

**Robustheitseigenschaften von Reglern
mit variabler Struktur**

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Lino Guzzella
dipl. Masch. Ing. ETH
geboren am 13. Oktober 1957
von Italien

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. H. P. Geering, Referent
Prof. Dr. M. Morf, Korreferent

1986

Inhaltsverzeichnis

Seite

I.	EINFUEHRUNG	
I. 1.	Motivation und Zielsetzung	4
I. 2.	Literaturübersicht	5
I. 3.	Einführendes Beispiel	7
I. 4.	Notationsvereinbarungen	9
II.	IDEALE SYSTEME	
II. 1.	Problemstellung	
II. 1. 1.	Streckenbeschreibung	10
II. 1. 2.	Annahmen	12
II. 2.	Transformationen	
II. 2. 1.	Herleitung und Existenz der Transformationen	15
II. 2. 2.	Transformierte Systembeschreibung	25
II. 2. 3.	Klassifizierung der Eingangsstörungen	27
II. 2. 4.	Zusammenfassung II.2.	32
II. 3.	Regulatorproblem	
II. 3. 1.	Problemdefinition	33
II. 3. 2.	Formulierung des Entwurfsziels	34
II. 3. 3.	Reglerentwurf	36
II. 3. 4.	Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes	39
II. 3. 5.	Systemverhalten im Gleitzustand	51
II. 3. 6.	Interpretationen, Bemerkungen	58
II. 3. 7.	Endliche Treffzeit	63
II. 3. 8.	Zusammenfassung II.3., Beispiel	65
II. 4.	Folgeregelungsproblem	
II. 4. 1.	Problemdefinition, Referenzmodell	69
II. 4. 2.	Entwurfsziel, Fehlerdynamik	72
II. 4. 3.	Reglerentwurf	74
II. 4. 4.	Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes	75
II. 4. 5.	Systemverhalten im Gleitzustand	82
II. 4. 6.	Zusammenfassung II.4., Beispiel	84

III.	REALE SYSTEME	
III. 1.	Problemstellung	89
III. 2.	Nichtideale Störungsstruktur	
III. 2. 1.	Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes	90
III. 2. 2.	Linear abhängige Störungen	91
III. 2. 3.	Allgemeine Störungen	94
III. 3.	Einsatz von Beobachtern	97
III. 4.	Rauschbehaftete Systeme	
III. 4. 1.	Systeme mit verrauschtem Eingang	100
III. 4. 2.	Systeme mit verrauschten Messungen	103
III. 5.	Beschränkte Steuergrößen	
III. 5. 1.	Einführung	107
III. 5. 2.	Existenzgebiet des Gleitzustandes	109
III. 6.	Nichtlineare Strecken	
III. 6. 1.	Generelle Bemerkungen	115
III. 6. 2.	Mechanische Systeme	118
IV.	ERWEITERTES GLEITEN	
IV. 1.	Einführung	
IV. 1. 1.	Systembeschreibung, Annahmen	126
IV. 1. 2.	Beispiel, $n=2$	127
IV. 2.	Stabiles Gebiet	
IV. 2. 1.	Asymmetrisches Gebiet	130
IV. 2. 2.	Symmetrisches Gebiet	134
IV. 2. 3.	Aufenthaltsbedingungen	139
IV. 3.	Abgetastete Systeme	
IV. 3. 1.	Problemdefinition	141
IV. 3. 2.	Stabilitätsbedingungen	143
IV. 3. 3.	Abschätzung der zulässigen Abtastzeit	146
IV. 3. 4.	Einfluss der Parameterstörungen	149
IV. 4.	Systeme mit Beobachtern	151
IV. 5.	Systeme mit verrauschten Messungen	154

V.	ANWENDUNG: REGELUNG EINES GLEICHSTROMMOTORS	
V. 1.	Regulatorproblem	
V. 1. 1.	Beschreibung des Versuchsaufbaus	156
V. 1. 2.	Algorithmus	157
V. 1. 3.	Robustheitsuntersuchungen	160
V. 2.	Folgeregelungsproblem	
V. 2. 1.	Versuchsaufbau	162
V. 2. 2.	Algorithmus	162
V. 3. 3.	Robustheitsuntersuchungen	163
VI.	SCHLUSSFOLGERUNGEN	
VI. 1. 1.	Zusammenfassung	166
VI. 1. 2.	Beurteilung der Regler mit variabler Struktur	168
	Literatur-Liste	169

I. EINFUEHRUNG

I.1 Motivation und Zielsetzung

Die Motivation zu dieser Arbeit folgt aus der Feststellung, dass in allen Modellen von technischen Systemen die auftretenden Parameter ungenau bekannt und zeitvariabel sind.

Um diese Tatsache zu berücksichtigen, können prinzipiell zwei Wege beschritten werden :

1. Verwendung von robusten Reglern, d.h. die Regler werden so ausgelegt, dass sie Parameterfehler ohne den Verlust gewisser Eigenschaften (z.B. der Stabilität) verkraften. Eine neuere Entwicklung auf diesem Gebiet stellen z.B. die "LQG-LTR"-Regler [19] dar.
2. Verwendung von adaptiven Reglern, welche die Parameter ständig entweder explizit ("Self-Tuning-Regulators" [20]), oder implizit ("Model Reference Adaptive Control" [21]) bestimmen.

Beiden Methoden haften gewisse Nachteile an. Bei der ersten Kategorie von Reglern bleibt der Einfluss der Parameterstörungen erhalten. Zudem ist die physikalische Interpretation der Resultate schwierig, da mit Frequenzbereichsmethoden gearbeitet wird. Die zweite Kategorie von Reglern ist aufwendig zu realisieren und kann bei Anwesenheit von gewissen zusätzlichen Störungen im Langzeitverhalten zu Instabilitäten führen [22]. Ausserdem können mit adaptiven Reglern zeitlich schnell variierende Parameter nicht neutralisiert werden.

Mit den in dieser Arbeit untersuchten Reglern mit variabler Struktur (RVS) kann in gewissen Fällen der Einfluss der Parametervariationen vollständig eliminiert werden. Um dies zu erreichen werden sogenannte "Gleitzustände" angestrebt, in denen das Systemverhalten für unbekannte, aber begrenzte Parametervariationen gleich bleibt. Die Dynamik des geschlossenen Systems ist durch den Entwerfer frei vorgebar.

Obwohl die grundlegenden Ideen schon seit einiger Zeit bekannt sind, fehlt bis heute eine geschlossene und einfache Entwurfsmethode. Dies trifft insbesondere für den multivariablen Fall (d.h. für Systeme mit mehreren Eingängen) zu.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine einfache und übersichtliche Entwurfsmethode für RVS zu entwickeln und den eigentlichen Grundmechanismus dieser Regelungen aufzuzeigen. Weiter wird die Frage untersucht, wie sich solche Regler verhalten, wenn die üblicherweise angenommenen Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Aus dieser Fragestellung wird die natürliche Erweiterung der bereits erwähnten Gleitbewegung resultieren.

I. 2. Literaturübersicht

Dieser Abschnitt gibt eine Uebersicht über die bisher auf dem Gebiet der strukturvariablen Regelungen publizierten Arbeiten. Dabei wird mehr auf die Darstellung der Entwicklungsgeschichte der RVS, als auf eine vollständige Angabe aller publizierten Arbeiten Wert gelegt. Ein sehr ausführliche Literaturliste kann man z.B. in [6] finden.

Dem mit strukturvariablen Systemen nicht vertrauten Leser wird empfohlen, diesen Abschnitt erst nach dem Abschnitt I.3, oder noch besser, erst nach der Lektüre der ganzen Arbeit zu studieren.

Die ersten Arbeiten auf diesem Gebiet wurden bereits in den fünfziger Jahren veröffentlicht, wobei vor allem russische Autoren sehr aktiv waren. Der wichtigste Exponent dieser Periode war Emeljanov, der auch die erste Monographie zu diesem Thema publizierte [11].

Die wichtige Frage nach der Existenz von Lösungen bei unstetigen rechten Seiten wurde von Filippov [12] untersucht. Auf ihn geht im wesentlichen die Idee des "equivalent-control"-Prinzips zurück.

Zu diesem Zeitpunkt beschäftigten sich die Autoren praktisch nur mit linearen Systemen mit einem Eingangskanal und versuchten durch Ableitung der Ausgangsgrösse zu gleitenden Systemen zu gelangen. Da diese Operation, besonders bei mehrfacher Ausführung, nicht ideal zu realisieren ist, wurden Regler untersucht, die im Rückführkanal mit Ableitungen geringerer Ordnung auskommen konnten. Durch diese Restriktion war aber das Erreichen des Gleitzustandes nicht mehr ohne weiteres garantiert, und die Klasse der zulässigen Parameterstörungen wurde weiter eingeschränkt.

Diese reduzierten Regler wurden zusätzlich durch die Feststellung, dass zur Bildung des Schalt-Signals die Ausgangsgrösse und alle Ableitungen bis und mit der $(n-1)$ -ten bekannt sein müssen (n ist die Systemordnung), in Frage gestellt. So ist es nicht verwunderlich, dass diese Regelungsmethoden in der Praxis damals keinen Erfolg hatten.

Auch waren sich die Autoren zu wenig bewusst, dass nicht beliebige Parameterstörungen zulässig sind. Die Arbeit von Drazenovic [3], die 1969 veröffentlicht wurde, stellte in dieser Frage einen Durchbruch dar.

Die Methoden der Stabilitätsanalyse bei strukturvariablen Systemen wurde mit der Arbeit von Barbashin [13] entscheidend verbessert, der die Stabilitätsfrage im wesentlichen auf die Ljapunow'sche Methode zurückführte. Mit dieser Arbeit wurden die bis dahin eher geometrisch begründeten Ueberlegungen mathematisch strikt formuliert.

Die Monographie von Itkis [4] behandelte die klassischen und damit nicht besonders erfolgreichen Methoden. Allerdings wurden hier die ersten Ansätze für multivariable Systeme und für erweiterte Gleitbewegungen gegeben (siehe dazu Kapitel IV).

Im Jahre 1974 publizierte Utkin ein Buch, das einen wesentlichen Durchbruch auf dem Gebiet der strukturvariablen Regelungen darstellte (die englische Übersetzung erschien erst 1978 [1]). Dieses Buch operierte mit den modernen Methoden der Systemtheorie, die in der Zwischenzeit entwickelt worden waren. In diesem Buch wurden auch nichtlineare und multivariable Systeme untersucht. Es stellt bis heute die beste auf diesem Gebiet publizierte Arbeit dar.

Allerdings sind die in [1] vorgeschlagenen Regler kompliziert formuliert und nicht in einen linearen und einen nichtlinearen Teil aufgespalten (siehe dazu Abschnitt II.3.3). Die von Utkin vorgeschlagene Methode des "hierarchical control" hat den Nachteil, dass die Reihenfolge, wie die Teilsysteme in den Gleitzustand übergehen, a priori bekannt sein muss.

Da Utkin mit einem allgemeinen Koordinatensystem arbeitet, ist der Reglerentwurf nicht einfach durchzuführen. Aus dem selben Grund tritt der Grundmechanismus der RVS nicht deutlich zu Tage.

Mitte der siebziger Jahre begannen sich auch Forscher ausserhalb Russlands vermehrt mit strukturvariablen Systemen auseinanderzusetzen, wobei eher die Anwendung der bereits existierenden Theorien im Vordergrund stand (z.B. [14] bei Elektromotoren, [15] und [16] bei Robotern).

Eine wichtige Arbeit wurde 1978 von Young [17] publiziert, der für das bis dahin unbefriedigend gelöste Folgeregelungsproblem, mit Hilfe eines Referenzmodells, einen eleganten Weg aufzeigte.

Neben diesen Arbeiten, welche explizit Gleitzustände anstreben, sind viele Untersuchungen angestellt worden, wie man mit Hilfe von Strukturumschaltungen andere Vorteile als die Robustheit gegenüber Parameterstörungen erreichen kann. Ein gutes Beispiel dieser Arbeiten stellt das achte Kapitel im dritten Band von Föllinger [18] dar. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass diese Fragen hier ausgeklammert werden.

Die Entwicklung auf dem Gebiet der strukturvariablen Systeme ist heute in vollem Gang. Viele Autoren beschäftigen sich sowohl auf der theoretischen, wie auch auf der anwendungsbezogenen Seite mit diesem Thema. Der Autor der hier vorliegenden Arbeit hofft zu dieser Entwicklung einen Beitrag geleistet zu haben.

1.3. Einführendes Beispiel

Der prinzipielle Mechanismus der Strukturumschaltung und der dabei auftretenden Gleitzustände wird an Hand eines dynamischen Systems zweiter Ordnung eingeführt. Dies hat den Vorteil, dass man mit geometrisch anschaulichen Argumenten operieren kann.

Beim betrachteten System handelt es sich um einen Doppelintegrator, dessen Ausgangsgrösse $x_1(t)$ über zwei verschiedene Verstärker zurückgeführt wird. Eine Schalt-Logik übernimmt es, den momentan richtigen Rückföhrfaktor auszuwählen. Das Blockschaltbild dieses Systems ist im folgenden Bild I.3.1 dargestellt.

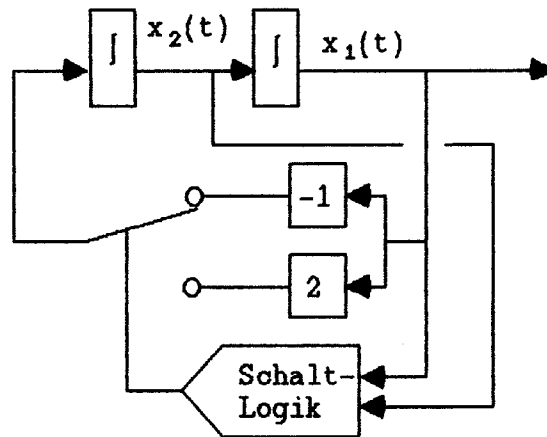
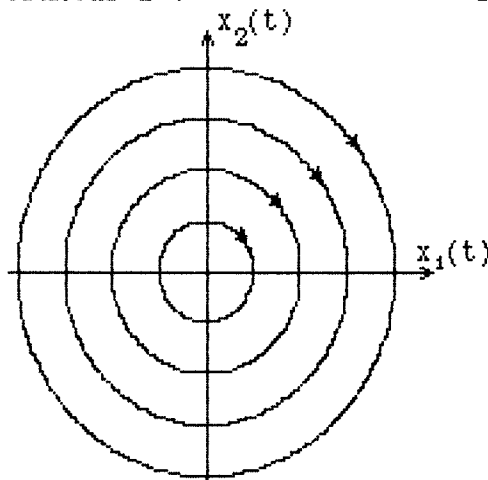


Bild I.3.1

Das nächste Bild zeigt das Phasenportrait des Systems für den Fall, dass entweder nur der Faktor "-1" (Struktur 1), oder nur der Faktor "2" (Struktur 2) verwendet wird.

Struktur 1 :



Struktur 2 :

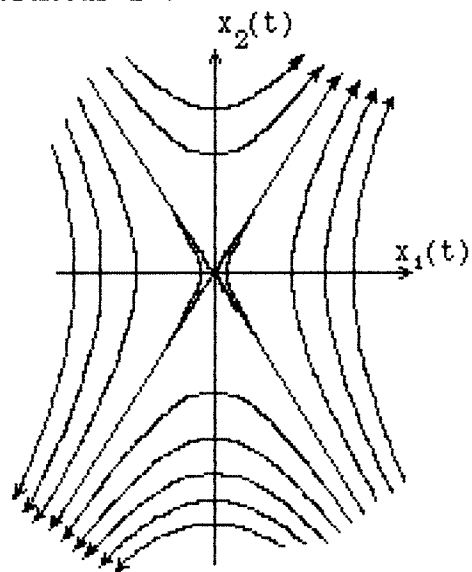


Bild I.3.2

Man beachte, dass keine der beiden Strukturen asymptotisch stabil ist. Kombiniert man jedoch die beiden Strukturen in geeigneter Weise, so erhält man ein völlig neuartiges, asymptotisch stabiles Systemverhalten. Die Schaltlogik übernimmt die Kombinationsaufgabe, wobei das Schaltgesetz folgendermassen gewählt wird :

Falls $x_1(t)[0.5x_1(t) + x_2(t)] < 0$ dann gilt Struktur 2

Sonst gilt Struktur 1

Bild I.3.3 zeigt ein Detail des resultierenden Systemverhaltens.

Kombination :

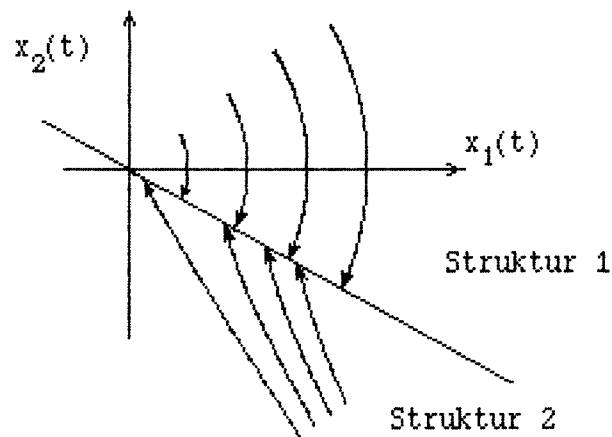


Bild I.3.3

Sobald der Zustandspunkt die Schaltgerade erreicht, bleibt er auf ihr gefangen, da die Geschwindigkeitsvektoren beider Strukturen in das entgegengesetzte Gebiet zeigen. Der Zeitpunkt, bei welchem die Gleitgerade zum ersten Mal erreicht wird, wird mit t^* bezeichnet. Falls die Umschaltung unendlich schnell stattfindet, wird der Zustand $x_2(t)$ linear von $x_1(t)$ abhängig :

$$x_2(t) = -0.5x_1(t) ; \quad \forall t > t^*$$

Daraus resultiert eine neue Systemdynamik, welche asymptotisch stabil ist :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) = -0.5x_1(t) \Rightarrow x_1(t) = \exp\{-0.5(t-t^*)\}x_1(t^*)$$

Damit muss auch $x_2(t)$ asymptotisch gegen Null gehen.

An diesem einfachen Beispiel ist bereits abzulesen, dass beim Auftreten von Gleitzuständen die Ordnung des Systems (scheinbar) reduziert wird. Ebenso ist abzusehen, dass das gleitende System gegenüber Parameterstörungen robust sein wird. Tatsächlich ist die Existenz des Gleitzustandes allein durch die Forderung garantiert, dass die Geschwindigkeitsvektoren beider Strukturen jeweils in das Gebiet der anderen Struktur gerichtet sind. Der Betrag des Winkels zur Gleitgeraden, welcher durch die Parameterstörungen beeinflusst wird, spielt für die Existenz des Gleitzustandes keine Rolle

1. 4. Notationsvereinbarungen

Die Notation dieser Arbeit wurde so einfach wie nur möglich gehalten. Grundsätzlich werden drei Variablentypen unterschieden :

1. Skalare, gekennzeichnet durch normale Kleinbuchstaben
(z.B. c , χ , $r(t)$)
2. Vektoren, gekennzeichnet durch fettgedruckte Kleinbuchstaben
(z.B. $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\xi}$, \mathbf{b}_0)
3. Matrizen, gekennzeichnet durch fettgedruckte Grossbuchstaben
(z.B. \mathbf{A} , $\delta\mathbf{A}(t)$, \mathbf{B}_0)

Es wird nicht zwischen Zeilen- und Kolonnenvektoren unterschieden, massgebend sind alleine die entsprechenden Definitionen. Die folgenden Matrix-Konstruktionen werden verwendet :

$[\mathbf{A}]_{ij} = a_{ij}$ bezeichnet das i, j -te Element der Matrix \mathbf{A}

$\mathbf{D} = \text{diag}(d_i)$ die Matrix \mathbf{D} ist diagonal und ihr i -tes Diagonalelement ist gleich d_i

$\mathbf{U} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ die Matrix \mathbf{U} ist die Konkatenation der beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}

$\mathbf{M} = \mathbf{N}^T$ \mathbf{M} ist die Transponierte von \mathbf{N}

Folgende Sonderzeichen werden verwendet :

• oder $\frac{d}{dt}$: zeitliche Ableitung

\mathfrak{R}^n : n -dimensionaler, reeller Raum

$|\mathbf{x}|$: Euklidische Länge des Vektors $\mathbf{x}(t)$

$\|\mathbf{M}\|$: Norm der Matrix \mathbf{M}

Falls nicht anders definiert ist, wird als Norm einer Matrix \mathbf{M} ihr grösster Singularwert σ_{\max} bezeichnet, wobei σ_{\max} die positive Wurzel des grössten Eigenwerts der Matrix $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ ist.

II. IDEALE SYSTEME

II. 1. Problemstellung

II. 1. 1. Streckenbeschreibung

Dieser erste Teil des zweiten Kapitels definiert, was unter idealen Systemen zu verstehen ist. Die dabei getroffenen Annahmen gelten für das ganze zweite Kapitel. Im dritten Kapitel werden anschliessend Systeme untersucht, die von der Idealform abweichen (nichtlinear, verrauscht, etc.).

Die Elemente der Klasse der idealen Systeme lassen sich durch eine lineare, zeitvariante, gewöhnliche Vektor-Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t))\mathbf{u}(t) \quad (\text{II.1.1.1})$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n; \quad \mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R}^m; \quad m < n < \infty$$

Die Matrizen \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 sind zeitinvariant. Sie stellen die Nominalwerte der Systemgleichung dar, welche zusätzlich durch die Parameterstörungen $\delta\mathbf{A}(t)$ und $\delta\mathbf{B}(t)$ beeinflusst werden.

Abgesehen von den Annahmen (II.1.1.2), (II.1.2.2/3) und (II.2.3.1/2) ist der zeitliche Verlauf der Störungen $\delta\mathbf{A}(t)$ und $\delta\mathbf{B}(t)$ vollständig unbekannt. Deswegen werden die Elemente der Störmatrizen als untereinander unabhängig angenommen ("worst case"); diese Annahme wird einige Konsequenzen haben.

Für den Variationsbereich der Elemente von $\delta\mathbf{A}(t)$ und $\delta\mathbf{B}(t)$ sind folgende Schranken bekannt :

$$\delta a_{ij,\min} \leq \delta a_{ij}(t) \leq \delta a_{ij,\max} \quad i, j = 1 \dots n \quad (\text{II.1.1.2})$$

$$\delta b_{ij,\min} \leq \delta b_{ij}(t) \leq \delta b_{ij,\max} \quad i=1 \dots n; \quad j=1 \dots m$$

Innerhalb dieser Schranken dürfen sich beliebige Parameterverläufe abspielen, insbesondere sind sehr schnelle Variationen erlaubt.

Es ist intuitiv klar, dass zumindest die Vorzeichen gewisser Elemente der Eingangsmatrix $\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)$ bekannt und konstant sein müssen. Falls dies nicht der Fall ist, kann ein Regler, der keinen Adaptionsmechanismus enthält, niemals die Stabilität des geschlossenen Systems garantieren.

Aus diesem Grunde können die Schranken der Eingangsstörungen $\delta b_{1j}(t)$ nicht beliebig gross sein, sondern hängen von den entsprechenden Elementen der Matrix B_0 ab. Da aber an dieser Stelle einige Definitionen noch fehlen, wird dieser Punkt erst im Abschnitt II.2.3. behandelt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden für das System (II.1.1.1) zwei Problemkreise untersucht, nämlich das "Regulatorproblem" und das "Folgeregelungsproblem".

Dabei geht es im ersten Problem darum, den Zustand des Systems (II.1.1.1), der zur Anfangszeit ungleich Null ist, asymptotisch in den Nullpunkt zu führen. Die Dynamik dieser Bewegung muss vorgebar sein.

Beim Folgeregelungsproblem wird verlangt, dass der Zustand des Systems (II.1.1.1) einem frei wählbaren Sollverlauf möglichst gut folgt.

Sehr viele, der in der Praxis auftretenden regelungstechnischen Probleme lassen sich in eine dieser beiden Kategorien einteilen.

Die präzise Definition der Problemstellung findet sich in der Einleitung zu den entsprechenden Abschnitten II.3, bzw. II.4.

II. 1.2. Annahmen

Die "idealen" Systeme sind dadurch gekennzeichnet, dass sie die folgenden fünf Annahmen erfüllen :

1. Das Paar $\{ \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \}$ ist vollständig steuerbar (II.1.2.1)

2. Die Rangbedingung

$$\text{rang } [\delta \mathbf{A}(t), \mathbf{B}_0] = \text{rang } [\mathbf{B}_0] = m \quad (\text{II.1.2.2})$$

ist für alle Zeiten erfüllt.

3. Die Rangbedingung

$$\text{rang } [\delta \mathbf{B}(t), \mathbf{B}_0] = \text{rang } [\mathbf{B}_0] = m \quad (\text{II.1.2.3})$$

ist für alle Zeiten erfüllt.

4. Der Zustandsvektor ist von aussen messbar, insbesondere ist ein Zustandsregler ohne die Hilfe eines Beobachters realisierbar.

(II.1.2.4)

5. Bei der Realisierung des Reglers (Abschnitt II.3.3 und II.4.3) steht ein Baustein zur Verfügung, der verzögerungsfrei zwischen zwei Signalen umschalten kann.

(II.1.2.5)

Von diesen fünf Annahmen haben besonders die mittleren drei einschneidende Konsequenzen.

Annahme (II.1.2.1) ist unumgänglich und stellt keine wesentliche Einschränkung dar, da Systeme die sie nicht erfüllen entweder schlecht konstruiert, oder mangelhaft modelliert wurden. Diese Annahme garantiert allerdings nur, dass der zeitinvariante Teil von (II.1.1.1) steuerbar ist. Eine solche Garantie muss auch für das zeitvariable Verhalten von (II.1.1.1) gegeben sein, da auch der beste Regler ein nichtsteuerbares System nicht beeinflussen kann. Im Abschnitt II.2.3 wird deshalb eine zusätzliche Annahme getroffen werden, welche die Steuerbarkeit von (II.1.1.1) garantieren wird.

Die beiden Rangbedingungen (II.1.2.2/3) stellen eine nichttriviale Einschränkung der zulässigen Parameter-Störungen dar. Dies soll mit Hilfe von drei kleinen Beispielen gezeigt werden.

In Bild II.1.2.1 sind zwei einfache Systeme dargestellt. Die Störungen $\delta a_1(t)$ und $\delta a_2(t)$ des Systems a) erfüllen die Rangbedingung (II.1.2.2) und ihr Einfluss auf das Systemverhalten kann, wie später gezeigt werden wird, vollständig eliminiert werden. Beim System b), wo die Störungen die Rangbedingung nicht erfüllen, ist dies nicht mehr der Fall.

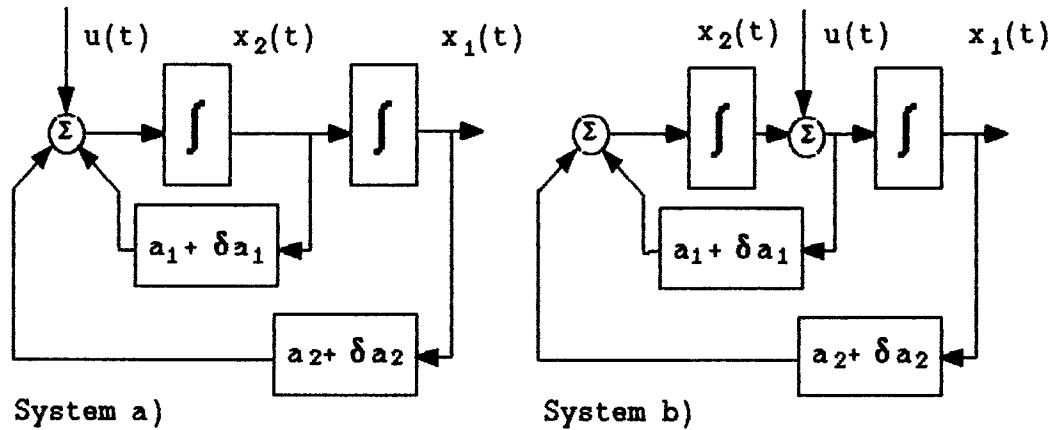


Bild II.1.2.1

Die Bedeutung der Rangbedingung (II.1.2.1) ist allerdings noch weitreichender als es das obige Beispiel vermuten lässt. Betrachtet man das Bild II.1.2.2 so stellt man fest, dass die Störung $\delta a_3(t)$ auf keinem Fall beeinflusst werden kann. Die Störungen $\delta a_1(t)$ und $\delta a_2(t)$ können nur dann eliminiert werden, wenn sie für alle Zeit die Beziehung

$$\delta a_2(t) = (7/5) \cdot \delta a_1(t)$$

erfüllen (die Störungen müssen linear abhängig sein).

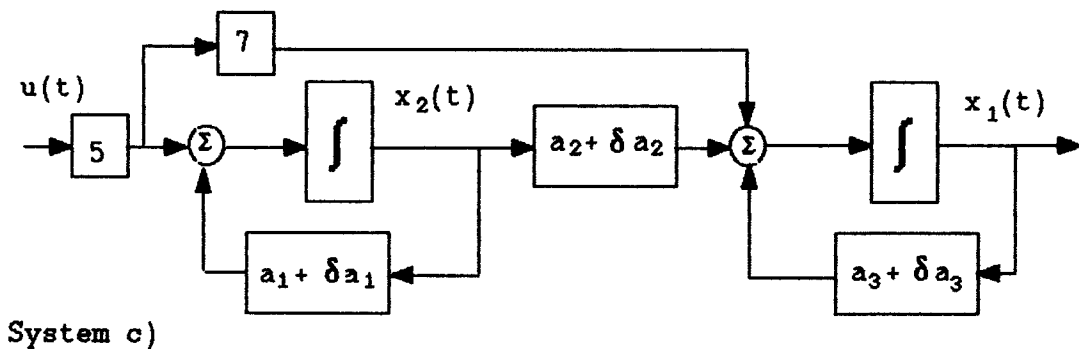


Bild II.1.2.2

Grundsätzlich können nur Parameter-Störungen, die auf einen Eingangsknoten wirken, durch die noch zu spezifizierenden Regler in idealer Weise eliminiert werden (siehe dazu Abschnitt II.3.5 und II.4.5). Wie das System c) zeigt, müssen aber auch noch gewisse lineare Abhängigkeiten erfüllt sein.

Für die Rangbedingung (II.1.2.3) gelten völlig analoge Überlegungen.

Bei manchen Strecken sind diese Rangbedingungen verletzt. Im Unterkapitel III.2 werden deshalb Systeme untersucht, die (II.1.2.2/3) nicht erfüllen. Es wird sich zeigen, dass "kleine" Nichtidealitäten durchaus verkraftet werden können. Zusätzlich wird im Abschnitt III.2 eine zweite Klasse von Parameterstörungen eingeführt, deren Einfluss ebenfalls vollständig eliminiert werden kann.

Die vierte Annahme (II.1.2.4) ist ziemlich einschneidend. Das Beobachtungsproblem wird deshalb in den Abschnitten III.3 und IV.4 ausführlich behandelt werden.

Die letzte Annahme ist nicht besonders einschneidend. In Satz 10 wird gezeigt werden, dass der Einfluss der Schaltgeräte ohne weiteres vernachlässigt werden kann, falls ihre Verzögerungen im Vergleich zur Systemträgheit klein sind (siehe dazu auch Unterkapitel IV.3).

II. 2. Transformationen

II. 2.1. Herleitung und Existenz der Transformationen

Dieser Abschnitt hat den Zweck, den zeitinvarianten Teil von (II.1.1.1) in eine "kanonische", oder auch "standardisierte" Form zu bringen, in der die späteren Aussagen besonders klar darstellbar sind.

Der Einfluss der unten eingeführten Transformationen auf das gesamte System (II.1.1.1) wird im folgenden Abschnitt II.2.2 untersucht werden.

Die in diesem Kapitel gezeigten Transformationen sind schon seit längerem bekannt (siehe z.B. [7]). Da sie für die weiteren Ausführungen von zentraler Bedeutung sind, und da in der Literatur häufig eine sehr kompakte, oder unvollständige Darstellung gewählt wird, werden diese Transformationen an dieser Stelle ausführlich behandelt.

Die Komponenten des Zustandsvektors des Systems (II.1.1.1) können als Koordinaten in einem n -dimensionalen Raum aufgefasst werden. Die Form der linearen Abbildung A_0 ist stark von der gewählten Basis dieser Koordinaten abhängig. Durch einen Wechsel der Basis kann das betrachtete Problem zum Teil beträchtlich vereinfacht werden. Diese Transformationen, die die innere Struktur der Abbildung A_0 (z.B. ihre Eigenwerte) nicht verändern, heissen Ähnlichkeits-Transformationen.

Die in dieser Arbeit gewählte Basis kann mit Hilfe des Bildes II.1.2.1 motiviert werden. Das erste dort dargestellte System (System a) ist in "Frobenius"-, oder "Begleit"-Form und wie man gesehen hat, erfüllt es die Rangbedingung (II.1.2.2) für beliebige Störungen. Falls es also gelingen würde, jedes System (II.1.1.1) in diese Form zu bringen, wären die Rangbedingungen (II.1.2.2/3) immer erfüllt. Natürlich ist dies nicht möglich, mehr noch, es wird sich zeigen, dass die Rangbedingungen (II.1.2.2/3) notwendig und hinreichend dafür sind, dass (II.1.1.1) in eine der Frobenius-Form ähnlichen Darstellung gebracht werden kann. Dies betrifft jedoch den zeitvarianten Teil von (II.1.1.1), der erst im nächsten Abschnitt untersucht werden wird. Für den zeitinvarianten Teil von (II.1.1.1) ist die Annahme (II.1.2.1) notwendig und hinreichend dafür, dass die gesuchte Transformation auf Blockbegleit-Form existiert (siehe Beweis des Satzes 1).

Die präzise Formulierung lautet :

Gesucht sind zwei zeitinvariante, reguläre Koordinatentransformationen \mathbf{T} und \mathbf{P}

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{x}_c(t) &= \mathbf{x}(t) & ; & & \det(\mathbf{T}) \neq 0 \\ \mathbf{P}\mathbf{u}_c(t) &= \mathbf{u}(t) & ; & & \det(\mathbf{P}) \neq 0 \end{aligned} \tag{II.2.1.1}$$

so dass der zeitinvariante Teil von (II.1.1.1)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}(t)$$

in Blockbegleit-Form übergeführt wird

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{T}\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{P}\mathbf{u}_c(t) \\ &= \mathbf{A}_{oc}\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_{oc}\mathbf{u}_c(t) \end{aligned} \tag{II.2.1.2}$$

Die angestrebte Form der neuen Systemmatrizen \mathbf{A}_{oc} und \mathbf{B}_{oc} ist unten dargestellt (alle nicht explizit definierten Elemente sind gleich Null) :

$$\mathbf{A}_{oc} = \begin{bmatrix} \overbrace{\quad\quad\quad}^{Q_1} & \mathbf{a}_1 & \overbrace{\quad\quad\quad} \\ & \overbrace{\quad\quad\quad}^{Q_2} & \mathbf{a}_2 & \overbrace{\quad\quad\quad} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \overbrace{\quad\quad\quad}^{Q_m} \\ & & & & & \mathbf{a}_m & \overbrace{\quad\quad\quad} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{oc} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow p_1\text{-te Zeile} \\ \leftarrow p_2\text{-te Zeile} \\ \cdot \\ \cdot \\ \leftarrow p_m\text{-te Zeile} \end{array}$$

$$\mathbf{a}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ a_{in}] \quad i=1,2,\dots,m$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_i \in \mathbb{R}^{(q_i-1) \times q_i}$$

(II.2.1.3)

Die Zahlen q_i heissen Steuerbarkeitsindizes und werden weiter unten gemeinsam mit den Zahlen p_i definiert werden.

Bemerkung :

In der Literatur wird die Bezeichnung Blockbegleit-Form häufig für Systeme verwendet, deren B_0 -Matrix auf der p_1 -ten Zeile voll besetzt ist. In dieser Arbeit wird diese Form als allgemeine Blockbegleit-Form bezeichnet werden. Wenn weiter unten von einer Blockbegleit-Form gesprochen wird, so ist damit die spezielle, oben eingeführte Form gemeint.

