur für $m > 2$ oder für $m = 2$ für $\alpha > L^2/2\mu$.

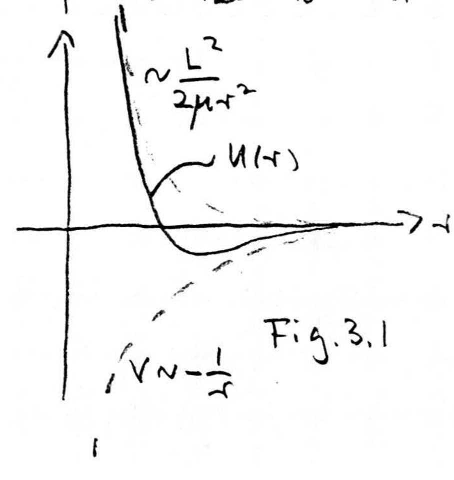


Fig. 3.1

Aus dem Energiesatz (3.6) folgt nach Trennung der Variablen, falls $E \geq U(s)$ für s zwischen r und r_0:

$$t(r) - t(r_0) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\sqrt{E-U(s)}} \tag{3.7}$$

Die Winkelbewegung bestimmt der Drehimpulssatz:

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow d\varphi = \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{2(E-U(r))/\mu}}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{s^2\sqrt{E-U(s)}} \tag{3.8}$$

Zur qualitativen Diskussion der Lösung zeichnen wir das Phasenportrait der Radialbewegung. Unter der Annahme, daß die Drehimpulsbarriere für $r \to 0$ dominiert und $V(r) \to 0$ gilt für $r \to \infty$, ergibt sich das folgende typische Bild

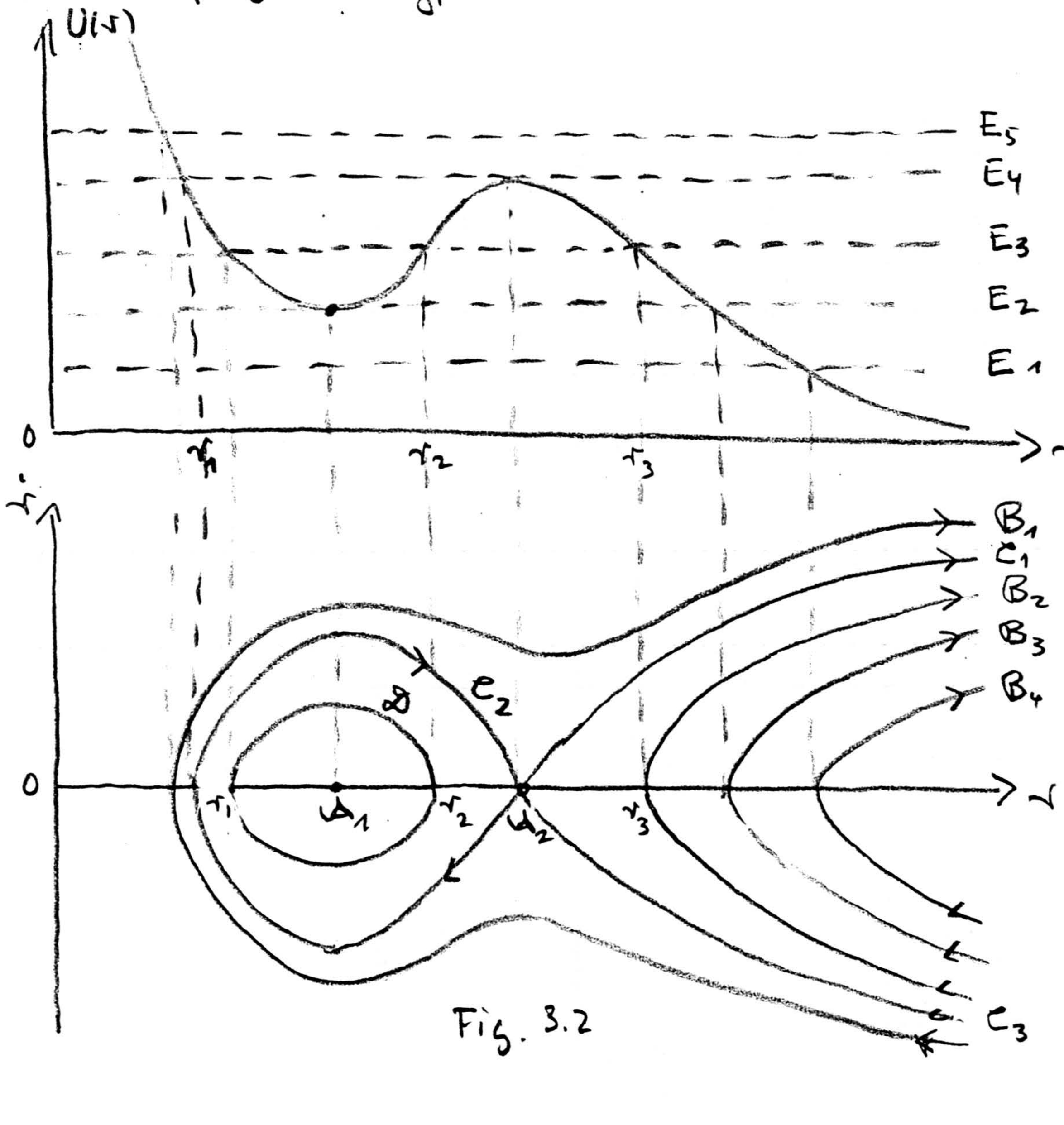


Fig. 3.2

Es gibt, bis auf die Ausnahme $E = E_4$, zwei Typen von Bahnen: gebundene Bahnen (A_1, D), die zu allen Zeiten einen gewissen maximalen Abstand vom Nullpunkt nicht überschreiten, und Streubahnen (B_1, B_2, B_3, B_4), die für $t \to +\infty$ und $t \to -\infty$ ins räumlich Unendliche laufen.

Für die gebundene Bahn D bei $E = E_3$ sind r_1, r_2 Umkehrpunkte der Radialbewegung, wo $\dot{r} = 0$ ist, nicht aber $\dot{\varphi}$, falls $L \neq 0$. Die radiale Bewegung hat die Periode $2 \int_{r_1}^{r_2} dr\, (2(E-U(r))/\mu)^{-1/2}$, wobei φ monoton zunimmt. Beim Durchlaufen von r_1 nach r_2 und zurück ändert sich φ um

$$\Delta\varphi = L \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U(r)}} \qquad (3.9)$$

Aus der Zeitumkehrinvarianz der Dynamik (s. §2 und §4) folgt, daß die Bahn in der (r, φ)-Ebene symmetrisch um das Perizentrum $\varphi(r_1)$ und Apozentrum $\varphi(r_2)$ verläuft. Die Bahn ist periodisch, falls $\Delta\varphi / 2\pi$ rational ist, und sonst eine "Rosettenbahn". Für $r_1 = r_2$: Kreisbahn.

Nur für die Potentiale
$V(r) = -\alpha/r$ und $V(r) = \alpha r^2$,
$\alpha > 0$, sind alle beschränkten Bahnen periodisch (→ Arnold: "Class. Mech.")

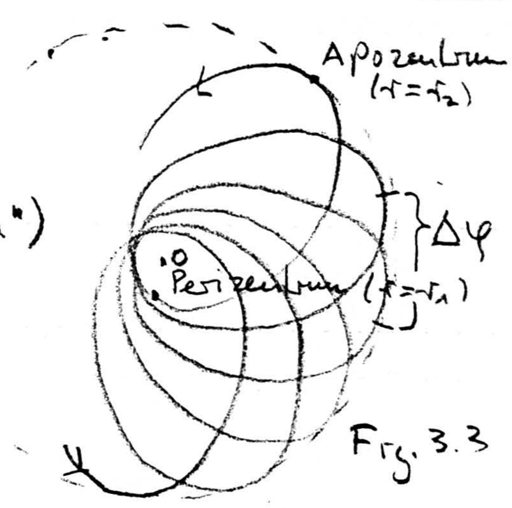


Fig. 3.3

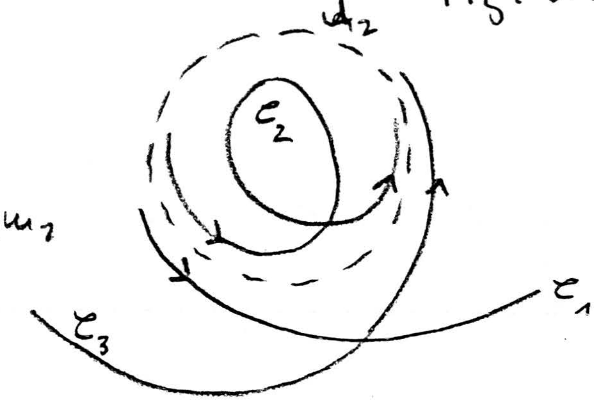
Auch eine Streubahn, z.B. B_2 für $E = E_3$ mit Umkehrpunkt r_3, ist symmetrisch um das Perizentrum $\varphi(r_3)$. Die Winkeländerung für die r-Bewegung von $+\infty$ nach r_3 und zurück beträgt

$$\Delta\varphi = L \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_{r_3}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U(r)}} \qquad (3.10)$$

Zum Ausnahmefall $E = E_4$ gehören drei Bahntypen:

eine instabile Kreisbahn $\mathfrak{k}_2$, zwei Einfangbahnen, die für $t\to-\infty$ ($\mathfrak{C}_1$) oder $t\to+\infty$ ($\mathfrak{C}_3$) in $\mathfrak{k}_2$ enden und für $t\to+\infty$ ($\mathfrak{C}_1$) oder $t\to-\infty$ ($\mathfrak{C}_3$) ins räumlich Unendliche streben, und eine beschränkte Kriechbahn $\mathfrak{C}_2$, die für $t\to\pm\infty$ in $\mathfrak{k}_2$ landet. In der (r,φ)-Ebene nähern sich die Kriechbahnen asymptotisch der instabilen Kreisbahn.

Fig. 3.4



c.) <u>Himmelsmechanik</u>: Zwei Massenpunkte der Masse m_1, m_2 in $\underline{q}_1, \underline{q}_2$ haben die potentielle Energie

$$V(\|\underline{q}_1-\underline{q}_2\|) = \frac{-\varkappa m_1 m_2}{\|\underline{q}_1-\underline{q}_2\|} \qquad \varkappa = 6.670\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{g\,sec}^2 \tag{3.11}$$

Allgemeiner hat man für ausgedehnte kugelsymmetrische Massenverteilungen der Dichte μ_1, μ_2, mit $\mu_i(\underline{x}) = \mu_i(x)$, $x = |\underline{x}|$

$$V(\underline{q}_1-\underline{q}_2) = -\varkappa \int \frac{d^3\underline{x}_1\, d^3\underline{x}_2\, \mu_1(x_1)\,\mu_2(x_2)}{\|\underline{q}_1+\underline{x}_1-\underline{q}_2-\underline{x}_2\|} \tag{3.12}$$

und für $\|\underline{q}_1-\underline{q}_2\| > x_1+x_2$ hat (3.12) wieder die Form (3.11) mit $m_i = \int d\underline{x}\, \mu_i(x)$ (s. Analysis II). Wir diskutieren die Relativbewegung zu (3.11) mit $\alpha = \varkappa m_1 m_2$. Dann hat für $L>0$ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r}$ den Verlauf von Fig. 3.1. Für gegebenes E sind die Umkehrpunkte Lösungen von $r^2E + \alpha r - L^2/2\mu = 0$:

$$E>0: \quad r_1 = -\frac{\alpha}{2E} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2\mu E}} \tag{3.13}$$

$$E=0: \quad r_1 = L^2/2\alpha\mu$$

$$0 > E \geq U_{min} = -\frac{\alpha^2\mu}{2L^2}: \quad r_1, r_2 = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2\mu E}}$$

Für $E \geq 0$ sind alle Bahnen Streubahnen, für $0 > E > U_{min}$ beschränkte Bahnen mit periodischer r-Abhängigkeit und für $E = U_{min}$ hat man eine stabile Kreisbahn. Denn

(3.8) kann analytisch gelöst werden. Für $\varphi = 0$ im Perizentrum gilt

$$\varphi = \arccos \frac{r^{-1} - \alpha\mu/L^2}{(\alpha^2\mu^2/L^4 + 2\mu E/L^2)^{1/2}} \qquad (3.14)$$

$$\Rightarrow r = \frac{d}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \qquad \varepsilon = (1 + 2EL^2/\mu\alpha^2)^{1/2}, \qquad d = \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

Mit $0 \leq \varepsilon < \infty$ stellt (3.14) eine Familie von Kegelschnitten dar, die wir für die drei Fälle (3.13) in ebene cartesische Koordinaten umschreiben:

<u>$E=0$</u>: Hier ist $\varepsilon = 1$ und

$$q_2 = \pm\sqrt{d^2 - 2dq_1} \qquad (3.15)$$

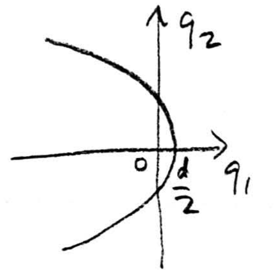


Fig. 3.5

Diese <u>Parabel</u> entspricht physikalisch der Anfangsbedingung $\underline{p} = \underline{0}$ im Unendlichen ($E = 0$, $V = 0$), aber $L > 0$. Dies ist trotz $\underline{L} = \underline{q} \wedge \underline{p}$ kein Widerspruch, da $q \to \infty$ für $p \to 0$.

<u>$E<0$</u>: Hier ist $0 \leq \varepsilon = (1 - 2|E|L^2/\mu\alpha^2)^{1/2} < 1$ und mit $d = a(1-\varepsilon^2)$ erhält man die Kepler'sche Ellipse der Fig. 1.1 mit Brennpunkt S nicht mehr im Mittelpunkt der Sonne, sondern im Schwerpunkt von m_1, m_2. Im Sonnensystem gelten für Sonne, Jupiter, Erde und Mond die Verhältnisse

$$m_S \approx 330\,000\, m_E, \quad m_J \approx 320\, m_E, \quad m_M \approx \frac{1}{81} m_E \qquad (3.15)$$

und daher gelten die ersten beiden Kepler'schen Gesetze in guter Approximation. Für die große Halbachse a folgt:

$$a = \frac{d}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \qquad (3.16)$$

a und $|E|$ bestimmen einander unabhängig von L. Alle a-Ellipsen zwischen einem Kreis mit Radius a und $E = U_{min}$ bzw $\varepsilon = 0$ und der zum Segment der Länge 2a entarteten Ellipse haben die gleiche Energie. Auch das 3. Kepler'sche Gesetz gilt:

$$T = \frac{\text{Ellipsenfläche}}{\text{Flächengeschw.}} = \frac{\pi a^2 (1-\varepsilon^2)^{1/2}}{L/2\mu} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\, a^{3/2} \qquad (3.17)$$

wobei wegen (3.15) $\alpha/\mu = \varkappa m_1 m_2 (m_1+m_2)/m_1 m_2 \approx \varkappa m_s$ gilt.

<u>$E>0$</u>: Hier ist $\varepsilon > 1$, $d = (\varepsilon^2-1)a$ mit $a = \frac{\alpha}{2E}$, $b = \sqrt{\varepsilon^2-1}\,a$

Dann ist (3.14) der linke Ast (s. Fig. 3.6) der Hyperbel

$$\frac{(q_1-\varepsilon a)^2}{a^2} - \frac{q_2^2}{b^2} = 1 \qquad (3.18)$$

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2-1} \qquad (3.19)$$

ist ein Maß für die Ablenkung der Teilchenbahn: $\Delta\varphi = 2\chi$.

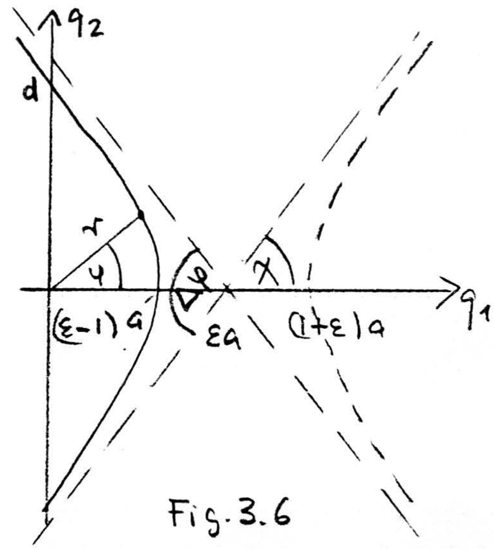


Fig. 3.6

<u>Coulombwechselwirkung</u> zweier Ladungen e_1, e_2 hat das Potential $V(|q|) = e_1 e_2/|q|$. In diesem Fall erhält man für entgegengesetzte Ladungsvorzeichen die Bahnen der Himmelsmechanik, während bei gleichen Ladungsvorzeichen ein repulsives Potential

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \qquad \alpha > 0 \qquad (3.20)$$

auftritt, für das $U_{min} = 0$ und $E > 0$ gilt. Alle Bahnen sind Streubahnen mit

$$\varphi = \arccos \frac{1/r + \alpha\mu/L^2}{(\alpha^2\mu^2/L^4 + 2\mu E/L^2)^{1/2}} \qquad (3.21)$$

$$\Rightarrow r = \frac{d}{\varepsilon\cos\varphi - 1} \qquad \varepsilon = (1 + 2EL^2/\mu\alpha^2)^{1/2},\ d = \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

(3.21) stellt den rechten Hyperbelast der Fig. 3.6 dar.

<u>Zeitlicher Ablauf der Ellipsenbewegung</u>: die folgende, auf Kepler zurückgehende Lösung, macht es unnötig, (3.7) zu integrieren:

Es sei $E<0$ und $r_1<r_2$ Umkehrpunkte mit $U(r_i)=E$:

$$\dot r = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{L^2}{2\mu r^2}+\frac{\alpha}{r}\right)} = \pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{-2E}{\mu}}\sqrt{(r_2-r)(r-r_1)} \qquad (3.22)$$

Dann lässt sich die Ellipsenbahn mit grosser Achse a und Exzentrizität ε durch die exzentrische Anomalie ψ parametrisieren (mit $\psi=0$ im Perihel):

$$r = \frac{r_1+r_2}{2}+\frac{r_1-r_2}{2}\cos\psi = a(1-\varepsilon\cos\psi) \qquad (3.23)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{r_2-r_1}{2}\sin\psi\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{-2E}{\mu}}\sqrt{\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2(1-\cos^2\psi)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{-2E}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\frac{-\mu}{2E}}\,a(1-\varepsilon\cos\psi)$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{-\mu}{2E}}\,a(\psi-\varepsilon\sin\psi) \qquad t=0 \text{ im Perihel} \qquad (3.24)$$

Die Kepler'sche Gleichung (3.24) hat eine einfache geometrische Interpretation: Man entnimmt aus Fig. 3.7:

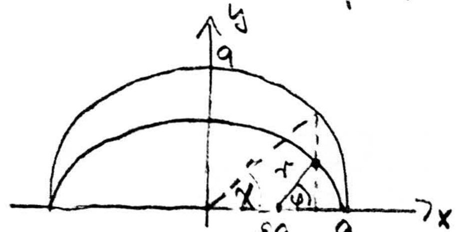


Fig. 3.7

$$x = a\cos\chi = \varepsilon a + r\cos\varphi$$

$$r = \frac{(1-\varepsilon^2)a}{1+\varepsilon\cos\varphi} = a(1-\varepsilon\cos\psi)$$

$$\Rightarrow \cos\chi = \cos\psi \quad \Rightarrow \chi = \psi \qquad (3.25)$$

f.) <u>Streutheorie</u>: Wir nennen ein zentralsymmetrisches Potential $V(|\underline{q}|)$ <u>Streupotential</u>, falls es für $|\underline{q}|\to\infty$ hinreichend stark verschwindet und falls für jeden Drehimpuls $L\geq 0$ $U = V + L^2/2\mu|\underline{q}|$ nur endlich viele Maxima $E_n(L)$ hat. Für Streupotentiale kann man wie in §2 eine Streuabbildung definieren:

(A) Zu jedem $(\underline{q},\underline{p})\in\mathbb{R}^6$ mit $\underline{p}\neq\underline{0}$ gibt es zwei Lösungen $\underline{q}_\pm(t)$ von $\mu\ddot{\underline{q}}(t) = -\nabla V(\underline{q}(t))$ mit $\underline{p}_\pm = \mu\dot{\underline{q}}_\pm$ und

$$\lim_{t\to\pm\infty}\underline{p}_\pm(t) = \underline{p}, \quad \lim_{t\to\pm\infty}\left(\underline{q}_\pm(t)-\underline{p}_\pm(t)t/\mu\right) = \underline{q} \qquad (3.26)$$

(B) Zu jedem $L\geq 0$ und jeder Energie $E\notin\bigcup\{E_n(L)\}$ ist jede Lösung $\underline{q}(t)$ von $\mu\ddot{\underline{q}} = -\nabla V$ entweder beschränkt (d.h. $\sup_t|\underline{q}(t)|<\infty$) oder eine Streu-

Lösung. Im zweiten Fall gibt es Asymptoten $(\underline{q}_\pm, \underline{p}_\pm)$ $\in \mathbb{R}^6$ derart, daß gilt

$$\lim_{t\to\pm\infty} \underline{p}(t) = \underline{p}_\pm \, , \quad \lim_{t\to\pm\infty} (\underline{q}(t) - \underline{p}(t)t/\mu) = \underline{q}_\pm \qquad (3.27)$$

Der Beweis von (3.26), (3.27) benutzt die Erhaltung von Energie und Drehimpuls und die Methode der Phasenportraits für die Radialbewegung. Aus $L = \mu r^2 \dot\varphi$ und $r(t) \sim t$ für $t \to \pm\infty$ folgt $\dot\varphi(t) \to 0$ und die Existenz von $\varphi_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t)$ [→ Simon: Commun Math Phys **23**, 37 (1971)]

Sei $D \subset \mathbb{R}^6$ die Menge der Phasenpunkte mit nicht kritischer Energie, $D = \{(\underline{q}, \underline{p}) \mid \underline{p}^2/2\mu \notin \bigcup_n \{E_n(\|\underline{q}\wedge\underline{p}\|)\}\}$. Das Komplement von D ist eine niederdimensionale Ausnahmemenge, auf der Kreisbahnen möglich sind. Für die Anfangsbedingung $(\underline{q}^-, \underline{p}^-) \in D$ einer einlaufenden Asymptote gibt es genau eine Bahn $\underline{q}(t)$, die (A) erfüllt und diese definiert nach (B) genau eine auslaufende Asymptote $(\underline{q}_+, \underline{p}_+)$. Dies zeigt die Existenz der Streuabbildung auf D.

$$S : (\underline{q}_-, \underline{p}_-) \longleftrightarrow (\underline{q}_+, \underline{p}_+) = S(\underline{q}_-, \underline{p}_-) \qquad (3.28)$$

Für die Streuabbildung gelten die folgenden Symmetrien und Erhaltungssätze, die es erlauben werden, S in geschlossener Form analytisch darzustellen.

$$S(\underline{q}_- + \underline{p}_-\tau/\mu, \underline{p}_-) = (\underline{q}_+ + \underline{p}_+\tau/\mu, \underline{p}_+) \quad (\forall \tau \in \mathbb{R}) \quad \underline{\text{Zeittranslationsinv.}}$$

$$E_- = \|\underline{p}_-\|^2/2\mu = \|\underline{p}_+\|^2/2\mu = E_+ \qquad \underline{\text{Energieerhaltung}}$$

$$S(R\underline{q}^-, R\underline{p}^-) = (R\underline{q}_+, R\underline{p}_+) \qquad (\forall R \in O(3)) \quad \underline{\text{Rotationsinv.}}$$

$$\underline{L}_- = \underline{q}_- \wedge \underline{p}_- = \underline{q}_+ \wedge \underline{p}_+ = \underline{L}_+ \qquad \underline{\text{Drehimpulserhaltung}}$$

(3.29)

Energie- und Drehimpulserhaltung folgen direkt aus (B):

$$\lim_{t\to\pm\infty} H(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = E_\pm = H(\underline{q}, \underline{p}) \qquad (3.30)$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \underline{L}(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \underline{L}_\pm = \underline{L}(\underline{q}, \underline{p})$$

Die Zeittranslationsinvarianz gilt wie bei der 1-dim Bewegung: mit $\underline{q}(t)$ Lösung von $\mu\ddot{\underline{q}} = -\underline{\nabla} V$ ist auch $\underline{q}(t+\tau)$ Lösung und hat $\underline{q}_\pm + \underline{p}_\pm \tau/\mu + \underline{p}_\pm t/\mu$ als Asymptoten. Zur Rotationsinvarianz: sei $R \in O(3)$ eine Rotation des 3-dim. Raumes (Determinante ± 1, d.h. Spiegelungen zugelassen). Wegen $\|R\underline{q}\| = \|\underline{q}\|$ gilt $V(\|R\underline{q}\|) = V(\|\underline{q}\|)$ und nach der Kettenregel für $\underline{F} = -\underline{\nabla} V$

$$\underline{F}(R\underline{q}) = \underline{R}\,\underline{F}(\underline{q}) \qquad (3.31)$$

Sei $\underline{q}(t)$ Lösung von $\mu\ddot{\underline{q}} = \underline{F}(\underline{q})$ mit Asymptoten $\underline{q}_\pm + \underline{p}_\pm t/\mu$. Dann ist $\underline{q}_R(t) = R\underline{q}(t)$ wieder eine Lösung:

$$\mu\ddot{\underline{q}}_R(t) = R\mu\ddot{\underline{q}}(t) = R\underline{F}(\underline{q}(t)) = \underline{F}(R\underline{q}(t)) = \underline{F}(\underline{q}_R(t)) \qquad (3.32)$$

und hat als Asymptoten $R(\underline{q}_\pm + \underline{p}_\pm t/\mu)$ und dies gibt (3.29). Daher ist die ganze dynamische Information von S in zwei Funktionen von zwei Variablen enthalten: Denn wegen der Rotationsinvarianz (3.29) braucht man $S(\underline{q}_-, \underline{p}_-)$ nur für $\underline{p}_- = |\underline{p}_-|\,\underline{e}_1$ und $\underline{q}_- = q_-^2 \underline{e}_2 + q_-^1 \underline{e}_1$ zu kennen, wobei wegen der Zeittranslationsinvarianz nur die Abhängigkeit von $q_-^2 \equiv b$, dem Stoßparameter, interessant ist. $p = |\underline{p}_-|$ und b sind eineindeutig auf die Integrale E und L bezogen (s. Fig. 3.8)

$$p = +\sqrt{2\mu E} \qquad pb = L$$

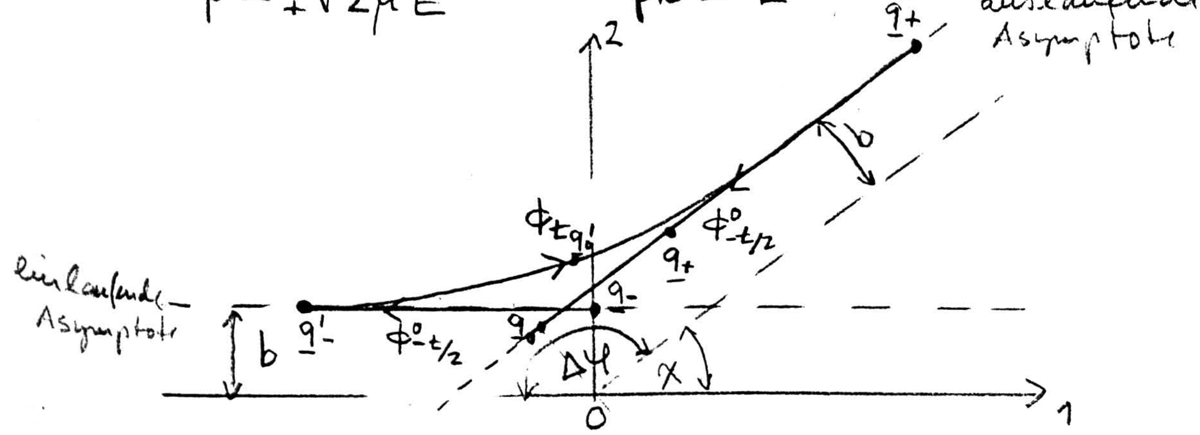


Fig. 3.8

Weiter zeigen die Erhaltungssätze, daß $S(b\underline{e}_2, p\underline{e}_1) = (\underline{q}_+, \underline{p}_+)$ ziemlich redundant ist. Denn aus dem Energiesatz folgt $\|\underline{p}_+\| = p$, also $\underline{p}_+ = p\,\underline{e}_+(b,p)$, wobei nach dem Drehimpulssatz $\underline{e}_+(b,p)$ in der 1-2 Ebene liegt und durch den Ablenkwinkel $\chi = |\pi - \Delta\varphi|$ gegeben ist (wobei $\Delta\varphi$ durch Subtraktion eines Vielfachen von 2π auf das Intervall $[0, 2\pi)$ reduziert sei, wie in Fig. 3.3, und analytisch durch (3.10) gegeben ist).

Schliesslich bestimmt der Drehimpulssatz die Komponente von $\underline{q}_+$ (das in der 1-2-Ebene liegt) senkrecht zu $\underline{p}_+$, wegen $\underline{q}_+ \wedge \underline{p}_+ = -bp\,\underline{e}_3$. Die fehlende Information wird durch die Stoßzeit

$$\Delta T = \mu\,\underline{q}_+ \cdot \underline{p}_+ / \|\underline{p}_+\|^2 - \mu\,\underline{q}_- \cdot \underline{p}_- / \|\underline{p}_-\|^2 \qquad (3.33)$$

gegeben. Denn offenbar ist ΔT rotations- und zeittranslationsinvariant und wird für die spezielle Wahl der Anfangsbedingung $\underline{q}_- \cdot \underline{p}_- = 0$ zur fehlenden Komponente von $\underline{q}_+$: $\underline{q}_+ \cdot \underline{e}_+ = \|\underline{p}_+\| \Delta T / \mu$

Aus der Asympotenbedingung folgt

$$\Delta T = \lim_{\substack{s \to -\infty \\ t \to +\infty}} \left\{ \frac{\mu\,\underline{p}(t) \cdot \underline{q}(t)}{\|\underline{p}(t)\|^2} - t - \frac{\mu\,\underline{p}(s) \cdot \underline{q}(s)}{\|\underline{q}(s)\|^2} + s \right\} \qquad (3.34)$$

Unter Benutzung der Flussabbildungen Φ_t^0 der freien Bewegung $\mu\ddot{\underline{q}} = 0$ und Φ_t für die Bewegung $\mu\ddot{\underline{q}} = -\underline{\nabla} V(|\underline{q}|)$ (des "wechselwirkenden Systems") kann man einen analytischen Ausdruck für ΔT herleiten, indem man auf die Definition der Streuabbildung zurückgeht. Es gilt

$$\Phi_t^0 : (\underline{q}, \underline{p}) = (\underline{q} + t\underline{p}/\mu, \underline{p}) \qquad (3.35)$$

Zur besseren Anschaulichkeit nehmen wir an, daß

V <u>endliche Reichweite</u> hat, d.h. $V(r) = 0$ für alle $r \geq r_0$. Von $(\underline{q}_-, \underline{p}_-)$ mit $\underline{p}_- \neq \underline{0}$ ausgehend gewinnt man die Anfangsbedingung zur Zeit $t=0$, $(\underline{q}, \underline{p})$, der Lösung $\underline{q}(t)$ des wechselwirkenden Systems mit $\underline{q}(t) = \underline{q}_- + t\underline{p}_-/\mu$ für alle hinreichend grossen negativen Zeiten wie folgt: Man transportiert $(\underline{q}_-, \underline{p}_-)$ mit $\Phi^0_{-t/2}$ um die Zeit $t/2$ zurück in die 'Vergangenheit'

$$(\underline{q}'_-, \underline{p}_-) = \Phi^0_{-t/2}(\underline{q}_-, \underline{p}_-) = (\underline{q}_- - t\underline{p}_-/2\mu, \underline{p}_-) \qquad (3.36)$$

wobei t so groß sei, daß q'_- ausserhalb der Reichweite von V liegt und bleibt, wenn t größer gewählt würde. Mit $\Phi_{t/2}$ werde $(\underline{q}'_-, \underline{p}_-)$ wieder in die "Gegenwart" zurückgeholt nach $(\underline{q}, \underline{p})$. Dann gilt für alle $s < -t/2$ nach (1.53):

$$\begin{aligned}\Phi_s(\underline{q}, \underline{p}) &= \Phi_{s+t/2} \circ \Phi_{-t/2}(\underline{q}, \underline{p}) = \Phi_{s+\frac{t}{2}}(\underline{q}'_-, \underline{p}_-) \qquad (3.37)\\ &= \Phi^0_{s+\frac{t}{2}}(\underline{q}'_-, \underline{p}_-) = \Phi^0_{s+\frac{t}{2}} \circ \Phi^0_{-t/2}(\underline{q}_-, \underline{p}_-) = \Phi^0_s(\underline{q}_-, \underline{p}_-).\end{aligned}$$

wobei das 3. Gleichheitszeichen gilt, weil ausserhalb der Reichweite von V die freie und wechselwirkende Dynamik identisch sind.

Entsprechend gewinnt man $(\underline{q}_+, \underline{p}_+)$, indem man $(\underline{q}, \underline{p})$ mit $\Phi_{t/2}$ in die "Zukunft" nach $(\underline{q}'_+, \underline{p}_+)$ transportiert, wo das Teilchen für alle weiteren Zeiten ausserhalb der Reichweite von V bleibt, und dann mit $\Phi^0_{-t/2}$ in die "Gegenwart" zurückholt. Dies ist möglich für alle hinreichend große t (nur abhängig von V, $\underline{q}_-, \underline{p}_-$) und es gilt für alle $s > t/2$:

$$\Phi_s(\underline{q}, \underline{p}) = \Phi_{s-t/2}(\underline{q}'_+, \underline{p}_+) = \Phi^0_{s-t/2}(\underline{q}'_+, \underline{p}_+) = \Phi^0_s(\underline{q}_+, \underline{p}_+) \qquad (3.38)$$

Dieser "Tanz" (zurück - vor - zurück) ist in Fig. 3.8

dargestellt. Sei $\underline{q}_0'$ der Punkt auf der wechselwirkenden Trajektorie von $\underline{q}_-'$ nach $\underline{q}_+'$ mit minimalem Abstand $r_{min} = r_{min}(E,L)$ vom Zentrum 0 des Potentials und τ die Zeit für den Weg von $\underline{q}_-'$ nach $\underline{q}_0'$, nämlich nach (3.7)

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{min}}^{r_-'} \frac{ds}{\sqrt{E-U(s)}} \equiv t(r_-') \qquad (3.39)$$
$$t-\tau = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{min}}^{r_+'} \frac{ds}{\sqrt{E-U(s)}} = t(r_+')$$

Für die freie Radialbewegung im effektiven Potential $U_0(s) = \frac{L^2}{2\mu s^2}$ gilt entsprechend:

$$t/2 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_b^{r_-'} \frac{ds}{\sqrt{E-U_0(s)}} \equiv t_0(r_-') \qquad (3.40)$$

Sei $\underline{q}_0$ der Punkt nächster Annäherung an 0 der auslaufenden Asymptote mit Abstand b. Nach (3.33) gilt

$$\Delta T = \mu(\underline{q}_+ - \underline{q}_0)\cdot \underline{p}_+ / |\underline{p}_+|^2 \qquad (3.41)$$

und man entnimmt aus Fig. 3.8

$$\frac{t}{2} + \Delta T = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_b^{r_+'} \frac{ds}{\sqrt{E-U_0(s)}} = t_0(r_+') \qquad (3.42)$$

Also:

$$\begin{aligned}\Delta T &= \left(\frac{t}{2}+\Delta T\right) - (t-\tau) + \frac{t}{2} - \tau \\ &= \left(t_0(r_+') - t(r_+')\right) + \left(t_0(r_-') - t(r_-')\right) \qquad (3.43) \\ &= 2 \lim_{r\to\infty} \left(t_0(r) - t(r)\right) = \sqrt{2\mu} \lim_{r\to\infty} \left\{ \int_b^r \frac{ds}{\sqrt{E-U_0(s)}} - \int_{r_{min}}^r \frac{ds}{\sqrt{E-U(s)}} \right\}\end{aligned}$$

ΔT ist endlich, falls $V(r) \sim r^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, für $r \to \infty$, und unendlich beim Gravitations- und Coulombpotential.

In den meisten Streuexperimenten wird $\Delta T(E,L)$ nicht gemessen, sondern nur $\chi(E,L) = \chi(E,b)$ oder die "Umkehrfunktion", die i.a. mehrdeutige Relation

$$\chi \longrightarrow \{ b_n(E,\chi) \} \qquad (3.44)$$

z.B. gilt für $V(r) = \gamma r^{-2}$ nach Übungsserie 4 für $L^2 + 2\mu\gamma > 0$, $E > 0$ und $\varphi = 0$ für $r = r_{min}(E,L)$:

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2+2\mu\gamma}} \cos\left\{\varphi\sqrt{1+\frac{2\mu\gamma}{L^2}}\right\} \qquad (3.45)$$

Im attraktiven Fall, $-\gamma = \kappa > 0$, gibt es zu einem Ablenkwinkel $\chi \in [0,\pi]$ positive Drehimpulse L_n mit $\left(\frac{\pi-\chi}{2} + n\pi\right)\sqrt{1+\frac{2\mu\gamma}{L_n^2}} = \frac{\pi}{2}$ mit $n = 2,4,6\cdots$ Umläufen des Teilchens um das Streuzentrum mit positivem Drehsinn ($n=2$ in Fig. 3.9) und negative L_n mit $\left((n+1)\pi - \frac{\pi-\chi}{2}\right)\sqrt{1+\frac{2\mu\gamma}{L_n^2}} = \frac{\pi}{2}$ und $n = 1,3,5\cdots$ Umläufen im negativen Sinn ($n=1$ in Fig. 3.10)

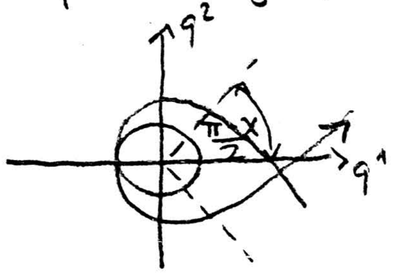


Fig. 3.9

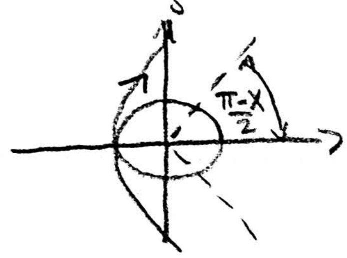


Fig. 3.10

$\{b_n(E,\chi)\}$ definiert den *differentiellen Wirkungsquerschnitt eines Streuexperiments*: Wie in Fig. 3.11 betrachtet man einen breiten Strahl identischer Teilchen mit gleichem (relativem) Anfangsimpuls $\underline{p}_-$, wobei durch eine Fläche senkrecht zu $\underline{p}_-$ fern von 0 der Teilchenstrom I (Teilchenzahl pro Flächen- und Zeiteinheit) ortsunabhängig sei.

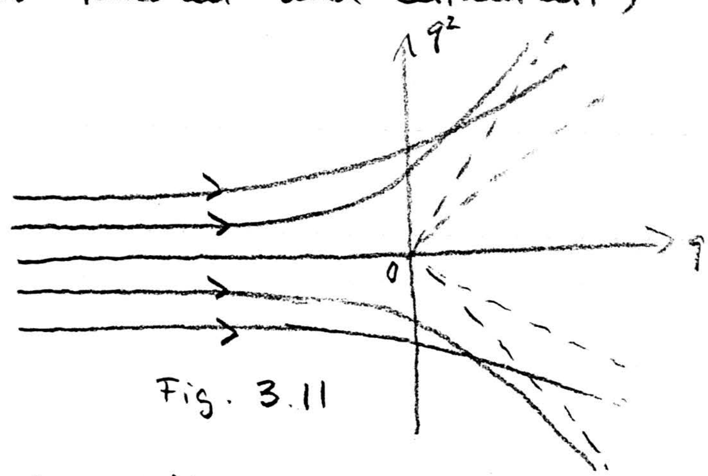


Fig. 3.11

Für $\chi > 0$, d.h. nicht in der Vorwärtsstreurichtung, misst man die Anzahl der gestreuten Teilchen $dN(\chi)$ in einem Winkelbereich $(\chi, \chi + d\chi)$ und damit den differentiellen Streuwirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\chi} \equiv \frac{1}{I}\frac{dN(\chi)}{d\chi} \qquad (3.46)$$

Auf Grund der Dynamik entspricht nach (3.44) dem Winkelintervall $(\chi, \chi+d\chi)$ die Stoßparameterfläche $\sum_n 2\pi |b_n(\chi)\, db_n(\chi)|$, die mit I multipliziert $dN(\chi)$ liefert. Damit wird $\frac{d\sigma}{d\chi}$ berechenbar:

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = \sum_n 2\pi \left| b_n(\chi) \frac{db_n(\chi)}{d\chi} \right| \tag{3.47}$$

Analog sei $dN(\chi,\varphi)$ die Anzahl der gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit in ein Raumwinkelintervall $d\Omega = \sin\chi\, d\chi\, d\varphi$ um den Ablenkwinkel χ und Azimutalwinkel φ. Der entsprechende differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN(\chi,\varphi)}{d\Omega} \tag{3.48}$$

In einem zentralsymmetrischen Problem gilt $dN(\chi,\varphi) = (2\pi)^{-1}\, dN(\chi)\, d\varphi$ und daher

$$\frac{d\sigma(\chi,\varphi)}{d\Omega} = \sum_n \left| \frac{b_n(\chi)}{\sin\chi} \frac{db_n(\chi)}{d\chi} \right| \tag{3.49}$$

Als Vorwärtsstreuquerschnitt definiert man $\lim_{\chi\to 0} \frac{d\sigma}{d\chi}$ und als <u>totalen Wirkungsquerschnitt</u>

$$\sigma_t = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\chi}\, d\chi = \int_0^\pi \sin\chi\, d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{3.50}$$

Die Dimension des (differentiellen oder totalen) Wirkungsquerschnitt ist $(\text{Länge})^2$. σ_t ist die Fläche der Stoßparameter $\underline{b}$ (als Punkte auf der zu $\underline{p}$- senkrechten fernen Ebene), die zu abgelenkten Bahnen führen. Da jeder $\underline{b}$-Wert (bis auf eine niederdimensionale Ausnahmemenge) der nicht am Potential vorbeizielt, zu einer Ablenkung führt, gilt $\sigma_t = \pi a^2$, falls $V(r) = 0$ für $r \geq a$ und $\neq 0$ (und nicht pathologisch) für $r<a$. Für Potentiale unendlicher Reichweite ist $\sigma_t = \infty$.

<u>Bsp</u>: $V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\Delta\varphi = 2 \arccos \frac{\alpha\mu/L^2}{(\alpha^2\mu^2/L^4 + 2\mu E/L^2)^{1/2}} \tag{3.51}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2} = \frac{\alpha^2\mu^2}{p^4 b^2} \Rightarrow b^2 = \frac{\alpha^2\mu^2}{p^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2} \qquad (3.52)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin\chi}\frac{db}{d\chi} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha\mu}{2p^2}\right)^2 / \sin^4\frac{\chi}{2}$$ (Rutherford'sche Streuformel)

Wie erwartet ist $\sigma_t = \infty$

Bsp: "harte" (ideal reflektierende) Kugel. Nach Fig. 3.12

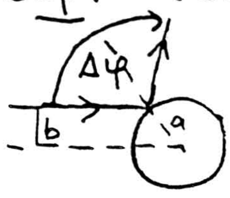


Fig. 3.12

$$b = a\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = a\cos\frac{\chi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{db}{d\chi} = -\frac{a}{2}\sin\frac{\chi}{2} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4} \qquad (3.53)$$

Hier ist $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ isotrop und $\sigma_t = \pi a^2$ die Querschnittsfläche.

e.) __Computerexperiment__: Die Integralformeln (3.7) und (3.8) eignen sich hervorragend zur numerischen Integration des Zentralkraftproblems auf dem PC (→ S. Koonin "Computational Physics"). Als nicht-triviales Beispiel wollen wir die Streubahnen für das __Lennard-Jones Potential__ berechnen,

$$V(r) = 4V_0\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^6\right\}, \qquad (3.54)$$

das mit den Parametern V_0 und a (der Tiefe $-V_0$ bei $r_{min} = a\,2^{1/6}$) in der Atomphysik die "van der Waals Wechselwirkung" zwischen Edelgasatomen beschreibt.

Wir setzen $V_0 = a = 1$ und $L_3 = -pb$ und erhalten für die typischen Werte von $L^2/2\mu = b^2E = 0, 1, 3$ den Verlauf von $U_{L^2}(r)$ nach Fig. 3.15. Man sieht, daß für $L^2/2\mu$ oberhalb eines kritischen Wertes (~ 2.4) alle Bahnen positiver Energie Streubahnen sind, während es für kleinere L^2 für eine Energie $E_c > 0$ eine Kreisbahn gibt. Numerisch läßt sich E_c gut bestimmen als Nullstelle r_0 von U'_{L^2}, die für $L^2 = 2\mu$ bei ≈ 1.8365 liegt mit $U_{L^2}(r_0) = E_c \approx .19495$ und $b_c = 1/\sqrt{E_c} \approx 2.2648$.

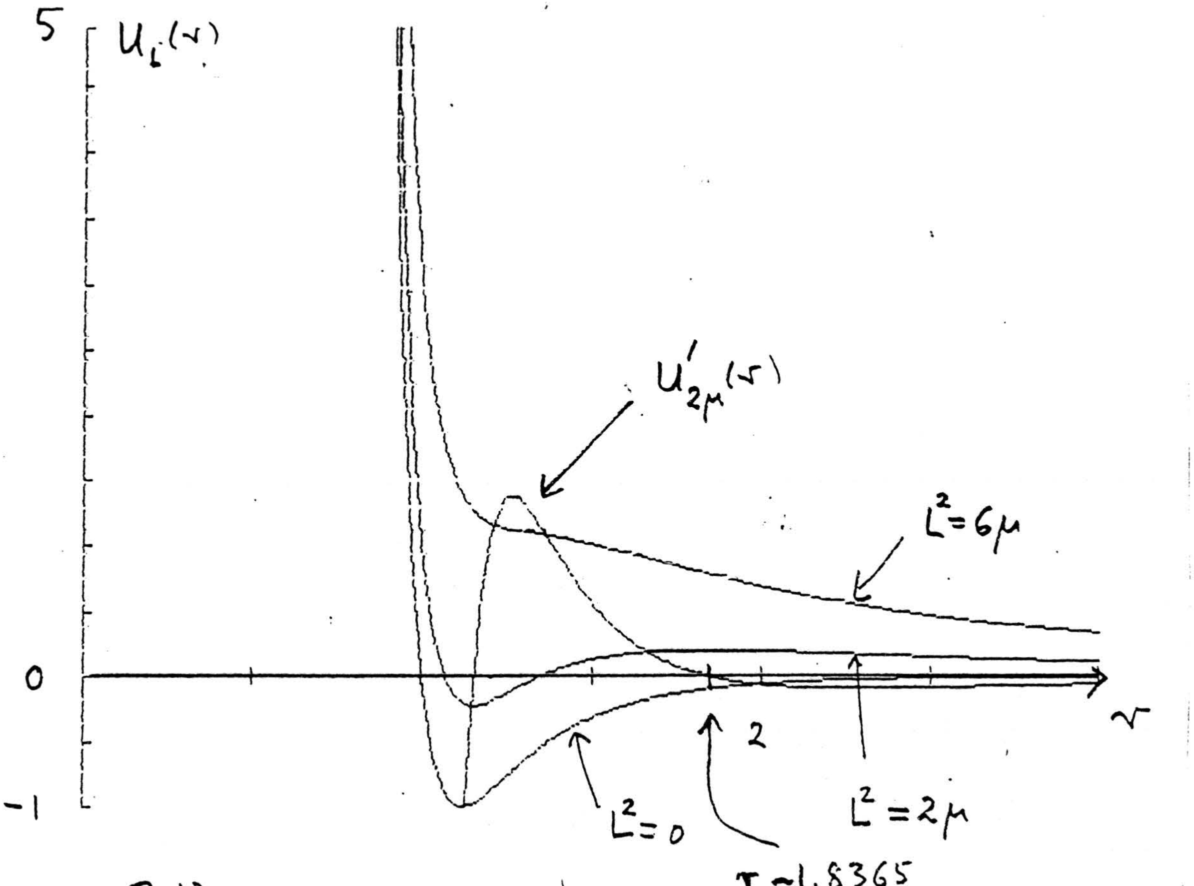


Fig. 3.13

Für vorgegebene Werte von E, b sollen der Ablenkwinkel $\chi(E,b) = \pi - \Delta\varphi(E,b)$ und die Trajektorien in der (1,2)-Ebene berechnet werden, für die $\underline{p}_- = (p,0,0)$ gilt. Wir benutzen

$$\Delta\varphi = 2b \int_{r_{min}}^{\infty} dr \,/\, r^2 \left(1 - b^2/r^2 - V(r)/E\right)^{1/2} \qquad (3.55)$$

Da für $V = 0$ $r_{min} = b$ ist und da für $r \geq r_{max} = 3$ $V(r)$ vernachlässigbar klein ist nach Fig 3.13, gilt wegen $(\Delta\varphi)_{V=0} = \pi$ approximativ:

$$\chi = \pi - \Delta\varphi = 2b \left\{ \int_b^{r_{max}} \frac{dr}{r^2(1 - b^2/r^2)^{1/2}} - \int_{r_m}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}\right)^{1/2}} \right\} \qquad (3.56)$$

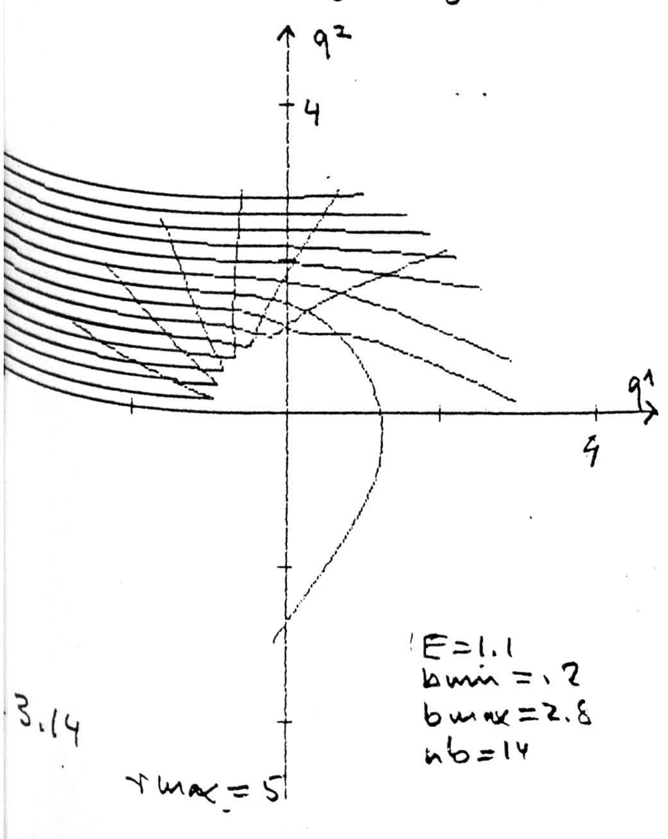
Mit diesem Trick erhält man ein endliches Intervall für die numerische Integration. Für die Bahntrajektorie hat man nach Fig. 3.8 für $r \geq r_{max}$ die freie Bewegung und für $r \leq r_{max}$

$$\varphi(r) = \varphi(r_{min}) + \int_{r_{min}}^{r} \frac{dr}{r^2 \{1 - b^2/r^2 - V/E\}^{1/2}} \qquad (3.57)$$

$$\varphi(r_{min}) = \frac{\Delta\varphi}{2} + \chi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Wir berechnen $\varphi(r_{max}) - \varphi(r_{min})$ mit der Rechtecksregel und erhalten als Zwischenschritte $\varphi(r) - \varphi(r_{min})$. Da sich $\{1 - b^2/r^2 - V/E\}^{1/2} \sim \mathrm{const}\sqrt{r - r_{min}}$ für $r \to r_{min}$ verhält, regularisiert man den Integranden (und entsprechend $(1 - b^2/r^2)^{-1/2}$), indem man $r = u^2 + r_{min}$ setzt und äquidistante Schritte in u macht.

Fig 3.14 und 3.15 porträtieren den Fluss im L-Bereich mit Kriechbahnen. Das Minimum von $\chi(b)$ in Fig. 3.16 hat wie beim Regenbogen eine Singularität von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zur Folge.



3.14

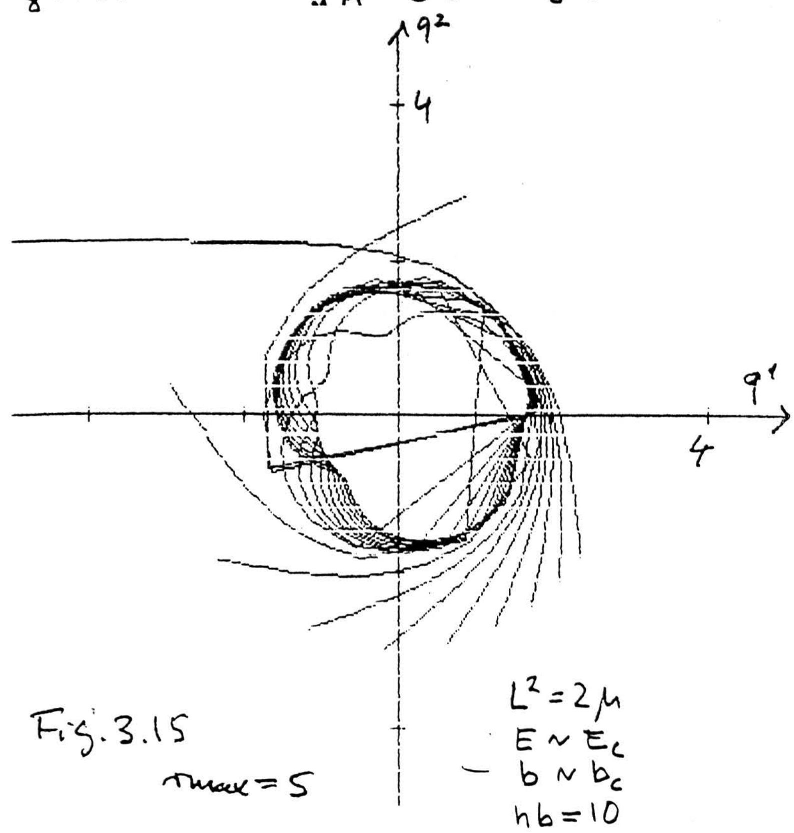


Fig. 3.15

```
10   Nbm=50
20   INPUT "TOL",Tol
30   Rmax=3
40   Np=50
50   REAL P(1:50,0:50),R(1:50,1:50),T(1:50)
60   INPUT "E>0 ",E
70   INPUT "BMIN<BMAX<=3,NB",Bmin,Bmax,Nb
80   GINIT
90   GRAPHICS ON
100  VIEWPORT 0,100,0,100
110  WINDOW -5,5,-5,5
120  AXES 2,2
130  ! END OF INITIALIZATION
140  Db=(Bmax-Bmin)/(Nb-1)
150  FOR I=1 TO Nb
160  B=Bmin+(I-1)*Db
170  ! SEARCH FOR TURNING POINT
180  Rmin=Rmax
190  Dr=.2
200  WHILE Dr>=Tol
210    Rmin=Rmin-Dr
220    IF 1-B*B/(Rmin*Rmin)>FNV(Rmin)/E THEN GOTO 250
230    Rmin=Rmin+Dr
240    Dr=Dr/2
250  END WHILE
260  ! FIRST INTEGRAL BY RECTANGLE RULE
270  S=0
280  Umax=SQR(Rmax-B)
290  H=Umax/Np
300  FOR J=1 TO Np
310    U=H*(J-.5)
320    S=S+U*FNW(U*U+B,B)
330  NEXT J
340  T(I)=2*H*S*B
350  ! SECOND INTEGRAL
360  S=0
370  Umax=SQR(Rmax-Rmin)
380  H=Umax/Np
390  FOR J=1 TO Np
400    U=H*(J-.5)
410    S=S+U*FNVv(U*U+Rmin,B,E)
420    P(I,J)=2*H*B*S
430    R(I,J)=Rmin+U*U
440  NEXT J
450  P(I,0)=2*(T(I)-P(I,50))*180/PI
460  ! PLOT OF PHI(B,E,R)
470  MOVE -5,Rmax*SIN(PI/2+T(I))
480  FOR J=50 TO 1 STEP -1
490  Phi=P(I,J)+PI/2+T(I)-P(I,50)
500  DRAW R(I,J)*COS(Phi),R(I,J)*SIN(Phi)
510  NEXT J
520  FOR J=2 TO 50
530  Phi=-P(I,J)+PI/2+T(I)-P(I,50)
540  DRAW R(I,J)*COS(Phi),R(I,J)*SIN(Phi)
550  NEXT J
560  NEXT I
570  PAUSE
580  ! PLOT OF CHI(B,E)
590  GINIT
600  WINDOW 0,3,-500,500
610  AXES .5,100
620  MOVE Bmin,P(1,0)
630  FOR I=2 TO Nb
640  DRAW Bmin+(I-1)*Db,P(I,0)
650  NEXT I
660  END
670  !
680  DEF FNV(R)
690  RETURN 4*(R^(-12)-R^(-6))
700  FNEND
710  !
720  DEF FNW(R,B)
730  RETURN 1/(R*R*SQR(1-B*B/(R*R)))
740  FNEND
750  !
760  DEF FNVv(R,B,E)
770  RETURN 1/(R*R*SQR(1-B*B/(R*R)-FNV(R)/E))
780  FNEND
```

(HP Basic, auf Wunsch: FORTAN beim Dozenten)

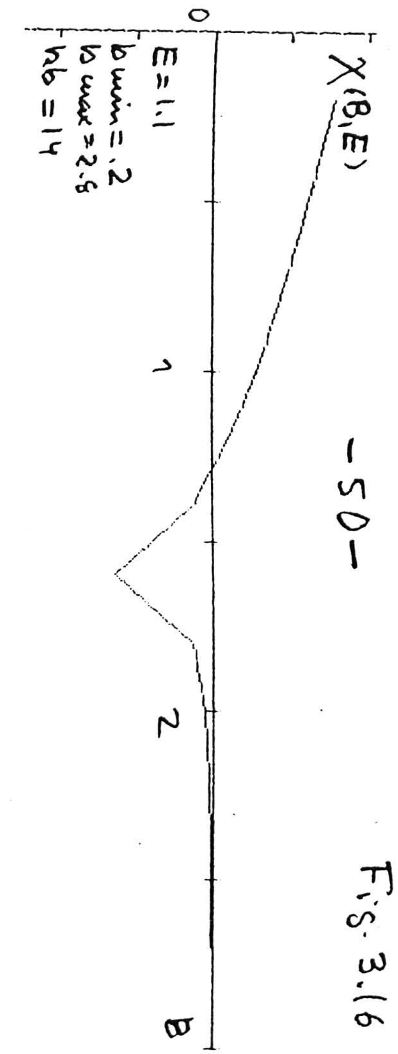


Fig. 3.16

§ 4. Relativitätstheorie und Mechanik in Nichtinertialsystemen

Beim Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes transformieren sich die Bewegungsgleichungen nach den Regeln der Analysis. Sei allgemein $\Gamma_t(\xi)$ ein Vektorfeld und Ψ_t eine zeitabhängige Familie von Diffeomorphismen (d.h. 1-1-deutige differenzierbare Abbildungen des Teiles des Phasenraumes auf sich, in dem Γ_t "lebt", die von t differenzierbar abhängen). Die Funktionalmatrix

$$D\Psi_t(\xi) = \begin{pmatrix} \partial_1\Psi_t^1 & \cdots & \partial_1\Psi_t^s \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_s\Psi_t^1 & & \partial_s\Psi_t^s \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

ist dann nichtsingulär. Sei $\xi(t)$ Lösung von $\dot{\xi} = \Gamma_t(\xi)$ und $\xi(t) = \Psi_t(\eta(t))$. Dann gilt (Kettenregel):

$$\dot{\xi}(t) = (D\Psi_t)(\eta(t))\,\dot{\eta}(t) + (\partial_t\Psi_t)(\eta(t)) \tag{4.2}$$

mit $\partial_t\Psi_t(\eta) = \left(\frac{\partial\Psi_t^1}{\partial t}, \dots \frac{\partial\Psi_t^s}{\partial t}\right)^T$. Somit erfüllt $\eta(t)$

$$\dot{\eta}(t) = (D\Psi_t(\eta(t)))^{-1}\{\Gamma_t(\Psi_t(\eta(t)) - (\partial_t\Psi_t)(\eta(t))\} \tag{4.3}$$

und die rechte Seite ist das transformierte Kraftgesetz: $\dot{\eta} = \tilde{\Gamma}_t(\eta)$.

