Diss. ETH Nr. 8165

Potentialtheoretische Untersuchungen zu Längenabschätzungen auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER MATHEMATIK

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Markus Leo Irniger

Dipl. Math. ETH

geboren am 20. Dezember 1956

von Niederrohrdorf (AG)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. A. Huber, Referent

Prof. Dr. J. Hersch, Korreferent

1987

ABSTRACT

Let M be a two-dimensional manifold of bounded curvature and $D \subset M$ a simply connected region bounded by a rectifiable Jordan curve Γ.
J.G. Reschetnjak introduced on manifolds of bounded curvature isothermic coordinates which are applied in this thesis to provide estimates of the length of a curve $\gamma \subset D$.

First by methods of complex analysis we prove estimates of the Alexandrow-type:
In the region D the length of the curve γ is bounded by some quantity depending only on the perimeter p of D (i.e. the length of Γ), the positive part K^+ of the curvature of D and the proper rotation (winding) σ of γ, provided that $K^+ + \sigma < 2\pi$.

Furthermore using the Mellin transformation of an analytic function we generalize an inequality of Fejér and Riesz which leads to an estimate of the following type:
If the unit disc is mapped conformally onto the region D the length of the image of an arbitrary chord $\tilde{\gamma}$ is bounded by some quantity depending on the length of the arcs into which the curve Γ is partitioned by the images of the end points of $\tilde{\gamma}$, the angle ϕ between $\tilde{\gamma}$ and the unit circle and the positve part K^+ of the curvature of the region D, provided that $K^+ < 2\pi$.

ZUSAMMENFASSUNG

Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung (M.b.K.), und sei $D \subset M$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches durch eine rektifizierbare Jordankurve Γ berandet wird.
J.G. Reschetnjak führte auf M.b.K. lokal isotherme Koordinaten ein, welche wir in dieser Arbeit benützen, um Längenabschätzungen von Kurven $\gamma \subset D$ herzuleiten.

Zuerst beweisen wir mit Methoden der Funktionentheorie Ungleichungen vom Alexandrowschen Typ:
Die Länge einer Kurve $\gamma \subset D$ lässt sich abschätzen durch den Umfang p von D (die Länge von Γ), durch den positiven Teil K^+ der Integralkrümmung auf D und durch die eigentliche Schwenkung σ von γ (ein "Mass" für das Drehen von γ auf der Fläche), vorausgesetzt, dass $K^+ + \sigma < 2\pi$.

Im zweiten Teil verallgemeinern wir - unter Verwendung der Mellintransformierten einer analytischen Funktion - eine bekannte Ungleichung von Fejér und Riesz und erhalten so eine Abschätzung von folgendem Typ:
Bilden wir das Innere des Einheitskreises konform ab auf das Gebiet D, so lässt sich die Länge des Bildes einer Kreissehne $\tilde{\gamma}$ abschätzen durch die Länge der Jordanbogen, in welche die Bilder der Endpunkte von $\tilde{\gamma}$ die Jordankurve Γ aufteilen, durch den Winkel ϕ zwischen $\tilde{\gamma}$ und dem Einheitskreis und durch den positiven Teil K^+ der Integralkrümmung auf D, vorausgesetzt, dass $K^+ < 2\pi$.