Algorithmus 1. Bestimmung der Transformation T :

Die neue Koordinaten-Basis wird mit Hilfe der Steuerbarkeitsmatrix U bestimmt :

$$U = [B_0, A_0 B_0, A_0^2 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0] \quad U \in \mathfrak{R}^{n \times (m \times n)}$$

Da im Abschnitt II.1.2 angenommen wurde, dass das Paar $\{A_0, B_0\}$ steuerbar ist, muss die Matrix U vollen Rang haben. Demzufolge hat U genau n linear unabhängige Kolonnen, die zur Bildung der neuen Basis herangezogen werden können. Da die Matrix U i.a. mehr als n Kolonnen hat, besteht eine gewisse Freiheit in der Wahl der Basis. Das hier angebrachte Vorgehen besteht darin, die Matrix U von links nach rechts gehend zu untersuchen. Die neue Basis S wird dann durch die ersten n linear unabhängigen Kolonnen gebildet, die man in der angegebenen Weise suchend findet.

Die Matrix B_0 hat m Kolonnen, die mit b_1 bis b_m bezeichnet werden. Um S zu bilden, ordnet man die in U gefundenen Kolonnen so, dass ganz links in S alle Kolonnen stehen die b_1 enthalten, dann jene die mit b_2 zusammenhängen etc, bis alle n Kolonnen eingereicht sind.

Die Zahlen q_1 beziffern die Anzahl gefundener Kolonnen die mit b_1 zusammenhängen. Die Zahlen p_1 sind die Partialsummen dieser Steuerbarkeitsindices q_1 .

$$S = \left[b_1, A_0 b_1, \dots, A_0^{q_1-1} b_1, b_2, A_0 b_2, \dots, A_0^{q_m-1} b_m \right] \quad S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

$$p_i = q_1 + q_2 + \dots + q_i \quad i = 1, 2 \dots m$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass die Steuerbarkeitsindices der Grösse nach geordnet sind, da dies durch ein Umstellen der Kolonnen von B_0 immer erreicht werden kann :

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m$$

Diese Annahme ist von grosser Bedeutung. Viele der nachfolgend aufgeführten Gedanken benutzen diese Systemeigenschaft.

Die Matrix S ist regulär, da sie aus n linear unabhängigen Kolonnen der Länge n besteht. Demzufolge existiert ihre Inverse, wobei deren Zeilen die folgenden Bezeichnungen erhalten :

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \text{----- } s_1 \text{ -----} \\ \text{----- } s_2 \text{ -----} \\ \vdots \\ \text{----- } s_{p_1} \text{ -----} \\ \vdots \\ \text{----- } s_{p_m} \text{ -----} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow p_1 \text{-te Zeile} \\ \vdots \\ \leftarrow p_m \text{-te Zeile} \end{matrix}$$

Aus den m Zeilenvektoren $s_{p_1}, s_{p_2}, \dots, s_{p_m}$ bildet man die gesuchte Matrix T^{-1} in der folgenden Weise :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \text{----- } s_{p_1} \text{ -----} \\ \text{----- } s_{p_1} \mathbf{A}_0 \text{ -----} \\ \vdots \\ \text{----- } s_{p_1} \mathbf{A}_0^{q-1} \text{ -----} \\ \text{----- } s_{p_2} \text{ -----} \\ \vdots \\ \text{----- } s_{p_m} \mathbf{A}_0^m \text{ -----} \end{bmatrix}$$

Ende des Algorithmus 1.

Es bleibt nun zu zeigen, dass diese erste Transformation regulär ist und dass sie (wenigstens z.T.) die gewünschte Form der neuen Systemmatrizen produziert.

Satz 1:

Falls das zu transformierende System $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0\}$ vollständig steuerbar ist, ist die mit Hilfe des Algorithmus 1 gefundene Matrix T^{-1} regulär.

Beweis von Satz 1:

Der Beweis dieses Satzes wird durch Inspektion der involvierten Matrizen gegeben. Um die wichtigen Ueberlegungen darzustellen wird zuerst ein charakteristisches Beispiel analysiert, aus dem anschliessend auf den allgemeinen Fall geschlossen werden kann. Das betrachtete Beispiel hat sechs Zustände und 2 Eingangskanäle; die Steuerbarkeitsindices lauten $q_1 = 4$, $q_2 = 2$. Gemäss Algorithmus 1 bildet die Steuerbarkeitsmatrix U den Ausgangspunkt der Ueberlegungen :

$$U = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & A_0 b_1 & A_0 b_2 & A_0^2 b_1 & A_0^2 b_2 & A_0^3 b_1 & A_0^3 b_2 & A_0^4 b_1 & A_0^4 b_2 & A_0^5 b_1 & A_0^5 b_2 \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ * ↑ * * * * *

↑ : Kolonne linear unabhängig von den linksstehenden Kolonnen

* : Kolonne linear abhängig von den linksstehenden Kolonnen

Aus der Matrix U wird gemäss Algorithmus 1 die Matrix T^{-1} gebildet. Von besonderem Interesse ist die Matrix $T^{-1}S$. Als Erstes stellt man fest, dass die erste und die fünfte Zeile von $T^{-1}S$ der vierten und sechsten Zeile einer Einheitsmatrix gleich sind (siehe Definition von T^{-1}).

Bis auf zwei Elemente und einer Linksverschiebung entspricht die zweite bzw. sechste Zeile von $T^{-1}S$ ihrer ersten bzw. fünften Zeile. Diese Struktur setzt sich bis zu den Blockgrenzen in $T^{-1}S$ fort. Die Position der Blockgrenzen sind durch die Steuerbarkeitsindices gegeben. Zusätzlich verschwinden gewisse nichttriviale Elemente in $T^{-1}S$. Dies kann man zeigen, indem man die linearen Abhängigkeiten benutzt, die in der Matrix U festgehalten sind. Die erste linear abhängige Kolonne in U ist $A_0^2 b_2$:

$$A_0^2 b_2 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 A_0 b_1 + \alpha_3 A_0^2 b_1 + \alpha_4 b_2 + \alpha_5 A_0 b_2$$

$$\Rightarrow s_4 A_0^2 b_2 = \alpha_1 s_4 b_1 + \alpha_2 s_4 A_0 b_1 + \alpha_3 s_4 A_0^2 b_1 + \alpha_4 s_4 b_2 + \alpha_5 s_4 A_0 b_2$$

$$\Rightarrow s_4 A_0^2 b_2 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \alpha_3 0 + \alpha_4 0 + \alpha_5 0 = 0$$

In diesem Beispiel ist dies der einzige Term, der zusätzlich Null wird. Damit erhält man die endgültige Struktur der Matrix $T^{-1}S$:

$$T^{-1}S = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_4 A_0^4 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s_4 A_0^4 b_1 & s_4 A_0^5 b_1 & 0 & s_4 A_0^3 b_2 \\ 1 & s_4 A_0^4 b_1 & s_4 A_0^5 b_1 & s_4 A_0^6 b_1 & s_4 A_0^3 b_2 & s_4 A_0^4 b_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s_6 A_0^4 b_1 & 1 & s_6 A_0^2 b_2 \end{array} \right]$$

Die Determinante dieser Matrix kann einfach bestimmt werden, indem man die übliche Entwicklung durchführt. Die Besonderheit der Struktur der Matrix $T^{-1}S$ liegt darin, dass es immer gelingt Zeilen mit einer einzigen Eins und sonst nur Nullen zu erhalten. Dieser Sachverhalt wird an Hand der untenstehenden Darstellung verdeutlicht (die zur Entwicklung benutzten Elemente sind jeweils mit einem Kreis umrandet) :

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & x \\ 0 & 1 & x & * & x & x \\ 1 & x & x & * & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & x & x & * \\ 1 & x & x & x & * \\ \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 1 & * & x \\ 1 & x & * & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & x & * \\ \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \textcircled{0} & \textcircled{1} \\ 1 & * \end{bmatrix}$	$\textcircled{1}$
Durchgang : 1	1	2	2	3	4

Man beachte, dass die Gliederung des Vorgehens in Durchgänge und Streichungen innerhalb der einzelnen Durchgänge nötig ist, da man sonst Zeilen streichen würde, die mehr als ein Element ungleich Null enthalten.

Daraus folgt :

$$\det(T^{-1}S) = (-1)(-1)(+1)(+1)(-1)(+1) = -1$$

Es wurde bereits erwähnt, dass die Determinante von S nicht verschwinden kann, da das System $\{A_0, B_0\}$ vollständig steuerbar vorausgesetzt wird. Damit ist klar, dass auch die Determinante von T^{-1} nicht verschwinden kann, womit der Satz 1 für das betrachtete Beispiel bewiesen wäre.

Die oben für ein Beispiel durchgeführten Ueberlegungen können ohne weiteres auf den allgemeinen Fall erweitert werden.

Die allgemeine Form der Matrix $S^{-1}T$ ist auf der nächsten Seite dargestellt (die mit x bezeichneten Elemente sind i. a. ungleich Null) :

$$T^{-1}s = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & x & | & \dots & \dots & 0 & | & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & x & | & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & x \\ 0 & \dots & \dots & \dots & | & 0 & \dots & \dots & | & 0 & \dots & \dots \\ 1 & x & \dots & \dots & | & x & \dots & x & | & x & \dots & x \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & 1 & | & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & x & | & \dots & \dots & x & | & \dots & \dots & x & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x & | & 1 & x & \dots & | & x & \dots & x & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & x & | & \dots & \dots & x & | & 0 & \dots & x & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & | & 0 & 0 & x & | & 1 & x & x & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right]$$

Durchgang 1		↑			↑			↑
.		.			.			.
Durchg. q _m		↑			↑			↑
.		.			.			.
Durchg. q _{m-1}		↑			↑			
.		.						
Durchg. q ₁		↑						

Die Determinante dieser Matrix kann in der gleichen Art bestimmt werden, wie es oben an Hand des Beispiels beschrieben wurde. Im ersten Durchgang wird die erste, die (p₁+1)-te, die (p₂+1)-te usw. bis zur (p_{m-1}+1)-ten Zeile gestrichen. Im nächsten Durchgang werden die jeweils darunterliegenden Zeilen in der gleichen Art gestrichen. Dieses Vorgehen ergibt q₁ Durchgänge, wobei die Anzahl Streichungen mit zunehmenden Durchgängen abnimmt. Wiederum folgt daraus, dass die Determinante der Matrix T⁻¹S den Betrag Eins haben muss, womit der Satz 1 auch für allgemeine Systeme bewiesen ist.

EdB.

Es bleibt nun zu zeigen, dass die transformierten Systemmatrizen die gewünschte Form (II.2.1.3) besitzen.

Satz 2 :

Die transformierte Matrix $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{T}$ ist in Block-Begleitform.

Beweis von Satz 2 :

Da man sich nur für die Matrix \mathbf{A}_{oc} interessiert, genügt es den homogenen Teil der Systemgleichung zu betrachten. Da die Transformation \mathbf{T} zeitinvariant ist gilt :

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t)$$

Die Matrix $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0$ gleicht stark der Matrix \mathbf{T}^{-1} . Tatsächlich sind n-m Zeilen der beiden Matrizen identisch. Allerdings ist die Position dieser n-m Zeilen von $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0$ im Vergleich zu \mathbf{T}^{-1} um eine Stellung nach oben verschoben. Dies kann aus der Definition der Matrix \mathbf{T}^{-1} unmittelbar herausgelesen werden. Zusätzlich treten m Zeilen auf, die neu sind (die i-te Zeile von \mathbf{T}^{-1} wird mit t_i bezeichnet) :

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \text{-----} & t_2 & \text{-----} \\ \text{-----} & t_3 & \text{-----} \\ & \vdots & \\ \text{-----} & t_{p_1} & \text{-----} \\ \text{-----} & \text{neue Zeile} & \text{-----} \\ \text{-----} & t_{p_1+2} & \text{-----} \\ & \vdots & \\ \text{-----} & \text{neue Zeile} & \text{-----} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (p_1-1)\text{-te Zeile} \\ \leftarrow p\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ \leftarrow p_m\text{-te Zeile} \end{array}$$

Mit den oben gemachten Ueberlegungen kann deswegen folgender Zusammenhang gefunden werden :

$$x_{ci}(t) = t_i \mathbf{x}(t) \quad \text{gilt für alle } i=1, \dots, n$$

$$\dot{x}_{ci}(t) = t_{i+1} \mathbf{x}(t) = x_{ci+1}(t) \quad i=1, \dots, n \quad i \neq p_1, \dots, p_m$$

$$\dot{x}_{ci}(t) = s_{p_i} \mathbf{A}^{q_i} \mathbf{x}(t) = s_{p_i} \mathbf{A}^{q_i} \mathbf{T} \mathbf{x}_c(t) \quad i=p_1, \dots, p_m \text{ (m neue Zeilen)}$$

Schreibt man diese Gleichungen in matrizieller Form, findet man Satz 2 bestätigt.

EdB.

Weiter ist noch zu zeigen, dass die Matrix B_{oc} die geforderte Form besitzt. Zu diesem Zweck wird zuerst die Matrix $T^{-1}B_o$ betrachtet. Diese Matrix setzt sich aus der ersten, der p_1+1 -ten, usw. bis $p_{m-1}+1$ -ten Kolonne von $T^{-1}S$ zusammen. Dies folgt unmittelbar aus der Definition T^{-1} und S . Aus der oben gegebenen Darstellung der allgemeinen Matrix $T^{-1}S$ kann deswegen sofort die Struktur von $T^{-1}B_o$ abgeleitet werden :

$$T^{-1}B_o = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \leftarrow p_1\text{-te Zeile} \\ 1 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \leftarrow p_2\text{-te Zeile} \\ 0 & 1 & x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \leftarrow p_m\text{-te Zeile} \end{bmatrix}$$

Man sieht, dass die angestrebte Form nicht ganz erreicht wurde, da im allgemeinen noch $m(m-1)/2$ Elemente x vorkommen, welche ungleich Null sind. Die Elimination dieser Elemente übernimmt die Matrix P .

Die Matrix P kann mit Hilfe der Definitionsgleichung der Matrix B_{oc} gefunden werden :

$$B_{oc} = T^{-1}B_o P \quad / \text{ von links mit } B_{oc}^T \text{ multiplizieren}$$

$$B_{oc}^T B_{oc} = I_m = B_{oc}^T T^{-1} B_o P$$

$$\Rightarrow P = (B_{oc}^T T^{-1} B_o)^{-1} \quad (II.2.1.3)$$

Man beachte, dass die Matrix P regulär ist, da alle drei Matrizen B_{oc} , T^{-1} und B_o vollen Rang haben (siehe Annahme (II.1.2.2) und Beweis Satz 1).

Satz 3 :

Die Matrix P (II.2.1.3) ist eine obere Dreiecks-Matrix mit Diagonalelementen gleich Eins .

Beweis von Satz 3 :

Als erstes wird die Inverse der Matrix P betrachtet :

$$P^{-1} = B_{oc}^T T^{-1} B_o$$

Die Multiplikation mit B_{oc}^T bedeutet, dass die p_1 -te, die p_2 -te, usw. bis zur p_m -ten Zeile zu einer neuen $(m \times n)$ -dimensionalen Matrix zusammengefasst werden. Demzufolge hat die Matrix $B_{oc}^T T^{-1}$ die unten dargestellte Form (siehe Definition von T^{-1}):

$$B_{oc}^T T^{-1} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} s_{p_1} A_o^{q_1-1} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} s_{p_2} A_o^{q_2-1} \\ \vdots \\ s_{p_m} A_o^{q_m-1} \end{array} \right] \end{bmatrix}$$

Diese Matrix mit B_o multipliziert, hat eine Dreiecks-Form mit Diagonalelementen gleich Eins. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Matrix T^{-1} (man beachte, dass die Steuerbarkeitsindices der Grösse nach geordnet sind) :

$$B_{oc}^T T^{-1} B_o = \begin{bmatrix} 1 & x & & & x \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x \\ 0 & & & & -0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit ist gezeigt, dass P^{-1} eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen gleich Eins ist. Die Inverse einer Dreiecksmatrix ist wieder eine Dreiecksmatrix. Daraus folgt, dass P dreiecksförmig ist. Dann müssen aber alle Diagonalelemente von P auch gleich Eins sein (durch Inspektion der Matrizen P und P^{-1} leicht einzusehen).

EdB.

Zusammenfassung II.2.1 :

Es wurden zwei Koordinatentransformationen in \mathbb{R}^n , bzw. in \mathbb{R}^m angegeben, welche den zeitinvarianten Teil von (II.1.1.1) in die spezielle Block-Begleitform überführen. Diese Abbildungen existieren dann und nur dann, wenn das Paar $\{A_o, B_o\}$ vollständig steuerbar ist. Die Berechnung der Matrizen T und P lässt sich ohne weiteres auf einem Digitalrechner automatisieren. Um die numerischen Probleme möglichst klein zu halten, empfiehlt es sich am Originalsystem zuerst eine Skalierungstransformation durchzuführen.

Ausser dem hier gezeigten Algorithmus existieren noch andere Berechnungsmethoden für die Matrix T , welche z.T. bessere numerische Eigenschaften besitzen (siehe z.B. [2], dort müssen allerdings die Zustände unnumeriert werden, um die in dieser Arbeit verwendete Darstellung zu erhalten).

II. 2. 2. Transformierte Systembeschreibung

In diesem Abschnitt wird die Frage untersucht, wie die in Abschnitt II.2.1 für den zeitinvarianten Teil von (II.1.1.1.) eingeführten Transformationen \mathbf{T} und \mathbf{P} sich auf das gesamte System (II.1.1.1.) auswirken.

Das transformierte System (II.1.1.1) ist gegeben durch :

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)\}\mathbf{T}\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)\}\mathbf{P}\mathbf{u}_c(t) \quad (\text{II.2.2.1})$$

Analog zu den kanonischen Systemmatrizen \mathbf{A}_{oc} und \mathbf{B}_{oc} kann man kanonische Störungen $\delta\mathbf{A}_c(t)$ und $\delta\mathbf{B}_c(t)$ definieren.

$$\delta\mathbf{A}_c(t) = \mathbf{T}^{-1}\delta\mathbf{A}(t)\mathbf{T} \quad \text{und} \quad \delta\mathbf{B}_c(t) = \mathbf{T}^{-1}\delta\mathbf{B}(t)\mathbf{P}$$

Damit das transformierte System für alle Zeiten wenigstens in allgemeiner Block-Begleitform ist, müssen diese beiden zeitvarianten Matrizen folgende Struktur besitzen (alle nicht explizit aufgeführten Elemente sind Null) :

$$\delta\mathbf{A}_c(t) = \begin{bmatrix} \text{-----} \delta\mathbf{a}_1(t) \text{-----} \\ \text{-----} \delta\mathbf{a}_2(t) \text{-----} \\ \text{-----} \delta\mathbf{a}_m(t) \text{-----} \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{B}_c(t) = \begin{bmatrix} \text{---} \delta\mathbf{b}_1(t) \text{---} \\ \text{---} \delta\mathbf{b}_2(t) \text{---} \\ \text{---} \delta\mathbf{b}_m(t) \text{---} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow p_1 \text{ te-Zeile} \\ \leftarrow p_2 \text{ te-Zeile} \\ \leftarrow p_m \text{ te-Zeile} \end{array} \quad (\text{II.2.2.2})$$

Die Frage nach den Bedingungen, welche diese Struktur garantieren beantwortet der Satz 4.

Satz 4 :

Die Rangbedingungen (II.1.2.2/3) sind notwendig und hinreichend dafür, dass das transformierte zeitvariable System (II.2.2.1) für alle Zeiten in Block-Begleitform ist.

Beweis des Satzes 4 :

Zuerst wird der hinreichende Teil der Behauptung bewiesen. Falls die Annahmen (II.1.2.2/3) gelten, können die beiden Parameterstörungen $\delta A(t)$ und $\delta B(t)$ für alle Zeiten als Linearkombinationen der Matrix B_0 geschrieben werden :

$$\delta A(t) = B_0 R_A(t) \quad ; \quad \delta B(t) = B_0 R_B(t) \quad (\text{II.2.2.3})$$

$$R_A(t) \in \mathfrak{R}^{m \times n}, R_B(t) \in \mathfrak{R}^{m \times m}, \text{ sonst beliebig}$$

Die beiden Parameterstörungen $R_A(t)$ und $R_B(t)$ haben i.a. vollen Rang und ihre Elemente können innerhalb der Grenzen (II.1.1.2) beliebige Werte annehmen. In dieser Arbeit werden sie als "relative Störungen" bezeichnet.

Wendet man die Transformationen T und P auf (II.2.2.3) an so erhält man :

$$\delta A_c(t) = B_{0c} P^{-1} R_A(t) T \quad ; \quad \delta B_c(t) = B_{0c} P^{-1} R_B(t) P \quad (\text{II.2.2.4})$$

Damit lassen sich relative kanonische Störungen einführen :

$$R_{Ac}(t) = P^{-1} R_A(t) T \quad ; \quad R_{Bc}(t) = P^{-1} R_B(t) P \quad (\text{II.2.2.5})$$

Die beiden Matrizen $R_{Ac}(t)$ und $R_{Bc}(t)$ sind, da $R_A(t)$ und $R_B(t)$ willkürlich sind ebenfalls voll besetzt (man beachte, dass sie den gleichen Rang haben wie $R_A(t)$ und $R_B(t)$).

Wichtig ist jedoch, dass bei beiden kanonischen Störungen die Matrix B_{0c} als erster Term erscheint. Dies garantiert, dass die Struktur der Matrizen $\delta A_c(t)$ und $\delta B_c(t)$ für alle Zeiten wie oben in (II.2.2.2) angegeben ist.

Der Beweis der Notwendigkeit kann analog umgekehrt geführt werden, indem man feststellt, dass alle Matrizen $\delta A_c(t)$ und $\delta B_c(t)$ welche die Block-Begleitform nicht zerstören als Linearkombinationen der Kolonnen der Matrix B_{0c} geschrieben werden können.

EdB.

Bemerkung :

Es stellt sich die Frage, ob die Annahmen (II.1.2.2/3) nicht zu einschränkend sind. Man könnte sich vorstellen, dass ein anderer RVS, der nicht mit Hilfe der hier benutzten kanonischen Darstellung entworfen wurde, eine grössere Klasse von Störungen erfolgreich bekämpfen kann.

Dies ist jedoch nicht der Fall. Sowohl beim Regulatorproblem (siehe Abschnitt II.3.1.), wie auch beim Folgeregelungsproblem (siehe Abschnitt II.4.1) wird gezeigt werden, dass es völlig äquivalent ist, ob man in einem willkürlichen Koordinatensystem arbeitet und die Rangbedingungen (II.1.2.2/3) einhält, oder ob man in dem speziellen Koordinatensystem der Block-Begleitform arbeitet und die Strukturbedingung (II.2.2.4) einhält.

II.2.3. Klassifizierung der Eingangsstörungen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich ausschliesslich mit der Parameterstörung $\delta B_c(t)$. Die in diesem Abschnitt gemachten Aussagen finden ihre Anwendung in den Abschnitten II.3.4/5 und II.4.4/5. Da aber die Klassifizierung von $\delta B_c(t)$ eng mit den oben eingeführten Transformationen zusammenhängt, wird dieser Punkt schon an dieser Stelle behandelt.

Wie die Darstellung (II.2.2.2) im letzten Abschnitt zeigt, hat die Matrix $\delta B_c(t)$ i.a. m Zeilen mit jeweils m Elementen (allgemeine Blockbegleit-Form). Diese Struktur weicht beträchtlich von der Struktur der Matrix B_{oc} ab, welche nur an m Stellen ein Element ungleich Null hat. Es ist deshalb intuitiv klar, dass eine einfachere Struktur der Matrix $\delta B_c(t)$ zu einfacheren Aussagen führt.

In diesem Abschnitt wird eine Klassifizierung der Matrix $\delta B_c(t)$ in vier Fälle von zunehmender Komplexität eingeführt. Der ungestörte Fall, d.h. falls $\delta B_c(t) = 0$ gilt, wird Form, oder Typ 0 bezeichnet. Die Darstellung (II.2.3.1) zeigt die drei komplexeren Formen zwischen denen zusätzlich unterschieden werden soll.

Typ 1)	Typ 2)	Typ 3)
$\delta B_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \\ x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x \end{bmatrix}$	$\delta B_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \\ x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x \end{bmatrix}$	$\delta B_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \\ x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 \\ x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x & \dots & x \end{bmatrix}$
"Diagonal"	"Dreiecksförmig"	Allgemein

(II.2.3.1)

Die Bezeichnungen der Formen sind in Anführungszeichen gesetzt, da sie sich nur auf die nichttrivialen Elemente beziehen.

Wird aber die Aufspaltung (II.2.2.3) auf $\delta B_c(t)$ angewendet, so stellt man fest, dass die relative Eingangsstörung $R_{pc}(t)$ (siehe Definition (II.2.2.4)) für die drei unterschiedlichen Fälle tatsächlich diagonal, dreiecksförmig oder voll besetzt ist.

Es stellt sich natürlich die Frage, welche Bedingungen ein System (II.1.1.1) zu erfüllen hat, damit seine Matrix $\delta B_c(t)$ eine dieser drei Formen annimmt. Da die Elemente der Störungsmatrizen als unabhängige Variable vorausgesetzt sind, werden strukturelle und nicht algebraische Bedingungen gesucht.

Existenzbedingungen der Form 1 :

Es wurde bereits festgestellt, dass $R_{Bc}(t)$ für diese Form diagonal ist :

$$R_{Bc}(t) = P^{-1}R_B(t)P = \text{diag}(r_{Bc,i}(t)) \quad i=1, 2, \dots, m$$

Das bedeutet aber, dass nur die Eigenwerte von $R_B(t)$ zeitvariant sein dürfen. Die Eigenvektoren müssen konstant sein und mit den Kolonnen der Matrix P identisch sein. Diese Identität muss strukturell und nicht algebraisch bedingt sein, da sonst die angenommene Unabhängigkeit der Elemente von $R_B(t)$ nicht gegeben wäre. Man beachte, dass die postulierte Unabhängigkeit der Parameterstörungen den Fall $r_{Bc,i}(t) = r_{Bc,j}(t)$ ausschliesst.

Falls die Matrix $R_B(t)$ "fast immer" regulär ist, d.h. falls ihre Determinante nicht identisch verschwindet, folgt daraus, dass nur folgende Bedingungen zu einer Matrix $\delta B_c(t)$ der Form 1 führen :

1. $P = I_m$
2. $R_B(t) = \text{diag}(r_i(t)) \quad i=1, 2, \dots, m$

Begründung :

Die Bedingung ist sicher hinreichend, wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Die Bedingung ist aber auch notwendig, da nur eine Diagonalmatrix bei zeitabhängigen Eigenwerten konstante Eigenvektoren haben kann. Da die Eigenvektoren einer Diagonalmatrix mit i.a. verschiedenen Diagonalelementen die Einheitsvektoren sind, muss die Matrix P gleich der Identität sein.

Bedingung für Typ 2 Eingangsstörung :

Die Existenzbedingungen für den Typ 2 sind einfacher zu formulieren :

$$R_B(t) = \text{Dreiecksförmig}$$

Begründung :

Die Matrix P hat gemäss Satz 3 eine obere Dreiecks-Form. Das Produkt einer quadratischen oberen Dreiecks-Matrix mit einer anderen quadratischen Matrix ist dann und nur dann strukturell wieder eine obere Dreiecksmatrix, wenn die zweite Matrix auch dreiecksförmig ist. Damit ist diese Bedingung sofort einsehbar.

Da die Form 3 dem allgemeinsten Fall entspricht, sind keine zusätzlichen Bedingungen zu erfüllen.

Bemerkungen:

Die Bedingungen dafür, dass das System (II.1.1.1) eine Eingangsstörung vom Typ 1 hat, sind ziemlich einschränkend. Trotzdem existieren eine relativ viele realer Systeme, die sie erfüllen. So gehören z.B. alle Systeme, welche nur eine Eingangsgrösse besitzen ($m=1$) zu dieser Kategorie.

In der regelungstechnischen Praxis sind Eingangsstörungen vom Typ 2 sehr häufig anzutreffen. Diesem Typ entspricht der Fall, bei welchem die Verstärkungen der einzelnen Eingangskanäle gestört sind. Zwischen den Kanälen findet jedoch kein Uebersprechen statt. Die entsprechende Matrix $R_B(t)$ ist dann diagonal und erfüllt damit die Bedingungen für Eingangsstörungen vom Typ 2.

Ein wichtiges, noch nicht gelöstes Problem ist die Frage nach der Steuerbarkeit des zeitvariablen Systems (II.1.1.1). Selbstverständlich muss sie für alle Zeiten gegeben sein, damit ein Regler das System zu jedem Zeitpunkt stabilisieren kann.

Satz 5:

Falls das System (II.1.1.1) analytisch ist und die Störungen die Bedingungen (II.1.2.1/2/3) erfüllen, und falls die relative kanonische Eingangsstörung $R_{Bc}(t)$ die Bedingung

$$(I + R_{Bc}(t)) > 0 \quad \text{für alle } t \quad (\text{II.2.3.1})$$

erfüllt, so ist das System (II.1.1.1) für alle Zeiten vollständig steuerbar.

Beweis von Satz 5 :

Wie oben gezeigt wurde, ist das System (II.1.1.1), falls die Bedingungen (II.1.2.1/2/3) erfüllt sind, für alle Zeiten in Block-Begleitform transformierbar. Die Steuerbarkeitseigenschaft wird durch die zeitinvarianten Koordinatentransformationen T und P nicht beeinträchtigt. Es ist deshalb zulässig, den Beweis im kanonischen Koordinatensystem zu führen.

Ein zeitvariables System ist dann für alle Zeiten vollständig steuerbar, wenn die unten definierte Matrix $U(t)$ immer vollen Rang hat (siehe z.B. [8]) :

$$G_0(t) = B_{0c} + \delta B_c(t)$$

$$G_{i+1}(t) = \dot{G}_i(t) - (A_{0c} + \delta A_c(t)) G_i(t) \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Da das System (II.1.1.1) analytisch vorausgesetzt wurde, existiert die $(n-1)$ -te, bzw $(n-2)$ -te Ableitung der Matrizen $\delta B_c(t)$ und $\delta A_c(t)$.

Für diese Systeme gilt zusätzlich, dass die Koordinatentransformationen (II.2.1.1) die Hauptminoren der beiden Matrizen $(I + R_{Bc}(t))$ und $(I + R_B(t))$ nicht verändern :

$$hm_i(I + R_{Bc}(t)) = hm_i(I + R_B(t))$$

(hm_i bezeichnet die i -te Hauptminore). Dies ist eine unmittelbare Folge des Satzes 3.

Im Abschnitt II.3.4 wird gezeigt werden, dass die Bedingung (II.2.3.1) nicht nur die Steuerbarkeit des zeitvariablen Systems garantiert, sondern dass diese Bedingung auch die Existenz des im Abschnitt II.3.3 eingeführten RVS sicherstellt.

Bemerkung für Eingangsstörungen vom Typ 3 :

Für Systeme mit Eingangsstörungen des Typs 3 muss eine verschärfte Annahme getroffen werden, damit ein einfacher Regler das System (II.1.1.1) in der gewünschten Art stabilisieren kann. Diese Bedingung lautet :

$$1 > \max_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \{ \sum_{j=1}^m |r_{Bc,ij}(t)| - r_{Bc,ii}(t) \} \quad (II.2.3.2)$$

$i = 1, 2, \dots, m; t_0 \leq t \leq t_1$

Im wesentlichen besagt (II.2.3.5), dass die ausserdiagonalen Terme (die Uebersprechverstärkungen) klein sein müssen im Vergleich zu den kleinsten Diagonaltermen, welche die eigentlichen Eingangsverstärkungen darstellen ("diagonal dominant").

Zusammenfassung II.2.3 :

Dieser Abschnitt hat eine Klassifizierung der Eingangsstörung in 4 Klassen eingeführt. Ausgehend vom ungestörten Fall wurden drei Störungsformen definiert.

Wie in II.1.2 bereits angedeutet, wurden zusätzliche Annahmen getroffen, welche die Stabilisierbarkeit des zeitvarianten Systems (II.1.1.1) und die Existenz der entsprechenden Regler sicherstellen.

II.2.4. Zusammenfassung II.2.

Im Abschnitt II.2 wurden zwei Koordinaten-Transformationen eingeführt, welche den Zweck haben, die Strecke (II.1.1.1) in eine standardisierte (kanonische) Form zu bringen.

Diese Koordinaten-Transformationen stellen einen wesentlichen Aspekt dieser Arbeit dar. Dank dieser Transformationen gelingt es, die Synthese- und die Analyseaufgabe wesentlich zu vereinfachen.

Von nun an wird angenommen, dass die betrachtete Strecke in der oben angegebenen Art transformiert worden ist. Der Einfachheit halber wird der Index "c" fallengelassen, so dass die Streckenbeschreibung (II.1.1.1) weiterverwendet werden kann.

Der Einfluss der Transformationen wird sich erst wieder bei der Realisierung des Reglers bemerkbar machen. Um die beiden Transformationen zu berücksichtigen, muss dann die in Bild II.2.4.1 dargestellte Struktur verwendet werden :

$$\mathbf{T} \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{P} \mathbf{u}_c(t) = \mathbf{u}(t)$$

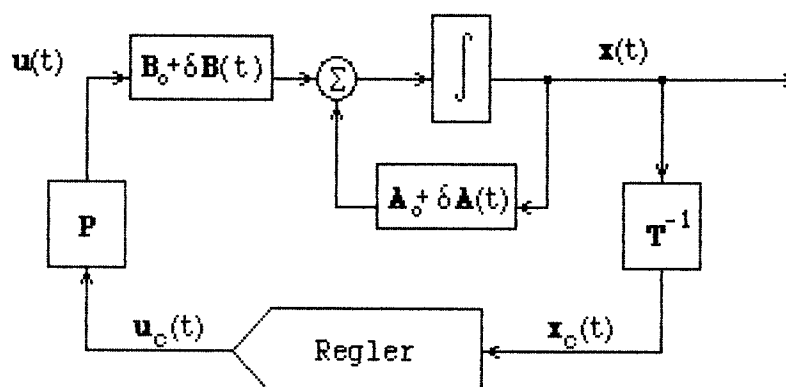


Bild II.2.4.1

Man beachte, dass der Regler an Hand der transformierten Störungen $\delta\mathbf{A}_c(t)$ und $\delta\mathbf{B}_c(t)$ zu dimensionieren ist!

II.3. Regulatorproblem

II.3.1. Problemdefinition

In diesem Abschnitt wird das sogenannte "Regulatorproblem" behandelt. Die betrachtete Strecke ist durch die Gleichung (II.3.1.1) gegeben. Zusätzlich wird nun explizit angenommen, dass der Anfangszustand ungleich Null ist :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t))\mathbf{u}(t) \quad (\text{II.3.1.1})$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \neq 0$$

Diese Ausgangslage kann z.B. das Produkt einer Linearisierung eines nichtlinearen Systems um eine Solltrajektorie herum sein, welche durch ein Optimierungsverfahren gewonnen wurde. Der Zustand $\mathbf{x}(t)$, welcher möglichst klein gehalten werden soll, kann in diesem Fall als Abweichung von der Solltrajektorie interpretiert werden.

Gesucht ist ein Regelgesetz $\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ welches garantiert, dass der Zustand $\mathbf{x}(t)$ asymptotisch gegen Null geht. Zusätzlich will man die Dynamik dieser Bewegung vorgeben können. Eines der elegantesten Mittel dazu stellt die Eigenwertvorgabe dar, kann man doch anhand der Eigenwerte eines Systems sehr gut auf seine dynamischen Eigenschaften schliessen. Im nächsten Abschnitt wird diese Methode zur Synthese des Reglers benutzt.

Bemerkung :

Im Abschnitt II.2.2 wurde bereits die Frage aufgeworfen, ob die Rangbedingungen (II.1.2.2/3) nicht zu restriktiv seien. Diese Frage kann für das Regulatorproblem mit Hilfe eines bereits 1969 erschienen Artikels beantwortet werden.