Die Mechanik muss als Naturwissenschaft mit der Erfahrung verträglich sein. Newton glaubte, daß sich die Himmelkörper als wechselwirkende Massenpunkte in einem absoluten Raum $\mathbb{R}^3$ und Zeit $\mathbb{R}^1$ bewegten (→ M. Jammer "Concepts of Space", "Concepts of Force", "Concepts of Mass"). Er musste aber zugeben, daß wir durch Messungen in unserer Welt nie unsere absolute Lage im Raum und Datierung bestimmen können. Mathematisch drückt sich dies in einem <u>Relativitätsprinzip</u> aus, nachdem unter gewissen Koordinatentransformationen die Kraftgesetze $\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ forminvariant bleiben, d.h. daß die transformierten Trajektorien gleichartigen Naturgesetzen folgen wie die ursprünglichen. Die zugelassenen Transformationen müssen geradlinig gleichförmige Trägheitsbahnen in solche überführen, also im 4-dimensionalen Raum Gerade

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} t \\ \underline{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \underline{q}_0 + \underline{v}_0 t \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

in Gerade überführen. Die Klasse dieser Abbildungen sind die <u>affinen</u> (d.h. inhomogen-linearen und nichtsingulären) <u>Abbildungen</u> des $\mathbb{R}^4$ auf sich:

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi} = A\xi + \alpha \quad , \quad \det A \neq 0 \tag{4.5}$$

Welche affinen Transformationen identische Naturgesetze miteinander verbinden, darüber entscheidet das Experiment. Es zeigt sich daß im Bereich von Geschwindigkeiten, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit $c \simeq 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sind, Inertialsysteme durch <u>Galileitransformationen</u> verknüpft sind und daß hier Fernwirkungskräfte wie in der Himmelsmechanik gelten, während allgemeine <u>Lorentztransformationen</u> Inertialsysteme miteinander verbinden und die Dynamik eine Feldtheorie zur Übertragung von Wechselwirkungen mit maximal Lichtgeschwindigkeit (Nahwirkung) braucht.

a) <u>Galilei'sches Relativitätsprinzip</u>. Falls ein System von Massenpunkten über Zentralkräfte wechselwirkt mit Potentialen $V_{ij} = V_{ji}$,

$$m_i \ddot{\underline{q}}_i = -\sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ij}(|\underline{q}_i - \underline{q}_j|) = \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_i}{|\underline{q}_j - \underline{q}_i|} V'_{ij}(|\underline{q}_i - \underline{q}_j|) \qquad (4.6)$$

so ist mit jeder Lösungskurve $\xi(t) = (\underline{q}_1(t), \dots \underline{q}_N(t))$ auch die Galilei-transformierte Kurve

$$\xi^G(t) = (\underline{q}_1^G(t), \cdots \underline{q}_N^G(t)) \qquad G = (s, \underline{a}, \underline{v}, R, \lambda)$$

$$\text{mit} \quad \underline{q}_i^G(t) = R\underline{q}_i(\lambda t + s) + \underline{v}t + \underline{a} \qquad (4.7)$$

Lösung von (4.6), falls $R \in O(3)$ orthogonal ist und $\underline{v}, \underline{a} \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{R}^1$ und $\lambda \in \{\pm 1\}$ beliebig sind. Dies folgt unmittelbar aus (4.6):

$$m_i \ddot{\underline{q}}_i^G(t) = m_i \frac{d^2}{d(\lambda t+s)^2} \underline{q}_i^G(t) = m_i \frac{d^2}{d(\lambda t+s)^2} R\underline{q}_i(\lambda t+s)$$

$$= R\sum \frac{\underline{q}_j(\lambda t+s) - \underline{q}_i(\lambda t+s)}{|\underline{q}_j(\lambda t+s) - \underline{q}_i(\lambda t+s)|} V'_{ij}(|\underline{q}_j(\lambda t+s) - \underline{q}_i(\lambda t+s)|) = \qquad (4.8)$$

$$= \sum (\underline{q}_j^G(t) - \underline{q}_i^G(t)) V'_{ij}(|\underline{q}_j^G(t) - \underline{q}_i^G(t)|) / |\underline{q}_j^G(t) - \underline{q}_i^G(t)|$$

Der obige Beweis gilt unverändert für Systeme von Massenpunkten mit Kräften $\underline{F}_i = -\nabla_i V$, wo das Potential V rotationsinvariant ist und nur von den Koordinatendifferenzen $\underline{q}_1 - \underline{q}_2, \dots \underline{q}_{N-1} - \underline{q}_N$ abhängt. Wir nennen solche Systeme <u>abgeschlossen</u> und wissen aus §1, daß diese 10 Erhaltungssätze erfüllen (Schwerpunkts-, Energie- und Impulssatz). Abgeschlossene Systeme erfüllen das <u>Galilei'sche Relativitätsprinzip</u>: wenn man eine Lösungskurve nach (4.7) Galilei-transformiert, so erhält wieder eine Lösungskurve des selben mechanischen Systems, nur mit neuen Anfangsbedingungen.

Umgekehrt schränkt das Galilei'sche Relativitätsprinzip die Form der Newton'schen Gleichungen

$$m_i \ddot{\underline{q}}_i = \underline{F}_i(\underline{q}_1, \cdots \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 \cdots \dot{\underline{q}}_N, t) \qquad 1 \leq i \leq N \qquad (4.9)$$

stark ein, wobei allerdings die abgeschlossenen Systeme nicht die einzigen Galilei-invarianten Dynamiken sind. Die Zeittranslationsinvarianz impliziert die Autonomie:

$$m_i \ddot{\underline{q}}_i(t+s) = \underline{F}_i(\cdots, t+s) = \underline{F}_i(\cdots, t) \qquad \forall s$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F}_i = \underline{F}_i(\underline{q}_1, \cdots \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1, \cdots \dot{\underline{q}}_N) \qquad (4.10)$$

Die Raumtranslationsinvarianz erfordert dann

$$\underline{F}_i(\underline{q}_1 + \underline{a}, \cdots \underline{q}_N + \underline{a}, \dot{\underline{q}}_1, \cdots \dot{\underline{q}}_N) = \underline{F}_i(\underline{q}_1, \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 \cdot \dot{\underline{q}}_N) \quad \forall \underline{a}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F}_i = \underline{F}_i(\underline{q}_1 - \underline{q}_2, \cdots \underline{q}_{N-1} - \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1, \cdots \dot{\underline{q}}_N) \qquad (4.11)$$

Da eine Geschwindigkeitstransformation weder $\underline{q}_i - \underline{q}_j$ noch $\ddot{\underline{q}}_i$ ändert, liefert diese Invarianz

$$\underline{F}_i(\cdots, \dot{\underline{q}}_1 + \underline{v} \cdots \dot{\underline{q}}_N + \underline{v}) = \underline{F}_i(\cdots, \dot{\underline{q}}_1, \cdots \dot{\underline{q}}_N) \qquad \forall \underline{v}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F}_i = \underline{F}_i(\underline{q}_1 - \underline{q}_2, \cdots \underline{q}_{N-1} - \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 - \dot{\underline{q}}_2, \cdots \dot{\underline{q}}_{N-1} - \dot{\underline{q}}_N) \qquad (4.12)$$

Schliesslich impliziert die Rotationsinvarianz, daß die Kräfte sich wie Vektoren unter der gleichzeitigen Rotation aller Argumente transformieren:

$$R\,\underline{F}_i(\underline{q}_1 - \underline{q}_2, \cdots \dot{\underline{q}}_{N-1} - \dot{\underline{q}}_N) = \underline{F}_i(R\underline{q}_1 - R\underline{q}_2, \cdots R\dot{\underline{q}}_{N-1} - R\dot{\underline{q}}_N) \qquad (4.13)$$

Falls die Kräfte (4.13) erfüllen für alle $R \in SO(3)$ (bzw. $O(3)$), so ist das mechanische System ($\rightarrow$ Anhang B) $\mathcal{G}^{\uparrow}_{+}$- (bzw. $\mathcal{G}^{\uparrow}$-) invariant. Zur Invarianz unter Zeitspiegelungen ist zusätzlich notwendig, daß gilt

$$\underline{F}_i(\cdots, \dot{\underline{q}}_1 - \dot{\underline{q}}_2, \cdots \dot{\underline{q}}_{N-1} - \dot{\underline{q}}_N) = \underline{F}_i(\cdots, \dot{\underline{q}}_2 - \dot{\underline{q}}_1, \cdots \dot{\underline{q}}_N - \dot{\underline{q}}_{N-1}) \qquad (4.14)$$

Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen wird im Teil II wesentlich vertieft werden.

Einstein'sches Relativitätsprinzip. Zwei Ereignisse $\xi_1 = (ct_1, \underline{q}_1)$, $\xi_2 = (ct_2, \underline{q}_2)$ sind durch ein Lichtsignal der Geschwindigkeit c verbindbar, falls gilt

$$(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) = c^2 (t_1 - t_2)^2 - |\underline{q}_1 - \underline{q}_2|^2 = 0 \qquad (4.14)$$

Gilt (4.14) in einem Inertialsystem, dann wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes anisotrop in einem gleichförmig geradlinig bewegten Bezugsystem, in dem sich die Raum- und Zeitkoordinaten $\tilde{\xi}$ durch eine Galilei'sche Geschwindigkeitstransformation aus ξ ergeben. Ein solcher Effekt ist jedoch nie gefunden worden.

Für eine Raum-Zeit $\mathbb{R}^d$ der Dimension $d \geq 3$ gilt der folgende bemerkenswerte Satz von Zeeman (J. Math. Phys. $\underline{5}$, 490 (1964)) und Borchers und Hegerfeldt (Comm. Math. Phys. $\underline{28}$, 259 (1972)): Sei

$$\xi \to \tilde{\xi} = T(\xi) \qquad (4.15)$$

eine 1-1-deutige Abbildung von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ mit konstanter Lichtgeschwindigkeit c:

$$(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) = 0 \iff (\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2) = 0$$

So ist T affin und hat die Form (Summationskonv.)

$$\tilde{\xi} = \lambda \Lambda \xi + \alpha \iff \tilde{\xi}^\mu = \lambda \Lambda^\mu{}_\varrho \xi^\varrho + \alpha^\mu \qquad (4.16)$$

mit $\lambda > 0$ und Λ Lorentztransformation:

$$\Lambda^T G \Lambda = G \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad (T: \text{Transposition}) \qquad (4.17)$$

Einstein hat diesen Satz unter der durch das Trägheitsprinzip motivierten Zusatzannahme der Affinität in seiner grundlegenden Arbeit

"Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Ann. Phys. 17, 891 (1905)) bewiesen und zusätzlich gezeigt, daß, wenn in allen durch inhomogene Lorentz-transformationen bis auf einen Faktor verbundenen Koordinatensystemen Masstäbe für Raum- und Zeit auf Grund von identischen Messvorschriften (z.B. von Spektrallinien) gewählt werden, dann notwendigerweise $\lambda = 1$ ist ($\rightarrow$ Anhang B).

Das Einstein'sche Relativitätsprinzip fordert die Lorentzinvarianz der Bewegungsgleichungen aller dynamischen Systeme, bei denen Korrektionen auf Grund der gravitativen Raumkrümmung vernachlässigbar sind. Ein Prototyp für eine lorentzinvariante Dynamik ist die einer Lichtwelle im Vakuum, die durch Lösungen von

$$\Box \phi \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \right) \phi(t, \underline{q}) = 0 \qquad (4.18)$$

beschrieben wird. Wir wollen in diesem Abschnitt eine Lorentzinvariante Dynamik eines Massenpunktes in Wechselwirkung mit äusseren elektromagnetischen Feldern entwickeln.

Sei $\xi(\lambda)$ die "Weltlinie" eines Massenpunktes mit Unterlichtgeschwindigkeit in dem Sinne, daß für jeden Wert des Kurvenparameters λ der Tangentialvektor im Inneren des Vorkegels ausgehend von $\xi(\lambda)$ liegt.

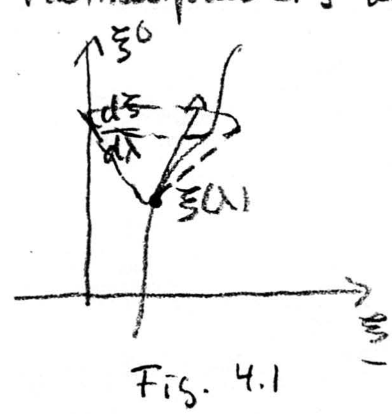


Fig. 4.1

Entlang solcher Kurven wächst die <u>Eigenzeit-Differenz</u>

$$\tau(\xi_2) - \tau(\xi_1) = \frac{1}{c} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\lambda}(\lambda), \frac{d\xi}{d\lambda}(\lambda)\right)}$$

$$\xi_i = \xi(\lambda_i) \qquad (4.19)$$

monoton für $\xi_2 \to$ Zukunft, $\xi_1 \to$ Vergangenheit, da der Integrand positiv ist. (4.19) ist unter <u>Poincarétransformationen</u> $\tilde{\xi} = \Lambda\xi + \alpha$, $\Lambda \in \mathcal{L}$, invariant

$$\tau(\xi_2) - \tau(\xi_1) = \tau(\tilde{\xi}_2) - \tau(\tilde{\xi}_1) \qquad (4.20)$$

und invariant bei Änderung der Kurvenparametrisierung. Wählt man die Zeit als Kurvenparameter, $\xi(t) = (ct, \underline{q}(t))^T$, so erhält man mit $\underline{v}(t) = \dot{\underline{q}}(t)$

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} \qquad (4.21)$$

Zu jedem Punkt auf der Trajektorie gibt es eine Lorentztransformation, die das Teilchen dort in ein Ruhesystem transformiert. Daher ist physikalisch die Eigenzeit auf einer solchen Trajektorie die Zeit gemessen mit einer mitlaufenden Uhr. Es gilt

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v(t)^2/c^2} \qquad (4.22)$$

Unter Poincaré-Transformationen transformiert ein Tangentialvektor $\eta = d\xi/d\lambda$ sich wie eine Koordinatendifferenz, d.h. als <u>Vierervektor</u>

$$\tilde{\eta}(\lambda) = \Lambda\eta(\lambda) \qquad (4.23)$$

für $\tilde{\xi}(\lambda) = \Lambda\xi(\lambda) + \alpha$. Mit der Eigenzeit als Kurven=

parameter heisst der Vierervektor

$$\eta(\tau) = \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \binom{c}{\underline{v}} \Big/ \sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (4.24)$$

<u>Vierergeschwindigkeit</u> und erfüllt

$$(\eta, \eta) = c^2 \qquad (4.25)$$

(4.25) ist eine nichttriviale Einschränkung für die Form einer relativistisch invarianten Bewegungsgleichung für die Trajektorie $\xi(\tau)$.
Da für kleine Geschwindigkeiten die Newton'sche Mechanik gelten sollte, muss die Beschleunigung längs der Trajektorie

$$m\,\ddot{\xi}(\tau) = m\frac{d^2\xi(\tau)}{d\tau^2} = K(\xi(\tau), \dot{\xi}(\tau), \tau) \qquad (4.26)$$

sein. Wegen (4.25) gilt

$$0 = (\ddot{\xi}(\tau), \eta(\tau)) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\eta(\tau), \eta(\tau)) \qquad (4.27)$$

Da $\eta(\tau)$ zeitartig ist, muss $\ddot{\xi}(\tau)$ raumartig sein. Es gilt

$$(\ddot{\xi}(\tau), \ddot{\xi}(\tau)) = -|\ddot{\underline{q}}|^2 \qquad (4.28)$$

in einem momentanen Ruhesystem, wo $\ddot{\xi}(\tau)$ die Form $(0, \underline{a})^T$ hat wegen $\eta(\tau) = (c, \underline{0})$:

$$\frac{d\underline{q}}{d\tau} = \frac{d\underline{q}}{dt}\frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2\underline{q}}{d\tau^2} = \frac{d\underline{q}}{dt}\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{d^2\underline{q}}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \qquad (4.29)$$

und 1. Term verschwindet und $\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 1$ in einem momentanen Ruhesystem

Als Prototyp einer relativistischen Dynamik untersuchen wir die <u>hyperbolische Bewegung</u>.
Wir befinden uns in einer Rakete, die

während einer festen Zeitdauer T der Borduhr im lokalen Inertialsystem mit konstanter Beschleunigung $\underline{g} = g\underline{e}_1$ $(g = 9.81\ m/s^2)$ mit der Anfangsposition und Geschwindigkeit Null zur Zeit 0 beschleunigt wird. Zwischen Bordzeit T und 3T werde die Rakete mit $-g\underline{e}_1$ konstant beschleunigt und zwischen 3T und 4T mit $g\underline{e}_1$ bis zur sanften Landung im Koordinatenursprung zur Erdzeit $t(T)$,

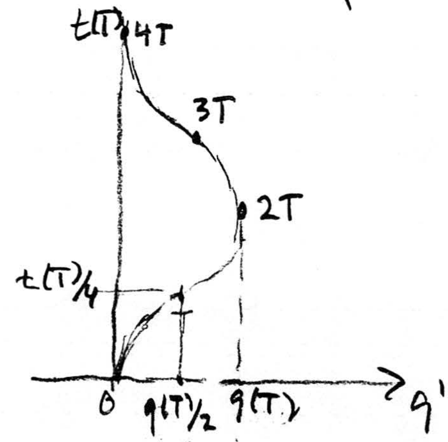


Fig. 4.2

Wie weit kommt die Rakete ($q(T)$) und wieviel Zeit ($t(T)$) ist auf der Erde vergangen?

Die Forderung $\xi^1 \geq 0$, $\eta^1 \geq 0$ für $0 \leq \tau \leq T$ und

$$(\xi(\tau), \xi(\tau)) = -g^2 \qquad (4.30)$$

liefern für die Bewegung in der 0-1-Ebene eine Bewegungsgleichung, falls man die Nebenbedingungen (4.25), (4.27) berücksichtigt:

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 = -g^2 \qquad (4.31)$$

$$(\eta^0)^2 - (\eta^1)^2 = c^2$$

$$\xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 = 0$$

$$\Rightarrow (\xi^0)^2 = (\xi^1)^2 - g^2 = (\eta^0 \xi^0/\eta^1)^2 - g^2 = \frac{(\xi^0)^2}{(\eta^1)^2}\left(c^2 + (\eta^1)^2\right) - g^2$$

$$\Rightarrow (\xi^0)^2 = \frac{g^2}{c^2}(\eta^1)^2 \qquad (4.32)$$

$\xi^1 \geq 0,\ \eta^1 \geq 0,\ \eta^0 \geq 0 \Rightarrow \xi^0 \geq 0$. Daher liefert (4.32)

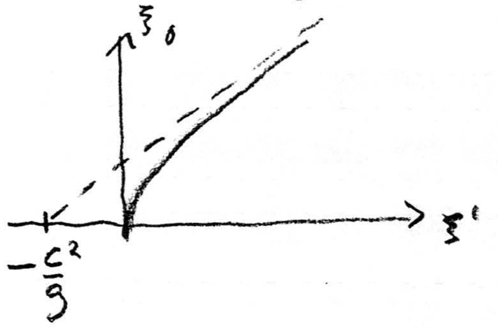
$$\xi^0 = \frac{g}{c}\eta^1 \qquad \xi^1 = \frac{g}{c}\eta^0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d\eta^0}{d\tau} = \frac{g}{c}\eta^1 \qquad \frac{d\eta^1}{d\tau} = \frac{g}{c}\eta^0 \qquad (4.33)$$

eine hyperbolische Evolution der Vierergeschwindigkeit.
Die Anfangsbedingungen sind in unserem Falle für $t=0$

$$\eta^0(0) = c\,,\ \eta^1(0) = 0\,, \qquad \tau(0) = 0$$
$$\xi^0(0) = \xi^1(0)$$

$$\Rightarrow \eta^0(\tau) = c\,\mathrm{ch}\frac{g\tau}{c}\,, \qquad \eta^1(\tau) = c\,\mathrm{sh}\frac{g\tau}{c} \qquad (4.34)$$
$$\xi^0(\tau) = \frac{c^2}{g}\,\mathrm{sh}\frac{g\tau}{c}\,, \qquad \xi^1(\tau) = \frac{c^2}{g}\left(\mathrm{ch}\frac{g\tau}{c} - 1\right)$$



Hyperbel mit Asymptote
$q^1(\tau) = ct - \frac{c^2}{g}$

Fig. 4.3

Für $g = 9.81\ m/s^2$ und $c = 3\cdot10^8\ m/s$ ergibt sich als realistischer Science Fiction Werte

Reisedauer 4T [Jahre]	t(T) [Jahre]	r(T) [Lichtjahre]
2	15	6
4	120	58
6	947	472
8	7459	3728
10	58750	29373

Nach dieser kinematischen Vorbetrachtung wollen wir relativistisch invariante Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt in einem äusseren elektromagnetischen Feld aufstellen, die das Lorentz'sche Kraftgesetz

$$m\,\ddot{\underline{q}}(t) = e\,\underline{E}(\underline{q}(t),t) + \frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}}(t)\wedge\underline{B}(\underline{q}(t),t) \qquad (4.35)$$

verallgemeinert. Da der <u>Viererimpuls</u>

$$\pi = m\eta = \begin{pmatrix} mc \\ m\underline{v} \end{pmatrix} / \sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (4.36)$$

$(\pi,\pi) = m^2c^2$ erfüllt, muss die zeitliche Änderung $d\pi/d\tau$ nach (4.27) mit π das Skalarprodukt Null haben. Dies lässt sich einfach realisieren, falls $d\pi/d\tau$ proportional zu einer antisymmetrischen (4×4)-Matrix F multipliziert mit $G\pi$ ist; z.B. für

$$\frac{d\pi}{d\tau} = \frac{e}{c}\,FG\pi \qquad F^T = -F \qquad (4.37)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\pi}{d\tau},\pi\right) = \frac{e}{c}\,\pi^T GFG\pi = \frac{e}{c}\,\pi^T GF^T G\pi = 0$$

Zudem ist die Gleichung (4.37) eine Lorentz-invariante Bewegungsgleichung, falls F eine Funktion auf der Raumzeit ist, die sich unter Lorentztransformationen $\tilde{\xi} = \Lambda\xi + a$ "wie ein Tensor 2. Stufe" transformiert als

$$\tilde{F}(\tilde{\xi}) = \Lambda F(\xi)\Lambda^T \qquad (4.38)$$

Die resultierende Bewegungsgleichung

$$\frac{d\pi}{d\tau} = \frac{e}{c}\,F(\xi(\tau))\,G\pi(\tau) \quad , \quad m\frac{d\xi}{d\tau} = \pi(\tau) \qquad (4.39)$$

bleibt nämlich forminvariant für die transformierte Trajektorie $\tilde{\xi}(\tau) = \Lambda\xi(\tau) + \alpha$, da $\tilde{\pi}(\tau) = \Lambda\pi(\tau)$ gilt und da $\varrho = FG\pi$ unter Lorentztransformationen übergeht in $\tilde{\varrho} = \tilde{F}G\tilde{\pi} = \Lambda F \Lambda^T G \Lambda \pi = \Lambda F G \pi$. In anderen Worten: ist $\xi(\tau), \pi(\tau)$ eine Lösung von (4.39) zum "Feld" $F(\xi)$, dann ist $\tilde{\xi}(\tau), \tilde{\pi}(\tau)$ Lösung von (4.39) zu $\tilde{F}(\tilde{\xi})$. Nun zur Physik:

Jede antisymmetrische 4×4 Matrix hat die Form

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Setzt man (4.40) in (4.39) ein, so erhält man für $k = 1,2,3$ mit $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$, $v^k = \dot{q}^k$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{q}^k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{e}{c} F^{k0} c - \frac{e}{c} F^{ki} v^i = eE^k + \frac{e}{c}(\underline{v} \wedge \underline{B})^k \tag{4.41}$$

Identifiziert man $(E^1, E^2, E^3)^T$ und $(B^1, B^2, B^3)^T$ mit den elektrischen und magnetischen Feldstärken $\underline{E}(\xi), \underline{B}(\xi)$, so erhält man die Einstein'schen Gleichungen (1.20) als Verallgemeinerung von (4.35). Die Nullkomponente liefert den Energiesatz

$$\frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{e}{c} F^{0k} v^k = \frac{e}{c} \underline{E} \cdot \underline{v} \tag{4.42}$$

(4.42) ist eine Folge von (4.41): in der relativistischen Theorie muss die 4-Beschleunigung senkrecht (im Sinne von $(\zeta, \eta) = 0$) auf der 4-Geschwindigkeit stehen und das bestimmt ζ^0 bei vorgegebenem η und $\underline{\zeta}$, wie bei der hyperbolischen Bewegung.

Die Interpretation von (4.42) als Energiesatz wird durch die Entwicklung nach v^2/c^2 nahegelegt:

$$E = c\pi^0 = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2} = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O\left(\frac{v^4}{c^2}\right) \qquad (4.43)$$

E ist also bis auf eine additive Konstante, der Ruheenergie mc^2 des Teilchens der Ruhemasse m, in niedrigster Ordnung in v^2/c^2 die nichtrelativistische kinetische Energie und $e\underline{E}\cdot\underline{v}/c$ ist die Arbeitsleistung der Lorentzkraft.

In der Elektrodynamik wird gezeigt, daß (4.38) das korrekte Transformationsverhalten des elektromagnetischen Felder unter Lorentztransformationen wiedergibt. Weiterhin wird dort gezeigt, daß wenn immer $\underline{E}\cdot\underline{E} \neq \underline{B}\cdot\underline{B}$ oder $\underline{E}\cdot\underline{B} \neq 0$ ist, durch eine Lorentztransformation $\underline{E}$ und $\underline{B}$ in jedem Punkt ξ in die Normalform

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.44)$$

transformiert werden kann, und andernfalls in

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & A & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.45)$$

Für konstante Felder $\underline{E}, \underline{B}$ sind (4.44) und (4.45) globale Normalformen, für die sich die Einstein'schen Gleichungen einfach lösen lassen. Für (4.44) gilt mit $\varepsilon = e/mc$, $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$

$$\ddot{\xi}^0 = \varepsilon E \dot{\xi}^1, \quad \ddot{\xi}^1 = \varepsilon E \dot{\xi}^0 \qquad (4.46)$$

$$\ddot{\xi}^2 = \varepsilon B \dot{\xi}^3, \quad \ddot{\xi}^3 = -\varepsilon B \dot{\xi}^2 \qquad (4.47)$$

(4.46) beschreibt eine hyperbolische Bewegung und (4.47) ist eine Kreisbewegung

$$\xi^2(\tau) = r \sin(\varepsilon B\tau + \varphi) + \xi^2_0$$
$$\xi^3(\tau) = r \cos(\varepsilon B\tau + \varphi) + \xi^3_0 \qquad (4.48)$$

Im Falle (4.45) erhält man

$$\ddot{\xi}^0 = \varepsilon A \dot{\xi}^2 \quad , \quad \ddot{\xi}^1 = 0$$
$$\ddot{\xi}^2 = \varepsilon A \dot{\xi}^0 + \varepsilon A \dot{\xi}^3 \quad , \quad \ddot{\xi}^3 = -\varepsilon A \dot{\xi}^2 \qquad (4.49)$$
$$\Rightarrow \dddot{\xi}^2 = 0 \quad \Rightarrow \ddddot{\xi}^0 = \ddddot{\xi}^3 = 0$$

Dann sind alle Komponenten von $\xi(\tau)$ Polynome vom Grade ≤ 3 in τ.

Aus diesen speziellen Lösungen erhält man die allgemeine Lösung von (4.41) in konstanten Feldern durch Lorentztransformation.

Auch bei der Diskussion von Stoßprozessen relativistischer Teilchen ermöglicht die Lorentz-invarianz wesentliche Vereinfachungen durch eine geschickte Wahl der Variablen. Es seien $\Pi_1, .. \Pi_k$ die 4-Impulse der einfallenden Teilchen und $\Pi_{k+1}, .. \Pi_l$ die der auslaufenden Teilchen nach Fig. 4.4:

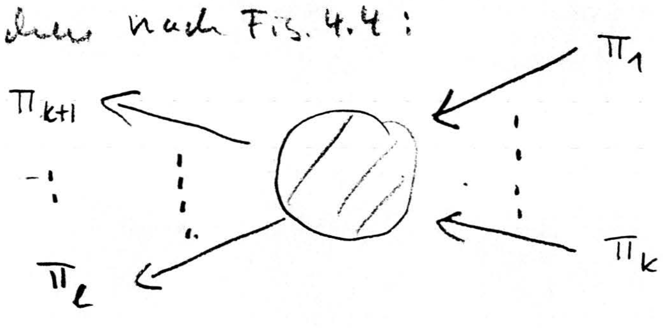


Fig. 4.4.

In einer relativistischen Quantendynamik bleibt die Teilchenzahl nicht notwendigerweise erhalten, und auch die Massen der ein- und auslaufenden

Teilchen können verschieden sein. Beim Übergang in ein anderes Inertialsystem gilt $\pi_i \to \tilde{\pi}_i = \Lambda \pi_i$ mit $(\pi_i, \pi_j) = (\tilde{\pi}_i, \tilde{\pi}_j)$. Weiterhin gilt der <u>Energie-Impuls-Satz</u>:

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots \pi_k = \pi_{k+1} + \cdots \pi_\ell \qquad (4.50)$$

und jedes π_i "liegt auf dem positiven <u>"Massenhyperboloid"</u>

$$\pi_i^0 = + \sqrt{m_i^2 c^2 + |\underline{\pi}_i|^2} \qquad (4.51)$$

(4.50) und (4.51) und die Lorentzinvarianz schränken die Kinematik von Stoßprozessen nichttrivial ein. Für einen <u>Zerfall</u> $\pi_1 \to \pi_2 + \pi_3$ gilt im Ruhesystem des Teilchens 1:

$$\pi_1^s = \begin{pmatrix} m_1 c \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \pi_2^s + \pi_3^s = \begin{pmatrix} cE_2^s \\ \underline{\pi}^s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cE_3^s \\ -\underline{\pi}^s \end{pmatrix} \qquad (4.52)$$

mit $E_i^s = (m_i^2 c^4 + |\underline{\pi}^s|^2 c^2)^{1/2}$. Ein solcher Zerfall ist also nur möglich, falls $m_1 \geq m_2 + m_3$ ist, und im Ruhesystem ist $|\underline{\pi}^s|$ durch (4.52) festgelegt. Entsprechendes gilt für den <u>Annihilationsprozess</u> $\pi_3 + \pi_2 \to \pi_1$.

Für einen <u>2-Teilchenstreuprozess</u> mit

$$\pi_1 + \pi_2 = \pi_3 + \pi_4 \qquad (4.54)$$

lassen sich bei vorgegebenen Massen $m_i^2 c^2 = (\pi_i, \pi_i)$ alle Lorentzinvarianten (π_i, π_j) via (4.54) durch die "Mandelstam-Variablen"

$$s = (\pi_1 + \pi_2, \pi_1 + \pi_2), \quad t = (\pi_1 - \pi_3, \pi_1 - \pi_3), \quad u = (\pi_1 - \pi_4, \pi_1 - \pi_4) \qquad (4.55)$$

ausdrücken, die abhängig sind wegen

$$s + t + u = \sum m_i^2 c^2 \qquad (4.56)$$

Für Teilchen ohne Spin ist die 2-Teilchen-Streuamplitude eine komplexwertige (d.h. 2 reellwertige) Funktion von s und t, die eng mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt und der Stoßzeit zusammenhängen (→ Goldberger & Watson "Collision Theory").

Im Laborsystem Σ^L sei Teilchen 2 vor dem Stoß in Ruhe

$$\underline{\Pi}_2^L = \underline{0} \qquad (4.57)$$

während im Schwerpunktsystem Σ^S

$$\underline{\Pi}_1^S = \underline{\Pi}^S = -\underline{\Pi}_2^S \qquad (4.58)$$

gilt. Offenbar sind Σ^L und Σ^S durch Lorentz-Transformationen miteinander verknüpft. Also gilt

$$(\Pi_1^S, \Pi_2^S) = (\Pi_1^L, \Pi_2^L) \Rightarrow$$

$$E_1^S E_2^S / c^2 + |\underline{\Pi}^S|^2 = E_1^L m_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + c^2 |\underline{\Pi}_1^L|^2}\, m_2$$

$$= \sqrt{m_1^2 c^2 + |\underline{\Pi}^S|^2}\sqrt{m_2^2 c^2 + |\underline{\Pi}^S|^2} + |\underline{\Pi}^S|^2$$

$$\Rightarrow |\underline{\Pi}^S| = |\underline{\Pi}_1^L| \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1^L m_2 / c^2}} \qquad (4.59)$$

Mit $E_i^S = \sqrt{m_i^2 c^4 + |\underline{\Pi}^S|^2 c^2}$, $|\underline{\Pi}_1^L|^2 = E_1^L/c^2 - m_1^2 c^2$ kann man aus (4.59) $E_i^S = E_i^S(E_1^L)$ bestimmen. Alle diese Energien und Impulse sind einfache Funktionen der Lorentzinvarianten s wegen

$$s = (E_1^S + E_2^S)^2/c^2 = (E_1^L/c + m_2 c)^2 - |\underline{\Pi}_1^L|^2 = \qquad (4.60)$$
$$= m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 E_1^L m_2$$

$$\Rightarrow E_1^L = \frac{1}{2m_2}\left(s - m_1^2c^2 - m_2^2c^2\right)$$

$$E^S_{\substack{1\\2}} = \frac{c}{2\sqrt{s}}\left(s + m_{\substack{1\\2}}^2c^2 - m_{\substack{2\\1}}^2c^2\right) \qquad (4.61)$$

$$|\Pi^S| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}$$

mit $\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$. s ist ein relativistisch invarianter Mass für die Gesamtenergie in einem Zweierstoß. Die physikalische Bedeutung von t ist die eines Impulsübertragung, oder ein lorentzinvarianter Mass für den Streuwinkel oder die Impulsübertragung von 1 auf 3 (u für 1 auf 4). In Σ^S gilt (4.62)

$$\cos\theta^S = \underline{\Pi}_1^S\cdot\underline{\Pi}_3^S / \Pi_1^S\Pi_3^S, \quad t = m_1^2c^2 + m_3^2c^2 - 2E_1^SE_3^S/c^2 + 2\,\underline{\Pi}_1^S\cdot\underline{\Pi}_3^S$$

$$\Rightarrow \cos\theta^S = \frac{s^2 + s(2t - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - m_4^2)c^2 + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)c^4}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}\sqrt{\lambda(s, m_3^2c^2, m_4^2c^2)}} \qquad (4.63)$$

In (4.62) wurde für E_1^S und $\Pi_1^S = |\underline{\Pi}_1^S|$ (4.61) benutzt und eine analoge Formel für E_3^S, Π_3^S für die auslaufenden Teilchen. In Σ^L gilt (4.62) mit $S \Rightarrow L$. E_3^L ist leicht durch u ausdrückbar:

$$t = (\Pi_2 - \Pi_4, \Pi_2 - \Pi_4) = m_2^2c^2 + m_4^2c^2 - 2m_2E_4^L \Rightarrow E_4^L = \ldots$$

$$\Rightarrow E_3^L = m_2c^2 + E_1^L - E_4^L = \frac{1}{2m_2}\left[s + t - m_1^2c^2 - m_4^2c^2\right]$$
$$= \frac{1}{2m_2}\left[m_2^2c^2 + m_3^2c^2 - u\right] \qquad (4.64)$$

Nach einigen zu (4.63) ähnlichen Manipulationen gibt das

$$\cos\theta^L = \frac{(s^2 - m_1^2c^2 - m_2^2c^2)(m_2^2c^2 + m_3^2c^2 - u) + 2m_2^2c^2(t - m_1^2c^2 - m_3^2c^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2c^2, m_2^2c^2)}\sqrt{\lambda(u, m_2^2c^2, m_3^2c^2)}} \qquad (4.65)$$

Zu behalten ist die Folgerung, dass alle physikalischen Variablen des relativistischen Zweierstosses durch s und t ausdrückbar sind.

c) <u>Scheinkräfte</u>: Wir wollen (4.3) für einen Massenpunkt in einem zeitlich veränderlich rotierten und translatierten Koordinatensystem $\mathcal{K}'$ berechnen. Sei $\underline{q}'(t)$ die Bahn in $\mathcal{K}'$, das gegen ein Inertialsystem $\mathcal{K}$ mit $R(t) \in SO(3)$ gedreht und mit $\underline{a}(t) \in \mathbb{R}^3$ verschoben ist (s. Fig. 4.5)

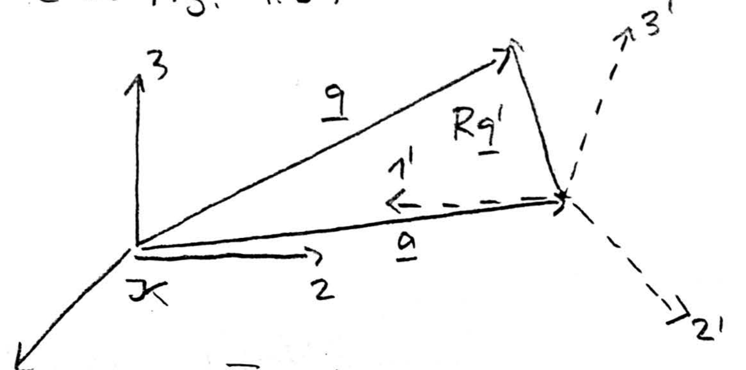


Fig. 4.5

$$\underline{q}(t) = R(t)\,\underline{q}'(t) + \underline{a}(t) \qquad (4.20)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{q}}(t) = \dot{R}(t)\,\underline{q}'(t) + R(t)\,\dot{\underline{q}}'(t) + \dot{\underline{a}}(t) \qquad (4.66)$$
$$= \underline{\omega}(t) \wedge R(t)\underline{q}'(t) + R(t)\,\dot{\underline{q}}'(t) + \dot{\underline{a}}(t)$$

Zum Beweis von (4.66): $R(t) \in SO(3)$ bedeutet

$$R(t)R(t)^T = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = \dot{R}(t)R(t)^T + R(t)\dot{R}(t)^T \qquad (4.67)$$

Daher ist die Matrix

$$\Omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^T = \dot{R}(t)R(t)^{-1} \qquad (4.68)$$

antisymmetrisch:

$$\Omega(t) = -\Omega(t)^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.69)$$

und $\Omega(t)\underline{x} = \underline{\omega}(t) \wedge \underline{x}$ mit $\underline{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$

$\underline{\omega}(t)$ heisst <u>Winkelgeschwindigkeit</u> im Inertialsystem.

<u>Bsp</u>: In Vektorschreibweise gilt für eine Rotation $R(\underline{e},\varphi)$ um die Drehachse $\underline{e}$ ($\underline{e} \in \mathbb{R}^3$, $|\underline{e}| = 1$) mit Drehwinkel φ:

$$R(\underline{e},\varphi)\,\underline{q}' = (\underline{e}\cdot\underline{q}')\,\underline{e} + \sin\varphi\; \underline{e}\wedge\underline{q}' - \cos\varphi\; \underline{e}\wedge(\underline{e}\wedge\underline{q}') \qquad (4.70)$$

Sei $R(t) = R(\underline{e},\varphi(t))$ und $\underline{q}(t) = R(t)\,\underline{q}'$. Dann gilt:

$$\underline{\dot q}(t) = \dot\varphi(t)\left(\cos\varphi(t)\,\underline{e}\wedge\underline{q}' + \sin\varphi(t)\,\underline{e}\wedge(\underline{e}\wedge\underline{q}')\right)$$
$$= \underline{\omega}(t)\wedge\underline{q}(t) \qquad\qquad \underline{\omega}(t) = \dot\varphi(t)\,\underline{e} \qquad (4.71)$$

Die Winkelgeschwindigkeit im Nichtinertialsystem, $\underline{\omega}'(t)$ ist

$$\underline{\omega}'(t) = R(t)^{-1}\,\underline{\omega}(t)\,, \qquad \Omega'(t) = R^{-1}(t)\,\Omega(t)\,R(t) \qquad (4.72)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot q}(t) = \underline{\dot a}(t) + R(t)\left\{\underline{\omega}'(t)\wedge\underline{q}'(t) + \underline{\dot q}'(t)\right\}$$

Entsprechend gilt für die Beschleunigungen

$$\underline{\ddot q} = \underline{\ddot a} + \underline{\dot\omega}\wedge R\underline{q}' + \underline{\omega}\wedge\dot R\underline{q}' + \underline{\omega}\wedge R\underline{\dot q}' + \dot R\underline{\dot q}' + R\underline{\ddot q}'$$
$$= \underline{\ddot q} + \underline{\dot\omega}\wedge R\underline{q}' + 2\,\underline{\omega}\wedge R\underline{\dot q}' + \underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge R\underline{q}') + R\underline{\ddot q}'$$
$$= \underline{\ddot a} + R\left\{\underline{\dot\omega}'\wedge\underline{q}' + 2\underline{\omega}'\wedge\underline{\dot q}' + \underline{\omega}'\wedge(\underline{\omega}'\wedge\underline{q}') + \underline{\ddot q}'\right\} \qquad (4.73)$$

wegen $\underline{\dot\omega}(t) = R(t)\,\underline{\dot\omega}'(t) + \cancel{\underline{\omega}(t)\wedge\underline{\omega}(t)}$. $\underline{\omega}'\wedge(\underline{\omega}'\wedge\underline{q}')$ heisst Zentrifugal- und $2\underline{\omega}'\wedge\underline{\dot q}'$ Coriolisbeschleunigung im bewegten Bezugsystem. Mit (4.73) erhält man als Newton'sche Gleichungen in diesem Nichtinertialsystem

$$m\underline{\ddot q}' = \underline{F}' - m\,\underline{\omega}'\wedge(\underline{\omega}'\wedge\underline{q}') - 2m\,\underline{\omega}'\wedge\underline{\dot q}' - m\,\underline{\dot\omega}'\wedge\underline{q}' - mR^T\underline{\ddot a} \qquad (4.74)$$

zur transformierten Kraft $\underline{F}' = R^T\underline{F}$ kommen als "Scheinkräfte" die Zentrifugal- und Corioliskraft sowie Beiträge von der zeitlichen Änderung der Drehachse und der Beschleunigung des Zentrums.

Bsp: Freier Fall auf der Erdoberfläche unter Vernachlässigung von $m\underline{\dot\omega}'\wedge\underline{q}'$ (Polschwankungen) und von $mR^T\underline{\ddot a}$ (Umlauf der Erde um die Sonne) Die statisch bestimmbare Erdanziehungskraft $m\underline{g}'$ ist die Summe von Zentrifugal- und Gravitationskraft. Also wird (4.74)

$$\underline{\ddot q}' = \underline{g}' - 2\underline{\omega}'\wedge\underline{\dot q}' \qquad (4.75)$$

Wir wählen ein erdfestes Koordinatensystem nach Fig. 4.6

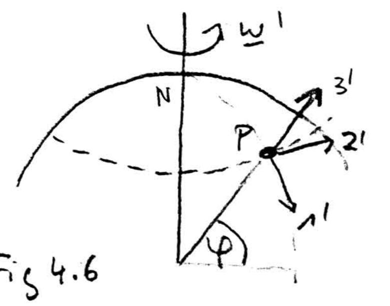


Fig 4.6

φ : geographische Breite

$3'$: Richtung von $\underline{g}'$, d.h. Normale an Erdoberfläche

$1'$: südwärts $\quad 2'$: ostwärts

Seien $\underline{q}' = (x, y, z)$, $\underline{g}' = (0, 0, -g)$ und $\underline{\omega}' = (-\omega\cos\varphi, 0, \omega\sin\varphi)$,

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\sin\varphi\,\dot{y} \\ \ddot{y} &= -2\omega\sin\varphi\,\dot{x} - 2\omega\cos\varphi\,\dot{z} \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\cos\varphi\,\dot{y} \end{aligned} \tag{4.76}$$

Da die Corioliskraft senkrecht zu $\dot{\underline{q}}'$ steht, leistet sie keine Arbeit, und es gilt der Energiesatz:

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2gz) = 0 \tag{4.77}$$

Die Lösung von (4.76) mit Anfangsbedingungen für $t=0$: $x = y = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, $z = h > 0$, ist

$$\dot{x} = 2\omega\sin\varphi\, y, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega\cos\varphi\, y$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + 4\omega^2 y = 2\omega g\cos\varphi\, t$$

$$y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right) \approx \omega t\,\frac{gt^2}{3}\cos\varphi \tag{4.78}$$

für $\omega t \approx$ Fallzeit / Tag $\ll 1$. Auf der nördlichen Hemisphäre findet man eine beobachtbare Ostablenkung von 1. Ordnung in ωt. Die Südablenkung ist

$$\dot{x} = g\sin\varphi\cos\varphi\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)$$

$$\Rightarrow x = g\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right) \approx (\omega t)^2\,\frac{gt^2}{6}\sin\varphi\cos\varphi \tag{4.79}$$

Ebenso findet man eine $O((\omega t)^2)$ Korrektur zum Fallgesetz:

$$\dot{z} = -gt + g\cos^2\varphi\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)$$

$$\Rightarrow z = h - \frac{g}{2}t^2 + \frac{gt^2}{6}\cos^2\varphi\,(\omega t)^2 + O((\omega t)^4) \tag{4.80}$$

Teil II: KANONISCHE MECHANIK

In diesem Teil werden wir die Mechanik kanonischer Systeme in eine sehr aussagekräftige Form giessen, die auf Lagrange und Hamilton zurückgeht. Die Vorteile sind vielfach:

- Einfache Koordinatentransformation der Bewegungsgleichungen, die es gestattet, als Konfigurationsraum Mannigfaltigkeiten (wie Kugel oder Rotationsgruppe) zuzulassen und Systeme mit idealen holonomen Nebenbedingungen zu beschreiben.
- Durchsichtige Diskussion von Erhaltungssätzen und Symmetrien und damit Integration komplizierter Bewegungsgleichungen (Kreisel)
- Ästhetischer Einbau der speziellen Relativitätstheorie in die Dynamik von Massenpunkten und Feldern

§5. Hamilton'sches Extremalprinzip

Mit Leibnitz sagt Voltaire: "Il est démontré, que les choses ne peuvent être autrement : car, tout étant fait pour une fin, tout est necessairement pour la meilleure fin" (Candide). In einer solchen Welt sollten die Naturgesetze durch Extremalprinzipien beschrieben werden. Das tragfähigste Prinzip stammt von Hamilton und ist dem Buch von Landau und Lifschitz [L1] an den Anfang gestellt, obwohl nicht alle Newton'schen Systeme damit behandelt werden können (ohne künstliche Verdopplung der Dimension des Konfigurationsraumes) Hamilton postuliert, daß dem System mit f Freiheitsgraden eine <u>Lagrangefunktion</u> $L(q_1 \cdots q_f, \dot q_1 \cdots \dot q_f, t)$ in der $(2f+1)$-dimensionalen Phasenraumzeit der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten zugeordnet sei. Für jede Bahnkurve $(q_1(t), \cdots q_f(t)) = \xi(t)$ mit $\xi(t_1) = \alpha$, $\xi(t_2) = \beta$ sei die <u>Wirkung</u> ("action") $I(\xi)$

definiert als

$$I(\xi) = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(\xi(t), \dot{\xi}(t), t) \qquad (5.1)$$

und $I(\xi)$ soll extremal (als Funktion aller glatten Kurven ξ mit $\xi(t_1)=\alpha$, $\xi(t_2)=\beta$) sein für die mechanische Bahnkurve ξ_0 (s. Fig. 5.1):

a.) <u>Hamiltonsches Extremalprinzip</u>: Sei $\xi_0(t)$ die physikalische Bahn eines mechanischen Systems mit Lagrangefunktion L und $\xi_0(t_1)=\alpha$, $\xi_0(t_2)=\beta$. Dann hat ξ_0 bezüglich aller Kurven ξ mit $\xi(t_1)=\alpha$, $\xi(t_2)=\beta$ extremale Wirkung (5.1).

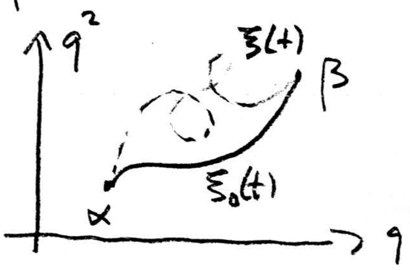


Fig. 5.1

Dieses <u>Variationsprinzip</u> liefert als Bewegungsgleichung für ξ_0 als notwendige Bedingung die <u>Lagrange'schen Gleichungen</u>

$$\frac{\delta L}{\delta q^k} \equiv \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0 \qquad 1 \leq k \leq f \qquad (5.2)$$

Zum Beweis betten wir die physikalische Bahnkurve $\xi_0(t)$ in eine 1-parametrige Schar von Vergleichs-trajektorien $\xi(t,s)$ ein: es sei $\eta(t) = (h^1(t), \ldots h^f(t))$ eine feste (glatte) Kurve mit $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ und

$$\xi(t,s) = \xi_0(t) + s\,\eta(t) = (q^1(t,s), \ldots q^f(t,s)) \qquad (5.3)$$

(mit s in Umgebung von $s=0$ so daß für alle t,s $L(\xi(t,s), \dot{\xi}(t,s), t)$ für $t_1 \leq t \leq t_2$ definiert ist)

Nach Voraussetzung ist

$$I(s) = \int_{t_1}^{t_2} L(\xi(t,s), \dot{\xi}(t,s), t)\, dt \qquad (5.4)$$

extremal für $s=0$. Sei $'$ die s-Ableitung. Dann verschwindet

$$I'(s) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^k} q^{k'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^{k'} \right\}(t,s) \qquad \text{für } s=0 \qquad (5.5)$$

Wegen $\xi(t_1,s)\equiv\alpha$, $\xi(t_2,s)\equiv\beta$ verschwindet

$$K(t,s)=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,q^{k\prime} \qquad (5.6)$$

für $t=t_1,t_2$ und daher gilt für alle s

$$0=\int_{t_1}^{t_2}dt\;\frac{\partial K}{\partial t}=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_{k=1}^{f}\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\right)q^{k\prime}+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\dot q^{k\prime}\right\} \qquad (5.7)$$

Subtraktion von (5.7) von (5.5) führt auf

$$I'(s=0)=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_{k=1}^{f}h^k(t)\,\frac{\delta L}{\delta q}\left(\xi_0(t),\dot\xi_0(t),t\right)=0 \qquad (5.8)$$

Da L glatt ist, ist $\frac{\delta L}{\delta q_k}$ stetig. Wenn (5.8) für jedes glatte η mit $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$ gilt, so ist $\frac{\delta L}{\delta q_k}=0$ auf der physikalischen Bahnkurve $\xi_0(t)$ und die Lagrange'schen Gleichungen sind notwendig für die Extremalität der Wirkung.

Bsp: Ein System von N Massenpunkten im $\mathbb{R}^3$ mit zeitabhängigen Kräften, die sich aus einem Potential $V(\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_N,t)$ ableiten, $\underline{F}_i=-\underline{\nabla}_i V$, hat eine Lagrangefunktion

$$L=T-V=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}|\dot{\underline{q}}_i|^2-V(\underline{q}_1\cdots\underline{q}_N,t) \qquad (5.9)$$

deren Lagrange'sche Gleichungen die Newton'sche implizieren

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}=m_k\ddot q_k\;,\quad \frac{\partial L}{\partial q_k}=-\frac{\partial V}{\partial q_k}=m_k\ddot q_k \qquad (5.10)$$

Hier hat I ein lokales Minimum (→ Gallavotti "Elements of Mechanics")

Bsp. Ein geladenes Teilchen der Ladung e und Masse m folgt bei kleinen Geschwindigkeiten in einem elektromagnetischen Feld dem Lorentz'schen Kraftgesetz:

$$m\ddot{\underline{q}}(t)=e\,\underline{E}(\underline{q}(t),t)+\frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}}(t)\wedge\underline{B}(\underline{q}(t),t) \qquad (5.11)$$

Aus der Elektrodynamik folgt, daß sich $\underline{E}$ und $\underline{B}$ aus einem skalaren und einem Vektorpotential herleiten:

$$\underline{B}(\underline{q},t)=\underline{\nabla}\wedge\underline{A}(\underline{q},t)\,,\quad E(\underline{q},t)=-\underline{\nabla}\varphi(\underline{q},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \qquad (5.12)$$

Daher erhält man (5.11) aus der Lagrange-Funktion

$$L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)=\frac{m}{2}|\dot{\underline{q}}|^2-e\,\varphi(\underline{q},t)+\frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(\underline{q},t) \qquad (5.13)$$

Denn:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot q^n}(\underline{q}(t),\dot{\underline{q}}(t),t)\right\} = m\ddot q^n(t) + \frac{e}{c}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A^n}{\partial q^k}(\underline{q}(t),t)\,\dot q^k(t) + \frac{e}{c}\frac{\partial A^n}{\partial t}(\underline{q}(t),t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^n}(\underline{q}(t),\dot{\underline{q}}(t),t) = -e\frac{\partial \varphi}{\partial q^n}(\underline{q}(t),t) + \frac{e}{c}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial A^k}{\partial q^n}(\underline{q}(t),t)\,\dot q^k(t) \qquad (5.14)$$

Die Lagrangefunktion (5.13) enthält explizit die Potentiale $\varphi, \underline{A}$ des elektromagnetischen Felder, während in die Bewegungsgleichungen nur die Feldstärken $\underline{E}, \underline{B}$ eingehen. Nun sind $\varphi, \underline{A}$ nicht eindeutig: ein anderes Paar $\varphi', \underline{A}'$ zum gleichen $\underline{E}, \underline{B}$ geht aus $\varphi, \underline{A}$ durch Eichtransformation hervor:

$$\underline{A}'(\underline{q},t) = \underline{A}(\underline{q},t) + \underline{\nabla} F(\underline{q},t), \quad \varphi'(\underline{q},t) = \varphi(\underline{q},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}F(\underline{q},t) \qquad (5.15)$$

mit einer beliebigen (glatten) Funktion F, wegen rot grad $= 0$ in (5.12). Es besteht daher kein 1-1-deutiger Zusammenhang zwischen L und der Bewegungsgleichung, doch gibt es ein einfaches Kriterium dafür, wann L und L' zu den gleichen Bewegungsgleichungen führen: sei $M(\xi,t)$ beliebig und

$$L = L' + L'', \quad L''(\xi,\dot\xi,t) = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial M}{\partial q^k}\dot q^k + \frac{\partial M}{\partial t} \qquad (5.16)$$

Dann gilt

$$\frac{\delta L''}{\delta q^k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial q^k} - \sum_{\ell=1}^{f}\frac{\partial^2 M}{\partial q^k\partial q^\ell}\dot q^\ell - \frac{\partial^2 M}{\partial q^k\partial t} = 0 \qquad (5.17)$$

und daher ist $\xi(t)$ genau dann Lösung von $\frac{\delta L}{\delta\xi} = 0$, wenn es Lösung von $\frac{\delta L'}{\delta\xi} = 0$ ist. z.B. sei $L' = L(\varphi', \underline{A}')$ analog zu (5.13) mit eichtransformierten Potentialen gebildet. Dann gilt

$$L(\varphi',\underline{A}') - L(\varphi,\underline{A}) = \frac{e}{c}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{e}{c}\,\dot{\underline{q}}\cdot\underline{\nabla}F \qquad (5.18)$$

b.) Struktur der Lagrange Gleichungen: Die Gleichungen sind unter beliebigen Diffeomorphismen des Konfigurationsraumes $\mathbb{R}^f$ forminvariant (im Sinne von § 4):

Sei $\xi = \Psi_t(\eta)$ mit $D\Psi_t(\eta)$ nichtsingulär und nach (4.18) $\dot\xi = D\Psi_t(\eta)\dot\eta + \partial_t\Psi_t(\eta)$ und zu $L(\xi,\dot\xi,t)$

$$L_\Psi(\eta,\dot\eta,t) = L(\Psi_t(\eta), D\Psi_t(\eta)\dot\eta + \partial_t\Psi_t(\eta), t) \qquad (5.19)$$

Dann gilt längs jeder Kurve $\eta(t) = \Psi_t^{-1}(\xi(t))$

$$\frac{\delta L_\Psi}{\delta \eta}(\eta(t),\dot\eta(t),t) = D\Psi_t(\eta(t))\,\frac{\delta L}{\delta \xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t) \tag{5.20}$$

und daher ist $\xi(t)$ Lösung der Lagrange'schen Gln zu L genau dann, wenn $\eta(t) = \Psi^{-1}(\xi(t))$ Lösung ist zu L_Ψ, was geometrisch evident ist, da ein Extremum koordinatenunabhängig ist. (5.20) besagt, dass sich die Eulersche Ableitung $\delta L/\delta\xi$ wie der Gradient einer Funktion transformiert: Sei $f_\Psi(\eta) = f\circ\Psi(\eta) = f(\Psi(\eta))$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f_\Psi}{\partial y^k}(\eta) = \sum_{\ell=1}^{f} \frac{\partial f}{\partial q^\ell}(\Psi(\eta))\,\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}(\eta) \Rightarrow \frac{\partial f_\Psi}{\partial \eta} = D\Psi(\eta)\,\frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{5.21}$$

Zum Beweis von (5.20) rechnen wir pedantisch in Komponenten:

$$\frac{\partial L_\Psi}{\partial y^k}(\eta,\dot\eta,t) = \sum_{\ell=1}^{f}\left\{\frac{\partial L}{\partial q^\ell}(\xi,\dot\xi,t)\,\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k} + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\ell}(\xi,\dot\xi,t)\,\frac{\partial \dot q^\ell}{\partial y^k}\right\}$$

$$\frac{\partial L_\Psi}{\partial \dot y^k}(\eta,\dot\eta,t) = \sum_{\ell=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\ell}(\xi,\dot\xi,t)\,\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}, \tag{5.22}$$

wegen $\dot q^\ell = \sum_{m=1}^{f}\frac{\partial q^\ell}{\partial y^m}(\eta,t)\dot y^m + \frac{\partial q^\ell}{\partial t}$. Auf der rechten Seite von (5.22) ist $\xi = \Psi_t(\eta)$ und $\dot\xi = D\Psi_t(\eta)\dot\eta + \partial_t\Psi_t(\eta)$ zu substituieren, so daß $\left(\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}\right) = D\Psi$, und ausgeschrieben gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\dot q^\ell\right)(\eta,\dot\eta,t) = \frac{\partial}{\partial y^k}\left\{\sum_{m=1}^{f}\frac{\partial q^\ell(\eta,t)}{\partial y^m}\dot y^m + \frac{\partial q^\ell(\eta,t)}{\partial t}\right\} \tag{5.23}$$

Sei jetzt $\eta(t)$ in (5.22) eine Kurve im Konfigurationsraum:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L_\Psi}{\partial \dot y^k}(\eta(t),\dot\eta(t),t)\right\} = \sum_{\ell=1}^{f}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\ell}(\xi(t),\dot\xi(t),t)\,\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}(\eta(t),t)\right\} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\ell}(\xi(t),\dot\xi(t),t)\right\}\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}(\eta(t),t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\ell}(\dots)\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}(\eta(t),t)\right\}\right] \tag{5.24}$$

und wegen (5.23) ist $\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}(\eta(t),t)\right\} = \frac{\partial \dot q^\ell}{\partial y^k}(\eta(t),\dot\eta(t),t)$. Ergo

$$\frac{\delta L_\Psi}{\delta y^k}(\eta(t),\dot\eta(t),t) = \sum_{\ell=1}^{f}\frac{\partial q^\ell}{\partial y^k}(\eta(t),t)\,\frac{\delta L}{\delta q^\ell}(\xi(t),\dot\xi(t),t) \tag{5.25}$$

Da $D\Psi_t$ nichtsingulär ist, ist $\frac{\delta L_\Psi}{\delta\eta}(\eta(t),\dot\eta(t),t)$ gleichbedeutend mit $\frac{\delta L}{\delta\xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t)$. Speziell erfüllt $\eta(t) = \Psi^{-1}(\xi(t))$ die gleiche Bewegungsgleichung wie $\xi(t)$, falls $L_\Psi(\eta,\dot\eta,t) = L(\eta,\dot\eta,t)$ ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn für ein N-Teilchen System $L(q_1..\dot q_N,t)$ translations- oder rotationsinvariant ist, d.h.

wenn $L(\underline{q}_1+\underline{a}, \dots \underline{q}_N+\underline{a}, \dot{\underline{q}}_1 \dots \dot{\underline{q}}_N, t) = L(\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 \dots \dot{\underline{q}}_N, t)$ oder $L(R\underline{q}_1, \dots R\underline{q}_N, R\dot{\underline{q}}_1 \dots R\dot{\underline{q}}_N, t) = L(\underline{q}_1 \dots \dot{\underline{q}}_N, t)$ gilt für alle $\underline{a}$ bzw. R; also z.B. für (5.9), falls

$$V(\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N, t) = \sum_{1 \le i < j \le 1} V_{ij}(|\underline{q}_i - \underline{q}_j|, t) \qquad (5.26)$$

In diesem Fall leiten sich die Lagrange'schen Gleichungen für $(\underline{q}_1(t), \dots \underline{q}_N(t))$ und $(R\underline{q}_1(t)+\underline{a}, \dots R\underline{q}_N(t)+\underline{a})$ aus der gleichen Lagrangefunktion (5.9) her (s. §4). Beim Übergang in ein Nichtinertialsystem ändert sich L zu L_φ, und das ist wesentlich einfacher als die Transformation (4.3) der Newton'schen Gln.

Ein weiterer Vorteil der Lagrange'schen Mechanik ist es, daß man der Lagrange-Funktion L gewisse (aber möglicherweise nicht alle!) Erhaltungssätze direkt ansehen kann:

<u>b.) Erhaltungssätze</u>. Eine Koordinate q^k eines Systems mit Lagrangefunktion $L(\xi, \dot{\xi}, t)$ heisst <u>zyklisch</u>, falls $\frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$. Dann folgt aus $\frac{\partial L}{\partial q^k}(\xi(t), \dot{\xi}(t), t) = 0$ für jede mechanische Bahn $\xi(t)$, daß längs $\xi(t)$ der zu q^k gehörige <u>kanonische Impuls</u>

$$p^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \qquad (5.27)$$

erhalten bleibt.

z.B. gilt für ein translationsinvariantes 2-Körperproblem,

$$L = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{q}}_i|^2 + V(\underline{q}_1 - \underline{q}_2) = \frac{M}{2}|\dot{\underline{Q}}| + \frac{\mu}{2}|\dot{\underline{q}}| + V(\underline{q}), \qquad (5.28)$$

nach Übergang in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten, daß $\frac{\partial L}{\partial Q^k} = 0$ ist für $k = 1, 2, 3$ und der totale Impuls

$$p^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^k} = M \dot{Q}_k \qquad (5.29)$$

erhalten bleibt. Ist $V(\underline{q})$ rotationsinvariant bei Drehungen um eine feste Achse $\underline{e}$, so führen wir Polarkoordinaten mit $\underline{e} = \underline{e}_3$ ein:

$$\begin{aligned} \underline{q} &= (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) = r\underline{e}_r \\ \dot{\underline{q}} &= \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\vartheta}\,\underline{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \\ \underline{e}_\vartheta &= (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta) \\ \underline{e}_\varphi &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \underline{e}_r \wedge \underline{e}_\vartheta \end{aligned} \qquad (5.30)$$

Dann gilt $V(\underline{q}) = V(r,\vartheta)$ und

$$|\dot{\underline{q}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \mu r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \underline{L}^{rel}\cdot\underline{e} \qquad (5.31)$$

Aus der Rotationsinvarianz von V um die $\underline{e}$-Achse folgt die Erhaltung des (relativen und totalen) Drehimpulses in der $\underline{e}$-Richtung.

Raumtranslationen oder -rotationen in eine Richtung oder um eine Achse $\underline{e}$ sind Beispiele von 1-parametrigen Gruppen von Diffeomorphismen Ψ_s des Konfigurationsraums

$$\Psi_s^1 : \underline{q}_k' = \underline{q}_k + s\underline{e}, \qquad \Psi_s^2 : \underline{q}_k' = R(\underline{e}, s)\,\underline{q}_k \qquad (5.32)$$

Definitionsgemäß erfüllen die Ψ_s die Flussrelationen (1.53) eines autonomen Systems (mit s als "Zeit")

$$\Psi_{s_1}\circ\Psi_{s_2} = \Psi_{s_1+s_2}, \quad \Psi_0 = 1, \quad \frac{d}{ds}\Psi_s = \Gamma\circ\Psi_s \qquad (5.33)$$

und Γ, das erzeugende Vektorfeld, und Ψ_s bestimmen sich eineindeutig über die Differentialgleichung $\dot{\xi} = \Gamma(\xi)$, $\Psi_t(\eta) = \xi(t,0,\eta)$. Der folgende Satz der Mathematikerin E. Noether verallgemeinert den in den obigen Beispielen beobachteten Zusammenhang zwischen der Invarianz von L unter 1-parametrigen Transformationsgruppen und Erhaltungssätzen:

Sei $L(\xi, \dot{\xi}, t)$ Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems und Ψ_s eine 1-parametrige Gruppe von Diffeomorphismen des Konfigurationsraumes mit

erzeugendem Vektorfeld Γ, die L invariant lässt:
$L_{\psi_s}(\xi,\dot{\xi},t) = L(\xi,\dot{\xi},t)$ für alle s. Dann bleibt

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(\xi,\dot{\xi},t)\,\Gamma^k(\xi) \equiv \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}, \Gamma \right\rangle(\xi,\dot{\xi},t) \qquad (5.34)$$

längs jeder mechanischen Bahn $\xi(t)$ erhalten.

Denn für jede Bahn $\xi(t)$ folgt aus $L_{\psi_s} = L$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} L(\psi_s(\xi(t)), D\psi_s(\xi(t))\dot{\xi}(t), t) = \qquad (5.35)$$
$$= \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial y^k}(\cdots)\frac{\partial y^k}{\partial s}(\cdots) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^k}(\cdots)\frac{\partial \dot{y}^k}{\partial s}(\cdots) \right\}$$

wobei $\eta = (y^1, \dots y^f)^T = \psi_s(\xi)$ sei und daher wegen (5.33) gilt

$$\frac{\partial y^k}{\partial s}(\cdots) = \frac{\partial}{\partial s}\psi_s^k(\xi(t)) = \Gamma^k(\psi_s(\xi(t)) \qquad (5.36)$$
$$\frac{\partial \dot{y}^k}{\partial s}(\cdots) = \frac{\partial}{\partial s}\left(D\psi_s(\xi(t))\dot{\xi}(t)\right)^k = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\psi_s^k(\xi(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k(\psi_s(\xi(t))$$

Weiter ist wegen der ψ_s-Invarianz von L mit $\xi(t)$ auch $\psi_s(\xi(t))$ Lösung der Bewegungsgleichungen mit gleichem L:

$$\frac{\partial L}{\partial y^k}(\psi_s(\xi(t)), D\psi_s(\xi(t))\dot{\xi}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^k}(\psi_s(\xi(t)), D\psi_s(\xi(t))\dot{\xi}(t), t) \right\} \qquad (5.37)$$

(5.36) und (5.37) eingesetzt in (5.35) ergeben

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^k}(\psi_s(\xi(t)), D\psi_s(\xi(t))\dot{\xi}(t), t)\,\Gamma^k(\psi_s(\xi(t)) \right\} \qquad (5.38)$$

und für $s = 0$ folgt die Behauptung.

Für die 1-parametrigen Gruppen ψ_s^1, ψ_s^2 in (5.32) folgt aus der Invarianz von (5.28) mit dem Noether'schen Satz wieder die Erhaltung der $\underline{e}$-Komponente des gesamten Impulses bzw. Drehimpulses:

$$\psi_s^1(\underline{Q},\underline{q}) = (\underline{Q} + s\underline{e}, \underline{q}) \Rightarrow \Gamma^1(\underline{Q},\underline{q}) = (\underline{e}, \underline{0})$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}, \Gamma^1\right) = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{Q}}}\cdot\underline{e} = M\underline{\dot{Q}}\cdot\underline{e} = \underline{P}\cdot\underline{e} \qquad (5.39)$$

$\psi^2(q_1,q_2) = (R(\underline{e},s)q_1, R(\underline{e},s)q_2)$ werten wir mit (4.25) aus und erhalten

$$\Gamma^2(\underline{q}_1,\underline{q}_2) = (\underline{e}\wedge\underline{q}_1, \underline{e}\wedge\underline{q}_2) \Rightarrow \langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}, \Gamma^2\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} m_i \dot{\underline{q}}_i \cdot (\underline{e}\wedge\underline{q}_i) = \underline{e}\cdot\sum_{i=1}^{2} m_i \underline{q}_i\wedge\dot{\underline{q}}_i = \underline{e}\cdot\underline{L} \quad (5.40)$$

Zwei Erhaltungssätze für abgeschlossene Systeme, der Schwerpunkts- und der Energiesatz, fallen erst in den Rahmen, wenn man Raum-Zeit Transformationen zulässt ($\rightarrow$ §9). Man erhält den

<u>Schwerpunktsatz</u> direkt für Lagrange-Funktionen

$$L(\underline{q}_1 \ldots \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1 \ldots \dot{\underline{q}}_N, t) = \frac{M}{2}|\dot{\underline{Q}}| + L_{rel}(\underline{q}_1-\underline{q}_2, \ldots \underline{q}_{N-1}-\underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1-\dot{\underline{q}}_2, \ldots \dot{\underline{q}}_{N-1}-\dot{\underline{q}}_N, t) \quad (5.41)$$

wo die Schwerpunktsbewegung $\underline{Q}(t) = \underline{P}_0 t/M + \underline{Q}_0$ die Integrale $\underline{P}(t) = \underline{P}_0$ und $\underline{Q}_0$ liefert. Den <u>Energiesatz</u> erhält man für Lagrange-Funktionen, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Für diese ist

$$H(\xi(t), \dot{\xi}(t)) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}^k(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(\xi(t), \dot{\xi}(t)) - L(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \quad (5.42)$$

ein Integral der Bewegung wegen (5.43)

$$\frac{d}{dt} H(\xi(t), \dot{\xi}(t)) = \langle \ddot{\xi}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\rangle + \langle \dot{\xi}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\rangle - \langle \dot{\xi}, \frac{\partial L}{\partial \xi}\rangle - \langle \ddot{\xi}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\rangle$$

Für

$$L = T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}|\dot{\underline{q}}_i|^2 - V(\underline{q}_1 \ldots \underline{q}_N) \quad (5.44)$$
$$\Rightarrow \underline{p}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}_k} = m_k \dot{\underline{q}}_k \Rightarrow H = T + V = \sum_{k=1}^{N} \frac{|\underline{p}_k|^2}{2m_k} + V(\underline{q}_1 \ldots \underline{q}_N)$$

ist H die Gesamtenergie. Für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld mit (5.13) ist der <u>kanonische</u> Impuls

$$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} = m\dot{\underline{q}} + \frac{e}{c}\underline{A}(\underline{q}, t) \quad (5.45)$$

nicht mehr der <u>kinematische</u> Impuls $m\dot{\underline{q}}$. In diesem Fall wird

$$H = \dot{\underline{q}}(m\dot{\underline{q}} + \frac{e}{c}\underline{A}) - \frac{m}{2}|\dot{\underline{q}}|^2 + e\varphi - \frac{e}{c}\underline{A}\cdot\dot{\underline{q}} = \frac{m}{2}|\dot{\underline{q}}|^2 + e\varphi(\underline{q}, t)$$
$$= \frac{1}{2m}(\underline{p} - \frac{e}{c}\underline{A}(\underline{q}, t))^2 + e\varphi(\underline{q}, t) \quad (5.46)$$

In zeitunabhängigen äusseren Feldern ist die erhaltene Größe die Summe von kinetischer Energie und der potentiellen Energie $e\varphi(q)$ im elektrostatischen Feld $\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi$. Das statische Magnetfeld ist "wattlos", da der Beitrag in der Lorentzkraft senkrecht auf $\underline{\dot q}$ steht

c.) Kanonische Gleichungen

In den Beispielen (5.44) und (5.46) haben wir H als Funktion von ξ und $\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}$ dargestellt. Der Übergang von $L(\xi,\dot\xi,t)$ nach $H(\xi,\pi,t)$ geschieht durch eine partielle Legendre-Transformation, deren analytische und geometrische Bedeutung wir zunächst für Funktionen einer Veränderlichen erklären wollen.

Sei $y = f(x)$, $p = \frac{df}{dx} = f'(x)$ und $f''(x) \neq 0$ und stetig. Dann existiert (lokal) $x = x(p)$ als Umkehrfunktion von $p = f'(x)$ und ebenso die Legendretransformierte ${}^L f(p)$ von $f(x)$:

$$f(x) \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} x f'(x) - f(x) \xrightarrow[\text{Umkehrung}]{} x(p)p - f(x(p)) = {}^L f(p) \qquad (5.47)$$

Zur geometrischen Interpretation von (5.47) nehmen wir an, f sei konvex, d.h. $f''(x) > 0$ (s. Fig. 5.2)

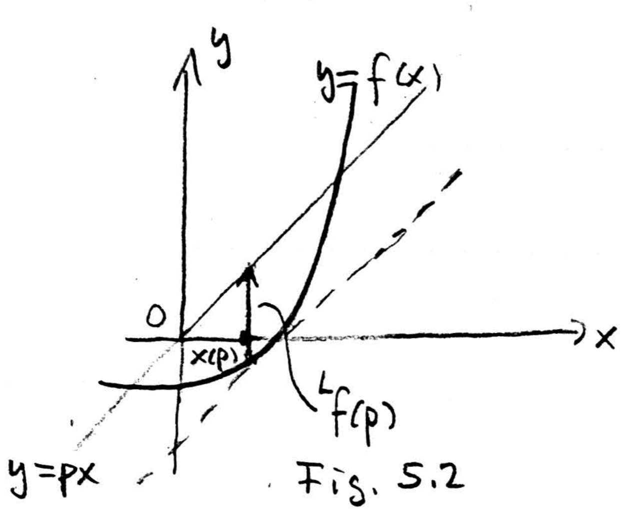


Fig. 5.2

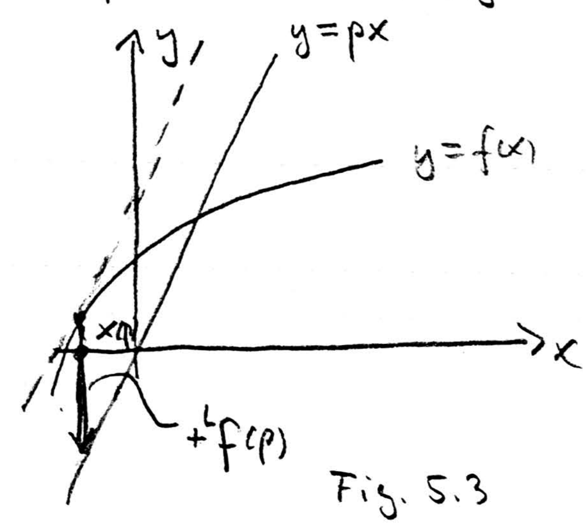


Fig. 5.3

In diesem Fall gibt es für alle $p \in \{f'(x)\}$ genau einen Abszissenwert $x(p)$, wo $px - f(x)$ maximal ist:

$${}^L f(p) = \max_x (px - f(x)) \qquad (5.48)$$

wegen $f'(x) = p$ für $x = x(p)$. Ist f <u>konkav</u>, d.h. $f''(x) < 0$, so gilt nach Fig. 5.2

$$^L f(p) = \min_x (px - f(x)) \qquad (5.49)$$

In der Thermodynamik werden Legendretransformierte von konvexen und konkaven Funktionen auch ohne Differenzierbarkeit durch (5.48) und (5.49) definiert und liefern eine geometrische Theorie der Phasenübergänge.

Für $f'' \neq 0$ existiert auch die zweifach Legendretransformierte ^{LL}f von f wegen

$$\frac{d\,^L f(p)}{dp} = x(p) + p\frac{dx(p)}{dp} - f'(x(p))\frac{dx(p)}{dp} = x(p)$$

$$\frac{d^2\,^L f(p)}{dp^2} = \frac{dx(p)}{dp} = \left(\frac{dp(x)}{dx}\right)^{-1}\Bigg|_{x=x(p)} = \left(f''(x(p))\right)^{-1} \qquad (5.50)$$

Falls f konvex (bzw. konkav) ist, so auch $^L f$, und

$$^{LL}f(x) = x\,p(x) - {}^L f(p(x)) = f(x) \qquad (5.51)$$

Die Zuordnung $f \longleftrightarrow {}^L f$ ist also eineindeutig mit $^{LL}f = f$. Für die partielle Legendretransformation einer Funktion von mehreren Veränderlichen $f(x^1, .. x^m, t^1 .. t^n)$ nehmen wir (neben Differenzierbarkeit) an, daß lokal

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0 \qquad (5.52)$$

Dann sind die Gleichungen (für $\pi = (p^1, .. p^m)$)

$$p^k = \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^1, .. x^m, t^1, .. t^n) \qquad 1 \leq k \leq m \qquad (5.53)$$

lokal eindeutig nach $\xi = (x^1, .. x^m)$ auflösbar: $x^k = x^k(\pi, \tau) = x^k(p^1, .. p^m, t^1, .. t^n)$ und es existiert die Legendretransformation

$$^L f(p^1, \dots p^m, t^1, .. t^n) = \sum_{k=1}^m p^k x^k(\pi, \tau) - f(\xi(\pi, \tau), \tau) \qquad (5.54)$$

Ferner gilt

$$\frac{\partial\,^L f}{\partial p^k} = x^k(\pi, \tau) \qquad \frac{\partial\,^L f}{\partial t^e} = -\frac{\partial f}{\partial t^e}(\xi(\pi, \tau), \tau) \qquad (5.55)$$

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2\,^L f}{\partial p^k \partial p^l}\right)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) = 1, \quad ^{LL}f(\xi, \tau) = f(\xi, \tau)$$

Der Beweis von (5.55) ist eine direkte Folge des Hauptsatzes über Umkehrfunktionen.

Für den Übergang von der Lagrange-Funktion $L(\xi,\dot\xi,t)$ zur Hamilton-Funktion $H(\xi,\pi,t)$ nehmen wir an, daß

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^i\partial\dot q^j}\right) \neq 0 \qquad (5.56)$$

Dies ist vernünftig für $L=T-V$ mit $V=V(\xi,t)$ und

$$T(\xi,\dot\xi)=\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le f} a_{ij}(\xi)\,\dot q^i\dot q^j \quad , \quad a_{ij}=a_{ji}\,, \qquad (5.57)$$

eine positiv definite quadratische Form. Dann ist

$$p^k=\frac{\partial L}{\partial\dot q^k} \qquad (5.58)$$

eindeutig nach $\dot\xi$ auflösbar, $\dot\xi=\dot\xi(\xi,\pi,t)$, und

$$H(\xi,\pi,t)=\sum_{k=1}^{f} p^k\dot q^k(\xi,\pi,t) - L(\xi,\dot\xi(\xi,\pi,t),t) \qquad (5.59)$$

z.B gilt für $L=T-V$ mit T nach (5.57)

$$\pi=\frac{\partial L}{\partial\dot\xi}=\frac{\partial T}{\partial\dot\xi}\;,\quad \langle\pi,\dot\xi\rangle = 2T \Rightarrow H=T+V \qquad (5.60)$$

wegen des Euler'schen Satzes über homogene Funktionen.

Sei $\xi(t)$ Lösung der Lagrange-Gleichungen, d.h. von dem System von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t)=\frac{\partial L}{\partial\xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t) \qquad \mathrm{Det}\frac{\partial^2L}{\partial\dot\xi^i\partial\dot\xi^j}\neq 0 \qquad (5.61)$$

Sei $\pi(t)=\frac{\partial L}{\partial\dot\xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t)$ und $H(\xi(t),\pi(t),t)=(\langle\dot\xi,\pi\rangle-L)(\xi(t),\pi(t),t)$. Dann gilt $\mathrm{Det}\frac{\partial^2 H}{\partial\pi^k\partial\pi^l}\neq 0$ und

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=\dot\xi(t)=\frac{\partial H}{\partial\pi}(\xi(t),\pi(t),t) \qquad (5.62)$$

und mit (5.61)

$$\frac{d\pi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t)=\frac{\partial L}{\partial\xi}(\xi(t),\dot\xi(t),t)=-\frac{\partial H}{\partial\xi}(\xi(t),\pi(t),t) \qquad (5.63)$$

Also ist $(\xi(t),\pi(t))$ Lösung von kanonischen Gleichungen 1. Ordnung mit Hamilton-Funktion H. Sei umgekehrt $(\xi(t),\pi(t))$ Lösung von kanonischen Gleichungen (5.61), (5.62) zu Hamiltonfunktion H mit

$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \pi^i \partial \pi^j}\right) \neq 0$. Sei $\dot{\xi}(t)$ durch (5.62) definiert und $\pi(t)$ eliminiert in $L = \langle \pi, \dot{\xi} \rangle - H$. Dann gilt nach (5.55) $\mathrm{Det}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\xi}^i \partial \dot{\xi}^j} \neq 0$ und

$$\pi(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t), t\right) \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t), t\right) = -\frac{\partial L}{\partial \xi}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t), t\right)$$

und (5.63) zeigt, daß $\xi(t)$ Lösung der Lagrange gleichungen (5.61) ist. Ergo:

Unter der Auflösbarkeitsbedingung $\mathrm{Det}\,\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0$ bzw $\mathrm{Det}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j} \neq 0$ ist <u>jedes Lagrange'sche mechanische System ein kanonisches mechanisches System</u>, wobei die <u>Lagrange</u> - und <u>Hamilton - Funktion</u> auseinander <u>durch Legendretransformation</u> hervorgehen. Die kanonischen Gleichungen sind zudem die Lagrange'schen Gleichungen für das Hamilton'sche Extremalprinzip im Phasenraum mit der "Lagrange-Fkt"

$$F(\xi, \dot{\xi}, \pi, \dot{\pi}, t) = \langle \pi, \dot{\xi} \rangle - H(\xi, \pi, t) \tag{5.65}$$

wegen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} = \frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \pi} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \pi} \tag{5.66}$$

Wir werden die kanonische Mechanik systematisch im § 9 untersuchen und hier nur den <u>Liouville'schen Satz</u> für die kanonische Strömung im Phasenraum der Variablen $\chi = (\xi, \pi)$ beweisen. In kompakter Form lauten die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\chi} = (\dot{\xi}, \dot{\pi}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi}, -\frac{\partial H}{\partial \xi}\right) \equiv \Gamma_t(\chi) \tag{5.67}$$

wobei das kanonische Vektorfeld divergenzfrei ist

$$\mathrm{div}\,\Gamma_t(\chi) = \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial \Gamma_t(\chi)}{\partial \chi^i} = \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \pi} - \frac{\partial^2 H}{\partial \pi \partial \xi} = 0 \tag{5.68}$$

Der Beweis von S. A8 kann direkt vom 3- zum

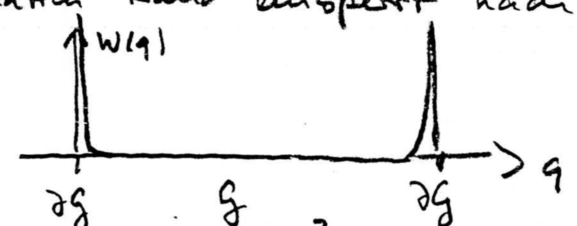
2f-dimensionalen Raum übertragen werden und zeigt, daß die kanonische Strömung Φ_{ts} im Phasenraum volumenerhaltend ist.

Poincaré'scher Wiederkehrsatz. Aus dem Liouville'schen Satz lässt sich die folgende allgemeine und paradoxe Folgerung ziehen: Wir betrachten ein konservatives N-Teilchensystem

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} |\dot{\underline{q}}_i|^2 - V(\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N) - \sum_{i=1}^{N} W(\underline{q}_i) \qquad (5.69)$$

V sei das (glatte und nach unten beschränkte) Wechselwirkungspotential zwischen den Teilchen und W ein Wandpotential, das die Teilchen in ein Gebiet G mit endlichem Volumen und glatten Rand einsperrt nach Fig. 5.4

Fig. 5.4



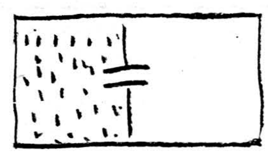


Fig. 5.5

Da die Energie $\sum\left(\frac{p_i^2}{2m_i} + W(q_i)\right) + V(q_1 \dots q_N) = H(\xi,\pi)$ erhalten bleibt, ist im Phasenraum die Menge

$$\mathcal{M} = \{(\xi,\pi) \mid H(\xi,\pi) < E\} \qquad (5.70)$$

unter der Zeitevolution Φ_t invariant und hat endliches Volumen. Sei $(\xi_1,\pi_1) \in \mathcal{M}$ ein beliebiger Anfangspunkt. Dann besagt der Poincaré'sche Wiederkehrsatz, daß es in jeder noch so kleinen Umgebung $\mathcal{U}$ von (ξ_1,π_1) einen Punkt (ξ_2,π_2) gibt, dessen Trajektorie $\Phi_t(\xi_2,\pi_2)$ zu einer späteren Zeit t_u wieder nach $\mathcal{U}$ kommt.

Denn nach dem Liouville'schen Satz ist Φ_1 volumenerhaltend. Daher haben alle Gebiete $\Phi_n(\mathcal{U})$ das gleiche Volumen >0, und sie können nicht disjunkt sein, da $\Phi_n(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$ und $\mathrm{Vol}\,\mathcal{M} < \infty$. Also gibt es $0 < m < n$ mit $\Phi_m(\mathcal{U}) \cap \Phi_n(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ und daher ein (ξ_2,π_2) mit $(\xi_2,\pi_2) \in \mathcal{U} \cap \Phi_{n-m}(\mathcal{U})$.

Diese Aussage scheint unserer Erfahrung über irreversible Ausgleichsprozesse zu widersprechen, wie in Fig 5.5, wo die Anfangskonfiguration (ξ_1, π_1) eines Gases im linken Teilgebiet sei und $\mathcal{U}$ so klein sei, daß dies auch für alle $(\xi_2, \pi_2) \in \mathcal{U}$ gelte. Man muss jedoch berücksichtigen, daß für makroskopische Prozesse die Wiederkehrzeiten weit grösser als das Weltalter sind.

In den folgenden Kapiteln werden wir viele physikalische Anwendungen diskutieren.

§ 6. Lineare Schwingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Lagrangefunktionen

$$L(\xi, \dot{\xi}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f} a_{kl}(\xi)\, \dot{q}^k \dot{q}^l - V(\xi, t) \qquad (6.1)$$

wo $V(\xi, t)$ in $\xi = 0$ ein lokales Minimum hat:

$$V(\xi, t) = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f} b_{kl}(t)\, q^k q^l + O(|\xi|^3) \qquad (6.2)$$

Die Matrizen $A = (a_{kl}(0))$ und $B(t) = (b_{kl}(t))$ seien positiv definit. In diesem Fall ist $\xi(t) = 0$ stationäre Lösung von $\frac{\delta L}{\delta \xi} = 0$ und für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage und kleine Zeiten ist die quadratische Approximation

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \sum a_{kl}(0)\, \dot{q}^k \dot{q}^l - \frac{1}{2} \sum b_{kl}(t)\, q^k q^l \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}, A \dot{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, B(t) \xi \rangle \end{aligned} \qquad (6.3)$$

relevant (o.E. $V_0 = 0$). Im autonomen Fall folgt aus dem Energiesatz, daß $\xi(t) = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage ist.

Wir werden L_2 als 'Karrikatur' für das nichtlineare System L studieren, und zwar in zwei wichtigen Spezialfällen: die kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage eines autonomen Systems, $\mathfrak{Z}(t) = \mathfrak{Z}$, und "parametrische Resonanzen" von "Schaukeln", wo $\mathfrak{Z}(t)$ eine periodische Funktion ist.

Es gibt stets eine orthogonale $f\times f$ Matrix $\mathcal{O}$, derart daß

$$\mathcal{O}^T \mathfrak{A} \mathcal{O} = \mathrm{Diag}(a_1, \cdots a_f) = \mathcal{D} \tag{6.4}$$

diagonal wird mit positiven Eigenwerten a_i von $\mathfrak{A}$. Nach der linearen Koordinatentransformation $\xi = \mathcal{O}\mathcal{D}^{-1/2}\eta$ hat L_2 die Normalform

$$L_2(\eta, \dot\eta, t) = \tfrac{1}{2}\langle \dot\eta, \dot\eta\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \eta, \mathfrak{T}(t)\eta\rangle \tag{6.5}$$

mit positiv definiten $\mathfrak{T}(t) = \mathcal{D}^{-1/2}\mathcal{O}^T\mathfrak{Z}(t)\mathcal{O}\mathcal{D}^{-1/2}$ und Bew.-Glen

$$\ddot\eta = -\mathfrak{T}(t)\eta \tag{6.6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot\zeta = \mathcal{Z}(t)\zeta \qquad \zeta = \begin{pmatrix}\eta\\ \dot\eta\end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}(t) = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ -\mathfrak{T}(t) & 0\end{pmatrix} \tag{6.7}$$

a.) <u>Kleine Schwingungen um Gleichgewichtslage</u>. Für $\mathfrak{T}(t) = \mathfrak{T}$ zeitunabhängig lässt sich die allg. Lösung von (6.7) in Matrixform darstellen:

$$\zeta(t) = e^{\mathcal{Z}t}\zeta(0) \qquad e^{\mathcal{Z}t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathcal{Z}^n \tag{6.8}$$

Die Flussabbildung ϕ_t im Phasenraum wird die lineare Abbildung $e^{\mathcal{Z}t}$ mit dem Kompositionsgesetz

$$\phi_t \circ \phi_s = e^{\mathcal{Z}t}e^{\mathcal{Z}s} = e^{\mathcal{Z}(t+s)} = \phi_{t+s} \tag{6.9}$$

Zur physikalischen Interpretation ist es zweckmässiger, auf (6.6) zurückzugehen. Es gibt eine orthogonale $f\times f$ Matrix $\mathfrak{U}$, die $\mathfrak{T}$ auf Diagonalform bringt:

$$\mathfrak{U}^T\mathfrak{T}\mathfrak{U} = \mathcal{E}^2, \quad \mathcal{E} = \mathrm{Diag}(\omega_1, \cdots \omega_f) \tag{6.10}$$

Die $\omega_i > 0$ heissen <u>Eigenfrequenzen</u> des Systems und die Koordinaten $\chi = \mathfrak{U}^T\eta = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_f\end{pmatrix}$ <u>Normalkoordinaten</u>. In den x_k wird (6.6) entkoppelt zu 1-dim harmonischen Oszillatoren:

$$\ddot x_k = -\omega_k^2 x_k \Rightarrow x_k(t) = a_k\cos(\omega_k t) + \frac{b_k}{\omega_k}\sin(\omega_k t) \tag{6.11}$$

Die ω_k^2 sind Nullstellen des <u>charakteristischen Polynoms</u> $\mathrm{Det}\,|\mathcal{L} - \lambda\mathfrak{A}|$, und die Entwicklung nach Normalkoordinaten liefert für jeden Anfangswert $\xi(0), \dot{\xi}(t)$:

$$\xi(t) = \mathcal{V}^{-1}\{\cos(\mathcal{E}t)\,\mathcal{V}\,\xi(0) + \mathcal{E}^{-1}\sin(\mathcal{E}t)\,\mathcal{V}\,\dot{\xi}(0)\}$$
$$\mathcal{V} = \mathfrak{U}^T \mathcal{D}^{1/2} \mathcal{O}^T \qquad (6.12)$$

Man sieht direkt aus (6.12), daß die Gleichgewichtslage $\xi(0) = \dot{\xi}(0) = 0$ in der linearen Approximation stabil ist. Das Hauptproblem bleibt die Berechnung der Matrix $\mathcal{V}$ und der Eigenfrequenzen ω_k, und dies soll in den folgenden Beispielen erläutert werden.

<u>Gekoppelte Pendel</u> Mit den Winkelkoordinaten q_1, q_2 der Fig. 6.1 gelte in linearer Approximation $(a>0)$

Fig. 6.1 

$$T = \frac{1}{2}[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] \qquad (6.13)$$
$$V = \frac{1}{2}[q_1^2 + q_2^2] + \frac{a}{4}[q^1 - q^2]^2$$

Die Transformation auf Normalkoordinaten ist trivial:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2)$$
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}[\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2] \qquad V = \frac{\omega_1^2}{2}Q_1^2 + \frac{\omega_2^2}{2}Q_2^2 \qquad (6.14)$$
$$\omega_1^2 = 1, \quad \omega_2^2 = 1 + a$$

In der Eigenschwingung mit $Q_2(0) = \dot{Q}_2(0) = 0$ schwingen beide Pendel gleichgerichtet mit der Frequenz $\omega_1 = 1$, während für $Q_1(0) = \dot{Q}_1(0) = 0$ die Schwingung entgegengesetzt gerichtet ist mit der größeren Frequenz $\omega_2 = \sqrt{1+a}$.
Die allgemeine Lösung (6.12) zeigt oft Schwebungen. Z.B. gilt für $q_1(0) = x$, $q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$: $Q_1(0) = Q_2(0) = x/\sqrt{2}$ und $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = 0$, also nach (6.11)

$$q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1(t) + Q_2(t)) = \frac{x}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = x\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\,\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$$
$$q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1(t) - Q_2(t)) = x\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\,\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \qquad (6.15)$$

Für kleine $a>0$ gilt $(\omega_1+\omega_2)/2 \approx 1$ und zur Zeit $\frac{a}{2}t \approx n\pi$,

$n \in \mathbb{Z}$ oszilliert praktisch nur das erste Pendel und für $\frac{a}{2}t \approx (n+\frac{1}{2})\pi$ nur das zweite

Die <u>lineare Kette</u> ist ein wichtiges Modell der Festkörperphysik für einen Kristall (dort 3-dim). Gegeben seien N Massenpunkte der Massen $m_1 \cdots m_N = 1$ mit Gleichgewichtslage $\bar{q}^1, \bar{q}^N$ und Auslenkungen $x^i = q^i - \bar{q}^i$. Die Wechselwirkung

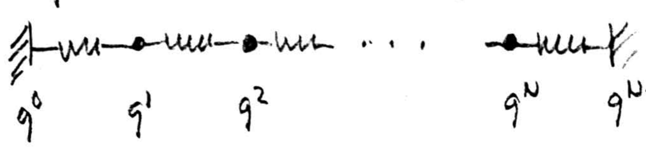


Fig. 6.2

von Fig. 6.2 mit festen Enden, $x^0 = q^0 - \bar{q}^0 = x^{N+1} = q^{N+1} - \bar{q}^{N+1} = 0$ habe

$$V(x^1, \cdots x^N) = V[\xi] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N} (x^n - x^{n+1})^2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}^n + 2x^n - x^{n-1} - x^{n+1} \qquad 1 \le n \le N \qquad (6.16)$$

$$x^0 = x^{N+1} = 0$$

(6.16) hat die Form $\ddot{\xi} = -C\xi$. Zur Bestimmung der Normalschwingungen lösen wir das <u>Eigenwertproblem</u>

$$C\xi = \lambda\xi \iff 2x^n - x^{n-1} - x^{n+1} = \lambda x^n \qquad (6.17)$$

Der Ansatz (den wir unten gruppentheoretisch begründen werden)

$$x^n = \operatorname{Im} z^n \quad , \quad z^n = e^{ikn} z^0 \qquad (6.18)$$

löst (6.17) für jedes $k \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda(k) = 2 - e^{-ik} - e^{ik} = 4\sin^2(k/2) \qquad (6.19)$$

Die Randbedingung $x^0 = 0$ ist erfüllt, falls $z^0 \in \mathbb{R}$, und $x^{N+1} = \sin k(N+1)\, z^0 = 0$ führt auf

$$k = \frac{m\pi}{N+1} \Rightarrow \omega(k) = \sqrt{\lambda(k)} = 2\sin\frac{m\pi}{2(N+1)} \equiv \omega_m \qquad (6.20)$$

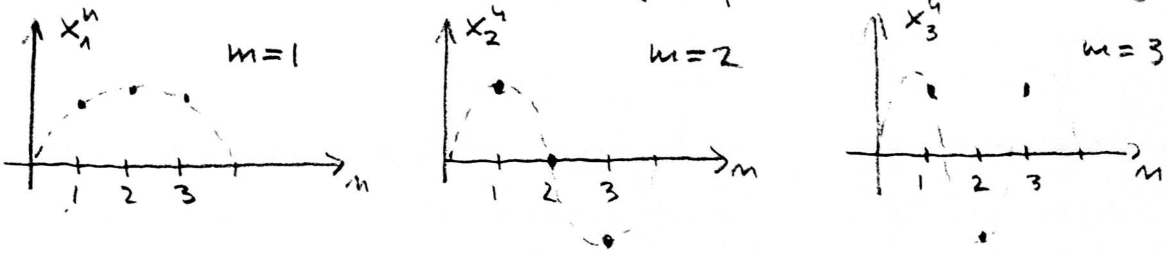
Nur die Werte $m = 1, \cdots N$ liefern verschiedene <u>Eigenvektoren</u>

$$\xi_m = (x_m^1, \cdots x_m^N) \quad , \quad x_m^n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{mn\pi}{N+1}$$

$$\langle \xi_m, \xi_{m'} \rangle \equiv \sum_{n=1}^{N} \xi_m^n \xi_{m'}^n = \delta_{mm'} \qquad (6.21)$$

Für $N = 3$ und $\omega_m = 2\sin(m\pi/8)$ gilt für die Normalschwingungen

Fig. 6.3



Zur Begründung von (6.18) und (6.21) untersuchen wir zuerst N+1 Massenpunkte auf einem "Kreisring", d.h. mit der zyklischen Randbedingung

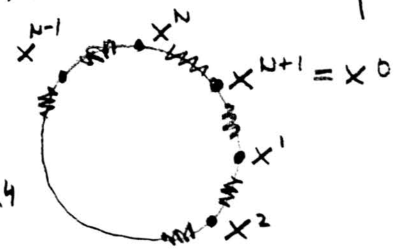


Fig. 6.4

$$x^0 = x^{N+1} \qquad (6.22)$$

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir periodisch fort: $x^n = x^{n+N+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Damit wird die Translation

$$T : \xi = (x^0, \dots x^N) \longrightarrow (x^{-1}, x^0, \dots x^{N-1}) = (x^N, x^0, \dots x^{N-1}) \qquad (6.23)$$

eine Operation auf den Konfigurationen der zyklischen Kette. Die Potenzen von T bilden eine endliche abelsche Gruppe der Elemente $T^0 = \mathbb{1}, T^1 = T, \dots T^N$ mit $T^{N+1+n} = T^n$. Aus (6.17) folgt

$$C\xi = 2\xi - T\xi - T^{-1}\xi \quad , \quad T^* = T^{-1} \qquad (6.24)$$

und daher ist der lineare Operator C bei zyklischer Randbedingung reelle Funktion des Translationsoperators. Deshalb ist jeder Eigenvektor ξ von T mit Eigenwert μ Eigenvektor von C mit Eigenwert $\lambda = 2 - \mu - \mu^{-1}$.
Das Eigenwertproblem für T im $\mathbb{C}^{N+1} \ni \zeta = (z^0, \dots z^N)$ mit Skalarprodukt $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} \bar{z}_1^n z_2^n$ wird durch "Gitterwellen" $\zeta(k) = (z(k)^0, \dots z(k)^N)$ gelöst:

$$z(k)^n = (N+1)^{-1/2} e^{ikn} \qquad T\zeta(k) = e^{-ik}\zeta(k) \qquad (6.25)$$

wobei die Randbedingung (6.22) die k-Werte einschränkt

$$k = k_m = \frac{2m\pi}{N+1} \quad , \quad m = 0, 1, \dots N \qquad (6.26)$$

Die $\zeta(k_m)$ sind orthonormiert wegen

$$\sum_{n=0}^{N} \exp i \frac{2\pi mn}{N+1} = \begin{cases} N+1 & \text{für } m = 0 \text{ modulo } N+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus (6.24) folgt $\lambda(k_m) = 4 \sin^2 \frac{k_m}{2}$. Während die Eigenvektoren von T komplexe Wellen sind, können die für C reell gewählt werden

$$C \, \mathrm{Re}\, \zeta(k) = 4 \sin^2 \frac{k}{2} \mathrm{Re}\, \zeta(k) \; , \; C \, \mathrm{Im}\, \zeta(k) = 4 \sin^2 \frac{k}{2} \mathrm{Im}\, \zeta(k) \qquad (6.27)$$

Die Eigenvektoren der linearen Kette der Fig. 6.2 sind spezielle Eigenvektoren einer zyklischen Kette von 2N+2

Elementen, denn jede Konfiguration $(x^0, \dots x^{2N+1})$ mit der Symmetriebedingung

$$x^0 = -x^0,\ x^1 = -x^{2N-1},\ \dots,\ x^N = -x^{N+2},\ x^{N+1} = -x^{N+1} \qquad (6.28)$$

entspricht genau einer Konfiguration $(x^0 = 0, x^1, \dots x^N, x^{N+1} = 0)$ für Fig. 6.2. Unter den (6.27) erfüllen die N verschiedenen nichttrivialen $\operatorname{Im} \zeta(k_m) \sim \sin \frac{2\pi mn}{2N+2}$, $m = 1, \dots N$, gerade die Antisymmetrie (6.28), während die $N+2$ verschiedenen $\operatorname{Re} \zeta(k_m) \sim \cos \frac{2\pi mn}{2N+2}$, $m = 0, 1, \dots N+1$, offenbar symmetrisch sind bezüglich der Spiegelung an der $0-(N+1)$-Achse. Mit dem gleichen Trick kann die halboffene und offene lineare Kette mit der 'Nächste-Nachbar-Wechselwirkung' (6.16) behandelt werden

Für zyklische lineare Ketten von $N+1$ Elementen heisst eine Wechselwirkung $\mathcal{C} = (C_{mn})$, $\ddot{x}^m + \sum_{n=0}^{N} C_{mn} x^n$, translationsinvariant, wenn $T\mathcal{C} = \mathcal{C}T$ gilt, oder gleichbedeutend, falls $C_{mn} = C(m-n)$ modulo $N+1$ gilt. Jede translationsinvariante Wechselwirkung $\mathcal{C}$ ist Funktion von T:

$$(\mathcal{C}\xi)^m = \sum_{n=0}^{N} C(n)\, x^{m-n} = \sum_{n=0}^{N} C(n) (T^n \xi)^m \qquad (6.29)$$

Daher ist $\mathcal{C}$ diagonal auf den Wellen $\zeta(k)$:

$$\mathcal{C}\, \zeta(k) = \sum_{n=0}^{N} C(n)\, T^n \zeta(k) = \Big\{ \sum_{n=0}^{N} C(n)\, e^{-ikn} \Big\} \zeta(k) \qquad (6.30)$$

Damit ist für zyklische Ketten beliebiger Länge und beliebiger translationsinvarianter Wechselwirkung das Problem der Normalschwingungen gelöst: die Eigenfrequenzen sind $\omega(k_m) = \Big(\sum_{n=0}^{N} C(n) e^{-ik_m n} \Big)^{1/2}$, $k_m = 2m\pi/N+1$, $m = 0, \dots N$ und die $\zeta(k_m)$ bilden eine Orthonormalbasis von Eigenschwingungen. Dieses Verfahren ist auf Kristallschwingungen anwendbar, da bei Vernachlässigung von Oberflächeneffekten die zyklische Randbedingung und Translationsinvarianz dort physikalisch gerechtfertigt sind.

b) <u>Nichtautonome lineare Systeme</u> haben Bewegungsgleichungen vom Typ (6.7). Ein lustiges Beispiel ist die Schaukel die durch ein Pendel periodisch variabler Länge $l(t)$ beschrieben sei. Mit $\omega^2(t) = g/l(t)$ und Periodendauer T gelte

$$\ddot{q} = -\omega^2(t)\, q \quad , \quad \omega(t+T) = \omega(T) \tag{6.31}$$

Interessant ist die Stabilität der Gleichgewichtslage $q=0$ (kein "Aufschaukeln")

Im 1-dim Fall kann die lineare nichtautonome Diff.Gl.

$$\dot{x}(t) = Z(t)\, x(t) \quad , \quad x(s) = y \tag{6.32}$$

elementar gelöst werden nach (2.2):

$$x(t) = \exp\left(\int_s^t d\tau\, Z(\tau) \right) y = P(t,s)\, y \tag{6.33}$$

und der Evolutionsoperator oder Propagator $P(t,s)$ auf dem $\mathbb{C}^1$ der Anfangsbedingungen y erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t,s) = Z(t)\, P(t,s)$$
$$P(t,s)P(s,r) = P(t,r) \quad , \quad P(s,s) = 1 \tag{6.34}$$

Mit $P(t,s)$ kann auch die linear inhomogene Gleichung gelöst werden

$$\dot{x}(t) = Z(t)\, x(t) + b(t) \quad , \quad x(s) = y$$
$$\Rightarrow \quad x(t) = P(t,s)\, y + \int_s^t d\tau\, P(t,\tau)\, b(\tau) \tag{6.35}$$

Im f-dim Fall ist die Lösungstheorie von (6.7) und der inhomogenen Gleichung $\dot{\zeta}(t) = Z(t)\zeta(t) + \beta(t)$ ähnlich: Die Differentialgleichung

$$\dot{\zeta}(t) = Z(t)\, \zeta(t) \quad , \quad \zeta(s) = \eta \tag{6.36}$$

ist äquivalent zur Integralgleichung

$$\zeta(t) = \eta + \int_s^t d\tau\, Z(\tau)\, \zeta(\tau) \tag{6.37}$$

und hat die iterative Lösung

$$\zeta(t) = P(t,s)\,\eta \qquad P(t,s) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t,s)$$
$$P_0(t,s) = \mathbb{1} \quad , \quad P_m(t,s) = \int_s^t d\tau_1 \cdots \int_s^{\tau_{m-1}} d\tau_m\, Z(\tau_1) \cdots Z(\tau_m) \tag{6.38}$$

wobei eine einfache Abschätzung die Konvergenz der Reihe (6.38) zeigt, falls $Z(\tau)$ stückweise stetig ist und $z = \sup \| Z(\tau) \| < \infty$, so daß $\| P_m(t,s) \| \le |t-s|\, z^m / m!$

gilt. Man beweist durch vollständige Induktion $\forall r, s, t$

$$P_m(t,r) = \sum_{k=0}^{m} P_k(t,s) P_{m-k}(s,r) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} P_m(t,s) = Z(t) P_{m-1}(t,s) \qquad (6.39)$$

Daher erfüllt der Evolutionsoperator (6.38) als 2-parametrige Familie von nichtsingulären linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^f$ auf $\mathbb{R}^f$ die Relationen (6.34), und (6.36) hat die Lösung $\zeta(t) = P(t,s)\eta \; (+ \int_s^t dr\, P(t,r)\beta(r)$ bei Inhomogenität$)$. $P(t,s)$ ist offenbar die Flussabbildung $\phi_{t,s}$ für (6.36).

Leider ist die iterative globale Lösung (6.38) ziemlich undurchsichtig. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, falls für alle t, s der Kommutator $[Z(t), Z(s)] = 0$ ist. Dann hat, wie für $f = 1$, $P(t,s)$ die geschlossene Form (6.33). Speziell gilt für autonome Systeme $Z(t) = Z$ und $P(t,s) = P(t-s) = \exp(t-s)Z$.

Ist das lineare Differentialgleichungssystem (6.36) Bewegungsgleichung eines kanonischen dynamischen Systems, speziell (6.7), so folgt aus dem Liouville'schen Satz

$$\operatorname{Det} P(t,s) \equiv 1 \iff \operatorname{Sp} Z(t) = \operatorname{div} \Gamma \equiv 0 \qquad (6.40)$$

wegen (5.68). (6.40) vereinfacht die Diskussion des Aufschaukelns, d.h. der <u>Stabilitätstheorie einer Gleichgewichtslage</u>: Hat $Z(t)$ die Periode T, wie in (6.31), so gilt für den zugehörigen Propagator für alle n:

$$P(t+nT, s+nT) = P(t,s) \qquad (6.41)$$

und damit für $t = nT + r$, $0 \le r < T$ mit $P(T,0) = P$

$$P(t,s) = P(nT+r, nT)P(nT,0)P(0,s) = P(r,0)P^n P(0,s) \qquad (6.42)$$

Ist $Z(t) = Z$ zeitunabhängig $(T=0)$, so wird dies zu

$$P(t,s) = e^{Z(t-s)} \qquad (6.43)$$

In beiden Fällen lassen sich mit sehr ähnlichen Methoden der linearen Algebra Aussagen über das Langzeitverhalten des Systems machen. <u>Stabilität</u> und <u>Instabilität</u> der Gleichgewichtslage $\zeta = 0$ für $\dot{\zeta} = Z(t)\zeta$ werden im § 1. definiert. $\zeta = 0$ heisst <u>asymptotisch stabil</u> für $t \to +\infty$, wenn alle Trajektorien $\zeta(t,s,\eta)$ für η aus einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 für $t \to +\infty$ gegen 0 streben.

Jede reelle $k \times k$ Matrix $\mathfrak{A}$ lässt sich durch eine nicht-singuläre Koordinatentransformation $\mathcal{L}$ des $\mathbb{C}^k$ auf <u>Jordan'sche Normalform</u>

$$\mathfrak{A} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{J} \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mathcal{J}_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{J}_s \end{pmatrix} \qquad (6.44)$$

transformieren. $\mathcal{J}_0$ ist diagonal mit Eigenwerten $l_1, \dots l_r$, wobei nicht reelle l_i in komplex konjugierten Paaren auftreten, und $\mathcal{J}_t$ ist eine $m(t) \times m(t)$ Matrix

$$\mathcal{J}_t = \lambda_{t+r} \mathbb{1}_{m(t)} + \mathcal{N}_t \qquad (6.45)$$

„nilpotent"

$$\mathcal{N}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}_t^0 = 1, \; \mathcal{N}_t^1 = \mathcal{N}_t, \dots \mathcal{N}_t^{m(t)} = 0$$

Die $l_1, \dots l_{r+s}$ sind nicht notwendig verschieden und sowohl $r=0$ als auch $s=0$ ist möglich. Die nicht reellen l_{t+r} kommen in komplex konjugierten Paaren $l_{t+r}, l_{t'+r} = \overline{l_{t+r}}$, vor mit $\mathcal{J}_t = \overline{\mathcal{J}_{t'}}$. Ein Eigenwert l von $\mathfrak{A}$ ist Wurzel des charakteristischen Polynoms, d.h. $\mathrm{Det}\,|\mathfrak{A} - l\mathbb{1}| = 0$. Ist seine Vielfachheit kleiner als die Anzahl von linear unabhängigen Eigenvektoren von $\mathfrak{A}$, so kommt l in einer der Nichtdiagonal-matrizen $\mathcal{J}_t$ vor.

Mit Hilfe der Jordan'schen Normalform von P und Z erhält man ein einfaches Kriterium für die Stabilität von $\zeta = 0$: gilt

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{A}_p \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{A}^n = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathfrak{A}_p^n \end{pmatrix}, \quad e^{\mathfrak{A}x} = \begin{pmatrix} e^{\mathfrak{A}_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\mathfrak{A}_n x} \end{pmatrix} \qquad (6.46)$$

kommutieren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{L}$, so gilt

$$[\mathfrak{A},\mathfrak{L}]=0 \Rightarrow (\mathfrak{A}+\mathfrak{L})^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mathfrak{A}^l \mathfrak{L}^{k-l} \qquad (6.47)$$
$$\Rightarrow \exp(\mathfrak{A}+\mathfrak{L})x = \exp(\mathfrak{A}x)\exp(\mathfrak{L}x)$$

Wegen (6.45) und $[\mathbb{1}_{m(t)}, \mathcal{N}_t]=0$ erhält man

$$e^{\mathfrak{A}x} = \mathfrak{L}^{-1}\begin{pmatrix} e^{J_0 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_s x}\end{pmatrix}\mathfrak{L}$$

$$\exp J_0 x = \mathrm{Diag}\,[e^{l_1 x}, \dots, e^{l_r x}] \qquad (6.48)$$
$$\exp J_t x = e^{l_{t+r} x}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & & x & 1\end{pmatrix}, \qquad m = m(t)$$

Daher ist im autonomen linearen System $\dot{\zeta} = \mathfrak{L}\zeta$ 0 asymptotisch stabil für $t\to+\infty$, falls für alle Eigenwerte l von $\mathfrak{L}$ $\mathrm{Re}\, l<0$ gilt. 0 ist stabil für $t\to+\infty$, falls immer $\mathrm{Re}\, l \le 0$ gilt und falls für jede Wurzel l von $\mathrm{Det}\,|\mathfrak{L}-l\mathbb{1}|=0$ mit $\mathrm{Re}\, l=0$ die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren gleich der Vielfachheit der Wurzel ist. Andernfalls ist 0 instabil.

Wegen

$$J_t^n = \sum_{k=0}^{m(t)} \binom{n}{k} l^{n-k} \mathcal{N}_t^k \qquad \text{für } n \ge m(t) \qquad (6.49)$$

folgt analog für den Propagator $P(t,s)$ eines nichtautonomen periodischen Systems aus der Jordan'schen Normalform für P in (6.42) die asymptotische Stabilität von 0 für $t\to+\infty$, falls alle Eigenwerte l von P $|l|<1$ haben, exponentielle Instabilität, falls ein Eigenwert den Betrag >1 hat und Stabilität, falls immer $|l|\le 1$ gilt und für die l mit $|l|=1$ das obige Vielfachheitskriterium erfüllt ist

Leider ist oft dieses Stabilitätskriterium für explizite Rechnungen ungeeignet, da der Evolutionsoperator $P = P(T,0)$ nur durch eine unendliche Reihe gegeben ist. Für die parametrische Resonanz oder Aufschaukelung eines harmonischen Systems mit einem Freiheitsgrad (und zweidim. Phasenraum) gilt wegen (6.40) für das charakteristische Polynom

$$\mathrm{Det}\,|P - \ell \mathbb{1}| = \ell^2 - \ell\,\mathrm{Sp}\,P + 1$$
$$\Rightarrow \ell_{1,2} = + \frac{\mathrm{Sp}P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}P}{2}\right)^2 - 1} \tag{6.50}$$

und die Eigenwerte ℓ_i sind reell und $\neq \pm 1$ für $|\mathrm{Sp}P| > 2$ und dies liefert wegen $\ell_1 \cdot \ell_2 = 1$ exponentielle Instabilität für $t \to \pm\infty$, und $|\mathrm{Sp}P| < 2$ liefert konjugiert komplexe Eigenwerte ℓ_i mit $|\ell_i| = 1$ und daher Stabilität von $\zeta = 0$ für $t \to \pm\infty$

Das folgende Beispiel einer periodischen Folge von elliptischen und hyperbolisch harmonischen Oszillatoren ist eine Idealisierung für die Kräfte auf ein geladenes Teilchen in einem Beschleuniger mit alternierendem Feldgradienten. Gesucht sind Lösungen $x(t)$ des stückweise autonomen periodischen Systems:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) &= 0 \qquad \text{für } nT \le t < nT + S, \\ \ddot{x}(t) - \omega_2^2 x(t) &= 0 \qquad \text{für } nT + S \le t < (n+1)T, \end{aligned}\right\} n \in \mathbb{Z} \tag{6.51}$$

Zur Berechnung von P: Die allgemeine Lösung $x(t) = x(0)\cos\omega_1 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_1}\sin\omega_1 t$ der ersten Gleichung liefert

$$\begin{pmatrix} x(S) \\ \dot{x}(S) \end{pmatrix} = P(S,0)\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1, & \omega_1^{-1}\sin\varphi_1 \\ -\omega_1\sin\varphi_1, & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \omega_1 S,$$
$$P(T,S) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\varphi_2, & \omega_2^{-1}\,\mathrm{sh}\,\varphi_2 \\ \omega_2\,\mathrm{sh}\,\varphi_2, & \mathrm{ch}\,\varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \omega_2(T-S) \tag{6.52}$$

und daher für $P = P(T,0) = P(T,S)\,P(S,0)$:

$$\mathrm{Sp}\,P = 2\cos\varphi_1\,\mathrm{ch}\,\varphi_2 + \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_1\omega_2}\sin\varphi_1\,\mathrm{sh}\,\varphi_2 \qquad (6.53)$$

Für $S = T/2$ ist in Fig 6.5 das Stabilitätsgebiet $|\mathrm{Sp}\,P| < 2$ schraffiert gezeichnet:

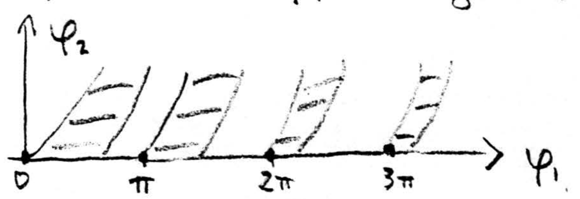


Fig. 6.5

Denn für $\varphi_2^2 \ll \varphi_1^2$ wird (6.53) approximativ $2\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1$ und dies gibt Fig. 6.5. in der Umgebung der φ_1-Achse, ausser für $(\varphi_1,\varphi_2)\approx(0,0)$. Gerade dieser Fall ist jedoch interessant für die Schwingung eines Pendels um die (im autonomen Fall instabile) obere Gleichgewichtslage mit vertikal oszillierendem Aufhängepunkt:

Es gelte Fig. 6.6 mit l der Pendellänge, $a \ll l$ der Amplitude und S der Halbperiode der Schwingung des Aufhängepunktes 0, der in den Zeiten $0<t<S$ die Beschleunigung $-c$ und für $S<t<2S$ die Beschleunigung $+c$ haben soll, also stückweise parabolisch schwingt mit $c = 8a/S^2$:

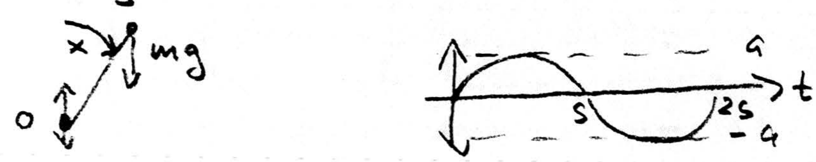


Fig 6.6

Für kleine x ist die Dynamik des Massenpunktes durch

$$\ddot{x} = \frac{g(t)}{l}\,x \qquad (6.54)$$

beschrieben mit

$$g(t) = \begin{cases} g-c & 2nS < t < (2n+1)S \\ g+c & (2n+1)S < t < (2n+2)S \end{cases} \qquad (6.55)$$

Wir wollen zeigen, daß für festes a und l, wobei wir $a \ll l$ voraussetzen, die obere Gleichgewichtslage für alle hinreichend raschen vertikalen Oszillationen stabil ist. Wir betrachten also den Wertebereich

$$\frac{a}{\ell} \equiv \varepsilon^2 \ll 1 \quad , \qquad \frac{g}{c} \equiv \mu^2 \ll 1 \tag{6.56}$$

Der Propagator $P = P(2S, 0)$ für (6.54) ist für $c > g$ durch (6.52) gegeben mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \omega_1 S &= \sqrt{\frac{c-g}{\ell}}\, S = \left(\frac{c}{\ell}\left(1 - \frac{g}{c}\right)\right)^{1/2} S = \sqrt{8}\, \varepsilon \sqrt{1-\mu^2} \\ \varphi_2 = \omega_2 S &= \sqrt{\frac{c+g}{\ell}}\, S = \sqrt{8}\, \varepsilon \sqrt{1+\mu^2} \end{aligned} \tag{6.57}$$

Wir untersuchen die Stabilitätsbedingung $\operatorname{Sp} P < 2$ im Bereich (6.56) (d.h. $\varphi_1 \downarrow 0$, $\varphi_2 \downarrow 0$) und entwickeln

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1 \omega_2} &= \left(\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2} - \left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right)^{1/2} = 2\mu^2 + O(\mu^4) \\ \cos \omega_1 S &= 1 - 4\varepsilon^2(1-\mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4 + \mu^4) \\ \operatorname{ch} \omega_2 S &= 1 + 4\varepsilon^2(1+\mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4 + \mu^4) \end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1 \omega_2} \sin(\omega_1 S)\, \operatorname{sh}(\omega_2 S) = 16\varepsilon^2\mu^2 + o(\varepsilon^4 + \mu^4)$$

Bei Vernachlässigung von Termen $o(\varepsilon^4 + \mu^4)$ wird

$$\operatorname{Sp} P = 2\left(1 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\mu^2\right) + 16\varepsilon^2\mu^2 < 2 \tag{6.59}$$

für

$$\mu < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad S^2 < \frac{8a^2}{3\ell g} \tag{6.60}$$

Für $\ell = 20$ cm und $a = 1$ cm hat man Stabilität für alle Frequenzen oberhalb von 50 Hz.

Für die harmonische Schaukel

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0 \qquad \omega^2(t) = a - b\cos 2t \tag{6.61}$$

erhält man die Mathieu'sche Differentialgleichung, über die ganze mathematische Lehrbücher existieren. Der Bereich der Werte von a und b, für die $x = 0$ stabil ist, ist in Fig. 6.7. schraffiert skizziert:

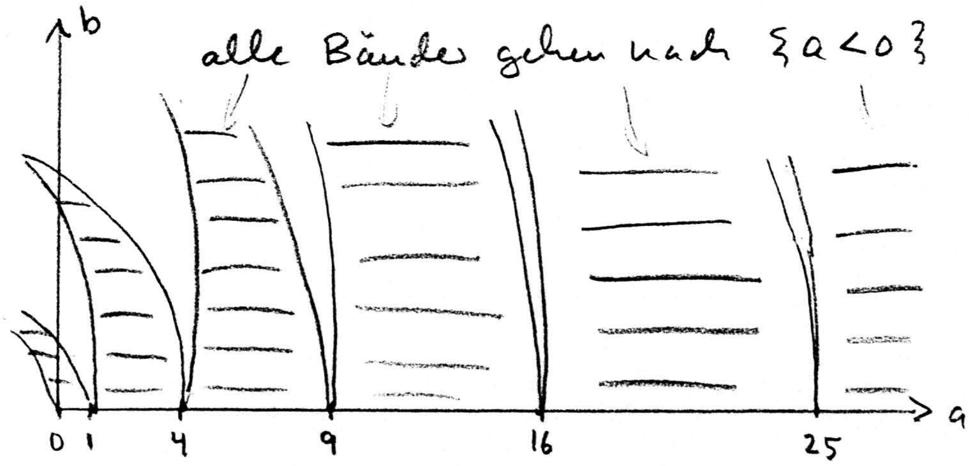


Fig. 6.7.

Bei festem a/b und wachsendem a wechseln sich Stabilität und Instabilität ∞-oft ab. $w^2(t)$ ist positiv für $a > b$ und dennoch kann eine Verstärkung der rücktreibenden Kraft, z.B. $w^2(t) \to \lambda w^2(t)$, für beliebig große λ destabilisierend wirken! Für $a < 0$ ist der autonome Fall $b = 0$ erwartungsgemäß instabil. Für $a \geq 0$ ist das Verhalten für $b \to 0$ im Buch von Arnold diskutiert. Für jedes reelle a gibt es unendlich viele stabile b-Bänder und umgekehrt.

"Quantenschaukel": Elektronen im Potential $V(x) = V(x+T)$ eines 1-dim. Kristalls werden "quantenmechanisch geschaukelt". Denn löst man die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) \qquad (6.62)$$

mit dem Ansatz $\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\chi(x)$, so erhält man für χ eine Hill'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\right)\chi(x) = 0 \qquad (6.63)$$

Nur in bestimmten E-Intervallen (den "Energiebändern" des Kristalls, die auch in 3 Dimensionen auftreten) hat (6.63) beschränkte Lösungen für $x \to \pm\infty$, und dieses quantenmechanische Phänomen ist für die Festkörperphysik von großer Bedeutung.

§7. Starrer Körper

a) Kinematik. Ein Modell eines starren Körpers sind N Massenpunkte (mindestens 3 nicht kollinear) mit Massen $m_1, \dots m_N$ am Orte $q_1, \dots q_N$ und Zwangsbedingungen $|q_i - q_k| = l_{ik}$. Sei $\underline{Q} = M^{-1}\sum q_i$ mit $M = \sum m_i$ die Schwerpunktskoordinate und $\underline{x}_i = q_i - \underline{Q}$ Relativkoordinaten. Sei $'K$ ein körperfestes Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt. Dann gilt $\underline{x}_i = R\,'\underline{x}_i$ mit festen $'\underline{x}_1, \dots '\underline{x}_N$ und $R \in SO(3)$ (o.E.). Die Koordinaten $(\underline{Q}, R) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ charakterisieren nach Anhang C genau die Konfiguration des starren Körpers, dessen inneres Aufbau durch $(m_1, '\underline{x}_1, \dots m_N, '\underline{x}_N)$ gegeben ist. Für jede Trajektorie $(\underline{Q}(t), R(t))$ gilt nach (4.21)

$$\dot{\underline{q}}_k(t) = \dot{\underline{Q}}(t) + \underline{\omega}(t) \wedge R(t)\,'\underline{x}_k = \dot{\underline{Q}}(t) + R(t)\,('\underline{\omega}(t) \wedge '\underline{x}_k) \qquad (7.1)$$

Verschiebt man den Ursprung von $'K$ um $'\underline{a}$ mit $'\dot{\underline{a}} = 0$, so gilt $'\underline{x}_k = ''\underline{x}_k + \underline{a}$ und

$$\dot{\underline{q}}_k(t) = [\,\dot{\underline{Q}}(t) + \underline{\omega}(t) \wedge R(t)\,'\underline{a}\,] + \underline{\omega}(t) \wedge R(t)\,''\underline{x}_k \qquad (7.2)$$

Zu jeder Zeit t kann man durch geeignete Wahl von $''K$ erreichen, daß $\dot{\underline{Q}} + \underline{\omega} \wedge R\,'\underline{a}$ nur eine Komponente parallel zu $\underline{\omega}$ hat. Dies liefert das Resultat von Euler und Chasles, daß der allgemeinste Bewegungszustand eines starren Körpers eine Schraubenbewegung ist: eine Rotation um eine Achse und eine Translation parallel zu dieser Achse.