In [3] hat Drazenovic Bedingungen formuliert, welche die Klasse der Parameterstörungen definieren, die durch einen idealen Regler mit variabler Struktur (RVS) eliminiert werden können (dabei wurden keine Annahmen über die gewählte Koordinatenbasis getroffen).

Falls die Elemente der Parameterstörungen gemäss Abschnitt II.1.1 untereinander als völlig unabhängig angenommen werden, sind die von Drazenovic angegebenen Bedingungen identisch mit den Rangbedingungen (II.1.2.2), welche in dieser Arbeit zu einem völlig anderen Zweck eingeführt wurden. Daraus folgt, dass durch den Koordinatenwechsel keine Information verloren geht, und dass das kanonische Koordinatensystem völlig äquivalent zum Originalsystem ist (siehe dazu auch Abschnitt III.2.2).

II. 3. 2. Formulierung des Entwurfsziels

Die gewünschte Dynamik der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ wird durch die Vorgabe von $n-m$ Eigenwerten definiert, wobei komplexe Eigenwerte nur in konjugierten Paaren vorkommen dürfen. Man beachte, dass statt wie erwartet n , nur $n-m$ Eigenwerte vorgegeben werden müssen. Die Begründung dieser Tatsache wird in Abschnitt II. 3. 5 gegeben werden.

Diese Eigenwerte werden in m Gruppen zu jeweils q_i-1 Elementen geordnet. Aus diesen m Gruppen werden m charakteristische Polynome gebildet. Die charakteristischen Koeffizienten dieser Polynome werden mit α_{ij} bezeichnet :

$$\lambda_{ij} = \text{vorgegebene Eigenwerte, } i = 1, 2, \dots, m ; \quad j = 1, 2, \dots, q_i-1$$

$$(s - \lambda_{i1})(s - \lambda_{i2}) \dots (s - \lambda_{iq_i-1}) =$$

$$s^{q_i-1} + \alpha_{iq_i-2} s^{q_i-2} \dots \alpha_{i1} s + \alpha_{i0} = 0$$

Die Koeffizienten der charakteristischen Polynome (inklusive des Faktors "1" der höchsten Potenz) werden zu m Zeilenvektoren \mathbf{x}_i der Länge q_i zusammengefasst :

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i0} & \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{iq_i-2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{q_i}$$

Aus diesen m Zeilenvektoren wird eine Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gebaut dergestalt, dass deren Zeilen für beliebige Vektoren \mathbf{x}_i orthogonal zueinander stehen :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \dots 0}^{\mathbf{x}_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \overbrace{0 \dots 0}^{\mathbf{x}_2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & * & & & \vdots \\ & & & & & * & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \overbrace{0 \dots 0}^{\mathbf{x}_m} & \dots \end{bmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{C} repräsentiert die gewünschte Dynamik des geregelten Systems. Die Frage, wie dieses Regelziel erreicht werden soll, wird im nächsten Abschnitt behandelt werden. Man beachte, dass der Rang der Matrix \mathbf{C} , unabhängig von der gewählten Polkonfiguration, immer gleich m ist.

Die Matrix \mathbf{C} hat eine unmittelbare Bedeutung, da mit ihrer Hilfe eine für die nachfolgenden Ausführungen wichtige Variable definiert wird :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^m \quad (\text{II. 3. 2. 1})$$

Der Vektor $s(t)$ wird nachfolgend als Schaltvektor bezeichnet werden. Die Gleichung $s(t)=0$ definiert eine $(n-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die aus der Schnittmenge von m Hyperebenen im n -dimensionalen Zustandsraum gebildet ist. Im Abschnitt II.3.6 wird eine geometrische Interpretation dieser Überlegungen gegeben werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird noch ein wichtiger Begriff eingeführt :

Falls die Gleichung $s(t) = 0$ für ein gewisses Zeitintervall $[t_a, t_b]$ identisch erfüllt ist, so ist das zugehörige System im betrachteten Intervall im "Gleitzustand".

Eine typische Trajektorie des Regulatorproblems lässt sich in zwei Phasen aufteilen. Die im nächsten Abschnitt definierten Regler haben den Zweck das System (II.1.1.1) in einer ersten Phase ($t < t^*$) in den Gleitzustand zu bringen. Die zweite Phase ($t > t^*$) ist dadurch gekennzeichnet, dass das System, trotz Parameterstörungen, im Gleitzustand gehalten wird.

II. 3. 3. Reglerentwurf

In diesem Abschnitt werden die eigentlichen Regler mit variabler Struktur (RVS) eingeführt. Die ersten beiden Regler sind für Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 0, 1 und 2 geeignet. Für Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 3 wird ein dritter Regler vorgeschlagen.

Zusätzlich werden in diesem Abschnitt im Satz 6 drei wichtige Beziehungen bewiesen, welche in den folgenden Abschnitten benötigt werden.

Der erste untersuchte RVS ist durch die Gleichung (II.3.3.1) definiert :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= - \mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) - \mathbf{D} \mathbf{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)| \\ \mathbf{D} &= \text{diag}(d_i) ; \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{II.3.3.1})$$

$$\mathbf{sign}^T(\mathbf{s}(t)) = [\text{sign}(s_1(t)), \text{sign}(s_2(t)), \dots, \text{sign}(s_m(t))]$$

$$\text{sign}(s_1(t)) = \begin{cases} 1 & \text{für } s_1(t) > 0 \\ 0 & \text{für } s_1(t) = 0 \\ -1 & \text{für } s_1(t) < 0 \end{cases}$$

Dieser RVS besteht im wesentlichen aus zwei Teilen. Der lineare Term stellt eine Zustandsrückführung dar, wobei die Rückföhrfaktoren durch die gewünschte Dynamik (Matrix \mathbf{C}) und durch die nominale Systemmatrix \mathbf{A}_0 gegeben sind. Der nichtlineare Term besteht aus drei Faktoren. Die Norm des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ kann irgendeine Norm in \mathfrak{R}^n sein (z.B. die Euklidische Länge). Der Kolonnenvektor $\mathbf{sign}(\mathbf{s}(t))$ hat m Komponenten, welche durch das Vorzeichen der Komponenten des Vektors $\mathbf{s}(t)$ gegeben sind. Die quadratische Reglerverstärkungsmatrix \mathbf{D} ist diagonal.

Die Begründung zu der Zweiteilung des Reglers wird in Abschnitt (II.3.6) gegeben werden. Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, dass der Regler (II.3.3.1), der eine besonders einfache Struktur besitzt, in gewissen Fällen zu unnötig konservativen Stabilitätskriterien föhrt. Dies ist dann der Fall, wenn bekannt ist, dass die Störung $\delta\mathbf{A}(t)$ spärlich besetzt ist. In diesem Fall ist es sinnvoller, direkt die einzelnen Komponenten der Störungsmatrix zu bekämpfen.

Der Regler (II.3.3.2) besitzt eine Struktur, welche diese Aufgabe zu erfüllen vermag :

$$\mathbf{u}(t) = - \mathbf{CA}_0 \mathbf{x}(t) - \Delta(t) \text{sign}(\mathbf{s}(t)) \quad (\text{II.3.3.2})$$

$$\Delta(t) = \text{diag}(\Delta_1(t)) \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^n d_{1j} |x_j(t)|$$

Der lineare Teil bleibt gleich wie beim Regler (II.3.3.1). Die Struktur des nichtlinearen Teils hingegen ist deutlich von derjenigen des Reglers (II.3.3.1) verschieden (die Definition des Vektors $\text{sign}(\mathbf{s}(t))$ bleibt gleich).

Man beachte, dass nun statt nur m , $n \cdot m$ Regelverstärkungen zu bestimmen sind. Diese zusätzlichen Freiheitsgrade werden im nächsten Abschnitt dazu benutzt werden, die nichttrivialen Elemente der Störungsmatrix $\delta\mathbf{A}(t)$ gezielt bekämpfen zu können.

Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, muss man für Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 3 einen speziellen Regler einführen. Dieser RVS ist durch die Gleichung (II.3.3.3) gegeben :

$$\mathbf{u}(t) = - \mathbf{CA}_0 \mathbf{x}(t) - d \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)| \quad (\text{II.3.3.3})$$

Der Regler (II.3.3.3) entspricht im wesentlichen dem Regler (II.3.3.1), mit dem einzigen Unterschied, dass nun die Regelverstärkung durch einen einzigen Skalar definiert wird.

Zum Abschluss dieses Kapitels werden im Satz 6 noch drei wichtige Beziehungen bewiesen

Satz 6 :

Ideale Systeme in Block-Begleitform erfüllen immer die folgenden Gleichungen :

1. $\mathbf{CB}_0 = \mathbf{I}_m$
2. $\mathbf{C}\delta\mathbf{B}(t) = \mathbf{R}_B(t)$
3. $(\mathbf{I} - \mathbf{B}_0\mathbf{C})\delta\mathbf{A}(t) = \mathbf{0}$

Beweis des Satzes 6 :

Die erste Behauptung ist unmittelbar aus der Definition der beiden Matrizen C und B_0 einsehbar.

Die zweite Behauptung folgt aus der Rangbedingung (II.1.2.3), da in diesem Fall die Aufspaltung (II.2.2.3) möglich ist :

$$\begin{aligned}\delta B(t) &= B_0 R_B(t) \\ \Rightarrow C \delta B(t) &= C B_0 R_B(t) = R_B(t)\end{aligned}$$

Dank der Annahme (II.1.2.3) kann auch die Matrix $\delta A(t)$ analog zur Matrix $\delta B(t)$ aufgespalten werden :

$$\begin{aligned}\delta A(t) &= B_0 R_A(t) \\ \Rightarrow (I - B_0 C) \delta A(t) &= B_0 R_A(t) - B_0 C B_0 R_A(t) \\ &= B_0 R_A(t) - B_0 R_A(t) = 0\end{aligned}$$

EdB.

Bemerkung :

Die singuläre Matrix $(I - B_0 C)$ spielt eine wichtige Rolle in vielen Überlegungen dieser Arbeit. Für sie wird deshalb ein spezielles Symbol eingeführt:

Definition : $\Pi = (I - B_0 C)$; $\text{Rang}[\Pi] = n - m$ (II.3.3.4)

Die Matrix Π ist eine Projektion, d.h. sie erfüllt die Gleichung $\Pi^2 = \Pi$. Dies kann mit Hilfe von Satz 6 gezeigt werden :

$$\begin{aligned}\Pi^2 &= (I - B_0 C)(I - B_0 C) = I - 2 B_0 C + B_0 C B_0 C \\ &= I - 2 B_0 C + B_0 C = I - B_0 C = \Pi\end{aligned}$$

Geometrisch kann Π als Projektion auf die m Gleit-Hyperebenen interpretiert werden. Der Kern (Nullraum oder die "Projektionsrichtung") der Projektion Π wird durch den Teilraum gebildet, der durch den p_1 -ten, p_2 -ten, usw. bis zum p_m -ten Basisvektor im kanonischen Koordinatensystem aufgespannt wird. Im Original-Koordinatensystem wird dieser Raum durch die p_1 -te, ... p_m -te Kolonne der Matrix T aufgespannt.

II.3.4. Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes

In diesem Abschnitt werden hinreichende Bedingungen für die Reglerverstärkung gesucht, welche garantieren, dass der Gleitzustand, ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ erreicht wird und für alle Zeiten $t > t^*$ erhalten bleibt. Die dazu benötigte Zeitspanne $t^* - t_0$ muss nicht unbedingt endlich sein.

Das Vorgehen in diesem Abschnitt gliedert sich in vier Teile :

Zuerst werden einige Bemerkungen über das Hilfsmittel gemacht, mit welchem die Beweise geführt werden, .

Anschliessend werden Systeme von Typ 2 untersucht, welche mit Hilfe des Reglers (II.3.3.1) geregelt sind. Für diese wird eine ausführliche Stabilitätsanalyse durchgeführt. Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 1 und vom Typ 0 lassen sich als Spezialfälle des Typs 2 auffassen, so dass deren Stabilitätsbedingungen unmittelbar aus denjenigen für Typ 2 Systeme ableitbar sind.

Der dritte Teil dieses Abschnitts beschäftigt sich mit den Stabilitätsbedingungen von Systemen des Typs 2, welche mit dem Regler (II.3.3.2) geregelt sind. Wieder folgen daraus für Typ 0 und Typ 1 Systeme die entsprechenden Stabilitätsbedingungen.

Zum Schluss dieses Abschnitts werden Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 3 analysiert.

Man beachte, dass in diesem Abschnitt nur die Frage untersucht wird, ob das System (II.1.1.1) durch den betrachteten Regler in den Gleitzustand übergeführt und dort gehalten wird. Das eigentliche Verhalten des Systems im Gleitzustand wird erst im nächsten Abschnitt behandelt.

Beweis-Hilfsmittel

Im folgenden wird unter einer "asymptotisch stabilen Punktmenge M " eine Menge von Punkten verstanden, für welche gilt :

1. $\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{x}(t) \in M \quad t_0 \leq t^* \leq \infty$
2. falls $t^* < \infty$, dann gilt $\mathbf{x}(t) \in M$ für alle $t^* < t \leq \infty$

Falls $M = \{\mathbf{x}(t): \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}\}$ dann ist das System für alle $t > t^*$ im Gleitzustand. Die Zeit t^* wird als Treffzeit bezeichnet.

Der Beweis, dass die Mannigfaltigkeit $\mathbf{s}(t)=0$ eine asymptotisch stabile Punktmenge ist, wird mit einer Methode geführt, die eine Variante des Ljapunow'schen Verfahrens ist [5]. Im Unterschied zu diesem wird nicht die Stabilität eines einzelnen Punktes, sondern die Stabilität einer Punktmenge betrachtet. Die eingeführte "Ljapunow-Funktion" wird deshalb nicht mehr im ganzen Zustandsraum, sondern nur noch ausserhalb der betrachteten Punktmenge positiv definit angesetzt.

Die folgenden Ueberlegungen werden an Systemen mit nur einem Eingangskanal ($m=1$) eingeführt. Die Erweiterung auf beliebige Systemordnungen stellt keine Schwierigkeiten dar.

Die hier benutzte Ljapunow-Funktion $v(t)$ ist folgendermassen definiert :

$$v(t) = |\mathbf{s}(t)| \quad (\text{II.3.4.1})$$

Diese Funktion ist, ausser auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{s}(t) = 0$ positiv definit (man beachte, dass $\mathbf{s}(t)$ im Falle $m=1$ ein Skalar ist).

Es sind nun Bedingungen für die Reglerverstärkung gesucht, welche garantieren, dass die zeitliche Ableitung von $v(t)$ überall im Zustandsraum (ausser auf $v(t) = 0$) negativ definit ist. Falls dies der Fall ist, muss die Funktion $v(t)$ längs jeder Trajektorie von $\mathbf{x}(t)$ abnehmen. Damit ist sichergestellt, dass der Zustand gegen die Mannigfaltigkeit strebt.

In Bild II.3.4.1 ist für ein System 2. Ordnung eine geometrische Interpretation dieser Grundidee dargestellt.

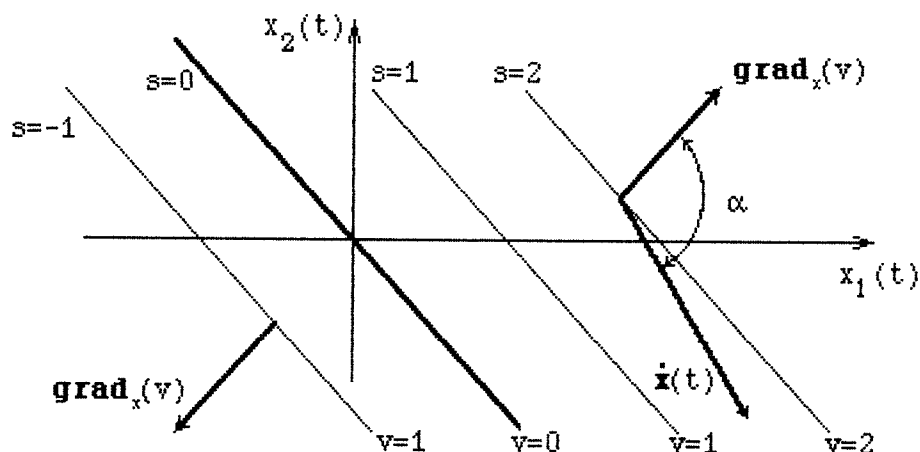


Bild II.3.4.1

Für die zeitliche Ableitung der Ljapunowfunktion gilt :

$$\dot{v}(t) = \mathbf{grad}_x(v(t))^T \dot{\mathbf{x}}(t)$$

Bei der Bildung des Gradienten muss das Vorzeichen von $s(t)$ beachtet werden :

$$\mathbf{grad}_x(v(t)) = \mathbf{c}^T \text{ für } s(t) > 0 \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{grad}_x(v(t)) = -\mathbf{c}^T \text{ für } s(t) < 0 \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{grad}_x(v(t)) = \mathbf{0} \text{ für } s(t) = 0$$

Der Gradient an der Stelle $s(t)=0$ ist eigentlich nicht definiert. Er wird irgendwo zwischen den beiden wohldefinierten Werten für $s(t) \neq 0$ liegen. Es ist deshalb sicher vernünftig den "Mittelwert" dieser beiden Gradienten zu nehmen, der dem Nullvektor entspricht.

Man beachte, dass die Information über den Gradienten an der Stelle $s(t)=0$ nicht benötigt wird, da es für die Stabilität der Mannigfaltigkeit $s(t)=0$ unwichtig ist zu wissen, in welcher Richtung der Gradient zeigt, wenn $\mathbf{x}(t)$ bereits in der Mannigfaltigkeit enthalten ist. Damit kann eine kompakte Schreibweise für die zeitliche Ableitung von $v(t)$ angegeben werden :

$$\dot{v}(t) = \text{sign}(s) \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}}(t)$$

Falls die Ableitung von $v(t)$ überall negativ ist, so bedeutet das, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und der Vektor $\mathbf{grad}_x(v)$ einen Winkel $\alpha > \pi/2$ einschliessen (siehe Bild II.3.4.1). Dann ist aber geometrisch klar, dass der Zustandspunkt gegen die Gleitebene streben muss.

Für Systeme mit mehreren Eingangskanälen ($m > 1$) lässt sich dieses Vorgehen komponentenweise durchführen, so dass in diesem Fall $v(t)$ gegeben ist durch die folgende Definition :

$$v(t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) ; \quad v_i(t) = |s_i(t)| \quad (\text{II.3.4.2})$$

Die hinreichende Stabilitätsbedingung lautet :

$$\dot{v}_i(t) = \text{sign}(s_i(t)) \mathbf{c}_i \dot{\mathbf{x}}(t) < 0$$

für alle $\mathbf{x}(t) \in \{ \mathbb{R}^n / \mathbf{c}_i \mathbf{x}(t) = 0 \}$ und alle $i=1, 2, \dots, m$

Mit dieser Bedingung wird erreicht, dass auf allen Hyperebenen gleichzeitig ein Gleitzustand angestrebt wird. In Bild II.3.4.2 wird eine mögliche Trajektorie für ein System mit $m=2$ gezeigt.

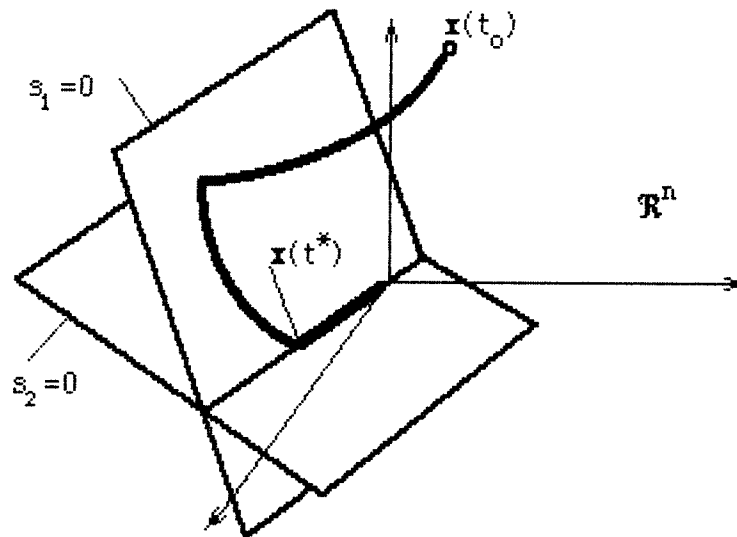


Bild II.3.4.2

Die Bedingung (II.3.4.2) ist nicht notwendig für das Auftreten eines stabilen Gleitzustandes. In Bild II.3.4.3 ist eine andere Möglichkeit, wie Gleiten auftreten kann, angegeben (auf diese Tatsache machte als erster Utkin in [1] aufmerksam).

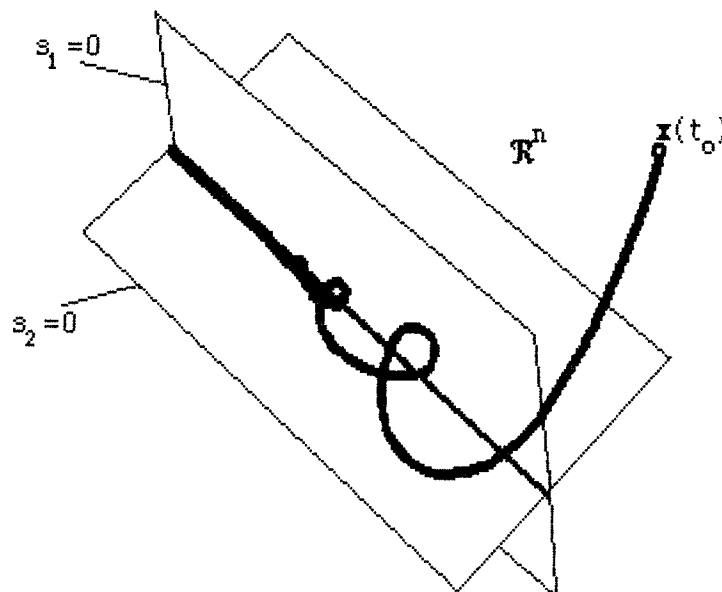


Bild II.3.4.3

In dieser Arbeit werden aber nur Gleitzustände wie sie in Bild II.3.4.2 dargestellt sind untersucht, da in diesem Fall einfache Stabilitätskriterien resultieren.

Einsatz des Reglers (II.3.3.1) :

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 2 :

Als Erstes werden die Summanden der Gleichung (II.3.4.2) etwas umgeformt :

$$\dot{v}_1(t) = \text{sign}(s_1(t)) \mathbf{c}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) = \text{sign}(s_1(t)) \dot{s}_1(t) \quad (\text{II.3.4.3})$$

Die zeitliche Ableitung des Vektors $\mathbf{s}(t)$ kann mit Hilfe der Gleichungen (II.1.1.1), (II.3.2.1) und (II.3.3.1) gefunden werden :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)]\mathbf{x}(t) \\ &\quad - \mathbf{C} [\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)] [\mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)|] \end{aligned}$$

Spaltet man die Störung $\delta\mathbf{B}(t)$ gemäss (II.2.2.3) auf und benutzt man die im Satz 6 angegebenen Beziehungen, so lässt sich diese Gleichung vereinfachen :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \delta\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) - \mathbf{D} \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)| \\ &\quad - \mathbf{R}_B(t) \mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) - \mathbf{R}_B(t) \mathbf{D} \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{s}}(t) = [\mathbf{C} \delta\mathbf{A}(t) - \mathbf{R}_B(t) \mathbf{C} \mathbf{A}_0] \mathbf{x}(t) - [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)] \mathbf{D} \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)|$$

(II.3.4.4)

Der Bequemlichkeit halber wird eine neue Matrix \mathbf{A}° definiert :

$$\mathbf{A}^\circ = \mathbf{C} \mathbf{A}_0 \quad ; \quad [\mathbf{A}^\circ]_i = \mathbf{a}^\circ_i \quad i\text{-te Zeile von } \mathbf{A}^\circ$$

Weiter ist aus der Form der beiden Matrizen $\delta\mathbf{A}(t)$ und \mathbf{C} sofort ersichtlich, dass die folgende Gleichung immer erfüllt ist :

$$[\mathbf{C} \delta\mathbf{A}(t)]_i = [\delta\mathbf{A}(t)]_i = \delta\mathbf{a}_i(t) \quad i\text{-te Zeile von } \delta\mathbf{A}(t) \quad (\text{II.3.4.5})$$

Gemäss Voraussetzung ist die Eingangsstörung $\delta\mathbf{B}(t)$ vom Typ 2. Deswegen hat die Störung $\mathbf{R}_B(t)$ eine obere Dreiecksform. Aus diesem Grunde kann nur $\text{sign}(s_m(t))$ die m -te Komponente von $\dot{\mathbf{s}}(t)$ beeinflussen. Benutzt man die oben eingeführte Definition und die Gleichung (II.3.4.4) so findet man :

$$\dot{s}_m(t) = [\delta\mathbf{a}_m(t) - r_{B,m m}(t) \mathbf{a}^\circ_m] \mathbf{x}(t) - [1 + r_{B,m m}(t)] d_m \text{sign}(s_m(t)) |\mathbf{x}(t)|$$

Setzt man diese Gleichung in (II.3.4.3) ein, so erhält man :

$$\begin{aligned} \dot{v}_m(t) &= \text{sign}(s_m(t)) [\delta\mathbf{a}_m(t) - r_{B,m m}(t) \mathbf{a}^\circ_m] \mathbf{x}(t) \\ &\quad - [1 + r_{B,m m}(t)] d_m |\mathbf{x}(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.3.4.6})$$

Aus dieser Gleichung kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung eine hinreichende Bedingung für d_m gefunden werden, welche garantiert, dass $\dot{v}_m(t)$, im oben angegebenen Sinn negativ definit ist :

$$\dot{v}_m(t) \leq |\delta a_m(t) - r_{B,m m}(t) a_m^0| |x(t)| - [1 + r_{B,m m}(t)] d_m |x(t)|$$

Definition: $\eta_m(t) = |\delta a_m(t) - r_{B,m m}(t) a_m^0|$

$$\zeta_m(t) = 1 + r_{B,m m}(t)$$

Stabilitätsbedingung :

$$d_m > \max_t \{ \eta_m(t) / \zeta_m(t) \} \quad (\text{II.3.4.7})$$

Falls d_m die Ungleichung (II.3.4.7) erfüllt, muss $\dot{v}_m(t)$ kleiner Null sein. Die Annahme (II.2.3.1) garantiert, dass d_m existiert. Mit Hilfe der Abschätzung (II.1.1.2) kann der Wert von d_m berechnet werden.

Die Bestimmung einer hinreichenden Regelverstärkung d_{m-1} verläuft völlig analog. Da die Störung $R_B(t)$ in der $(m-1)$ -ten Zeile ein ausserdiagonales Element besitzt, muss zusätzlich der Einfluss von d_m und von a_m^0 kompensiert werden.

Aus (II.3.4.4) folgt :

$$\begin{aligned} \dot{s}_{m-1}(t) = & [\delta a_{m-1}(t) - r_{B,m-1 m-1}(t) a_{m-1}^0 - r_{B,m-1 m}(t) a_m^0] x(t) \\ & - [1 + r_{B,m-1 m-1}(t)] d_{m-1} \text{sign}(s_{m-1}(t)) |x(t)| \\ & - r_{B,m-1 m}(t) d_m \text{sign}(s_m(t)) |x(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.3.4.8})$$

Berechnet man aus (II.3.4.8) und (II.3.4.3) die Ableitung von $v(t)$ und verlangt man wieder, dass $\dot{v}(t)$ immer kleiner als Null ist, so findet man die folgende hinreichende Bedingung für d_{m-1} :

Definition :

$$\eta_{m-1}(t) = |\delta a_{m-1}(t) - r_{B,m-1 m-1}(t) a_{m-1}^0 - r_{B,m-1 m}(t) a_m^0| + |r_{B,m-1 m}(t)| d_m$$

$$\zeta_{m-1}(t) = 1 + r_{B,m-1 m-1}(t)$$

Stabilitätsbedingung :

$$d_{m-1} > \max_t \{ \eta_{m-1}(t) / \zeta_{m-1}(t) \} \quad (\text{II.3.4.9})$$

Wieder ist die Existenz von d_{m-1} durch die Annahme (II.2.3.1) gesichert. Aus der Kenntnis der Variationsgrenzen und aus Gleichung (II.3.4.7) für d_m kann der Wert von d_{m-1} explizit berechnet werden.

Dieses Verfahren kann ohne weiteres auf den (m-i)-ten Fall erweitert werden. Die Zwischenschritte sind wieder gegeben durch :

1. Bestimmen von $\dot{s}_{m-i}(t)$:

Die Ableitung der (m-i)-ten Komponente des Schaltvektors ist gegeben durch die Gleichung (II.3.4.10) :

$$\begin{aligned} \dot{s}_{m-i}(t) = & [\delta a_{m-i}(t) - \sum_{j=0}^i \{ r_{B,m-i-m-j}(t) a_{m-j}^0 \}] \mathbf{x}(t) \\ & - \sum_{j=0}^{i-1} \{ r_{B,m-i-m-j}(t) d_{m-j} \operatorname{sign}(s_{m-j}(t)) \} |\mathbf{x}(t)| \\ & - (1 + r_{B,m-i-m-1}(t)) d_{m-1} \operatorname{sign}(s_{m-1}(t)) |\mathbf{x}(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.3.4.10})$$

2. Bestimmen von $\dot{v}_{m-i}(t) = \operatorname{sign}(s_{m-i}(t)) \dot{s}_{m-i}(t)$
3. Obere Schranke für $\dot{v}_{m-i}(t)$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung bestimmen
4. Wahl von d_{m-i} , so dass auch im schlechtesten Fall $\dot{v}_{m-i}(t) < 0$ garantiert ist, wobei die Reglerverstärkungen d_{m-j} ($j < i$) bereits bekannt sind.

Definition :

$$\eta_{m-i}(t) = \left| \delta a_{m-i}(t) - \sum_{j=0}^i r_{B,m-i-m-j}(t) a_{m-j}^0 \right| + \sum_{j=0}^{i-1} |r_{B,m-i-m-j}(t)| d_{m-j}$$

$$\zeta_{m-i}(t) = 1 + r_{B,m-i-m-1}(t)$$

Stabilitätsbedingung (II.3.4.11) :

$$d_{m-i} > \max_t \{ \eta_{m-i}(t) / \zeta_{m-i}(t) \} \quad \text{für alle } i=0, \dots, m-1 \quad (\text{II.3.4.11})$$

Damit kann der zentrale Stabilitätssatz 7 formuliert werden.

Satz 7 :

Falls die Strecke (II.1.1.1) folgende Bedingungen erfüllt

1. (II.1.1.1) gehört zu der Klasse der idealen Systeme, d.h. alle Annahmen des Abschnitts II.1.2 sind erfüllt
2. die Eingangsstörung ist vom Typ 2 und erfüllt die Bedingung (II.2.3.1)

und falls alle Verstärkungsfaktoren des Reglers (II.3.3.1) die Bedingungen (II.3.4.11) erfüllen, so ist für das geschlossene System die Punktmenge definiert durch :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

asymptotisch stabil. Mit anderen Worten, der Gleitzustand wird (mindestens asymptotisch) immer erreicht werden und, falls t^* endlich ist, für alle Zeiten $t > t^*$ erhalten bleiben.

Beweis von Satz 7 :

Der Beweis ist im wesentlichen nur eine Zusammenfassung der oben dargestellten Ideen.

- Feststellungen :
1. Falls die Eingangsstörung $\delta\mathbf{B}(t)$ die Bedingung (II.2.3.1) erfüllt, existieren m Regelverstärkungen d_i , welche die Bedingung (II.3.4.11) erfüllen.
 2. Falls alle Regelverstärkungen d_i die Bedingung (II.3.4.11) erfüllen, ist die Ableitung der Ljapunow-Funktion (II.3.4.2) überall ausser auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{s}(t)=\mathbf{0}$ negativ.
 3. Die Ljapunow-Funktion $v(t)$ selbst ist überall im Zustandsraum ausser auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{s}(t)=\mathbf{0}$ positiv.

Konsequenz : Der Betrag von $v(t)$ muss längs jeder Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ abnehmen. Damit ist sichergestellt, dass die Menge $\mathbf{s}(t)=\mathbf{0}$ (mindestens asymptotisch) erreicht wird. Falls für einen gewissen Zeitpunkt t^* der Zustand in der Mannigfaltigkeit enthalten ist, kann er nicht mehr daraus entweichen, da $v(t)$ ein Minimum bei $\mathbf{s}(t)=\mathbf{0}$ besitzt und der Betrag von $v(t)$ ausserhalb der Mannigfaltigkeit nur abnehmen kann.

EdB.

Bemerkungen :

Bei der Berechnung der Regelfaktoren muss die angegebene Reihenfolge eingehalten werden. Die Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 2 besitzen demzufolge eine inhärente hierarchische Struktur. Man beachte die entscheidende Rolle der Steuerbarkeitsindices, die nach Voraussetzung geordnet sind.

Die Treffzeit t^* , also diejenige Zeit, bei welcher der Zustandspunkt auf die letzte Gleit-Hyperebene auftrifft, muss nicht endlich sein (asymptotisches Erreichen der Mannigfaltigkeit). Man kann aber Schranken für die Reglerverstärkungen angeben, welche ein endliches t^* garantieren (siehe Abschnitt II.3.7).

Die Reihenfolge, in welcher die Gleit-Hyperebenen erreicht werden, ist unbestimmt, insbesondere ist nicht gesagt, dass t^* diejenige Zeit ist, bei welcher zum ersten Mal $s_1(t)=0$ gilt. Man beachte den Vorteil dieser Betrachtungsweise gegenüber dem bekannten "hierarchical-control" Prinzip von Utkin [1], bei welchem die Reihenfolge des Auftreffens im voraus bekannt sein muss.

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 1:

Aus Satz 7 lassen sich unmittelbar die entsprechenden Stabilitätskriterien für Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 1 herleiten. Dazu muss man sich nur wieder in Erinnerung rufen, dass Typ 1 Systeme eine Diagonale Störungsmatrix $R_B(t)$ besitzen und demzufolge die Gleichung (II.3.4.6) nicht nur für die m -te, sondern für alle Komponenten der Ljapunow-Funktion (II.3.4.2) gilt. Damit findet man die hinreichenden Bedingungen (II.3.4.12) für die Regelverstärkungen d_i , welche garantieren, dass die Ableitung von $v(t)$ im oben angegebenen Sinn negativ definit ist :

Definition:
$$\eta_i(t) = |\delta a_i(t) - r_{B,ii}(t) a^0_i|$$

$$\zeta_i(t) = 1 + r_{B,ii}(t)$$

Stabilitätsbedingung:

$$d_i > \max_t \{ \eta_i(t) / \zeta_i(t) \} \text{ für alle } i=1, \dots, m \quad (\text{II.3.4.12})$$

Falls alle Regelverstärkungen diese Bedingung erfüllen, ist die Punktmenge $s(t)=0$ asymptotisch stabil.

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 0 :

Für Systeme ohne Eingangsstörungen ($\delta B(t)=0$), werden die Stabilitätskriterien noch einfacher. Die Regelverstärkungen haben in diesem Fall nur noch den Bedingungen (II.3.4.13) zu genügen :

$$d_i > \max_t \{ |\delta a_i(t)| \} \text{ für alle } i=1, \dots, m \quad (\text{II.3.4.13})$$

In dieser Darstellung wird der Nachteil des Reglers (II.3.3.1) offensichtlich. Falls nämlich nur wenige genau bekannte Elemente des Zeilenvektors $\delta a_i(t)$ ungleich Null sind, ist es eigentlich unnötig den Betrag des gesamten Zustandsvektors zurückzuführen, da die Störungen sich nur dann bemerkbar machen können, wenn die entsprechenden Richtungen angeregt sind.

Einsatz des Reglers (II.3.3.2) :

Der oben erwähnte Nachteil kann behoben werden, indem der aufwendigere Regler (II.3.3.2) verwendet wird. Die Herleitung der Stabilitätskriterien für diesen Regler ist völlig analog zu derjenigen des Reglers (II.3.3.1). Aus diesem Grunde werden hier nur die Stabilitätskriterien explizit angegeben.

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 2 :

Definition :

$$v_{m-1,j}(t) = |\delta a_{m-1,j}(t) - \sum_{k=0}^i r_{B,m-1m-k}(t) a_{m-k,j}^0| + \sum_{k=0}^{i-1} |r_{B,m-1m-k}(t) d_{m-k,j}|$$

$$v_{m-1}(t) = 1 + r_{B,m-1m-1}(t)$$

Die Stabilitätskriterien für die Verstärkungsfaktoren des Reglers (II.3.3.2) bei Systemen mit Eingangsstörungen vom Typ 2 lauten :

$$d_{m-1,j} > \max_t \{ v_{m-1,j}(t) / v_{m-1}(t) \} \quad (\text{II.3.4.14})$$

für alle $i=0, \dots, m-1$ und alle $j=1, \dots, n$

Man beachte, dass nun $n \cdot m$ Regelverstärkungen zu bestimmen sind. Die Reihenfolge der Berechnung ist analog zu derjenigen des Reglers (II.3.3.1), d.h. als Erste müssen die Verstärkungen $d_{m,j}$ ($j=1, \dots, n$), anschliessend $d_{m-1,j}$ ($j=1, \dots, n$) usw. berechnet werden.

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 1 :

Für Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 1 sind die beiden Grössen $v_{1,j}(t)$ und $v_1(t)$ einfacher aufgebaut :

Definition :

$$v_{1,j}(t) = |\delta a_{1,j}(t) - r_{B,11}(t) a_{1,j}^0|$$

$$v_1(t) = 1 + r_{B,11}(t)$$

Stabilitätsbedingung (II.3.4.15):

$$d_{1j} > \max_t \{ v_{1,j}(t) / v_1(t) \} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m ; j=1, \dots, n \quad (\text{II.3.4.15})$$

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 0 :

Falls das System (II.1.1.1) vom Typ 0 ist (keine Eingangsstörungen) wird die Stabilitätsbedingung noch einfacher :

$$d_{ij} > \max_t |\delta a_{i,j}(t)| \quad \text{für alle } i=1, \dots, m ; j=1, \dots, n \quad (\text{II.3.4.16})$$

Wie man aus der Stabilitätsbedingung (II.3.4.16) ersieht, ist der Regler (II.3.4.2) in der Lage auf einzelne Komponenten der Störung $\delta \mathbf{A}(t)$ zu reagieren.

Bemerkung :

Aus den Bedingungen (II.3.4.14/15/16) ersieht man, dass die Vorteile des Reglers (II.3.3.2) nur bei Systemen ohne Eingangsstörungen bemerkbar sind. Deswegen, und weil die Struktur des Reglers (II.3.3.1) einfacher zu realisieren ist als diejenige von (II.3.3.2), wird man nur in begründeten Fällen auf den Letzteren zurückgreifen.

Ein weiterer Vorteil des Reglers (II.3.3.1) besteht darin, dass er für die Untersuchung realer Systeme (siehe Kapitel III) besser geeignet ist.

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 3 :

Im letzten Teil dieses Abschnitts werden Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 3 untersucht. Dabei wird die gleiche Methode verwendet, wie sie bei Systemen mit Eingangsstörungen vom Typ 2 benutzt wurde.

Prinzipiell ist es auch in diesem Fall möglich die Regler (II.3.3.1/2) anzuwenden. Tatsächlich wird man dann aber ein Ungleichungssystem für die Reglerverstärkungen zu lösen haben. Die Existenz einer Lösung kann dann aber nur in wenigen Fällen analytisch gesichert werden.

Eine andere Möglichkeit, Systeme vom Typ 3 zu regeln, wurde im Abschnitt II.3.3 vorgeschlagen. Der entsprechende Regler (II.3.3.3) ist eine vereinfachte Version des Reglers (II.3.3.1). Für den Regler (II.3.3.3) kann ein einfaches Kriterium angegeben werden, welches garantiert, dass eine stabilisierende Reglerverstärkung existiert.

Ausgehend vom System (II.1.1.1), dem Regler (II.3.3.3) und der Definition (II.3.2.1) kann für die Ableitung des Schaltvektors die folgende Gleichung gefunden werden :

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = [\mathbf{C}\delta \mathbf{A}(t) - \mathbf{R}_B(t)\mathbf{A}^0]\mathbf{x}(t) - d [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]\mathbf{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{x}(t)| \quad (\text{II.3.4.17})$$

Benutzt man die in Gleichung (II.3.4.2) angegebene Ljapunow-Funktion, so kann mit Gleichung (II.3.4.17) die Ableitung der einzelnen Summanden von $v(t)$ gefunden werden:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) = & \text{sign}(s_i(t)) [\delta a_i(t) - \sum_{j=1}^m \{ r_{B,ij}(t) a^o_j \}] x(t) \\ & - d [1 + r_{B,ii}(t) + \sum_{j=1}^m \{ r_{B,ij}(t) \text{sign}(s_i(t)s_j(t)) \}] |x(t)| \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, m$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung kann eine hinreichende Bedingung für die Reglerverstärkung d gefunden werden, welche garantiert, dass die Ableitung der Ljapunow-Funktion überall (ausser auf $s(t)=0$) negativ ist :

Definition :

$$v_i(t) = \left| \delta a_i(t) - \sum_{j=1}^m \{ r_{B,ij}(t) a^o_j \} \right|$$

$$\eta_i(t) = 1 + r_{B,ii}(t) - \sum_{j=1}^m |r_{B,ij}(t)|$$

Stabilitätsbedingung (II.3.4.18) :

$$d > \max_{t,i} \{ v_i(t) / \eta_i(t) \} ; \quad i=1, 2, \dots, m \quad (\text{II.3.4.18})$$

Falls d die Bedingung (II.3.4.18) erfüllt, ist die Menge definiert durch $s(t)=0$ asymptotisch stabil. Dies kann man mit der gleichen Argumentation zeigen, wie sie in Satz 7 verwendet wurde. Man beachte, dass nun das Maximum über zwei Variablen (Index i und Zeit t) zu bestimmen ist.

Die hinreichende Bedingung für die Existenz von d ist durch die Annahme (II.2.3.2) (diagonale Dominanz der relativen Störungsmatrix $R_B(t)$) gesichert.

Zusammenfassung Abschnitt II.3.4 :

In diesem Abschnitt wurde die Frage beantwortet, welchen Bedingungen die Reglerverstärkungen zu gehorchen haben, damit man garantieren kann, dass der Gleitzustand (zumindest asymptotisch) erreicht wird.

Für Systeme vom Typ 2, 1 und 0 wurde für beide Reglertypen (II.3.3.1/2) gezeigt, dass falls die in Abschnitt II.1.2 und II.2.3 getroffenen Annahmen erfüllt sind, immer stabilisierende Reglerverstärkungen existieren. Die Vorteile des Reglers (II.3.3.2) treten nur bei Systemen ohne Eingangsstörungen deutlich zu Tage, so dass man i.a. den Regler (II.3.3.1) vorziehen wird.

Für Systeme vom Typ 3 wurde gezeigt, dass das Stabilisierungsproblem mit dem Regler (II.3.3.3) gelöst werden kann, falls die zusätzliche Bedingung (II.2.3.2) erfüllt ist.

II. 3. 5. Systemverhalten im Gleitzustand

In diesem Abschnitt wird die Frage nach dem Systemverhalten für alle Zeiten $t > t^*$ beantwortet, d.h. es wird vorausgesetzt, dass das System bereits im Gleitzustand ist.

Es wird sich herausstellen, dass es keine Rolle spielt, welcher Regler verwendet wurde, um den Gleitzustand zu erhalten. Ebenso gelten die untenstehenden Ausführungen für alle Typen von Eingangsstörungen des Systems (II.1.1.1).

Im ersten Teil dieses Abschnitts wird gezeigt, dass im Gleitzustand der Einfluss der beiden Parameterstörungen $\delta A(t)$ und $\delta B(t)$ vollständig verschwindet.

Im zweiten Teil wird gezeigt, dass $(n-m)$ Eigenwerte des gleitenden Systems identisch sind mit denjenigen, die bei der Konstruktion der Matrix C , gemäss Abschnitt (II.3.2) verwendet wurden. Zusätzlich wird sich herausstellen, dass die Systemordnung scheinbar um m Freiheitsgrade reduziert wird.

Satz 8 :

Falls das System (II.1.1.1) durch einen Regler (II.3.3.1/2/3) im Gleitzustand gehalten wird, verschwindet der Einfluss der Parameterstörungen $\delta A(t)$ und $\delta B(t)$ vollständig.

Beweis von Satz 8 :

Der wesentliche Gedanke dieses Beweises besteht darin, statt des realen, geregelten Systems ein dazu äquivalentes System zu studieren [1] (in englischsprachigen Publikationen wird daher häufig die Bezeichnung "equivalent control" verwendet).

Falls das geregelte System perfekt gleitet, ist die Gleichung $s(t)=0$ für alle $t > t^*$ identisch erfüllt. Dann muss aber auch die erste zeitliche Ableitung von $s(t)$ verschwinden. Mit dieser Ueberlegung gelingt es, einen äquivalenten Eingangsvektor $u_{eq}(t)$ zu bestimmen :

$$\begin{aligned} s(t) &= Cx_{eq}(t) = 0 \\ \Rightarrow \dot{s}(t) &= C\dot{x}_{eq}(t) \\ &= C[A_0 + \delta A(t)]x_{eq}(t) + C[B_0 + \delta B(t)]u_{eq}(t) = 0 \\ \Rightarrow u_{eq}(t) &= -\{C[B_0 + \delta B(t)]\}^{-1} C[A_0 + \delta A(t)]x_{eq}(t) \end{aligned} \quad (II.3.5.1)$$

Dieser Ausdruck kann vereinfacht werden (siehe Satz 6 und Aufspaltung (II.2.2.3)) :

$$\mathbf{u}_{\text{eq}}(t) = -[\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$$

Die Existenz der Inversen von $[\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]$ ist durch die Annahme (II.2.3.1) gesichert. Setzt man diesen Steuervektor in die Systemgleichung (II.1.1.1) ein, so erhält man :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) - [\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)] [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$$

Benutzt man die Aufspaltung (II.2.2.3) für die Eingangsstörung $\delta\mathbf{B}(t)$, so kann diese Gleichung wesentlich vereinfacht werden :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) - \mathbf{B}_0 [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)] [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) - \mathbf{B}_0 \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) + \mathbf{\Pi} \delta\mathbf{A}(t) \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$$

Im Satz 6 wurde gezeigt, dass folgende Gleichung immer erfüllt ist :

$$\mathbf{\Pi} \delta\mathbf{A}(t) = \mathbf{0}$$

Damit findet man die folgende Systemgleichung für das äquivalente System :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) = \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) \quad (\text{II.3.5.2})$$

Falls die Voraussetzungen des Abschnitts II.1.2 erfüllt sind, so verhält sich das ursprüngliche System (II.1.1.1) mit irgendeinem Regler (II.3.3.1/2/3) für alle Zeiten $t > t^*$ wie das durch die Differentialgleichung (II.3.5.2) definierte äquivalente zeitinvariante System. Insbesondere verschwindet der Einfluss der Parameterstörungen vollständig.

EdB.

Der zweite Teil dieses Abschnitts befasst sich mit den Eigenwerten des äquivalenten Systems.

Satz 9 :

Teil 1:

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}_{eq} sind gegeben durch die $(n-m)$ Eigenwerte λ_1 , welche bei der Konstruktion der Matrix \mathbf{C} verwendet wurden, plus m Eigenwerte λ_j , welche im Ursprung liegen.

Teil 2:

Im Gleitzustand wird die Ordnung des Systems (scheinbar) um m Freiheitsgrade vermindert, wobei das reduzierte System nur noch die vorgegebenen $n-m$ Eigenwerte besitzt.

Beweis von Satz 9 Teil 1 :

Untenstehend ist die allgemeine Struktur der Matrix Π gemäss Gleichung (II.3.3.4) angegeben :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \boxed{I_{q_1-1}} & & & \\ -\mathbf{v}_1 \rightarrow 0 & \dots & & \\ & & \boxed{I_{q_m-1}} & \\ & & & -\mathbf{v}_m \rightarrow 0 \end{bmatrix}$$

Alle nicht explizit definierten Elemente in Π sind wie immer gleich Null. Die Blöcke I_{dim} sind Identitätsmatrizen mit Dimension "dim" (die Zahlen q_i sind die Steuerbarkeitsindizes des betrachteten Systems gemäss Abschnitt II.2.2.1).

Die (q_i-1) -dimensionalen Zeilenvektoren \mathbf{v}_i werden aus der Matrix \mathbf{C} in der nachfolgend angegebenen Weise gebildet (siehe Abschnitt II.3.2 für die Definition der Zahlen α_{ij}) :

$$\mathbf{v}_i = \left[-\alpha_{i,0} \quad -\alpha_{i,1} \quad \dots \quad -\alpha_{i,q_i-2} \right] \quad \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{q_i-1} \quad (\text{II.3.5.3})$$

Multipliziert man Π mit der Matrix \mathbf{A}_o , welche ja in Block-Begleitform ist, so erhält man für die Matrix \mathbf{A}_{eq} folgende Struktur:

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} \boxed{Q_1} & & & \\ 0 \leftarrow \mathbf{v}_1 \leftarrow & \dots & & \\ & & \boxed{Q_m} & \\ & & & 0 \leftarrow \mathbf{v}_m \leftarrow \end{bmatrix}$$

Wieder sind alle nicht definierten Elemente gleich Null. Die Blöcke Q_i sind bereits im Abschnitt II.2.1 definiert worden.

1. Feststellung : Die Matrix \mathbf{A}_{eq} besitzt eine blockdiagonale Struktur (Blöcke gestrichelt umrandet)

Daraus folgt, dass die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}_{eq} durch die Eigenwerte der einzelnen Blöcke gegeben sind.

2. Feststellung : Die einzelnen Blöcke sind in Begleitform (Frobenius-Form) und die Koeffizienten der nichttrivialen Zeile sind im wesentlichen durch die negierten Elemente des Zeilenvektors χ_i gegeben (siehe Abschnitt II.3.2).

Bekanntlich sind die Elemente der nichttrivialen Zeile einer Begleitmatrix identisch mit den negierten Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der betreffenden Matrix. Da der erste Koeffizient der untersten Zeile gleich Null ist, kann in jedem Block ein Eigenwert $\lambda = 0$ abgespalten werden. Damit ist gezeigt, dass A_{eq} m Eigenwerte im Ursprung hat.

Der Rest der untersten Zeile des i -ten Blocks wird durch den Vektor v_i gebildet. Die Elemente dieses Vektors sind aber, gemäss Abschnitt II.3.2 die Koeffizienten des i -ten gewünschten charakteristischen Polynoms. Deswegen sind die restlichen Eigenwerte des i -ten Blockes mit denjenigen, die beim Entwurf der Matrix C verwendet wurden gleich.

Da diese Ueberlegung wieder für alle Blöcke gilt, müssen die restlichen $n-m$ Eigenwerte der Matrix A_{eq} mit den vorgegebenen Eigenwerten gleich sein.

EdB Teil 1.

An dieser Stelle wird eine weitere Koordinatentransformation eingeführt. Diese Transformation wird an einigen Stellen dieser Arbeit verwendet werden, insbesondere auch im Beweis des Teils 2 von Satz 9.

Die festgestellte Blockstruktur der Matrix A_{eq} erlaubt es, eine Aufspaltung des Zustandsvektors $x(t)$ in m unabhängige Teilzustände $x_i(t)$ vorzunehmen. Die Teilzustände $x_i(t)$ sind folgendermassen definiert (pro memoria : die Zahlen p_i sind die Partialsummen der Steuerbarkeitsindices) :

$$x_i(t) = [x_{p_{i-1}+1} \quad x_{p_{i-1}+2} \quad \dots \quad x_{p_i}] \quad x_i(t) \in \mathbb{R}^{q_i} \quad (\text{II.3.5.4})$$

Die betrachtete Transformation T_i gemäss (II.3.5.5) wird auf diesen Teilzustand angewendet (man beachte, dass die Inverse der Matrix T_i unmittelbar angegeben werden kann) :

$$T_i \phi_i(t) = x_i(t) \quad (\text{II.3.5.5})$$

$$T_i = \begin{bmatrix} \boxed{\phantom{I_{q_i-1}}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ I_{q_i-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{\phantom{I_{q_i-1}}} & 0 \\ \hline \underbrace{}_{-v_i} & 1 \end{bmatrix} \quad T_i^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\phantom{I_{q_i-1}}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ I_{q_i-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{\phantom{I_{q_i-1}}} & 0 \\ \hline \underbrace{}_{v_i} & 1 \end{bmatrix}$$

Natürlich kann die Definition (II.3.5.5) auf eine $n \times n$ Matrix \mathbf{T} erweitert werden, welche blockdiagonalförmig ist und den gesamten Zustandsvektor in der gewünschten Weise umformt. Die einzelnen Blöcke dieser Matrix sind dann durch die Matrizen \mathbf{T}_i gegeben.

Der i -te Block der Matrix \mathbf{A}_{eq} wird mit \mathbf{M}_i bezeichnet und hat die folgende Struktur :

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{N}_i & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\alpha_{i,0} & -\alpha_{i,1} & \dots & -\alpha_{i,q_i-2} & \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}$
 $\mathbf{N}_i \in \mathbb{R}^{(q_i-1) \times (q_i-1)}$

Wendet man die Transformation (II.3.5.5) auf $\mathbf{x}_i(t)$ an, so erhält man die neue Systemmatrix $\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{M}_i \mathbf{T}_i$, welche eine obere Block-Dreiecksform hat. Der untere Block ist skalar und besteht immer aus einem Element gleich Null.

$$\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{M}_i \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}$$

Beweis von Satz 9 Teil 2 :

Das im Gleitzustand geregelte i -te Subsystem, das im transformierten Koordinatensystem durch die Matrix $\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{M}_i \mathbf{T}_i$ beschrieben wird, hat folgende Struktur :

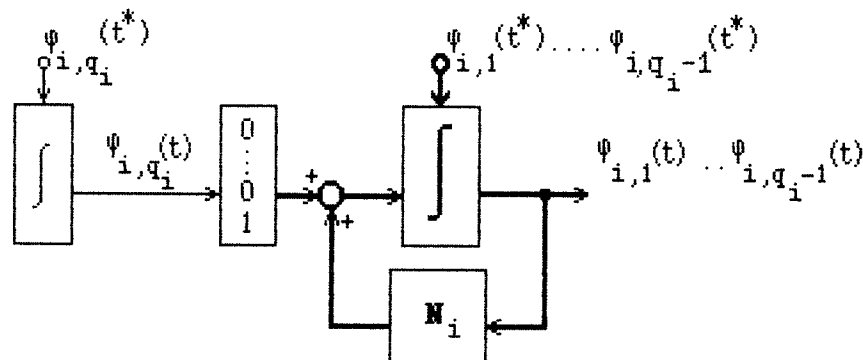


Bild II.3.5.1

Zusammenfassung II.3.5 :

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass der Einfluss der Parameterstörungen vollständig verschwindet, falls das System (II.1.1.1) durch irgendeinen Regler gemäss Abschnitt (II.3.3) im Gleitzustand gehalten wird. Der Einsatz von RVS führt im Gleitzustand zu einer absoluten Parameter-Robustheit.

Die Eigenwerte des gTMaxenden Regelsystems sind mit den in Abschnitt II.3.2 vorgegebenen Eigenwerten identisch.

Die Ordnung des gleitenden Regelsystems ist (scheinbar) um m Freiheitsgrade reduziert.

Alle diese Aussagen gelten nur für $t > t^*$. Solange das Regelsystem noch nicht im Gleitzustand ist, machen sich die Parameterschwankungen selbstverständlich noch bemerkbar.

II.3.6. Interpretationen, Bemerkungen

Bemerkung 1 :

Die erste Bemerkung betrifft die Matrix C , welche das Entwurfsziel repräsentiert (Eigenwertvorgabe). Im Abschnitt II.3.2 wurde darauf hingewiesen, dass die Zeilenvektoren von C im n -Dimensionalen Zustandsraum zueinander orthogonal sind. Dieser speziellen Wahl von C ist es zu verdanken, dass das äquivalente System in m unabhängige Teilblöcke aufgespalten ist.

Die Aufspaltung und die kanonische Systemdarstellung bewirken, dass das Eigenwertvorgabe-Problem einfach lösbar ist.

Bemerkung 2 :

Der Beweis der Sätze 8 und 9 wurde nicht am tatsächlichen System geführt, sondern an einem dazu äquivalenten. Diese beiden Systeme sind nur dann identisch, wenn die Umschaltung auf den m Gleit-Hyperebenen unendlich schnell erfolgen kann.

In einem realen Regelungssystem werden natürlich immer kleine Schaltverzögerungen vorkommen. Die Frage stellt sich deshalb, ob das reale System, falls die Schaltverzögerungen im Vergleich zur kleinsten Systemzeitkonstante klein sind, sich wenigstens annähernd wie das äquivalente System verhält?

Ein Maß für die Abweichung der realen Trajektorie $x(t)$ von der äquivalenten $x_{eq}(t)$ ist durch die Ljapunow-Funktion (II.3.4.2) gegeben (der Index "eq" bezeichnet das ideale Systemverhalten, wenn dieser Index fehlt, ist das reale Verhalten gemeint).

Falls die reale Trajektorie in der Nähe der äquivalenten bleibt, so gilt mit folgender Definition :

$$\Delta = m * \max_i \{ |s_i(t)| \} \quad t^* \leq t \leq \infty; \quad i=1, 2, \dots, m \quad (\text{II.3.6.1})$$

die Abschätzung $v(t) \leq \Delta =$ "klein" für alle $t^* \leq t \leq \infty$.

Satz 10 :

Falls der Realteil aller zur Konstruktion der Matrix \mathbf{C} benutzten Eigenwerte kleiner als Null ist, existiert für alle Zeiten $t > t^*$ eine positive Zahl h , so dass die folgende Abschätzung gilt :

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)| \leq h \Delta ; \quad h < \infty$$

Inbesondere gilt $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$.

Beweis des Satzes 10 :

Gleichung (II.3.5.2) beschreibt das äquivalente System :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$$

Falls in Gleichung (II.3.5.1) der Schaltvektor $\mathbf{s}(t)$ nicht mehr identisch verschwindet, so resultiert der folgende reale Eingangsvektor :

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]^{-1} \{ \mathbf{s}(t) - \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{A}(t)] \mathbf{x}(t) \}$$

und damit das folgende reale System :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{s}(t)$$

Wie diese Gleichung zeigt, ist auch das reale System in m Diagonal-Blöcke aufgespalten. Aus diesem Grunde ist es zulässig, sich auf einen einzelnen Block zu beschränken. Deshalb wird in diesem Beweis ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $m = 1$ ist :

$$\dot{x}(t) = A_{\text{eq}} x(t) + b_0 s(t)$$

Als nächster Schritt wird die Transformation (II.3.5.5) auf das äquivalente und auf das reale System angewendet. Das Blockschaltbild II.3.5.1 zeigt das äquivalente System. Gemäss Satz 9 spielt der isolierte Integrator für das äquivalente System keine Rolle. Nicht so aber für das reale System. Bei diesem wird nämlich über den Integrator die Ableitung der Schaltvariablen $s(t)$ eingespiessen (siehe Struktur der Matrix \mathbf{M}_1 im Abschnitt II.3.5).

Der Ableitungs- und der Integrationsoperator heben sich auf, so dass man das in Bild II.3.6.1 dargestellte reale System erhält :

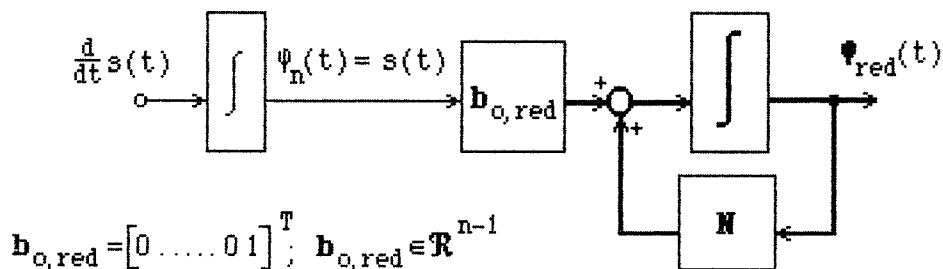


Bild II.3.6.1

Mit Hilfe der Transitionsmatrix $\Phi(t-t^*)$ können die Lösungen der beiden Systeme angegeben werden. Da die Matrix \mathbf{N} zeitinvariant ist, tritt nur die Zeitdifferenz $t-t^*$ als unabhängige Variable auf.

Für die äquivalente, bzw. reale Trajektorie findet man damit :

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{red,eq}}(t) &= \Phi(t-t^*) \Psi_{\text{red,eq}}(t^*) \\ \Psi_{\text{red}}(t) &= \Phi(t-t^*) \Psi_{\text{red}}(t^*) + \int_{t^*}^t \Phi(t-\sigma) \mathbf{b}_{\text{o,red}} s(\sigma) d\sigma\end{aligned}$$

Schätzt man die Norm für die Differenz $|\Psi_{\text{red}}(t) - \Psi_{\text{red,eq}}(t)|$ ab, so erhält man :

$$\begin{aligned}|\Psi_{\text{red}}(t) - \Psi_{\text{red,eq}}(t)| &\leq \|\Phi(t-t^*)\| |\Psi_{\text{red}}(t^*) - \Psi_{\text{red,eq}}(t^*)| \\ &\quad + \int_{t^*}^t \|\Phi(t-\sigma)\| \|\mathbf{b}_{\text{o,red}}\| |s(\sigma)| d\sigma \\ &\leq \|\Phi(t-t^*)\| |\Psi_{\text{red}}(t^*) - \Psi_{\text{red,eq}}(t^*)| \\ &\quad + \Delta \int_{t^*}^t \|\Phi(t-\sigma)\| d\sigma \|\mathbf{b}_{\text{o,red}}\|\end{aligned}$$

(II.3.6.2)

Der Betrag der Transitionsmatrix $\Phi(t-t^*)$ ist für alle Zeiten endlich, da die Matrix \mathbf{N} nach Voraussetzung asymptotisch stabil ist. Deshalb kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass zur Zeit $t=t^*$

$$|\Psi_{\text{red}}(t^*) - \Psi_{\text{red,eq}}(t^*)| = 0$$

gilt. Falls dies nicht der Fall ist, muss nur die Zahl Δ entsprechend angepasst werden. Ausserdem gilt für asymptotisch stabile Systeme immer, dass :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t-t^*)\| = 0$$

Deswegen ist auch die Existenz des Integrals in der Gleichung (II.3.6.2) gesichert. Damit ist aber bewiesen, dass für alle Zeiten die folgende Abschätzung korrekt ist :

$$|\varphi_{\text{red}}(t) - \varphi_{\text{red,eq}}(t)| \leq \eta \Delta$$

Die letzte Komponente des Vektors $\varphi(t)$ lässt sich einfach abschätzen :

$$|\varphi_n(t)| \leq \Delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi(t) - \varphi_{\text{eq}}(t)| \leq (\eta+1) \Delta$$

Mit Hilfe der Transformation \mathbf{T} (II.3.5.5) findet man die gesuchte Ungleichung :

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)| = |\mathbf{T} [\varphi(t) - \varphi_{\text{eq}}(t)]| \leq \|\mathbf{T}\| |\varphi(t) - \varphi_{\text{eq}}(t)|$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{eq}}(t)| \leq \|\mathbf{T}\| (\eta+1) \Delta = h \Delta$$

Da die Norm der Transformationsmatrix \mathbf{T} endlich ist, ist damit der Satz 10 bewiesen.

EdB.

Satz 10 besagt, dass für beliebige Nichtidealitäten (Hysteresen, Totzeiten etc.) sich im Grenzfall $\Delta \rightarrow 0$ die gleiche Systemantwort $\mathbf{x}_{\text{eq}}(t)$ ergibt. Diese Eigenschaft ist nicht a priori evident. In [1] hat Utkin ähnliche Fragestellungen untersucht und hat festgestellt, dass diese Aussage auch für nichtlineare Systeme gilt, solange der Steuervektor linear auf das System einwirkt.

Bemerkung 3 :

Alle Regler die im Abschnitt II.3.3 vorgestellt wurden, besitzen den gleichen linearen Term. Die Funktion dieses Terms wird an dieser Stelle genauer untersucht. Zu diesem Zweck wird angenommen, dass die Parameterstörungen vorderhand nicht aktiv sind. In diesem Falle kann der Schaltvektor $\mathbf{s}(t)$ als die Ausgangsgröße des fiktiven Systems (II.3.6.3) interpretiert werden :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{s}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{II.3.6.3}$$

Verwendet man in einem ersten Schritt nur den linearen Teil der vorgestellten Regler, so erhalten wir das folgende Regelsystem :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \hat{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{s}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}(t)$, der den nichtlinearen Teil der Regelung representiert, ist vorderhand noch nicht aktiv. Diese Aufspaltung des Reglers hat den Zweck, deutlich darzustellen, welche Aufgaben von den entsprechenden Teilen des RVS übernommen werden.

Da das partiell geschlossene System linear und zeitinvariant ist, kann die Lösung im Frequenzbereich durch Laplace-Transformation gefunden werden.

Die Uebertragungsmatrix zwischen $\hat{\mathbf{u}}(t)$ und $\mathbf{s}(t)$ ist gegeben durch :

$$\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{C} \{ \lambda \mathbf{I} - [\mathbf{I} - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}] \mathbf{A}_0 \}^{-1} \mathbf{B}_0 \quad (\text{II.3.6.4})$$

Klammert man die komplexe Frequenz λ aus und benutzt man die Beziehung

$$[\mathbf{I} - \mathbf{M}]^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{M} [\mathbf{I} - \mathbf{M}]^{-1}$$

(\mathbf{M} ist eine beliebige in den Dimensionen passende Matrix), so kann die Uebertragungsmatrix (II.3.6.4) umgeschrieben werden :

$$\mathbf{G}(\lambda) = 1/\lambda \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + 1/\lambda^2 \mathbf{C} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}] \mathbf{A}_0 \{ \mathbf{I} - 1/\lambda [\mathbf{I} - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}] \mathbf{A}_0 \}^{-1} \mathbf{B}_0$$

Im Satz 6 wurde gezeigt, dass $\mathbf{C} \mathbf{B}_0$ gleich der Identität ist. Daraus folgt aber sofort, dass $\mathbf{C} [\mathbf{I} - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}]$ verschwindet. Damit ist gezeigt, dass $\mathbf{G}(\lambda)$ eine unerwartet einfache Struktur besitzt. Tatsächlich besteht die Uebertragungsmatrix nur aus mentkoppelten Integratoren :

$$\mathbf{G}(\lambda) = \lambda^{-1} \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.6.5})$$

Schlussfolgerungen :

Indem man den Ausgangsvektor $\mathbf{s}(t)$ definiert, führt man im ungestörten System (II.3.6.3) $n-m$ Nullstellen ein. Mit dem linearen Teil der Regler (II.3.3.1/2/3) wird in der Uebertragungsmatrix (II.3.6.4) eine $(n-m)$ -fache Pol-Nullstellen-Kürzung vorgenommen. Die restlichen m Eigenwerte des geregelten Systems werden in den Ursprung verlegt. Der nichtlineare Term der Regler (II.3.3.1/2/3) hat folgende zwei Aufgaben :

1. Die m isolierten Integratoren, deren Anfangsbedingung zu Zeit t_0 ungleich Null sind, müssen im Intervall $t^* - t_0$ auf Null gebracht werden (das System wird in den Gleitzustand gebracht).
2. Die Pol-Nullstellen-Kürzung muss trotz Parameterstörungen aufrecht erhalten werden (das System wird für $t > t^*$ im Gleitzustand gehalten).

Diese Interpretation zeigt klar den Grundmechanismus aller RVS, welche das Gleitebenenprinzip ausnützen. Die Idee der Pol-Nullstellen-Kürzung, welche mit rein linearen Reglern nicht durchführbar ist (kleine Parameterstörungen sind immer vorhanden), wird durch den Einsatz eines nichtlinearen Zusatzreglers realisiert.

II. 3. 7. Endliche Treffzeit

In diesem Abschnitt werden hinreichende Bedingungen für die Reglerverstärkungen gesucht, welche garantieren, dass der Gleitzustand in endlicher Zeit erreicht wird. Dies ist natürlich von grosser Bedeutung, wenn unter allen Umständen ein ungestörtes Endverhalten gefordert wird. Nur der Regler (II.3.3.1) wird untersucht. Die zulässigen Parameterstörungen sind in diesem Falle vom Typ 0, 1, oder 2.

Satz 11 :

Die Bedingung (II.3.7.1) ist hinreichend dafür, dass das System (II.1.1.1) durch den Regler (II.3.3.1) in endlicher Zeit in den Gleitzustand gebracht wird.

$$d_i = d_{i0} + \frac{[|\mathbf{c}_i| + \beta_i]}{\min\{1 + r_{B,1i}(t)\}} \quad (\text{II.3.7.1})$$
$$\beta_i > 0; \quad i = 1..m$$

Die Verstärkungen d_{i0} sind durch die Bedingung (II.3.4.11) gegeben, wobei das ">" Zeichen durch das "=" Zeichen zu ersetzen ist. Die Zeilenvektoren \mathbf{c}_i sind die Zeilen der Matrix \mathbf{C} gemäss Abschnitt II.3.2.

Die Reglerverstärkung d_i setzt sich im wesentlichen aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil (d_{i0}) garantiert die Stabilität des Gleitzustandes. Der zweite Teil garantiert, dass der Gleitzustand in endlicher Zeit erreicht wird. Die Konstante β_i kann beliebig klein sein, solange sie grösser Null ist.

Beweis des Satzes 11 :

Dieser Beweis wird umgekehrt geführt, d.h. man nimmt an, dass der Gleitzustand nur asymptotisch erreicht wird und zeigt, dass man in diesem Fall auf einen Widerspruch stösst.

Falls $t^* = \infty$ ist, so muss mindestens eine Komponente des Schaltvektors für alle Zeiten ungleich Null sein (dies sei $s_i(t)$). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass der Anfangswert von $s_i(t)$ grösser als Null ist :

$$s_i(t_0) = s_{i0} > 0$$

Demzufolge wird $s_1(t)$ für alle Zeiten grösser oder höchstens gleich Null sein. Wird d_1 gemäss (II.3.7.1) in die Gleichung (II.3.4.10) eingesetzt erhält man :

$$\dot{s}_1(t) \leq -|\alpha_1| |\mathbf{x}(t)| - \beta_1 |\mathbf{x}(t)| \quad (\text{II.3.7.2})$$

Für den Term $|\alpha_1| |\mathbf{x}(t)|$ kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung eine untere Schranke abgeschätzt werden :

$$|\alpha_1| |\mathbf{x}(t)| \geq s_1(t)$$

Daraus folgt für $\dot{s}_1(t)$:

$$\dot{s}_1(t) \leq -s_1(t) - \beta_1 |\mathbf{x}(t)|$$

Für $t < t^*$ ist der Betrag des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ sicher grösser als Null, weil mindestens $s_1(t)$ noch nicht verschwindet. Da β_1 grösser als Null gewählt wurde, ist die folgende Ungleichung strikt erfüllt :

$$\dot{s}_1(t) < -s_1(t)$$

Demzufolge muss $s_1(t)$ die folgende Schranke respektieren :

$$s_1(t) < \exp(-t)s_{10}$$

Nimmt man aber an, dass $t^* = \infty$ ist (asymptotisches Erreichen des Gleitzustandes), so führt dies auf einen Widerspruch :

$$s_1(\infty) < 0$$

Laut Voraussetzung ist der Anfangswert s_{10} grösser als Null und demzufolge ist auch $s_1(t)$ für alle Zeiten grösser, oder höchstens gleich Null. Damit ist gezeigt, dass die Treffzeit t^* endlich sein muss.

EdB.