Der Drehimpuls $\underline{L}$ ist die Summe der Drehimpulse $\underline{L}_S$ der Schwerpunkts- und $\underline{L}_r$ der Relativbewegung:

$$\underline{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k\, \underline{q}_k \wedge \dot{\underline{q}}_k = M\,\underline{Q} \wedge \dot{\underline{Q}} + \sum_{k=1}^{N} m_k\, \underline{x}_k \wedge \dot{\underline{x}}_k \qquad (7.3)$$

$$\underline{L}_r = \sum_{k=1}^{N} m_k\, \underline{x}_k \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{x}_k) = R\,'\underline{L}_r = R \sum_{k=1}^{N} m_k\, '\underline{x}_k \wedge ('\underline{\omega} \wedge '\underline{x}_k)$$

$\underline{L}_r$ und $'\underline{L}_r$, der relative Drehimpuls im KF-System, sind linear in $\underline{\omega}$ und $'\underline{\omega}$. Dieser Zusammenhang lässt sich mit dem <u>Trägheitstensor</u> J und $'J$ im RF- und KF-System ausdrücken. J und $'J$ sind 3×3 Matrizen mit Elementen

$$I^{kl} = \sum_{n=1}^{N} m_n \{ \|\underline{x}_n\|^2 \delta^{kl} - x_n^k x_n^l \}$$
$$'I^{kl} = \sum_{n=1}^{N} m_n \{ \|'\underline{x}_n\|^2 \delta^{kl} - 'x_n^k \, 'x_n^l \} \qquad (7.4)$$

Dann gilt, wenn $(R'\underline{x})^k = \sum_{l=1}^{3} R^{kl}\,'x^l$ die Matrix der Rotation vom KF- ins RF-System ist,

$$I^{kl} = \sum_{m,n=1}^{3} R^{km} R^{ln}\,'I^{mn}. \qquad (7.5)$$

Dieses *Tensortransformationsgesetz* erspart uns die Mühe, J in einem rotierten Koordinatensystem durch N-fache Summe ($N \sim 10^{23}$!) zu berechnen, wenn uns 'J bekannt ist. In Matrixform bedeutet (7.5)

$$J = R\,'J R^T = R J R^{-1} \qquad (7.6)$$

und (7.3) liefert mit $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$

$$L_r^k = \sum_{l=1}^{3} I^{kl} w^l \Leftrightarrow \underline{L}_r = J\,\underline{w} \qquad (7.7)$$
$$'L_r^k = \sum_{l=1}^{3} 'I^{kl}\,'w^l \Leftrightarrow '\underline{L}_r = 'J\,'\underline{w}$$

Die Komponenten I^{kl} und $'I^{kl}$ heissen *Trägheitsmomente*. J ist zeitlich veränderlich, $J(t) = R(t)\,'J\,R(t)^T$, während 'J konstant ist und, wie die Masse M, eine innere Eigenschaft des starren Körpers ist.

Erschwerend für die analytische Theorie des starren Körpers ist, daß $'\underline{L}_r$ im allgemeinen nicht parallel zu $'\underline{w}$ ist. Als reelle symmetrische Matrix lässt sich 'J stets durch eine zeitunabhängige Rotation 'R auf Diagonalform transformieren:

$$'J = 'R \begin{pmatrix} 'I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 'I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 'I_3 \end{pmatrix} 'R^T \qquad (7.8)$$

Die Eigenvektoren zu den *Hauptträgheitsmomenten* $'I_k$ heissen *Hauptträgheitsachsen*. Zeigt $'\underline{w}$ in eine dieser Richtungen, dann ist $'\underline{L}_r$ parallel zu $'\underline{w}$. Fortan werden wir das KF-System so wählen, daß 'J diagonal ist. Ein starrer Körper heisst *unsymmetrisch*, falls $'I_k \neq 'I_l$ für alle $k \neq l$ und sonst *symmetrisch*. Man sieht leicht, daß, wenn der Körper eine Symmetrieebene E hat, der

Schwerpunkt und 2 Hauptträgheitsachsen in E liegen. Hat der Körper eine diskrete oder kontinuierliche Symmetrieachse A, so liegen der Schwerpunkt und eine Hauptträgheitsachse auf A. Ist A mehr als 2-zählig, so ist der Körper symmetrisch. Für eine Kugel und einen Würfel gilt daher $'I_1 = 'I_2 = 'I_3$. Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Massendichte $'m('\underline{x})$ im kF-System liefert ein Grenzübergang

$$'J^{kl} = \int d^3'x \; 'm('\underline{x}) \{ \|'\underline{x}\|^2 \delta^{kl} - 'x^k 'x^l \} \qquad (7.9)$$

Es gelten Dreiecksungleichungen, $'J^{11} + 'J^{22} \geq 'J^{33}$ (zykl.), und $'J^{kk} = 0$ ist bei kollinearer Massenverteilung möglich.

Für die kinetische Energie T des starren Körpers gilt

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} |\dot{q}_k|^2 = \frac{M}{2} |\dot{\underline{Q}}|^2 + T_r$$

$$T_r = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} |\underline{\omega} \wedge \underline{x}_k|^2 = \frac{1}{2} \langle \underline{\omega}, J\underline{\omega} \rangle = \frac{1}{2} \langle '\underline{\omega}, 'J'\underline{\omega} \rangle = 'T_r \qquad (7.10)$$

$$\Rightarrow \underline{L}_r = \frac{\partial T_r}{\partial \underline{\omega}}, \quad '\underline{L}_r = \frac{\partial 'T_r}{\partial '\underline{\omega}} \qquad (7.11)$$

6.) <u>Newton-Euler Dynamik</u>. Zur Herleitung der Bewegungsgln. nehmen wir an, daß die Zwangsbedingungen $|q_k - q_l| = l_{kl}$ durch unendlich starke 2-Körperkräfte realisiert werden, die dem Reaktionsprinzip genügen. Zusätzlich wirke auf den k-ten Massenpunkt eine äussere Kraft $\underline{F}_k$, die bei bei festem $'x_1, \dots 'x_N$ nur eine Funktion von $\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, R, \dot{R}$ und t ist. Dann folgt aus den Newton'schen Gleichungen

$$M\ddot{\underline{Q}} = \underline{F}, \quad \dot{\underline{L}} = \underline{D}$$

$$\underline{F}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, R, \dot{R}, t) = \sum \underline{F}_k, \quad \underline{D}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, R, \dot{R}, t) = \sum q_k \wedge \underline{F}_k \qquad (7.12)$$

$\underline{F}$ ist die Vektorsumme der äusseren Kräfte und $\underline{D}$ deren Drehmoment. Die zweite Gleichung kann ersetzt werden durch

$$\dot{\underline{L}}_r = \underline{D}_r, \quad \underline{D}_r = \sum \underline{x}_k \wedge \underline{F}_k \qquad (7.13)$$

(7.13) liefert mit (7.7) die <u>Euler'schen Gleichungen</u>:

$$\dot{\underline{L}}_r = \frac{d}{dt} J \underline{\omega} = \dot{J} \underline{\omega} + J \dot{\underline{\omega}}$$

$$\dot{J} = \frac{d}{dt} R\, {}'J R^T = \dot{R}\, {}'J R^T + R\, {}'J \dot{R}^T = \Omega J - J \Omega$$

$$\Omega \underline{\omega} = \underline{\omega} \wedge \underline{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{L}}_r = J \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \underline{L}_r = \underline{D}_r \qquad (7.14)$$

Man wendet R^{-1} auf (7.14) an und berücksichtigt, daß $\dot{\underline{\omega}} = \frac{d}{dt} R\, {}'\underline{\omega} = R\, {}'\dot{\underline{\omega}} + R\, \cancel{{}'\underline{\omega} \wedge {}'\underline{\omega}}$ gilt und ${}'\underline{D}_r = R^{-1} \underline{D}_r$:

$$R^{-1}(J R\, {}'\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \underline{L}_r) = {}'J\, {}'\dot{\underline{\omega}} + {}'\underline{\omega} \wedge {}'\underline{L}_r = {}'\underline{D}_r \qquad (7.15)$$

Da ${}'\underline{\omega}$ schon die ersten Zeitableitungen der Parameter der Rotationsgruppe enthält ($\rightarrow$ (C13)), liefert (7.12) 6 Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Zeitevolution der 6 Parameter $(\underline{Q}, R)$, die die Konfiguration eines starren Körpers bestimmen. Die Differentialgleichung $M \ddot{\underline{Q}} = \underline{F}$ für die Schwerpunktsbewegung und die Euler'schen Gleichungen (7.15), in Komponenten

$${}'J_1\, {}'\dot{\omega}^1 + ({}'J_3 - {}'J_2)\, {}'\omega^2\, {}'\omega^3 = {}'D_r^1 \quad (\text{zykl}), \qquad (7.16)$$

sind die <u>Bewegungsgleichungen des starren Körpers</u>.

Damit der Drehimpulssatz in der Form (7.3) gilt, braucht man der Schwerpunktsbewegung keinerlei Bedingungen aufzuerlegen. Wählt man jedoch, wie z.B. für einen Kreisel mit festem Auflagepunkt (s.u.), einen anderen Ursprung $\underline{a}$ für das körperfeste System, so ist die Bedingung $\ddot{\underline{a}} = \underline{0}$ nützlich:

$$\underline{q}_k = \tilde{\underline{x}}_k + \underline{a} \;, \quad \tilde{\underline{L}}_r = \sum m_k\, \tilde{\underline{x}}_k \wedge \dot{\tilde{\underline{x}}}_k \;, \quad \tilde{\underline{D}}_r = \sum \tilde{\underline{x}}_k \wedge \underline{F}_k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L} = \frac{d}{dt} \tilde{\underline{L}}_r + \underline{a} \wedge M \ddot{\underline{Q}}$$

$$\underline{D} = \sum \tilde{\underline{x}}_k \wedge \underline{F}_k + \underline{a} \wedge \sum \underline{F}_k = \tilde{\underline{D}}_r + \underline{a} \wedge \underline{F}$$

und es gelten wieder Euler'sche Gleichungen, d.h. $\dot{\tilde{\underline{L}}}_r = \tilde{\underline{D}}_r$, allerdings mit einem Trägheitstensor $\tilde{J}$, der mit J über den <u>Steiner'schen Satz</u> verknüpft ist:

$$\tilde{\underline{x}}_n = \underline{x}_n + \underline{b} \quad , \quad \underline{b} = \underline{Q} - \underline{a} \quad \Rightarrow \tag{7.18}$$
$$\tilde{J}^{kl} = \sum_{n=1}^{N} m_n \{ |\hat{\underline{x}}_n|^2 \delta^{kl} - \hat{x}_n^k \hat{x}_n^l \} = J^{kl} + M\{|\underline{b}|^2\delta^{kl} - b^k b^l\}$$

Man nennt einen starren Körper mit einem KF-System, dessen Ursprung $\underline{a}$ sich im Raume geradlinig gleichförmig bewegt ($\ddot{\underline{a}} = \underline{0}$), einen Kreisel. Nach einer Galileitransformation kann man o.E. $\underline{a} = \underline{0}$ setzen, und damit hat ein Kreisel nur drei rotatorische Freiheitsgrade. Wir werden in diesem Abschnitt zwei wichtige Kreiselbewegungen studieren (mehr in [K2], [K3], [M2]): den kräftefreien Kreisel, mit $\underline{F} = \underline{D}_r = \underline{0}$ und o.E. $\underline{Q} = \underline{a} = \underline{0}$, und den schweren symmetrischen Kreisel mit Fixpunkt, $\underline{a}(t) = \underline{a}$. In diesen Fällen ist $\underline{L} = \underline{L}_r$, $T = T_r$.

c.) Kräftefreier Kreisel. Für die Rotation um den Schwerpunkt gilt es, die Euler'schen Gleichungen

$$'J_1 \, '\dot{\omega}_1 = '\omega_2 \, '\omega_3 \, ('J_2 - 'J_3) \quad \text{zykl.} \tag{7.19}$$

zu lösen. (7.19) ist nichtlinear, und jedermann kann sich von der Kompliziertheit der Lösungen überzeugen und einen Ziegelstein durch die Luft wirbeln lassen. Es wird sich zeigen, daß (7.19) und (C13) mit Hilfe der Erhaltungssätze für Energie T und Drehimpuls $\underline{L}$ in expliziter Form lösbar ist.

Zuerst der einfache Spezialfall des kräftefreien symmetrischen Kreisels mit $'J_1 = 'J_2 = A$ und $'J_3 = C \neq 0$ (also $A \neq 0$ nach der Dreiecksungleichung). Dann gilt

$$C \, '\dot{\omega}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad '\omega_3 \text{ konstant}$$
$$\Rightarrow \omega = '\omega_3 (A - C)/A \quad \text{konstant} \tag{7.20}$$
$$\Rightarrow '\dot{\omega}_1 = +\omega \, '\omega_2 \quad , \quad '\dot{\omega}_2 = -\omega \, '\omega_1$$
$$\Rightarrow '\omega_1(t) = '\omega_\perp \sin(\omega t + \tau) \, , \quad '\omega_2(t) = '\omega_\perp \cos(\omega t + \tau)$$

mit Integrationskonstanten $'\omega_\perp$, $'\omega_3$ und τ. Man sieht, daß $\|{}'\underline{\omega}\|^2 = ({}'\omega_\perp)^2 + ({}'\omega_3)^2$ konstant ist und daß ${}'\underline{\omega}(t)$ um die Figurenachse ${}'\underline{f} = {}'\underline{e}_3$ (Normale der Ebene, für die ${}'J_1 = {}'J_2$) eine reguläre Präzession mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w ausführt. Weiter gilt

$$ {}'L_1 = A\,{}'\omega_\perp \sin(wt+\tau)\,,\quad {}'L_2 = A\,{}'\omega_\perp \cos(wt+\tau)\,,\quad {}'L_3 = C\,{}'\omega_3 \qquad (7.21)$$

$\Rightarrow \{ {}'\underline{f},\ {}'\underline{\omega}(t),\ {}'\underline{L}(t) \}$ in einer Ebene

$\Rightarrow \{ \underline{f}(t),\ \underline{\omega}(t),\ \underline{L} \}$ in einer Ebene

Im KF-System rotieren ${}'\underline{L}(t)$ und ${}'\underline{\omega}(t)$ um die feste Figurenachse ${}'\underline{f}$, im RF-System rotieren $\underline{f}(t)$ und $\underline{\omega}(t)$ um den konstanten Drehimpuls $\underline{L}$ und alles auf Kreisen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w. Die Winkel zwischen $\underline{L}$, $\underline{\omega}$ und $\underline{f}$ sind zeitlich konstant und nicht völlig beliebig wegen der Konstanz von $\underline{L}$, T und $|\underline{\omega}|$:

$$\cos\vartheta_1 \equiv \frac{\underline{L}\cdot\underline{\omega}}{|\underline{L}|\cdot|\underline{\omega}|} = \frac{2T}{|\underline{L}||\underline{\omega}|} > 0\,, \qquad \cos\vartheta \equiv \frac{\underline{L}\cdot\underline{f}}{|\underline{L}|} = \frac{ACw}{(A-C)L}$$

$$\cos\vartheta_2 \equiv \underline{\omega}\cdot\underline{f}/|\underline{\omega}| = {}'\underline{\omega}\cdot{}'\underline{f}/|\underline{\omega}| = \frac{{}'\omega_3}{|\underline{\omega}|} = \frac{{}'L_3}{A|\underline{\omega}|}$$
$$= \frac{{}'\underline{L}\cdot{}'\underline{f}}{A|\omega|} = \frac{\underline{L}\cdot\underline{f}}{A|\omega|} = \frac{|\underline{L}|}{A|\omega|}\cdot\cos\vartheta \qquad (7.22)$$

Also haben $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta_2$ das gleiche Vorzeichen und $\cos\vartheta_1 > 0$. Bis auf Entartungen können nur die Konfigurationen von Fig. 7.1 und Fig. 7.2 auftreten:

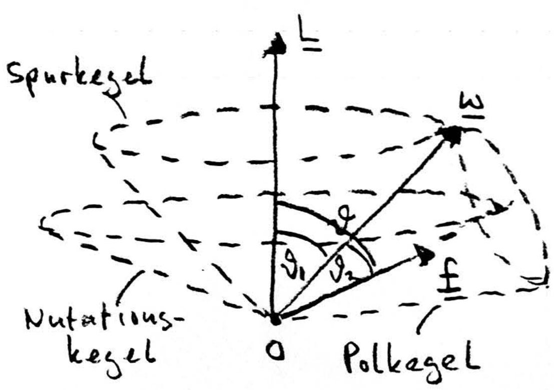
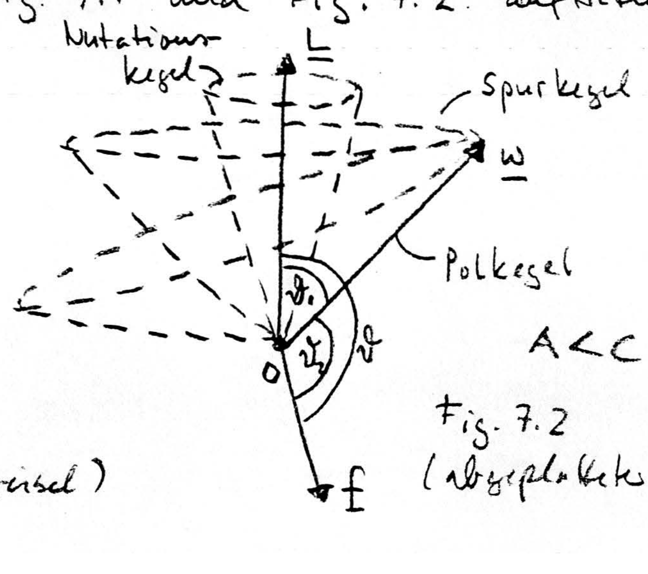


Fig. 7.1 $A > C$
(gestreckter Kreisel)



$A < C$

Fig. 7.2
(abgeplatteter K.)

Nach Euler ist die Lösung (7.20) in der Geophysik wichtig: In erster Approximation ist die Erde ein abgeplatteter kräftefreier symmetrischer Kreisel mit $A = {}'J_1 = {}'J_2 < C = {}'J_3$ und $(C-A)/A \approx 1/300$. Die Figurenachse ist der geometrische und $'\underline{\omega}$ der kinematische Nordpol. Die Theorie sagt eine reguläre Präzession der Erde mit Periode T voraus, wobei

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{(C-A)'\omega_3} \approx 300 \text{ Tage}, \qquad (7.23)$$

was größenordnungsmäßig hinkommt mit einer Amplitude von einigen Metern.

Die Integrationskonstanten $'\omega_\perp$ und $'\omega_3$ in (7.20) lassen sich durch T und $|\underline{L}|$ ausdrücken nach (7.7) und (7.11):

$$2T = A('\omega_\perp)^2 + C('\omega_3)^2 \quad , \quad |\underline{L}|^2 = A^2('\omega_\perp)^2 + C^2('\omega_3)^2$$

$$\Rightarrow ('\omega_\perp)^2 = \frac{|\underline{L}|^2 - 2TC}{A(A-C)} \quad , \quad ('\omega_3)^2 = \frac{2TA - |\underline{L}|^2}{C(A-C)} \qquad (7.24)$$

Wir wollen (7.20) nochmals aus dem Lagrange-Formalismus herleiten und gleichzeitig auch die Zeitabhängigkeit der Euler'schen Winkel (C.13) bestimmen. Da für den kräftefreien Kreisel $\underline{L}$ erhalten ist, wählen wir das RF-System derart, daß gilt:

$$\underline{L} = L\,\underline{e}_3 \qquad L > 0 \qquad (7.25)$$

Als Parametrisation der Kreiselkonfigurationen SO(3) wählen wir die Euler'schen Winkel mit (7.25). Dann gilt nach (C.13)

$$'\underline{L} = L\,'\underline{e}_3 = L\begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,'\omega_1 \\ A\,'\omega_2 \\ C\,'\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A[\dot\vartheta\cos\psi + \dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi] \\ A[-\dot\vartheta\sin\psi + \dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi] \\ C[\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta] \end{pmatrix} \qquad (7.26)$$

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ ist die kinetische Energie:

$$\mathcal{L} = T = \frac{A}{2}(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) + \frac{C}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 \qquad (7.27)$$

und φ und ψ sind zyklische Koordinaten mit erhaltenen kanonischen Impulsen p_φ und p_ψ. Nach (7.26) gilt

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi} = C(\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi) = C\,\omega_3' = L\cos\vartheta$$

$\Rightarrow$ $\cos\vartheta$ konstant $\Rightarrow$ $\vartheta = \vartheta_0$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = A\sin^2\vartheta\,\dot\varphi + C\cos\vartheta(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)$$
$$= A\sin^2\vartheta_0\,\dot\varphi + L\cos^2\vartheta_0 \quad \text{konstant} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \dot\varphi_0 t \qquad (7.28)$$

$$L\cos\vartheta = C\,\omega_3' = C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)$$
$$\Rightarrow \ddot\psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi_0 + \dot\psi_0 t$$

Die Lösung (7.28) enthält 5 Integrationskonstanten wobei wegen (7.26) $L = A\dot\varphi_0$ und $L\cos\vartheta_0 = C[\dot\psi_0 + \dot\varphi_0\cos\vartheta_0]$ gilt. Die Bewegung ist <u>quasiperiodisch</u> mit zwei Perioden

$$T_\varphi = 2\pi/\dot\varphi_0 \qquad T_\psi = 2\pi/\dot\psi_0 \qquad (7.29)$$

und ist periodisch, falls $\dot\varphi_0/\dot\psi_0$ rational ist. Falls $\dot\varphi_0/\dot\psi_0$ irrational ist, füllen die Bahnen $(\varphi(t), \psi(t), \vartheta(t))$, die wegen $\vartheta(t) = \vartheta_0$ auf einem 2-dim. Torus in (φ, ψ) liegen, diesen überall dicht aus:

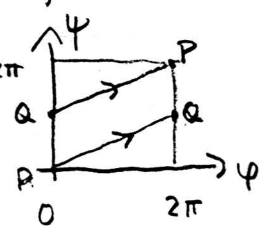


Fig. 7.3
$\dot\varphi_0/\dot\psi_0 = 2$

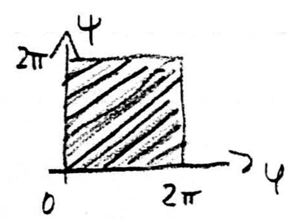


Fig. 7.4
$\dot\varphi_0/\dot\psi_0$ irrational

Der <u>allgemeine kräftefreie Kreisel</u> hat eine <u>geometrische Lösung</u> der Euler'schen Gleichungen, die auf Poinsot zurückgeht: Auf Grund der Erhaltungssätze gilt

$$\underline{L}(t) = \underline{L} \text{ konstant} \Rightarrow \underline{\omega}(t)\cdot\underline{L} = 2T \text{ konstant} \qquad (7.30)$$

d.h. $\underline{\omega}(t)$ liegt zu allen Zeiten auf der raumfesten "invarianten Ebene" $\{\underline{x} \mid \underline{x}\cdot\underline{L} = 2T\}$. Wegen

$$T = \tfrac{1}{2}\langle \underline{\omega}(t), J(t)\,\underline{\omega}(t)\rangle, \qquad \underline{L} = \frac{\partial T}{\partial \underline{\omega}}(\underline{\omega}(t), J(t)) \qquad (7.31)$$

liegt $\underline{\omega}(t)$ gleichzeitig auf dem "Energieellipsoid", das im KF-System fest liegt mit Länge der Hauptachsen $\sqrt{2T/{}'J_i}$ wegen $1 = (2T)^{-1} \sum {}'J_i {}'\omega_i^2$, dessen Lage im RF-System sich ändert wegen $J(t) = R(t)\,{}'J\,R(t)^T$. Wegen (7.31) steht $\underline{L}$ senkrecht auf der Tangentialebene des Energieellipsoids in $\underline{\omega}(t)$, also ist die invariante Ebene Tangentialebene in $\underline{\omega}(t)$. Da die momentane Drehachse von $R(t)$ durch $\underline{\omega}(t)$ geht, ist $\underline{\omega}(t)$ momentan in Ruhe: Die Bewegung von $\underline{\omega}(t)$ wird bestimmt durch das gleitungsfreie Abrollen des körperfesten Energieellipsoides auf der raumfesten invarianten Ebene (Fig. 7.5)

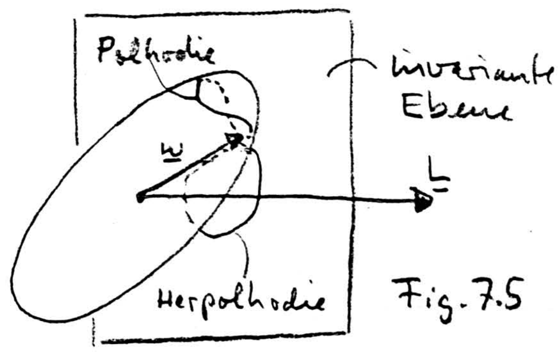


Fig. 7.5

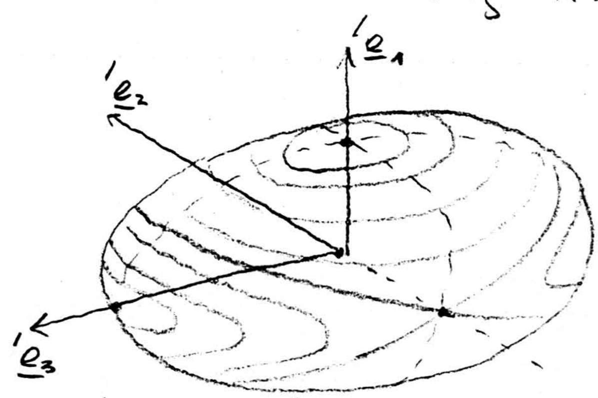


Fig. 7.6

Auf der Ebene wird die Spurkurve (Herpolhodie) und auf dem Ellipsoid die geschlossene Polkurve (Polhodie) durchlaufen, wobei die Poinsot-Konstruktion nichts über die Geschwindigkeit aussagt (s.u.). Für den symmetrischen Kreisel sind Spur- und Polkurve Kreise (s. Fig. 7.1, 7.2).

Die Gestalt der Bahnkurve von ${}'\underline{\omega}(t)$ auf dem Energieellipsoid kann dem Energie- und Drehimpulserhaltungssatz entnommen werden: es gilt simultan

$$\sum_{k=1}^{3} {}'J_k {}'\omega_k^2 = 2T \quad , \quad \sum_{k=1}^{3} {}'J_k^2 {}'\omega_k^2 = \|L\|^2 \qquad (7.32)$$

wobei für die möglichen Werte der Integrale T und $\|\underline{L}\|^2$ gilt: ${}'J_{max}\, 2T \geq \|\underline{L}\|^2 \geq {}'J_{min}\, 2T$. Daher haben (7.32) immer einen 1- oder 0-dim. Durchschnitt, der in Fig. 7.6 für ${}'J_{max} = {}'J_1 \geq {}'J_2 \geq {}'J_3 = {}'J_{min}$ gezeichnet ist.

(7.32) ist auch der Ausgangspunkt für die analytische Lösung der Bewegungsgleichungen des allgemeinen kräftefreien Kreisels. Aus (7.32) lassen sich $'\omega_2$ und $'\omega_3$ als Funktionen von $'\omega_1 \equiv x$ darstellen:

$$'\omega_2^2 = \beta_1 - \beta_2 x^2 , \quad '\omega_3^2 = \beta_3 - \beta_4 x^2 \qquad (7.33)$$

Damit wird die Euler'sche Gleichung für $'\omega_1$ integrabel:

$$'J_1 \dot{x} = \pm('J_2 - 'J_3)\left[(\beta_1 - \beta_2 x^2)(\beta_3 - \beta_4 x^2)\right]^{1/2} \qquad (7.34)$$

und kann mit den Methoden des §2 diskutiert werden als Bewegung eines Teilchens der Masse 1 und der Energie 0 im Potential $V(x) \sim (\beta_1 - \beta_2 x^2)(\beta_3 - \beta_4 x^2)$. Zur Berechnung der Konfiguration benutzt man Euler'sche Winkel, wobei man $\underline{L} = L\,\underline{e}_3$ für den erhaltenen Drehimpuls setzt. Wie in (7.26) entnimmt man aus

$$'\underline{L} = L \begin{pmatrix} \sin\vartheta \sin\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 'J_1 '\omega_1 \\ 'J_2 '\omega_2 \\ 'J_3 '\omega_3 \end{pmatrix} \qquad (7.35)$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = \frac{'J_3}{L}\,'\omega_3 \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{'J_1 '\omega_1}{'J_2 '\omega_2} \qquad (7.36)$$

und man erhält aus (C.13) die integrable Gleichung

$$\dot{\varphi} = L\,\frac{'J_1('\omega_1)^2 + 'J_2('\omega_2)^2}{('J_1 '\omega_1)^2 + ('J_2 '\omega_2)^2} \qquad (7.37)$$

Man sieht aus (7.19), daß für die <u>Winkelgeschwindigkeiten</u> die Rotationen um die Hauptträgheitsachsen Gleichgewichtslösungen sind (nach Fig. 7.6 für $'J_1 > 'J_2 > 'J_3$ stabil um $'\underline{e}_1, '\underline{e}_3$ und instabil um $'\underline{e}_2$), aber nach (7.37) nicht für die <u>Konfigurationen</u>, und für diese sind auch die Rotationen um die Hauptträgheitsachsen nicht stabil. (7.34) führt auf elliptische Funktionen, für die der Kreisel ein "Modell" ist.

Abschliessend wollen wir zeigen, daß für den allgemeinen freien Kreisel die Euler'schen Gleichungen sich als Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion herleiten:

$$L = T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} {'J_i}\,'\omega_i^2 = \frac{'J_1}{2}(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi)^2 \qquad (7.38)$$
$$+ \frac{'J_2}{2}(-\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi)^2 + \frac{'J_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial T}{\partial\, '\omega_3}\frac{\partial\, '\omega_3}{\partial\dot\psi} = {}'J_3\, '\omega_3 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = {}'J_3\, '\dot\omega_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial\, '\omega_1}\frac{\partial\, '\omega_1}{\partial\psi} + \frac{\partial T}{\partial\, '\omega_2}\frac{\partial\, '\omega_2}{\partial\psi} = ({}'J_1 - {}'J_2)\, '\omega_1\, '\omega_2 \qquad (7.39)$$

Die beiden anderen Euler'schen Gleichungen erhält man durch Kombination von $\frac{\delta T}{\delta\varphi}=0$, $\frac{\delta T}{\delta\vartheta}=0$, $\frac{\delta T}{\delta\psi}=0$ oder direkt aus (7.39) nach Rotation des KF-Systems wegen des trivialen Verhaltens von T unter Rotationen.

Die zu ψ, φ, ϑ konjugierten kanonischen Impulse sind

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = {}'L_3$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \Sigma \frac{\partial T}{\partial\, '\omega_i}\frac{\partial\, '\omega_i}{\partial\dot\varphi} = {}'L_1 \sin\vartheta\sin\psi + {}'L_2\sin\vartheta\cos\psi + {}'L_3\cos\vartheta = L_3$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial\dot\vartheta} = {}'L_1\cos\psi - {}'L_2\sin\psi = {}'\underline{L}\cdot{}'\underline{k} = \underline{L}\cdot\underline{k} \qquad (7.40)$$

Wählt man also als Koordinaten auf SO(3) die Euler'schen Winkel, so sind für den kräftefreien Kreisel die kanonischen Impulse p_ψ, p_φ, p_ϑ die Komponenten des Drehimpulses in Richtung der Drehachsen $'\underline{e}_3$, $\underline{e}_3$, $\underline{k}$ der zu ψ, φ, ϑ gehörigen 1-parametrigen Gruppen. (7.40) bleibt unverändert in einem äusseren Kraftfeld, falls $V = V(\psi, \varphi, \vartheta)$. Durch Auflösung von (7.40) nach $'\underline{L}$ erhält man

$$'L_1 = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\psi + p_\vartheta\cos\psi$$

$$'L_2 = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\psi - p_\vartheta\sin\psi \qquad (7.41)$$

$$'L_3 = p_\psi$$

und damit die Hamiltonfunktion der "richtigen" Variablen $\varphi, p_\varphi, \psi, p_\psi, \vartheta, p_\vartheta$:

$$H = T = \sum_{k=1}^{3} (2\, 'J_k)^{-1}\left({}'L_k(\varphi, p_\varphi, \psi, p_\psi, \vartheta, p_\vartheta)\right)^2 \qquad (7.42)$$

mit den Bewegungsgleichungen in kanonischer Form:

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial\varphi}, \quad \text{u.s.w.} \qquad (7.43)$$

d.) <u>Schwerer Kreisel mit Fixpunkt</u>. Der feste Auflagepunkt des Kreisels in Fig. 7.7 wird als gemeinsamer Nullpunkt des RF- und KF-Systems gewählt, die $\underline{e}_3$-Achse in Richtung von $-\underline{g}$, die $'\underline{e}_3$-Achse nach $\underline{OS}$. Mit $l = |\underline{OS}|$ und $\tilde{J}$ den Trägheitstensor bezüglich O hat man die Lagrangefunktion

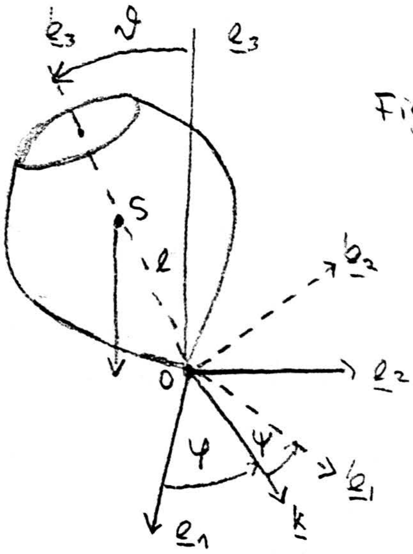


Fig. 7.7.

$$L = T - V = \frac{1}{2}\langle \underline{\omega}, \tilde{J}\,\underline{\omega}\rangle - Mg\,l\cos\vartheta \qquad (7.44)$$

Da L nicht von t abhängt, ist die Energie $H = T + V$ erhalten und ebenso $p_\varphi = L_3$ wegen der Rotationsinvarianz um die $\underline{e}_3$-Achse (Noether'scher Satz und (7.40)). Diese beiden Integrale reichen nicht aus, um die Bewegungsgleichungen durch Quadraturen zu lösen. Falls jedoch der Kreisel rotationssymmetrisch um die $'\underline{e}_3$-Achse ist, so erwartet man als drittes Integral $p_\psi = {}'L_3$. In der Tat gilt wie in (7.27)

$$'\tilde{J}_1 = {}'J_1 + Ml^2 = {}'\tilde{J}_2 \equiv A\,, \quad '\tilde{J}_3 = {}'J_3 \equiv C \qquad (7.45)$$

$$T = \frac{A}{2}[{}'\omega_1^2 + {}'\omega_2^2] + \frac{C}{2}{}'\omega_3^2 = \frac{A}{2}(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) + \frac{C}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2$$

und sowohl φ als auch ψ sind zyklische Koordinaten. Die Erhaltung von L_3 ist klar, da das Drehmoment der Schwerkraft senkrecht auf der $\underline{e}_3$-$'\underline{e}_3$-Ebene steht, und die von $L_3 = {}'J_3{}'\omega_3$ auf Grund der Euler'schen Gleichungen (7.16), da $'J_1 = {}'J_2$ gilt und weil $'D_3 = 0$ ist. Mit den Konstanten

$$p_\varphi = A\sin^2\vartheta\,\dot\varphi + C\cos\vartheta\,(\dot\psi + \cos\vartheta\,\dot\varphi) \equiv Ab$$

$$p_\psi = C(\dot\psi + \cos\vartheta\,\dot\varphi) \equiv Aa \qquad (7.46)$$

kann der Energiesatz $T+V=E$ in eine Differentialgleichung 1. Ordnung für ϑ transformiert werden

$$\dot\varphi = \frac{b-a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \qquad \dot\psi = \frac{Aa}{C} - \cos\vartheta\,\frac{b-a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad E - \frac{C}{2}\,{}'\omega_3^2 = E' = \frac{A}{2}\dot\vartheta^2 + U(\vartheta)$$

$$U(\vartheta) = \frac{(b-a\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}\,\frac{A}{2} + Mgl\cos\vartheta \qquad (7.47)$$

Da E' konstant ist wegen $p_\psi = C'\omega_3$, hat man wieder eine 1-dim. Bewegung in einem effektiven Potential $U(\vartheta)$. Mit

$$u = \cos\vartheta\,, \quad \dot u = -\sin\vartheta\,\dot\vartheta\,, \quad \dot\varphi = \frac{b-au}{1-u^2} \qquad (7.48)$$

$$\alpha = 2E'/A \;\geq\; \beta \equiv 2Mgl/A$$

erweist sich $u(t)$ als elliptische Funktion:

$$\dot u^2 = f(u) = (1-u^2)(\alpha-\beta u) - (b-au)^2$$

$$\Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \qquad (7.49)$$

Wegen (7.49) ist das physikalische Gebiet die stets nichtleere Menge $\{u \mid -1 \leq u \leq +1,\ f(u) \geq 0\}$. Wegen $\beta > 0$ gilt $f(u) \to \pm\infty$ für $u \to \pm\infty$. Ferner ist $f(\pm 1) = -(b\mp a)^2 \leq 0$. Falls $b=a$, so ist $L_3 = {}'L_3$ (*stehender Kreisel*), falls $b=-a$, so ist $L_3 = -{}'L_3$ (*hängender Kreisel*), und sonst hat man einen *schiefen Kreisel*. Im letzteren Fall hat f den Verlauf von Fig. 7.8 oder 7.9:

Fig. 7.8

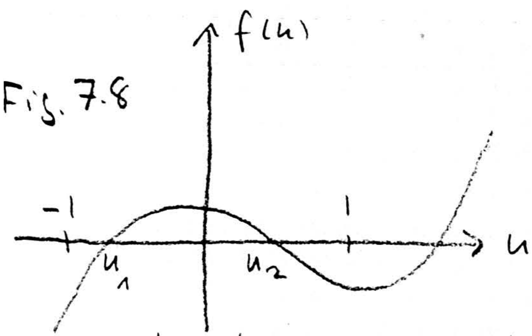
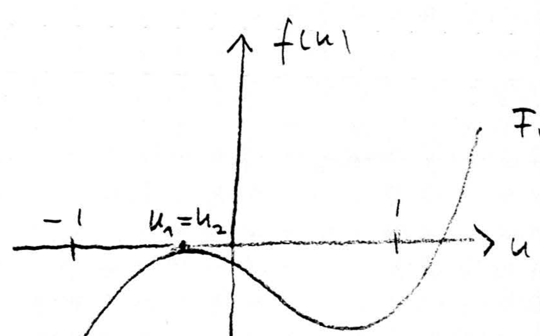


Fig. 7.9



Die "Librationspunkte" $u_1 \leq u_2$ sind Umkehrpunkte der ϑ-Bewegung. Es sei zunächst $u_1 < u_2$. Dann sind für die durch (ϑ, φ) beschriebene Figurenachse $\underline{e}_3'$ die folgenden Bewegungstypen möglich:

$\frac{b}{a} > u_2$: Dann wechselt nach (7.48) $\dot{\varphi}$ nie das Vorzeichen. Der Kreisel führt eine Präzession um die $\underline{e}_3$-Achse aus (im positiven Sinn, falls $a > 0$), überlagert mit einer Nutation, einer periodischen Schwankung in ϑ nach Fig. 7.10

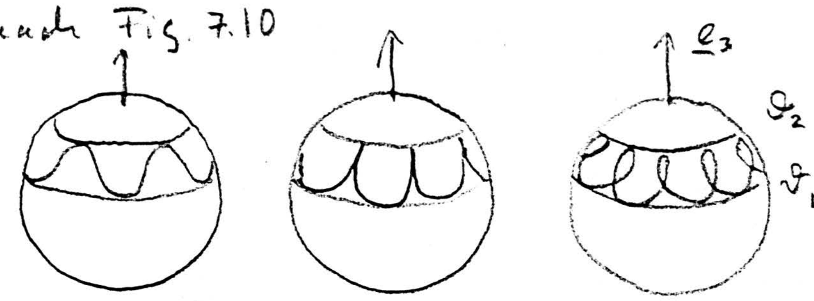


Fig. 7.10 Fig. 7.11 Fig. 7.12

$\frac{b}{a} = u_2$: Hier fällt der Kreisel bis $u = u_1$ und richtet sich dann wieder auf (Fig. 7.11). Dieser Fall entspricht der häufig realisierten Anfangsbedingung $\dot{\vartheta}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta_2$. In diesem Fall gilt $E' = Mgl\cos\vartheta_2$ und (7.47) wird zu

$$Mgl\cos\vartheta_2 = \frac{A}{2}\{\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\} + Mgl\cos\vartheta \qquad (7.50)$$

Daher kann $\dot{\vartheta} \neq 0$ oder $\dot{\varphi} \neq 0$ nur mit Abnahme von ϑ (Fallen) auftreten.

$u_1 < \frac{b}{a} < u_2$: Hier ändert $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen und Präzession und Nutation folgen Fig. 7.12. So verhält sich die Erde als abgeplatteter symmetrischer Kreisel im Gravitationsfeld von Sonne und Mond mit einer Präzessionsperiode von 26.000 Jahren.

$\frac{b}{a} \leq u_1$ ist unmöglich: $u_1 = b/a$ führt auf $u_1 = \alpha/\beta$ und dies ist mit $f(u) > 0$ für $u_1 < u < u_2$ unverträglich.

Eine reine Präzession ohne Nutation, $u_1 = u_2$, ist nur für ganz spezielle Anfangsbedingungen möglich [G2], und eine reine Nutation führt der Kreisel als Pendel aus.

Interessant ist der stehende Kreisel. $b=a$ erfordert $\vartheta(0)=0$. Gilt weiter $\dot{\vartheta}(0)=0$, so ist $E'=Mgl$, also $\alpha=\beta$ und daher $f(u)=(1-u)^2\{\beta(1+u)-a^2\}$ mit der Doppelwurzel $u_{1,2}=1$ und $u_3=a^2/\beta-1$. Für einen rasch rotierenden Kreisel

$$\frac{a^2}{\beta}=\frac{('L_3)^2 A}{A^2\, 2Mgl} > 2 \iff {'L_3^2} > 4MglA \qquad (7.51)$$

ist nach Fig. 7.13 die vertikale Lage stabil ("schlafender Kreisel"), während diese bei langsamer Rotation instabil wird.

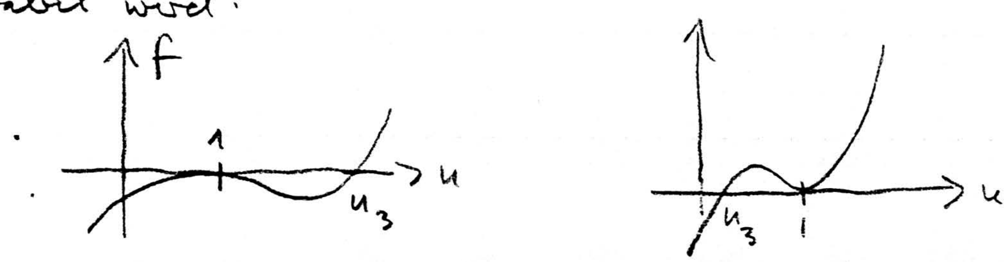


Fig. 7.13

Sobald bei einem stehenden "schlafenden" Kreisel unter dem Einfluss der Reibung $('L_3)^2$ unter den kritischen Wert $4MglA$ sinkt, "erwacht" der Kreisel und beginnt zu schwanken.

§8. Besuch eines schwarzen Loches

Eine schöne Anwendung des Lagrange-Formalismus bietet die Bewegung eines Massenpunktes in einem äusseren Gravitationsfeld nach den Gesetzen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART: Sexl & Urbantke: "Gravitation und Kosmologie"; Thirring "Lehrbuch der Mathematischen Physik", Band 1; Chandrasekhar "The Mathematical Theory of Black Holes"). Wir verwenden in diesem kurzen Kapitel Einheiten, in denen die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c=1$ ist, sowie die Einstein'sche Summenkonvention.

a.) <u>Geodätengleichung</u>. In der speziellen Relativitätstheorie bewegt sich ein kräftefreies Teilchen geradlinig gleichförmig

$$\frac{d}{d\tau} x^{\mu}(\tau) = 0 \quad , \quad \mu = 0,1,2,3 \; , \qquad (8.1)$$

wobei die Eigenzeit τ (4.19) erfüllt, d.h. mit $\dot{x}^{\mu}(\lambda) = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$

$$\tau(\lambda_1) - \tau(\lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{g^0_{\mu\nu}(x(\lambda), \dot{x}^{\mu}(\lambda)\dot{x}^{\nu}(\lambda)} \qquad (8.2)$$

mit $(g^0_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und λ einem beliebigen Parameter. Die Gerade als kürzeste Verbindung zweier Punkte zeigt, daß für die Bahnkurve die rechte Seite von (8.2) extremal ist unter allen Kurven $y(\lambda)$ mit $y(\lambda_1) = x(\lambda_1)$, $y(\lambda_2) = x(\lambda_2)$.

Nach Einstein ist ein Gravitationsfeld äquivalent zu einer Raum-Zeit-Krümmung, die sich in einem lokalen Koordinatensystem in der "Metrik" $g_{\mu\nu}(x)$ ausdrückt. Das Feld einer statischen sphärisch symmetrischen Massenverteilung mit Gesamtmasse M gibt im Aussenraum die <u>Schwarzschild-Metrik</u> in Polarkoordinaten

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^{\mu} dx^{\nu} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2$$
$$- r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \qquad (8.3)$$

$r_0 = 2M\varkappa \qquad \varkappa$: Gravitationskonst.

Die Bahnkurve $x^{\mu}(\lambda)$ eines Massenpunktes ist Extremum von

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L\, d\lambda \quad , \quad L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda))\, \dot{x}^{\mu}(\lambda)\, \dot{x}^{\nu}(\lambda)} \qquad (8.4)$$

Die Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial x^{\rho}}$ haben die Form

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{L}\, g_{\mu\varrho}\, \dot x^\mu\right) = \frac{1}{L}\,\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x^\sigma}\,\dot x^\sigma \dot x^\mu + \frac{1}{L}\, g_{\mu\varrho}\,\ddot x^\mu$$
$$- \frac{1}{L^2}\, g_{\mu\varrho}\,\dot x^\mu \frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{2L}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho}\,\dot x^\mu \dot x^\nu \qquad (8.5)$$

Für massive Teilchen ist $\dot x^\mu$ zeitartig und als Bahnparameter λ kann die Eigenzeit τ gewählt werden, so daß $L = 1$ auf der Bahnkurve ist mit der Geodätengleichung

$$g_{\mu\varrho}\,\ddot x^\mu + \frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x^\sigma}\,\dot x^\sigma \dot x^\mu = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\varrho}\,\dot x^\mu \dot x^\nu \qquad (8.6)$$

(ohne Christoffel-Symbole oder kovariante Ableitung geschrieben!). (8.6) ist auch die Extremalbedingung für die Lagrange=funktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\, g_{\mu\nu}(x)\,\dot x^\mu \dot x^\nu \qquad (8.7)$$

mit m der Masse des Teilchens und

$$\mathcal{L} = m/2 \qquad (8.8)$$

auf der durch die Eigenzeit parametrisierten Bahnkurve. Die Forderung $\mathcal{L} = \text{const}$ ist konsistent, da nach (5.60) für eine quadratische Form in den Geschwindigkeiten $\mathcal{L}$ auch die Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = \sum \dot x^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^\mu} - \mathcal{L}$ ist und diese nicht explizit von τ abhängt und daher auf jeder Bahnkurve konstant ist.

Für die Schwarzschild-Metrik ist $\mathcal{L}$ für $r > r_0$ wohldefiniert und geht für $r \gg r_0$ in die für $g^0_{\mu\nu}$ über. Im Abstand r_0 wird die Gravitationsenergie von der Ordnung der Ruhe=energie: $Mm\varkappa/r_0 \sim mc^2$ mit $c = 1$. Für die

Sonne ist $r_0 = 2{,}95$ km, also weit im Innern. So haben die folgenden Betrachtungen zwar Anwendungen auf die Planetenbewegung im Aussenraum der Sonne, aber eine Überschreitung des Schwarzschild – Horizonts r_0 ist bei uns unmöglich. Für ein Proton ist $r_0 \approx 10^{-50}$ cm $\ll r_{\text{Proton}} \approx 10^{-13}$ cm.

Wir studieren die Lagrangedynamik für ein massives Teilchen mit der Eigenzeit τ als Parameter für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left\{ \left(1-\frac{r_0}{r}\right)\dot{t}^2 - \dot{r}^2/\left(1-\frac{r_0}{r}\right) - r^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)\right\} \quad (8.8)$$

Zyklische Koordinaten sind t und φ mit den erhaltenen kanonischen Impulsen

$$p_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = m\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\dot{t}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = -mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \quad (8.9)$$

Wählt man Anfangsbedingungen $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$, so folgt aus

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = -m\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\vartheta}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = -mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 \quad (8.10)$$

$\ddot{\vartheta}(0) = 0$ und damit $\vartheta(\tau) \equiv \pi/2$ und $p_\varphi = -mr^2\dot{\varphi}$. Durch geeignete Koordinatenwahl können wir uns auf Grund des Drehimpulserhaltungs=satzes wie beim sphärisch-symmetrischen Zentralkraftproblem immer auf diesen Bewegungs=typus beschränken. Wir setzen

$$\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\dot{t} = E, \quad r^2\dot{\varphi} = L, \quad \chi = \frac{m}{2} \quad (8.11)$$

und erhalten

$$\frac{E^2}{1-\frac{r_0}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_0}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + U(r) = E^2 - 1 \qquad (8.12)$$

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{r_0 L^2}{r^3}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2}\left(E^2 - 1 - U(r)\right)$$

Die Radialbewegung spielt sich in einem effektiven Potential $U(r)$ ab, das sich von dem Gravitations- und Zentrifugalkrafts-potential durch den stark attraktiven $-r_0 L^2/r^3$ Term unterscheidet. Die möglichen Bewegungs-typen folgen aus Fig. 8.1:

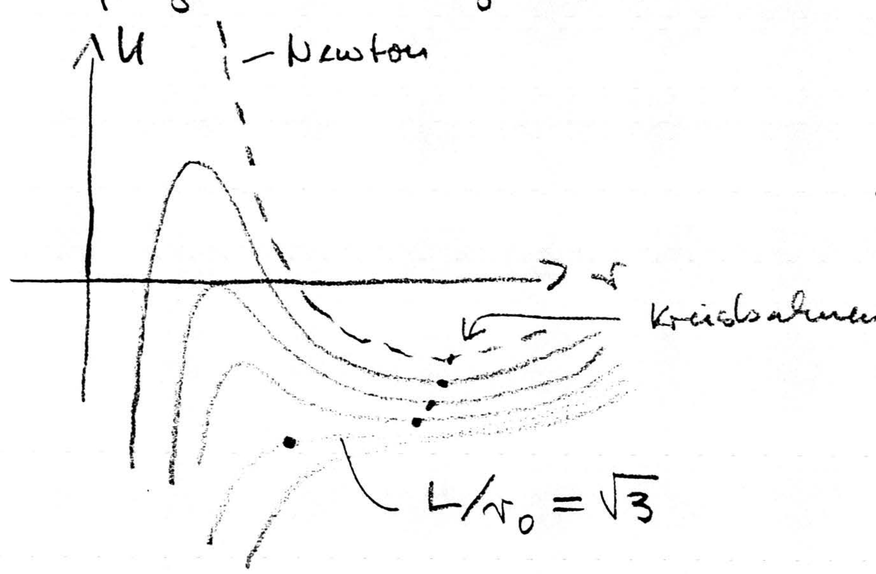


Fig. 8.1

Für $L < \sqrt{3}\, r_0$ gibt es keine periodischen Bahnen mehr. Wir untersuchen den rein radialen Besuch beim schwarzen Loch, also $L=0$. Zur Zeit $\tau = 0$ sei

$$\dot{r}(0) = 0 \qquad r(0) = r_i = \frac{r_0}{1-E^2} \Rightarrow E^2 < 1 \qquad (8.13)$$

Es ist zweckmäßig, statt τ eine Winkelkoordinate η einzuführen mit $\eta = 0$ für $\tau = 0$ und $\eta = \pi$ für $r = 0$ zum Lösen von

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_0}{r} + E^2 - 1 \quad , \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1-\frac{r_0}{r}} \tag{8.14}$$

$$r \equiv \frac{r_0/2}{1-E^2}(1+\cos\eta) = r_i \cos^2\frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (1-E^2)\left\{\frac{1}{\cos^2\eta/2} - 1\right\} = (1-E^2)\,\mathrm{tg}^2\frac{\eta}{2}$$

Da r monoton fällt, gilt

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{1-E^2}\,\mathrm{tg}\frac{\eta}{2} = -\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^{1/2}\mathrm{tg}\frac{\eta}{2}$$

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{dr}{d\eta} \Big/ \frac{dr}{d\tau} = \left(\frac{r_i^3}{r_0}\right)^{1/2}\cos^2\frac{\eta}{2} = \left(\frac{r_i^3}{4r_0}\right)^{1/2}(1+\cos\eta)$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \left(\frac{r_i^3}{4r_0}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta) \tag{8.15}$$

Zur Eigenzeit $\tau_0 = \left(\frac{r_i^3}{4r_0}\right)^{1/2}(\eta_0 + \sin\eta_0)$ kreuzt der Astronaut den Schwarzschildradius r_0, wobei gilt:

$$\frac{r_0}{r_i} = \cos^2\frac{\eta_0}{2} = 1 - E^2 \quad \Rightarrow \quad \eta_0 = 2\sin^{-1}(E) \tag{8.16}$$

und zur endlichen Zeit $\tau_+ = \left(\frac{r_i^3}{4r_0}\right)^{1/2}\pi$ wird er durch durch Gezeitenkräfte zerrissen das Zentrum erreichen. Die Koordinatenzeit t divergiert logarithmisch beim Erreichen des Horizonts:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E\cos^2\eta/2}{\cos^2\eta/2 - \cos^2\eta_0/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{d\eta} = \frac{dt}{d\tau}\Big/\frac{d\eta}{d\tau} = E\left(\frac{r_i^3}{r_0}\right)^{1/2}\frac{\cos^4\frac{\eta}{2}}{\cos^2\frac{\eta}{2} - \cos^2\frac{\eta_0}{2}} \tag{8.17}$$

$$\Rightarrow t = E\left(\frac{r_i^3}{r_0}\right)^{1/2}\left\{\tfrac{1}{2}(\eta+\sin\eta) + (1-E^2)\eta\right\} + r_0 \ln\left\{\left(\operatorname{tg}\tfrac{\eta_0}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2}\right)/\left(\operatorname{tg}\tfrac{\eta_0}{2} - \operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2}\right)\right\} \tag{8.18}$$

Für einen weit entfernten Beobachter mit $r \gg r_0$ sind t, r, ϑ, φ die Koordinaten seiner (fast) Minkowski-Welt. Nach der Zeitmessung dieses Beobachters braucht der Astronaut unendlich lange, um den Horizont r_0 zu erreichen, bei dem die durch $(t, r, \vartheta, \varphi)$ parametrisierte Karte den Sinn verliert. Von Kruskal wurde eine andere Karte gefunden, die die gesamte Welt um das schwarze Loch beschreibt und obige Karte mit enthält, und auf der die Lösung (8.14), (8.15) durch den Horizont verfolgt werden kann mit $r(\tau) = r_i \cos^2\frac{\eta}{2}$, $\tau = \left(\frac{r_i^3}{4 r_0}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta)$: Es sei zunächst

$$u = \sqrt{\frac{r}{r_0}-1}\; e^{\frac{r}{2r_0}} \operatorname{ch}\frac{t}{2r_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{r}{r_0}-1}\; e^{\frac{r}{2r_0}} \operatorname{sh}\frac{t}{2r_0} \qquad r_0 < r,\ t \in \mathbb{R} \tag{8.19}$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_0}-1\right) e^{\frac{r}{r_0}} \qquad t = 2r_0 \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad du = \frac{1}{2r_0^2}\,\frac{r v\, dr}{\left(\frac{r}{r_0}-1\right)} + \frac{1}{2r_0}\, u\, dt$$

$$dv = \frac{1}{2r_0^2}\,\frac{r u\, dr}{\left(\frac{r}{r_0}-1\right)} + \frac{1}{2r_0}\, v\, dt \tag{8.20}$$

$$\Rightarrow \frac{4r_0^3}{r}\, e^{-r/r_0}(dv^2 - du^2) - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) =$$
$$= \left(1-\frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

Der schraffierte Bereich $\{r>r_0\}$ in Fig. 8.2 wird diffeomorph auf den Bereich I in Fig. 8.3 abgebildet, für den $\{u>|v|\}$ gilt

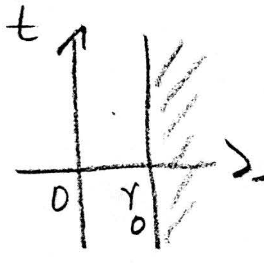


Fig. 8.2

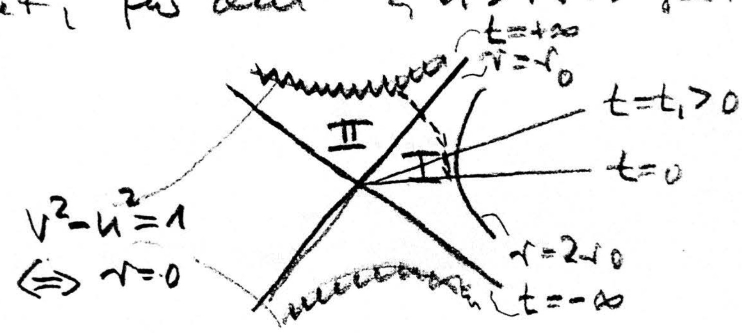


Fig. 8.3

Der Bereich II enthält die gestrichelte Fortsetzung der Trajektorie des einfallenden Astronauten, wobei die Weltränder bei $v^2-u^2=1$ liegen. Im Bereich II macht die Transformation (8.19) ebenfalls Sinn, wobei t und r als zeitliche und räumliche Koordinate ihre Rollen tauschen. Was dies alles bedeutet, kann nur ein Studium der allgemeinen Relativitätstheorie zeigen, z.B. im Buch von Straumann ("Allg. Rel. Th. u. rel. Astrophysik") oder von Misner, Thorne & Wigner ("Gravitation")

Als Übung werden wir mit (8.12) die Periheldrehung $\Delta\varphi$ des Merkurs berechnen. $\Delta\varphi$ nimmt in jüngst beobachteten Neutronendoppelsternen, die sich einander im Abstand von $\sim 10^5$ km in einigen Stunden umkreisen, Werte der Größenordnung Grad / Jahr an und ist somit ein erfolgreicher Test der Einstein'schen Theorie.