11.3.8 Zusammenfassung 11.3, Beispiel

Im Unterkapitel II.3 wurde das Regulatorproblem für ideale Systeme gelöst. Folgende Erkenntnisse wurden dabei gewonnen :

- Für ideale Systeme, welche die Voraussetzungen (II.2.3.1/2) erfüllen, lassen sich immer RVS finden, welche garantieren, dass der Gleitzustand erreicht und gehalten wird
- Die Trajektorie lässt sich in zwei deutlich verschiedene Teile aufspalten :
 1. Teil $t_0 \leq t < t^*$ System gleitet nicht
 2. Teil $t^* \leq t < \infty$ System gleitet
- Im zweiten Teil ($t^* \leq t < \infty$) ist das geregelte System absolut robust in Bezug auf die Parameterstörungen, d.h. ihr Einfluss verschwindet vollständig
- Die Dynamik der Gleitbewegung ist durch die Wahl von $(n-m)$ Eigenwerte auf einfache Art beliebig vorgebar
- Im Gleitzustand reduziert sich die Ordnung des Systems um m Freiheitsgrade
- Es können Bedingungen angegeben werden, welche garantieren, dass die Treffzeit endlich ist

Beispiel :

Das gesamte Entwurfsverfahren wird an einem Beispiel 5. Ordnung mit zwei Eingangskanälen verdeutlicht. Die Systemantwort wird numerisch berechnet.

Nominal-System :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_1 = 3 \\ q_2 = 2 \end{array}$$

Die Eigenwerte der Matrix A_0 lauten :

$$\lambda_1 = -0.9986 + j \cdot 2.9958$$

$$\lambda_2 = -0.9986 - j \cdot 2.9958$$

$$\lambda_3 = 0.9873 + j \cdot 0.9873$$

$$\lambda_4 = 0.9873 - j \cdot 0.9873$$

$$\lambda_5 = -0.9774$$

Parameterstörungen :

$$\delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta a_{11} & \delta a_{12} & \delta a_{13} & \delta a_{14} & \delta a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta a_{21} & \delta a_{22} & \delta a_{23} & \delta a_{24} & \delta a_{25} \end{bmatrix} \quad \delta B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \delta b_{22} \end{bmatrix}$$

$$-1 \leq \delta a_{i,j}(t) \leq 1$$

$$-0.25 \leq \delta b_{i,j}(t) \leq 0.25$$

Die Eingangsstörung ist vom Typ 1 (diagonale Struktur).

Die gewünschte Systemdynamik wird durch die Wahl von 3 Eigenwerten festgelegt. Diese Eigenwerte werden in 2 Gruppen aufgespalten, wobei die erste Gruppe 2, die zweite 1 Element enthält. Die folgenden Eigenwerte werden benutzt :

$$\begin{array}{lll} 1. \text{ Gruppe :} & \lambda_{11} = -2 + 2j & \lambda_{12} = -2 - 2j \\ 2. \text{ Gruppe :} & \lambda_{21} = -2 & \end{array}$$

Daraus ergibt sich folgende Matrix C :

$$C = \begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Es wird der Regler (II.3.3.1) benutzt. Da die Eingangsstörung vom Typ 1 ist, sind die Reglerverstärkungen gemäss Gleichung (II.3.4.12) zu dimensionieren. Die hinreichenden Reglerverstärkungen lauten :

$$d_1 > \max_t \left\{ \frac{\left| \delta a_{11} + 2\delta b_{11} \cdot \delta a_{12} - 8\delta b_{11} \cdot \delta a_{13} - 5\delta b_{11} \cdot \delta a_{14} - \delta b_{11} \cdot \delta a_{15} \right|}{1 + \delta b_{11}} \right\}$$

$$d_2 > \max_t \left\{ \frac{\left| \delta a_{21} - \delta b_{22} \cdot \delta a_{22} + \delta a_{23} + \delta a_{24} + 10\delta b_{22} \cdot \delta a_{25} \right|}{1 + \delta b_{22}} \right\}$$

Die numerische Auswertung ergibt die folgenden zwei Bedingungen für die Reglerverstärkungen :

$$d_1 > 5.79... \qquad d_2 > 5.46...$$

Damit kann der Regler (II.3.3.1) dimensioniert werden :

$$\begin{aligned} u(t) &= - C \Lambda_0 x(t) - D \operatorname{sign}(s(t)) |x(t)| \\ &= - \begin{bmatrix} -2 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 5.8 & 0 \\ 0 & 5.5 \end{bmatrix} \operatorname{sign}(s(t)) |x(t)| \end{aligned}$$

Der Anfangswert des Zustandes sei gegeben durch :

$$x_1(t_0) = 1 \quad x_4(t_0) = -1 \quad x_2(t_0) = x_3(t_0) = x_5(t_0) = 0$$

Das Bild II.3.8.1 zeigt das Systemverhalten für den ungestörten Fall ($\delta A(t) = \delta B(t) = 0$). Die Simulationsdauer beträgt ca. 3 Sekunden.

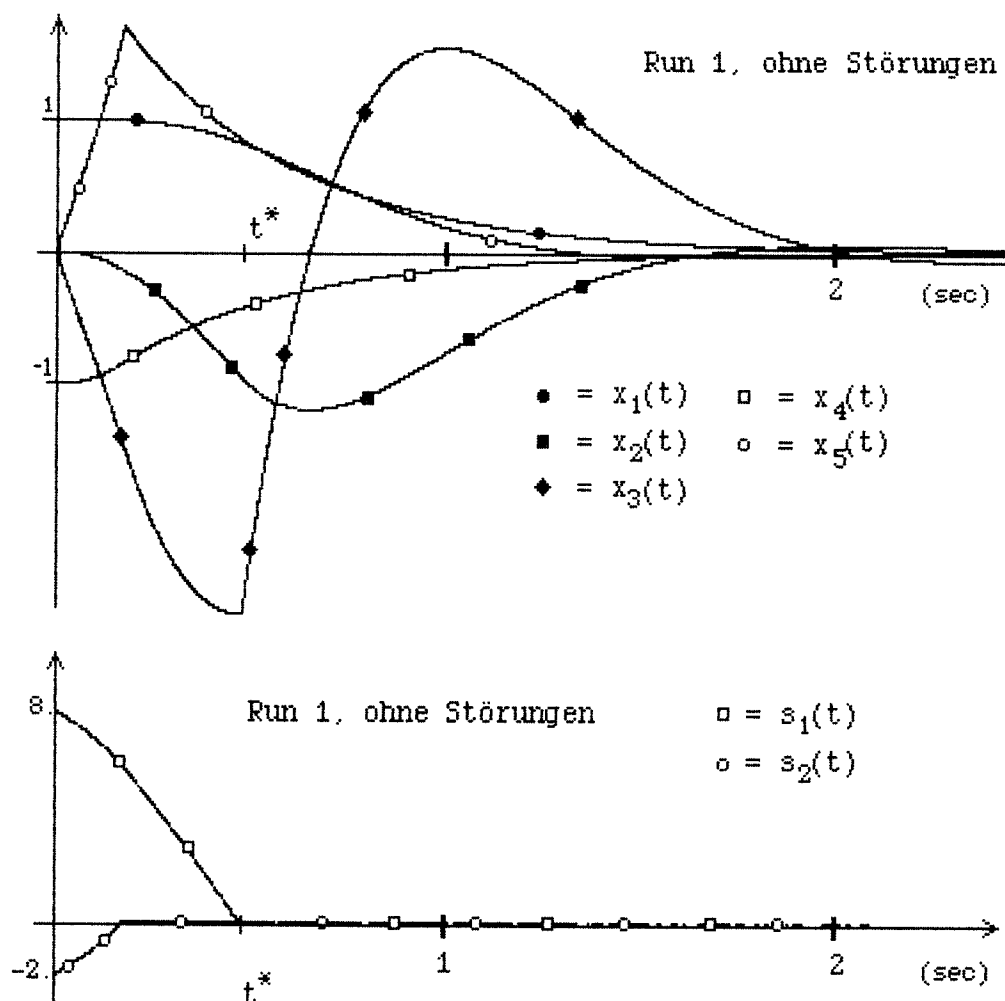


Bild II.3.8.1

Die Treffzeit t^* beträgt ca. 0.48 Sekunden. Der Zustand besitzt für $t > t^*$ die gewünschte Dynamik.

Im nächsten Bild wird das gestörte Systemverhalten gezeigt. Die Störungen werden sinusförmig mit einer Frequenz von 6.4 Hz moduliert. Wie vorausgesagt, macht sich der Einfluss der Störungen nur für Zeiten $t < t^*$ bemerkbar. Sobald der Gleitzzustand erreicht ist, verschwindet der Einfluss der Parameterstörungen vollständig (besonders gut bei $x_3(t)$ sichtbar).

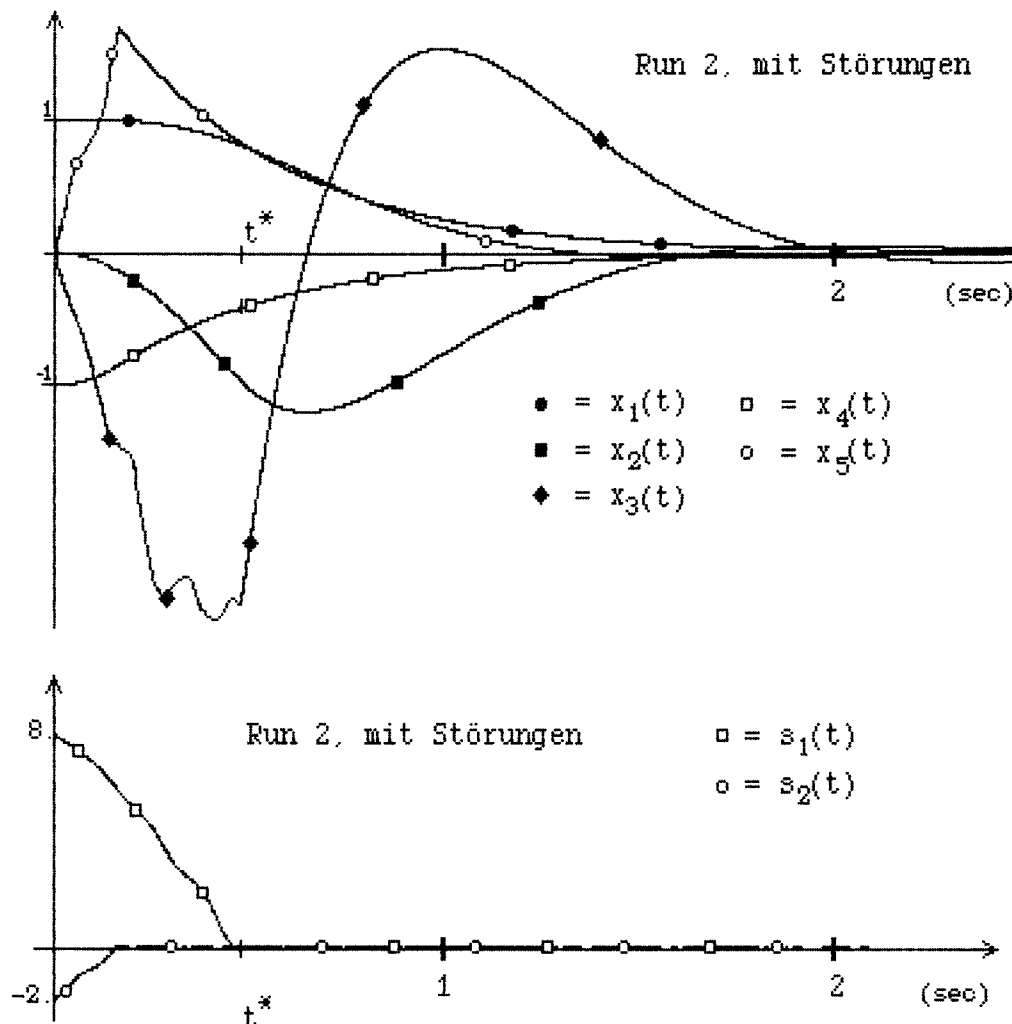


Bild II.3.8.2

II.4. Folgeregelungsproblem

II.4.1 Problemdefinition, Referenzmodell

In diesem Unterkapitel wird das "Folgeregelungsproblem" behandelt. Dabei geht es darum, dem Zustand einer realen Strecke einen willkürlich wählbaren Sollverlauf vorzugeben und durch einen geeigneten Regler dafür zu sorgen, dass der wahre Zustand so gut wie möglich dem vorgegebenen folgt.

Dabei tritt oft das Problem auf, dass die Wahl eines geeigneten Sollverlaufs nicht a priori evident, oder bekannt ist.

Dieses Problem kann auf elegante Art umgangen werden, indem man statt des effektiven Sollverlaufs eine Referenzstrecke vorgibt, welche die vom Reglerentwerfer gewünschten Eigenschaften bezüglich Dynamik, Verstärkungen, Kopplungen etc. besitzt. Der Regler hat in diesem Falle die Aufgabe die wahre Strecke so zu beeinflussen, dass deren Zustand demjenigen des Referenzmodells so gut wie möglich folgt.

Die präzise Formulierung im Original-Koordinatensystem lautet :

Gegeben seien ein Referenzmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{F}_0 \mathbf{z}(t) + \mathbf{G}_0 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0\end{aligned}\tag{II.4.1.1}$$

und die Strecke (II.1.1.1). Gesucht ist ein Regler

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t))$$

so dass der Fehler

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\tag{II.4.1.2}$$

für alle Zeiten möglichst "klein" ist, wobei der Anfangsfehler

$$\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0$$

i.a. ungleich Null sein wird.

In Bild II.4.1.1 ist ein Blockschaltbild dieses Regelsystems aufgezeichnet.

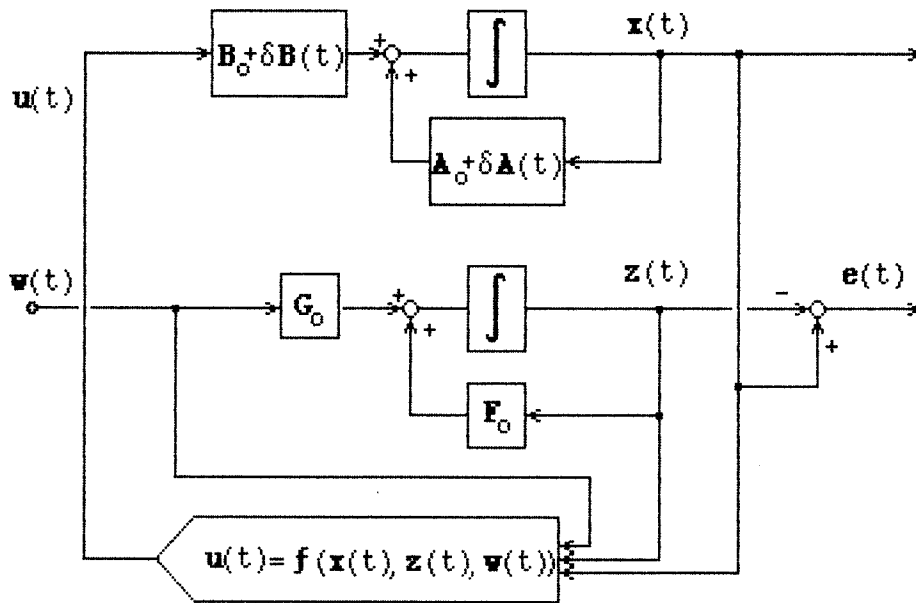


Bild II.4.1.1

Das Referenzmodell muss die folgenden zwei Bedingungen erfüllen :

1. Das Referenzmodell hat die gleiche Dimension wie die wahre Strecke, d.h. die gleiche Anzahl Zustände
2. Die folgenden zwei Rangbedingungen sind erfüllt :

$$\begin{aligned}
 - \quad \text{Rang}[B_0, G_0] &= \text{Rang}[B_0] \\
 - \quad \text{Rang}[A_0 - F_0, B_0] &= \text{Rang}[B_0]
 \end{aligned}
 \tag{II.4.1.3}$$

Diese beiden Bedingungen garantieren, dass das Referenzmodell durch die Transformation T (II.2.1.1), die für die Nominalstrecke $\{A_0, B_0\}$ berechnet wurde, in die allgemeine Blockbegleit-Form übergeführt wird. Um dies einzusehen werden die beiden Matrizen F_0 und G_0 aufgespalten :

$$F_0 = A_0 + B_0 M_F; \quad G_0 = B_0 M_G \tag{II.4.1.4}$$

Diese Aufspaltung ist immer möglich, wenn die Rangbedingungen (II.4.1.3) erfüllt sind. Wendet man die Koordinatentransformationen T und P (II.2.1.1) am Referenzmodell an, so erhält man :

$$F_{oc} = T^{-1} A_0 T + T^{-1} B_0 M_F T = A_{oc} + B_{oc} P^{-1} M_F T = A_{oc} + B_{oc} M_{Fc}$$

$$G_{oc} = T^{-1} B_0 M_G P = B_{oc} P^{-1} M_G P = B_{oc} M_{Gc}$$

Die Matrix B_{oc} , welche in beiden Ausdrücken vorkommt, garantiert, dass das Referenzmodell in allgemeiner Blockbegleit-Form ist.

Das Vorgehen in diesem Unterkapitel lehnt sich stark an das Unterkapitel II.3 an. Deswegen ist die Darstellung in II.4 weniger ausführlich als in II.3. Viele der dort entwickelten Ideen (z.B. das Beweisverfahren des Abschnitts II.3.4) werden auch hier verwendet, so dass oft nur der Verweis auf die entsprechenden Gleichungen und Abschnitte gegeben wird.

Bemerkung :

Wie schon für das Regulatorproblem kann man sich auch hier die Frage stellen, ob die Rangbedingungen (II.1.2/3) nicht eine unnötig restriktive Einschränkung darstellen.

Diese Frage kann mit Hilfe der von Erzberger in [7] gegebenen "perfect model matching conditions" beantwortet werden. Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, dass eine Strecke einem Referenzmodell perfekt folgen kann. In [17] hat Young diese Bedingungen in Rangbedingungen umformuliert, welche mit den hier eingeführten Rangbedingungen (II.4.1.3) identisch sind.

Damit ist wieder gezeigt, dass die Problemlösung im kanonischen Koordinatensystem äquivalent zu derjenigen im Originalsystem ist. Natürlich wird sich auch beim Folgeregelungsproblem das Arbeiten im kanonischen Koordinatensystem als besonders einfach erweisen.

Alle Ueberlegungen im Rest des Unterkapitels II.4 finden im kanonischen Koordinatensystem statt. Auf die Verwendung des Index "c" wird der Bequemlichkeit halber verzichtet.

II.4.2. Entwurfsziel, Fehlerdynamik

In der Einführung ist bereits gesagt worden, dass das Ziel des Reglers sein wird, die Fehlergrösse $e(t)$, ausgehend von ihrem Anfangswert $e(t_0)$, klein zu machen.

Beim Entwurf des Folgereglers wird man deshalb vorgeben wollen, wie der Fehler $e(t)$ gegen Null streben soll. Das Folgeregelungsproblem mit Referenzmodell kann als ein Regulatorproblem für die Fehlergrösse $e(t)$ interpretiert werden!

Das Entwurfsziel für den Folgeregler ist in zwei Schritten zu formulieren :

Schritt 1 : Wie soll sich das geregelte System im Idealfall $e(t) = 0$ verhalten?

Schritt 2 : Wie soll dieser Idealfall erreicht werden, d.h. welche Fehlerdynamik ist gewünscht?

Der erste Schritt wird durch die Wahl einer geeigneten Matrix F_0 erfüllt. Die Matrix F_0 ist in Block-Begleitform. Deswegen stellt dieser Schritt keine Schwierigkeiten dar, da die Eigenwerte (und damit auch die Eigenvektoren) einer solchen Matrix einfach vorzugeben sind.

Da es sich im zweiten Schritt im wesentlichen um ein Regulatorproblem handelt, kann man analog zum Abschnitt II.3.2 vorgehen :

1. Wahl der $n-m$ gewünschten Eigenwerte, in m Gruppen geordnet zu jeweils q_i Elementen
2. Berechnen der m charakteristischen Polynome
3. Konstruktion der Matrix C gemäss Abschnitt (II.3.2)

Der Schaltvektor wird für das Folgeregelungsproblem durch Gleichung (II.4.2.1) definiert :

$$s(t) = C e(t) \quad (\text{II.4.2.1})$$

Ueblicherweise wird man die Fehlerdynamik "schneller" wählen als die Dynamik des Referenzmodells.

Natürlich wird man wieder versuchen durch einen RVS eine Gleitbewegung zu erhalten. Die Gleichung (II.4.2.1) zeigt, dass der Fehler $e(t)$ diejenige Grösse ist, welche zum Gleiten gezwungen werden soll.

Damit sind beim Folgeregelungsproblem, im Unterschied zum Regulatorproblem, im ganzen drei Phasen zu unterscheiden :

Phase 1 : $t_0 \leq t < t^*$ die Fehlergrösse $e(t)$ ist ungleich Null und gleitet nicht

Phase 2 : $t^* \leq t < t^{**}$ die Fehlergrösse gleitet, ihr Betrag ist aber noch nicht vernachlässigbar

Phase 3 : $t^{**} \leq t \leq \infty$ die Fehlergrösse ist (praktisch) Null, die wahre Strecke verhält sich wie das Referenzmodell

Analog zum Abschnitt II.3.7 kann man Bedingungen angeben, welche garantieren, dass die Treffzeit t^* der ersten Phase endlich ist (siehe II.4.4).

Streng mathematisch betrachtet ist die zweite Phase nicht endlich, da der Fehler nur asymptotisch gegen Null gehen wird. Wählt man aber die Fehlerdynamik (d.h. die Matrix C) relativ zum Referenzmodell genügend "schnell", so wird man nach einer gewissen Zeit t^{**} für praktische Ueberlegungen $e(t)=0$ annehmen können.

In der dritten Phase schliesslich zeigt das geschlossene Regelsystem das gewünschte Verhalten. Falls die Gleitbewegung für alle Zeiten $t > t^{**}$ erhalten bleibt, verschwindet die Fehlergrösse $e(t)$ für beliebige Verläufe der Sollsteuerung $w(t)$.

II.4.3. Reglerentwurf

In diesem Abschnitt geht es darum, einen Folgeregler zu finden, welcher garantiert, dass die im letzten Abschnitt eingeführten drei Phasen, auch bei vorhandenen Parameterstörungen durchlaufen werden.

Die Motivation zur unten angegebenen Wahl der Regler wird bei der Beweisführung der Stabilität der Gleitbewegung klar werden. Der erste eingeführte Regler ist für Systeme vom Typ 0, 1 und 2 geeignet :

$$\begin{aligned} u(t) = & - CA_0x(t) + CF_0z(t) + CG_0w(t) - D_x \text{sign}(s(t))|x(t)| \\ & - D_z \text{sign}(s(t))|z(t)| - D_w \text{sign}(s(t))|w(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.4.3.1})$$

Der Folgeregler (II.4.3.1) ist im wesentlichen eine Erweiterung des Reglers (II.3.3.1) und eignet sich demzufolge für Systeme mit Eingangsstörungen des Typs 0, 1 oder 2. Wieder kann man zwei Gruppen von Termen unterscheiden. Die erste Gruppe stellt eine lineare Zustandsrückführung dar, wobei zusätzlich nun der Steuervektor $w(t)$, der im wesentlichen die Solltrajektorie bestimmt, mit einbezogen wird. Die zweite Gruppe wird durch die drei nichtlinearen Terme gebildet. Bei allen drei Termen tritt der Schaltvektor $s(t)$ (II.4.2.1) auf. Die Verstärkungsmatrizen D_x , D_z und D_w sind diagonalförmig, so dass im ganzen $3 \times m$ Verstärkungen zu bestimmen sind.

Wie im Abschnitt II.3.4 gezeigt wurde, ist dieser Reglertyp für Systeme ohne Eingangsstörungen und mit nur spärlich besetzter $\delta\Delta(t)$ Matrix ungeeignet. Für diese Systeme eignet sich der Folgeregler (II.4.3.2) besser :

$$\begin{aligned} u(t) = & - CA_0x(t) + CF_0z(t) + CG_0w(t) - \Delta(t)\text{sign}(s(t)) \\ \Delta(t) = & \text{diag}(\Delta_1(t)) \quad i=1, 2, \dots, m \quad (\text{II.4.3.2}) \\ \Delta_1(t) = & \sum_{j=1}^n d_{1j} |x_j(t)| \end{aligned}$$

Der Regler (II.4.3.2) ist dem Regler (II.3.3.2) sehr ähnlich. Tatsächlich besteht der Unterschied einzig darin, dass (II.4.3.2) zwei zusätzliche lineare Terme enthält. Da (II.4.3.2) nur für Systeme ohne Eingangsstörungen sinnvoll eingesetzt werden kann, enthält der nichtlineare Term keine von $z(t)$ oder $w(t)$ abhängige Komponenten.

Für Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 3 schliesslich wird der Regler (II.4.3.3) zum Einsatz gelangen. Genau gleich wie der entsprechende Regler (II.3.3.3) wird er aus dem Folgeregler (II.4.3.1) gewonnen, indem die Verstärkungsmatrizen durch skalare Verstärkungen ersetzt werden :

$$\begin{aligned} u(t) = & - CA_0x(t) + CF_0z(t) + CG_0w(t) - d_x \text{sign}(s(t))|x(t)| \\ & - d_z \text{sign}(s(t))|z(t)| - d_w \text{sign}(s(t))|w(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.4.3.3})$$

II.4.4. Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes

In diesem Abschnitt werden die Bedingungen für die Folgereglerverstärkungen formuliert, welche garantieren, dass die Punktmenge, welche durch die Gleichung $\mathbf{s}(t)=\mathbf{0}$ definiert wird, asymptotisch stabil ist.

Das dazu verwendete Vorgehen lehnt sich stark an den entsprechenden Abschnitt (II.3.4) des Regulatorproblems an. Insbesondere wird die gleiche Ljapunow-Funktion (II.3.4.2) verwendet. Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, Verstärkungen zu finden, welche garantieren, dass die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion ausserhalb der Gleitmannigfaltigkeit negativ definit ist.

Einsatz des Reglers (II.4.3.1)

Systeme mit Eingangsstörungen vom Typ 2 :

Mit der Gleichung (II.1.1.1) für die Strecke und der Gleichung (II.4.1.1) für das Referenzmodell kann die Fehlerdynamik im Falle des Einsatzes des Reglers (II.4.3.1) angegeben werden :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{z}}(t) \\ &= \mathbf{IIA}_0\mathbf{x}(t) - \mathbf{IIF}_0\mathbf{z}(t) - \mathbf{IIG}_0\mathbf{w}(t) + \delta\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \\ &\quad - \delta\mathbf{B}(t)\mathbf{CA}_0\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{B}(t)\mathbf{CF}_0\mathbf{z}(t) + \delta\mathbf{B}(t)\mathbf{CG}_0\mathbf{w}(t) \\ &\quad - [\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)]\mathbf{D}_x\text{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{x}(t)| \\ &\quad - [\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)]\mathbf{D}_z\text{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{z}(t)| \\ &\quad - [\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)]\mathbf{D}_w\text{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{w}(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.1})$$

Es ist einfach einzusehen, dass das Produkt \mathbf{IIG}_0 verschwinden muss, da die Matrix \mathbf{G}_0 die Rangbedingung (IV.4.1.3) erfüllt. Aus der Gleichung (II.4.4.1) kann nun die Ableitung des Schaltvektors (II.4.2.1) berechnet werden, wobei mit Hilfe des Satzes 6 und der Aufspaltung (II.2.2.3) der Ausdruck vereinfacht werden kann :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{C} \dot{\mathbf{e}}(t) \\ &= [\mathbf{C}\delta\mathbf{A}(t) - \mathbf{R}_B(t)\mathbf{CA}_0]\mathbf{x}(t) - [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]\mathbf{D}_x\text{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{x}(t)| \\ &\quad + \mathbf{R}_B(t)\mathbf{CF}_0\mathbf{z}(t) - [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]\mathbf{D}_z\text{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{z}(t)| \\ &\quad + \mathbf{R}_B(t)\mathbf{CG}_0\mathbf{w}(t) - [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)]\mathbf{D}_w\text{sign}(\mathbf{s}(t))|\mathbf{w}(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.2})$$

Die einzelnen Terme sind in (II.4.4.2) so geordnet, dass die Analogie zum Regulatorproblem offensichtlich wird. Tatsächlich ist die erste Zeile von (II.4.4.2) identisch mit der Gleichung (II.3.4.4)!

Analog zur Matrix A^0 kann man die Matrizen F^0 und G^0 definieren :

$$F^0 = C F_0 \quad ; \quad [F^0]_i = f^0_i \quad i\text{-te Zeile von } F^0$$

$$G^0 = C G_0 \quad ; \quad [G^0]_i = g^0_i \quad i\text{-te Zeile von } G^0$$

Ausgehend von der Gleichung (II.4.4.2) können nun die Komponenten der Ableitung des Schaltvektors bestimmt werden (die Eingangsstörung ist nach Voraussetzung vom Typ 2) :

$$\begin{aligned} \dot{s}_{m-1}(t) = & [\delta a_{m-1}(t) - \sum_{j=0}^i \{r_{B,m-1,m-j}(t) a^0_{m-j}\}] x(t) \\ & - \sum_{j=0}^{i-1} \{ r_{Bm-1,m-j}(t) d_{x,m-j} \text{sign}(s_{m-j}(t)) \} |x(t)| \\ & - (1 + r_{Bm-1,m-1}(t)) d_{x,m-1} \text{sign}(s_{m-1}(t)) |x(t)| \\ & + \sum_{j=0}^i \{ r_{Bm-1,m-j}(t) f^0_{m-j} \} z(t) \\ & - \sum_{j=0}^{i-1} \{ r_{Bm-1,m-j}(t) d_{z,m-j} \text{sign}(s_{m-j}(t)) \} |z(t)| \\ & - (1 + r_{Bm-1,m-1}(t)) d_{z,m-1} \text{sign}(s_{m-1}(t)) |z(t)| \\ & + \sum_{j=0}^i \{ r_{Bm-1,m-j}(t) g^0_{m-j} \} w(t) \\ & - \sum_{j=0}^{i-1} \{ r_{Bm-1,m-j}(t) d_{w,m-j} \text{sign}(s_{m-j}(t)) \} |w(t)| \\ & - (1 + r_{Bm-1,m-1}(t)) d_{w,m-1} \text{sign}(s_{m-1}(t)) |w(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.3})$$

Die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen für den Regler (II.4.3.1) verläuft gleich wie im Abschnitt II.3.4. für den Regler (II.3.3.1) gezeigt wurde. Die verbleibenden Schritte sind :

1. Bestimmen von $\dot{v}_{m-1}(t) = \text{sign}(s_{m-1}(t)) \dot{s}_{m-1}(t)$
2. Obere Schranke für $\dot{v}_{m-1}(t)$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung bestimmen
3. Wahl von $d_{x,m-1}$, $d_{z,m-1}$ und $d_{w,m-1}$ so dass auch im schlechtesten Fall $\dot{v}_{m-1}(t) < 0$ garantiert ist, wobei die Reglerverstärkungen $d_{x,m-j}$, $d_{z,m-j}$ und $d_{w,m-j}$ ($0 \leq j < i$) bereits bekannt sind.

Das Resultat dieses Vorgehens ist in der Stabilitätsbedingung (II.4.4.4) festgehalten :

Definition :

$$\eta_{m-1}(t) = |\delta a_{m-1}(t) - \sum_{j=0}^i \{r_{B_{m-1},m-j}(t) a_{m-j}^o\}| + \sum_{j=0}^{i-1} \{|r_{B_{m-1},m-j}(t)| d_{x,m-j}\}$$

$$v_{m-1}(t) = \left| \sum_{j=0}^i \{r_{B_{m-1},m-j}(t) f_{m-j}^o\} \right| + \sum_{j=0}^{i-1} \{|r_{B_{m-1},m-j}(t)| d_{z,m-j}\}$$

$$\xi_{m-1}(t) = \left| \sum_{j=0}^i \{r_{B_{m-1},m-j}(t) g_{m-j}^o\} \right| + \sum_{j=0}^{i-1} \{|r_{B_{m-1},m-j}(t)| d_{w,m-j}\}$$

$$\zeta_{m-1}(t) = 1 + r_{B_{m-1},m-1}(t)$$

Stabilitätsbedingung :

$$\begin{aligned} d_{x,m-1} &> \max_t \{ \eta_{m-1}(t) / \zeta_{m-1}(t) \} \\ d_{z,m-1} &> \max_t \{ v_{m-1}(t) / \zeta_{m-1}(t) \} \\ d_{w,m-1} &> \max_t \{ \xi_{m-1}(t) / \zeta_{m-1}(t) \} \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.4})$$

Satz 12 :

Falls die folgende Bedingungen erfüllt sind :

1. Die Strecke (II.1.1.1) gehört zu der Klasse der idealen Systeme, gemäss Abschnitt II.1.2.
2. Die Eingangsstörung ist vom Typ 2 und erfüllt die Bedingung (II.2.3.1)
3. Das Referenzmodell (II.4.1.1) erfüllt die Rangbedingungen (II.4.1.3)

und falls alle Verstärkungsfaktoren des Reglers (II.4.3.1) die Bedingungen (II.4.4.4) erfüllen, so ist für das geschlossene System die Punktmenge, definiert durch die Gleichung $s(t) = C e(t) = 0$, asymptotisch stabil. Mit anderen Worten, der Gleitzustand wird immer erreicht werden und für alle Zeiten $t > t^*$ ($t^* < \infty$) erhalten bleiben.

Auf den Beweis dieses Satzes wird verzichtet, da er völlig analog zu demjenigen des Satzes 7 ist. Man beachte, dass bei der Berechnung der Verstärkungen wieder mit dem Index $i=0$ zu beginnen ist.

Falls alle Verstärkungsfaktoren von (II.4.3.1) die Bedingungen (II.4.4.4) erfüllen, muss der Gleitzustand (zumindest asymptotisch) erreicht werden. Damit ist selbstverständlich noch nicht garantiert, dass auch der Fehler $e(t)$ verschwindet. Dieser Punkt wird im nächsten Abschnitt untersucht werden.

Wie beim Regulatorproblem kann man auch beim Folgeregelungsproblem Bedingungen formulieren, welche eine endliche Treffzeit garantieren. Das Vorgehen um diese Bedingungen zu finden ist analog zum Abschnitt II.3.7, so dass hier nur der entsprechende Satz 13 angegeben wird.

Satz 13 :

Werden die Verstärkungen D_x , D_z und D_w des Reglers (II.4.3.1) gemäss Bedingung (II.4.4.5) gewählt, so wird das System (II.1.1.1) durch den Regler (II.4.3.1) in endlicher Zeit in den Gleitzustand gebracht.

$$\begin{aligned} d_{x,i} &= d_{x,i0} + (|c_i| + \beta_i) / \min\{1 + r_{B1,i}(t)\} \\ & \qquad \qquad \qquad t \qquad \qquad \qquad \beta_i > 0 \\ d_{z,i} &= d_{z,i0} + (|c_i| + \beta_i) / \min\{1 + r_{B1,i}(t)\} \\ & \qquad \qquad \qquad t \\ d_{w,i} &= d_{w,i0} \end{aligned} \qquad \qquad \qquad \text{(II.4.4.5)}$$

Die Verstärkungen $d_{x,i0}$, $d_{z,i0}$ und $d_{w,i0}$ sind durch die Bedingung (II.4.4.4) gegeben (das ">" Zeichen ist durch das "=" zu ersetzen).