§9 Kanonische Transformationen

In diesem Kapitel wird die Struktur der kanonischen Mechanik untersucht. Neben dem ästhetischen Vergnügen an einer schönen Theorie spielen verschiedene pragmatische Gesichtspunkte eine Rolle: Einmal wollen wir in §10 verstehen warum gewisse dynamische Probleme, wie der schwere symmetrische Kreisel, durch Quadraturen explizit lösbar sind, und andere, wie das 3-Körperproblem nicht. Zum anderen brauchen wir einen flexiblen Formalismus, um komplizierte Probleme wenigstens approximativ zu verstehen, z.B. auf dem Computer, wo wir sicher sein müssen, daß die Resultate (wie z.B. im Hénon-Heiles Problem in §10) etwas mit der physikalischen Realität zu tun haben (KAM Theorem).

a.) In der Notation

$$\xi = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \\ x_{2f} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = -J^T = -J^{-1} \tag{9.1}$$

schreiben sich die kanonischen Gleichungen (5.62, 63)

$$\sum_{k=1}^{2f} J_{k\ell}\, \dot{x}_\ell = \frac{\partial H}{\partial x_k} \iff J\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \equiv H_{,\xi} \tag{9.2}$$

Die Strömungsabbildung Φ eines kanonischen Systems ist durch die Tatsache, daß das Vektorfeld T gleich $(-J)$ mal der Gradient einer Funktion H ist, wesentlich eingeschränkt: z.B. gilt im linearen autonomen Fall für $f=1$

$$H = \tfrac{1}{2}(aq^2 + 2bqp + cp^2) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} aq + bp \\ bq + cp \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -J\frac{\partial H}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} +bq, + cp \\ -aq, - bp \end{pmatrix} = \mathfrak{A}\xi \qquad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} +b, + c \\ -a, - b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\xi} = \mathfrak{A}\xi \quad \text{mit} \quad \operatorname{Sp} \mathfrak{A} = 0 \tag{9.3}$$

und daher hat der Propagator $P(t,s) = \exp(t-s)\mathfrak{A}$

die Determinante 1 (Liouville'scher Satz), d.h.

$$P(t,s)^T J\, P(t,s) = J \tag{9.4}$$

Allgemein für f Freiheitsgrade heisse eine reelle $2f \times 2f$ Matrix M <u>symplektisch</u>, falls gilt:

$$M^T J M = J \tag{9.5}$$

Die Menge aller symplektischen $2f\times 2f$ Matrizen bildet die reelle <u>symplektische Gruppe</u> $Sp(f,\mathbb{R})$. Denn:

$$M^T J M = J \Rightarrow (\mathrm{Det}\, M)^2 = 1 \Rightarrow M \text{ nichtsingulär}$$

$$M_1, M_2 \in Sp(f,\mathbb{R}) \Rightarrow (M_1 M_2)^T J M_1 M_2 = M_2^T (M_1^T J M_1) M_2$$
$$= J \Rightarrow M_1 M_2 \in Sp(f,\mathbb{R})$$

$$J^T J J = J^{-1} J J = J \Rightarrow J \in Sp(f,\mathbb{R}) \tag{9.6}$$

$$M^T J M = J \Rightarrow M J (-M^T J M) M^{-1} J = J$$
$$\Rightarrow M^T \in Sp(f,\mathbb{R}) \Rightarrow M^{-1} = J^{-1} M^T J \in Sp(f,\mathbb{R})$$

Man zeigt algebraisch oder topologisch ($Sp(f,\mathbb{R})$ zusammenhängend)

$$M \in Sp(f,\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{Det}\, M = 1 \tag{9.7}$$

Mit diesen algebraischen Vorbereitungen können wir den Fluss eines kanonischen dynamischen Systems sehr elegant charakterisieren:

<u>Satz</u> (Liouville): Sei $\phi_{t,s}$ der (lokale) Fluss zu $J\dot{\xi} = \frac{\partial H(\xi,t)}{\partial \xi}$. Dann gilt für alle ξ, t, s, für die ϕ definiert ist,

$$D\phi_{t,s}(\xi) \in Sp(f,\mathbb{R}) \tag{9.8}$$

Sei umgekehrt ϕ der Fluss von $\dot{\xi} = \Gamma(\xi,t)$ und es gelte (9.8). Dann gibt es lokal eine Hamilton-Funktion $H(\xi,t)$ mit $-J\frac{\partial H}{\partial \xi} = \Gamma$.

Denn aus den Bewegungsgleichungen folgt

$$J \frac{\partial}{\partial t} \phi_{t,s} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \circ \phi_{t,s} \tag{9.9}$$

Mit der Kettenregel und (9.2) erhält man für $\xi = \phi_{t,s}(\eta)$

$$J \frac{\partial}{\partial t} D\phi_{t,s}(\eta) = DH_{,\xi}(\xi,t)\, D\phi_{t,s}(\eta) \Rightarrow \qquad (9.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(D\phi_{t,s}(\eta)\right)^T J \left(D\phi_{t,s}(\eta)\right) = \left(D\phi_{t,s}(\eta)\right)^T \left\{ DH_{,\xi}(\xi,t) - DH_{,\xi}(\xi,t)^T \right\} D\phi_{t,s}(\eta) = 0$$

da $DH_{,\xi}(\xi,t) = \left(\frac{\partial^2 H(\xi,t)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = DH_{,\xi}(\xi,t)^T$. Für $t = s$ gilt (9.8) und nach (9.10) für alle t, s. Umgekehrt sei ϕ der Fluss von $J\dot{\xi} = J\Gamma(\xi,t) = \Delta(\xi,t)$. Dann impliziert (9.10) mit $H_{,\xi}$ ersetzt durch Δ: $D\Delta - (D\Delta)^T = 0$ oder $\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_\ell} = \frac{\partial \Delta_\ell}{\partial x_k}$ $\Leftrightarrow \operatorname{rot} \Delta = 0$, und es gibt lokal ein H mit $\Delta = H_{,\xi}$.

Ein (lokaler) Diffeomorphismus ψ des $\mathbb{R}^{2f}$ heisst <u>kanonisch</u>, wenn (lokal) gilt:

$$(D\psi)(\xi) \in Sp(f, \mathbb{R}) \qquad (9.11)$$

Daher ist die Flussabbildung $\phi_{t,s}$ in der Hamilton'schen Form der Mechanik kanonisch und a fortiori volumenerhaltend. Ist eine zeitabhängige (oder speziell zeitunabhängige) Koordinatentransformation ψ_t des Phasenraumes kanonisch, so gehen unter ψ_t kanonische Bewegungsgleichungen wieder in solche über:

$$\xi = \psi(t,\eta) \Rightarrow \dot{\xi} = D\dot{\eta} + \psi_{,t} \Rightarrow \dot{\eta} = D^{-1}(\dot{\xi} - \psi_{,t}) \qquad (9.12)$$

mit $D = D\psi(t,\eta)$, $\psi_{,t} = \partial_t \psi$. Es sei $K = H \circ \psi$ oder $K(t,\eta) = H(t, \psi(t,\eta))$. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial K}{\partial y_m} = \sum_{n=1}^{2f} \frac{\partial H}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_m} = (D^T H_{,\xi})_m \quad \text{wegen } D_{mn} = \frac{\partial x_m}{\partial y_n} \qquad (9.13)$$

$$\Rightarrow K_{,\eta} = D^T H_{,\xi} \Rightarrow H_{,\xi} = (D^T)^{-1} K_{,\eta} \Rightarrow$$

$$J\dot{\eta} = (D^T J D J^{-1})^{-1} K_{,\eta} - J D^{-1} \psi_{,t} = K_{,\eta} - D^T J \psi_{,t} \qquad (9.14)$$

Wir müssen zeigen, daß auch der zweite Term auf der rechten Seite von (9.14) (lokal) ein Gradient ist, oder daß die Rotation von $D^T J \psi_{,t}$ verschwindet. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(D^T J \psi_{,t})_\ell = \frac{\partial}{\partial y_k} \sum_{m=1}^{2f} \frac{\partial x_m}{\partial y_\ell} (J\psi_{,t})_m = \sum_{m=1}^{2f} \frac{\partial^2 x_m}{\partial y_k \partial y_\ell} (J\psi_{,t})_m \qquad (9.15)$$
$$+ (D^T J D_{,t})_{\ell k}$$

mit $D_{,t} = \partial_t D = \frac{\partial}{\partial t} D\Psi$ und $\frac{\partial^2 x_m}{\partial y_k \partial y_l} = \frac{\partial^2 x_m}{\partial y_l \partial y_k}$ gilt

$$(\operatorname{rot} D^T J \Psi_{,t})_{kl} = \frac{\partial (D^T J \Psi_{,t})_l}{\partial y_k} - \frac{\partial (D^T J \Psi_{,t})_k}{\partial y_l} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (D^T J D_{,t}) = (D^T J D_{,t})^T \qquad (9.16)$$

(9.16) folgt aus $(D^T J D_{,t})^T = D_{,t}^T J^T D = - D_{,t}^T J D$ und

$$D^T J D_{,t} + D_{,t}^T J D = \frac{\partial}{\partial t} D^T J D = 0 \qquad (9.17)$$

Eine weitere lokale Charakterisierung eines kanonischen Diffeomorphismus erfolgt mit Hilfe der Poisson-Klammern. Für glatte Funktionen f, g im Phasenraum ist diese definiert als

$$\{f, g\}(\xi) = \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right\} = f_{,\xi}^T J g_{,\xi} \qquad (9.18)$$

Offenbar gilt für die Koordinatenfunktionen

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \ , \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \qquad (9.19)$$

Wir zeigen: ist

$$\Psi : (q_1, p_1, \dots q_f, p_f) \to (Q_1, P_1, \dots Q_f, P_f) \qquad (9.20)$$

kanonisch, so gilt für alle f, g und ξ

$$\{f \circ \Psi, g \circ \Psi\}(\xi) = \{f, g\} \circ \Psi(\xi) \qquad (9.21)$$

Umgekehrt ist Ψ kanonisch, falls (9.21) gilt, und sogar, falls nur für alle ξ und $1 \le i, j \le f$ gilt

$$\{Q_i, Q_j\}(\xi) = \{P_i, P_j\}(\xi) = 0 \ , \quad \{P_i, Q_j\}(\xi) = \delta_{ij} \qquad (9.22)$$

Denn nach der Kettenregel gilt mit $\eta = \Psi(\xi)$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(f \circ \Psi)(\xi) = \sum_{n=1}^{2f} \frac{\partial f}{\partial y_n}(\eta) \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \Rightarrow (f \circ \Psi)_{,\xi} = D^T f_{,\eta}$$

$$D = D\Psi(\eta) \in Sp(f, \mathbb{R}) \Rightarrow D^T \in Sp(f, \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{f \circ \Psi, g \circ \Psi\}(\xi) = (f \circ \Psi)_{,\xi}^T J (g \circ \Psi)_{,\xi} =$$

$$= f_{,\eta} D J D^T g_{,\eta} = \{f, g\} \circ \Psi(\xi) \qquad (9.23)$$

Die Umkehrung ist ebenso einfach: sei $\xi = (x_1 \dots x_{2f}) = (q_1, p_1, \dots)$, $\eta = (y_1 \dots y_{2f}) = (Q_1, P_1, \dots)$. Dann folgt aus (9.13, 19, 22):

$$\{x_m, x_n\} = J_{mn} = \{y_m, y_n\}(\xi) = y_{m,\xi}^T J y_{n,\xi} = Dx_{m,\xi} J Dx_{n,\xi}^T = (DJD^T)_{mn} \qquad (9.24)$$

Man sieht also, daß die folgenden Abbildungen kanonisch sind:

$$Q_i(\xi) = q_{\pi(i)}, \quad P_i(\xi) = p_{\pi(i)} \qquad \pi \text{ Permutation von } \{1, \dots f\}$$

und

$$Q_1(\xi) = p_1, \quad P_1(\xi) = -q_1, \quad y_i(\xi) = x_i \text{ für } i > 2 \qquad (9.25)$$

Kontakttransformationen: Sei (heuristisch) $\eta = \Psi_t(\xi)$ eine kanonische Transformation, die jedes kanonische System $J\dot{\xi} = H_{,\xi}$ mit Hamiltonfunktion $H(\xi, t)$ in ein kanonisches System $J\dot{\eta} = K(\eta, t)$ transformiert. Nach (5.65) sind die kanonischen Gleichungen notwendig und hinreichend für die Extremalität von

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H\} dt \quad \text{und} \quad \int_{t_1}^{t_2} \{\sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - K\} dt \qquad (9.26)$$

(5.16) liefert eine hinreichende Bedingung, wann für zwei Lagrangefunktionen die extremalen Bahnen identisch sind. Hinreichend ist die Existenz einer Funktion $M(\xi, t)$, derart daß identisch in $\xi, \dot{\xi}, t$ gilt

$$\sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - H + \sum_{k=1}^{f} \{\frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M}{\partial p_k} \dot{p}_k\} + \frac{\partial M}{\partial t} = \sum_{k=1}^{f} P_k \dot{Q}_k - K \qquad (9.27)$$

wobei $\dot{Q}_k = \sum_{\ell=1}^{f} (\frac{\partial Q_k}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial Q_k}{\partial p_\ell} \dot{p}_\ell) + \frac{\partial Q_k}{\partial t}$ aus der allgemeinen Transformationsformel $\dot{\eta} = D\Psi_t(\xi)\dot{\xi} + \partial_t \Psi$ folgt. In differentieller Form, mit $\dot{q}_k dt = dq_k$, $\dot{Q}_k dt = dQ_k$ und dem totalen Differential dM der Funktion M,

$$dM = \frac{\partial M}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^{f} \{\frac{\partial M}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial M}{\partial p_k} dp_k\} \qquad (9.28)$$

wird (9.27) zu einer Identität von Differentialformen; nämlich von Integranden für Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^{2f+1}$ der Koordinaten (ξ, t):

$$\sum_{k=1}^{f} p_k dq_k - H dt + dM = \sum_{k=1}^{f} P_k dQ_k - K dt \qquad (9.29)$$

Wir nehmen an, es gebe eine Permutation π von $\{1, \dots f\}$ und eine ganze Zahl $0 \le a \le f$, derart daß im Punkte (ξ_0, t_0) die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial(Q_{\pi(1)} \cdots Q_{\pi(a)}, P_{\pi(a+1)} \cdots P_{\pi(f)})}{\partial(p_1, p_2 \; \cdots \; p_f)} \tag{9.30}$$

nichtsingulär ist. Dann lassen sich in einer Umgebung von (ξ_0, t_0) aus den f Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_{\pi(\alpha)} &= Q_{\pi(\alpha)}(\xi, t) \qquad 1 \le \alpha \le a \\ P_{\pi(\alpha)} &= P_{\pi(\alpha)}(\xi, t) \qquad a+1 \le \alpha \le f \end{aligned} \tag{9.31}$$

die $p_1 \cdots p_f$ lokal als Funktionen der $(q_1 \cdots q_f, Q_{\pi(1)} \cdots P_{\pi(f)}, t)$ ausdrücken. Mit

$$S_{\pi a} \equiv \sum_{\beta=a+1}^{f} Q_{\pi(\beta)} P_{\pi(\beta)} - M = S_{\pi a}(q_1 \cdots q_f, Q_{\pi(1)} \cdots P_{\pi(f)}, t)$$

wird (9.29) wegen $d(Q_{\pi(\beta)} P_{\pi(\beta)}) = Q_{\pi(\beta)} dP_{\pi(\beta)} + P_{\pi(\beta)} dQ_{\pi(\beta)}$ zu

$$\sum_{k=1}^{f} p_k dq_k - H\,dt + K\,dt + \sum_{\beta=a+1}^{f} Q_{\pi(\beta)} \, dP_{\pi(\beta)} - \sum_{\alpha=1}^{f} P_{\pi(\alpha)} \, dQ_{\pi(\alpha)} = dS_{\pi a} \tag{9.32}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Koordinatendifferentiale $dq_1 \cdots dq_f$, $dQ_{\pi(\alpha)}$ $(1 \le \alpha \le a)$, $dP_{\pi(\beta)}$ $(a+1 \le \beta \le f)$ und dt kann (9.32) nur gelten, wenn

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial S_{\pi a}}{\partial q_k} \quad (1 \le k \le f), \qquad K = H + \frac{\partial S_{\pi a}}{\partial t} \\ P_{\pi(\alpha)} &= -\frac{\partial S_{\pi a}}{\partial Q_{\pi(\alpha)}} \quad (1 \le \alpha \le a), \qquad Q_{\pi(\beta)} = \frac{\partial S_{\pi a}}{\partial P_{\pi(\beta)}} \quad (a+1 \le \beta \le f) \end{aligned} \tag{9.33}$$

Falls es zu ψ ein $S_{\pi a}$ mit (9.33) gibt, so heisst $S_{\pi a}$ die *erzeugende Funktion* der Transformation, und man sieht aus der heuristischen Herleitung, daß ψ dann kanonisch ist und für jedes kanonische mechanische System mit der Hamiltonfunktion H neue kanonische Gleichungen mit der Hamiltonfunktion $K = H + \frac{\partial S_{\pi a}}{\partial t}$ liefert. Man kann zeigen (→ Arnold), daß *jede* kanonische Transformation ψ_t lokal durch ein $S_{\pi a}$ erzeugt wird, d.h. durch *eine* Funktion an Stelle der 2f Koordinatenfunktionen $y_m(\xi,t)$, genau wie für kanonische Flüsse $\Phi_{t,s}$ das erzeugende Vektorfeld $\dot{\xi} = -J H_{,\xi}$ gradient einer Funktion $H(\xi,t)$ ist.

Beispiel: eine nichtsinguläre Koordinatentransformation

$$(q_1, \dots, q_f) \longrightarrow (Q_1(q_1,\dots,q_f,t), \dots, Q_f(q_1,\dots,q_f,t)) \qquad (9.34)$$

kann mit der erzeugenden Funktion

$$S(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t) = \sum_{k=1}^{f} P_k Q_k(q_1,\dots,q_f,t) \qquad (9.35)$$

zu einer kanonischen Transformation des Phasenraums ergänzt werden mit

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{f} P_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \qquad (9.36)$$

Die Zeitevolution $\xi = \Phi_{t,s}(\eta)$ zu $J\dot{\xi} = H_{,\xi}$ kann für kleine $t-s$ als kanonische Transformation nahe bei der Identität (mit erzeugender Funktion $S_0 = \sum_{k=1}^{f} q_k P_k$) durch eine erzeugende Funktion $S(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t,s)$ beschrieben werden mit der Taylor-Reihe

$$S = S_0 + (t-s) S_1 + O((t-s)^2) \qquad (9.37)$$

Aus (9.33) erhält man

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = P_k + (t-s)\frac{\partial S_1}{\partial q_k} + O((t-s)^2)$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = q_k + (t-s)\frac{\partial S_1}{\partial P_k} + O((t-s)^2)$$

$$\Rightarrow \dot{p}_k(s) = \lim_{t \to s} \frac{p_k - P_k}{t-s} = \frac{\partial S_1}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (9.38)$$

$$\dot{q}_k(s) = \lim_{t \to s} \frac{q_k - Q_k}{t-s} = -\frac{\partial S_1}{\partial P_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Also ist für geeignetes S $\; -H = S_1$ "infinitesimale erzeugende Funktion".

Erzeugende Funktionen spielen in der Hamilton-Jacobi Theorie eine wichtige Rolle, und zwar bei der Integration vorher unlösbarer mechanischer Probleme (z.B. 2-Zentren-Problem) und bei dem Übergang zur Wellenmechanik.

b.) <u>Symmetrien und Erhaltungssätze</u>: Wir studieren ein N-Teilchensystem im $\mathbb{R}^3$ mit Hamiltonfunktion $H(\xi,t)$. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß der Fluss $\Phi_{t,s}$ global definiert ist (wie z.B. für (5.69)). Wir wollen den Zusammenhang zwischen den zehn Erhaltungsgrössen eines abgeschlossenen Systems ($\underline{P}$, $\underline{Q}-t\underline{P}/M$, H, $\underline{L}$) und der Invarianz der Hamiltonfunktion bezüglich Untergruppen der Galileigruppe im kanonischen Formalismus aufzeigen. Gegenüber den entsprechenden Aussagen in der Newton'schen (§1) und Lagrange'schen Mechanik (§5) wird dieser Zusammenhang in der Hamilton'schen Mechanik in noch grösserer Schönheit erstrahlen (modulo Hochnebel).

<u>Energiesatz</u>: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(A) $H(\xi,t)=H(\xi,t+s)\ \forall t,s$ (Zeittranslationsinvarianz)

(B) $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ (autonomes System)

(C) Für jede Integralkurve $\xi(t)$ ist $H(\xi(t),t)$ zeitlich konstant (Energieerhaltung)

Der Zusammenhang zwischen (A) und (B) ist elementar. Auf Grund der kanonischen Gleichungen gilt

$$\frac{d}{dt}H(\xi(t),t)=-\dot{\xi}(t)^T J\,\dot{\xi}(t)+\frac{\partial H}{\partial t}(\xi(t),t)=\frac{\partial H}{\partial t}(\xi(t),t) \qquad (9.39)$$

Da für festes t $\xi(t)$ den ganzen Phasenraum durchläuft, sind (B) und (C) äquivalent.

<u>Impulssatz</u>: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(A) $H(\underline{q}_1,\dots\underline{q}_N,\underline{p}_1\dots\underline{p}_N,t)=H(\underline{q}_1+\underline{a},\dots\underline{q}_N+\underline{a},\underline{p}_1\dots\underline{p}_N,t)\ \forall\underline{a}$ (Raumtransl. inv.)

(B) $\sum_{n=1}^N \frac{\partial H}{\partial \underline{q}_n}=0$

(C) Für jede Integralkurve $\xi(t)$ ist $\sum_{n=1}^N \underline{p}_n(t)=\underline{P}(t)$ zeitlich konstant (Impulserhaltung)

(A) besagt, daß H nur von den Relativkoordinaten abhängt und (B) ist die differentielle Form von (A). Die kanonischen Gleichungen liefern die Äquivalenz von (B) und (C):

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} \underline{p}_n(t) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \underline{q}_n}(\xi(t),t) \qquad (9.40)$$

<u>Drehimpulssatz</u>: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(A) $H(\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_N, \underline{p}_1 \cdots \underline{p}_N, t) = H(R\underline{q}_1 \cdots R\underline{q}_N, R\underline{p}_1 \cdots R\underline{p}_N) \quad \forall\, R \in SO(3)$ (Rotationsinvarianz)

(B) $\sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \underline{q}_n} \wedge \underline{q}_n + \frac{\partial H}{\partial \underline{p}_n} \wedge \underline{p}_n \right\} = 0$

(C) Für jede Integralkurve ist $\sum_{n=1}^{N} \underline{q}_n(t) \wedge \underline{p}_n(t) = \underline{L}(t)$ zeitlich konstant (Drehimpulserhaltung)

Zum Beweis betrachten wir die 1-parametrigen Untergruppen $R(\underline{e},\varphi)$ mit fester Drehachse $\underline{e}$. Wenn man (A) via (B.36) nach φ differenziert und dann $\varphi = 0$ setzt, so erhält man nach der Kettenregel

$$\sum_{n=1}^{N} \left\{ (\underline{e} \wedge \underline{q}_n) \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{q}_n} + (\underline{e} \wedge \underline{p}_n) \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{p}_n} \right\} = \underline{e} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left\{ \underline{q}_n \wedge \frac{\partial H}{\partial \underline{q}_n} + \underline{p}_n \wedge \frac{\partial H}{\partial \underline{p}_n} \right\} = 0 \qquad (9.41)$$

Da $\underline{e}$ beliebig ist, erhält man (B). Umgekehrt folgt aus (B) für alle $'\xi$, t und $\underline{e}$: $0 = \frac{\partial}{\partial \varphi} H(R(\underline{e},\varphi)'\underline{q}_1, \cdots R(\underline{e},\varphi)'\underline{p}_N, t)\big|_{\varphi=0}$. Setzt man $'\underline{q}_1 = R(\underline{e},\varphi)\underline{q}_1, \cdots {}'\underline{p}_N = R(\underline{e},\varphi)\underline{p}_N$, so erhält man für alle φ: $\frac{\partial}{\partial \varphi} H(R(\underline{e},\varphi)\underline{q}_1, \cdots R(\underline{e},\varphi)\underline{p}_N, t) = 0$, also (A). Ferner zeigen die kanonischen Gleichungen die Äquivalenz von (B) und (C):

$$\frac{d}{dt}\underline{L}(t) = \sum_{n=1}^{N} \{ \dot{\underline{q}}_n \wedge \underline{p}_n + \underline{q}_n \wedge \dot{\underline{p}}_n \} = -\sum_{n=1}^{N} \left\{ \underline{q}_n \wedge \frac{\partial H}{\partial \underline{q}_n} + \underline{p}_n \wedge \frac{\partial H}{\partial \underline{p}_n} \right\} \qquad (9.42)$$

Im folgenden ist es zweckmäßig, durch eine kanonische Transformation auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten überzugehen. Die <u>Jacobi Koordinaten</u> verallgemeinern (3.2):

$$\underline{Q}_1 = \underline{q}_2 - \underline{q}_1, \quad \underline{Q}_2 = \underline{q}_3 - \frac{m_1 \underline{q}_1 + m_2 \underline{q}_2}{m_1 + m_2}, \quad \ldots$$

$$\underline{Q}_{N-1} = \underline{q}_N - \sum_{n=1}^{N-1} m_n \underline{q}_n \Big/ \sum_{n=1}^{N-1} m_n, \quad \underline{Q}_N = \sum_{n=1}^{N} m_n \underline{q}_n \Big/ \sum_{n=1}^{N} m_n$$

$$\underline{P}_1 = \frac{m_1 \underline{p}_2 - m_2 \underline{p}_1}{m_1 + m_2}, \quad \underline{P}_2 = \frac{(m_1+m_2)\underline{p}_3 - m_3(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (9.43)$$

$$\underline{P}_{N-1} = \left(\sum_{n=1}^{N-1} m_n \underline{p}_N - m_N \sum_{n=1}^{N-1} \underline{p}_n\right) \Big/ \sum_{n=1}^{N} m_n, \quad \underline{P}_N = \sum_{n=1}^{N} \underline{p}_n$$

Man beweist, daß

$$\{P_k^l, P_m^n\} = \{Q_k^l, Q_m^n\} = 0, \quad \{P_k^l, Q_m^n\} = \delta_{km}\delta_{ln} \qquad (9.44)$$

gilt, und daher ist (9.43) kanonisch. Die kinetische

Energie bleibt eine diagonale quadratische Form in den $\underline{P}_i$:

$$T = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^2}{2m_n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{P_n^2}{2\mu_n} + \frac{P_N^2}{2M} = T_r + T_s \tag{9.45}$$

$$\mu_n = m_{n+1}(m_1 + \cdots m_n) / \sum_{i=1}^{n+1} m_i \qquad (1 \le i \le N-1)\,, \quad M = \sum_{n=1}^{N} m_n$$

und für den totalen Drehimpuls gilt

$$\underline{L} = \sum_{n=1}^{N} \underline{q}_n \wedge \underline{p}_n = \sum_{n=1}^{N} \underline{Q}_n \wedge \underline{P}_n = \underline{L}_r + \underline{L}_s \tag{9.46}$$

Die Bedeutung von (9.43) ist für N=4 aus Fig 9.1 ersichtlich

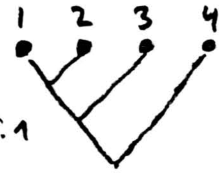


Fig. 9.1

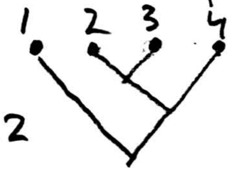


Fig. 9.2

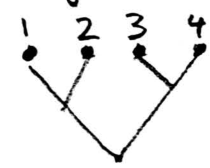


Fig. 9.3

Man wählt als Ortskoordinaten die Relativkoordinate von 1 und 2, die Relativkoordinate von 3 zum Schwerpunkt von 1 und 2, von 4 zum Schwerpunkt von 1,2,3 und die Koordinate des Schwerpunkts von 1,2,3,4. Dann definiert man nach (9.35,36) die Transformation der Impulse. Die "Kopplungsschemata" von Fig. 9.2, 9.3 liefern andere Jacobi-Koordinaten mit den gleichen guten Eigenschaften. Die Wahl von Fig. 9.3 ist z.B. zweckmäßig, wenn man die Streuung eines gebundenen Zustandes von 1,2 mit einem von 3,4 untersucht.

<u>Schwerpunktsatz</u>: Für raumtranslationsinvariante Systeme, d.h. für $H = H(\underline{Q}_1 \cdots \underline{Q}_{N-1}, \underline{P}_1 \cdots \underline{P}_N, t)$, sind äquivalent:

(A) H ist invariant unter allen Geschwindigkeitstransformationen

$${}'\underline{q}_n = \underline{q}_n + \underline{v}t\,, \quad {}'\underline{p}_n = \underline{p}_n + m_n \underline{v} \tag{9.47}$$

(B) $H = \underline{P}_N^2/2M + H_r(\underline{Q}_1 \cdots \underline{Q}_{N-1}, \underline{P}_1 \cdots \underline{P}_{N-1}, t)$ (9.48)

(C) Für jede Integralkurve ist zeitlich konstant

$$\underline{A}(t) = \underline{P}_N(t)t - M\underline{Q}_N(t) = -M\underline{Q}_N(0) \tag{9.49}$$

Wir zeigen: (9.47) ist kanonisch mit der erzeugenden Funktion

$$S = \sum \underline{q}_n {}'\underline{p}_n + \underline{v} \cdot \sum ({}'\underline{p}_n t - m_n \underline{q}_n) - \frac{M}{2} \underline{v}^2 t \tag{9.50}$$

Denn nach (9.33) gilt:

$$\underline{p}_k = \frac{\partial S}{\partial \underline{q}_k} = {}'\underline{p}_k - m_k \underline{v} \;, \qquad {}'\underline{q}_k = \frac{\partial S}{\partial {}'\underline{p}_k} = \underline{q}_k + \underline{v}t \tag{9.51}$$

und die Hamiltonfunktion K in den neuen Koordinaten wird $K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$, also mit ${}'\underline{Q}_1, \dots {}'\underline{P}_N$ als Jacobi-Koordinaten zu ${}'\xi$: (9.52)

$$K({}'\underline{Q}_1, \dots {}'\underline{P}_N, t) = H({}'\underline{Q}_1, \dots {}'\underline{Q}_{N-1}, {}'\underline{P}_1 \dots {}'\underline{P}_{N-1}, {}'\underline{P}_N - M\underline{v}, t) + \underline{v} \cdot {}'\underline{P}_N - \frac{M}{2} v^2$$

Die Bedingung, daß (9.52) gleich $H({}'\underline{Q}_1, \dots {}'\underline{Q}_{N-1}, {}'\underline{P}_1 \dots {}'\underline{P}_N, t)$ sein soll, führt auf die Differentialgleichung

$$\underline{P}_N = M \frac{\partial H}{\partial \underline{P}_N} (\underline{Q}_1, \dots \underline{Q}_{N-1}, \underline{P}_1, \dots \underline{P}_N, t) \tag{9.53}$$

mit Lösung (9.48). Dies zeigt (A) $\Leftrightarrow$ (B). Für (9.48) liefern die kanonischen Gleichungen $\dot{\underline{P}}_N = \underline{0}$ und $M\dot{\underline{Q}}_N = \underline{P}_N$, also (C). Allein mit der Raumtranslationsinvarianz gilt $\dot{\underline{P}}_N = 0$ und $\dot{\underline{A}} = 0$ liefert dann (9.53) und damit (B).

In Verallgemeinerung von §4 nennt man ein kanonisches N-Teilchensystem ($N \geq 2$) mit Hamiltonfunktion $H(\xi, t)$ *abgeschlossen*, wenn für jede Integralkurve $\xi(t)$ die Energie H, der Impuls $\underline{P}$, der Drehimpuls $\underline{L}$ und die Schwerpunktsverschiebung $\underline{A}$, die "10 klassischen Integrale der Bewegung", erhalten sind. H hat dann in Jacobi-koordinaten genau die Form

$$H = \underline{P}_N^2 / 2M + H_r(\underline{Q}_1, \dots \underline{Q}_{N-1}, \underline{P}_1, \dots \underline{P}_{N-1}) \tag{9.54}$$

$$H_r(\underline{Q}_1, \dots \underline{Q}_{N-1}, \underline{P}_1, \dots \underline{P}_{N-1}) = H_r(R\underline{Q}_1, \dots R\underline{P}_{N-1}) \quad \forall R \in SO(3)$$

und hat als Symmetriegruppe die Galilei-Gruppe $\mathcal{G}_+^\uparrow$. In der *aktiven* Interpretation führt jedes $G \in \mathcal{G}_+^\uparrow$ Integralkurven $\xi(t)$ von H in Integralkurven $\xi^G(t)$ von H über, mit $G = (s, \underline{a}, \underline{v}, R)$ und

$$\begin{aligned} \underline{Q}_n^G(t) &= R\underline{Q}_n(t+s) \qquad 1 \leq n \leq N-1 \\ \underline{Q}_N^G(t) &= R\underline{Q}_N(t+s) + \underline{v}t + \underline{a} \end{aligned} \tag{9.55}$$

In der *passiven* Interpretation erzeugen die Galilei-

Transformationen kanonische Koordinatentransformationen im Phasenraum. Sei $\xi = (q_1, \dots p_N)$ die Anfangsbedingung zur Zeit 0 und $\eta = (Q_1, \dots P_N) = \phi_t(\xi)$ der Fluss des abgeschlossen Systems. Nach (9.37) mit vertauschten Rollen von ξ und η hat ϕ_t für kleine t eine erzeugende Funktion

$$S(\underline{q}_1, \dots \underline{q}_N, \underline{P}_1 \dots \underline{P}_N, t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{q}_n \cdot \underline{P}_n + t H(\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N, \underline{P}_1 \dots \underline{P}_N) + O(t^2) \qquad (9.56)$$

mit H als infinit. erzeugende Funktion. Das gleiche gilt nach (9.50) für die Geschwindigkeitstransformationen:

$$S_{\underline{v}}(\underline{q}_1, \dots \underline{P}_N, t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{q}_n \cdot \underline{P}_n + \underline{v} \cdot \underline{A} + O(|\underline{v}|^2) \qquad (9.57)$$

mit $\underline{A}$ als infinit. erzeugende Funktion, und ebenso für die Raumtranslationen und Rotationen nach (9.35)

$$S_{\underline{a}}(\underline{q}_1, \dots \underline{P}_N) = \sum_{n=1}^{N} \underline{q}_n \cdot \underline{P}_n + \underline{a} \cdot \underline{P} \qquad (9.58)$$

$$S_{\underline{e}, \varphi}(\underline{q}_1, \dots \underline{p}_N) = \sum_{n=1}^{N} R(\underline{e}, \varphi) \underline{q}_n \cdot \underline{P}_n = \sum_{n=1}^{N} \underline{q}_n \cdot \underline{P}_n + \underline{e} \cdot \underline{L} \varphi + O(\varphi^2)$$

mit $\underline{P}$ und $\underline{L} \cdot \underline{e}$ als infinitesimale erzeugende Funktionen.

In einem abgeschlossenen N-Teilchensystem sind die 10 klassischen Integrale die infinitesimalen Erzeugenden von 10 1-parametrigen Gruppen von kanonischen Transformationen im Phasenraum, die zusammengesetzt eine Darstellung der Galilei-Gruppe $\mathcal{G}_+^\uparrow$ stiften. Die Zeittranslationen wirken im Phasenraum i.a. nichtlinear (Ausnahmen in §6) mit der infinitesimalen erzeugenden Funktion H, die für die Dynamik des Systems charakteristisch ist. Raumtranslationen, Rotationen und Geschwindigkeitstransformationen wirken linear mit infinit. erzeugenden Funktionen $\underline{P}$, $\underline{L}$, $\underline{A}$ und systemunabhängig bis auf die Konstanten $m_1, \dots m_N$ (Kinematik). Unter $G \in \mathcal{G}_+^\uparrow \to \psi^G$ ist H invariant.

$$K(\eta, t) = H(\xi(\eta, t)) + \frac{\partial S}{\partial t}(\xi(\eta, t), \eta, t) = H(\eta) \qquad (9.59)$$

für $\psi^G : \xi \to \eta(\xi, t)$.

§10. Integrable Systeme und Störungen

Im Phasenraum erzeugt jede glatte Funktion H (lokal) eine kanonische Zeitevolution ϕ_t^H, wobei – falls nicht explizit vermerkt – keine der betrachteten Funktionen zeitabhängig sein soll. Dann ist G ein Integral der H-Bewegung, falls G invariant unter ϕ_t^H ist:

$$G(\xi) = G(\phi_t^H(\xi)) \quad \forall t, \xi \iff 0 = \frac{d}{dt} G(\phi_t^H(\xi))\Big|_{t=0} =$$
$$= \langle G_{\xi}, \dot{\xi} \rangle = -\langle G_{\xi}, J H_{,\xi} \rangle = \{H, G\}(\xi) \quad \forall \xi \qquad (10.1)$$

d.h. die Poisson Klammer von G und H verschwindet. Da $\{H, G\} = -\{G, H\}$, ist (10.1) gleichbedeutend damit, daß H invariant unter der G-Bewegung ϕ_t^G ist. Dies ist die abstrakteste und schönste Fassung des Zusammenhanges von Symmetrie und Erhaltungssatz: Wenn G und H kanonische Flüsse ϕ_t^G, ϕ_t^H erzeugen, so sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(A) $\{G, H\} = 0$

(B) $G(\phi_t^H(\xi)) = G(\xi)$ (Erhaltung von G für H-Dynamik)

(C) $H(\phi_t^G(\xi)) = H(\xi)$ (Symmetrie von H)

Beispiel: Die $\underline{e}$-Komponente des Drehimpulses eines Teilchens, $\underline{e} \cdot \underline{L} = \underline{e} \cdot (\underline{q} \wedge \underline{p}) = G$ erzeugt einen Fluss ϕ_t^G mit kanonischen Gleichungen

$$\dot{\underline{q}} = \frac{\partial G}{\partial \underline{p}} = \underline{e} \wedge \underline{q}, \quad \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial G}{\partial \underline{q}} = \underline{e} \wedge \underline{p} \qquad (10.2)$$

also dreht ϕ_t^G $\underline{q}$ und $\underline{p}$ um die Achse $\underline{e}$ mit Drehwinkel t. Wir finden das 'klassische' Resultat, daß $\underline{e} \cdot \underline{L}$ genau dann erhalten ist, wenn H unter Rotationen um die $\underline{e}$-Achse invariant ist, oder falls

$$\{H, \underline{e} \cdot \underline{L}\} = -\underline{e} \cdot \{\underline{q} \wedge \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} + \underline{p} \wedge \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}\} = 0 \qquad (10.3)$$

gilt, also (9.42).

Trivialerweise gilt $\{H, H\} = 0$; in einem autonomen System bleibt die Energie H erhalten.

Die Poisson Klammer $\{\cdot,\cdot\}$ hat eine interessante Struktur

(a) $\{F,G\} = -\{G,F\}$ (Antisymmetrie) ($c_i \in \mathbb{R}$)

(b) $\{c_1F_1 + c_2F_2, G\} = c_1\{F_1,G\} + c_2\{F_2,G\}$ (Linearität)

(c) $\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = 0$ (Jacobi Identität)

(d) $\{F, GH\} = \{F,G\}H + \{F,H\}G$ (Derivation)

(e) $\{F,G\} = 0 \;\; \forall G \implies F_{,\xi} = 0$ (Vollständigkeit)

(a), (b), (d) sind trivial, (e) folgt aus

$$\{F, q_k\} = \frac{\partial F}{\partial p_k} \quad , \quad \{F, p_k\} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{10.4}$$

und (c) durch Nachrechnen [L1]. Aus der Jacobi-Identität folgt, daß wenn F und G H-Integrale sind, so auch $\{F,G\}$:

$$\begin{matrix}\{F,H\}=0 \\ \{G,H\}=0\end{matrix} \implies \{\{F,G\},H\} = -\{\{G,H\},F\} - \{\{H,F\},G\} = 0 \tag{10.5}$$

Beispiel: Für den Drehimpuls $\underline{L} = \underline{q} \wedge \underline{p}$ gilt

$$\{L_1, L_2\} = -L_3 \quad \text{(zykl)} \tag{10.6}$$

Sind also L_1 und L_2 H-Integrale, so auch L_3, oder in der Sprache der Symmetrien: ist H invariant unter allen Rotationen um zwei nichtparallele Achsen, so ist H unter allen Rotationen in SO(3) invariant.

In (9.14) hatten wir gesehen, daß eine autonome kanonische Transformation $\xi = \psi(\eta)$ die Bewegungsgleichung $J\dot{\xi} = H_{,\xi}$ in $J\dot{\eta} = K_{,\eta}$, $K = H \circ \psi$ transformiert. Ist H autonom, so gilt für die Flussabbildungen für H und $H\circ\psi$:

$$\psi^{-1} \circ \phi_t^H \circ \psi = \phi_t^{H\circ\psi} \tag{10.7}$$

Denn beide Seiten von (10.7) sind 1-parametrige Gruppen von kanonischen Transformationen und sie haben nach dem Satz von Liouville je eine Hamiltonfunktion, die identisch sind: für jede Funktion F auf dem Phasenraum gilt nach (10.1) und (9.2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F\left((\psi^{-1}\circ\phi_t^H\circ\psi)(\xi)\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(F\circ\psi^{-1})\left(\phi_t^H(\psi(\xi))\right)\Big|_{t=0} = \{H, F\circ\psi^{-1}\}(\psi(\xi)) \\ = \{H\circ\psi, F\}(\xi) &= \frac{d}{dt} F\left(\phi_t^{H\circ\psi}(\xi)\right)\Big|_{t=0}\end{aligned} \tag{10.8}$$

Man nennt Funktionen $H_1, \dots H_k$ auf dem Phasenraum <u>in Involution</u>, falls für alle $1 \le i, j \le k$ gilt

$$\{ H_i, H_j \} = 0 \tag{10.9}$$

Der folgende <u>Satz von Jacobi</u> ist der tiefe Grund dafür, warum in gewissen Fällen Hamilton'sche dynamische System durch geschickte Kombination der Erhaltungssätze "durch Quadraturen lösbar" werden:

Seien im $2f$-dim. Phasenraum $H_1, \dots H_f$ in Involution und $\operatorname{grad} H_1, \dots \operatorname{grad} H_f$ linear unabhängig. Dann kann man lokal $G_1, \dots G_f$ durch Quadraturen finden, derart daß $\zeta = (q_1, \dots q_f, p_1, \dots p_f) \to (G_1(\zeta), \dots G_f(\zeta), H_1(\zeta), \dots H_f(\zeta))$ eine kanonische Koordinatentransformation ist, d.h. es gilt

$$\{ G_i, G_j \} = \{ H_i, H_j \} = 0 \quad , \quad \{ H_i, G_j \} = \delta_{ij} \tag{10.10}$$

Zum Beweis zeigt man geometrisch [A2, S. 222], daß es $r_i \in \{q_i, p_i\}$, $1 \le i \le f$, gibt derart, daß $\operatorname{Det}\left(\frac{\partial H_i}{\partial r_j}\right) \neq 0$ gilt, und daher nach einer Transformation (9.25), daß

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_j}\right) \neq 0 \tag{10.11}$$

Dann kann man die $\pi = (p_1, \dots p_f)$ durch

$$H = (H_1, \dots H_f) = (H_1(\xi, \pi), \dots H_f(\xi, \pi)) \tag{10.12}$$

lokal diffeomorph ausdrücken, wobei $\xi = (q_1, \dots q_f)$:

$$\pi = \Phi(\xi, H) = (F_1(\xi, H), \dots F_f(\xi, H))$$
$$\operatorname{Det}\left(\frac{\partial F_i}{\partial H_j}\right) = \operatorname{Det}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_j}\right)^{-1} \tag{10.13}$$

Falls die Rotation von Φ bezüglich ξ Null ist, d.h. falls

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \iff \Phi_{,\xi} \equiv \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_j}\right) = \Phi_{,\xi}^T \tag{10.14}$$

gilt, so ist

$$S(\xi, H) = \int_{\xi_0}^{\xi} \sum F_i(\xi', H)\, dq_i' \tag{10.15}$$

vom Wege unabhängig und erzeugende Funktion für eine kanonische Transformation $(\xi, \pi) \to (G_1, \dots G_f, H_1, \dots H_f)$:

$$\Pi = \frac{\partial S}{\partial \xi} \quad , \quad \Gamma \equiv (G_1, \ldots G_f) \equiv \frac{\partial S}{\partial H} \,, \qquad (10.16)$$

wobei $\Pi = \frac{\partial S}{\partial \xi}(\xi, H)$ nach H auflösbar ist wegen $\frac{\partial S}{\partial \xi}(\xi, H) = \Phi(\xi, H)$ und (10.13). Die Transformation von (ξ, π) nach (Γ, H) ist nach Konstruktion "explizit" durch Bildung einer Umkehrfunktion (10.12) → (10.13) und Ausführung eines Kurvenintegrals (10.15) und dessen Ableitung (10.16). Diese Operationen werden Quadratur genannt.

Zum Beweis von (10.14) definieren wir $f \times f$ Matrizen

$$H_{,\xi} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\right) \quad , \quad H_{,\pi} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_j}\right) \qquad (10.17)$$

Die Differentiation von $H_i = H_i(\xi, \Phi(\xi, H))$ nach q_j führt auf

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial F_k}{\partial q_j} \iff H_{,\xi} + H_{,\pi} \Phi_{,\xi} = 0 \qquad (10.18)$$

Die Bedingung $\{H_i, H_j\} = 0$ führt auf die Matrixgleichung

$$0 = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_j}{\partial q_k} - \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \frac{\partial H_j}{\partial p_k} \right) \iff H_{,\pi} H_{,\xi}^T - H_{,\xi} H_{,\pi}^T = 0 \qquad (10.19)$$

Daraus folgt mit (10.11):

$$H_{,\pi} \Phi_{,\xi} H_{,\pi}^T + H_{,\xi} H_{,\pi}^T = H_{,\pi} \left(\Phi_{,\xi} H_{,\pi}^T + H_{,\xi}^T \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_{,\xi} H_{,\pi}^T + H_{,\xi}^T = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{,\pi} \Phi_{,\xi}^T + H_{,\xi} = 0 \qquad (10.20)$$

und die Subtraktion von (10.18) und (10.20) liefert $H_{,\pi}(\Phi_{,\xi} - \Phi_{,\xi}^T) = 0$ und mit (10.11) den Beweis von (10.14).

Ein autonomes kanonisches System mit Hamiltonfunktion H_1 heisst integrabel, falls es $f-1$ autonome H_1-Integrale $H_2, \ldots H_f$ gibt, die in Involution sind und für die $\operatorname{grad} H_1, \ldots \operatorname{grad} H_f$ fast überall im Phasenraum linear unabhängig sind. Nach dem Satz von Jacobi findet man kanonische Koordinaten $G_1, H_1, \ldots G_f, H_f$ durch Quadratur, für die die Bewegungsgleichungen trivial werden:

$$\dot G_1 = 1 \,, \quad \dot G_2 = \ldots = \dot G_f = \dot H_1 = \ldots = \dot H_f = 0 \qquad (10.21)$$

mit der Lösung (geradlinige Fluss der Geschwindigkeit 1 längs G_1-Achse):

$$G_1 = t + t_0 , \quad H_1 = E , \quad G_i = g_i , \quad H_i = h_i \quad (2 \le i \le f) \qquad (10.22)$$

wobei $t_0, E, g_2, \dots h_f$ Integrationskonstanten sind. Die Zeit t ist also die zur Energie kanonisch konjugierte Variable

<u>Beispiel</u>: In einem autonomen kanonischen System mit einem Freiheitsgrad berechnen wir die kanonische Transformation von (q,p) auf $(t+t_0, E)$ mit einer erzeugenden Funktion $S(q,E)$. Wir nehmen wie in (10.11) an, daß $\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$ ist, und deshalb aus $H(q,p) = E$ $\quad p = p(q,E)$ durch Elimination bekannt ist. Dann gilt nach (10.15)

$$S(q,E) = \int_{q_0}^{q} dq' \, p(q',E) \qquad (10.23)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = p \ , \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \int_{q_0}^{q} dq' \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} = \int_{q_0}^{q} dq' \left(\frac{dq'}{dt}\right)^{-1} = t - t_0$$

Für $H = p^2/2m + V(q)$ erhalten wir die Lösung von §2:

$$p(q,E) = \pm\sqrt{2m(E-V(q))} \ , \quad S(q,E) = \pm\int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2m(E-V(q'))}$$

$$\frac{\partial S(q,E)}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\sqrt{E-V(q')}} = t(q) - t(q_0) \qquad (10.24)$$

Von den zehn klassischen Integralen eines abgeschlossenen Systems sind sieben autonom: $\underline{P}, H, \underline{L}$ bzw. $\underline{P}, H_r, \underline{L}_r$ und die folgenden sechs in Involution:

$$\underline{P} , \ H_r , \ \|L_r\|^2 , \ L_r^3 \qquad (10.25)$$

Denn $\{P_i, P_j\} = 0$, $\{P_i, F_r\} = 0$ für jede Funktion der Relativkoordinaten, $\{H_r, \|L_r\|^2\} = \{H_r, L_r^3\} = 0$ nach dem Drehimpulssatz und nach (10.6) und der Derivationsregel:

$$\{\|L_r\|^2, L_r^3\} = \{(L_r^1)^2, L_r^3\} + \{(L_r^2)^2, L_r^3\} = 2 L_r^1 L_r^2 - 2 L_r^2 L_r^1 \qquad (10.26)$$

Daher ist das abgeschlossene 2-Körperproblem des §3 integrabel, nicht dagegen das $N \geq 3$ - Körperproblem, falls nicht für spezielle Potentiale $V(q_1, \dots q_N)$ weitere Integrale hinzukommen, wie bei den linearen Systemen des §6. Weitere integrable Systeme sind der kräftefreie Kreisel ($H_r, \|L_r\|^2, L_r^3$), der schwere symmetrische Kreisel

$(H_1, L_1^3, {}'L_1^3)$ in §7, das 2-Zentrenproblem und der geodätische Fluss auf einem Ellipsoid im $\mathbb{R}^N$ (s. [A27]) und der verlustfreie Laser (s. Hepp & Lieb in [M6]) und gewisse 1-dimensionale Probleme (Toda- oder Calogero-Wechselwirkung, s. [M6]).

<u>Nichtintegrable</u> autonome Systeme mit f Freiheitsgraden und $k<f$ autonomen Integralen $H = H_1, \dots H_k$ in Involution (mit grad $H_1, \dots$ grad H_k linear unabhängig) können durch Quadratur auf nichtautonome Systeme von $f-k$ Freiheitsgraden <u>reduziert</u> werden. Wir bringen den Spezialfall, wo H unabhängig von $\tau_2, \dots \tau_k$ ist, wobei $\tau_i \in \{p_i, q_i\}$. Dann sind die zu τ_i konjugierten Koordinaten $H_2, \dots H_k$ Integrale der Bewegung und die Zeitevolution der verbleibenden Freiheitsgrade entkoppelt:

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_1, p_1, H_2 \cdots H_k, q_{k+1}, \cdots p_f), \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1, p_1, H_2 \cdots H_f, q_{k+1} \cdots p_f) \tag{10.27}$$

Weiter ist H Integral der Bewegung von (10.27) und grad $H \neq 0$ bei festem $H_2, \dots H_k$. Sei z.B. $\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$. Dann kann man lokal auf $H = H_1$ nach p_1 auflösen:

$$p_1 = G(q_1, H_1, \eta, \xi), \quad \eta = (H_2, \dots H_k), \quad \xi = (q_{k+1}, \dots p_f) = (x_{2k+1}, \dots x_{2f}) \tag{10.28}$$

Differentiation von

$$H(q_1, G(q_1, H_1, \eta, \xi), \eta, \xi) = H_1 \tag{10.29}$$

nach x_i, $2k+1 \leq i \leq 2f$, ergibt mit $G = G(q_1, H_1, \eta, \xi)$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(q_1, G, \eta, \xi) + \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1, G, \eta, \xi)\frac{\partial G}{\partial x_i}(q_1, H_1, \eta, \xi) = 0 \tag{10.30}$$

Wir können jetzt q_1 statt t als neuen Bahnparameter in (10.27) einführen, indem wir die Gleichungen mit $k+1 \leq i \leq f$ durch $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$ dividieren. Da die Integralkurven von (10.27) stets auf (10.29) bleiben, kann man (10.30) benutzen:

$$\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_1, G, \eta, \xi) \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1, G, \eta, \xi) = -\frac{\partial G}{\partial p_i}(q_1, H_1, \eta, \xi) \tag{10.31}$$

$$\frac{dp_i}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1, G, \eta, \xi) \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1, G, \eta, \xi) = +\frac{\partial G}{\partial q_i}(q_1, H_1, \eta, \xi)$$

Man erhält also für die $\xi(q_1)$ bei festen Werten der Integrale $H_1, \dots H_k$ ein nichtautonomes System mit Hamiltonfunktion $-G(q_1, H_1, \eta, \xi)$. Die Zeitevolution des vollen Systems erhält man nach Lösung von (10.31):

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1, G, \eta, \xi) \Rightarrow t - t_0 = \int_{q_1^0}^{q_1} dq_1' \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1', G(q_1', H_1, \eta, \xi), \eta, \xi)$$

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \pm \frac{\partial H}{\partial H_i}, \; 2 \le i \le k, \Rightarrow \tau_i - \tau_i^0 = \pm \int_{t_0}^{t} dt' \frac{\partial H}{\partial H_i}(q_1(t'), p_1(t'), H_2 \cdots H_k, \xi(t')) \qquad (10.32)$$

<u>Nichtautonome Hamilton'sche Systeme</u> von f Freiheitsgraden können in autonome Systeme von $f+1$ Freiheitsgraden ein einem erweiterten Phasenraum <u>eingebettet</u> werden: zusätzlich zu $\xi = (q_1, \cdot\, p_f)$ führt man $q_{f+1} = t$ und $p_{f+1} = -E$ als Koordinaten ein und als neue Hamiltonfunktion

$$K(\xi, t, E) = H(\xi, t) - E \qquad (10.33)$$

Für die Abhängigkeit vom Bahnparameter s der kanonischen Gleichungen zu (10.33) gilt dann

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (10.34)$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial K}{\partial E} = 1, \quad \frac{\partial E}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (10.35)$$

Für die Anfangsbedingungen $\xi(s=0) = \xi(0)$, $t(s=0) = 0$, $E(s=0) = H(\xi(0), 0)$ folgt aus (10.35) $t = s$. (10.34) hat als Lösungen die Bahn des ursprünglichen Systems mit Anfangsbedingung $\xi(0)$ und $E(t) = H(\xi(t), t)$.

Mit Hilfe dieser Einbettung lässt sich der Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungssatz (S. 127) auch für nichtautonome Systeme formulieren [A2]. Man nennt $F(\xi, t)$ ein H-Integral, $H = H(\xi, t)$, falls F unter dem H-Fluss $\Phi^H_{t,s}$ invariant ist:

$$\frac{d}{dt} F(\Phi^H_{t,s}(\xi), t) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0 \qquad (10.36)$$

Offenbar sind die Aussagen "F ist H-Integral" und "H ist F-Integral" nicht mehr äquivalent, sind jedoch F und G H-Integrale, so auch $\{F, G\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} = \{\frac{\partial F}{\partial t}, G\} + \{F, \frac{\partial G}{\partial t}\} = -\{\{H, F\}, G\} - \{F, \{H, G\}\} = -\{H, \{F, G\}\}$$
$$(10.37)$$

<u>Winkel und Wirkungsvariable</u> (WWV) sind in der Hamilton'schen Mechanik natürliche Koordinaten, um quasiperiodische Bewegungen integrabler Systeme zu beschreiben, wie wir sie beim Kreisel (S. 107) angetroffen haben. In diesen Koordinaten läßt sich dann die approximative Lösung der Bewegungsgleichungen nichtintegrabler Systeme entwickeln, falls diese zu einem integrablen System unter dem Einfluss einer schwachen Störung gehören.

Auf S. 137 hatten wir für ein autonomes Hamiltonsches System mit $f=1$ und $\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$ eine erzeugende Funktion $S(q,E)$ konstruiert, die (q,p) kanonisch auf (t,E) transformiert. Falls für $E_1 < E < E_2$ alle Bahnen der H-Dynamik periodisch sind mit Periode $T(E)$, dann sieht der geradlinige Fluss in (t,E) wie Fig. 10.1 aus.

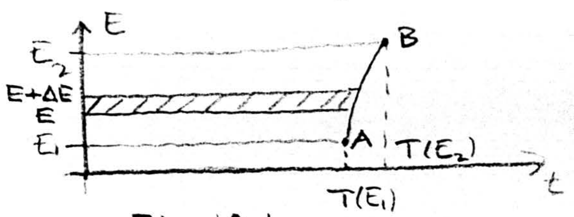


Fig. 10.1

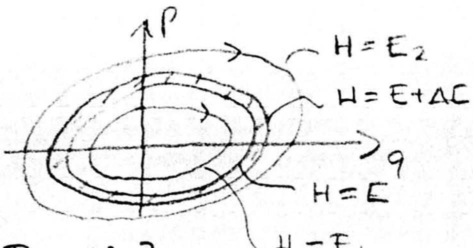


Fig. 10.2

Wegen $\xi(t,E) = \xi(t+T(E),E)$ sind entsprechende Punkte auf der E-Achse und auf $\overline{AB}$ zu identifizieren, so daß der Phasenraum ein verzogener Zylinder ist, der mit der Geschwindigkeit 1 umflossen wird. Durch eine weitere kanonische Transformation kann man den Zylinder entzerren. Sei $F(E)$ die von $\{H=E\}$ umschlossene Fläche im (q,p)-Raum (s. Fig. 10.2). Dann gilt $T(E) = \frac{dF(E)}{dE}$. Für $H = p^2/2m + V(q)$ hatten wir dies in (2.15) gesehen. Allgemeiner ist $F(E+\Delta E) - F(E)$ die gestrichelte Fläche in Fig. 10.2, und diese ist gleich der gestrichelten Fläche in Fig. 10.1, da $(q,p) \to (t,E)$ kanonisch und daher flächentreu ist. Für $\Delta E \to 0$ folgt $T(E) = dF(E)/dE$. Daher ist die folgende Transformation von (t,E) auf

$$w = \frac{2\pi t}{T(E)} \pmod{2\pi}, \qquad I = F(E)/2\pi \tag{10.27}$$

kanonisch, denn

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial t} & \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial E} & \frac{\partial I}{\partial E} \end{pmatrix} = \frac{1}{T(E)}\,\frac{dF(E)}{dE} = 1 \qquad (10.28)$$

w heisst <u>Winkelvariable</u> und I <u>Wirkungsvariable</u>, denn $I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$ hat die Dimension einer Wirkung (oder einer Drehimpulses). In den Koordinaten (t, E) war E die Hamiltonfunktion. Die transformierte Hamiltonfunktion ist $K(I) = F^{-1}(2\pi I)$ mit den kanonischen Gln.:

$$\dot w = \frac{d}{dI}F^{-1}(2\pi I) = 2\pi\left(\frac{dF(E)}{dE}\right)^{-1} = \frac{2\pi}{T(E)} = \frac{2\pi}{T(F^{-1}(2\pi I))}$$

$$\dot I = 0 \qquad (10.29)$$

In den Winkel- und Wirkungsvariablen hängt die Geschwindigkeit der Winkelbewegung von der Wirkungsvariablen ab, die ein Integral der Bewegung ist. Die funktionelle Abhängigkeit $2\pi/T(E)$, $I = F(E)/2\pi$, wird dynamisch bestimmt durch die Hamiltonfunktion. Dafür ist der Phasenraum rein kinematisch, d.h. H-unabhängig das direkte Produkt eines 1-dim. Torus mit einem Intervall. Die Äquivalenz dieses Bildes der Dynamik zu Fig. 10.1 und dem konventionellen Phasenportrait der Fig 10.2 exemplifiziert die Freiheit der Koordinatenwahl in der Hamilton'schen Mechanik, die weit über die Freiheit der Konfigurationskoordinaten in der Lagrange'schen Mechanik hinausgeht.

Für ein autonomes integrables kanonisches System von f Freiheitsgraden gilt der folgende <u>Satz von Arnold</u> [A2]:

Sei H_1 die Hamiltonfunktion eines autonomen Systems von f Freiheitsgraden und $H_2, \ldots H_f$ involutive H_1-Integrale mit $\mathrm{grad}\, H_1, \ldots \mathrm{grad}\, H_f$ linear unabhängig auf

$$T(\eta) = \{\xi \in \mathbb{R}^{2f} \mid H_1(\xi) = H_1, \ldots H_f(\xi) = H_f\} \qquad (10.30)$$

Falls $T(\eta)$ zusammenhängend und kompakt ist, so ist $T(\eta)$ diffeomorph zu einem f-dim. Torus. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und in $\bigcup_{|\eta-\eta'|<\varepsilon} T(\eta')$ kanonische Koordinaten $I_1, \dots I_f$ (Wirkungsvariable) und $w_1, \dots w_f$ (Winkelvariable, mod 2π) derart, daß die $I_1, \dots I_f$ nur Funktionen der $\eta' = (H_1', \dots H_f')$ sind. Die Transformation $(q_1, p_1, \dots q_f, p_f) \longrightarrow (w_1, I_1, \dots w_f, I_f)$ erfolgt durch Quadratur und die Bewegungsgleichungen der $H_1(I_1, \dots I_f)$-Dynamik sind trivial:

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial w_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1, \dots I_f \quad \text{Integrale der Bewegung}$$

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H_1}{\partial I_i} \equiv \nu_i(I_1, \dots I_f) \quad \text{Integral der Bewegung}$$

$$\Rightarrow \quad w_i(t) = w_i(0) + \nu_i(I_1, \dots I_f)\, t \quad \text{mod } 2\pi \qquad (10.31)$$

Ein f-dimensional Torus ist das direkte Produkt von f Kreisen. Auf $T(\eta) = \{(w_1, I_1, \dots w_f, I_f) \mid I_i = I_i(\eta),\ 0 \le w_i \le 2\pi\}$ ist der Fluss (10.31) <u>quasiperiodisch</u> mit Frequenzen $\nu_1, \dots \nu_f$. Die Bewegung ist genau dann <u>periodisch</u>, wenn alle ν_i ganzzahlige Vielfache einer Frequenz ν sind. Die extremste Aperiodizität liegt vor, wenn alle ν_i inkommensurabel sind, d.h. wenn für kein ganzzahliges f-Tupel $(n_1, \dots n_f) \neq (0, \dots 0)$ $\sum n_i \nu_i = 0$ gilt. In diesem Fall kommt die Bahnkurve jedem Punkt auf $T(\eta)$ beliebig nahe (<u>ergodischer</u> Fluss, s. Fig. 7.4).

<u>Beispiel</u>: Für den schweren symmetrischen Kreisel mit den involutiven Integralen H, L_3 und ${}'L_3$ ist der Satz von Arnold anwendbar, da der Konfigurationsraum $SO(3)$ kompakt ist und ebenfalls der Impulsraum für feste Werte von H, L_3 und ${}'L_3$.

$$w_1 = \varphi, \quad w_2 = \psi, \quad I_1 = p_\varphi, \quad I_2 = p_\psi \qquad (10.32)$$

sind schon WWV. Die ϑ-Bewegung entspricht der 1-dim autonomen kanonischen Dynamik eines Teilchens der Masse A in einem effektiven Potential $U(\vartheta)$, (7.47). Wir können daher wie auf S. 130 vorgehen. Wir transformieren für einen schiefen Kreisel mit Umkehrpunkten ϑ_1, ϑ_2 der Nutation zu festen Werten von I_1, I_2 und E in ein effektives 1-Teilchenproblem

$$H = \frac{A}{2}\dot{\vartheta}^2 + V(I_1, I_2, \vartheta) = E \tag{10.33}$$

$$V = \frac{1}{2C} I_2^2 + \frac{1}{2A}\frac{(I_1 - I_2\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta} + Mgl\cos\vartheta$$

Dann ist wie in Fig. 10.2 $F(I_1, I_2, E)$ definierbar und

$$I_3 = F(I_1, I_2, E)/2\pi \implies K(I_1, I_2, I_3) = E \tag{10.34}$$

$$\varphi_3 = \frac{2\pi t}{T(E, I_1, I_2)}$$

$$T(E, I_1, I_2) = \sqrt{2A}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{E - V(I_1, I_2, \vartheta)}} \tag{10.35}$$

Die Lagrange Gleichungen des schweren symmetrischen Kreisels sind daher äquivalent zu

$$\dot{I}_i = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i(I_1, I_2, I_3) \tag{10.36}$$

mit den Frequenzen

$$\omega_1 = \frac{\partial K}{\partial I_1} \quad \text{Präzession um die } \underline{e}_3\text{-Achse}$$

$$\omega_2 = \frac{\partial K}{\partial I_2} \quad \text{Rotation um die } \underline{e}_3''\text{-Achse} \tag{10.37}$$

$$\omega_3 = \frac{\partial K}{\partial I_3} \quad \text{Nutation}$$

<u>Kanonische Störungstheorie</u> heisst die in der Himmelsmechanik sehr erfolgreiche Methode, nichtintegrable Systeme in gewissen Parameterbereichen als schwach gestörte "benachbarte" integrable Systeme zu analysieren. Beispiele sind die Bewegung eines kleinen Planeten in den Zentralfeldern der Sonne und des Jupiter, oder eines Satelliten im Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde, oder ein asymmetrischer schwerer Kreisel bei rascher Rotation. In allen Fällen beschreibt man die ungestörte Bewegung durch WWV $\varphi = (\varphi_1 \cdots \varphi_f)$, $I = (I_1 \cdots I_f)$, mit ungestörter Hamiltonfunktion $H_0(\underline{I})$.

Die ungestörte Bewegung ist integrabel nach (10.31), jedoch i.a. nicht die volle Zeitevolution mit Hamiltonfkt.

$$H(I,\varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi) + \varepsilon^2 H_2(I,\varphi) + \cdot \qquad (10.38)$$

die wir als (formale) Potenzreihe in einem (in den obigen Beispielen kleinen) "Störparameter" ε ansetzen. Als Funktionen auf dem Torus sind die $H_i(I,\varphi)$ 2π-periodisch in $\varphi_1 \cdots \varphi_f$. In dem Algorithmus der Störungstheorie 1. Ordnung (in der Quantentheorie sind die entsprechenden Formeln das tägliche Brot des Physikers) sucht man eine kanonische Transformation $(I,\varphi) \Rightarrow (J,\psi)$ derart, daß in den neuen Koordinaten die Hamiltonfunktion K bis auf $O(\varepsilon^2)$ integrabel wird. Man setzt diese an mit einer erzeugenden Funktion

$$S(\varphi,J) = S_0 + \varepsilon S_1 \qquad S_0 = \sum \varphi_k J_k \qquad (10.39)$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{\partial S}{\partial \varphi_k} = J_k + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_k}\,, \quad \psi_k = \frac{\partial S}{\partial J_k} = \varphi_k + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial J_k}$$

$$\begin{aligned} K(J,\psi) &= H(I,\varphi) = H_0(J+\varepsilon\tfrac{\partial S_1}{\partial\varphi}) + \varepsilon H_1(J+\varepsilon\tfrac{\partial S_1}{\partial\varphi},\varphi) + O(\varepsilon^2) \\ &= H_0(J) + \varepsilon \left\{ \left\langle \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}, \frac{\partial S_1}{\partial\varphi} \right\rangle + H_1(J,\varphi) \right\} \\ &\quad + \left[H_0(J+\varepsilon\tfrac{\partial S_1}{\partial\varphi}) - H_0(J) - \varepsilon \left\langle \frac{\partial H_0}{\partial J}, \frac{\partial S_1}{\partial\varphi} \right\rangle \right] \qquad (10.40) \\ &\quad + \left[\varepsilon H_1(J+\varepsilon\tfrac{\partial S_1}{\partial\varphi},\varphi) - \varepsilon H_1(J,\varphi) \right] \quad + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Die $[\cdots]$-Terme sind $O(\varepsilon^2)$. Es ist unmöglich, durch geeignete Wahl von S_1 den $\{\ldots\}$-Term zum Verschwinden zu bringen, da $\int_0^{2\pi}\!\!\int d\varphi_1 .. d\varphi_f \left\langle \frac{\partial H_0}{\partial J}(J), \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$, nicht dagegen das entsprechende H_1-Integral. Das beste, was man erreichen kann, ist die Lösung von

$$\left\langle \omega(J), \frac{\partial S_1}{\partial\varphi} \right\rangle + H_1(J,\varphi) = \hat{H}_1(J,0) \qquad (10.41)$$

wobei $\omega_k(J) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J_k}$ die Frequenzen des ungestörten Problems sind und $\hat{H}_1(J,\varkappa)$ die Fourier-Koeffizienten der Störung.

$$H_1(J,\varphi) = \sum_k \hat{H}_1(J,\varkappa)\, e^{i\langle\varphi,\varkappa\rangle} \qquad \varkappa = (k_1 .. k_f) = 2\pi(n_1 .. n_f) \text{ mit } n_i \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{H}_1(J,\varkappa) = (2\pi)^{-f} \int d\varphi_1 .. d\varphi_f\, e^{-i\langle\varphi,\varkappa\rangle} H_1(J,\varphi) \qquad (10.42)$$

Die Lösung von (10.41) ist

$$S_1(J,\varphi) = i \sum_{\varkappa \neq 0} \frac{e^{i\langle \varkappa,\varphi\rangle}}{\langle \omega(J),\varkappa\rangle} \hat{H}_1(J,\varkappa) \qquad (10.43)$$

und existiert (formal) für alle J, für die $\langle\omega(J),\varkappa\rangle \neq 0$, falls $\varkappa \neq 0$ und $H_1(J,\varkappa) \neq 0$ sind. Falls $\mathrm{Det}(\partial^2 H_0/\partial I_k \partial I_\ell) \neq 0$ ist, so gibt es immer J-Werte, für die die Frequenzen $\omega(J)$ rational unabhängig sind. Jedoch ist auch in diesem Fall die Konvergenz von (10.43) nicht trivial, da die Nenner $\langle \nu(J),\varkappa\rangle$ sehr klein werden können. Mehr in Appendix D.

Bei Vernachlässigung der Terme $O(\varepsilon^2)$ erhält man in den neuen Koordinaten eine integrable Dynamik mit

$$K(J) = H_0(J) + \varepsilon \hat{H}_1(J,0) \qquad (10.44)$$

wobei $\varepsilon \hat{H}_1(J,0) = (2\pi)^{-f} \varepsilon \int d\varphi_1 \cdots d\varphi_f \, H_1(J,\varphi)$ der Mittelwert der Störung $O(\varepsilon)$ über den J-Torus ist. Dieser verändert nur die Frequenzen:

$$\omega_k(J) \longrightarrow \omega_k(J) + \varepsilon \frac{\partial \hat{H}_1(J,0)}{\partial J_k} \qquad (10.45)$$

In der WWV bleiben die Integrale J_k der ungestörten Bewegung (z.B. die großen Halbachsen der Keplerellipsen der kleinen Planeten) auch unter der (im Mittel berücksichtigten) Störung zeitlich konstant (Lagrange: Keine "säkularen" Störungen bei Nichtentartung, obwohl $I_k(t)$ zeitabh. ist)

Die Mittelungsmethode wird auf dynamische Systeme häufig angewandt, wo die ungestörte Evolution

$$\dot{I} = 0 \quad , \quad \dot{\varphi} = \omega(I) \quad , \quad I = (I_1, \ldots I_k), \ \varphi = (\varphi_1, \ldots \varphi_\ell), \qquad (10.46)$$

ist und unter der Störung zu

$$\dot{I} = \varepsilon\, G(I,\varphi) \qquad \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon\, F(I,\varphi) \qquad (10.47)$$

wird und wo man eine Lösung $I(t)$ von (10.47) durch eine Lösung $J(t)$ des gemittelten Systems approximiert:

$$\dot{J} = \varepsilon\, \hat{G}(J) \quad , \quad \hat{G}(J) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi}\!\!\int G(J,\varphi)\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_k \qquad (10.48)$$

In [A2] findet man einen einfachen Beweis für die Anwendbarkeit der Mittelungsmethode im folgenden Sinn: falls $k=1$ und $\omega(I) > 0$, so gibt es für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine ε-unabhängige Konstante C, derart daß

$$|J(t) - I(t)| < C\varepsilon \quad \text{für alle } 0 \le t \le 1/\varepsilon \tag{10.49}$$

<u>Adiabatische Invarianten</u> sind "Fast-Integrale" der Bewegung für Hamilton'sche Systeme mit langsamer zeitlicher Veränderung $H(\xi, \varepsilon t)$: $I(\xi,\lambda)$ heisst <u>adiabatische Invariante</u> der H-Dynamik, falls für Lösungskurven $\xi(t)$ mit Anfangsbedingungen $\xi(0)$ in einem Gebiet des Phasenraums es für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ eine ε-unabhängige Konstante c gibt, derart daß

$$|I(\xi(t), \varepsilon t) - I(\xi(0), 0)| < c\varepsilon \quad \text{für alle } 0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon} \tag{10.50}$$

Wir betrachten ein (nichtintegrables!) nichtautonomes System mit einem Freiheitsgrad $f=1$ und Hamiltonfunktion $H(q,p,t)$. Unter der Annahme, daß die $H(q,p,\lambda)$-Dynamik für festes λ periodische Lösungen mit nichtverschwindender Frequenz $\omega(I,\lambda)$ hat, kann (10.49) angewandt werden um zu zeigen, daß die Wirkungsvariable (s. Fig. 10.2)

$$I(\xi,\lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq \tag{10.51}$$

eine adiabatische Invariante ist. Denn sei $S(I,q,\lambda)$ die erzeugende Funktion für $(q,p) \to (\varphi, I)$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I} \qquad H_0 = H_0(I,\lambda), \quad \omega(I,\lambda) = \frac{\partial H_0}{\partial I} \tag{10.52}$$

Für die $H(\xi,t)$-Dynamik transformieren wir mit $S(I,q,\varepsilon t)$ und erhalten in den WWV als neue Hamiltonfunktion

$$K(I,t) = H_0(I,\varepsilon t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot\varphi &= \omega(I,\lambda) + \varepsilon F(I,\varphi,\lambda) \\ \dot I &= \varepsilon G(I,\varphi,\lambda) \\ \dot\lambda &= \varepsilon \end{aligned} \qquad F = \frac{\partial^2 S}{\partial I\, \partial \lambda}, \quad G = -\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi\, \partial \lambda} \tag{10.53}$$

Da $w(I,\lambda) \neq 0$ ist, kann die Mittelungsmethode angewandt werden und Lösungen $I(t), \lambda(t)$ von (10.53) durch Lösungen $J(t), \Lambda(t)$ von

$$\dot{J} = \varepsilon\, \hat{G}(J,0,\Lambda), \qquad \dot{\Lambda} = \varepsilon \tag{10.54}$$

beschrieben werden. Da $\frac{\partial S}{\partial \lambda}(J,0,\Lambda) = \frac{\partial S}{\partial \lambda}(J,2\pi,\Lambda)$ ist, hat man

$$\hat{G}(J,0,\Lambda) = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial S}{\partial \lambda}(J,\varphi,\Lambda) = 0 \tag{10.55}$$

und daher gilt $J(t) = J(0) = I(\xi(0),0)$ und nach (10.49) für alle $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$: $|I(\xi(t),\varepsilon t) - I(\xi(0),0)| \leq C\varepsilon$, d.h. $I(\xi(t),\lambda)$ ist adiabatische Invariante

Anwendung: Ein Teilchen in einem Beschleuniger führt kleine Schwingungen in einer Richtung um Gleichgewichtslage aus mit Hamiltonfunktion

$$H(\xi,\lambda) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,w^2(\lambda)}{2}\, q^2 \tag{10.56}$$

Für festes λ ist $q(t) = a(\lambda)\cos(w(\lambda)t+\varphi)$ Lösung, mit Energie $E = m\,a(\lambda)^2 w(\lambda)^2/2$ und Wirkung $I(E,\lambda) = (2\pi)^{-1}\times$ Fläche von $\{\xi \mid H(\xi,\lambda) \leq E\}$:

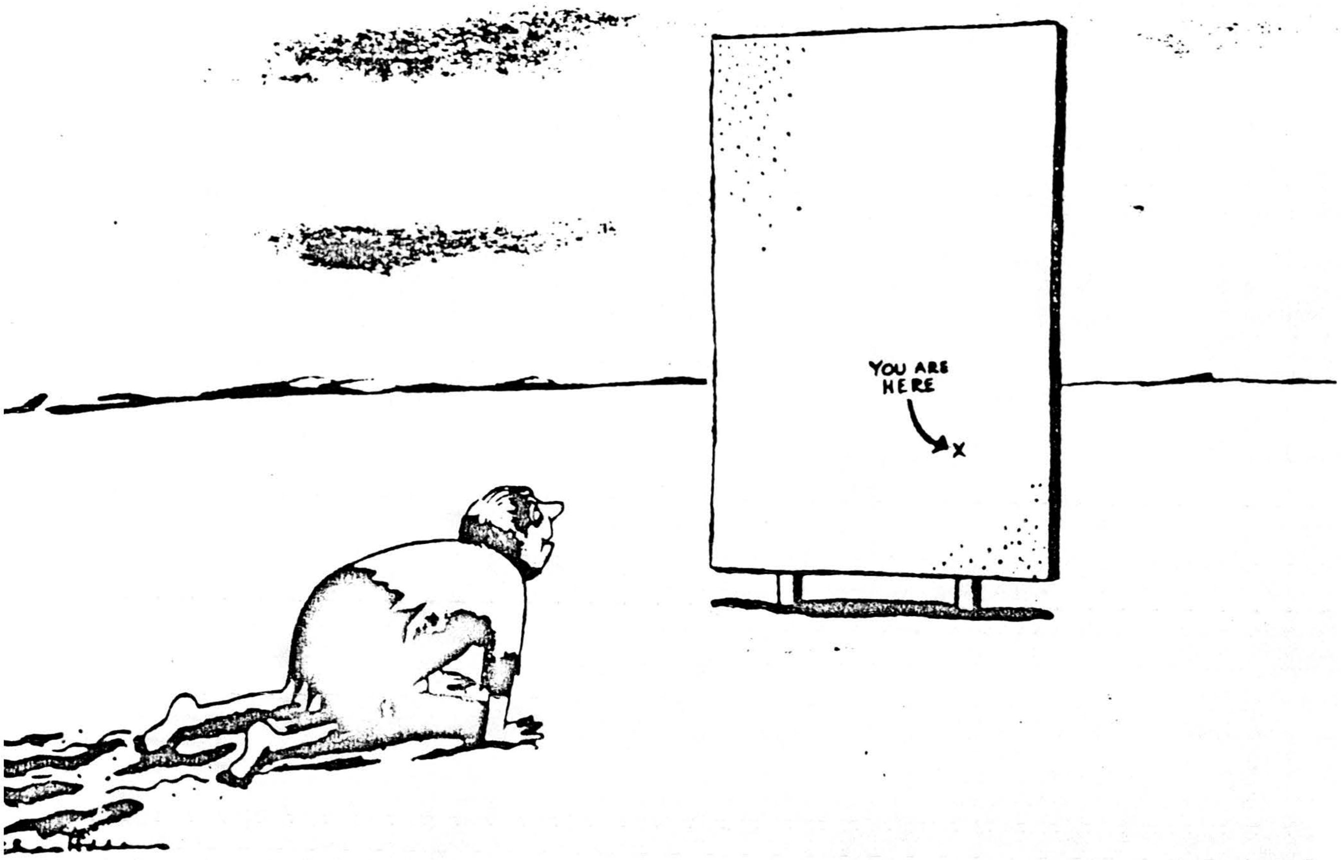
$$I(E,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\sqrt{2mE}\sqrt{2E/m\,w(\lambda)^2} = \frac{E}{w(\lambda)} = \frac{m\,a(\lambda)^2 w(\lambda)}{2} \tag{10.57}$$

Im Beschleunigungszyklus ändert sich λ adiabatisch, $\lambda = \varepsilon t$, wobei $w(\lambda)$ zunimmt. Da I adiabatisch invariant ist, ändert sich $a(\lambda) \sim w(\lambda)^{-1/2}$, und die Fokussierung wird besser.

Adiabatische Invarianten spielen bei der Beschreibung geladener Teilchen in Magnetfeldern in der Plasmaphysik eine wichtige Rolle, z.B für "magnetische Flaschen" [J1].

Himmelsmechanik. Hier ist der auf S. 137-138 entwickelte Formalismus der Störungstheorie nicht direkt anwendbar, da für das Kepler Problem $\operatorname{Det} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_\ell} \equiv 0$ ist (Entartung)! Wir wissen aus §3, daß WWV genau für $E<0$ existieren, und hier ist nach dem 3. Keplerschen Gesetz die Umlaufszeit $T \sim a^{3/2} \sim |E|^{-3/2}$. Daher sind alle Frequenzen $w_1 = w_2 = w_3$. Wir müssen auf die Entwicklung der entarteten Störungstheorie des Keplerproblems verzichten (s. [K2], [S6], [S8]),

Postskript



Die Prüfungen sind, und Sie wissen, daß Sie nichts wissen

(1) Ruhe bewahren, die Mechanik ist über 2000 Jahre alt.

(2) Lesen Sie [L1], [G3] oder [A2]

(3) Die wichtigsten einfachen Teile der Vorlesung sind:

§1; §2; §3: 31–39, 44–50; §4: 51–54, 68–70;
§5: 71–74, 76–77, 79–83; §6: 85–90 §7: 99–107

(4) Schwieriger, aber auch wichtig sind:

§3: 39–44; §4: 55–67; §5: 75, 78; §6: 91–97; §7: 108–113
§9: 121–131; §10: 133–134, 137, 140–147 und die Anhänge A, B, C

(5) In den Giftschrank gehören

§5: 84; §6: 98; §8; §9: 132 §10: 135–136, 138–139
Anhang D und die Programme

(6) En guete mitenand!

Anhang A: Vektorfeld, Fluss und Strömung

Zur Vertiefung unseres Verständnisses eines mechanischen Systems ist eine geometrische Sprache nützlich, die auch in komplizierteren Systemen, wie in der Hydrodynamik und der statistischen Mechanik erfolgreich ist. Zur Veranschaulichung stelle man sich die folgenden Aussagen für ein Teilchen mit einem Freiheitsgrad und einem ($s=2$)-dimensionalen Phasenraum vor mit

$$\xi = \binom{q}{p}, \quad \dot{\xi} = \Gamma(\xi,t) = \begin{pmatrix} F(q,p,t) \\ G(q,p,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_t \\ G_t \end{pmatrix} = \Gamma_t \qquad (A1)$$

und übertrage sie dann in beliebige Dimension s in der Sprache der s-dimensionalen Analysis

Zu jeder Zeit t definiert $\Gamma_t : \xi \to \Gamma(\xi,t)$ ein *Vektorfeld* in einem Teilgebiet des $\mathbb{R}^s$

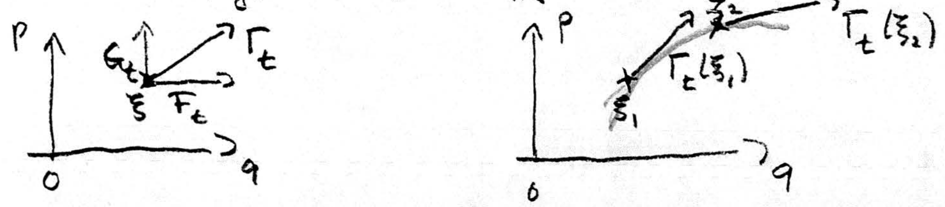


Fig. A1

Eine Lösung $\xi(t)$ von (A1) hat die geometrische Eigenschaft, daß zu jeder Zeit t (wo sie definiert ist) der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\xi}(t)$ mit $\Gamma_t(\xi(t))$ identisch ist. Für ein *autonomes* System ist das Vektorfeld Γ_t t-unabhängig. Dann ist mit jedem $\xi(t)$ auch $\xi_\tau(t) = \xi(t+\tau)$ eine Lösung, wenn die *Zeittranslation* τ so klein ist, daß $\xi(t+\tau)$ existiert:

$$\dot{\xi}_\tau(t) = \dot{\xi}(t+\tau) = \Gamma(\xi(t+\tau)) = \Gamma(\xi_\tau(t)) \qquad (A2)$$

Daher gilt für die Lösung $\xi(t,s,\eta)$ mit Anfangsbedingung η für $t=s$: $\xi(t,s,\eta) = \xi(t-s,0,\eta) \equiv \xi(t-s,\eta)$, und einer Trajektorie $\xi(t,\eta)$ durch η entsprechen unendlich viele Lösungen der Bewegungsgleichungen, die sich durch die Wahl der Anfangszeit in η unterscheiden. Gilt für zwei Lösungskurven $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ und zwei Zeiten t_1, t_1

$$\xi_1(t_1) = \xi_2(t_2) \Rightarrow \xi_2(t) = \xi_1(t+\tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \qquad (A3)$$

Zwei Lösungskurven eines autonomen Systems schneiden sich nie oder sie sind identisch. Schneidet sich eine Lösungskurve

$$\xi(t_1)=\xi(t_1+\tau) \Rightarrow \xi(t)=\xi(t+k\tau) \quad \forall t\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z} \qquad (A.4)$$

so ist die Lösung periodisch. Man nennt das minimale τ die Periodendauer. Ist ~~[illegible]~~ $\xi(t)\equiv\xi_0$, so heisst ξ_0 stationäre Lösung oder wegen

$$\xi(t)\equiv\xi_0 \Leftrightarrow \Gamma(\xi_0)=0 \qquad (A.5)$$

nennt man ξ_0 kritischen Punkt von Γ. Die Faserung von P durch Trajektorien von Γ nennt man das Phasenportrait des autonomen Systems. In §2 werden die Phasenportraits von 1-dimensionalen Systemen, bei denen die Kraft nur vom Ort abhängt, geometrisch konstruiert.

Für nichtautonome Systeme können sich zwei Lösungskurven beliebig oft schneiden, ohne identisch zu sein. Hier gilt für die Weltlinien $(t, \xi(t))$ in der Phasenraumzeit nach dem Eindeutigkeitssatz:

$$(t_1,\xi_1(t_1))=(t_2,\xi_2(t_2)) \Rightarrow t_1=t_2 \text{ und } \xi_1(t_1)=\xi_2(t_2)$$

$$\Rightarrow \xi_1(t)=\xi_2(t) \text{ für alle } t \qquad (A6)$$

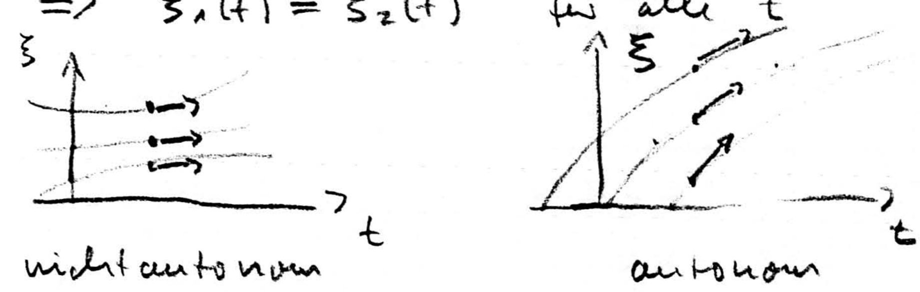


Fig. A.2.

Für ein dynamisches System mit 1-dimensionalem Phasenraum ist Fig. A.2 typisch. Ein Pfeil im Punkte (t_0, ξ_0) stellt den Vektor $(1, \Gamma(\xi_0))$ dar, den Tangentialvektor an $(t, \xi(t))$ für $\dot{\xi}(t)=\Gamma(\xi(t),t)$ und $\xi(t_0)=\xi_0$. Man sieht, daß im autonomen Fall die Gesamtheit aller Lösungskurven, der **Fluss** oder die Strömung des Vektorfeldes Γ, zeittranslationsinvariant ist, denn nach (A2) ist mit $(t, \xi(t))$ auch $(t, \xi(t+\tau))$ eine Lösungskurve. Diese geometrischen Aussagen gelten für alle differenzierbaren dynamischen Systeme in entsprechend hochdimensionalen Phasenräumen.

Bsp: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator in 3-dimensionaler Phasenraumzeit und im 2-dimensionalen Phasenraum

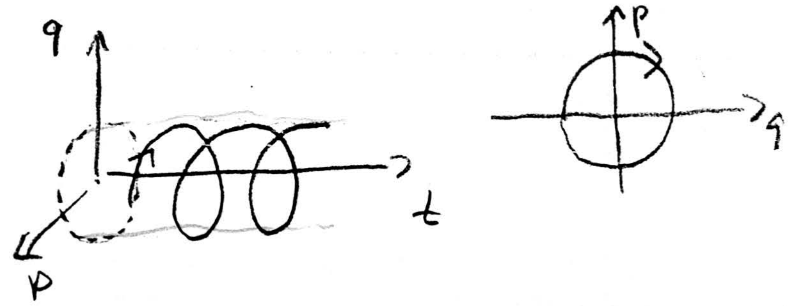


Fig. A3

Sei $\xi(t,s,\eta)$ die (maximale Fortsetzung der) Lösung zum Vektorfeld Γ_t mit Anfangsbedingung η für $t=s$. Die Abbildung $\Phi_{t,s}$

$$\Phi_{t,s} : \eta \to \xi(t,s,\eta) \quad , \quad \xi(t) = \Phi_{t,s}(\eta) \qquad (A.7)$$

heisst **Flussabbildung** des Vektorfeldes Γ_t

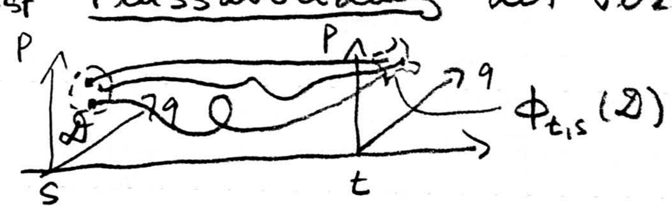


Fig. A.4

Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt für differenzierbare Vektorfelder die Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit von $\Phi_{t,s}$ und $\Phi_{t,s}^{-1}$, wobei bei Singularitäten η, t, s einzuschränken sind. $\Phi_{t,s}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t,s}(\eta) = \frac{\partial}{\partial t}\xi(t,s,\eta) = \Gamma_t(\xi(t,s,\eta)) = \Gamma_t \circ \Phi_{t,s}(\eta) \qquad (A8)$$

mit der Zusammensetzung $\Gamma \circ \Delta$ nach dem Schachtel-Satz: $\Gamma \circ \Delta(\eta) = \Gamma(\Delta(\eta))$ bei verträglichen Definitionsbereichen. Bei linearen Abbildungen ist $\Gamma \circ \Delta$ das Matrixprodukt ($\to$ §5).

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes kann man die Lösung $\xi(t,r,\eta)$ zur Anfangsbedingung η zur Zeit r berechnen, indem man die Differentialgleichung zunächst von r bis s 'integriert' und dann mit $\xi(s,r,\eta)$ als Anfangsbedingung zur Zeit s bis nach t weiterrechnet. Dies heisst in Formeln

$$\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r}(\eta) = \xi(t,s,\xi(s,r,\eta)) = \xi(t,r,\eta) = \phi_{t,r}(\eta) \quad (A9)$$

Ferner gilt für alle s

$$\phi_{s,s}(\eta) = \xi(s,s,\eta) = \eta \quad (A10)$$

und somit in kompakter Form

$$\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r} = \phi_{t,r}, \quad \phi_{s,s} = 1 \quad (A11)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_{t,s} = \Gamma_t \circ \phi_{t,s}, \quad \Gamma_s = \frac{\partial}{\partial t}\phi_{t,s}\Big|_{t=s}$$

Für autonome Systeme gilt nach (A.2)

$$\phi_{t,s} = \phi_{t-s}, \quad \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad (A12)$$
$$\phi_0 = 1, \quad \Gamma = \frac{d}{dt}\phi_t\Big|_{t=0}$$

Speziell für lineare Systeme $\dot{\xi} = A(t)\,\xi$, wo $A(t)$ eine $g \times g$-Matrix ist, wird $\phi_{t,s}$ eine $g \times g$-Matrix $P(t,s)$, 'Propagator' genannt. Dies wird in §5 konstruiert und erfüllt

$$P(t,s) \cdot P(s,r) = P(t,r), \quad P(s,s) = 1 \quad (A13)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,s) = A(t)\,P(t,s), \quad A(s) = \frac{\partial}{\partial t}P(t,s)\Big|_{t=0}$$

und $P(t,s) = \exp(t-s)A$ für $A(t) \equiv A$.

Hydrodynamik: Als Illustration des Zusammenhangs zwischen Vektorfeld und Strömung in der Newtonischen Mechanik werden wir nach Euler (1707–1783) die Strömung einer idealen Flüssigkeit aus mechanischen Erhaltungssätzen "herleiten". Makroskopisch wird eine Flüssigkeit durch fünf Funktionen beschrieben, die i.a. räumlich und zeitlich veränderlich sind:

Die Massendichte $m(\underline{q},t)$ bestimmt für jedes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ die enthaltene Masse

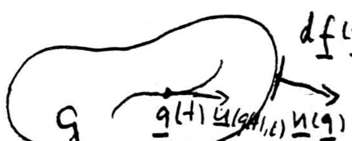
$$m(G,t) = \int_G m(\underline{q},t)\, d^3q \qquad (A.14)$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{q},t)$ beschreibt den Bewegungszustand der Flüssigkeit. Dieses kann durch Staubteilchen sichtbar gemacht werden, die sich mit der Flüssigkeit auf Stromlinien bewegen mit

$$\dot{\underline{q}}(t) = \underline{u}(\underline{q}(t),t) \qquad \text{(s. Fig. A5)} \qquad (A.15)$$

Falls die Flüssigkeit in G eingeschlossen ist, so gilt für jedes Flächenelement auf dem Rande ∂G nach Fig A5

$$d\underline{f}(\underline{q}) = \underline{n}(\underline{q})\, df(\underline{q})$$



$$\underline{u}(\underline{q},t)\cdot\underline{n}(\underline{q}) = 0 \qquad (A.16)$$

Fig. A5

Den Spannungszustand der Flüssigkeit gibt der Druck $p(\underline{q},t)$ an: auf ein Flächenelement $d\underline{f}(\underline{q})$ am Orte $\underline{q}$ wirkt die Flächenkraft

$$p(\underline{q},t)\, d\underline{f}(\underline{q},t) \qquad (A.17)$$

Volumenkräfte, wie die Gravitationskraft, wollen wir vernachlässigen. Die Differentialgleichungen für die gekoppelte Zeitevolution von m, $\underline{u}$ und p begründet man mit den fünf Erhaltungssätzen für die Masse, den Impuls und die Energie wie folgt:

Die <u>Massenerhaltung</u> besagt, daß für jedes Teilgebiet $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ die zeitliche Änderung der Masse in $\mathcal{D}$ gleich dem Massenfluss aus $\mathcal{D}$ ist (mit $\underline{df}$ nach aussen von $\mathcal{D}$):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} m(\underline{q},t)\, d^3q = - \int_{\partial\mathcal{D}} m(\underline{q},t)\, \underline{u}(\underline{q},t) \cdot \underline{df}(\underline{q})$$
$$= - \int_{\mathcal{D}} \underline{\nabla} \cdot \left(m(\underline{q},t)\, \underline{u}(\underline{q},t) \right) d^3q \qquad (A.18)$$

nach Stokes, oder in differentieller Form

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \underline{\nabla}(m\underline{u}) = 0 \qquad (A.19)$$

Die <u>Impulsänderung</u> wird durch die Newton'schen Gleichungen beschrieben: für jedes $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ ist die zeitliche Änderung des Impulses in $\mathcal{D}$ gleich der Kraft auf $\mathcal{D}$. Wegen $\dot{\underline{q}}(t) = \underline{u}(\underline{q}(t),t)$ ist die k-Komponente der Beschleunigung längs einer Stromlinie

$$\ddot{q}^k(t) = \frac{d}{dt} u^k(\underline{q}(t),t) = \frac{\partial u^k}{\partial t}(\underline{q}(t),t) + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u^k}{\partial q^l}(\underline{q}(t),t)\, \frac{dq^l(t)}{dt}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \right) u^k(\underline{q}(t),t) \qquad (A.20)$$

Daher ist das <u>Beschleunigungsfeld</u> der Flüssigkeit

$$\underline{b}(\underline{q},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{u}(\underline{q},t) \qquad (A\,21)$$

und nach Newton gilt unter der Wirkung des Druckes

$$\int_{\mathcal{D}} m(\underline{q},t)\, \underline{b}(\underline{q},t)\, d^3q = - \int_{\partial\mathcal{D}} p\, \underline{df} = - \int_{\mathcal{D}} \underline{\nabla} p\, d^3q \qquad (A\,22)$$

oder in differentieller Form

$$m \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \right) = - \underline{\nabla} p \qquad (A\,23)$$

Man nennt den partiellen Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}(\underline{q},t) \cdot \underline{\nabla} = \frac{D}{Dt} \qquad (A\,24)$$

auch die <u>substantielle</u> Zeitableitung bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes $\underline{u}$. Diese liefert die Änderung von Funktionen $f(\underline{q},t)$ längs Stromlinien (A 15):

$$\frac{d}{dt} f(\underline{q}(t),t) = \frac{Df}{Dt}(\underline{q}(t),t) \qquad (A\,25)$$

Damit werden Massen- und Impulserhaltungssatz

$$m \frac{D\underline{u}}{Dt} = - \underline{\nabla} p \qquad \frac{Dm}{Dt} + m\, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \qquad (A\,26)$$

Im einfachsten Fall besagt die Energieerhaltung, daß für die Strömung im Gebiet G mit $\underline{u}\cdot\underline{n}=0$ auf ∂G die totale kinetische Energie konstant bleibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\int_G \frac{1}{2} m(\underline{q},t)\,|\underline{u}(\underline{q},t)|^2 d^3q = \int_G \left\{ \frac{\partial m}{\partial t}\frac{|\underline{u}|^2}{2} + m\,\underline{u}\cdot\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right\} d^3q \\ &= \int_G \left\{ \frac{|\underline{u}|^2}{2}\left(-\underline{\nabla}\cdot(\underline{u}m)\right) + m\,\underline{u}\cdot\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right\} d^3q = \int_G m\left\{ \underline{u}\cdot\left[(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\right]\right\} d^3q \\ &= -\int_G \underline{u}\cdot\underline{\nabla}p\, d^3q = \int_G p\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u}\, d^3q \end{aligned} \qquad (A27)$$

wobei $\underline{u}\cdot\underline{n}=0$ auf ∂G und (A.26) benützt wurde. Hinreichend für die Erhaltung der kinetischen Energie bei jeder Bewegung in jedem G ist also

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \qquad \underline{u}(\underline{q},t)\cdot\underline{n}(\underline{q}) = 0 \text{ auf } \partial G \qquad (A28)$$

(A26) und (A28) sind die Euler'schen Gleichungen. Zur physikalischen Interpretation geben wir eine spezielle Lösung für eine 1-dim. Strömung im Rohr der Fig. A6

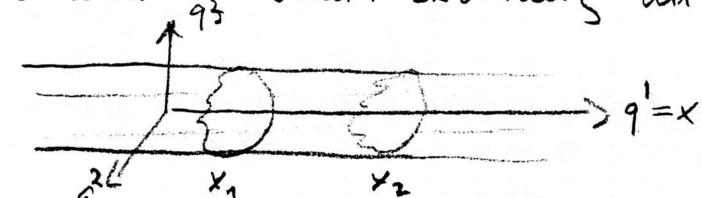


Fig. A6

Ansatz:
$$\underline{u}(\underline{q},t) = (u(x,t),0,0) \qquad m(\underline{q},t) = m$$
$$p(\underline{q},t) = p(x) \quad , \quad p(x_1) = p_1 \quad , \quad p(x_2) = p_2$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(t)$$

$$m\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla}p \Rightarrow m\frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{d^2p}{dx^2} = 0 \qquad (A29)$$

$$\Rightarrow p(x) = p_1 + \frac{p_2-p_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \Rightarrow u(t) = -\frac{p_2-p_1}{x_2-x_1}\frac{t}{m} + u_0$$

Mit der Konstanten $p' = \frac{p_2-p_1}{x_2-x_1}$ ist (A29) eine Lösung der Euler'schen Gleichungen im unendlichen Rohr mit p bzw. u die linear in x bzw. t anwachsen. Ohne Reibung nimmt im Rohr bei konstantem Druckgradienten p' und Massendichte m die Geschwindigkeit linear in der Zeit zu (Analogie: freier Fall)

<u>$\nabla\cdot\underline{u}=0$ und Volumenerhaltung</u>: Sei $\phi_{t,s}$ die Stromabbildung zu $\dot{\underline{q}}(t)=\underline{u}(\underline{q}(t),t)$, die jeder Anfangsbedingung $\underline{x}$ zur Zeit s die Stromlinie $\underline{q}(t,s,\underline{x})$ der Flüssigkeit zuordnet. Sei $\mathcal{D}_s$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{D}_{t,s}$ das von $\phi_{t,s}$ transportierte Gebiet:

$$\mathcal{D}_{t,s}=\{\,\underline{q}=\underline{q}(t,s,\underline{x})\mid \underline{x}\in\mathcal{D}_s\,\} \qquad (A30)$$

Wir wollen zeigen, daß $\nabla\cdot\underline{u}(\underline{q},t)=0$ (und die globale Existenz der Stromlinien) die Erhaltung des Volumens $|\mathcal{D}_{t,s}|=\int_{\mathcal{D}_{t,s}}d^3q$ erzwingt. Mit der Funktionaldeterminante $J(\underline{q},t,s)=\mathrm{Det}\,D\phi_{t,s}(\underline{q})$ gilt

$$|\mathcal{D}_{t,s}|=\int_{\mathcal{D}_{t,s}}d^3q=\int_{\mathcal{D}_s}J(\underline{q},t,s)\,d^3q \qquad (A31)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}|\mathcal{D}_{t,s}|=\int_{\mathcal{D}_s}\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{q},t,s)\,d^3q$$

Nun gilt nach (A11) $\phi_{t,s}=\phi_{t,r}\circ\phi_{r,s}$, also für $t-r\to 0$

$$\phi_{t,s}(\underline{q})=\phi_{r,s}(\underline{q})+\underline{u}(\phi_{r,s}(\underline{q}),r)(t-r)+O((t-r)^2) \qquad (A32)$$

und für die Funktionalmatrizen nach der Kettenregel

$$D\phi_{t,s}(\underline{q})=D\phi_{r,s}(\underline{q})+D\underline{u}(\phi_{r,s}(\underline{q}),r)\,D\phi_{r,s}(\underline{q})(t-r)+O((t-r)^2) \qquad (A33)$$

$$\Rightarrow D\phi_{t,s}(\underline{q})\,D\phi_{r,s}(\underline{q})^{-1}=1+D\underline{u}(\phi_{r,s}(\underline{q}),r)(t-r)+O((t-r)^2)$$

Für Matrizen A_1,A_2 gilt $\mathrm{Det}(A_1A_2)=\mathrm{Det}(A_1)\,\mathrm{Det}(A_2)$ und für $\varepsilon\to 0$

$$\mathrm{Det}(1+\varepsilon A)=1+\varepsilon\,\mathrm{Sp}(A)+O(\varepsilon^2) \qquad (A34)$$

Also liefert (4.55) mit $\mathrm{Sp}\,D\underline{u}(\underline{q},t)=\nabla\cdot\underline{u}(\underline{q},t)$

$$J(\underline{q},t,s)=J(\underline{q},r,s)+\nabla\cdot\underline{u}(\phi_{r,s}(\underline{q}),r)\,J(\underline{q},r,s)(t-r)+O((t-r)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}J(\underline{q},t,s)=\nabla\cdot\underline{u}(\phi_{r,s}(\underline{q}),r)\,J(\underline{q},r,s)+O(|t-r|) \qquad (A35)$$

Aus (4.57) folgt für $t\leftarrow r$ mit $\nabla\cdot\underline{u}=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\underline{q},t,s)=\nabla\cdot\underline{u}(\phi_{t,s}(\underline{q}),t)\,J(\underline{q},t,s)=0 \qquad (A36)$$

und damit die zeitliche Konstanz des Volumens der Flüssigkeit $|\mathcal{D}_{t,s}|$ für jedes $\mathcal{D}_s$ (<u>Liouville'sche Satz</u>).

Anhang B : Lineare Transformationsgruppen der Mechanik

Die Theorie der "kontinuierlichen" Gruppen von linearen Transformationen des $\mathbb{R}^N$ ist eng mit den Symmetrien und Erhaltungssätzen der klassischen Mechanik und mit der kanonischen Struktur verknüpft. Wir wollen der "Pest" der Gruppen in diesem Anhang ohne Anspruch auf Strenge und Vollständigkeit ein Denkmal setzen.

Eine Gruppe ist eine Menge $\mathcal{G}$ mit einer Verknüpfung $\square$ (Abbildung von $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$) und einer Identität E derart daß für alle $A, B \ldots \in \mathcal{G}$ gilt

$$\begin{aligned} &A \square B \in \mathcal{G} && \text{Verknüpfung} \\ &A \square E = E \square A = A && \text{Identität} \\ &A \square (B \square C) = (A \square B) \square C && \text{Assoziativität} \\ &\forall A \in \mathcal{G}\ \exists A^{-1} \in \mathcal{G} \quad A^{-1} \square A = A \square A^{-1} = E && \text{Inverses} \end{aligned} \tag{B1}$$

Eine Gruppe $\mathcal{G}$ heisst abelsch, wenn $A \square B = B \square A$ ist für alle $A, B \in \mathcal{M}$ (Kommutativität), und $\mathcal{H}$ ist Untergruppe von $\mathcal{G}$, falls $\mathcal{H}$ eine Teilmenge von $\mathcal{G}$ ist, die ebenfalls bezüglich $\square$ eine Gruppe ist. Eine Gruppe $\mathcal{G}$ heisst kontinuierlich, falls $\mathcal{G}$ eine Lie'sche Gruppe ist ($\rightarrow$ Curtis & Miller "Differential Manifolds and Theoretical Physics")
Alle in diesem Anhang vorkommenden Gruppen sind kontinuierliche Untergruppen der affinen Gruppe des $\mathbb{R}^N$ der nichtsingulären inhomogen-linearen Transformationen (A, α) des $\mathbb{R}^N$

$$\tilde{\xi} = A\xi + \alpha \qquad \det A \neq 0 \tag{B2}$$

mit der Verknüpfung

$$\xi \xrightarrow{(A_1,\alpha_1)} \tilde{\xi} = A_1 \xi + \alpha_1 \xrightarrow{(A_2,\alpha_2)} \tilde{\tilde{\xi}} = A_2 \tilde{\xi} + \alpha_2$$

$$\tilde{\tilde{\xi}} = A_2 A_1 \xi + A_2 \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (B3)$$

$$\Rightarrow \quad (A_2, \alpha_2) \,\square\, (A_1, \alpha_1) = (A_2 A_1, A_2 \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$(A, \alpha)^{-1} = (A^{-1}, A^{-1}\alpha)$$

Eine <u>Galilei Transformation</u> ist eine affine Transformation des $\mathbb{R}^4$ der "Ereignisse" $\xi = \binom{t}{\underline{q}}$, welche die Zeitdifferenz $t_1 - t_2$ von zwei beliebigen Ereignissen und den Raumabstand $|\underline{q}_1 - \underline{q}_2|$ von je zwei gleichzeitigen Ereignissen invariant lässt. Die erste Forderung impliziert

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \; 0 \; 0 \\ \underline{v} & R \end{pmatrix} \qquad (B4)$$

und die zweite $R \in O(3)$. Unter der Komposition $\square$ (B3) ist die Menge $\mathcal{G}$ der (B4) eine Untergruppe der affinen Gruppe, die <u>orthochrone Galileigruppe</u> $\mathcal{G}^{\uparrow}$, weil unter der Transformation (B4) mit $\alpha = \binom{s}{\underline{a}}$ sich die Richtung der Zeit nicht ändert:

$$\tilde{t} = t + s \quad , \qquad \tilde{\underline{q}} = R\underline{q} + \underline{v}t + \underline{a} \qquad (B5)$$

Lässt man nur $R \in SO(3)$ zu, so erhält man die Untergruppe $\mathcal{G}^{\uparrow}_{+}$ der <u>eigentlichen</u> orthochronen Galileitransformationen, die die <u>Raumspiegelung</u>

$$P : \binom{t}{\underline{q}} \to \binom{t}{-\underline{q}} \qquad (B6)$$

nicht enthält. Aus $\mathcal{G}^{\uparrow}$ und der <u>Zeitumkehr</u>

$$T : \binom{t}{\underline{q}} \to \binom{-t}{\underline{q}} \qquad (B7)$$

erhält man die volle Galileigruppe $\mathcal{G}$.

Abelsche Untergruppen der Galileigruppe sind die <u>Raum-Zeit Translationen</u>:

$$(s, \underline{a}, \underline{0}, \mathbb{1}, 1): \quad t' = t + s \;, \quad \underline{q}' = \underline{q} + \underline{a} \qquad \text{(B8)}$$

und die <u>Geschwindigkeitstransformationen</u>:

$$(0, \underline{0}, \underline{v}, \mathbb{1}, 1) \quad t' = t \;, \quad \underline{q}' = \underline{q} + \underline{v}\, t \qquad \text{(B9)}$$

Eine bemerkenswerte Untergruppe bilden die <u>euklidischen Transformationen</u>

$$(s, \underline{a}, \underline{0}, \mathbb{R}, \lambda): \quad t' = \lambda t + s \;, \quad \underline{q}' = R\underline{q} + \underline{a} \quad (\lambda = \pm 1) \qquad \text{(B10)}$$

denn nur diese Galileitransformationen verbinden Inertialsysteme mit gleicher Lichtgeschwindigkeit c.

Für affine Transformationen $\tilde{\xi} = A\xi + \alpha$, die die Lichtgeschwindigkeit erhalten, muss A den <u>Lichtkegel</u>

$$\{ (ct)^2 = |\underline{q}|^2 \} = \{ \xi = \binom{ct}{\underline{q}} : \xi^T G \xi = 0 \} \qquad \text{(B11)}$$

invariant lassen. Die Vektoren des Lichtkegels haben die Form $\xi^0 = \pm |\underline{\xi}|$. Mit $A^T G A = B = B^T$ gilt:

$$0 = \xi^T A^T G A \xi = \xi^T B \xi = \sum_{i=1}^{3} (B_{00} + B_{ii})(\xi^i)^2$$
$$\pm 2 \sum_{i=1}^{3} B_{0i} |\underline{\xi}| \xi^i + 2 \sum_{1 \le i < j \le 3} B_{ik} \xi^i \xi^k \qquad \text{(B.12)}$$

identisch in $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^3$, was nur möglich ist für

$$B_{00} + B_{ii} = 0 \;, \quad B_{0i} = 0 \qquad 1 \le i \le 3$$
$$B_{ik} = 0 \qquad 1 \le i < k \le 3 \qquad \text{(B13)}$$

Daher ist $B = B_{00} G$ und, da $B = A^T G A$ den gleichen Trägheitsindex hat wie G, ist $B_{00} > 0$, und (4.16) gilt für $\lambda = {}_{+}\sqrt{B_{00}}$. Daher sind bis auf eine Maßstabsänderung die linearen Transformationen A, die den Lichtkegel invariant lassen, <u>Lorentztransformationen</u> Λ mit

$$\Lambda^T G \Lambda = G \qquad (B14)$$

und lassen das indefinite Skalarprodukt $(\,,\,)$ invariant:

$$(\xi,\eta) \equiv \xi^T G \eta = \xi^0\eta^0 - \underline{\xi}\cdot\underline{\eta} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \xi^\mu \eta^\nu g_{\mu\nu} \equiv \xi^\mu \eta^\nu g_{\mu\nu} \qquad (B15)$$

$\mathcal{L} = \{\Lambda \mid \Lambda^T G \Lambda\}$ ist eine Gruppe, denn (B1) ist erfüllt:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow (\Lambda_1\Lambda_2)^T G \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T G \Lambda_1 \Lambda_2 = G \\
&\Lambda^T G \Lambda = G \Rightarrow \Lambda^{-1} = G \Lambda^T G \Rightarrow 1 = \Lambda G \Lambda^T G \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \Lambda G \Lambda^T = G \Rightarrow \Lambda^T \in \mathcal{L} \Rightarrow \qquad (B16) \\
&(\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1} = G \Lambda G^3 \Lambda^T G = G \Rightarrow \Lambda^{-1} \in \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Mit $\xi = (1,\underline{0})$ gilt

$$\begin{aligned}
&\det \Lambda^T G \Lambda = \det G = -1 = -\det \Lambda^2 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \qquad (B17) \\
&1 = (\xi,\xi) = (\Lambda\xi, \Lambda\xi) = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^0{}_k)^2 \Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq +1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{oder } \leq -1
\end{aligned}$$

Daher zerfällt $\mathcal{L}$ in vier nicht zusammenhängende Teilmengen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow \\
&\mathcal{L}_\pm^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1, \ \det\Lambda = \pm 1\} \qquad (B18) \\
&\mathcal{L}_\pm^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda^0{}_0 \leq -1, \ \det\Lambda = \pm 1\}
\end{aligned}$$

Die einfachsten Elemente in $\mathcal{L}_\pm^{\Updownarrow}$ sind die Raum-Zeit Spiegelungen und die Identität

$$\begin{aligned}
&1 = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \qquad T = \begin{pmatrix} -1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\downarrow \qquad (B19) \\
&P = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & -1 && \\ && -1 & \\ &&& -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_-^\uparrow \qquad PT = \begin{pmatrix} -1 &&& \\ & -1 && \\ && -1 & \\ &&& -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+^\downarrow
\end{aligned}$$

$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ bedeutet, daß der Vorwärtslichtkegel auf sich abgebildet wird, während Lorentztransformationen mit $\Lambda^0{}_0 \le -1$ den Vorwärts- auf den Rückwärtskegel abbilden. Untergruppen von $\mathcal{L}$ sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow &: \underline{\text{eigentliche orthochrone Lorentzgruppe}} \\ \mathcal{L}^\uparrow &: \underline{\text{orthochrone Lorentzgruppe}} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \\ \mathcal{L}_+ &: \underline{\text{eigentliche Lorentzgruppe}} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \end{aligned} \qquad (B20)$$

Weiter gilt $\mathcal{L}_-^\uparrow = P\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow$.
Topologisch ist $\mathcal{L}_+^\uparrow$ die 1-Komponente von $\mathcal{L}$

Eine Untergruppe von $\mathcal{L}$ bilden die Raumrotationen R in der Schreibweise

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & R \end{pmatrix} \qquad \left(R \in O(3) \iff R^T R = 1 \right) \qquad (B21)$$

Eine abelsche Untergruppe von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ bilden die <u>Geschwindigkeitstransformationen</u> oder "Boost"s in einer Raumrichtung, speziell in der 1-Richtung

$$\Lambda(\chi) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{ch}\,\chi & -\mathrm{sh}\,\chi & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -\mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \chi \in \mathbb{R} \qquad (B22)$$

Offenbar gilt

$$\Lambda(\chi_1)\,\Lambda(\chi_2) = \Lambda(\chi_1 + \chi_2) \qquad (B23)$$

Mit $\xi = \binom{ct}{\underline{q}}$ gilt für $\tilde{\xi} = \Lambda(\chi)\,\xi$

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \mathrm{ch}\chi\, t - \frac{\mathrm{sh}\chi}{c}\, q^1 \\ \tilde{q}^1 &= -c\,\mathrm{sh}\chi\, t + \mathrm{ch}\chi\, q^1 \\ \tilde{q}^2 &= q^2, \quad \tilde{q}^3 = q^3 \end{aligned} \qquad (B24)$$

Der Ursprung des $\sim$-Koordinatensystems $\tilde{\underline{q}} = \underline{0}$ hat im alten Koordinatensystem die Koordinaten $q^1 = c\,\mathrm{th}\chi\, t$, $q^2 = q^3 = 0$. Dieses Inertialsystem bewegt sich also längs der 1-Achse mit konstanter Geschwindigkeit

$$v = c\,\mathrm{th}\chi \qquad (B25)$$

$$\Rightarrow \quad |v| < c$$

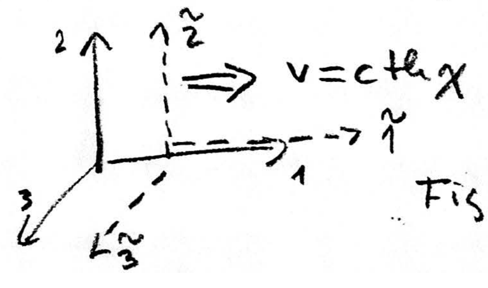


Fig. B1

Schreibt man (B24) koordinateninvariant mit Hilfe eines 1-Vektors $\underline{e}$ in die Geschwindigkeitsrichtung, so erhält man den allgemeinsten Boost $\Lambda(\chi, \underline{e})$:

$$\tilde{\xi} = \Lambda(\chi, \underline{e})\,\xi \qquad \tilde{\xi}^0 = \mathrm{ch}\chi\,\xi^0 - \mathrm{sh}\chi\,\underline{\xi}\cdot\underline{e} \qquad \text{(B26)}$$

$$\tilde{\underline{\xi}} = \underline{\xi}^\perp + \mathrm{ch}\chi\,\underline{\xi}^\parallel - \mathrm{sh}\chi\,\xi^0\underline{e} \quad , \quad \underline{\xi}^\parallel = (\underline{\xi}\cdot\underline{e})\underline{e} = \underline{\xi} - \underline{\xi}^\perp$$

Für festes $\underline{e}$ bilden die $\Lambda(\chi, \underline{e}) = \Lambda(\underline{v})$, $\underline{v} = \mathrm{th}\chi\,\underline{e}$, eine 1-parametrige abelsche Untergruppe von $\mathcal{L}_+^\uparrow$:

$$\Lambda(\chi_1, \underline{e})\,\Lambda(\chi_2, \underline{e}) = \Lambda(\chi_1 + \chi_2, \underline{e}) \Rightarrow \Lambda(\chi, \underline{e})^{-1} = \Lambda(-\chi, \underline{e})$$

(B27)

Die Mischung von Raum und Zeit durch Geschwindigkeitstransformationen hat zur Folge, daß zwei Ereignisse ξ_1, ξ_2, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, $\xi_1^0 = \xi_2^0$, es i.a. nicht mehr in einem anderen sind. Nach Einstein kann die Gleichzeitigkeit in einem Inertialsystem wie folgt operationell definiert werden: ξ_1 und ξ_2 sind gleichzeitig, wenn sich von ξ_1 und ξ_2 ausgesandte Lichtstrahlen räumlich in der Mitte zwischen $\underline{\xi}_1$ und $\underline{\xi}_2$ treffen:

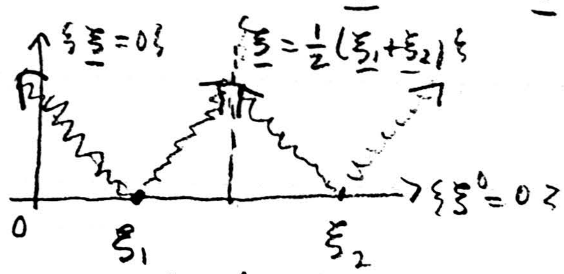


Fig. B2

In Fig. B2 sind die Kegelmäntel der lichtartigen Vektoren $N(\xi_i)$ (→Fig B6), auf denen sich in ξ_1 und ξ_2 ausgesandte Lichtblitze in die Zukunft ausbreiten, mit "~~" dargestellt. Diese Gleichzeitigkeit ist eine Äquivalenz-relation, aber sie ist nach Fig. B3 nicht geschwindigkeitstransformationsinvariant:

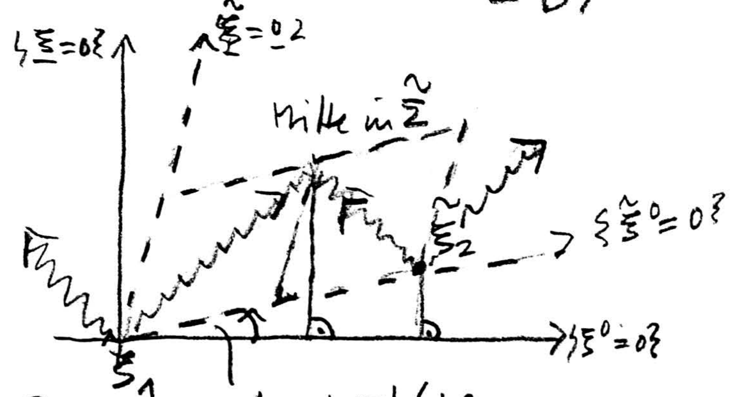


Fig. B3

Analytisch gilt

$$\xi_2^0 = sh\chi\,\tilde{\xi}_2^1 + ch\chi\,\tilde{\xi}_2^0 = sh\chi\,\tilde{\xi}_2^1 \qquad (B28)$$

wegen $\tilde{\xi}_2^0 = 0$ und (B27)

Boosts führen zu Lorentzkontraktionen: die Länge eines Einheitsmasstabes l in Σ hat in $\tilde{\Sigma}$ nach Fig. B4 die Länge $1/ch\chi < 1$: Denn es gilt

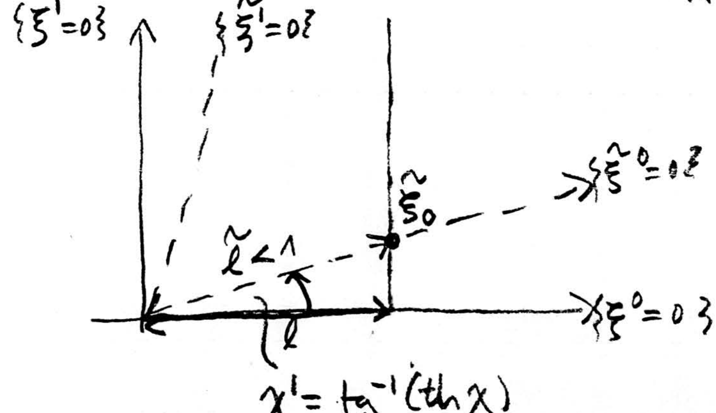


Fig. B4

für den Endpunkt $\tilde{\xi}_0$ des Masstabes in $\tilde{\Sigma}$:

$$\tilde{\xi}_0^0 = 0 = ch\chi\,\xi_0^0 - sh\chi\,\xi_0^1 \qquad (B29)$$

$$\xi_0^1 = 1 \Rightarrow \xi_0^0 = th\chi \Rightarrow \tilde{\xi}_0^1 = -\frac{sh^2\chi}{ch\chi} + ch\chi = \frac{1}{ch\chi} < 1$$

Entsprechend ist die Länge eines Einheitsmasstabes in $\tilde{\Sigma}$ in Σ auf $1/ch\chi < 1$ verkürzt wegen $ch\chi = ch(-\chi)$ bei der Vertauschung von Σ und $\tilde{\Sigma}$.

Ferner ist nach Fig. B5 die Schwingungsdauer in Σ τ einer Swatch in $\tilde{\Sigma}$ um $\gamma = ch\chi$ vergrössert und ebenso $\tilde{\tau}$ in $\tilde{\Sigma}$ von Σ aus gesehen. Denn es gilt analytisch für $\tilde{\xi}_0$ in Fig. B5

$$\tilde{\xi}_0 = \begin{pmatrix} ch\chi, & -sh\chi \\ -sh\chi, & ch\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\xi}_0^0 = ch\chi\,\tau \qquad (B30)$$

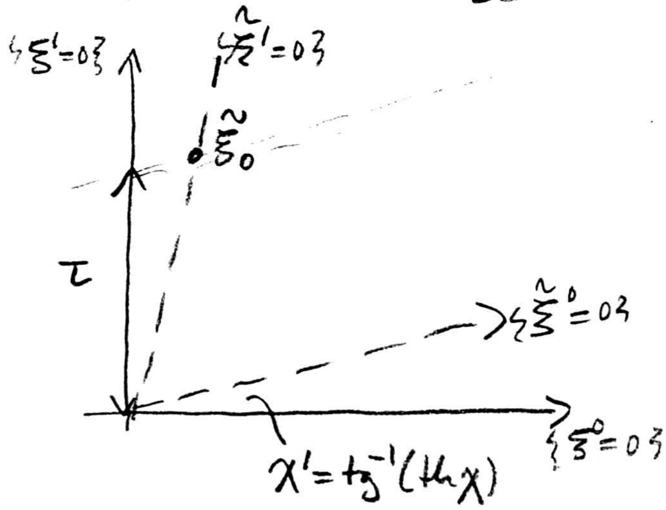


Fig. B5

Der experimentelle Nachweis dieser <u>Zeitdilatation</u> ist z.B. durch Messung der Lebensdauer von μ-Mesonen in Speicherringen oder in der Höhenstrahlung möglich ($\tau \approx 2\cdot 10^{-6}$ sec, bei $\gamma = 10$ bis 40 erreichen in 10 - 20 km Höhe erzeugte μ-Mesonen die Erdoberfläche).