Aus der Stabilitätsbedingung (II.4.4.4) können natürlich ohne weiteres die entsprechenden Bedingungen für Systeme mit Störungen vom Typ 1 und 0 bestimmt werden :

Eingangsstörung Typ 1 :

Definition :

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= | \delta a_i(t) - r_{B1,i}(t) a_i^0 | \\ v_i(t) &= | r_{B1,i}(t) f_i^0 | \\ \xi_i(t) &= | r_{B1,i}(t) g_i^0 | \\ \zeta_i(t) &= 1 + r_{B1,i}(t) \end{aligned}$$

Stabilitätsbedingung (II.4.4.6) :

$$\begin{aligned}
 d_{x,i} &> \max_t \{ \eta_i(t) / \zeta_i(t) \} \\
 d_{z,i} &> \max_t \{ v_i(t) / \zeta_i(t) \} \\
 d_{w,i} &> \max_t \{ \xi_i(t) / \zeta_i(t) \}
 \end{aligned}
 \tag{II.4.4.6}$$

für alle $i = 1, 2 \dots m$

Eingangsstörung Typ 0 :

Stabilitätsbedingung (II.4.4.7) :

$$\begin{aligned}
 d_{x,i} &> \max_t \{ |\delta a_{i1}(t)| \} \\
 d_{z,i} &> 0; \quad d_{w,i} > 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2 \dots m
 \end{aligned}
 \tag{II.4.4.7}$$

Obwohl die Verstärkungen $d_{z,i}$ und $d_{w,i}$ prinzipiell auch Null sein können, empfiehlt es sich, diese nicht zu klein zu machen, damit der Folgeregler besser auf Anfangsfehler und, während der ersten Phase, auf Veränderungen der Steuergröße $w(t)$ reagieren kann.

Einsatz des Reglers (II.4.3.2)

Wie beim Regulatorproblem gezeigt wurde, lohnt sich der Einsatz des Reglers (II.4.3.2) nur dann, wenn erstens keine Eingangsstörungen vorhanden sind und zweitens die $\delta A(t)$ -Matrix spärlich besetzt ist. Für diesen Fall lassen sich die Stabilitätsbedingungen für den Gleitzustand relativ einfach berechnen. Ausgehend von der Strecke :

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \delta A(t))x(t) + B_0 u(t)$$

kann mit Hilfe des Referenzmodells (II.4.1.1) und des Reglers (II.4.3.2) die Fehlerdynamik berechnet werden (man beachte, dass wieder $\Pi G_0 = 0$ gilt) :

$$\dot{e}(t) = \Pi A_0 x(t) - \Pi F_0 z(t) + \delta A(t)x(t) - B_0 \Delta(t) \text{sign}(s(t))$$

Mit den Definitionen (II.4.2.1) und (II.4.3.2) kann die Ableitung der i -ten Komponente des Schaltvektors berechnet werden (siehe auch Satz 6) :

$$\dot{s}_i(t) = \sum_{j=1}^n \{ \delta a_{ij}(t) x_j(t) \} - d_{ij} |x_j(t)| \text{sign}(s_i(t))$$

Verwendet man wiederum die Ljapunow-Funktion (II.3.4.2), so kann deren Ableitung aus dieser Gleichung unmittelbar angegeben werden. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung kann man dann Reglerverstärkungen finden, welche garantieren, dass alle Summanden von $\dot{v}(t)$ negativ sind :

$$d_{ij} > \max_t \{ |\delta a_{ij}(t)| \} \quad \text{für alle } i=1 \dots m \text{ und } j=1 \dots n \quad (\text{II.4.4.8})$$

Diese Bedingungen sind identisch mit denjenigen des Regulatorproblems, was nicht erstaunlich ist, da bereits gesagt wurde, dass das Folgeregelungsproblem eigentlich ein Regulatorproblem für die Fehlergrösse ist.

Einsatz des Reglers (II.4.3.3)

Dieser Regler ist nur für Systeme mit Eingangsstörungen des Typs 3 geeignet, welche die Bedingung (II.2.3.2) (diagonale Dominanz) erfüllen.

Das Vorgehen bei der Bestimmung der drei Reglerverstärkungen von (II.4.3.3) ist demjenigen des entsprechenden Reglers (II.3.3.3) im Regulatorproblem gleich. Ausgehend vom System (II.1.1.1), dem Referenzmodell (II.4.1.1) und dem Regler (II.4.3.3) wird zuerst die Fehlerdynamik und anschliessend die Ableitung des Schaltvektors berechnet :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) = & [\mathbf{C} \delta \mathbf{A}(t) - \mathbf{R}_B(t) \mathbf{C} \mathbf{A}_0] \mathbf{x}(t) - d_x [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)] \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{x}(t)| \\ & + \mathbf{R}_B(t) \mathbf{C} \mathbf{F}_0 \mathbf{z}(t) - d_z [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)] \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{z}(t)| \\ & + \mathbf{R}_B(t) \mathbf{C} \mathbf{G}_0 \mathbf{w}(t) - d_w [\mathbf{I} + \mathbf{R}_B(t)] \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\mathbf{w}(t)| \end{aligned} \quad (\text{II.4.4.9})$$

Die benutzte Ljapunow-Funktion ist wieder durch die Gleichung (II.3.4.2) gegeben. Aus Gleichung (II.4.4.9) können die einzelnen Komponenten des Schaltvektors und damit die Summanden der Ableitung der Ljapunow-Funktion berechnet werden. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung können die Schranken (II.4.4.10) für die drei Verstärkungen d_x , d_z und d_w gefunden werden, welche garantieren, dass die Ableitung der Ljapunow-Funktion negativ definit ist.

Definition :

$$\eta_1(t) = \left| \delta a_{11}(t) - \sum_{j=1}^m \{ r_{B1,j}(t) a^0_j \} \right|$$

$$v_1(t) = \left| \sum_{j=1}^m \{ r_{B1,j}(t) f^0_j \} \right|$$

$$\xi_1(t) = \left| \sum_{j=1}^m \{ r_{B1,j}(t) g^0_j \} \right|$$

$$\zeta_1(t) = 1 + r_{B1,1}(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^m |r_{B1,j}(t)|$$

Stabilitätsbedingung :

$$d_x > \max_{t,i} \{ \eta_i(t) / \zeta_i(t) \}$$

$$d_z > \max_{t,i} \{ v_i(t) / \zeta_i(t) \} \quad (\text{II.4.4.10})$$

$$d_w > \max_{t,i} \{ \xi_i(t) / \zeta_i(t) \} \quad i=1, \dots, m$$

Man beachte, dass analog zum Regler (II.3.3.3) auch hier ein Maximum über zwei unabhängige Variable zu bilden ist. Die Existenz entsprechender Verstärkungen ist wieder durch die Annahme (II.2.3.2) gesichert.

Zusammenfassung Abschnitt II.4.4 :

Dieser Abschnitt ist das Analogon des Abschnitts II.3.4. Die dort gefundenen Resultate konnten auf das Folgeregelungsproblem übertragen werden :

- Für Systeme mit Störungen des Typs 1 oder 2 ist der Folgeregler (II.4.3.1) am besten geeignet. Falls die Annahme (II.2.3.1) erfüllt ist, ist es immer möglich hinreichende Reglerverstärkungen zu finden
- Für Systeme ohne Eingangsstörungen und spärlich besetzter Störung $\delta\Delta(t)$ ist der Regler (II.4.3.2) geeignet. Falls $\delta\Delta(t)$ voll besetzt ist, ist auch bei Typ 0 Systemen der Regler (II.4.3.1) vorzuziehen.
- Für Systeme mit Typ 3 Eingangsstörungen muss der Regler (II.4.3.3) eingesetzt werden, welcher den Nachteil besitzt, dass er zusätzlich die Bedingung (II.2.3.2) zu erfüllen hat.

II.4.5. Systemverhalten im Gleitzustand

Dieser Abschnitt untersucht die Frage, wie sich das System in der zweiten und dritten Phase verhält ($t^* \leq t \leq \infty$). Dabei wird angenommen, dass der Gleitzustand in endlicher Zeit erreicht wurde.

Wie schon im letzten Abschnitt wird sich auch hier erweisen, dass zwischen dem Folgeregelungs- und dem Regulatorproblem eine grosse Aehnlichkeit besteht. Insbesondere wird wieder ein äquivalentes System eingeführt, an welchem die Eigenschaften des wirklichen Systems studiert werden.

Es werden die folgenden zwei Sätze bewiesen :

Satz 14 :

Solange der Fehler $e(t)$ durch irgendeinen Regler (II.4.3.1/2/3) im Gleitzustand gehalten wird, verschwindet der Einfluss aller Parameterstörungen vollständig.

Satz 15 :

Der Fehler $e(t)$ besitzt im Gleitzustand die gewünschte Dynamik, welche in der Matrix C festgehalten ist, wobei die Ordnung der Fehlerdynamik (scheinbar) um m Freiheitsgrade reduziert ist.

Beweis der Sätze 14 und 15 :

Da der Fehler $e(t)$ gemäss Voraussetzung im Gleitzustand ist, muss der Vektor $s(t)$ (II.4.2.1) identisch verschwinden. Deswegen muss auch seine erste Ableitung Null sein. Daraus kann die äquivalente Steuergrösse $u_{eq}(t)$ bestimmt werden :

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= C(\dot{x}_{eq}(t) - \dot{z}_{eq}(t)) \\ &= C(A_o + \delta A(t))x_{eq}(t) + [I + R_B(t)]u_{eq}(t) - CF_o z_{eq}(t) - CG_o w(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{eq}(t) = - [I + R_B(t)]^{-1} \{ C(A_o + \delta A(t))x_{eq}(t) - CF_o z_{eq}(t) - CG_o w(t) \}$$

Setzt man diesen Steuervektor in die Fehlerdynamik ein, und verwendet man die Aufspaltung (II.2.2.3), so erhält man die folgende Gleichung :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{eq}(t) &= (A_o + \delta A(t))x_{eq}(t) - F_o z_{eq}(t) - G_o w(t) \\ &\quad - B_o \{ C(A_o + \delta A(t))x_{eq}(t) - CF_o z_{eq}(t) - CG_o w(t) \} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe des Satzes 6 erheblich vereinfacht werden :

$$\dot{e}_{eq}(t) = \Pi A_o x_{eq}(t) - \Pi F_o z_{eq}(t) = A_{eq} x_{eq}(t) - F_{eq} z_{eq}(t)$$

Es ist leicht einzusehen, dass die beiden Matrizen \mathbf{A}_{eq} und \mathbf{F}_{eq} identisch sind. Diese folgt unmittelbar aus der Rangbedingung (II.4.1.3), bzw. aus der Aufspaltung (II.4.1.4) :

$$\mathbf{\Pi F}_o = \mathbf{\Pi} (\mathbf{A}_o - \mathbf{B}_o \mathbf{M}_F) = \mathbf{\Pi A}_o = \mathbf{A}_{eq}$$

Damit lässt sich die endgültige Fehlerdynamik (II.4.5.1) angeben :

$$\dot{\mathbf{e}}_{eq}(t) = \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}_{eq}(t) - \mathbf{A}_{eq} \mathbf{z}_{eq}(t) = \mathbf{A}_{eq} \mathbf{e}_{eq}(t) \quad (\text{II.4.5.1})$$

Die Gleichung (II.4.5.1) ist mit der Gleichung (II.3.5.2) identisch, falls man $\mathbf{x}(t)$ mit $\mathbf{e}(t)$ vertauscht. Daraus folgt sofort, dass die Sätze 14 und 15 korrekt sind, da sie den bereits bewiesenen Sätzen 8 und 9 entsprechen.

EdB.

Alle Bemerkungen des Abschnitts II.3.6 gelten im übertragenen Sinn auch für das Folgeregelungsproblem, so dass sie hier nicht wiederholt werden.

II.4.6. Zusammenfassung II.4, Beispiel

Im Unterkapitel II.4 wurde das Folgeregelungsproblem für ideale Systeme gelöst. Folgende Erkenntnisse wurden dabei gewonnen :

- Das Folgeregelungsproblem mit Referenzmodell kann als Regulatorproblem für die Fehlergrösse interpretiert werden.
- Für ideale Systeme, welche die Voraussetzungen (II.2.3.1/2) erfüllen, lassen sich immer RVS finden, welche garantieren, dass der Gleitzustand erreicht und gehalten wird.
- Das Systemverhalten lässt sich in drei deutlich verschiedene Phasen aufspalten.
- Es können Bedingungen angegeben werden, welche garantieren, dass die Treffzeit endlich ist.
- In der zweiten und dritten Phase ($t^* \leq t < \infty$) ist das geregelte System absolut robust in Bezug auf die Parameterstörungen, d.h. ihr Einfluss verschwindet vollständig.
- Die Dynamik der Fehlertrajektorie ist durch die Wahl von $(n-m)$ Eigenwerten auf einfache Art beliebig vorgebbar.
- Im Gleitzustand reduziert sich die Ordnung des Fehler-Systems (scheinbar) um m Freiheitsgrade.
- In der dritten Phase verhält sich die Strecke gleich wie das Referenzmodell. Dies gilt für beliebige Signale $w(t)$, welche den Sollverlauf $z(t)$ bestimmen.

Beispiel :

Im Unterschied zum Beispiel des Abschnitts II.3.8 wird hier von einem System ausgegangen, welches in einem allgemeinen Koordinatensystem gegeben ist. Das betrachtete System hat vier Zustände und zwei Steuergrössen. Das Nominalsystem ist gegeben durch :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & -2.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & -4.0 \\ -1.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte der Matrix \mathbf{A}_0 :

$$\lambda_1 = 0.1480 + j * 1.6147$$

$$\lambda_2 = 0.1480 - j * 1.6147$$

$$\lambda_3 = -0.6480 + j * 2.0820$$

$$\lambda_4 = -0.6480 - j * 2.0820$$

Das Nominalsystem ist instabil. Seine Steuerbarkeitsindices lauten :

$$q_1 = q_2 = 2$$

Das Nominalsystem wird durch folgende Parameterstörungen beeinflusst :

$$\delta \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & \delta a_1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \delta a_2 \\ 0.0 & -\delta a_1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2\delta a_2 \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \delta b_1 & 0.0 \\ 0.0 & \delta b_2 \\ -\delta b_1 & 0.0 \\ 0.0 & 2\delta b_2 \end{bmatrix}$$

Die Variationsgrenzen der Parameterstörungen sind :

$$-1.0 \leq \delta a_1(t) \leq 1.0 \quad -1.0 \leq \delta a_2(t) \leq 1.0$$

$$-0.5 \leq \delta b_1(t) \leq 0.5 \quad -0.5 \leq \delta b_2(t) \leq 0.5$$

Das "Pflichtenheft" für den Folgeregler lautet folgendermassen :

- physikalisch wichtig sind die Zustände $x_1(t)$ und $x_2(t)$
- diese Zustände müssen durch die Eingangsgrösse $w(t)$ vernünftig beeinflusst werden können (Zeitkonstante ca. 1 Sekunde)

Das Referenzmodell $\{\mathbf{F}_0, \mathbf{G}_0\}$ erfüllt dieses Pflichtenheft und die Rangbedingungen (II.4.1.3) :

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 1.5 & -2.0 & 0.0 & -3.0 \\ -3.0 & -2.0 & 1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte der Matrix F_0 :

$$\lambda_1 = -0.8917 + j*1.9541$$

$$\lambda_2 = -0.8917 - j*1.9541$$

$$\lambda_3 = -0.2168$$

$$\lambda_4 = -1.0000$$

Mit dem im Abschnitt (II.2.1) gezeigten Verfahren, können die Transformationsmatrizen T und P berechnet werden :

$$T = \begin{bmatrix} 0.240 & 1.000 & 0.160 & 0.000 \\ 1.140 & 0.000 & 0.760 & 1.000 \\ 0.260 & -1.00 & -8.16 & 0.000 \\ -0.72 & 0.000 & -0.48 & 2.000 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Im kanonischen Koordinatensystem haben die oben eingeführten Matrizen die folgende Gestalt :

$$T^{-1}A_0T = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.00 & -0.24 & -2.00 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.37 & -0.64 & -3.92 & -0.76 \end{bmatrix} \quad T^{-1}B_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\delta A(t)T = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.14\delta a_1 & 0.0 & .76\delta a_1 & \delta a_1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -.72\delta a_2 & 0.0 & -.48\delta a_2 & 2\delta a_2 \end{bmatrix} \quad T^{-1}\delta B(t) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ \delta b_1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \delta b_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}F_0T = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.24 & -1.24 & -0.16 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ -1.01 & -1.64 & -4.84 & -1.76 \end{bmatrix} \quad T^{-1}G_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Da die Matrix P gleich der Identität ist, und da die relative Eingangsstörung $R_B(t)$ diagonalförmig ist, hat das betrachtete System, gemäss Abschnitt II.2.3, eine Eingangsstörung vom Typ 1.

Die Fehlerdynamik wird fünfmal schneller als die relevante Systemzeitkonstante angesetzt :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5.0 \\ \lambda_2 &= -5.0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Es wird der Regler (II.4.3.1) verwendet. Die Bedingung (II.4.4.6) für dieses System ausgewertet, ergibt die folgenden Schranken (in Klammern sind die für die Simulation verwendeten Werte angegeben):

$$d_{x,1} > 8.22... \quad (8.3) \quad d_{z,1} > 3.77... \quad (3.8) \quad d_{w,1} > 1.0 \quad (1.0)$$

$$d_{x,2} > 9.65... \quad (9.7) \quad d_{z,2} > 6.13... \quad (6.2) \quad d_{w,2} > 1.0 \quad (1.0)$$

Damit kann der Regler (II.4.3.1) dimensioniert werden (in kanonische Koordinaten) :

$$\begin{aligned} u(t) &= -CA_0x(t) + CF_0z(t) + CG_0w(t) - D_x \text{sign}(s(t))|x(t)| \\ &\quad - D_z \text{sign}(s(t))|z(t)| - D_w \text{sign}(s(t))|w(t)| \\ &= - \begin{bmatrix} -3.00 & 4.76 & -2.00 & -0.16 \\ 0.37 & -0.64 & -3.92 & 4.24 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.24 & 3.76 & -0.16 & -0.16 \\ -1.01 & -1.64 & -4.84 & 3.24 \end{bmatrix} z(t) + w(t) \\ &\quad - \left\{ \begin{bmatrix} 8.3 & 0.0 \\ 0.0 & 9.7 \end{bmatrix} |x(t)| + \begin{bmatrix} 3.8 & 0.0 \\ 0.0 & 6.2 \end{bmatrix} |z(t)| + \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} |w(t)| \right\} \text{sign}(s(t)) \end{aligned}$$

Die Bilder (II.4.6.1/3) zeigen das Ergebnis einer numerischen Simulation des geschlossenen Systems über ca. 3 Sekunden. Die Parameterstörungen werden sinusförmig moduliert und sind während der ganzen Simulationsdauer aktiv. Die Eingangsgrösse des Referenzmodells $w(t)$ ist in Bild II.4.6.2 dargestellt. Es wurden die folgenden Anfangsbedingungen gewählt :

$$x_1(t_0) = -2.0; \quad x_2(t_0) = 3.0; \quad x_3(t_0) = 1.0; \quad x_4(t_0) = -1.5; \quad z(t_0) = 0$$

Die charakteristischen Zeiten sind $t^* = 0.092...$ und $t^{**} \approx 1$ Sekunde. Das erste Bild zeigt den Verlauf vom $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Wie erwartet, folgen diese Grössen den entsprechenden Zuständen des Referenzmodells für alle Zeiten $t > t^{**}$.

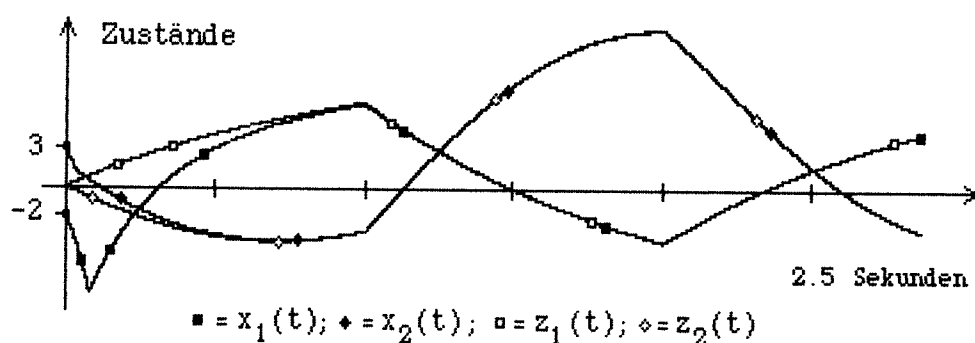


Bild II.4.6.1.

Steuersignale :

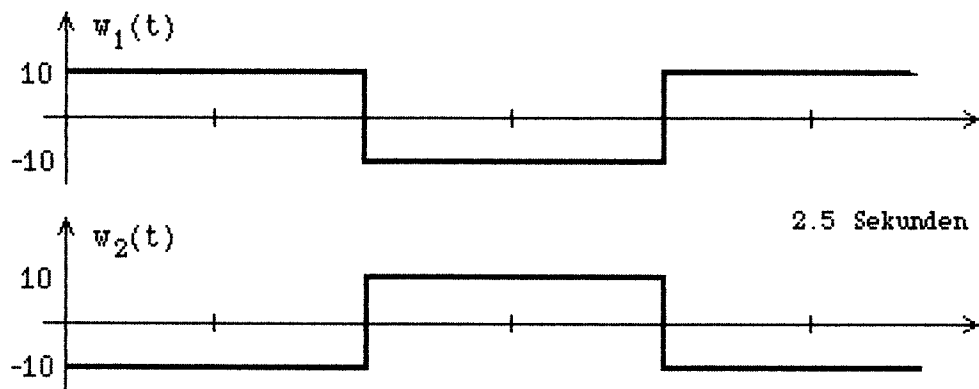


Bild II.4.6.2

Im zweiten Bild ist der Fehler $e(t)$ aufgezeichnet. Wie erwartet verhält sich der Fehler für Zeiten $t > t^*$ wie das Ausgangssignal eines Verzögerungselements erster Ordnung mit Zeitkonstante von 0.2 Sekunden.

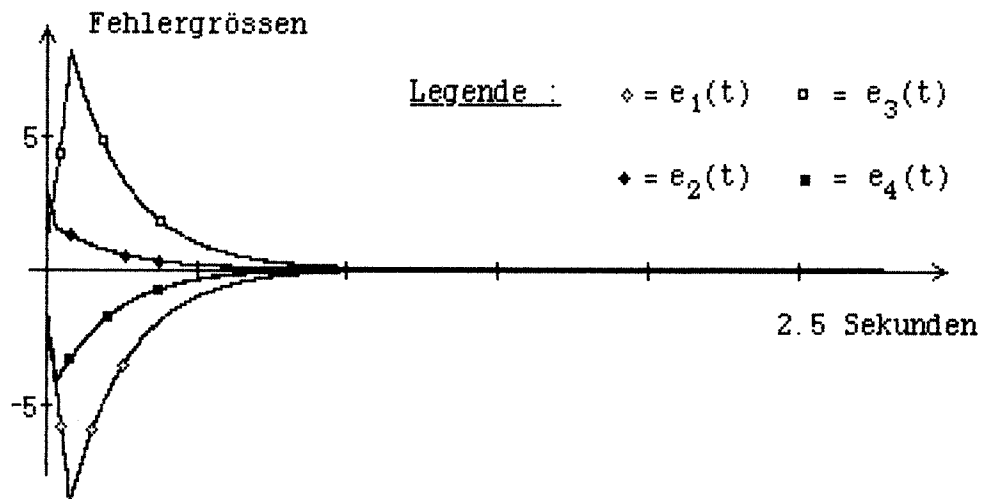


Bild II.4.6.3

III. REALE SYSTEME

III.1 Problemstellung.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Systemen, die in irgendeiner Weise von der Idealform abweichen, wie sie im Unterkapitel II.1 definiert wurde.

Wenn nicht explizit ein allgemeines Koordinatensystem angenommen wird, so sind auch in diesem Kapitel die betrachteten Strecken in Block-Begleitform.

Da im Unterkapitel II.4 gezeigt wurde, dass das Folgeregelungs- auf ein Regulator-Problem für den Fehler $e(t)$ zurückgeführt werden kann, wird in diesem Kapitel nur noch das Regulator-Problem untersucht.

Im ersten Unterkapitel III.2 werden Systeme untersucht, welche die Annahme (II.1.2.2) verletzen. Im Abschnitt III.2.1 wird gezeigt, dass auch solche Systeme immer zum Gleiten gebracht werden können. Im Abschnitt III.2.2 wird eine spezielle Klasse von Störungen untersucht, welche, wie die idealen Störungen, vollständig ohne Einfluss auf das gleitende System sind. Im Abschnitt III.2.3 werden schliesslich allgemeine Störungen $\delta A(t)$ untersucht.

Das Unterkapitel III.3 beschäftigt sich mit der wichtigen Frage der Zustandsbeobachtung. Im Abschnitt III.3.1 wird das Systemverhalten für den Fall untersucht, dass der Gleitzustand stabil ist. Die Stabilitätsfrage wird anschliessend im Abschnitt III.3.2 analysiert.

Das Unterkapitel III.4 untersucht den Einfluss von Rauschprozessen auf Systeme mit RVS. Dabei wird zwischen Rauschen am Eingang ("Motor"-Rauschen, Abschnitt III.4.1) und Rauschen am Ausgang (Mess-Rauschen, Abschnitt III.4.2) unterschieden.

Im Unterkapitel III.5 werden Systeme mit beschränkten Steuergrössen analysiert. Abschnitt III.5.2 zeigt ein Verfahren, wie das Existenzgebiet des Gleitzustandes (d.h. derjenige Teil der Gleitebene, auf welchem der Gleitzustand bei beschränkten Steuergrössen stabil ist) abgeschätzt werden kann.

Das letzte Unterkapitel III.6 versucht, die bisher für lineare Systeme gefundenen Resultate auf nichtlineare Systeme auszudehnen. Im Abschnitt III.6.2 wird an einem Roboter gezeigt, wie man in diesem Fall vorgehen kann.

III.2. Nichtideale Störungen

III.2.1 Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das System (II.1.1.1) für beliebige Störungen $\delta\mathbf{A}(t)$ in den Gleitzustand gebracht werden kann (insbesondere brauchen die Störungen die Rangbedingung (II.1.2.2) nicht zu erfüllen).

Der Beweis, dass die Mannigfaltigkeit $\mathbf{s}(t)=\mathbf{0}$ eine stabile Punktmenge ist, kann fast wie im Abschnitt II.3.4 geführt werden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Beziehung (II.3.4.5) nicht mehr gültig ist, da $\delta\mathbf{A}(t)$ i.a. die Rangbedingung (II.1.2.2) nicht mehr erfüllt.

Die Stabilitätsbedingung (II.3.4.11) kann ohne weiteres auf nichtideale Parameterstörung $\delta\mathbf{A}(t)$ angepasst werden :

Definition :

$$\eta_{m-1}(t) = \left| \mathbf{c}_{m-1} \delta\mathbf{A}(t) - \sum_{j=0}^i r_{B_{m-1}, m-j}(t) \mathbf{a}_{m-j}^0 \right| + \sum_{j=0}^{i-1} |r_{B_{m-1}, m-j}(t)| d_{m-j}$$

$$\zeta_{m-1}(t) = 1 + r_{B_{m-1}, m-1}(t)$$

Stabilitätsbedingung :

$$d_{m-1} > \max_t \{ \eta_{m-1}(t) / \zeta_{m-1}(t) \} \quad \text{für alle } i=0, \dots, m-1 \quad (\text{III.2.1.2})$$

Der einzige Unterschied zur Bedingung (II.3.4.11) besteht darin, dass der erste Term in $\eta_{m-1}(t)$ neu geschrieben werden muss (der Zeilenvektor \mathbf{c}_i bezeichnet die i -te Zeile der Matrix \mathbf{C}). Satz 7 bleibt gültig, falls alle Reglerverstärkungen die Bedingungen (III.2.1.2) erfüllen.

Die Existenz der Reglerverstärkungen d_i ist immer noch durch die Bedingung (II.2.3.1) garantiert, da die Norm des Zeilenvektors $\mathbf{c}_i \delta\mathbf{A}(t)$ in physikalisch sinnvollen Problemen endlich ist.

Damit ist gezeigt, dass auch bei beliebigen Parameterstörungen $\delta\mathbf{A}(t)$ das System in den Gleitzustand gebracht und dort gehalten werden kann. Dies garantiert aber nicht, dass, wie es für ideale Systeme der Fall war, der Zustand asymptotisch stabil ist! Diese Frage wird in den zwei nächsten Abschnitten untersucht.

III.2.2 Linear abhängige Störungen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer Klasse von Störungen $\delta\mathbf{A}(t)$, welche gleich wie die idealen Störungen, das Systemverhalten im Gleitzustand in keiner Weise beeinflussen.

Da in diesem Kapitel die Unterscheidung zwischen dem ursprünglichen und dem kanonischen Koordinatensystem wichtig ist, wird der Index "c" vorübergehend wieder verwendet. Alle Grössen ohne Index "c" sind in Original-Koordinaten definiert.

Das Vorgehen gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil dieses Abschnitts werden einige Definitionen und Annahmen getroffen. Im zweiten Teil wird mit Hilfe des äquivalenten Systems der Satz 16 bewiesen.

Annahmen

In Originalkoordinaten lautet die Matrix \mathbf{C} folgendermassen :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c \mathbf{T}^{-1}$$

Die beiden Matrizen \mathbf{T} und \mathbf{C}_c sind gemäss Abschnitt II.2.1 und II.3.2 definiert.

Die Klasse der hier untersuchten Störungen wird durch alle Matrizen $\delta\mathbf{A}(t)$ gebildet, welche die folgende Rangbedingung erfüllen :

$$\text{Rang}[\delta\mathbf{A}(t), \mathbf{C}^T] = \text{Rang}[\mathbf{C}^T] = m \quad (\text{III.2.2.1})$$

Die Ungleichungen (II.1.1.2) begrenzen auch hier den Variationsbereich der sonst völlig unbekanntenen Elemente der Matrix $\delta\mathbf{A}(t)$. Die Störung $\delta\mathbf{A}(t)$ hat in kanonischen Koordinaten keine spezielle Struktur, d.h. das System (II.1.1.1) ist nicht mehr für alle Zeiten in die allgemeine Blockbegleit-Form transformierbar.

Dank der Bedingung (III.2.2.1) kann aber die Störung $\delta\mathbf{A}(t)$ folgendermassen aufgespalten werden :

$$\delta\mathbf{A}(t) = \mathbf{R}_\lambda(t) \mathbf{C}_c \mathbf{T}^{-1} \quad \mathbf{R}_\lambda(t) \in \mathfrak{R}^{n \times m} \quad (\text{III.2.2.2})$$

Die relative Störung $\mathbf{R}_\lambda(t)$ hat i.a. vollen Rang m und ihre Elemente sind untereinander völlig unabhängig und nur durch die Variationsgrenzen von $\delta\mathbf{A}(t)$ begrenzt.

Wendet man die Transformation \mathbf{T} gemäss (II.2.2.1) auf die Störung an, so erhält man dank der Aufspaltung (II.2.2.2) folgenden Ausdruck :

$$\delta\mathbf{A}_c(t) = \mathbf{T}^{-1} \delta\mathbf{A}(t) \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_\lambda(t) \mathbf{C}_c \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_\lambda(t) \mathbf{C}_c$$

Satz 16 :

- Annahmen : - das geschlossene System wird durch irgendeinen Regler für alle Zeiten $t > t^*$ im Gleitzustand gehalten
- die Störung $\delta\mathbf{A}(t)$ erfüllt die Rangbedingung (III.2.2.1)
 - die Strecke erfüllt die Annahmen (II.1.2.1/3/4/5), d.h. nur die Störung $\delta\mathbf{A}(t)$ weicht vom Idealfall ab

Falls diese drei Annahmen erfüllt sind, verschwindet der Einfluss der Parameterstörung $\delta\mathbf{A}(t)$ auf das geschlossene System vollständig. Man beachte, dass die erste Annahme nicht kritisch ist, da in III.2.1 gezeigt wurde, dass Systeme mit beliebigen Parameterstörungen $\delta\mathbf{A}(t)$ in den Gleitzustand gebracht werden können.

Beweis des Satzes 16 :

Da nach Voraussetzung für alle Zeiten $t > t^*$ die Gleichung (III.2.2.3)

$$\mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{s}_c(t) = \mathbf{0} \quad (\text{III.2.2.3})$$

identisch erfüllt ist, kann ein äquivalenter Steuervektor berechnet werden. Dieser Vektor ist durch die Gleichung (II.3.5.1) gegeben (hier wird zusätzlich der Index "c" angegeben) :

$$\mathbf{u}_{\text{eq},c}(t) = -\{\mathbf{C}_c[\mathbf{B}_{oc} + \delta\mathbf{B}_c(t)]\}^{-1} \mathbf{C}_c[\mathbf{A}_{oc} + \delta\mathbf{A}_c(t)] \mathbf{x}_{\text{eq},c}(t) \quad (\text{III.2.2.4})$$

Damit das geschlossene System den Einfluss der Parameterstörung nicht verspürt, muss also für alle Zeiten $t > t^*$ gelten, dass

$$\mathbf{\Pi}_c \delta\mathbf{A}_c(t) \mathbf{x}_{\text{eq},c}(t) = \mathbf{\Pi}_c \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}_A(t) \mathbf{C}_c \mathbf{x}_{\text{eq},c}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{III.2.2.5})$$

Im Gegensatz zum Abschnitt II.3.5 kann jetzt die dritte Aussage von Satz 6 nicht verwendet werden, da die Aufspaltung (II.2.2.3) durch die Aufspaltung (III.2.2.2) ersetzt wurde. Wegen der Gleichung (III.2.2.3) ist aber der Zustandsvektor $\mathbf{x}_{\text{eq},c}(t)$ nicht völlig willkürlich wählbar, sondern muss in der Gleit-Mannigfaltigkeit enthalten sein. Diese Tatsache kann man ausnützen um die Aussage des Satzes 16 zu beweisen.

Wie in Abschnitt II.3.3 gesagt wurde, ist die Matrix $\mathbf{\Pi}_c$ eine Projektion auf die Gleit-Mannigfaltigkeit. Deswegen kann der Vektor $\mathbf{x}_{\text{eq},c}(t)$ folgendermassen angesetzt werden :

$$\mathbf{x}_{\text{eq},c}(t) = \mathbf{\Pi}_c \mathbf{x}_c(t) \quad (\text{III.2.2.6})$$

Der Vektor $r_c(t)$ ist nun tatsächlich völlig frei. Die Gleichung (III.2.2.5) kann damit umgeschrieben werden :

$$\Pi_c T^{-1} R_A(t) C_c x_{eq,c}(t) = \Pi_c T^{-1} R_A(t) C_c \Pi_c r_c(t)$$

Mit der Definition von Π_c und Satz 6 kann man zeigen, dass dieser Term für alle $r_c(t)$ verschwindet :

$$\text{Pro memoria : } \quad \Pi_c = [I - B_{oc} C_c] \quad ; \quad C_c B_{oc} = I$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_c T^{-1} R_A(t) C_c [I - B_{oc} C_c] = \Pi_c T^{-1} R_A(t) [I - I] = 0$$

EdB.

Bemerkungen :

Die Bedingungen (II.1.2.2) und (III.2.2.1) können kombiniert werden. Störungen die keine der beiden Rangbedingungen erfüllen, werden das System auch im Gleitzustand beeinflussen.

Prinzipiell besteht die Möglichkeit, die Matrix C_c so zu wählen, dass eine bestimmte Art von Störungen unterdrückt wird. In diesem Falle muss aber eine grosse Einschränkung in der Wahl der Dynamik des äquivalenten Systems in Kauf genommen werden. Insbesondere kann der Fall auftreten, dass das äquivalente System instabil würde, was natürlich nicht akzeptabel ist. Aus diesem Grunde ist die Bedeutung der Rangbedingung (III.2.2.1) geringer einzuschätzen als diejenige von (II.1.2.2).

III.2.3. Allgemeine Störungen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Parameterstörungen $\delta\mathbf{A}(t)$, welche weder die Rangbedingung (II.1.2.2) noch die Rangbedingung (III.2.2.1) erfüllen.

Im Abschnitt III.2.1 ist gezeigt worden, dass auch Systeme mit solchen Störungen immer zum Gleiten gezwungen werden können. Dies garantiert aber nicht, dass der Zustand des geschlossenen Systems gegen Null strebt.

Im folgenden Bild (III.2.3.1) ist das Phasenportrait eines Beispiels zweiter Ordnung für zwei verschiedene Schaltgeraden dargestellt (Fall 1 bzw. 2). Der Regler wurde so ausgelegt, dass trotz nichtidealer Parameterstörungen der Gleitzustand stabil ist. Trotzdem stellt man fest, dass der Zustand $\mathbf{x}(t)$ im Fall 1 divergiert! Wird hingegen die Schaltgerade steiler gewählt, so resultiert ein asymptotisch stabiles Verhalten (Fall 2).