Die Gruppenrelation (B27) führt auf das Einstein'sche Additionstheorem für die Relativgeschwindigkeiten von in der $\underline{e}$-Richtung bewegten Inertialsystemen:

$$v_{12} = c\, th(\chi_1+\chi_2) = c\,\frac{th\chi_1 + th\chi_2}{1+th\chi_1\cdot th\chi_2} = \frac{v_1+v_2}{1+v_1\cdot v_2/c^2} \qquad (B31)$$

Boosts $\Lambda(\underline{v})$ und Raumrotationen $\Lambda(R)$ erfüllen

$$\Lambda(R)\,\Lambda(\underline{v})\,\Lambda(R^{-1}) = \Lambda(R\underline{v}) \qquad (B32)$$

Denn aus (B26) folgt für $\tilde{\xi} = \Lambda(\chi,\underline{e})\,\Lambda(R^{-1})\,\xi$:

$$\tilde{\xi}^0 = ch\chi\,\xi^0 - sh\,\underline{e}\cdot R^{-1}\underline{\xi}) \qquad (B33)$$

$$\tilde{\underline{\xi}} = ch\chi\,(\underline{e}\cdot R^{-1}\underline{\xi})\,\underline{e} - sh\chi\,\xi^0\,\underline{e} + (R^{-1}\underline{\xi} - (\underline{e}\cdot R^{-1}\underline{\xi})\,\underline{e})$$

Wendet man auf (B33) $\Lambda(R)$ an und benutzt $(\underline{e}\cdot R^{-1}\underline{\xi}) = (\underline{\xi}\cdot R\underline{e})$ für $R\in O(3)$ so folgt (B32).

Ist $\xi_0 = \binom{1}{\underline{0}}$, so folgt aus $\Lambda_1 \xi_0 = \Lambda_2 \xi_0$ $\Lambda_1^{-1}\Lambda_2 \xi_0 = \xi_0$ und daher ist $\Lambda_1^{-1}\Lambda_2$ eine Raum-rotation. Ist $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ beliebig, so ist $\Lambda\xi_0$ zeitartig und mit positiver Zeitkomponente:

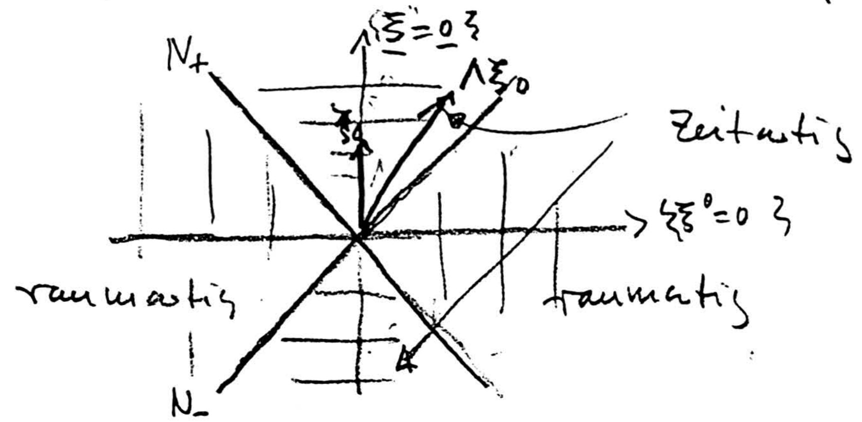


Fig. B6

$(\Lambda\xi_0, \Lambda\xi_0) = 1$ und $(\Lambda\xi_0)^0 = \Lambda^0{}_0 \geq 1$. Daher gibt es einen Boost $\Lambda(\underline{v})$ mit $\Lambda\xi_0 = \Lambda(\underline{v})\xi_0$, und daher ist $\Lambda(\underline{v})^{-1}\Lambda = \Lambda(R)$ eine Rotation. Jedes $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ ist also darstellbar als

$$\Lambda = \Lambda(R)\Lambda(\underline{v}) = \Lambda(R_1)\Lambda(\chi)\Lambda(R_2) \qquad (B34)$$

durch spezielle oder allgemeine Boosts und Rotationen $R_{(i)} \in SO(3)$, wobei die 2. Identität aus (B 32) folgt.

Nach dieser Vorbereitung können wir auch beweisen, daß wenn in jedem Inertialsystem, das aus einem Inertialsystem durch (4.16) hervorgeht durch Wahl von Maßstäben $\lambda > 0$ als Funktion von Λ festgelegt wird und zwar stetig in Λ und mit der Verträglichkeitsbedingung

$$\lambda(\Lambda_1\Lambda_2) = \lambda(\Lambda_1)\,\lambda(\Lambda_2), \qquad (B35)$$

daß dann notwendigerweise $\lambda \equiv 1$ ist.

Denn zunächst gilt für $\Lambda \in \{P, T\}$ wegen $\Lambda^2 = 1$ $\quad \lambda(\Lambda) = 1$. Für jede 1-parametrige Untergruppe $R(\varphi, \underline{e})$ von Raumrotationen um die $\underline{e}$-Achse mit Drehwinkel φ gilt

$$R(\varphi, \underline{e})\,\underline{q} = (1-\cos\varphi)(\underline{q}\cdot\underline{e})\,\underline{e} + \sin\varphi\; \underline{e}\wedge\underline{q} + \cos\varphi\,\underline{q}$$

$$\Rightarrow R(\varphi_1+\varphi_2, \underline{e}) = R(\varphi_1, \underline{e})\, R(\varphi_2, \underline{e}) \qquad \text{(B 36)}$$

Daher gilt für $\lambda(\varphi) = \lambda(\Lambda(R(\varphi, \underline{e})))$

$$\lambda(\varphi_1+\varphi_2) = \lambda(\varphi_1)\,\lambda(\varphi_2) \qquad \text{(B 37)}$$

und für stetige φ-Abhängigkeit folgt

$$\lambda(\varphi) = e^{a\varphi} \qquad \text{(B 38)}$$

Aus $\lambda(2\pi) = 1$ folgt dann $a = 0$ und $\lambda(\varphi) = 1$. Für jede 1-parametrige Untergruppe von Boosts $\Lambda(\chi, \underline{e})$ erfüllen die entsprechenden $\lambda(\varphi)$ wieder (B 37, 38). Ist R eine Rotation um π um eine zu $\underline{e}$ senkrechte Achse, so folgt aus (B 32) mit $\lambda(R) = 1$ $\quad \lambda(\chi) = \lambda(-\chi)$, also aus (B 38) $\lambda(\chi) = 1$. Da jedes $\Lambda \in \mathcal{L}$ nach (B 34) darstellbar ist als $\Lambda(R)\Lambda(\underline{v})$ (mal eventuell P und/oder T) folgt die Behauptung.

Von ganz besonderer Bedeutung für die Mechanik sind die <u>eigentlichen Raumrotationen</u> (B 36), die wir im folgenden genauer untersuchen wollen. Definiert man $E(\underline{e})$ als den linearen Operator im $\mathbb{R}^3$ für den 1-Vektor $\underline{e} = (e^1, e^2, e^3)$

$$E(\underline{e})\,\underline{q} = \underline{e}\wedge\underline{q} \;\Rightarrow\; E(\underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B39)}$$

Dann gilt wegen $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$

$$E(\underline{e})^{2k}\underline{a} = (-1)^k \{ \underline{a} - (\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e} \} , \quad k = 1,2\ldots$$

$$E(\underline{e})^{2k+1}\underline{a} = (-1)^k \underline{e} \wedge \underline{a} \qquad k = 0,1,2. \qquad (B40)$$

und daher die gruppentheoretisch wichtige Relation

$$R(\underline{e},\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} E(\underline{e})^n = e^{E(\underline{e}\varphi)} = e^{\varphi E(\underline{e})} \qquad (B41)$$

Für jedes $R_0 \in SO(3)$ und jedes $\underline{a}$ hat man

$$R_0(\underline{e} \wedge \underline{a}) = (R_0\underline{e}) \wedge (R_0\underline{a}) \Rightarrow \quad R_0 E(\underline{e}) R_0^{-1} = E(R_0\underline{e})$$

$$\Rightarrow R_0 R(\underline{e},\varphi) R_0^{-1} = R(R_0\underline{e},\varphi) \qquad (B42)$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten in (4.68,69) gilt das folgende Additionsgesetz: Es sei

$$\Omega_i = \dot{R}_i R_i^{-1} = E(\underline{\omega}_i) \qquad i = 1,2$$

$$\Omega = \dot{R} R^{-1} = E(\underline{\omega}) \qquad R = R_1 R_2$$

$$\Rightarrow E(\underline{\omega}) = \dot{R}_1 R_2 R_2^{-1} R_1^{-1} + R_1 \dot{R}_2 R_2^{-1} R_1^{-1} \qquad (B43)$$

$$= E(\underline{\omega}_1) + E(R_1\underline{\omega}_2)$$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + R_1 \underline{\omega}_2$$

(B43) hat eine wichtige Anwendung für die Euler'schen Winkel des starren Körpers (→ Fig. C3), falls $R = R_k R_{k-1} \cdots R_1$ gilt, wobei jedes $R_k = R({}'\underline{e}_k, \varphi_k)$ ist mit ${}'\underline{e}_k = R_{k-1} \cdots R_1 \underline{e}_k$:

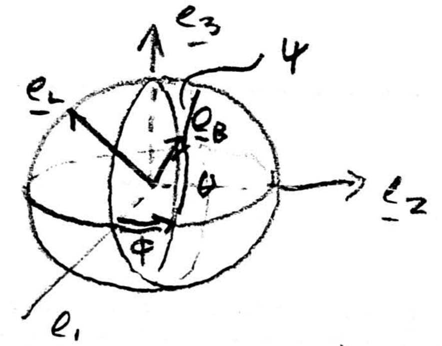
$$R_k \cdots R_1 = R(R_{k-1}\cdots R_1\underline{e}_k, \varphi_k) R_{k-1} \cdots R_1 = \qquad (B44)$$

$$= R_{k-1} \cdots R_1 R(\underline{e}_k,\varphi_k) = \cdots = R(\underline{e}_1,\varphi_1) \cdots R(\underline{e}_k,\varphi_k).$$

Sind die $\underline{e}_k$'s zeitunabhängig, so gilt $\dot{R}(\underline{e}_k,\varphi_k) R(\underline{e}_k,\varphi_k)^{-1} = E(\dot{\varphi}_k \underline{e}_k)$ und aus (B43,44) folgt für die Winkelgeschwindigkeit von R:

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}_1 \underline{e}_1 + \dot{\varphi}_2 {}'\underline{e}_2 + \cdots \dot{\varphi}_k {}'\underline{e}_k \qquad (B45)$$

Eine Anwendung auf die Kinematik des Auges, das in erster Approximation eine Kugel mit festem Mittelpunkt ist, stammt von Listing und Helmholtz. Nach Fig (B7) sind das kopffeste Koordinatensystem mit Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ und das augenfeste mit Basis $\{{}'\underline{e}_1, {}'\underline{e}_2, {}'\underline{e}_3\}$ so orientiert, daß beide bei Fixation in Primär-position (vorwärts bei aufrechtem ruhenden Kopf) zusammenfallen. Die Blickrichtung $\underline{e}_B$



<u>Torsion</u> ψ: Winkel zwischen der objektiven Vertikalen durch $\underline{e}_B$ und der durch R transportierten Vertikalen durch $'\underline{e}_1$

habe die Winkel ϕ, θ mit $'\underline{e}_1 = \underline{e}_B = R(\tilde{\underline{e}}_2, -\theta)\, R(\underline{e}_3, \phi)\, \underline{e}_1$, $\tilde{\underline{e}}_2 = R(\underline{e}_3, \phi)\, \underline{e}_1$. $'\underline{e}_2$ und $'\underline{e}_3$ sind durch eine weitere Torsion $R(\underline{e}_B; \psi)$ mit Winkel ψ gegeben. Es gilt

$$R = R(\underline{e}_B, -\psi)\, R(\tilde{\underline{e}}_2, -\theta)\, R(\underline{e}_3, \phi) = R(\underline{e}_3, \phi)\, R(\underline{e}_2, -\theta)\, R(\underline{e}_1, -\psi) \qquad (B46)$$

Bei Fixation mit ruhendem Kopf ist ψ eine Funktion von ϕ, θ, die so bestimmt ist, daß R eine Rotation in der $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$-Ebene ist:

$$R = R(\underline{e}_L, \beta) \quad , \quad \underline{e}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (B47)$$

Dies legt $\alpha(\phi, \theta)$ und $\beta(\phi, \theta)$ fest (wie ?) und es gilt das Listing'sche Gesetz

$$\sin\psi = \frac{\sin\phi \, \sin\theta}{1 + \cos\phi \, \cos\theta} \qquad (B48)$$

das in Übungsserie 13 hergeleitet wird.

Übungsserie 13 zur Mechanik

(Abgabe 9.2.87)

Stellen Sie Zusammenhänge zwischen der Beschreibung von Rotationen durch Euler'sche Winkel und Quaternionen her, indem Sie die Arbeit von Wertheimer (J Optical Soc. of America 47 967 (1957)) mit Appendix B und C der Mechanik-Vorlesung (speziell (C 14-20)) in Verbindung bringen. Leiten Sie das Listing'sche Gesetz bei Wertheimer (24) mit der Wahl der Winkel von (B47) her und verifizieren Sie (B48). Wenn Sie historisches Interesse haben, so finden Sie mehr Material bei Helmholtz ("Physiologische Optik") ohne Matrizen.

-B14-

JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA VOLUME 47, NUMBER 10 OCTOBER, 1957

Kinematics of the Eye

GERALD WESTHEIMER
The Ohio State University, Columbus, Ohio

(Received May 1, 1957)

A mathematical discussion is presented of eye positions and eye movements in terms of quaternion theory. An eye movement may be regarded as a rotation of the eye about an axis through the center of rotation. The parameters of the axis of rotation and the extent of the rotation are associated to form a higher complex number, and this leads to the definition of an eye position in terms of the rotation by which it is reached from the prinary position. Equations are derived for the parameters of the single rotation equivalent to two successive finite rotations, for Listing's law, for torsional movements, for the angle between the primary horizontal meridian of the eye and the plane of regard, and for the angle between the primary vertical meridian of the eye and the true vertical plane through the fixation line.

THE eye may be regarded as rotating about a point fixed within it and also within the head. The kinematical laws applicable to eye movements are then those of a rigid body constrained to rotate about a fixed point. Such a body has three rotational degrees of freedom. Hence three independent parameters are required to specify its orientation with respect to a given frame of reference. The same applies to a change of orientation. The handling of these parameters involves some problems that are a consequence of the fact that finite rotations are not commutative, i.e., it matters in what order the rigid body is subjected to two or more consecutive rotations.

The first adequate treatment of the kinematics of the eye is that of Helmholtz[1] written nearly 100 years ago. The theory of quaternions was very popular at that time, but Helmholtz did not use it. This is unfortunate because there are few problems in which quaternions are more usefully applied than in finite rotations. As a result, Helmholtz's discussion, while complete and rigorous, does not possess the directness or generality attainable with quaternions, nor does it allow the ready development of analytic expressions for axes and extents of rotations. The same applies to more recent discussions.[2,3]

This paper represents an attempt to develop a consistent and complete system of specifying eye rotation by means of quaternion theory. It permits a more succinct description of eye positions and displacements, and it is a helpful preliminary to considerations of ocular movements in which cognizance is given to the forces producing these movements.

INTRODUCTION

Consider the normal visual behavior when a point object is presented to one eye of an observer and he is instructed to "look at it" with his head fixed. This will usually result in a movement of the eye such that it occupies a definite position with respect to the object. The object is then said to be fixated and one may speak of it as a *fixation point*.

For the somewhat idealized analysis of the kinematics of the eye presented here it is necessary to assume that the eye rotates about a point which remains fixed in the eye and the orbit, and the available evidence suggests that this assumption is approximately correct. The point is called the *center of rotation* of the eye since all eye movements, with the head as a frame of reference, may be described as rotations of the eye around this point.

The line joining the fixation point, *pro tempore*, and the center of rotation is spoken of as the fixation line and it may be regarded as fixed within the eye.

Assume that the head is erect[4] and establish a Cartesian coordinate system fixed in the head, centered in the center of rotation of the right eye, the positive direction of the x axis being straight ahead, parallel to the median plane, and normal to the face plane. Let the positive direction of the y axis be outward (temporalward) and parallel to the face plane, and let the positive direction of z axis be upward.

When the eye fixates a point on the x axis it is said to be in the straight ahead position. When certain conditions are fulfilled this is also the primary position of the eye. Assume the eye to be in the primary position.

A Cartesian system of orthogonal axes, x', y', z', centered in the center of rotation and fixed in the eye, is now defined such that x', y', z' coincide with x, y, z when the eye is in the primary position.

The plane $z'=0$ is defined as the primary horizontal plane of the eye, and the plane $y'=0$ is defined as the primary vertical plane of the eye; this is parallel to the median sagittal plane.

In the absence of appreciable astigmatism we may regard the optical system of the eye as a symmetrical system. It follows that a horizontal line segment through the fixation point, i.e., a segment for which $z=0$, will always be imaged on the retina as a horizontal segment. By definition it will cover a retinal meridian

[1] H. v. Helmholtz, *Treatise on Physiological Optics* (Optical Society of America, 1925), Vol. III.

[2] G. Schubert, Pflüger's Arch. ges. Physiol. 205, 637 (1924); 215, 553 (1927); 216, 580 (1927); 220, 300 (1928).

[3] Otto Fischer, *Medizinische Physik* (S. Hirzel, Leipzig, 1913).

[4] The erect position of the head is defined as the position in which the face plane and the median sagittal plane of the head are both vertical.

-B15-

for which $z'=0$ when the eye is in the primary position but not necessarily for other eye positions. A similar reasoning applies to vertical line segments.

Let q_0 denote the state in which the x, y, z and the x', y', z' axes coincide, i.e., the primary position. Now assume that the eye has been displaced, i.e., a rotation has taken place around the center of rotation, such that with respect to the x, y, z axes, the x', y', and z' axes have direction cosines c_{11}, c_{12}, c_{13}; c_{21}, c_{22}, c_{23}; and c_{31}, c_{32}, c_{33}, respectively.

Let this second state be denoted by q_1. A point with coordinates x', y', z' in the eye, which had coordinates x, y, z in the orbit in the primary position when x' was equal to x, y' to y, and z' to z, will now have coordinates in the orbit

$$\begin{aligned} x&=c_{11}x'+c_{21}y'+c_{31}z',\\ y&=c_{12}x'+c_{22}y'+c_{32}z',\\ z&=c_{13}x'+c_{23}y'+c_{33}z'. \end{aligned} \tag{1}$$

This is a consequence of the fact that for $x=y=z=0$, $x'=y'=z'=0$.

Equations (1) also may be written as follows:

$$\begin{aligned} x'&=c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z,\\ y'&=c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z,\\ z'&=c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z. \end{aligned} \tag{1a}$$

The nine coefficients c_{11} through c_{33} are not independent but obey the following constraints, which are discussed in detail in most text books of solid geometry:

$$\begin{aligned} c_{11}^2+c_{12}^2+c_{13}^2&=1,\\ c_{21}^2+c_{22}^2+c_{23}^2&=1,\\ c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2&=1,\\ c_{21}\cdot c_{31}+c_{22}\cdot c_{32}+c_{23}\cdot c_{33}&=0,\\ c_{31}\cdot c_{11}+c_{32}\cdot c_{12}+c_{33}\cdot c_{13}&=0,\\ c_{11}\cdot c_{21}+c_{12}\cdot c_{22}+c_{13}\cdot c_{23}&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Thus $9-6=3$ degrees of freedom exist for the relationship between the two systems of coordinates.

In place of Eqs. (2) we also may write

$$\begin{aligned} c_{11}^2+c_{21}^2+c_{31}^2&=1,\\ c_{12}^2+c_{22}^2+c_{32}^2&=1,\\ c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2&=1,\\ c_{12}\cdot c_{13}+c_{22}\cdot c_{23}+c_{32}\cdot c_{33}&=0,\\ c_{13}\cdot c_{11}+c_{23}\cdot c_{21}+c_{33}\cdot c_{31}&=0,\\ c_{11}\cdot c_{12}+c_{21}\cdot c_{22}+c_{31}\cdot c_{32}&=0. \end{aligned} \tag{2a}$$

The coefficients are also related by the following equations:

$$\begin{aligned} c_{11}&=c_{22}\cdot c_{33}-c_{23}\cdot c_{32},\\ c_{21}&=c_{23}\cdot c_{13}-c_{12}\cdot c_{33},\\ c_{31}&=c_{12}\cdot c_{23}-c_{22}\cdot c_{13},\\ c_{12}&=c_{23}\cdot c_{13}-c_{33}\cdot c_{21},\\ c_{22}&=c_{33}\cdot c_{11}-c_{31}\cdot c_{13},\\ c_{32}&=c_{13}\cdot c_{21}-c_{23}\cdot c_{11},\\ c_{13}&=c_{21}\cdot c_{32}-c_{31}\cdot c_{22},\\ c_{23}&=c_{31}\cdot c_{12}-c_{32}\cdot c_{11},\\ c_{33}&=c_{11}\cdot c_{22}-c_{21}\cdot c_{12}. \end{aligned} \tag{2b}$$

There is a one-to-one relationship between eye positions q_n and sets of coefficients c_{11} through c_{33} so that a set of coefficients uniquely defines an eye position.

GENERAL THEORY

The process of displacing the coordinate system x', y', z' fixed in the eye from coincidence with x, y, z to a new orientation may be described in several ways, but one of the most concise is due to the theorem, first enunciated by Euler, that a displacement of a rigid body from one position to any other that leaves one point of the body fixed in space is equivalent to a rotation of the body around an axis through this point.

The displacement of the eye from position q_0, the primary position, to another position q_1 is therefore equivalent to the rotation of the eye through an angle ω around an axis[6] through the center of rotation, which has direction cosines $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$. Here the positive direction of the rotation axis makes an angle (a) with the positive direction of the x axis, (b) with the positive direction of the y axis, and (c) with the positive direction of the z axis.

Let

$$\begin{aligned} A&=\cos a\,\sin\tfrac{1}{2}\omega,\\ B&=\cos b\,\sin\tfrac{1}{2}\omega,\\ C&=\cos c\,\sin\tfrac{1}{2}\omega,\\ D&=\cos\tfrac{1}{2}\omega. \end{aligned} \tag{3}$$

A, B, C, and D may be used to form a quaternion, a higher complex number defined by

$$Q=Ai+Bj+Ck+D, \tag{4}$$

where the quantities i, j, k obey the following relationships:

$$\begin{aligned} &i\cdot i=-1, && j\cdot j=-1, && k\cdot k=-1,\\ &i\cdot j=k, && j\cdot k=i, && k\cdot i=j,\\ &j\cdot i=-k, && k\cdot j=-i, && i\cdot k=-j. \end{aligned} \tag{5}$$

The conjugate of Q is

$$Q^*=-Ai-Bj-Ck+D. \tag{6}$$

[6] ω is positive when the rotation takes place in a clockwise manner around the axis looking towards the center of rotation along the positive direction of the axis. In the case of eye positions we do not have to consider what happens when $|\omega|>\pi$.

— B16 —

The product

$$Q\cdot Q^*=A^2+B^2+C^2+D^2=1. \tag{7}$$

This may be verified by substitution of Eqs. (3) in (7) since

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1.$$

One application of quaternion theory[6,7] is that a rotation of a rigid body may be represented by a quaternion. In particular, if the coordinates of a point in the body are x', y', z' and the body is displaced from a position q_0 (in which the x', y', z' axes coincide with the x, y, z axes of space) to a position q_1 (in which the x' axis has direction cosines c_{11}, c_{12}, c_{13} with respect to the x, y, z axes, etc.) then the new coordinates x, y, z of the point of the body with respect to the coordinate axes fixed in space are given by the following equation:

$$xi+yj+zk=Q\cdot(x'i+y'j+z'k)\cdot Q^*. \tag{8}$$

The components of Q and Q^* are given by Eqs. (3), (4), and (6) in terms of the parameters of rotation, i.e., in terms of the direction cosines of the axis of rotation and the extent of rotation. The value of x is found by multiplying the right-hand side of Eq. (8) by means of the rules defined in Eqs. (5) and summing the coefficients of i. Similarly, the y value is equal to the coefficients of j and the z value is equal to the coefficients of k. In this manner the coefficients c_{11} through c_{33} in Eqs. (1) are determined to be

$$\begin{aligned}
c_{11}&=D^2+A^2-B^2-C^2,\\
c_{21}&=2(AB-CD),\\
c_{31}&=2(AC+BD),\\
c_{12}&=2(AB+CD),\\
c_{22}&=D^2-A^2+B^2-C^2,\\
c_{32}&=2(BC-AD),\\
c_{13}&=2(AC-BD),\\
c_{23}&=2(BC+AD),\\
c_{33}&=D^2-A^2-B^2+C^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

It must be remembered that Q defines the operation of displacement; the final position of the eye depends on the initial position. This may be put symbolically

$$q_0 \xrightarrow{Q_{0,1}} q_1,$$

which signifies that the eye was in the primary position and that a displacement $Q_{0,1}$ (i.e., rotation of ω around an axis given by $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$) has placed the eye in position q_1. We have thus a means of identifying eye position q_1, q_2, q_3 $\cdots$ by the operations $Q_{0,1}$, $Q_{0,2}$, $Q_{0,3}$ $\cdots$ required to move the eye from the primary position to the new position.

[6] F. Klein and A. Sommerfeld, *Uber die Theorie des Kreisels* (B. G. Teubner, Leipzig, 1897), Heft 1.

[7] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (Julius Springer, Berlin, 1921), Bd. I, 3 Aufl.

Consider the rotation $Q_{1,0}$ required to move the eye from the position q_1 back to the primary position. The direction cosines of the axis will be the same, but the extent of the rotation will now be $-\omega$. Since

$$\sin(-\tfrac{1}{2}\omega)=-\sin\tfrac{1}{2}\omega$$

and

$$\cos(-\tfrac{1}{2}\omega)=\cos\tfrac{1}{2}\omega,$$

the components of the quaternion $Q_{1,0}$ are $-A$, $-B$, $-C$, and D.

Hence if $Q_{0,1}$ is defined by Eq. (4), then $Q_{1,0}$ which is given by the left-hand side of Eq. (6), is the conjugate of $Q_{0,1}$. In symbols

$$Q_{1,0}=Q_{0,1}^*. \tag{10}$$

Consider now the case in which a displacement from q_0 to q_1 was achieved not directly but by way of a displacement to q_2 and thence to q_1. In such a case, Eq. (8) takes the form

$$xi+yj+zk=Q_{2,1}\cdot[Q_{0,2}\cdot(x'i+y'j+z'k)\cdot Q_{0,2}^*]\cdot Q_{2,1}^*,$$

and hence

$$Q_{2,1}\cdot Q_{0,2}=Q_{0,1}.$$

Multiplying each side by $Q_{0,2}^*$ we obtain, since $Q_{0,2}\cdot Q_{0,2}^*=1$,

$$Q_{2,1}=Q_{0,1}\cdot Q_{0,2}^*=Q_{0,1}\cdot Q_{2,0}.$$

Similarly,

$$Q_{1,2}=Q_{0,2}\cdot Q_{0,1}^*=Q_{0,2}\cdot Q_{1,0}, \tag{11}$$

and since

$$Q_{1,2}=Q_{2,1}^*,$$

we have

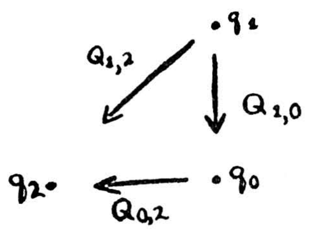
$$[Q_{0,1}\cdot Q_{0,2}^*]^*=Q_{0,2}\cdot Q_{0,1}^*. \tag{12}$$

These equations indicate (i) that a displacement Q' following a displacement Q is equivalent to a single displacement

$$Q''=Q'\cdot Q$$

and (ii) that the operations Q are not commutative, i.e., that $Q'\cdot Q$ is not necessarily equal to $Q\cdot Q'$. The latter is an important property of rotations; the sequence of rotations must be clearly stated in a case in which two or more successive rotations are imposed on the body.

This may be shown schematically in the following diagram:



The operation $q_1\rightarrow q_2$ may be carried out either by the single rotation $Q_{1,2}$, or by the sequence of rotation $Q_{0,1}^*$, i.e., $q_1\rightarrow q_0$, followed by rotation $Q_{0,2}$, i.e., $q_0\rightarrow q_2$. Equation (11) defines this sequence in terms of the

-B17-

quaternion product $Q_{0,2}\cdot Q_{0,1}^*$ and this will therefore be equal to $Q_{1,2}$.

The combination Q'' of two rotations, Q followed by Q' may also be written

$$Q''=Q'\cdot Q=(A'i+B'j+C'k+D')\cdot(Ai+Bj+Ck+D)$$
$$=A''i+B''j+C''k+D''$$

where[8]

$$\begin{aligned} A''&=A'D+B'C-C'B+D'A\\ B''&=-A'C+B'D+C'A+D'B\\ C''&=A'B-B'A+C'D+D'C\\ D''&=D'D-A'A-B'B-C'C. \end{aligned} \tag{13}$$

It may be shown that Eqs. (13) are equivalent to the geometrical theorem due to Donkin,[9,10] with which Helmholtz was familiar, concerning the resultant of two successive finite rotations.

LISTING'S LAW

It is an experimental fact that associated with each direction of the fixation line, the x' axis, there is ordinarily only one orientation of the eye, regardless of how the fixation line reaches this direction. This was discovered by Donders.

Listing first enunciated the law, which now bears his name, that under ordinary conditions when fixating objects not on the x axis, the eye will assume only those positions that can be reached by rotation from the primary position around an axis lying in the y, z plane.

When expressed in terms of the notation developed here this means that ordinarily the eye will only occupy positions q_n, such that

$$Q_{0,n}=Bj+Ck+D,$$

i.e., such that

$$A=0. \tag{14}$$

Equation (14), which is the analytical expression of Listing's law, allows us to select the generalized coordinates of eye positions, i.e., that set of coordinates that permits description of the system with the smallest number of variables.

Since, according to Listing's law,

$$a=\pi/2$$

and

$$\cos a=0,$$

it follows that

$$\cos^2 b+\cos^2 c=1.$$

[8] It may occasionally be found more convenient to use the matrix notation for a quaternion. $Ai+Bj+Ck+D$ then takes the form

$$\left\|\begin{matrix} D & -A & -B & -C\\ A & D & -C & B\\ B & C & D & -A\\ C & -B & A & D \end{matrix}\right\|.$$

See, for example C. C. McDuffee, *An Introduction to Abstract Algebra* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1940), p. 256.

[9] F. W. Donkin, Phil. Mag. Ser. 3, **36**, 427 (1850).

[10] H. Lamb, Phil. Mag. Ser. 6, **38**, 686 (1919).

We shall use c, the angle between the axis of rotation and the positive direction of the z axis, and ω, the extent of the rotation, as the coordinates for the description of an eye position obeying Listing's law.[11] Equations (3) then assume the following form

$$\begin{aligned} A&=0,\\ B&=\sin c\,\sin\tfrac{1}{2}\omega,\\ C&=\cos c\,\sin\tfrac{1}{2}\omega,\\ D&=\cos\tfrac{1}{2}\omega. \end{aligned} \tag{15}$$

TORSIONAL MOVEMENTS

Under exceptional circumstances, such as pathology or special stimulus conditions, the eye may occupy a position q_c such that $Q_{0,c}$ has a component $A\neq 0$. This situation may be analyzed as follows.

Let q_n be the eye position obeying Listing's law in which the direction of the x' axis coincides with the direction of the x' axis when the eye is in position q_c. $Q_{0,n}$ has the components given by Eq. (15). On substitution in (9) this yields the following values for the direction cosines of the fixation line in the new position:

$$\begin{aligned} c_{11}&=\cos\omega,\\ c_{12}&=\cos c\,\sin\omega,\\ c_{13}&=-\sin c\,\sin\omega. \end{aligned} \tag{16}$$

Let $Q_{n,c}$ describe that movement with the new direction of the fixation line as axis and with extent τ, which brings the eye from position q_n to position q_c. In symbols,

$$q_0 \xrightarrow{Q_{0,n}} q_n \xrightarrow{Q_{n,c}} q_c.$$

The rotation

$$Q_{n,c}=A'i+B'j+C'k+D'$$

has parameters

$$\begin{aligned} A'&=\cos\omega\,\sin\tfrac{1}{2}\tau,\\ B'&=\cos c\,\sin\omega\,\sin\tfrac{1}{2}\tau,\\ C'&=-\sin c\,\sin\omega\,\sin\tfrac{1}{2}\tau,\\ D'&=\cos\tfrac{1}{2}\tau. \end{aligned}$$

Such rotations are called torsional movements. The angle τ is positive if the rotation is in a clockwise manner looking along the fixation line towards the center of rotation.

[11] This notation has the advantage that c is also the angle (in the standard notation of specifying axes of astigmatic corrections) between the horizontal plane through the center of rotation and the plane containing the primary and new directions of the fixation line. ω, the angle through which the fixation line has rotated to reach the new direction from the primary direction, is regarded to be positive when the movement is clockwise looking towards the center of rotation along the positive direction of the axis. If the right eye, for example, is in a position where the anterior pole of the cornea has moved 20° up and nasally along the 30° meridian (standard rotation), then $c=30°$ and $\omega=-20°$.

-B 18-

Any eye position whatever may be regarded as a position obeying Listing's law upon which has been superimposed a torsional movement $Q_{n,c}$. The single movement $Q_{0,c}$ that would bring the eye from the primary position to the position q_c, is equivalent to the two rotations $Q_{0,n}$ and $Q_{n,c}$ executed in this order. By Eq. (11),

$$Q_{0,c}=Q_{n,c}\cdot Q_{0,n}=A''i+B''j+C''k+D''.$$

Substituting the previously calculated values of the parameters A', B', C', D' and A, B, C, D, in Eqs. (3), we obtain

$$\begin{aligned} A''&=\cos\tfrac{1}{2}\omega\,\sin\tfrac{1}{2}\tau,\\ B''&=\sin\tfrac{1}{2}\omega\,\sin(c+\tfrac{1}{2}\tau),\\ C''&=\sin\tfrac{1}{2}\omega\,\cos(c+\tfrac{1}{2}\tau),\\ D''&=\cos\tfrac{1}{2}\omega\,\cos\tfrac{1}{2}\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Equations (3) accordingly allow us to compute the direction cosines $\cos a''$, $\cos b''$, $\cos c''$, of the axis and the extent, ω'', of the single movement which is equivalent to the combination of the movement $Q_{0,n}$—of extent ω around the axis making an angle c with the x axis—and the movement $Q_{n,c}$—of extent τ around the new direction of the fixation line. They are

$$\begin{aligned} \cos a''&=\cos\tfrac{1}{2}\omega\,\sin\tfrac{1}{2}\tau[1-\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\,\cos^2\tfrac{1}{2}\tau]^{-\frac{1}{2}},\\ \cos b''&=\sin\tfrac{1}{2}\omega\,\sin(c+\tfrac{1}{2}\tau)[1-\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\,\cos^2\tfrac{1}{2}\tau]^{-\frac{1}{2}},\\ \cos c''&=\sin\tfrac{1}{2}\omega\,\cos(c+\tfrac{1}{2}\tau)[1-\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\,\cos^2\tfrac{1}{2}\tau]^{-\frac{1}{2}},\\ \cos\tfrac{1}{2}\omega''&=\cos\tfrac{1}{2}\omega\,\cos\tfrac{1}{2}\tau. \end{aligned} \tag{18}$$

ORIENTATION OF PRIMARY HORIZONTAL AND VERTICAL PLANES OF EYE

It is sometimes of interest to know the angle between the primary vertical plane of the eye and that plane through the fixation line that has its normal in the x, y plane, i.e., a plane that is truly vertical. This angle is a measure of the deviation of the retinal image of a truly vertical line segment through the fixation point from the primary vertical retinal meridian.

The equation of the primary vertical plane of the eye is

$$y'=c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z=0. \tag{19}$$

The equations of all vertical planes through the center of rotation have the form

$$\alpha x+\beta y=0. \tag{20}$$

The values of α and β in Eq. (20) must be chosen so that they define the vertical plane through the fixation line. The latter has direction cosines c_{11}, c_{12}, c_{13}.

A plane,

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

contains the line through the origin with direction cosines λ, μ, ν if

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0. \tag{21}$$

The condition that the fixation line is contained in the plane,

$$\alpha x+\beta y=0,$$

is, therefore,

$$\alpha c_{11}+\beta c_{12}=0.$$

This gives

$$\alpha=-c_{12},\quad \beta=c_{11}$$

and (20) becomes

$$-c_{12}x+c_{11}y=0. \tag{20a}$$

The angle between two planes

$$\xi_1x+\eta_1y+\zeta_1z=0$$
$$\xi_2x+\eta_2y+\zeta_2z=0$$

is given by

$$\cos\rho=\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2}{(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

Applied to Eqs. (19) and (20a) this yields the following equation for ρ_V, the angle between the primary vertical meridian of the eye and the vertical plane through the fixation line:

$$\cos\rho_V=\frac{-c_{21}\cdot c_{12}+c_{22}\cdot c_{11}}{(c_{11}^2+c_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{c_{33}}{(1-c_{13}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{23}$$

If we substitute the values of c_{33} and c_{13} from (9) we obtain

$$\cos\rho_V=\frac{D^2-A^2-B^2+C^2}{[1-4(AC-BD)^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{23a}$$

which gives ρ_V in terms of the components of the quaternion describing the rotation of the eye from the primary position to the position in question. If the latter is one obeying Listing's law, we substitute the values for A, B, C, D given in Eq. (15) whence finally

$$\cos\rho_V=\frac{\cos^2c+\sin^2c\,\cos\omega}{(1-\sin^2c\,\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}}. \tag{24}$$

This may also be written[12]

$$\tan\rho_V=\frac{\sin c\,\cos c(1-\cos\omega)}{\cos^2c+\sin^2c\,\cos\omega}. \tag{24a}$$

When

$$\omega=0,\quad \rho_V=0.$$

This is, of course, obvious; when no rotation has taken place the two planes remain coincident. Similarly,

$$\rho_V=0,$$

---

[12] This equation involves similar quantities as Eq. (4c) on p. 83 of H. v. Helmholtz (reference 1). There is, however, a printer's error in the second German edition, which contains Helmholtz's corrected analysis. The left-hand side of Eq. (4c) of Helmholtz should read $\tan k'$ instead of $\cot k'$. (k' is the same angle as ρ_V in the present analysis.) This error was included by v. Kries in his Note 10, p. 123, of the third German edition and thus found its way into the main text of the English edition.

-B19-

when

$$c=0 \quad \text{or} \quad n\pi/2,$$

where n is an integer. We are then dealing with eye positions obtained by rotations from the primary position around either a vertical or a horizontal axis. In such positions the primary vertical meridian of the eye remains vertical. These positions are called secondary positions. All other eye positions are called tertiary positions.

Another angle of interest is the angle between the primary horizontal plane of the eye, or retinal horizon as Helmholtz calls it, and the fixation plane or plane of regard. The latter is the plane through the fixation line having its normal in the x, z plane. The general equation for planes of regard is

$$\alpha x+\gamma z=0, \tag{25}$$

and the plane of regard containing the fixation line with direction cosines c_{11}, c_{12}, c_{13} is given by

$$-c_{13}x+c_{11}z=0. \tag{25a}$$

The primary horizontal plane of the eye has the equation

$$z'=c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z=0. \tag{26}$$

The angle between these planes is given by

$$\cos\rho_H=\frac{-c_{31}\cdot c_{13}+c_{33}\cdot c_{11}}{(c_{11}^2+c_{13}^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{c_{22}}{(1-c_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{27}$$

If we substitute the values of c_{22} and c_{12} from (9) we obtain

$$\cos\rho_H=\frac{D^2-A^2+B^2-C^2}{[1-4(AB+CD)^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{27a}$$

For a position obeying Listing's law, we have by (15)

$$\cos\rho_H=\frac{\sin^2c+\cos^2c\cos\omega}{(1-\cos^2c\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

This may also be written

$$\tan\rho_H=\frac{\sin c\cos c(1-\cos\omega)}{\sin^2c+\cos^2c\cos\omega}. \tag{28a}$$

Again,

$$\rho_H=0,$$

when

$$\omega=0$$

and when

$$c=0 \quad \text{or} \quad n\pi/2.$$

Equations (24) and (28) show that in tertiary positions the primary vertical retinal meridian does not coincide with the vertical plane through the fixation line, nor does the primary horizontal retinal meridian coincide with the plane of regard through the fixation line. The angles between these two sets of planes are not equal, however, except in the case in which

$$\cos^2c=\sin^2c,$$

i.e.,

$$c=(2n+1)\pi/4,$$

where n is an integer.

The lack of coincidence of primary retinal horizontal and vertical meridians on the one hand, and planes of regard and vertical planes through the fixation line on the other, which occurs in tertiary eye position obeying Listing's law, has been discussed at considerable length in the literature. Authorities differ in their definition of the measure for this discrepancy. Some use Eq. (24), regarding a vertical line such as a plumb line as their reference. Others, including Helmholtz, use Eq. (28). Either definition is acceptable, since the plane of regard AFB, and the vertical plane DFE (Fig. 1) both through the fixation line OF, include between them an angle equal to $\pi/2+\rho_H+\rho_V$. This may be verified by substituting the values from Eq. (20a) and (25a) in (22).

The square root in the denominator of Eqs. (24) and (28) leaves the sign of ρ_H and ρ_V undefined. The geometrical construction shown in Fig. 1 indicates the relative orientation of the four planes in the upper nasal quadrant (looking up and nasalward) for the right eye. The primary vertical plane of the eye, which includes the 6 o'clock–12 o'clock meridians of both the cornea and the retina is seen to be tilted "in" or nasalward with respect to the true vertical plane $DFEO$. At the same time the primary horizontal plane of the eye, including the 3 o'clock–9 o'clock meridians of both the cornea and the retina, is tilted out or temporalward with respect to the plane of regard $AFBO$. The situation in all four quadrants is indicated in Table I.

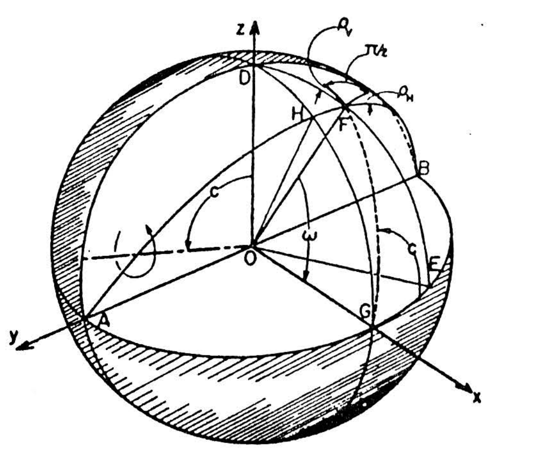


FIG. 1. Diagram to illustrate the relationship between the fixation axis OF, the plane of regard AFB, the vertical plane DFE, the angle between the primary horizontal meridian of the eye and the plane of regard, ρ_H, and the angle between the primary vertical meridian of the eye and the vertical ρ_V. The dashed line GF indicates the path traced out by the pole of the cornea in the rotation which moved the fixation line OG to OF.

-B20-

TABLE I. Orientation of primary vertical plane of the eye with respect to the vertical and of primary horizontal plane with respect to the plane of regard for the right eye.

Quadrant	Tilt of 3 o'clock–9 o'clock meridian of the eye with respect to plane of regard through the fixation line	Tilt of 6 o'clock–12 o'clock meridian of the eye with respect to true vertical plane through the fixation line
Upper nasal $0>c>\pi/2$	Out	In[a]
Upper temporal $\pi/2>c>\pi$	In[a]	Out
Lower temporal $\pi>c>3/2\pi$	Out	In[a]
Lower nasal $3/2\pi>c>2\pi$	In[a]	Out

[a] "In" refers to the situation in which a clockwise rotation (looking along the fixation line towards the center of rotation) is necessary to move the primary vertical meridian of the eye from the true vertical, or the primary horizontal meridian of the eye from the plane of regard, to the orientation required to fulfill Listing's law.

Equation (23) is quite general. It makes possible the expression of the angle between the vertical plane through the fixation line and the primary vertical plane of the eye for any eye position whatever. For example, if the eye is in a position according to Listing's law for which the angle between the two planes is ρ_V and if a torsional movement of extent τ is now imparted to the eye, the angle between the true vertical plane and the primary vertical plane of the eye will be equal to $(\rho_V+\tau)$. Substitution of expressions (17) in the right-hand side of Eq. (23) will indeed give $\cos(\rho_V+\tau)$.

PRIMARY POSITION

Consider a meridional plane of the orbit, i.e., a plane containing the x axis. It has the equation

$$\beta y+\gamma z=0. \tag{29}$$

Its normal makes the angle c with the z axis and hence

$$\gamma=\cos c$$

and

$$\beta=[(1-\cos^2 c)]^{\frac{1}{2}}=\sin c.$$

Equation (29), therefore, takes the form

$$y\cdot\sin c+z\cdot\cos c=0. \tag{29a}$$

When the eye is in the primary position, this plane coincides with the meridional plane of the eye which has the equation

$$y'\cdot\sin c+z'\cdot\cos c=0. \tag{30}$$

Now consider the case in which the eye is subjected to a rotation around the normal to this plane, i.e., is brought to a new position according to Listing's law with parameters c, ω. For a general tertiary position we have the following equation for the meridional plane of the eye:

$$(c_{21}\sin c+c_{31}\cos c)\cdot x+(c_{22}\cdot\sin c+c_{32}\cos c)\cdot y +(c_{23}\sin c+c_{33}\cos c)\cdot z=0. \tag{31}$$

This equation is obtained by substituting y' and z' from Eq. (1a) in Eq. (30). The constants in Eq. (31) are given by Eqs. (15) as applies to Eqs. (9).

The angle between the meridional plane fixed in the orbit [Eq. (29a)] and the equivalent meridional plane of the eye in the tertiary position [Eq. (31)], is found to be zero. Hence the meridional planes of the eye and orbit remain coincident for those eye positions obeying Listing's law, i.e., which have been reached by a rotation around an axis which is the normal to the planes. As a specific example it has already been demonstrated that $\rho_V=0$ when $c=\pi/2$, and that $\rho_H=0$ when $c=0$.

This concept is used to define the primary position of the eye. It is that eye position from which all other eye positions are reached in a manner such that coincidence is maintained between the planes in the eye and the orbit to which the rotation axis is normal. The experimental method for the determination of the primary position is described in standard textbooks.[13]

We have so far assumed that the primary position coincides with the straight-ahead position. When this is not the case it is necessary to establish an auxiliary Cartesian coordinate system, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, in the orbit such that the $\bar{x}$ axis coincides with the fixation line when the eye is in the primary position. Both the x, y, z and the $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ systems are fixed in the head and have their origin in the center of rotation of the eye. The remaining degree of freedom of the specification of the $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ system with respect to the x, y, z system may be taken care of by assuming coincidence of the primary horizontal plane of the eye with the plane of regard through the primary position of the fixation line. All the relations derived in this paper between x', y', z' and the x, y, z systems then retain their validity as relationships between the x', y', z' and the $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ systems.

DISCUSSION

A left-handed coordinate system has been used for the right eye and it might be thought that symmetry would suggest a right-handed system for the left eye. In discussions of muscle action, where strict symmetry applies, this is indeed indicated. Most eye movements are, however, conjugate, i.e., the two eyes usually move in parallel, and from that point of view it is more convenient to use identical coordinate systems in the two eyes. The standard notation for astigmatism in ophthalmic optics employs identical coordinate systems for the two eyes rather than symmetrical ones, and this is probably the method of choice also for the specification of eye movements.

It is suggested, therefore, when analytical expressions for eye position or eye movements are derived, that the direction cosines of the rotation axes be referred to identical left-handed coordinate systems with their origin in the centers of rotation of the two eyes. Con-

[13] A. v. Tschermak, *Introduction to Physiological Optics* (C. C. Thomas, Springfield, 1952), p. 241.

— B21 —

TABLE II. Orientation of primary vertical plane of the eye with respect to the vertical and of primary horizontal plane with respect to the plane of regard for the left eye.

Quadrant	Tilt of 3 o'clock 9 o'clock meridian of the eye with respect to plane of regard through the fixation line	Tilt of 6 o'clock-12 o'clock meridian of the eye with respect to the true vertical plane through the fixation line
Upper temporal $0>c>\pi/2$	In	Out[a]
Upper nasal $\pi/2>c>\pi$	Out[a]	In
Lower nasal $\pi>c>3/2\pi$	In	Out[a]
Lower temporal $3/2\pi>c>2\pi$	Out[a]	In

[a] "Out" refers to the situation in which a clockwise rotation (looking along the fixation line towards the center of rotation) is necessary to move the primary vertical meridian of the eye from the true vertical, or the primary horizontal meridian of the eye from the plane of regard, to the orientation required to fulfill Listing's law.

jugate eye positions and movements will then have equal parameters.

As an example of this convention, the data in Table I are given for the left eye in Table II.

When discussing eye positions obeying Listing's law we may reduce the number of parameters required for the specification of the positions to two, and it is suggested that they be the angle between the rotation axis and the positive direction of the z axis, and the extent of the rotation. This is equivalent to stating the meridian (in the standard notation for astigmatism) along which the anterior pole of the cornea has moved, and the angular extent of the excursion. The latter is regarded to be positive when the movement is clockwise looking along the positive direction of the rotation axis towards the center of rotation. A movement of the anterior pole of the right eye into the upper nasal quadrant, for example, will in this notation have a negative extent of movement.

Since $\cos(-\omega)=\cos\omega$ and $\sin^2(-\omega)=\sin^2\omega$, and since Eqs. (24) and (28) involve only these functions of ω, the sign of ω is not of any consequence and the angles of discrepancy will depend only on the meridian (c) and the extent of the movement in the meridian (ω) without regard to sign. This nomenclature is superior to the systems developed by Helmholtz and Fick since neither uses generalized coordinates. The specification of an eye position obeying Listing's law in such systems requires three parameters which are not independent. Helmholtz's system uses the elevation of the plane of regard ($<HOG$ in Fig. 1) and the angle of azimuth ($<HOF$) to give the direction of the fixation line. If the x' axis of the eye were brought into the new position in that manner, it would be necessary to introduce a movement around the fixation line of extent ρ_H to place the eye into the position demanded by Listing's law.

Fick's system uses the angle of longitude ($<EOG$) between the vertical planes through the fixation lines in the primary and tertiary position, and the angle of latitude ($<EOF$) to specify the new direction of the fixation line. Again, if the eye had moved in this manner, it would be necessary to introduce a movement around the fixation line of extent ρ_V to place the eye into the position required by Listing's law.

The angles ρ_H and ρ_V are, of course, not independent, but are functions of the elevation and azimuth on the one hand, and of the longitude and latitude on the other. These relationships were derived by Helmholtz,[14] and have to be applied in the measurement of torsion by instruments or on plane grids.[15,16]

While an eye position obeying Listing's law may be described as that which would be reached from the primary position by means of a rotation with certain parameters—i.e., while q_n may be described by the quaternion $Q_{0,n}$—there is no physiological requirement that the actual movement be of that kind. For example, it would be no physiological contradiction to find that the eye, in order to reach a tertiary position and occupy it in accordance with Listing's law, moves in a manner entirely different from that described by Listing so long as the end position is that defined by Listing's law. The actual movement pattern will be determined by the forces applied to the eyeball.

The *kinematics of the eye* is the study of the possible eye movements and positions and their description. The time rate of change of eye position as a function of the applied forces is the subject of the *kinetics of the eye* and here we must have at least three independent simultaneous differential equations to describe the movement pattern with its three degrees of freedom. Each orbit contains six muscles, none of whose planes of action in the general tertiary position coincide, and in addition there is evidence[17] that the differential equations do not have constant coefficients. The problem of the kinetics of the eye promises, therefore, to be quite complex.

[14] See reference 1, p. 84.
[15] Fry, Treleaven, and Baxter, Am. J. Optom. 22, 351 (1945).
[16] Fry, Treleaven, Walsh, Higgins, and Radde, Am. J. Optom. 24, 489 (1947).
[17] G. Westheimer, Arch. Ophthalmol. 52, 710 (1954).

Anhang C: Lagrange Dynamik auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Anhang behandeln wir differenzierbare Mannigfaltigkeiten als Konfigurationsraum mechanischer Systeme und geben dadurch den Konfigurationskoordinaten $(q^1, \ldots, q^f)$ eine viel allgemeinere Bedeutung.

C1: Ideale holonome Nebenbedingungen: Bisher haben wir Massenpunkte betrachtet, deren Konfigurationsraum ein Gebiet im $\mathbb{R}^f$ war. Im Beispiel des ebenen Pendels von S. 29 war die Lage $\underline{q} \in \mathbb{R}^2$ des Massenpunktes eingeschränkt durch die Zwangsbedingung $|\underline{q}| = l > 0$. Der Konfigurationsraum ist also ein Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, den man lokal durch eine Lagekoordinate φ beschreiben kann:

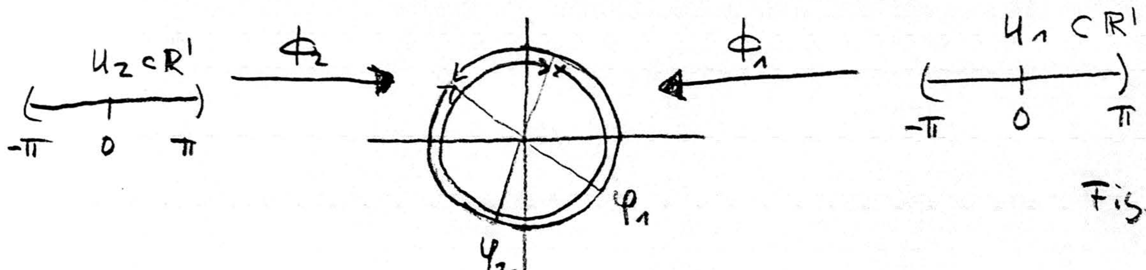


Fig. C1

$$\underline{q} = \Phi_1(\varphi) = l\,(\cos(\varphi-\varphi_1), \sin(\varphi-\varphi_1)) \qquad (C.1)$$
$$= \Phi_2(\varphi) = l\,(\cos(\varphi-\varphi_2), \sin(\varphi-\varphi_2))$$

Die Darstellung des S^1 durch eine Karte (U_i, φ_i) ist nur 1-1-deutig für $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Durch einen Atlas von zwei oder mehr Karten kann man die ganze Mannigfaltigkeit S^1 darstellen, wobei für alle $\varphi \in U_1 \cap \Phi_1^{-1}(\Phi_2(U_2))$ die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ ein Diffeomorphismus ist (Verträglichkeitsbedingung). Dies ist für (S.71) evident, gilt aber auch für andere Karten auf S^1 (z.B. stereographische Projektion).

Entsprechend ist der Konfigurationsraum eines ebenen <u>Doppelpendels</u> (Fig. C2) mit den Zwangsbedingung

Fig. C2

$$|\underline{q}_1| = l_1 > 0$$
$$|\underline{q}_2 - \underline{q}_1| = l_2 > 0 \qquad (C.2)$$

ein 2-dimensionaler <u>Torus</u> T^2 mit Karten (U, Φ) mit $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ und $(\underline{q}_1, \underline{q}_2) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\underline{q}_1 = l_1 \left(\cos(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1), \sin(\varphi_1 - \bar{\varphi}_1)\right)$$
$$\underline{q}_2 = l_2 \left(\cos(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2), \sin(\varphi_2 - \bar{\varphi}_2)\right) + \underline{q}_1 \qquad (C.3)$$

Mindestens 3 solcher Karten mit verschiedenen Zentren $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ sind notwendig, um T^2 zu überdecken.

Ein <u>starrer Körper</u> besteht aus $N \geq 3$ Massenpunkten, von denen mindestens 3 nicht kollinear sind, deren Konfigurationen durch die Zwangsbedingungen

$$|\underline{q}_i - \underline{q}_k| = l_{ik} > 0 \qquad 1 \leq i < k \leq N \qquad (C.4)$$

eingeschränkt sind. Die möglichen Konfigurationen sind

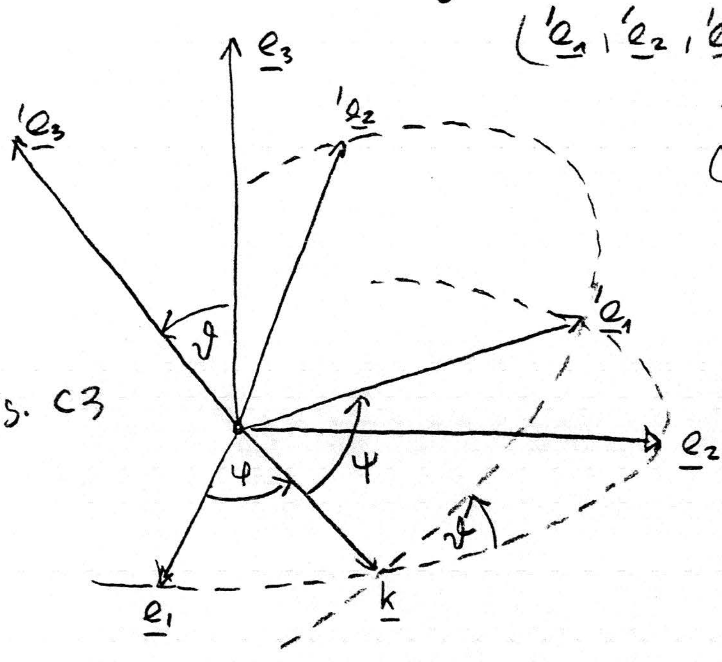
$$\underline{q}_i = R\,{}'\underline{x}_i + \underline{a} = \underline{x}_i + \underline{a} \qquad (C.5)$$

mit Relativkoordinaten $\underline{x}_i$ bezüglich eines frei beweglichen Ursprungs $\underline{a}$ eines körperfesten Koordinatensystems, das mit einer Rotation $R \in SO(3)$ gegen das raumfeste Koordinatensystem verdreht ist. Bei festen ${}'\underline{x}_1, \dots {}'\underline{x}_N$ ist der Konfigurationsraum des starren Körpers $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Aus der Darstellung (4.70) $R(\underline{e}, \varphi)$ einer Rotation durch Drehachse $\underline{e}$ und Drehwinkel φ mit $R(\underline{e}, \varphi) = R(-\underline{e}, 2\pi - \varphi)$ folgt, daß man $SO(3)$ durch die Vektoren $\varphi\underline{e}$ in der Vollkugel vom Radius π im $\mathbb{R}^3$ parametrisieren kann, wobei wegen $R(\underline{e},\pi) = R(-\underline{e},\pi)$ Diametralpunkte auf der Oberfläche zu identifizieren sind. Das Innere der Vollkugel ist eine Karte von $SO(3)$, mit der Abbildung $R = R(\underline{e},\varphi)R_i$ (R_i bel. Rotation) und mit solchen Karten wird $SO(3)$ überdeckt.

Eine andere Karte von $SO(3)$ durch <u>Euler'sche Winkel</u> ist für die Mechanik sehr wichtig, da in dieser Parametrisierung die Winkelgeschwindigkeiten einfache Form haben. Nach Fig. C3 geht das körperfeste System $({}'\underline{e}_1, {}'\underline{e}_2, {}'\underline{e}_3)$ aus dem raumfesten System $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ durch die folgenden Drehungen hervor: zuerst um die $\underline{e}_3$-Achse mit Winkel φ, dann um die "Knotenlinie" (das Bild der $\underline{e}_1$-Achse unter der ersten Drehung) mit Winkel ϑ und schließlich um die ${}'\underline{e}_3$-Achse (das Bild der $\underline{e}_3$-Achse unter den ersten beiden Drehungen) mit Winkel ψ. Man erhält ganz $SO(3)$ durch

Fig. C3



$$0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi \qquad (C.6)$$

Im Inneren dieses Quaders ist die Zuordnung 1-1-deutig und liefert eine Karte. In Matrixform gilt

$$\underline{x} = R(\varphi,\vartheta,\psi)\,\underline{x}'$$
$$R(\varphi,\vartheta,\psi) = R(\underline{e}_3,\varphi)\,R(\underline{e}_1,\vartheta)\,R(\underline{e}_3,\psi) \qquad (C.7)$$

wobei $\underline{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix}$ die Komponenten eines Vektors in der RF-Basis $\{\underline{e}_i\}$ und $'\underline{x} = \begin{pmatrix} 'x^1 \\ 'x^3 \end{pmatrix}$ in der KF-Basis $\{'\underline{e}_i\}$ sind. Man beachte, daß in $R(\varphi,\vartheta,\psi)$ $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_3$ fest sind und die Zeitabhängigkeit $R(\varphi(t),\vartheta(t),\psi(t))$ als Produkt von 1-parametrigen Gruppen eingeht. Zum Beweis berechnen wir die Winkelgeschwindigkeiten $\underline{w}$ und $'\underline{w}$ in der RF- und KF-Basis. Mit (C.8)

$$R(\underline{e}_1,\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad R(\underline{e}_3,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit $\Omega(\underline{w})$ nach (4.69) ergibt sich

$$\Omega = \dot{R}R^{-1} = \dot{\varphi}\,\Omega(\underline{e}_3) + \dot{\vartheta}\,R(\underline{e}_3,\varphi)\,\Omega(\underline{e}_1)\,R(\underline{e}_3,-\varphi) + \dot{\psi}\,R(\underline{e}_3,\varphi)R(\underline{e}_1,\vartheta)\,\Omega(\underline{e}_3)\,R(\underline{e}_1,-\vartheta)R(\underline{e}_3,-\varphi) \qquad (C.9)$$

$$R(\underline{e}_3,\varphi)\,\Omega(\underline{e}_1)\,R(\underline{e}_3,-\varphi) = \Omega(\underline{e}_\vartheta), \quad \underline{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\underline{e}_3,\varphi)R(\underline{e}_1,\vartheta)\,\Omega(\underline{e}_3)\,R(\underline{e}_1,-\vartheta)R(\underline{e}_3,-\varphi) = \Omega(\underline{e}_\psi), \quad \underline{e}_\psi = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und daher

$$\underline{w} = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{\vartheta}\,\underline{e}_\vartheta + \dot{\psi}\,\underline{e}_\psi \qquad (C.10)$$

wobei $\underline{e}_\varphi, \underline{e}_\vartheta, \underline{e}_\psi$ die RF-Darstellung der Vektoren $\underline{e}_3$, $\underline{k}$ und $'\underline{e}_3$ geben. Analog berechnet man

$$\Omega' = R^{-1}\dot{R} = \dot{\psi}\,\Omega(\underline{e}_3) + \dot{\vartheta}\,R(\underline{e}_3,-\psi)\,\Omega(\underline{e}_1)\,R(\underline{e}_3,\psi) + \dot{\varphi}\,R(\underline{e}_3,-\psi)R(\underline{e}_1,-\vartheta)\,\Omega(\underline{e}_3)\,R(\underline{e}_1,\vartheta)R(\underline{e}_3,\psi) \qquad (C.11)$$

und aus (5.79) mit $\varphi \to -\psi$, $\vartheta \to -\vartheta$ ergibt sich

$$\underline{w}' = \dot{\varphi}\,'\underline{e}_\varphi + \dot{\vartheta}\,'\underline{e}_\vartheta + \dot{\psi}\,'\underline{e}_\psi \qquad (C.12)$$

mit $'\underline{e}_\varphi, '\underline{e}_\vartheta, '\underline{e}_\psi$ der KF-Darstellung der Vektoren $\underline{e}_3$, $\underline{k}$ und $'\underline{e}_3$. Für $\vartheta \neq 0,\pi$ sind $\underline{e}_3$, $\underline{k}$ und $'\underline{e}_3$ linear unabhängig und man zeigt leicht, daß $R\,'\underline{y} = \underline{y}$ für $'\underline{y} = '\underline{e}_\varphi, '\underline{e}_\vartheta, '\underline{e}_\psi$ gilt. Für $\vartheta = 0,\pi$ folgt die Behauptung aus (C.7).

Falls $\underline{w}'(t)$ bekannt ist (für den kräftefreien Kreisel z.B. aus der Lösung der Euler'schen Gleichungen, s. §7), so erhält man aus (C.1.2) ein kompliziertes nichtlineares Differentialgleichungssystem für $\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)$:

$$'\underline{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \dot\vartheta(t)\cos\psi(t) + \dot\varphi(t)\sin\vartheta(t)\sin\psi(t) \\ -\dot\vartheta(t)\sin\psi(t) + \dot\varphi(t)\sin\vartheta(t)\cos\psi(t) \\ \dot\psi(t) + \dot\varphi(t)\cos\vartheta(t) \end{pmatrix} \qquad (C.13)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot\varphi(t) &= (\sin\vartheta(t))^{-1}\{'\omega^1(t)\sin\psi(t) + '\omega^2(t)\cos\psi(t)\} \\ \dot\vartheta(t) &= '\omega^1(t)\cos\psi(t) - '\omega^2(t)\sin\psi(t) \\ \dot\psi(t) &= '\omega^3(t) - \mathrm{ctg}\,\vartheta(t)\{'\omega^1(t)\sin\psi(t) + '\omega^2(t)\cos\psi(t)\} \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite singulär wird für $\vartheta = 0, \pi$. Solche <u>Koordinatensingularitäten</u> sind bei numerischen Rechnungen, z.B. in der Himmelsmechanik, äusserst unangenehm. Auf Cayley und Klein und Sommerfeld ("Theorie des Kreisels") geht die folgende singularitätenfreie Parametrisierung der SO(3) durch <u>Quaternionen</u> zurück, die wir hier in die Quantenmechanik des Spin $\frac{1}{2}$ üblichen Matrixform bringen wollen:

Im dreidim. reellen linearen Vektorraum V^3 der spurfreien hermiteschen 2×2 Matrizen bilden die <u>Pauli-Matrizen</u> eine Basis

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (C.14)$$

und jedem $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ ist via

$$\underline{x} \longleftrightarrow \underset{\sim}{x} = \sum_{k=1}^{3} x^k \sigma^k = \begin{pmatrix} x^3, & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2, & -x^3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}\,\underset{\sim}{x} = -\|\underline{x}\|^2 \qquad (C.15)$$

genau eine solche Matrix zugeordnet. Jede unitäre 2×2 Matrix der Determinante 1, $A \in SU(2)$, stiftet eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Det}\,\underset{\sim}{x} = \mathrm{Det}\,'\underset{\sim}{x}$

$$A: \underset{\sim}{x} \longrightarrow '\underset{\sim}{x} = A\,\underset{\sim}{x}\,A^* = \sum_{k=1}^{3} R(A)^{kl} x^l \sigma^k \qquad (C.16)$$

die daher im $\mathbb{R}^3$ eine orthogonale Transformation $R(A)$ definiert. Aus den Relationen $(k,l,m,n \in \{1,2,3\})$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^k\sigma^l = \delta^{kl}, \qquad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^k\sigma^l\sigma^m = i\varepsilon^{klm}$$
$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^k\sigma^l\sigma^m\sigma^n = \delta^{kl}\delta^{mn} + \delta^{kn}\delta^{lm} - \delta^{km}\delta^{ln} \qquad (C.17)$$

folgt

$$x^k = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\sigma^k \underset{\sim}{x})\,, \qquad R(A)^{kl} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\sigma^k A \sigma^l A^*) \qquad (C.18)$$

$A \in SU(2)$ ist gleichbedeutend mit

$$A = a^0\, \mathbb{1} + i\,\underset{\sim}{a}\,, \quad \text{wobei} \qquad (C.19)$$
$$(a^0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{mit} \quad (a^0)^2 + \underline{a}^2 = 1$$

Daraus folgt: $A^* = a^0\, \mathbb{1} - i\,\underset{\sim}{a}$ und (C.20)

$$R(A) = \begin{pmatrix} (a^0)^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 & 2(a^1a^2 + a^0a^3) & 2(a^1a^3 - a^0a^2) \\ 2(a^1a^2 - a^0a^3) & (a^0)^2 + (a^2)^2 - (a^1)^2 - (a^3)^2 & 2(a^2a^3 + a^0a^3) \\ 2(a^1a^3 + a^0a^2) & 2(a^2a^3 - a^0a^3) & (a^0)^2 + (a^3)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 \end{pmatrix}$$

Man zeigt leicht (→ Stiefel "Methoden der math. Physik"), daß

$$A \in SU(2) \longrightarrow R(A) \in SO(3)$$

ein Homomorphismus ist, dessen Bild alle eigentlichen Drehungen liefert mit Kern $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$. Man nennt die $SU(2)$ in der Physik die "quantenmechanische Rotationsgruppe", weil sie die universelle Überlagerungsgruppe der $SO(3)$ ist und ihre Darstellungen die Rotationen von Teilchen mit halbganzen Spin beschreibt. Da die 3-dimensionale 1-Kugel $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ diffeomorph zur $SU(2)$ ist, haben wir durch (C.20) auf elegante Weise eine Karte der $SO(3)$ gefunden, und zwar ohne Koordinatensingularitäten:

Nach (C.19) ist $A(t)$ eine Kurve in $SU(2)$ genau dann, wenn $(a^0(t), \underline{a}(t))$ eine Kurve auf S^3 ist. Aus

$$(a^0(t))^2 + |\underline{a}(t)|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot a^0(t) \\ \dot{\underline{a}}(t) \end{pmatrix} \text{ senkrecht auf } \begin{pmatrix} a^0(t) \\ \underline{a}(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists\ {}'\underline{w}(t) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} \dot a^0(t) \\ \dot a^1(t) \\ \dot a^2(t) \\ \dot a^3(t) \end{pmatrix} = \frac{{}'w^1(t)}{2} \begin{pmatrix} a^1(t) \\ -a^0(t) \\ a^3(t) \\ -a^2(t) \end{pmatrix} + \frac{{}'w^2(t)}{2} \begin{pmatrix} a^2(t) \\ -a^3(t) \\ -a^0(t) \\ a^1(t) \end{pmatrix} + \frac{{}'w^3(t)}{2} \begin{pmatrix} a^3(t) \\ a^2(t) \\ -a^1(t) \\ -a^0(t) \end{pmatrix} \qquad (C.21)$$

da $\binom{a^0}{\underline{a}}$ zusammen mit den drei Vektoren auf der rechten Seite von (C.21) eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$ bilden. Ist umgekehrt $(a^0(t), \underline{a}(t))$ Lösung von (C.21) bei beliebigem $'\underline{\omega}(t)$ mit Anfangsbedingung $(a^0(s), \underline{a}(s)) \in S^3$, so bleibt die Kurve auf S^3, da $|a^0(t)|^2 + |\underline{a}(t)|^2$ erhalten bleibt für (C.21). Ist $(a^0(t), \underline{a}(t))$ Lösung von (C.21), so ist $R(A(t))$ Kurve auf $SO(3)$ und daher gilt

$$\dot{R}(A(t))\, R(A(t))^{-1} = {}'\Omega(t) \qquad (C.22)$$

und explizite Rechnung zeigt (s. [K2]*), daß das durch (C.22) eindeutig bestimmte $'\underline{\omega}(t)$ die Winkelgeschwindigkeit zu $'\Omega(t)$ ist. Durch Übergang von einem 4-dimensionalen Konfigurationsraum geht (C.13) über in die singularitätenfreie Differentialgleichung (C.21)

Für ein N-Teilchensystem mit idealen holonomen zeitabhängigen Zwangsbedingungen nehmen wir im Sinne der diskutierten Beispiele an, daß der Konfigurationsraum M_t eine in den $\mathbb{R}^n$ $(n = 3N)$ eingebettete f-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit sei. D.h. zu jeder Zeit und $\xi = (q_1 \ldots q_N) \in M_t$ gibt es eine Umgebung U und glatte Funktionen $\phi_t : U \to \mathbb{R}^{n-f}$ mit (s. Fig. C4)

(1) $U \cap M_t = \{\xi \mid \phi_t(\xi) = 0\}$ (C23)

(2) Rang $D\phi_t(\xi) = n - f$

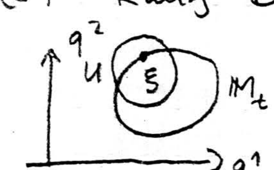


Fig. C.4

Es folgt aus der Analysis, daß M_t eine Überdeckung mit paarweise verträglichen Karten $(K^\alpha, \Psi_t^\alpha)$ besitzt. Dabei ist K_α eine offene Menge im $\mathbb{R}^f$, $\Psi_t^\alpha : K^\alpha \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare 1-1-deutige Abbildung mit Rang $D\Psi_t^\alpha = f$ und $\bigcup_\alpha \Psi_t^\alpha(K^\alpha) = M_t$. M_t ist also lokal parametrisiert durch $\xi = \Psi_t^\alpha(\eta)$, $\eta \in K^\alpha$. Sind $\xi = \Psi_t(\eta) = \phi_t(\xi)$.

* Kirchgraber & Stiefel 'Methoden der anal. Störungsth. u. i. Anw'

zwei lokale Parametrisierungen in einer Umgebung $\Phi(K) \cap \Psi(L)$ von ξ,

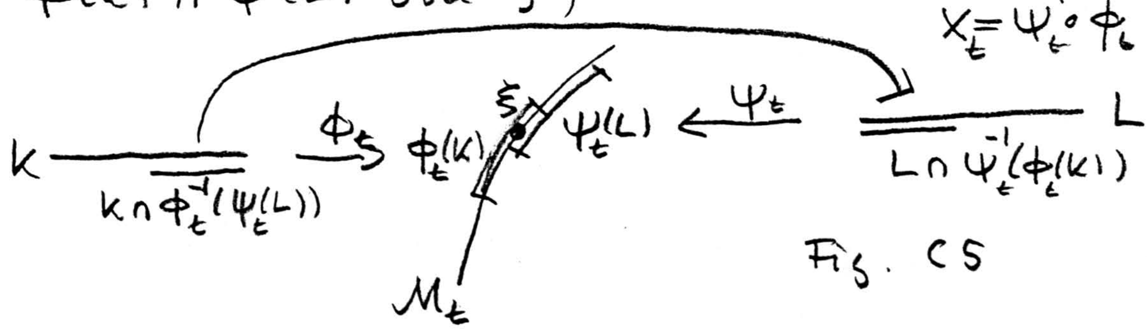


Fig. C5

so ist die Abbildung $X_t = \Psi_t^{-1} \circ \Phi_t$ von $K \cap \Phi_t^{-1}(\Psi_t(L))$ auf $L \cap \Psi_t^{-1}(\Phi_t(K))$ ein Diffeomorphismus (d.h. 1-1-deutig und in beiden Richtungen differenzierbar)

Zur Beschreibung der Dynamik gehen wir vom
C2: <u>d'Alembert'schen Prinzip</u> aus. Lokal seien die eingeschränkten Konfigurationen von N Massenpunkten auf M_t gegeben als

$$x^i = x^i(q^1, \dots q^f, t) \qquad 1 \le i \le n = 3N \qquad (C.24)$$

Eine <u>virtuelle Verrückung</u> ist eine instantane infinitesimale Verschiebung der $(x^1 \dots x^n)$, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist. Diese lässt sich durch die unabhängigen infinitesimalen Parameteränderungen $(\delta q^1, \dots \delta q^f)$ ausdrücken:

$$\delta x^i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k, \quad 1 \le i \le n \qquad (C.25)$$

Die $(x^1 \dots x^n)$ erfüllen Newton'sche Gleichungen

$$m^i \ddot{x}^i = F^i = K^i + Z^i \qquad (C.26)$$

wo zu den <u>treibenden Kräften</u> K^i (z.B. Gravitationskräfte) noch <u>Zwangskräfte</u> Z^i hinzukommen, damit zu allen Zeiten $(x^1, \dots x^n) \in M_t$ gilt.
Das d'Alembert'sche Prinzip ermöglicht es, ohne

Benutzung der Zwangskräfte aus K^i und (C.24,26) Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $(q^1, \dots q^f)$ herzuleiten, aus deren Lösung dann die Z^i nachträglich berechnet werden können!

<u>d'Alembert'sches Prinzip</u>: Bei idealen holonomen Nebenbedingungen ist für jede virtuelle Verrückung die <u>virtuelle Arbeit</u> δA der <u>Zwangskräfte</u> Null:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Z^i \delta x^i = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} m^i \ddot{x}^i \delta x^i = \sum_{i=1}^{m} K^i \delta x^i \qquad (C.27)$$

Die rechte Seite von (C.27) wird mit (C.25):

$$\sum_{i=1}^{m} K^i \delta x^i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{f} K^i \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k = \sum_{k=1}^{f} G^k \delta q^k \qquad (C.28)$$

mit $G^k \equiv \sum_{i=1}^{m} K^i \partial x^i / \partial q^k$. Für die totale Ableitung $\frac{d}{dt}$ einer Funktion $F(q^1, \dots q^f, t)$ längs $(q^1(t), \dots q^f(t))$ gilt definitionsgemäss

$$\dot{F} = \frac{d}{dt} F = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (C.29)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^k}$$

Somit wird die linke Seite von (C.27):

$$\sum_{i=1}^{n} m^i \ddot{x}^i \delta x^i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{f} m^i \frac{d}{dt}(\dot{x}^i) \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \sum_{i=1}^{m} m^i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial q^k}\right) \delta q^k - \sum_{k=1}^{f} \sum_{i=1}^{n} m^i \dot{x}^i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^k}\right) \delta q^k$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} \right) \delta q^k \qquad (C.30)$$

mit $T = \sum_{i=1}^{m} m^i (\dot{x}^i)^2 / 2$. Denn wegen (C.29) gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \sum_{i=1}^{m} m^i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^k} \right) = \sum_{i=1}^{m} m^i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^{m} m^i \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^{m} m^i \dot{x}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \qquad (C.31)$$

Da die $(\delta q^1, .. \delta q^f)$ beliebig sind, gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = G^k \qquad 1 \le k \le f \qquad (C.32)$$

und, falls $F^i(x^1, .. x^n, t) = -\frac{\partial}{\partial x^i} V(x^1, .. x^n, t)$ gilt, erhält man die Lagrangegleichungen mit $U(q^1, .. q^f, t) = V(x^1(q^1, .. q^f, t), .. x^n(q^1, .. q^f, t), t)$ und $L = T - U$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} + \frac{\partial U}{\partial q^k} = 0 \qquad (C.33)$$

Bei Reibungskräften geben (C.32) eine allgemeinere Form der Dynamik.

Zur Beschreibung der Dynamik kanonischer Systeme mit kinetischer Energie $T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(\xi, t)\dot q^i \dot q^j$ nehmen wir an, daß zwei Sorten von Kräften einwirken, einmal konservative Kräfte, die sich aus einer potentiellen Energie $V(\xi, t)$ herleiten, und Zwangskräfte, die für jede Anfangsbedingung $\xi \in M_t$ und jede Anfangsgeschwindigkeit $\dot\xi$ das System zu allen Zeiten auf M_t halten. Diese Zwangskräfte seien implizit charakterisiert durch die Forderung, daß die Bewegungsgleichungen des Systems unter dem Einfluss der konservativen- und Zwangskräfte in jeder Karte $(\Psi_t^\varkappa; K^\varkappa)$ durch die Lagrangefunktion $L = T - V$, "geliftet" nach $K^\varkappa$, beschrieben werde, d.h. durch

$$L_{\Psi^\varkappa}(\eta, \dot\eta, t) = L(\Psi_t^\varkappa(\eta), D\Psi_t^\varkappa(\eta)\dot\eta + \partial_t \Psi_t^\varkappa(\eta), t) \qquad (C.34)$$

mit Bewegungsgleichungen $\frac{\delta L_{\Psi^\varkappa}}{\delta \eta} = 0$. Die in Fig. C.5 illustrierte Verträglichkeitsbedingung hat zur Folge, daß wenn (Φ_t, K) und (Ψ_t, L) zwei lokale Parametrisierungen von M_t sind mit $\xi = X_t(\eta)$ im Überlapp, daß

$$(L_\Psi)_X(\eta, \dot\eta, t) = L_\Phi(\eta, \dot\eta, t) \qquad (C.35)$$

gilt und somit mechanische Bahnen in (Φ_t, K) durch

$\xi(t) = X_t(\eta(t))$ in solche in (Ψ_t, L) abgebildet werden und umgekehrt. Denn aus $\Psi_t(X_t(\eta)) = \Phi_t(\eta)$ folgt

$$
\begin{aligned}
&D\Phi_t(\eta) = (D\Psi_t)(X_t(\eta))\, DX_t(\eta) \\
&\partial_t \Phi_t(\eta) = (\partial_t \Psi_t)(X_t(\eta)) + (D\Psi_t)(X_t(\eta))\, \partial_t X_t(\eta) \\
\Rightarrow\ & D\Phi_t(\eta)\dot\eta + \partial_t \Phi_t(\eta) = \partial_t \Psi_t(X_t(\eta)) \\
&\quad + D\Psi_t(X_t(\eta))(DX_t(\eta)\dot\eta + \partial_t X_t(\eta))
\end{aligned}
\qquad (C\,36)
$$

nach der Kettenregel (man checke dies für ein $L(q^1, q^2, \dot q^1, \dot q^2, t)$ und $M_t = \{q^1, q^2 \mid f(q^1, q^2, t) = 0\ ,\ f' \neq 0 \text{ auf } M_t\ !\}$) und daher

$$(L_\Psi)_X(\eta, \dot\eta, t) = L_\Phi(\eta, \dot\eta, t) \qquad (C\,37)$$

so daß (5.20) anwendbar ist. Daher beschreibt die in lokalen Koordinaten geschriebene Bewegungsgleichung eine Bewegung auf der Mannifaltigkeit, die wir in einfacher Weise von Karte zu Karte fortsetzen können, wie das Planen des nächsten SSR Safari. Die Zwangsbedingungen heissen holonom, weil sie nur die Konfiguration ξ und die Zeit t, nicht aber die Geschwindigkeiten $\dot\xi$ enthalten, und ideal, weil sie eine t-abhängige Schar von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M_t definieren mit Bewegungsgleichungen, die aus einer auf M_t definierten Lagrange-Funktion, ausgedrückt in lokalen Koordinaten entstehen.

Man beachte die enorme Vereinfachung der Mechanik solcher Systeme: ein makroskopischer starrer Körper hat $\sim 10^{23}$ Massenpunkte, und sein Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ ist nur 6-dimensional. Im § 7. werden wir seine Lagrangefunktion einfach gewinnen, wobei in vielen Fällen die starre Konfiguration von $\sim 10^{23}$ Massenpunkten in wenigen Parametern (wie die sechs Trägheitsmomente und die Lage des Schwerpunktes) eingehen. Im Buch von Gallavotti wird diskutiert, wie ideale hol. Zwangskräfte durch "unendlich starke" konservative Kräfte approximierbar sind.

Die Lagrange'sche Mechanik auf Mannigfaltigkeiten M_t kann auch ohne Bezug auf eine Einbettung in einen $\mathbb{R}^n$ formuliert werden. Wir werden diesen einfachen Schritt im §8 tun, wo wir Gravitationsbahnen eines Massenpunkts in der allgemeinen Relativitätstheorie studieren.

Die Bewegung in einer <u>rotationssymmetrischen Vase</u> (um z-Achse, siehe Fig C.6) ist ein Beispiel für eine ideale holonome zeitunabhängige ("skleronome") Zwangsbedingung:

$$M = \{ z = f(r) \}$$
$$= \{ r = h(z) \}$$
(C.38)

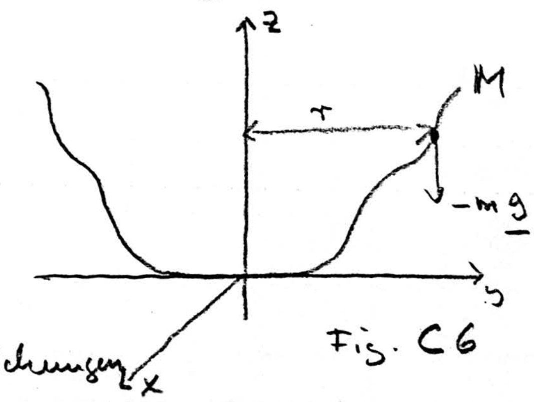


Fig. C6

Wir lösen die Bewegungsgleichungen auf M einmal in den Parametern (r, φ), zum anderen in (z, φ) mit (C.38) und $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, und zeigen, daß beobachtbare Effekte koordinatenunabhängig sind:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad V = -mgz, \quad L = T - V \qquad (C.39)$$

(r,φ)-Koordinaten: $z = f(r)$, $\dot{z} = f'(r)\dot{r}$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$$\Rightarrow L_f = \frac{m}{2}\left[(1 + f'(r)^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right] + mg\,f(r) \qquad (C.40)$$

$p_f^\varphi = \frac{\partial L_f}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$ erhalten, da φ zyklische Koordinate. Ferner ist L_f zeitunabhängig, also H_f erhalten. Für $H_f = E$ und $p_f^\varphi = \ell$ erhält man das 1-dim. Problem:

$$\frac{m}{2}(1 + f'(r)^2)\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - mg\,f(r) = E$$

$$\Rightarrow t_f(r, r_0) = \int_{r_0}^{r} ds \left[\frac{m(1 + f'(s)^2)}{2(E - \ell^2/2ms^2 + mg\,f(s))}\right]^{1/2} \qquad (C.41)$$

(z,φ)-Koordinaten: $r = h(z)$, $\dot{r} = h'(z)\dot{z}$ $\Rightarrow$

Anhang D

D-1

THE ASTRONOMICAL JOURNAL VOLUME 69, NUMBER 1 FEBRUARY 1964

The Applicability of the Third Integral Of Motion: Some Numerical Experiments

MICHEL HÉNON* AND CARL HEILES

Princeton University Observatory, Princeton, New Jersey

(Received 7 August 1963)

The problem of the existence of a third isolating integral of motion in an axisymmetric potential is investigated by numerical experiments. It is found that the third integral exists for only a limited range of initial conditions.

1. INTRODUCTION

THERE has recently been a renewal of interest in the question of the existence of the third integral of galactic motion (Contopoulos 1957, 1958, 1960, 1963; Barbanis 1962; van de Hulst 1962, 1963; Ollongren 1962). A thorough review of the problem can be found in Ollongren's work, and we summarize it briefly here. We suppose that the gravitational potential of a galaxy is time-independent and has an axis of symmetry. In a system of cylindrical coordinates R, θ, z, this potential is then a given function $U_g(R, z)$. We are interested in the motion of a star in such a potential. In particular we ask: what part of the 6-dimensional phase space $(R, \theta, z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z})$ will be filled by the trajectory of the star if we follow it for a very long time, corresponding to many revolutions within the galaxy?

Since the phase space is six-dimensional, there must exist five independent conservative integrals of the motion; that is, five independent functions

$$I_j(R, \theta, z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z}) \qquad (j=1 \text{ to } 5),$$

which are constant along any trajectory. Conversely, a trajectory in phase space is determined by the five equations

$$I_j=C_j \qquad (j=1 \text{ to } 5), \tag{1}$$

where the C_j are five constants. Each equation represents a hypersurface in the phase space, and the trajectory is the intersection of the five hypersurfaces.

But each integral I_j can be isolating or nonisolating (for definition, see Wintner 1947; Lynden-Bell 1962; Ollongren 1962). A nonisolating integral is such that the corresponding hypersurface consists of an infinity of sheets which usually fill the phase space densely, so that for practical purposes the condition $I_j=C_j$ does not give any information and is equivalent to no condition at all. Thus from the physical point of view (as distinct from the mathematical one), nonisolating integrals have no significance. For that reason, isolating integrals are usually called simply "integrals," and the nonisolating integrals are ignored.

In the present case, two isolating integrals are known:

$$I_1=U_g(R,z)+\tfrac{1}{2}(\dot{R}^2+R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2), \tag{2}$$

$$I_2=R^2\dot{\theta}. \tag{3}$$

They are the total energy and the angular momentum per unit mass of the star around the z axis. It can be shown that two of the other integrals, for example I_4 and I_5, are generally nonisolating. The problem is then: what is the nature of the last integral, I_3?

For many years, it was assumed that I_3 is nonisolating (see, for example, Jeans 1915, 1919; Lindblad 1933; Smart 1938; Van der Pahlen 1947; Lindblad 1959), on the ground that no third integral expressible in analytical form like I_1 and I_2 had been discovered, despite many efforts. But this assumption, as has been often remarked, is in conflict with the observed distribution of stellar velocities near the sun; for it implies that the dispersion of velocities should be the same in the direction of the galactic center and in the direction perpendicular to the galactic plane, whereas the observed dispersions have approximately a 2:1 ratio. More recently, a number of galactic orbits have been computed numerically (Contopoulos 1958, 1963; Ollongren 1962). Quite unexpectedly, all these orbits behaved as if they had not 2, but 3 isolating integrals. As a result, there was some change of opinion on the subject. Attempts were made to prove theoretically the existence of a third integral (see Contopoulos 1963).

In the present paper, we approach the problem again by numerical computations; but, in order to have more freedom of experimentation, we forget momentarily the astronomical origin of the problem and consider it in its general form: does an axisymmetrical potential admit a third isolating integral of motion? Thus, we allow the potential U_g to be an arbitrary function of R and z, not necessarily representing an actual galactic potential.

2. REDUCTION TO A SIMPLER FORM

As is easily seen, if we introduce the function

$$U(R,z)=U_g(R,z)+C_2^2/2R^2, \tag{4}$$

* Present address: Institut d' Astrophysique, Paris.

D-2

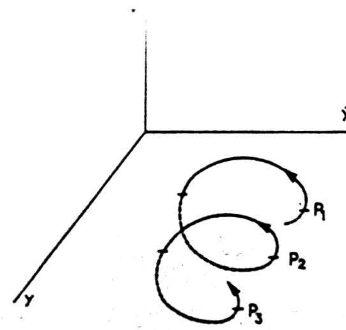


FIG. 1. Definition of the points P_i: $\dot{x}>0$, $x=0$.

where C_2 is the constant value of the angular momentum (3), the equations of motion in R and z become

$$\ddot{R}=-\partial U/\partial R, \quad \ddot{z}=-\partial U/\partial z. \tag{5}$$

This shows that the problem considered is completely equivalent to the problem of the motion of a particle in a plane in an arbitrary potential U. We shall adopt from now on this new formulation and substitute x and y for R and z. The phase space $(x,y,\dot{x},\dot{y})$ has now four dimensions, and there must exist three independent conservative integrals of the motion. One of them is known and is isolating:

$$I_1=U(x,y)+\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2). \tag{6}$$

It is the total energy of the star divided by its mass, as before. There is no integral of angular momentum, because the potential U has no symmetry in general. It can be shown that one of the integrals, say I_3, is generally nonisolating, and the problem is now: what is the nature of the *second* integral I_2?

Because of the existence of the energy integral (6), it is sufficient to know three coordinates of the star in the phase space, such as: x, y, $\dot{y}$; the fourth coordinate $\dot{x}$ can

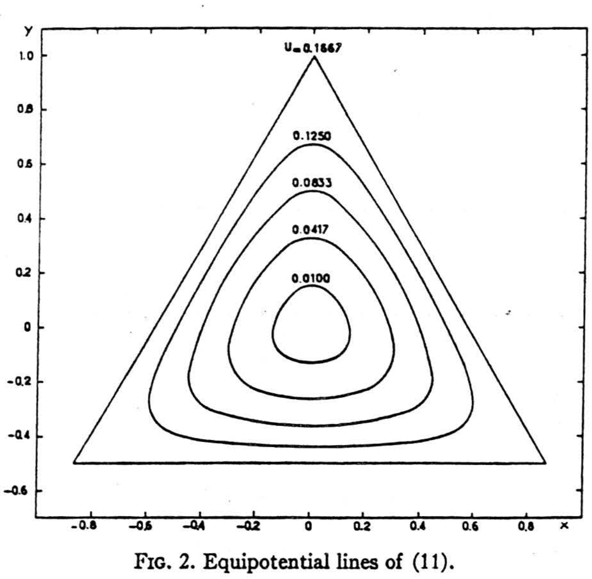


FIG. 2. Equipotential lines of (11).

then be obtained from

$$U(x,y)+\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=E, \tag{7}$$

if we know the energy E. Consequently, we can plot the trajectory in a three-dimensional space $(x,y,\dot{y})$ (see Fig. 1). The value of $\dot{x}^2$ found from (7) should be non-negative, hence the condition

$$U(x,y)+\tfrac{1}{2}\dot{y}^2\leqslant E \tag{8}$$

which normally defines a bounded volume.

If there is no other isolating integral, the trajectory will fill the volume defined by (8), and we shall call it *ergodic*. If there is a second isolating integral, the trajectory will, instead, lie on a surface, whose equation is found by elimination of $\dot{x}$ between (7) and $I_2=C_2$.

Let us consider the successive intersections of the trajectory with the plane $x=0$, in the upward direction; that is, the successive points $P_1, P_2, \cdots$ of the trajectory which lie in the $(y,\dot{y})$ plane and satisfy

$$x=0, \quad \dot{x}>0. \tag{9}$$

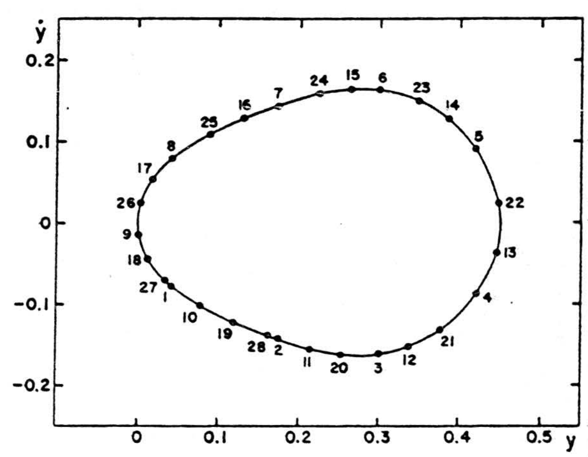


FIG. 3. A typical set of points P_i; $E=0.08333$.

If we follow the trajectory for an infinite time, there will be in general an infinite sequence of points P_i. If there is no second isolating integral, these points will fill an area, which is the intersection of the volume (8) with the plane $x=0$:

$$U(0,y)+\tfrac{1}{2}\dot{y}^2\leqslant E. \tag{10}$$

But if there is a second isolating integral, the points P_i will lie on a curve. Thus we get a simple criterion for the existence of the second integral: it is sufficient to compute a number of points P_i, plot them in the $(y,\dot{y})$ plane and see whether they lie on a curve or not. This method will be used in what follows.

The passage from a point P_i to the next one P_{i+1} can be considered as a *mapping*. This mapping is completely defined when the potential $U(x,y)$ and the energy E are given. [For, suppose that a point P_i is given. It defines y and $\dot{y}$; x is zero; and $\dot{x}$ is found from (7). Starting from

D-3

[illegible] four initial values, the trajectory can be integrated [illegible] the next point satisfying (9), which is P_{i+1}.] It can also be shown that the mapping is area-preserving [see, e.g., Birkhoff (1927, p. 152); and see Moser (1962) for an important theorem concerning such mappings].

3. RESULTS

After some trials, the following potential was chosen for study:

$$U(x,y)=\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+2x^2y-\tfrac{2}{3}y^3) \tag{11}$$

because: (1) it is analytically simple; this makes the computation of the trajectory easy; (2) at the same time, it is sufficiently complicated to give trajectories which are far from trivial, as will be seen below. It seems probable that the potential (11) is a typical representative of the general case, and that nothing would be fundamentally changed by the addition of higher-order terms.

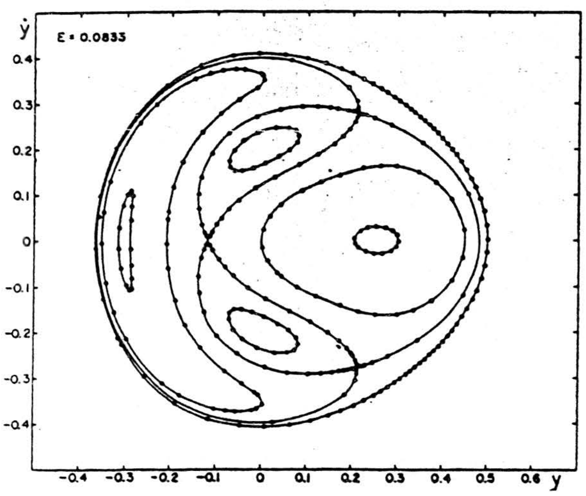


FIG. 4. Results for $E=0.08333$.

Figure 2 shows the equipotential lines. Near the center they tend to be circles; farther out they become elongated in three directions. The particular equipotential $U=\frac{1}{6}$ consists of three straight lines, forming an equilateral triangle.

A number of orbits were computed by numerical integration of the equations of motion:

$$\ddot{x}=-\partial U/\partial x=-x-2xy,$$

$$\ddot{y}=-\partial U/\partial y=-y-x^2+y^2. \tag{12}$$

As a check, some of the orbits were computed independently by each of us, using different computers (CDC 1604 and IBM 7090) and different integration schemes (Adams and Runge–Kutta). The following results were obtained using the Runge–Kutta method; during the numerical integration the energy was observed to decrease very slightly ($<|0.00003|$ for 150 orbits).

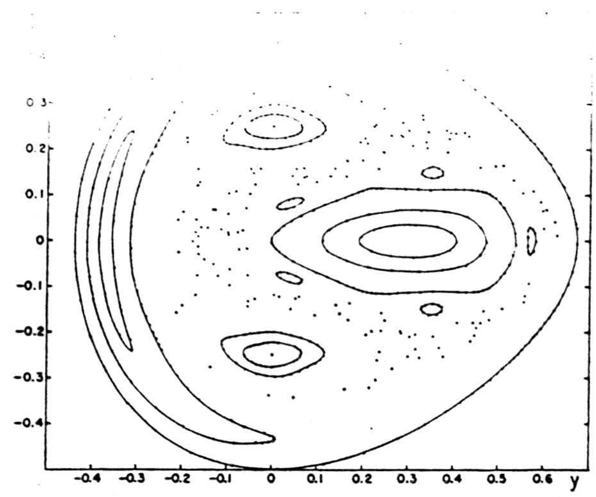


FIG. 5. Results for $E=0.12500$.

Figure 3 shows a set of points P_i for a typical trajectory. They seem to lie exactly on a curve. In fact, more points have been computed than those plotted here; after the 150th point there is still no perceptible deviation from a curve. It may be interesting to remark that the successive points P_1, P_2, $P_3\cdots$ (represented here by 1, 2, $3\cdots$) rotate regularly around the curve. The figure is topologically identical to one where the points P_i would lie on a circle of center O, the angle between OP_i and OP_{i+1} having a constant value α. This constant is not the same for different trajectories. In the case of Fig. 3, its approximate value is $\alpha=0.1143$ (taking one revolution as the unit). α is generally not rational, so that no point P_i will come back exactly on the initial point P_1, and the infinite set of the points P_i is dense everywhere on the curve. If α happens to be a rational number p/q, the point P_{q+1} will be identical with P_1 and the orbit is periodic.

Figure 4 shows the complete picture in the $(y,\dot{y})$ plane, for a given value of the energy: $E=\frac{1}{12}=0.08333$.

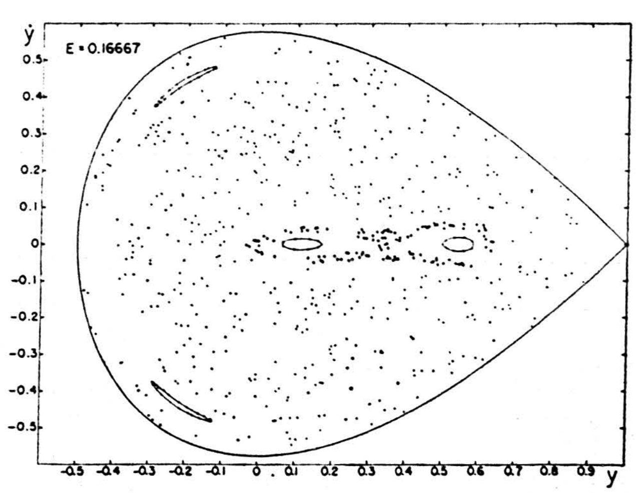


FIG. 6. Results for $E=0.16667$.

D-4

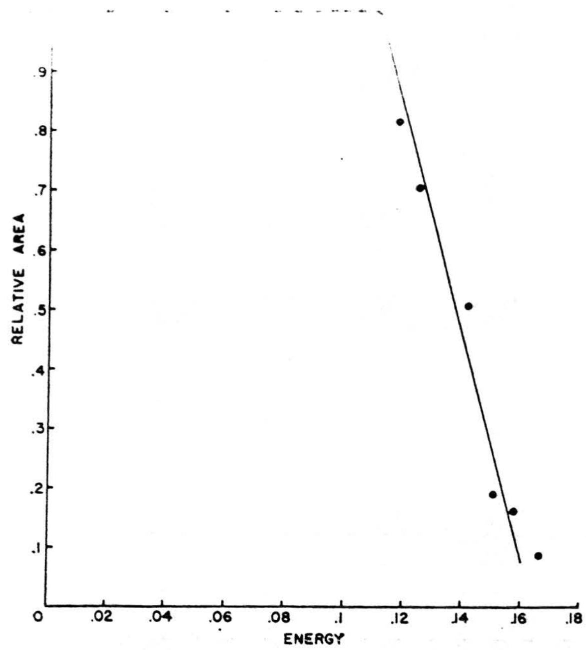


FIG. 7. Relative area covered by the curves as a function of energy, as computed by the method described in the text.

Each set of points linked by a curve corresponds to one computed trajectory. In fact, more trajectories and more points on each have been computed than shown on this picture. It appears that in every case, the points seem to lie exactly on a curve. These curves form a one-parameter family which fills completely the available area, defined by (10). (The boundary of this area is almost identical with the outer curve on Fig. 4.)

In the middle of the four small loops are four invariant points of the mapping (not represented on Fig. 4); they correspond to stable periodic orbits. The three intersections of curves are also invariant points, corresponding to unstable periodic orbits.

This picture seems, like the previous computations by Contopoulos (1958, 1963) and Ollongren (1962), convincing evidence of the existence of a second integral. But here comes the surprise. Figure 5 shows the same picture in the $(y,\dot{y})$ plane for a somewhat higher energy: $E=0.12500$. We still have a set of closed curves around each stable invariant point. But these curves no longer fill the whole area. All the isolated points on Fig. 5 correspond to one and the same trajectory, just as the points on one of the closed curves; but they behave in a completely different way. It is clearly impossible to draw any curve through them. They seem to be distributed at random, in an area left free between the closed curves. Most striking is the fact that this change of behavior seems to occur abruptly across some dividing line in the plane.

The picture is even more complicated than the above description would suggest. For example, the five little loops in the right of the diagram belong to the same

to the next. Let us call this feature a *chain of islands*. Other such chains have been found in various parts of the diagram. The number q of the islands in a chain can apparently have any value. As a rule, the dimensions of the islands decrease very rapidly when q increases. Each chain is associated with a stable periodic orbit; the q islands surround the q points which correspond to that orbit. Note that each set of closed curves on Fig. 5 can be considered as a chain constituted by only one island; in both features no ergodic orbit seems to appear. The following properties are also suggested by our results:

(1) there is an infinite number of islands (and of chains);

(2) the set of all the islands is dense everywhere;

(3) but the islands do not cover the whole area since they become very small; there exists a "sea" between the islands and the ergodic trajectory is dense everywhere on the sea.

But, of course, mathematical proofs are needed to establish these points.

Figure 6 shows the situation for a still higher energy: $E=\frac{1}{6}=0.16667$. Again the picture changes drastically. All the isolated points correspond to one trajectory, and it is apparent that this "ergodic" trajectory covers almost the whole area. [The outer line on Fig. 6 is the limit given by (10).] Its random character is most strikingly seen when one plots the successive points; they jump from one part of the diagram to another without any apparent law. Two of the sets of closed curves of Fig. 5, those on the $\dot{y}$ axis, have now disappeared, presumably because their central invariant point has become unstable. The two other sets of closed curves have degenerated, each one into a chain of two small islands, successive points P_i jumping from one to the other. No other chain of islands has been found in Fig. 6; probably they still exist, but the dimensions of the islands are so small that finding them is difficult.

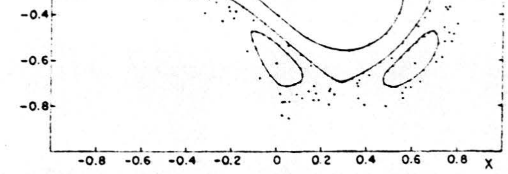


FIG. 8. The iterated mapping (14), for $a=1.6$.

D-5

[illegible] of the diagram correspond to a trajectory of a new kind, intermediate between the closed curves and the ergodic behavior. They are approximately situated on an eight-shaped line, but with an important dispersion around it. The ultimate behavior of such an orbit is not known; perhaps the points will always remain in the vicinity of the same line, and fill an eight-shaped band; or perhaps they will after some time penetrate into the ergodic region. Some recent results, not shown here, are in favor of this last hypothesis.

A remarkable feature of Figs. 4 to 6 is the complete change in the picture over a moderate interval of the energy E. For $E=0.08333$, the area is completely covered with curves; for twice that value, the curves are almost completely replaced by an ergodic region. If, instead of the energy, one considers the amplitude of the motion indicated by the equipotential lines of Fig. 2, the change occurs on an even smaller interval.

In order to study this transition in more detail, we have computed, for a number of values of E, the proportion of the total allowable area in the $(y,\dot{y})$ plane which is covered by curves. The following method was used to decide whether a given point P_1 belongs to a curve or to an ergodic orbit. A second initial point P_1' was taken very close to P_1 (usually at a distance 10^{-7}). Then a number (usually 25) of successive transforms of both P_1 and P_1' were computed. Experience had shown previously that if P_1 and P_1' are in a region occupied by curves, the distance P_iP_i' increases only slowly, about linearly, with i; but if P_1 and P_1' are in the ergodic region, the distance P_iP_i' increases rapidly, roughly exponentially. The quantity

$$\mu=\sum_{i=1}^{i=25}(\text{distance } P_iP_i')^2 \tag{13}$$

was computed, and the point P_1, as well as its transforms, were considered as belonging to the ergodic region if $\mu>\mu_c$, to a curve if $\mu<\mu_c$; μ_c is a chosen constant. The values found for μ covered a very wide range, from about 10^{-12} to 10^{+1}; the criterion seems to be very sensitive, and the exact value chosen for μ_c is not of great importance. Here $\mu_c\cong 10^{-4}$.

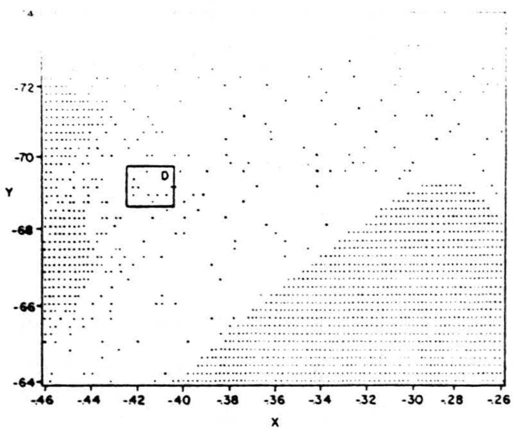


Fig. 10. Enlargement of area A; Grid size $=0.002$.

Figure 7 shows the results. Up to a critical energy (about $E=0.11$) the curves cover the whole area; there is no ergodic orbit. For higher energies the area covered by curves shrinks very rapidly. Thus the situation could be very roughly described by saying that the second integral exists for orbits below a "critical energy," and does not exist for orbits above that energy.

$E=\frac{1}{6}$ is the *energy of escape* in the potential (11); for $E>\frac{1}{6}$, the equipotential lines open and the star can eventually escape to infinity, if the orbit is ergodic. The area in the $(y,\dot{y})$ plane becomes infinite and the relative area represented on Fig. 7 ceases to have meaning. No obvious connection exists between the critical energy and the energy of escape; in the present case the critical energy is less than the energy of escape. But results from computations with $U=\frac{1}{2}(x^2+y^2-x^2y^2)$, not shown here, indicate the opposite situation, as do the results of computations by Ollongren (1962) with an approximation to the Galactic potential. However, such a potential, derived from an actual three-dimensional potential, is dependent on the angular momentum assumed; so that more computations for other values of the angular momentum and higher energies are needed to establish the prevalence of the third integral in the Galaxy.

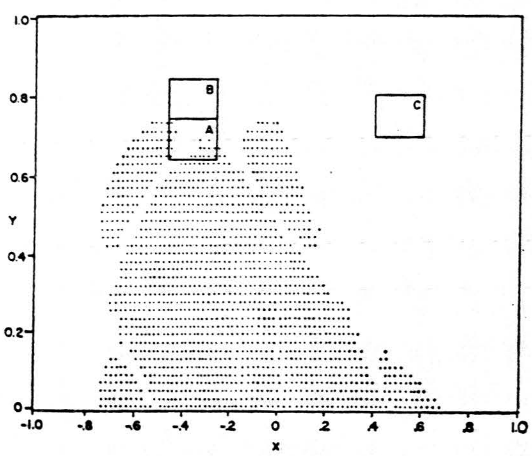


Fig. 9. All nonergodic points in upper half of Fig. 8; Grid size $=0.02$.

4. STUDY OF A MAPPING

It has been remarked above that the whole problem can be reduced to the study of a plane mapping. As was suggested to us by Dr. Kruskal, one can then define an area-preserving mapping and study it directly, thus by-passing the lengthy integration of orbits. The advantage of this method is that the computation is much simpler and much faster (by a factor 1000 approximately), so that more examples and more points can be computed. The disadvantage is that we are now quite

D-6

far from the initial astronomical problem. Also, it is not obvious that an arbitrary area-preserving mapping corresponds to a possible dynamical situation. For these reasons, we give only a short account of the experiments made. The following mapping was studied:

$$X_{i+1}=X_i+a(Y_i-Y_i^3),$$
$$Y_{i+1}=Y_i-a(X_{i+1}-X_{i+1}^3), \tag{14}$$

where a is a constant. The coordinates of P_i are named here X_i and Y_i.

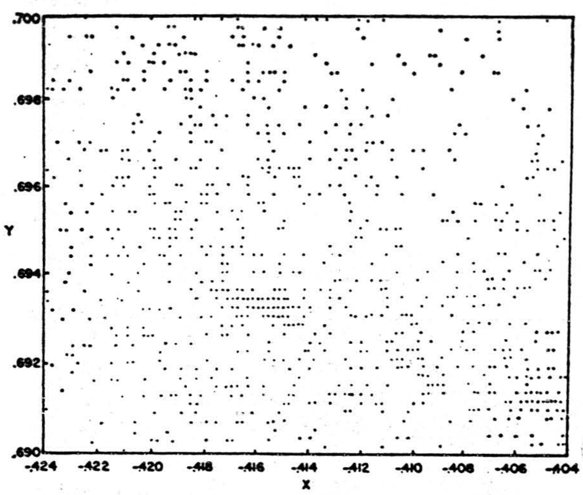


FIG. 11. Enlargement of area D; Grid size = 0.0002.

Figure 8 shows the results for $a=1.6$. Each set of points linked by a curve is the set of the successive transforms of an initial point P_1 under the iterated mapping (14). The isolated points are also the successive transforms of a single initial point. The picture is quite similar to the right part of Fig. 5. There is a central region occupied by a set of simple closed curves which surround the stable invariant point $X=Y=0$; a chain of six islands (instead of five); and an outer "ergodic" region. Other chains of islands have been found here too. This similarity suggests that the problem of the area-preserving mapping is really identical with the dynamical problem of the third integral.

Up to 10^5 points have been computed for some of the curves, without any detectable deviation.

Figure 9 represents the upper half of Fig. 8, and Figs. 9–12 were produced in the following manner: initial points were chosen on a grid size indicated in the figure, throughout the whole area of the figure, and 1000 successive iterations of each initial point were computed. Experience has shown that iterations of points which produce an "ergodic orbit" are eventually mapped to infinity; furthermore, this divergence is quite rapid, due to the cubic terms in (14). Thus in Fig. 9 for example, if all 1000 points remained in the vicinity of the origin (this being practically expressed by $X^2+Y^2<100$) the position of the initial point was marked with a dot; otherwise, the position was left blank. The result is a replica of Fig. 8, the only difference being that Fig. 9 shows, to the scale of the grid, *all* initial points whose successive iterations lie on closed curves. Note that it is somewhat distorted, because the vertical and horizontal scales are not equal.

In order to investigate the mapping on a finer scale, we subdivide Fig. 9 into areas A, B, and C. Area A, ten times enlarged, is shown in Fig. 10. The most striking feature is the apparition of a multitude of small islands and tiny details, distributed in a random fashion. It can be remarked also that the boundary of the central region seems very sharp, whereas the boundary of the large island (on the left) is rather fuzzy. Area D of Fig. 10 was again enlarged ten times; see Fig. 11. Again a host of new details emerge. It seems very likely that this would go on indefinitely; with more magnification more details would appear, without end. These results support the hypotheses made above, namely, that there is an infinite number of islands and that their set is dense everywhere.

Area B, which is farther from the center, is represented on Fig. 12. The density of the islands is much smaller than in area A. Also a strong density gradient is apparent in the vertical direction. Area C, still farther out, was found to contain no dots at all to a grid size of 0.002 and therefore is not represented. Thus the density

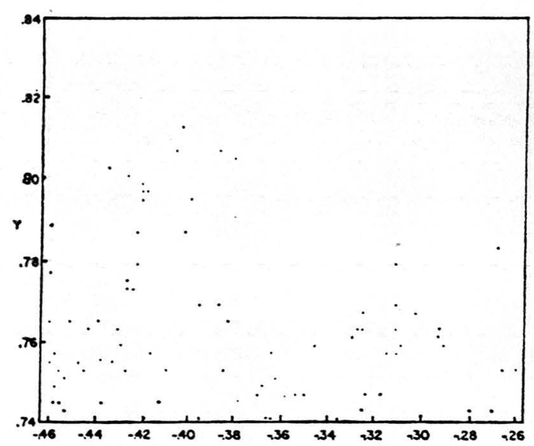


FIG. 12. Enlargement of area B; Grid size = 0.002.

of the islands seems to decrease very rapidly as the distance from the central region increases.

5. CONCLUSIONS

We return now to the original three-dimensional problem. The above experiments indicate that the behavior of the orbits is in general quite complicated, and there seems to be no hope of a simple general answer, such as: (a) the third isolating integral always exists; or (b) the third isolating integral does not exist.

D-7

The true situation can perhaps be summarized as follows. Consider a given potential, and orbits with given angular momentum and energy. If the energy is small, it seems that a third isolating integral always exists. Perhaps it is only a quasi-integral; but then, to the accuracy of the computers, it is as good as a true integral. If the energy is higher than the critical energy, there are an infinite number of separated regions in the phase space where such a third integral still seems to exist. The space left free between these regions is the "ergodic region" where the third integral is nonisolating. If the energy is further increased, the proportion of allowable phase occupied by this ergodic region increases very rapidly and tends to be the whole space.

A number of questions are raised, for example: are the curves found here exactly or only approximately invariant? What is the topological nature of the set of all the islands? Is it possible to compute the curves directly from the potential, without integrating all the orbits? The ultimate answer to such questions should rest on rigorous mathematical proofs, not on numerical experiments; but the mathematical approach to the problem does not seem too easy.

Finally, it should be mentioned that the problem considered here belongs to the general family of the dynamical systems with two degrees of freedom, and thus is a close relative of the famous restricted three-body problem. Although we cannot attempt it here, a comparison of the two problems would certainly be most fruitful.

ACKNOWLEDGMENTS

Our thanks go to Drs. G. Contopoulos, H. C. van de Hulst, M. Kruskal, J. Moser, and M. Schwarzschild, for many stimulating discussions. One of us (M. Hénon) wants also to thank Princeton University for a one-year stay, during which this work was done; the other was supported by a William Charles Peyton Fellowship during this year.

REFERENCES

Barbanis, B. 1962, *Z. Astrophys.* 56, 56.
Birkhoff, G. 1927, *Dynamical Systems* (American Mathematical Society, New York).
Contopoulos, G. 1957, *Stockholms Obs. Ann.* 19, No. 10.
——. 1958, *ibid.* 20, No. 5.
——. 1960, *Z. Astrophys.* 49, 273.
——. 1963, *Astron. J.* 68, 1.
Jeans, J. H. 1915, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 76, 81.
——. 1919, *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics* (Cambridge University Press, New York), p. 233.
Lindblad, B. 1933, *Handbuch der Astrophysik* (Springer-Verlag, Berlin), Vol. V/2, p. 1038.
——. 1959, *Handbuch der Physik* (Springer-Verlag, Berlin), Vol. 53, p. 28.
Lynden-Bell, D. 1962, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 124, 1.
Moser, J. 1962, *Nachr. Akad. Wiss. Göotingen, Math. Phys. Kl.*, 1.
Ollongren, A. 1962, *Bull. Astron. Inst. Neth.* 16, 241.
Smart, W. M. 1938, *Stellar Dynamics* (Cambridge University Press, New York), p. 338.
van de Hulst, H. C. 1962, *Bull. Astron. Inst. Neth.* 16, 235.
——. 1963 (to be published).
van der Pahlen, E. 1947, *Einführung in die Dynamik von Sternsystemen* (Verlag Birkhäuser, Basel), p. 61.
Wintner, A. 1947, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey), p. 96.

Diese Arbeit von Hénon und Heiles ist ein Klassiker der computer-experimentellen Mechanik geworden, an dem wichtige Eigenschaften der analytischen Störungstheorie studiert werden können. Durch die Reskalierung $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $\eta = \varepsilon^{-1}y$ geht nämlich die Energiefläche

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \equiv H_0 \qquad \xi^2\eta - \frac{1}{3}\eta^3 \equiv H_1$$

$$H_0 + \varepsilon H_1 = E \tag{D1}$$

über in

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - y^3/3 = \varepsilon^2 E \tag{D2}$$

also für kleine $\varepsilon > 0$ in den numerisch stabilen Bereich. Eine mathematisch strenge Störungstheorie für analytische (und sogar hinreichend glatte differenzierbare) Störungen von integrablen $H_0(I)$ durch $\varepsilon H_1(I, \varphi)$, das von den Winkelvariablen $\varphi^1 \dots \varphi^f$ periodisch abhängt, wurde von Kolmogorov, Arnold und Moser entwickelt und ist, für theoretische Physiker verständlich, von Thirring [T1] und Gallavotti [G3, G4] dargestellt. Wir wollen zum Abschluss der Vorlesung nur eine Auflistung in Pascal eines Programms zur numerischen Integration der Hénon-Heiles Dynamik geben, die durch Koonin [K5] inspiriert ist, und die auf einem HP 217-Rechner läuft. Mit der Diskette in [K5] können Sie dieses Experiment auf jedem IBM PC oder "Clone" verfolgen. Have fun!

```
program h_h(input,output);     -D9-

label 1;

import dgl_lib;

const crt=3;
      con=0;
      toly=0.0005;
      tstep=0.12;
      npts=50;

type point=array[1..4] of real;

var  err,i,ncross : integer;
     c,e,x,y,px,py,epot,ymax,ymin,slope,dy,h : real;
     vec,oldvec : point;
     answer : string[1];

function fnv(x,y:real):real;
begin
  fnv:=(x*x+y*y)/2+x*x*y-y*y*y/3
end;

function fnvx(x,y:real):real;
begin
  fnvx:=-x-2*x*y
end;

function fnvy(x,y:real):real;
begin
  fnvy:=-y-x*x+y*y
end;

procedure ff(h:real; vec:point; var f:point);
begin
  f[1]:=h*vec[3];
  f[2]:=h*vec[4];
  f[3]:=h*fnvx(vec[1],vec[2]);
  f[4]:=h*fnvy(vec[1],vec[2])
end;

procedure fb(h:real; vec:point; var f:point);
begin
  f[1]:=h;
  f[2]:=h*vec[4]/vec[3];
  f[3]:=h*fnvx(vec[1],vec[2])/vec[3];
  f[4]:=h*fnvy(vec[1],vec[2])/vec[3]
end;

procedure rk(h:real; oldvec:point; var vec:point; procedure fo(
              p1:real; p2:point; var p3:point));
var i:integer;
    k1,k2,k3,k4:point;
begin
  fo(h,vec,k1);
  for i:=1 to 4 do vec[i]:=oldvec[i]+k1[i]/2;
  fo(h,vec,k2);
  for i:=1 to 4 do vec[i]:=oldvec[i]+k2[i]/2;
  fo(h,vec,k3);
  for i:=1 to 4 do vec[i]:=oldvec[i]+k3[i];
  fo(h,vec,k4);
  for i:=1 to 4 do vec[i]:=oldvec[i]+(k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i])/6
end;
```

```
begin
1:
  writeln('0<e<1/6');
  readln(e);
  ymax:=0;
  dy:=0.1;
  while dy>toly do
  begin
    ymax:=ymax+dy;
    if fnv(0,ymax)>=e then
    begin
      ymax:=ymax-dy;
      dy:=dy/2
    end
  end;
  ymin:=0;
  dy:=0.1;
  while dy>toly do
  begin
    ymin:=ymin-dy;
    if fnv(0,ymin)>=e then
    begin
      ymin:=ymin+dy;
      dy:=dy/2
    end
  end;
  slope:=(ymax-ymin)/npts;
  graphics_init;
  display_init(crt,con,err);
  if err=0 then
  begin
  set_aspect(511,389);
  set_window(-1/2,1,-1/sqrt(3),1/sqrt(3));
  set_viewport(0.5,1,0,389/511);
  move(ymin,sqrt(2*(e-fnv(0,ymin))));
  for i:=1 to npts do
  begin
    y:=ymin+slope*i;
    py:=sqrt(2*(e-fnv(0,y)));
    line(y,py);
  end;
  move(ymin,sqrt(2*(e-fnv(0,ymin))));
  for i:=1 to npts do
  begin
    y:=ymin+slope*i;
    py:=-sqrt(2*(e-fnv(0,y)));
    line(y,py)
  end;
  writeln(ymin,'<y<',ymax);
  readln(y);
  epot:=fnv(0,y);
  writeln('0<py<',sqrt(2*(e-epot)));
  readln(py);
  px:=sqrt(2*(e-epot)-py*py);
  vec[1]:=0;
  vec[2]:=y;
  vec[3]:=px;
  vec[4]:=py;
  for i:=1 to 4 do oldvec[i]:=vec[i];
```

```
  ncross:=0;
  h:=tstep;
  repeat
    rk(h,oldvec,vec,ff);
    set_viewport(0,0.5,0,389/511);
    set_window(-sqrt(3)/2,sqrt(3)/2,-0.5,1);
    move(oldvec[1],oldvec[2]);
    line(vec[1],vec[2]);
    c:=oldvec[1]*vec[1];
    for i:=1 to 4 do oldvec[i]:=vec[i];
    if c<0 then
    begin
      h:=-vec[1];
      ncross:=ncross+1;
      rk(h,oldvec,vec,fb);
      set_viewport(0.5,1,0,389/511);
      set_window(-0.5,1,-1/sqrt(3),1/sqrt(3));
      move(vec[2]-0.01,vec[4]);
      line(vec[2]+0.01,vec[4]);
      move(vec[2],vec[4]-0.01);
      line(vec[2],vec[4]+0.01);
      h:=tstep;
      for i:=1 to 4 do vec[i]:=oldvec[i]
    end
  until ncross=100;
  writeln('more?');
  readln(answer);
  if answer='y' then goto 1;
  clear_display;
  graphics_term;
  end;
end.
```

Übungsserie 14 zur Mechanik

Abgabe 16.2.87

Merkur umkreist die Sonne auf einer Ellipsenbahn mit großer Achse $a \approx 5.8 \cdot 10^7$ km und Exzentrizität $\varepsilon \approx .2$. Zur approximativen Berechnung der Periheldrehung $\Delta\varphi$ (→ Skript (8.121)) verwenden Sie eine effektive Kreisbahn mit Radius $R = 5 \cdot 10^7$ km. Bestimmen Sie für den Merkur damit die Integrationskonstante L, wobei Sie $R \gg r_0 = 2.95$ km verwenden und zeigen Sie, daß in der Integralformel für $\Delta\varphi$ der Beitrag des $1/r^3$-Terms von $U(r)$ klein ist. Berechnen Sie die Korrektur 1. Ordnung mit komplexer Integration und interpretieren Sie das Vorzeichen von $\Delta\varphi$.

Zusatzübung für weitere 4 Punkte:

Kontrollieren Sie die Resultate von Hénon und Heiles (Astron. J. 69, 73 (1964)) mit einem Runge-Kutta Programm für die Schnittpunkte der Bahnen auf der Energiefläche mit der Ebene $\{x=0\}$ für $E = .08333$ und $E = .16667$. Prüfen Sie Ihren Algorithmus an dem exakt lösbaren Problem mit $U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 2x^2y - y^3/3$.