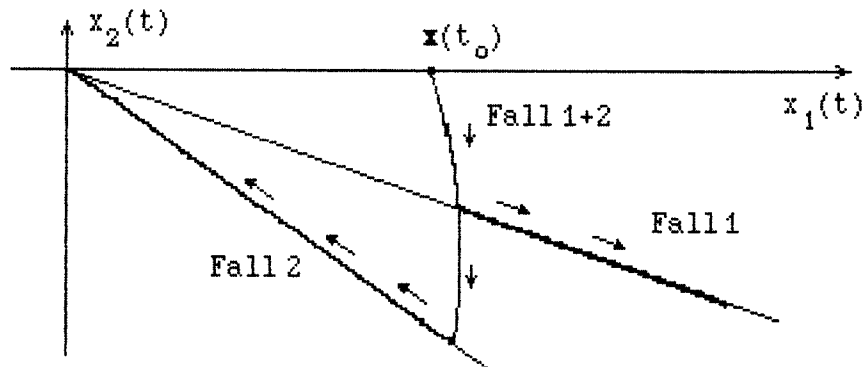


Bild III.2.3.1

Im allgemeinen Fall kann mit dem äquivalenten System operiert werden, da der Gleitzustand gemäss Abschnitt III.2.1 immer erreichbar ist. Ausgehend vom System (II.1.1.1) und der Definition (II.3.2.1) kann der äquivalente Steuervektor bestimmt werden. Setzt man diesen in die Gleichung (II.1.1.1) ein, erhält man :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) + \mathbf{\Pi} \delta\mathbf{A}(t) \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) \quad (\text{III.2.3.1})$$

Im Unterschied zu der Gleichung (II.3.5.2) hat die Störung auch auf das äquivalente System einen Einfluss.

Die Frage stellt sich nun, ob genügend "kleine" Störungen die Stabilität des äquivalenten Systems nicht gefährden. Um diese Frage zu beantworten, wird die Ljapunow'sche Methode verwendet. Da das ungestörte System (III.2.3.1) sicher m Eigenwerte im Ursprung hat, tritt dabei die Schwierigkeit auf, dass die Ljapunow-Gleichung (III.2.3.2) keine Lösung \mathbf{P} hat :

$$\mathbf{P} \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} ; \quad \mathbf{Q} > 0 \quad (\text{III.2.3.2})$$

In Abschnitt (II.3.5) wurde jedoch gezeigt, dass die isolierten Integratoren, welche den m Eigenwerten im Ursprung entsprechen, für das gleitende System nicht bemerkbar sind (vgl. Fig. II.3.5.1). Mit Hilfe der Transformation \mathbf{T} (III.2.3.3) kann deshalb diese Schwierigkeit überwunden werden :

$$\mathbf{T} \boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}(t) ; \quad \mathbf{T} = \text{Block-diag}(\mathbf{T}_1) \quad (\text{III.2.3.2})$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{T} ist blockdiagonal, wobei die Diagonalblöcke durch die Transformationen (II.3.5.5) gegeben sind. Das transformierte System :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \Pi \mathbf{A}_0 \mathbf{T} \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{T}^{-1} \Pi \delta \mathbf{A}(t) \mathbf{T} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ &= \mathbf{N} \boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\Xi}(t) \boldsymbol{\varphi}(t) \end{aligned} \quad (\text{III.2.3.3})$$

kann mit Hilfe des Operators (II.3.5.6) durch ein reduziertes System ersetzt werden :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{red}}(t) = \mathbf{N} \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) + \boldsymbol{\Psi}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) \quad (\text{III.2.3.4})$$

Die Matrix $\boldsymbol{\Psi}(t)$ erhält man durch Streichen aller p_1 -ten Zeilen, bzw. Kolonnen der Matrix $\boldsymbol{\Xi}(t)$. Da im Gleitzustand immer gilt, dass $\varphi_{p_1}(t)$ verschwindet und da alle p_1 -ten Zeilen der Matrix $\mathbf{T}^{-1}\Pi$ gleich Null sind, sind diese Streichungen zulässig.

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{N} sind vorgebar, wobei man i.a. die Realteile kleiner als Null wählen wird, was die Existenz einer Lösung der Gleichung (III.2.3.5) garantiert :

$$\mathbf{P} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{P} = - \mathbf{I} \quad (\text{III.2.3.5})$$

Zur Beurteilung der Stabilität des Systems (II.2.3.4) kann nun die Ljapunow-Funktion (III.2.3.6) benützt werden :

$$v(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) > 0 \quad (\text{III.2.3.6})$$

Die zeitliche Ableitung von $v(t)$ lautet :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= - \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}^T(t) \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{red}}(t) + \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}^T(t) [\mathbf{P} \boldsymbol{\Psi}(t) + \boldsymbol{\Psi}^T(t) \mathbf{P}] \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) \\ &= - \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}^T(t) \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{red}}(t) + \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}^T(t) \boldsymbol{\Omega}(t) \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) \end{aligned} \quad (\text{III.2.3.7})$$

Falls man zeigen kann, dass (III.2.3.7) für alle Zeiten kleiner als Null ist, so ist das System (III.2.3.4) asymptotisch stabil.

Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass der grösste Eigenwert der Matrix $\Omega(t)$ nie grösser als eins ist :

$$\text{Falls : } \lambda_{\max}\{\Omega(t)\} < 1 \quad (\text{III.2.3.8})$$

$$\Rightarrow \Phi_{\text{red}}^T(t) \Omega(t) \Phi_{\text{red}}(t) < \Phi_{\text{red}}^T(t) \Phi_{\text{red}}(t) \Rightarrow \dot{v}(t) < 0$$

Falls die Matrix $\Psi(t)$ genügend "klein" ist, wird das System (III.2.3.4) asymptotisch stabil sein. In diesem Fall muss auch das System (III.2.3.1) asymptotisch stabil sein, da schon gezeigt wurde, dass die isolierten Integratoren im Gleitzustand ohne Einfluss bleiben.

Damit ist gezeigt worden, dass "kleine" Abweichungen von der Idealform nicht zu katastrophalen Verschlechterungen des Systemverhaltens führen. Die RVS besitzen also, neben ihren eigentlichen Robustheitseigenschaften bei idealen Parameterstörungen, sozusagen eine Robustheit "zweiter Art". Da die Berechnung des grössten Eigenwerts λ_{\max} nicht einfach durchzuführen ist, sind die Aussagen dieses Abschnitts eher qualitativ aufzufassen.

III.3. Einsatz von Beobachtern

Dieses Unterkapitel beschäftigt sich mit Systemen (II.1.1.1), welche nur in der Bedingung (II.1.2.4), d.h. bezüglich der vollständigen Beobachtbarkeit des Zustandes, von der Idealform abweichen. Alle Betrachtungen finden im kanonischen Koordinatensystem statt. Nur der Regler (II.3.3.1), der für Eingangsstörungen des Typs 2 geeignet ist, wird eingesetzt. Die Resultate gelten aber im übertragenen Sinne für alle Regler des Abschnitts II.3.3.

Im ersten Teil wird der Beobachter eingeführt. Für ein gleitendes, nichtgestörtes System wird die Separation zwischen Zustands- und Beobachtungsfehler-Dynamik nachgewiesen. Anschliessend wird aber gezeigt, dass die Parameter-Robustheit beim Einsatz von Beobachtern i.a. verloren geht.

Das betrachtete System ist durch die Gleichung (III.3.1.1) gegeben. Von aussen ist nur der p-dimensionale Vektor $\mathbf{y}(t)$ messbar :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G} \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{y}(t) \in \mathfrak{R}^p\end{aligned}\tag{III.3.1.1}$$

Im ersten Teil dieses Abschnitts wird angenommen, dass keine Störungen vorhanden sind ($\delta\mathbf{A}(t) = \delta\mathbf{B}(t) = \mathbf{0}$).

Um einen RVS einsetzen zu können, muss der Zustand $\mathbf{x}(t)$ durch ein geeignetes Filter geschätzt werden. Die Eigenwerte des Beobachters sind nur dann alle frei wählbar, wenn das Paar $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{G}\}$ vollständig beobachtbar ist (siehe z.B. [7]). Deswegen wird angenommen, dass diese Bedingung erfüllt ist. Der vollständige Beobachter wird wie üblich angesetzt :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}(t) + \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{G} \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{v}(t) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(t)\end{aligned}\tag{III.3.1.2}$$

Der Anfangswert des Fehlers $\mathbf{e}(t_0)$ ist i.a. ungleich Null. Die Matrix \mathbf{L} wird so bestimmt, dass der Fehler in geeigneter Weise asymptotisch gegen Null strebt.

Der Schaltvektor (III.3.1.3) ist folgendermassen definiert :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{C} \mathbf{v}(t)\tag{III.3.1.3}$$

Falls das System im Gleitzustand ist, kann ein äquivalenter Steuervektor berechnet werden (siehe Abschnitt II.3.5) :

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = -\mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_{eq}(t) - \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{G} \mathbf{e}_{eq}(t)\tag{III.3.1.4}$$

Setzt man (III.3.1.4) in (III.3.1.1, ohne Störungen) ein, so erhält man die Differentialgleichung des äquivalenten Systems :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{C} (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}) \mathbf{e}_{\text{eq}}(t) \quad (\text{III.3.1.5})$$

Die Differentialgleichung für den Fehler $\mathbf{e}_{\text{eq}}(t)$ kann man aus den Gleichungen (III.3.1.3) und (III.3.1.1, ohne Störungen) herleiten :

$$\dot{\mathbf{e}}_{\text{eq}}(t) = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}) \mathbf{e}_{\text{eq}}(t) \quad (\text{III.3.1.6})$$

Schreibt man die gekoppelten Gleichungen (III.3.1.5/6) miteinander auf, so erhält man :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_{\text{eq}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{eq}} & \mathbf{B}_0 \mathbf{C} (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) \\ \mathbf{e}_{\text{eq}}(t) \end{bmatrix}$$

Da diese Matrix blockdreiecksförmig ist, sind die Eigenwerte der geregelten Strecke und des Beobachters separiert. Der Entwerfer kann die Dynamik der Strecke (über die Matrix \mathbf{C}) und die Fehlerdynamik (über die Matrix \mathbf{L}) unabhängig voneinander festlegen. Sobald der Fehler genügend klein geworden ist, verhält sich die Strecke, wie wenn eine vollständige Zustandsmessung möglich wäre (siehe Gleichung (II.3.5.2)).

Dieses schöne Resultat gilt aber nur für Systeme ohne Parameterstörungen. Führt man nämlich die genau gleiche Berechnung mit dem tatsächlichen System (III.3.1.1) durch, so erhält man ein völlig anderes Resultat :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}}(t) = & \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) + (\delta \mathbf{A}(t) - \delta \mathbf{B}(t) \mathbf{C} \mathbf{A}_0) \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) \\ & + (\mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}(t)) \mathbf{C} (\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}) \mathbf{e}_{\text{eq}}(t) \end{aligned} \quad (\text{III.3.1.7})$$

Die Differentialgleichung für den Fehler lautet nun :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{\text{eq}}(t) = & [\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}] \mathbf{e}_{\text{eq}}(t) + \delta \mathbf{B}(t) \mathbf{C} [\mathbf{A}_0 - \mathbf{L} \mathbf{G}] \mathbf{e}_{\text{eq}}(t) \\ & + [\delta \mathbf{A}(t) - \delta \mathbf{B}(t) \mathbf{C} \mathbf{A}_0] \mathbf{x}_{\text{eq}}(t) \end{aligned} \quad (\text{III.3.1.8})$$

Die Gleichungen (III.3.1.7/8) sind nun über die Störungen gekoppelt. Die Separationseigenschaft zwischen Fehler- und Streckendynamik ist verloren gegangen. Zusätzlich ist aus der Gleichung (III.3.1.7) ersichtlich, dass das geschlossene System auch im Gleitzustand durch die Parametervariationen gestört wird. Die Robustheitseigenschaften der RVS werden demzufolge durch den Einsatz von Beobachtern i.a. zunichte gemacht.

Da die Beobachtdynamik nicht mehr alleine durch die Wahl von L definiert wird, besteht i.a. auch keine Garantie dafür, dass der Beobachter den Zustand wenigstens annähernd zu schätzen vermag. Im besten Fall, d.h. wenn der Fehler "klein" wird, und wenn der Beobachter den Gleitzustand erreicht, wird der Zustand $\mathbf{x}(t)$ in der "Nähe" des idealen Verlaufs bleiben. Für ein System zweiter Ordnung kann z.B. das in Bild III.3.1.1 qualitativ dargestellte Verhalten resultieren.

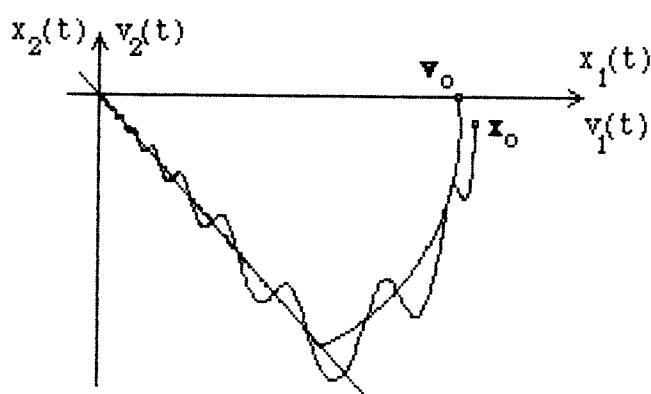


Bild III.3.1.1

Man beachte, dass in diesem Abschnitt angenommen wurde, dass der Beobachter im Gleitzustand ist ($C\mathbf{v}(t) = 0$). Man kann aber zeigen, dass nicht einmal diese Eigenschaft garantiert werden kann!

Ein Ausweg aus dieser Situation ist nur dann ohne weiteres möglich, wenn die Parameterstörungen messbar oder berechenbar sind (z.B. bei nichtlinearen Strecken). Im Beobachter werden in diesem Fall die Störungen nachgebaut. Falls dies möglich ist, kann man zeigen, dass die Strecke bei verschwindendem Beobachtungsfehler im Gleitzustand von den Parameterstörungen unbeeinflusst bleibt.

Da jedoch i.a. diese Möglichkeit nicht gegeben ist, muss man andere Methoden entwickeln, wie trotzdem gewisse Robustheitseigenschaften erzielt werden können. Die absolute Robustheit, wie sie für Systeme mit Beobachter gegeben ist, wird man aber nicht mehr erreichen können. Es stellt sich dann die Frage, ob wenigstens, wie in Bild (III.3.1.1) dargestellt, annähernd die gewünschten Eigenschaften erreicht werden können. Das Unterkapitel IV.4 ist dieser Fragestellung gewidmet.

III.4. Rauschbehaftete Systeme

In diesem Unterkapitel werden Systeme untersucht, welche durch äussere Signale gestört werden. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die inneren Störungen (Parameterstörungen) nicht aktiv sind. Falls dies nicht zutrifft, können beide Störungen überlagert werden. Wenn sich dadurch Änderungen gegenüber dem Fall ohne Parameterstörungen ergeben, wird an den entsprechenden Stellen darauf hingewiesen werden.

Grundsätzlich sind zwei verschiedene Klassen von verrauschten Systemen zu unterscheiden. Die Elemente der ersten Klasse sind durch die Gleichung (III.4.1.1) gegeben. Man kann in diesem Fall von einem "Motor-Rauschen" sprechen. Es wird sich zeigen, dass falls die Bedingung (III.4.1.2) erfüllt ist, diese Rauschsignale, analog zu den idealen Parameterstörungen, das geschlossene System im Gleitzustand in keiner Weise beeinflussen können.

Die zweite Klasse von Systemen ist dadurch gekennzeichnet, dass die Messungen verrauscht sind (siehe Gleichung (III.4.2.1)). Solche Systeme besitzen keine absolute Rauschunempfindlichkeit mehr. Im entsprechenden Abschnitt III.4.2 wird deswegen mit Hilfsmitteln der Stochastik operiert werden müssen.

Alle Betrachtungen finden im kanonischen Koordinatensystem statt.

III.4.1. Systeme mit verrauschtem Eingang

Dieser Abschnitt gliedert sich in drei Teile. Als erstes werden das betrachtete System und der entsprechende Regler eingeführt. Im zweiten Teil werden Bedingungen für die noch freien Reglerverstärkungen gegeben, welche garantieren, dass das geschlossene System den Gleitzustand erreicht. Im dritten Teil wird gezeigt, dass die betrachteten Rauschsignale das gleitende System in keiner Weise stören können.

Einführung :

Die in diesem Abschnitt betrachteten Systeme sind durch folgende Gleichung definiert :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + F_0 p(t); \quad p(t) \in \mathfrak{R}^p \quad (\text{III.4.1.1})$$

Das System (III.4.1.1) erfüllt die Bedingungen (II.1.2.1/4/5). Zusätzlich wird angenommen, dass die konstante, $n \times p$ -dimensionale Matrix F_0 die Rangbedingung (III.4.1.2) erfüllt :

$$\text{Rang}[B_0, F_0] = \text{Rang}[B_0] \quad (\text{III.4.1.2})$$

In diesem Fall kann die Matrix F_0 folgendermassen zerlegt werden :

$$F_0 = B_0 R_0 \quad R_0 \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (\text{III.4.1.3})$$

Vom Rauschsignal $\rho(t)$ sind nur die Betragsschranken (III.4.1.4) bekannt :

$$|\rho_j(t)| \leq \rho_{j,\max} \quad j=1, \dots, p \quad (\text{III.4.1.4})$$

Zur Bekämpfung des Rauschsignals wird der Regler (III.4.1.5) eingesetzt :

$$u(t) = -C A_0 x(t) - D_\rho \text{sign}(s(t)) \quad (\text{III.4.1.5})$$

Man beachte, dass der Regler (III.4.1.5) im Unterschied zum Regler (II.3.3.1) den Betrag des Zustands nicht zurückführt. Dies hätte nur dann einen Sinn, wenn der Betrag des Rauschsignals eine bekannte Funktion des Betrags des Zustands wäre. Der Schaltvektor ist wie üblich durch die Gleichung (II.3.2.1) gegeben.

Stabilität des Gleitzustandes

Die Stabilitätsbedingungen für die Elemente der Diagonalmatrix D_ρ werden mit der schon im Abschnitt II.3.4 verwendeten Methode gefunden.

Die Ableitung des Schaltvektors wird mit Hilfe der Gleichungen (III.4.1.1/4/5/6) und dem Satz 6 berechnet :

$$\dot{s}(t) = -D_\rho \text{sign}(s(t)) + R_0 \rho(t) \quad (\text{III.4.1.7})$$

Die Ableitung der Ljapunow-Funktion (II.3.4.2) kann mit Hilfe von (III.4.1.7) berechnet werden ($r_{0,i}$ ist die i -te Zeile der Matrix R_0) :

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \{ -d_{\rho,i} + \text{sign}(s_i(t)) r_{0,i} \rho(t) \}$$

Damit lassen sich die gesuchten Stabilitätsbedingungen formulieren :

$$d_{\rho,i} > \max_t \{ |r_{0,i} \rho(t)| \} \quad (\text{III.4.1.8})$$

Diese Bedingung lässt sich leicht auswerten, da nach Voraussetzung die Störungskomponenten begrenzt und ihre Maximalbeträge bekannt sind. Falls alle Reglerverstärkungen diese Bedingung erfüllen, muss der Gleitzustand (mindestens asymptotisch) erreicht und für alle Zeiten $t > t^*$ gehalten werden (siehe Beweis des Satzes 7).

Falls die Parameterstörungen auch aktiv sind, muss eine Kombination der Regler (II.3.3.1) und (III.4.1.5) verwendet werden :

$$u(t) = -C A_0 x(t) - D \text{sign}(s(t)) |x(t)| - D_\rho \text{sign}(s(t))$$

Die Verstärkung D , welche die Parameterstörungen bekämpft, hat den Bedingungen (II.3.4.10) zu gehorchen. Für die Verstärkung D_p gelten nicht mehr die Bedingungen (III.4.1.8), sondern neu (III.4.1.9).

$$\text{Definition : } \eta_{m-1}(t) = |r_{0,1} p(t)| + \sum_{j=0}^{i-1} |r_{B,m-1-m-j}(t)| d_{p,m-j}$$

$$\zeta_{m-1}(t) = 1 + r_{Bm-1,m-1}(t)$$

Stabilitätsbedingung :

$$d_{p,m-1} > \max_t \{ \eta_{m-1}(t) / \zeta_{m-1}(t) \}; \quad i=0, \dots, m-1 \quad (\text{III.4.1.9})$$

Die Größen $r_{B,ij}(t)$ sind die Komponenten der Eingangsstörung $R_B(t)$.

Wie beim Regler (II.3.3.1) muss auch hier mit der Berechnung der m -ten Verstärkung begonnen werden (siehe dazu Abschnitt II.3.4).

Systemverhalten im Gleitzustand

Sobald das geschlossene System gleitet, kann sein Verhalten an dem äquivalenten System studiert werden (siehe dazu Abschnitt III.3.5). Das äquivalente System gehorcht der Differentialgleichung (III.4.1.10) :

$$\dot{x}_{eq}(t) = \Pi A_0 x_{eq}(t) + \Pi F_0 p(t) \quad (\text{III.4.1.10})$$

Da die Matrix F_0 der Bedingung (III.4.1.2) genügt, verschwindet das Produkt ΠF_0 :

$$\Pi F_0 = \Pi B_0 R_0 = (I - B_0 C) B_0 R_0 = (B_0 - B_0) R_0 = 0$$

Das gleitende System gehorcht demzufolge der äquivalenten Gleichung :

$$\dot{x}_{eq}(t) = A_{eq} x_{eq}(t) \quad (\text{III.4.1.11})$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (II.3.5.2) identisch. Die Aussagen der Sätze (8/9) gelten also auch für Systeme mit Rauschen am Eingang, falls die Voraussetzung (III.4.1.2) erfüllt ist. Analog zu den idealen Parameterstörungen kann in diesem Fall von "idealem Eingangsruschen" gesprochen werden, da dieses absolut keinen Einfluss auf das gleitende System ausübt.

III.4.2. Systeme mit verrauschten Messungen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Systemen, bei welchen der Zustand nicht genau bekannt ist, sondern durch ein äusseres Signal $r(t)$ verrauscht wird. Dieser Fall ist schwieriger zu analysieren, als derjenige, der im letzten Abschnitt untersucht wurde. Insbesondere ist es nicht mehr möglich deterministische Aussagen zu machen. Statt dessen muss mit den Hilfsmitteln der Stochastik operiert werden.

Das Vorgehen in diesem Abschnitt gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werden die nötigen Definitionen und Annahmen eingeführt. Im zweiten Teil wird die Methode der statistischen Linearisierung diskutiert. Anschliessend wird die Frage der Stabilität des Gleitzustandes untersucht. Dabei wird sich herausstellen, dass selbst der Mittelwert des Zustandsvektors $x(t)$ nicht mehr zum Gleiten gebracht werden kann.

Definitionen und Annahmen

Das betrachtete Gesamtsystem ist durch die Gleichungen (III.4.2.1) gegeben, wobei das farbige Rauschsignal $r(t)$ als gefiltertes weisses Rauschen $v(t)$ angesetzt wird :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + \delta A(t))x(t) + B_0 u(t) \\ \dot{r}(t) &= F_0 r(t) + G_0 v(t) ; \quad r(t) \in \mathfrak{R}^n \quad v(t) \in \mathfrak{R}^p \\ u(t) &= f(x(t) + r(t)) \end{aligned} \quad (\text{III.4.2.1})$$

Da $r(t)$ stochastisch ist, wird auch der Zustandsvektor $x(t)$ zufällig sein. Von besonderem Interesse wird in diesem Fall der Mittelwert der entsprechenden Grössen sein.

Man beachte, dass die Strecke ohne Eingangs-Parameterstörungen angesetzt wurde, was die Herleitung der Aussage dieses Abschnitts vereinfacht. Die Gültigkeit dieser Aussage bleibt aber im Fall mit Eingangsstörungen erhalten, so dass dieses Vorgehen zulässig ist.

Der Eingang $v(t)$ des Rauschmodells wird als stationäres, weisses Rauschen mit den folgenden Kennwerten modelliert :

$$E\{v(t)\} = \bar{v}(t) = 0 \quad E\{v(t)v^T(\tau)\} = \Sigma_v = \delta(t-\tau)Q$$

Die Gewichtungsmatrix Q ist symmetrisch und positiv definit. Die Matrix F_0 besitzt nur Eigenwerte mit Realteilen kleiner als Null. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass der Rauschprozess bei $t=-\infty$ begonnen hat, so dass auch die Kennwerte von $r(t)$ stationär sind :

$$E\{r(t)\} = \bar{r}(t) = 0 \quad E\{r(t)r^T(\tau)\} = \Sigma_r$$

Σ_r ist die einzige positiv definite Lösung der folgenden Ljapunov-Gleichung :

$$\mathbf{F}_0^T \Sigma_r + \Sigma_r \mathbf{F}_0 = -\mathbf{B}_0 \mathbf{O} \mathbf{B}_0^T$$

Man beachte, dass das Rausch-Modell sehr allgemein ist, sind doch alle stationären, farbigen Rauschprozesse damit beschreibbar.

Der Zustand $\mathbf{x}(t)$ und das Rauschsignal $\mathbf{r}(t)$ sind unkorreliert, d.h. :

$$E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{r}^T(t)\} = \mathbf{0}$$

Von aussen ist nur die Grösse $\mathbf{y}(t)$ zugänglich. Der Schaltvektor $\mathbf{s}(t)$ wird wie folgt angesetzt :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{s}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)) \end{aligned} \quad (\text{III.4.2.2})$$

Der Regler ist durch die Gleichung (III.4.2.3) gegeben :

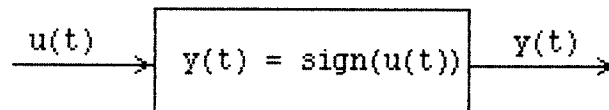
$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{y}(t) - \mathbf{D} \text{sign}(\mathbf{s}(t)) |\bar{\mathbf{x}}(t)| \quad (\text{III.4.2.3})$$

In dieser Gleichung wurde die Annahme getroffen, dass der Betrag des Mittelwertes des Zustands zur Verfügung steht. Falls die Spektren der beiden Signale $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{r}(t)$ genügend weit getrennt sind, ist diese Annahme durch geeignete Filter gut erfüllbar.

Statistische Linearisierung

In diesem zweiten Teil des Abschnitts wird die Frage untersucht, wie sich der nichtlineare Teil des Reglers (III.4.2.3) bei stochastischen Eingangssignalen verhält. In der Literatur (z.B. [9]) wird in diesem Zusammenhang von "statistischer Linearisierung" gesprochen.

Der Grundgedanke wird an einem einfachen Fall eingeführt. Gegeben sei folgende Schaltung :



Das Eingangssignal $u(t)$ sei zufällig und habe eine Normal-Verteilung. Der Erwartungswert des Ausgangssignals $y(t)$ ist gegeben durch die folgende Beziehung :

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(u(t)) p(u(t)) du(t)$$

Der Integrand ist im untenstehenden Bild III.4.2.1 durch die dickere Linie dargestellt.

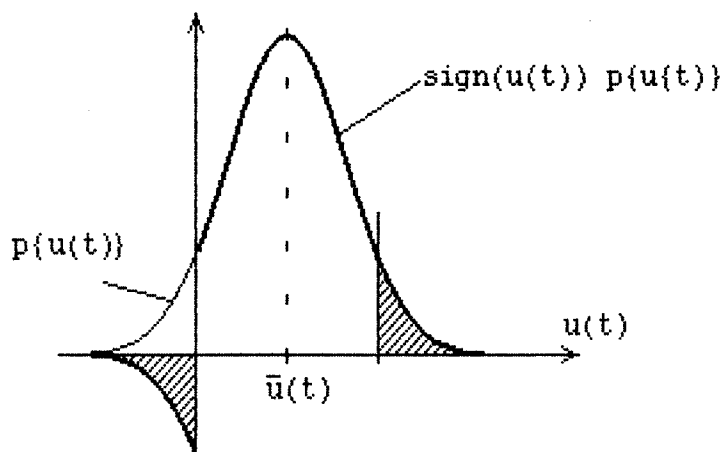


Bild III.4.2.1

Bei der Integration heben sich die beiden schraffierten Teilstücke auf. Deswegen kann der Erwartungswert $E\{y(t)\}$ umgeschrieben werden :

$$E\{y(t)\} = \text{sign}(\bar{u}(t)) f(\bar{u}(t), \sigma_u(t))$$

$$f(\bar{u}(t), \sigma_u(t)) = \int_0^{2\bar{u}(t)} \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - \bar{u}}{\sigma_u} \right)^2}$$

Das Vorzeichen von $E\{y(t)\}$ ist demjenigen des Mittelwertes von $u(t)$ gleich, da der zweite Term immer grösser als Null ist. Allerdings ist der Betrag von $E\{y(t)\}$ nun kleiner als Eins, da die Integration nicht mehr von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Zeichnet man den Erwartungswert von $y(t)$ in Funktion des Erwartungswertes von $u(t)$ für verschiedene Standardabweichungen σ_u auf, so erhält man die in Bild III.4.2.2) dargestellten Verläufe :

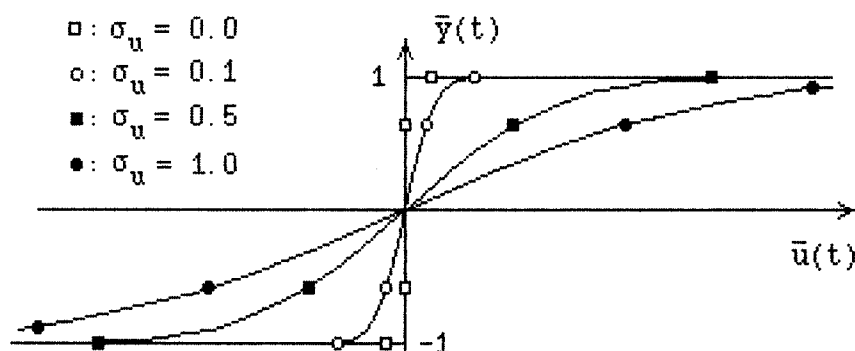


Bild III.4.2.2

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, weshalb in diesem Zusammenhang von "statistischer Linearisierung" gesprochen werden kann. Je stärker nämlich das Eingangssignal verrauscht ist, desto mehr nähert sich die mittlere Kennlinie des Signum-Elements derjenigen eines linearen Verstärkers an.

Diese Eigenschaft wird das Auftreten von Gleitzuständen verhindern, auch wenn man sich auf den Mittelwert des Zustands beschränkt!

Stabilitätsbedingungen des Gleitzustandes

Um dies einzusehen, wird die an diesem Beispiel gewonnene Erkenntnis auf das untersuchte System (III.4.2.1) bzw. auf den Regler (III.4.2.3) angewendet.

Der Erwartungswert des Reglers (III.4.2.3) ist gegeben durch :

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{u}(t)\} &= -\mathbf{C} \mathbf{A}_0 E\{\mathbf{y}(t)\} - \mathbf{D} E\{\text{sign}(\mathbf{s}(t))\} |\bar{\mathbf{x}}(t)| \\ &= -\mathbf{C} \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{D} E\{\text{sign}(\mathbf{s}(t))\} |\bar{\mathbf{x}}(t)| \quad (\text{III.4.2.4}) \end{aligned}$$

In Gleichung (III.4.2.4) ist nur noch der Erwartungswert des Signum-Operators nicht klar. Mit der gleichen Argumentationsweise wie oben angegeben, kann dieser Wert berechnet werden :

$$E\{\text{sign}(\mathbf{s}(t))\} = \Phi(\bar{\mathbf{s}}, \Sigma_s) \text{sign}(\bar{\mathbf{s}}(t))$$

$$\Phi(\bar{\mathbf{s}}, \Sigma_s) = \text{diag}[\psi_i(\bar{\mathbf{s}}, \Sigma_s)]$$

$$\psi_i(\bar{\mathbf{s}}, \Sigma_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_s)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{s}-\bar{\mathbf{s}})^T \Sigma_s^{-1}(\mathbf{s}-\bar{\mathbf{s}})} ds_1 \dots ds_m$$

Der Mittelwert und die Kovarianzmatrix des Schaltvektors sind gegeben durch die Gleichung (III.4.2.5) :

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{s}(t)\} &= \bar{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ E\{(\mathbf{s}(t) - \bar{\mathbf{s}}(t))(\mathbf{s}(t) - \bar{\mathbf{s}}(t))^T\} &= \Sigma_s(t) \quad (\text{III.4.2.5}) \\ &= \mathbf{C} \Sigma_x(t) \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \Sigma_r(t) \mathbf{C}^T \end{aligned}$$

Führt man für das betrachtete System die in Abschnitt II.3.4 ausführlich dargestellte Stabilitätsanalyse des Gleitzustands durch, so erhält man für die Reglerverstärkungen die Bedingung :

$$d_i > \max_t \left\{ \frac{\delta a_i(t)}{\psi_i(\bar{\mathbf{s}}, \Sigma_s)} \right\} \quad \text{für alle Zeiten } t \text{ und alle } i=1, \dots, m$$

Diese Bedingung ist aber nicht erfüllbar, da $\psi_i(t)$ in der Nähe der i -ten Gleit-Hyperebene beliebig klein wird! Falls die Zustandsmessung verrauscht ist, kann der Zustand $\mathbf{x}(t)$ auch im Mittel nicht mehr zum Gleiten gezwungen werden. Durch das Messrauschen wird die Signumfunktion "linearisiert", wodurch der Grundmechanismus der RVS zerstört wird.

III. 5. Beschränkte Steuergrößen

III.5.1. Einführung

In den bisherigen Abschnitten wurde stillschweigend immer angenommen, dass die Steuerleistung keinerlei Beschränkungen unterworfen ist. In den meisten Anwendungen ist dies jedoch nicht der Fall.

Mit den in diesem Abschnitt behandelten Fragen hat sich besonders Bühler [24] befasst. Die in [24] vorgeschlagenen Regler verzichten allerdings auf jegliche Amplitudenmodulation.

In diesem ersten Abschnitt werden zuerst die dabei auftretenden Probleme an Hand eines Beispiels eingeführt. Um die Herleitung der wesentlichen Ideen nicht unnötig zu komplizieren, wird angenommen, dass das System (II.1.1.1) nicht gestört ist ($\delta A(t)=0$, $\delta B(t)=0$). Die für das ungestörte System gefundenen Resultate werden anschliessend auf den gestörten Fall adaptiert.

Die betrachteten Steuersignalbeschränkungen sind von der Form :

$$\mathbf{u}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{u}(t) \leq q^2 \quad (\text{III.5.1.1})$$

Falls zwischen den einzelnen Leistungsverstärkern keine Beeinflussung stattfindet, ist die Matrix \mathbf{Q} diagonal. Auf jeden Fall ist aber \mathbf{Q} symmetrisch und positiv (semi-)definit.

Einführendes Beispiel

Das untenstehende Bild III.5.1.1 zeigt qualitativ die Phasendarstellung eines Systems zweiter Ordnung, dessen Eingangsgrösse einer Steuersignalbeschränkung unterworfen ist.

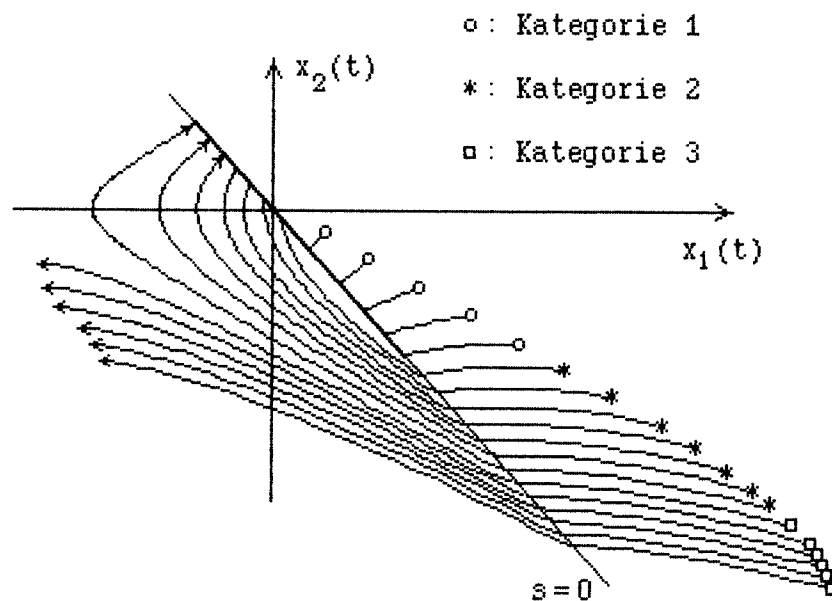


Bild III.5.1.1

In Bild III.5.1.1 sind drei verschiedenen Kategorien von Anfangsbedingungen zu unterscheiden :

Kategorie 1 : Der Zustand verhält sich wie im Falle ohne Steuersignalbeschränkungen (perfektes Gleiten)

Kategorie 2 : Der Zustand kann zwar nicht beim ersten Erreichen der Schaltgerade zum Gleiten gezwungen werden, bleibt jedoch beschränkt und erreicht so irgendwann den Bereich des perfekten Gleitens (man beachte, dass dies auch nach mehrmaligem Durchfahren der Gleitgerade der Fall sein könnte)

Kategorie 3 : Der Zustand divergiert.

Als Konsequenz dieser Betrachtungen kann man folgende zwei Problemkreise unterscheiden :

1. Wie kann das Gebiet auf der Gleitmannigfaltigkeit abgeschätzt werden, in welchem die Steuersignalbeschränkungen nicht verletzt werden.
2. Welche Bedingungen garantieren, dass ausgehend von einem bestimmtem Anfangszustand x_0 der Zustand das in Punkt 1 erwähnte Gebiet erreicht

Der nächste Abschnitt III.5.2 wird sich mit dem ersten Punkt beschäftigen. Es wird gezeigt, wie auf relativ einfache Art (d.h. ohne Integration der Differentialgleichungen) ein Gebiet gefunden werden kann, das für einen einmal darin enthaltenen Zustandspunkt für alle Zeiten eine perfekte Gleitbewegung garantiert.

Die zweite Frage ist schwieriger zu beantworten, da das System vor dem Erreichen des Gleitzustandes durch eine nichtlineare und zeitvariable Differentialgleichung beschrieben wird. Ein gangbarer, aber aufwendiger Weg besteht darin, ausgehend vom Existenzgebiet des Gleitzustandes, die Gleichungen rückwärts zu integrieren.

III. 5. 2. Existenzgebiet des Gleitzustandes

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Systems auf der Gleitmannigfaltigkeit betrachtet. Alle Ueberlegungen können daher am äquivalenten System stattfinden.

Im einführenden Beispiel (siehe Bild (III.5.1.1)) ist die Gleitgerade in zwei Abschnitte aufgeteilt. Bis zu einem gewissen Abstand vom Ursprung gelingt es dem Regler, den Zustandspunkt auf der Gleitgeraden festzuhalten. Ausserhalb dieses Bereichs hingegen durchstösst der Zustand die Gleitgerade. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wie dieses Existenzgebiet annähernd bestimmt werden kann.

Das Vorgehen gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil wird für das gesuchte Existenzgebiet eine notwendige Bedingung formuliert. Anschliessend werden zweidimensionale Systeme analysiert, für welche man aus der notwendigen Bedingung (III.5.2.1) sofort auf das gesuchte Gebiet schliessen kann. Im dritten Teil werden Systeme mit mehr als zwei Zuständen untersucht. Dabei tritt eine zusätzliche Schwierigkeit auf, welche mit Hilfe einer Koordinaten-Transformation überwunden werden wird.

Notwendige Bedingung

Da der Zustand auf der Gleitmannigfaltigkeit liegt, kann aus der Steuersignalbeschränkung (III.5.1.1) sofort eine notwendige Bedingung für das gesuchte Gebiet gewonnen werden :

$$\mathbf{u}_{eq}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{u}_{eq}(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}_0^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) \leq q^2 \quad (\text{III.5.2.1})$$

Falls das betrachtete System nur einen Eingangskanal hat, werden durch die Bedingung (III.5.2.1) in \mathfrak{R}^n zwei Hyper-Ebenen definiert, welche durch ihren Gradienten ($\pm \mathbf{A}_0^T \mathbf{C}^T$) und ihrem kürzesten Abstand zum Ursprung ($q / |\mathbf{C} \mathbf{A}_0|$) charakterisiert sind. Für Systeme mit mehreren Eingangskanälen beschreibt (III.5.2.1) ein Hyper-Ellipsoid welches in (n-m) Richtungen offen ist.

Systeme mit n=2

In Bild III.5.2.1 sind diese Zusammenhänge für ein System zweiter Ordnung mit einem Eingangskanal dargestellt (die "Matrix" \mathbf{c} ist hier gegeben durch $\mathbf{c} = [\mathbf{c} \ 1]$).

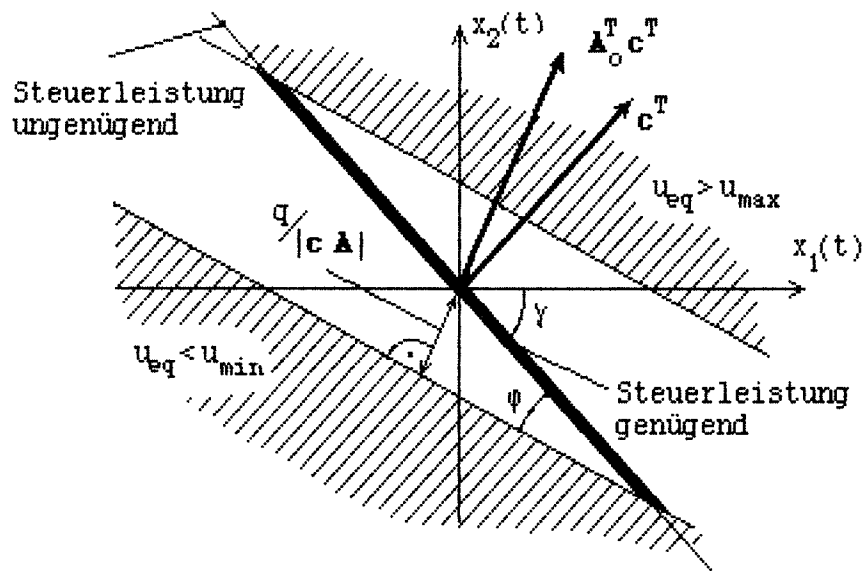


Bild III.5.2.1

Für die in Bild III.5.2.1 eingeführten Variablen gilt :

$$\varphi = \cos^{-1}(\mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{c}^T / (|\mathbf{c}| |\mathbf{c} \mathbf{A}_0|))$$

$$\gamma = \text{tg}^{-1}(\mathbf{c})$$

Damit kann der zulässige Bereich Ω_g angegeben werden :

$$\Omega_g = \{\mathbf{x}(t) : |x_1(t)| \leq \cos(\gamma)q / (|\mathbf{c} \mathbf{A}_0| \sin(\varphi))\}$$

Für Systeme zweiter Ordnung kann somit, wie oben gezeigt wurde, aus der Bedingung (III.5.2.1) mit rein geometrischen Überlegungen das Existenzgebiet des Gleitzustandes angegeben werden.

Bemerkung :

Falls die beiden Vektoren $\mathbf{A}_0^T \mathbf{c}^T$ und \mathbf{c}^T parallel zueinander gewählt werden, existiert der Gleitzustand für alle Punkte in \mathbb{R}^2 . Man könnte geneigt sein, diese Eigenschaft als Entwurfskriterium zu verwenden.

Wählt man jedoch den Vektor \mathbf{c} so, dass er Links-Eigenvektor von \mathbf{A}_0 ist (d.h. $\mathbf{A}_0^T \mathbf{c}^T = \lambda \mathbf{c}^T$), so besagt der Satz von Hautus (siehe z.B. [8]), dass der Zustand aus der "Messgröße" $s(t)$ nicht mehr beobachtbar ist. Mit anderen Worten, das unregulierte System verhält sich bereits wie wenn eine Regelung vorhanden wäre. Dann ist es aber klar, dass die Steuerleistungsbegrenzung respektiert bleibt.

Existenzgebiet für $n > 2$

Für Systeme dritter und höherer Ordnung tritt eine zusätzliche Schwierigkeit auf. Dies wird an Hand eines Beispiels dritter Ordnung mit einem Eingangskanal verdeutlicht.

In Bild III.5.2.2 ist der Zustand eines gleitenden Systems ohne Steuersignalbeschränkung dargestellt (die Koordinaten $\varphi_{1,red}(t)$ sind durch die Transformationen (II.3.5.5/6) definiert).

Die Beschränkung (III.5.1.1) teilt die Gleitebene in zwei Bereiche auf (schraffierter Bereich : Steuersignalbeschränkung aktiv; nicht schraffierter Bereich : Steuersignalbeschränkung nicht aktiv).

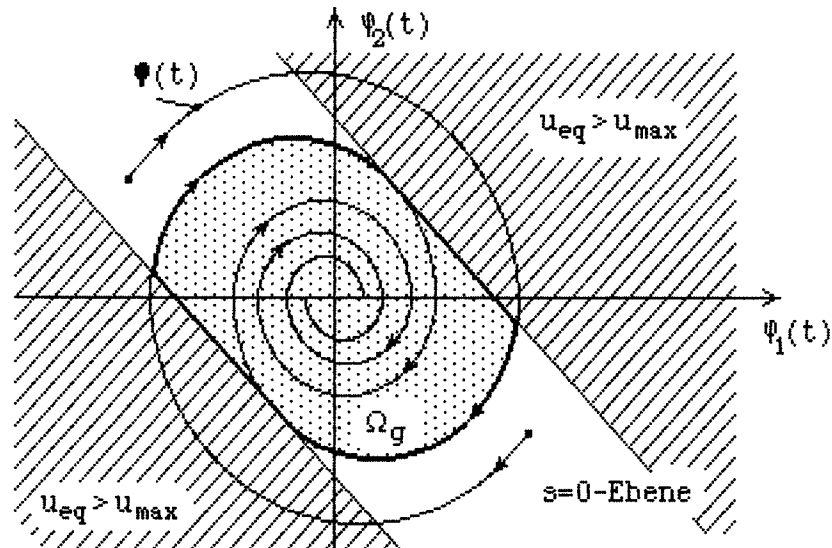


Bild III.5.2.2

Wie Bild III.5.2.2, zeigt kann es Trajektorien geben, welche zwar im zulässigen Gebiet beginnen, dieses jedoch verlassen und somit keine perfekte Gleitbewegung ausführen können. Von besonderem Interesse ist daher das gepunktete Gebiet Ω_g , welches für alle Trajektorien die in ihm beginnen, eine perfekte Gleitbewegung garantiert.

Im allgemeinen wird man es sich aber nicht leisten können Ω_g durch Integration zu bestimmen. Deswegen wird an dieser Stelle eine Koordinatentransformation eingeführt, welche es erlauben wird, wenigstens eine Teilmenge Ω_g^* von Ω_g zu finden.

Koordinatentransformation :

Die oben erwähnte Schwierigkeit erwächst aus der Tatsache, dass der Betrag des Zustands $\varphi_{red}(t)$ nicht monoton abnimmt, obwohl das reduzierte äquivalente System (II.3.5.7) asymptotisch stabil ist.

Gesucht ist deshalb eine Transformation Z (III.5.2.2) welche für ein asymptotisch stabiles System (II.3.5.7) einen monoton abnehmenden Betrag des transformierten Zustands garantiert :

$$\text{System :} \quad \dot{\varphi}_{red}(t) = N \varphi_{red}(t) \quad (\text{II.3.5.7})$$

$$\text{Transformation :} \quad Z \zeta(t) = \varphi_{red}(t) \quad (\text{III.5.2.2})$$

Satz 17 :

Es sei \mathbf{N} eine asymptotisch stabile Matrix und \mathbf{Z} die Transformation gemäss Definitionen (III.5.2.3/4). Dann gilt, dass der Betrag des Zustands $\zeta(t)$ gemäss (III.5.2.2) monoton abnehmend ist.

Definition : $\mathbf{Z} \mathbf{Z}^T = \mathbf{P}^{-1}$ (III.5.2.3)

wobei \mathbf{P} Lösung der folgenden Ljapunow-Gleichung ist ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$) :

$$\mathbf{P} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{P} = - \mathbf{Q} \quad (\text{III.5.2.4})$$

Beweis von Satz 17 :

Die Existenz der Matrix \mathbf{P} ist für die nach Voraussetzung asymptotisch stabile Matrix \mathbf{N} gewährleistet. Da \mathbf{P} positiv definit und symmetrisch ist, ist auch \mathbf{P}^{-1} positiv definit und symmetrisch. Damit ist aber die Existenz einer regulären "Quadrat-Wurzel" \mathbf{Z} gesichert. Man beachte, dass \mathbf{Z} nicht eindeutig ist (\mathbf{Z} kann z.B. dreiecksförmig gewählt werden, man kann aber zeigen, dass die Wahl von \mathbf{Z} keinen Einfluss auf das gesuchte Gebiet hat).

Die zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion $v(t) = \mathbf{q}_{\text{red}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{q}_{\text{red}}(t)$ ist negativ :

$$\dot{v}(t) = - \mathbf{q}_{\text{red}}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{q}_{\text{red}}(t) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{q}_{\text{red}}(t)$$

Mit Hilfe der Definition (III.5.2.3) wird $v(t)$ umgeschrieben :

$$v(t) = \zeta^T(t) \mathbf{Z}^T \mathbf{P} \mathbf{Z} \zeta(t) = \zeta^T(t) \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Z} \zeta(t) = \zeta^T(t) \zeta(t)$$

Der Betrag des Vektors $\zeta(t)$ ist demzufolge gleich $v(t)$. Da $v(t)$ monoton abnimmt, ist damit die Aussage von Satz 17 bewiesen.

EdB.

Mit Hilfe des Satzes 17 kann nun das Vorgehen zur Bestimmung des Gebietes Ω^* angegeben werden.

1. Schritt :

Das äquivalente System (II.3.5.2) wird mit Hilfe der Transformationen (II.3.5.5/6) in das reduzierte System (II.3.5.7) umgewandelt. Dieses besitzt nur noch $(n-m)$ Eigenwerte mit Realteilen kleiner als Null.

2. Schritt :

Für das System (II.3.5.7) wird die Lösung der Ljapunow-Gleichung (III.5.2.4) bestimmt und damit die Transformation Z .

3. Schritt :

Die Bedingung (III.5.2.1) wird für das gemäss Definition (III.5.2.2) und (II.3.5.5/6) transformierte System (II.3.5.2) ausgewertet :

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{eq}^T \mathbf{Q} \mathbf{u}_{eq} \leq q^2 \\ \Rightarrow & \zeta^T(t) \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M} \zeta(t) \leq q^2; \quad \mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{R} \mathbf{Z} \end{aligned}$$

4. Schritt :

Eine obere Schranke für den Betrag des Zustands $\zeta(t)$ kann über den grössten Eigenwert der Matrix $\mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M}$ abgeschätzt werden (dieser Eigenwert ist reell und positiv, da die Matrix $\mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M}$ symmetrisch und positiv-semi-definit ist) :

$$\Rightarrow \zeta^T(t) \zeta(t) \leq q^2 / \lambda_{\max} \quad (\text{III.5.2.5})$$

$$\lambda_{\max} = \text{grösster Eigenwert von } \{\mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M}\}$$

5. Schritt :

Da der Betrag von $\zeta(t)$ monoton abnehmend ist, wird durch die Bedingung (III.5.2.5) in der Gleitmannigfaltigkeit ein Teilgebiet der Menge Ω_g definiert. Zum Schluss wird die Rücktransformation ins $\Phi_{red}(t)$ System vorgenommen :

$$\Phi_{red}^T(t) \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{Z}^{-1} \Phi_{red}(t) = \Phi_{red}^T(t) \mathbf{P} \Phi_{red}(t) \leq q^2 / \lambda_{\max} \quad (\text{III.5.2.6})$$

Diese Bedingung definiert ein Hyper-Ellipsoid in der $(n-m)$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathbf{s}(t)=0$, wobei garantiert ist, dass ein einmal darin enthaltener Zustandspunkt für alle Zeiten eine perfekte Gleitbewegung ausführen wird. Damit ist die gesuchte Abschätzung für das Existenzgebiet des Gleitzustandes gegeben durch die Menge (III.5.2.7) :

$$\Omega_g^* = \{\Phi_{red}^T(t) : \Phi_{red}^T(t) \mathbf{P} \Phi_{red}(t) \leq q^2 / \lambda_{\max}\} \quad (\text{III.5.2.7})$$

Bemerkung :

In Gleichung (III.5.2.4) ist die Matrix \mathbf{Q} nicht vollständig festgelegt. Die verbleibenden Freiheitsgrade könnten zur Maximierung des Gebiets Ω_g^* verwendet werden.

Zusammenfassung III.5.2 :

In diesem Abschnitt wurde in der Gleitmannigfaltigkeit ein Gebiet Ω_g^* gefunden, welches für einen einmal darin enthaltenen Zustandspunkt garantiert, dass der Gleitzustand trotz beschränkter Steuergrößen erhalten bleibt. Dieses Gebiet kann ohne explizite Integration der Systemgleichungen bestimmt werden.

III.6. Nichtlineare Strecken

III.6.1. Generelle Bemerkungen

In diesem Unterkapitel werden Strecken untersucht, welche einer gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichung (III.6.1.1) gehorchen :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t) \quad (\text{III.6.1.1})$$

In Gleichung (III.6.1.1) ist die Annahme enthalten, dass die Steuergrösse $\mathbf{u}(t)$ linear auf die Ableitung des Zustandes $\mathbf{x}(t)$ einwirkt. Der Notwendigkeit dieser Annahme hat Utkin in [1] gegeben, indem er zeigte, dass nur für solche Systeme ein eindeutiges äquivalentes System existiert.

In diesem Abschnitt werden zwei prinzipielle Möglichkeiten aufgezeigt, wie man bei Systemen (III.6.1.1) vorgehen kann.

1. Möglichkeit : Linearisieren

Eine Möglichkeit Systeme der Form (III.6.1.1) zu analysieren, besteht darin, die nichtlineare Gleichung (III.6.1.1) in der Nähe einer partikulären Lösung $\mathbf{x}_p(t)$, $\mathbf{u}_p(t)$, welche z.B. aus einer Optimierung gewonnen wurde, zu studieren.

Für kleine Abweichungen von der partikulären Lösung kann die Gleichung (III.6.1.1) wie üblich in eine Taylor-Reihe entwickelt werden :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \delta\mathbf{x}(t); \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_p(t) + \delta\mathbf{u}(t)$$

Für die kleine Abweichung von der partikulären Lösung resultiert die lineare, zeitvariante Differentialgleichung (III.6.1.2) :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta\mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (\text{III.6.1.2})$$

$$\mathbf{r}(t) = O(\delta\mathbf{x}^2(t))$$

Der Vektor $\mathbf{r}(t)$ charakterisiert das "Rauschen", welches durch die Terme zweiter und höherer Ordnung verursacht wird. Die Matrizen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{B}(t)$ sind bekannt :

$$\mathbf{A}(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} + \frac{\partial [\mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{u}(t)]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]_{\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p} \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_p(t))$$

Diese Matrizen können in jeweils zwei Summanden aufgespalten werden :

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)$$

Damit erhält man die in dieser Arbeit übliche Systemdarstellung. Man beachte, dass die Wahl der beiden Matrizen A_0 und B_0 nicht festgelegt ist. Der Entwerfer hat hier zusätzliche Freiheitsgrade, welche er zur Erfüllung gewisser Bedingungen benutzen kann. Selbstverständlich muss das erhaltene linearisierte System den üblichen Bedingungen (II.1.2.2/3), bzw. (II.2.3.1/2) genügen, damit ein ideales Gleitverhalten resultieren kann.

Das "Rauschsignal" wird nur dann ohne Einfluss auf das gleitende System sein, wenn die Aufspaltung :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}_0 \boldsymbol{\rho}(t)$$

zulässig ist, wobei die Matrix \mathbf{F}_0 der Bedingung (III.4.1.2) zu genügen hat.

Ob diese Bedingungen erfüllt sind, muss i.a. von Fall zu Fall abgeklärt werden. Nur in Sonderfällen, wie der im folgenden Abschnitt (III.6.2) untersuchten Klasse von Systemen, kann man zeigen, dass die oben genannten Bedingungen immer erfüllbar sind.

2. Möglichkeit : Direkt Gleitzustände anstreben

Natürlich kann man versuchen, das nichtlineare System (III.6.1.1) direkt in den Gleitzustand zu bringen, d.h. ohne den Umweg über eine Linearisierung einschlagen zu müssen. Die Definition des Schaltvektors $\mathbf{s}(t)$ könnte in diesem Fall auch nichtlinear sein.

Beschränkt man sich jedoch auf die lineare Definition (II.3.2.1) für $\mathbf{s}(t)$, so kann man relativ einfach hinreichende Bedingungen für das System (III.6.1.1) finden, welche garantieren, dass das äquivalente System sich wie im linearen Fall durch die Gleichung (II.3.5.2) beschreiben lässt.

Der äquivalente Steuervektor $\mathbf{u}_{eq}(t)$ ist für das System (III.6.1.1) gegeben durch die folgende Gleichung :

$$\mathbf{u}_{eq}(t) = - [\mathbf{C} \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))]^{-1} \mathbf{C} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (\text{III.6.1.3})$$

Damit kann in Analogie zur Definition der Projektion \mathbf{H} (II.3.3.4) die Matrix $\mathbf{H}^*(\mathbf{x}(t))$ eingeführt werden :

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) [\mathbf{C} \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))]^{-1} \mathbf{C} \quad (\text{III.6.1.4})$$

Das nichtlineare System (III.6.1.1) verhält sich im Gleitzustand gleich wie das äquivalente System (II.3.5.2), falls gilt :

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{x}(t)) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}(t) \quad (\text{III.6.1.5})$$

In dieser Allgemeinheit ist es natürlich sehr schwierig weitere Aussagen zu machen. Hinreichende Bedingungen lassen sich jedoch relativ leicht finden.

Satz 18 :

Falls die einzelnen Terme der Gleichung (III.6.1.1) die Bedingungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{B}_{oc} \mathbf{R}(\mathbf{x}(t)); \quad \det(\mathbf{R}(\mathbf{x}(t))) \neq 0 \\ & \hspace{15em} (II.6.1.6) \\ 2. \quad & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}_{oc} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{oc} \mathbf{f}^*(\mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

erfüllen, so ist die Gleichung (III.6.1.5) immer erfüllt. (Die Matrizen \mathbf{B}_{oc} und \mathbf{A}_{oc} wurden im Abschnitt (II.1.2) eingeführt).

Beweis des Satzes 18 :

Setzt man die Bedingungen (III.6.1.6) in (III.6.1.4) ein, so kann man, mit Hilfe des Satzes 6, Gleichung (III.6.1.4) vereinfachen :

$$\begin{aligned} \Pi^*(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{I} - \mathbf{B}_{oc} \mathbf{R}(\mathbf{x}(t)) [\mathbf{C} \mathbf{B}_{oc} \mathbf{R}(\mathbf{x}(t))]^{-1} \mathbf{C} \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{B}_{oc} \mathbf{R}(\mathbf{x}(t)) [\mathbf{R}(\mathbf{x}(t))]^{-1} \mathbf{C} \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{B}_{oc} \mathbf{C} = \Pi \end{aligned}$$

Damit kann die Aussage des Satzes sofort bewiesen werden :

$$\begin{aligned} \Pi^*(\mathbf{x}(t)) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) &= \Pi \mathbf{A}_{oc} \mathbf{x}(t) + \Pi \mathbf{B}_{oc} \mathbf{f}^*(\mathbf{x}(t)) \\ &= \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_{oc} - \mathbf{B}_{oc}) \mathbf{f}^*(\mathbf{x}(t)) \\ &= \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

EdB.

Falls der Gleitzustand existiert, verhält sich das betrachtete System (III.6.1.1) wie das äquivalente System (II.3.5.2). Ob der Gleitzustand für das betrachtete System und den eingesetzten Regler stabil ist, muss zuerst noch untersucht werden. Wegen der nichtlinearen Systemgleichung kann dieser Beweis i.a. nicht für eine beliebige Differentialgleichung erbracht werden.

Im nächsten Abschnitt wird eine ausführliche Analyse eines Roboters durchgeführt werden, welcher zu der durch Bedingungen (III.6.1.6) definierten Klasse von Systemen gehört. In diesem Beispiel wird auch gezeigt werden, wie das Stabilitätsproblem gelöst werden kann.

Systeme des Typs (III.6.2.3) erfüllen die Bedingungen (III.6.1.6) des Satzes 18 und verhalten sich deswegen im Gleitzustand wie das äquivalente System (II.3.5.2). Deswegen können beide der im vorhergehenden Abschnitt aufgeführten Wege beschritten werden. Da das direkte Anstreben von Gleitzuständen interessanter ist, wird diese Vorgehensweise an einem "zylindrischen" Roboter demonstriert.

Beispiel Roboter ACR

In [10] wurde für den Roboter ACR mit Hilfe des Pontryaginschen Minimum-Prinzips zeitoptimale Trajektorien gefunden. Bei der Implementierung der zeitoptimalen Steuergesetze hat man in der Praxis mit den üblichen Schwierigkeiten (ungenauere Kenntnis der Parameter, vernachlässigte Reibungseffekte, etc.) zu kämpfen. Deswegen wird man i.a. mit Hilfe eines überlagerten Reglers versuchen, den realen Roboter wenigstens in der Nähe des zeitoptimalen Verhaltens zu halten. Natürlich ist man gezwungen einen Teil der globalen Steuerleistung für den überlagerten Regler zu reservieren.

Die in dieser Arbeit untersuchten RVS sind für die oben erwähnte Aufgabe bestens geeignet, welche als Folgeregelungsproblem formuliert wird:

- Gegeben : Nominal-Strecke (Referenz-Modell)

$$\dot{z}(t) = \mathbf{Q} z(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^{-1}(z(t)) [f(z(t)) + w(t)]$$

Partikuläre Lösung (zeitoptimal für das Referenzmodell)

$$z_p(t), w_p(t)$$

Reale Strecke

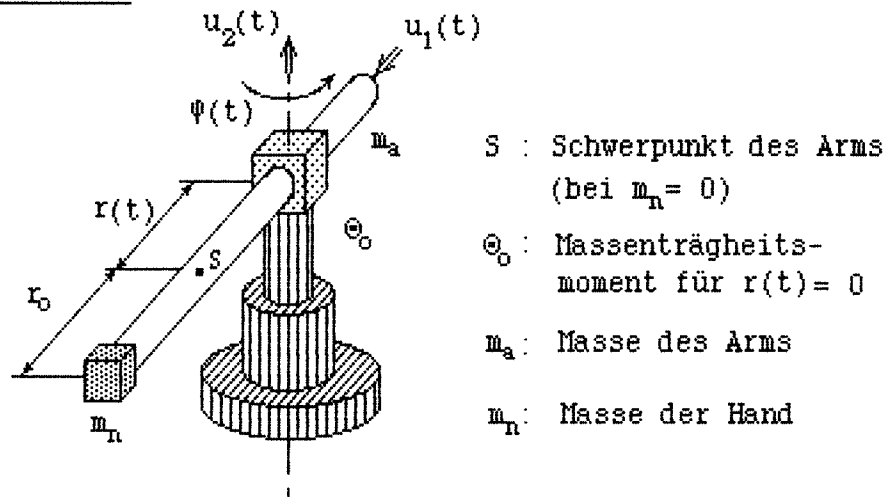
$$\dot{x}(t) = \mathbf{Q} x(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^{*-1}(x(t)) [f^*(x(t)) + u(t)]$$

- Gesucht : Regler $u(t) = g(x(t), z(t), w(t))$

so dass der Fehler $e(t) = x(t) - z(t)$ für alle Zeiten möglichst klein ist.

Im untenstehenden Bild (III.6.2.1) ist eine schematische Darstellung der in diesem Beispiel verwendeten Koordinaten und Bezeichnungen angegeben.

Roboter ACR :



Mit den Zustandsvariablen :

$$\begin{aligned}
 r(t) &= z_1(t); & \dot{r}(t) &= z_2(t) \\
 \varphi(t) &= z_3(t); & \dot{\varphi}(t) &= z_4(t)
 \end{aligned}$$

erhält man die Differentialgleichung des Referenz-Modells :

$$\dot{z}(t) = \mathbf{Q} z(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^{-1}(z(t)) [f(z(t)) + w(t)]$$

$$\mathbf{M}(z(t)) = \begin{bmatrix} m_a + m_n & 0 \\ 0 & \Theta_0 + z_1^2(t) m_a + (r_0 + z_1(t))^2 m_n \end{bmatrix}$$

$$f(z(t)) = \begin{bmatrix} [m_a z_1(t) + m_n (r_0 + z_1(t))] z_4(t)^2 \\ -2 [m_a z_1(t) + m_n (r_0 + z_1(t))] z_2(t) z_4(t) \end{bmatrix}$$

(III.6.2.5)

Der reale Roboter wird in dem hier untersuchten Fall nicht durch diese Gleichung beschrieben, da die Handlast $m_n + \delta m_n(t)$ während des Montagevorgangs variabel ist.

Die Zusatzlast $\delta m_n(t)$ ist unbekannt, lässt sich aber durch die folgende Beziehung eingrenzen :

$$\delta m_{n,\min} < \delta m_n(t) < \delta m_{n,\max}$$

Man beachte, dass die Zusatzlast sich sowohl auf die Massen-Matrix $\mathbf{M}(x(t))$, wie auch auf die Funktion $f(x(t))$ auswirkt.

$$\dot{x}(t) = \mathbf{Q} x(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^{-1}(x(t)) [f^*(x(t)) + u(t)]$$

Wie beim linearen Folgeregelungsproblem wird die gewünschte Fehlerdynamik durch die Wahl von $n-m=2$ Eigenwerten vorgegeben. Die Definition des Schaltvektors lautet hier :

$$s(t) = C e(t) \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.6.2.6})$$

Der für die oben eingeführte Folgeregelungsaufgabe geeignete Regler ist eine vereinfachte Version des Reglers (II.4.3.1) :

$$u(t) = w(t) - D_e \text{sign}(s(t))|e(t)| - D_x \text{sign}(s(t))|x(t)| - D_w \text{sign}(s(t))|w(t)| \quad (\text{III.6.2.7})$$

Die diagonalen 2×2 Matrizen D_e , D_x und D_w sind die noch unbekanntenen Reglerverstärkungen. Man beachte, wie einfach die Realisierung dieses Reglers ist.

Verhalten im Gleitzustand

Obwohl noch nicht gezeigt ist, dass der Gleitzustand stabil ist, wird als erstes das Verhalten des gleitenden Systems untersucht. Dieses Vorgehen wird den anschliessenden Stabilitätsbeweis ermöglichen.

Der äquivalente Steuervektor lautet :

$$u_{eq}(t) = -H^*(x(t))\{C O e(t) + H^{*-1}(x(t))f^*(x(t)) - H^{-1}(z(t))f(z(t)) - H^{-1}(z(t))w(t)\}$$

Setzt man diesen Steuervektor in die Differentialgleichung des Fehlers ein, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen :

$$\dot{e}_{eq}(t) = \Pi O e(t)$$

Die Fehlerdynamik ist linear und entkoppelt. Ihre Eigenwerte sind :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -c_1 & \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -c_2 & \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wiederum kann man zeigen, dass die Eigenwerte im Ursprung auf das gleitende System keinen Einfluss haben, da die entsprechenden Richtungen nicht angeregt sind.

Für den Stabilitätsbeweis ist vor allem die Feststellung wichtig, dass falls es einen Zeitpunkt t^{**} gibt, für welchen der Fehler $e(t^{**})$ verschwindet, und dass falls für alle $t > t^{**}$ der Gleitzustand erhalten bleibt, der Fehler $e(t)$ für alle $t > t^{**}$ verschwindet.

Stabilitätsproblem :

Die Frage, welchen Bedingungen die Reglerverstärkungen zu genügen haben, damit der Gleitzustand stabil ist, muss noch beantwortet werden. Im hier untersuchten Beispiel wird angenommen, dass die Anfangszustände beider Systeme gleich sind (d.h. $e(t_0) = 0$). Der Stabilitätsbeweis ist induktiv; ausgehend vom Anfangszustand $e(t_0)=0$, bzw. $s(t_0)=0$ werden Bedingungen gesucht, welche garantieren, dass der Gleitzustand im nächsten Zeitinkrement nicht verlassen wird. In diesem Fall muss der Fehler auch Null bleiben. Wenn diese Ueberlegung für alle Zeiten gilt, so ist damit die Stabilität des Systems bewiesen.

Die Methode, mit welcher die Stabilität untersucht wird, ist die gleiche, die im linearen Fall verwendet wurde. Ausgehend von der Ljapunow-Funktion (II.3.4.2) werden Bedingungen gesucht, welche garantieren, dass auch im schlechtesten Fall die Ableitung von (II.3.4.2) ausserhalb der Gleitmannigfaltigkeit negativ ist.

Mit Hilfe der Differentialgleichung (III.6.2.5), der Definition (III.6.2.6) und des Reglers (III.6.2.7) kann die Ableitung des Schaltvektors gefunden werden. Benutzt man die Voraussetzung, dass der Zustand $x(t)$ für alle Zeiten mit $z(t)$ identisch ist, so erhält man daraus die folgenden Bedingungen für die Reglerverstärkungen (die Zwischenschritte werden weggelassen, da sie zwar einfach durchzuführen, jedoch umständlich darzustellen sind) :

Bedingung für d_{w1} :

$$d_{w1} > \max_t \left\{ \frac{|\delta m_n(t)|}{m_s + m_n} \right\}$$

Bedingungen für d_{w2} :

$$\Theta(t) = \Theta_0 + m_s x_1(t)^2 + m_n (r_0 + x_1(t))^2$$

$$d_{w2} > \max_t \left\{ \frac{|\delta m_n(t)| (r_0 + x_1(t))^2}{\Theta(t)} \right\}$$

Bedingung für d_{x1} :

$$\delta_1(t) = \frac{-\delta m_n(t)}{(m_s + m_n)(m_s + m_n + \delta m_n(t))}$$

$$\rho_1(t) = \left\{ \frac{\delta m_n(t)}{m_s + m_n} (r_0 + x_1(t)) + \delta_1(t) [m_s x_1(t) + (m_n + \delta m_n(t))(r_0 + x_1(t))] \right\} x_1^2$$

$$d_{x1} > \max_t \left\{ \frac{|\rho_1(t)| (m_s + m_n + \delta m_n(t))}{|x(t)|} \right\}$$

Bedingungen für d_{x2} :

$$\delta_2(t) = \frac{-\delta m_n(t)(r_o + x_1(t))^2}{[\Theta_o + m_s x_1(t)^2 + (m_n + \delta m_n(t))(r_o + x_1(t))^2] \Theta(t)}$$

$$\rho_2(t) = \delta m_n(t)(r_o + x_1(t)) \frac{1}{\Theta(t)} + \delta_2(t)[m_s x_1(t) + (m_n + \delta m_n(t))(r_o + x_1(t))]$$

$$d_{x2} > \max_t \left\{ \frac{|-2 \rho_2(t) x_2(t) x_4|}{\left[\frac{1}{\Theta(t)} + \delta_2(t) \right] |\mathbf{x}(t)|} \right\}$$

Bedingungen für d_{e1} und d_{e2} :

$$d_{e1} > 0 \quad ; \quad d_{e2} > 0$$

Man sieht, dass die hinreichenden Stabilitätsbedingungen im nichtlinearen Fall bedeutend schwieriger zu formulieren sind als bei linearen Systemen. Die Existenz der Verstärkungen ist aber gesichert, da die Masse, bzw. das Trägheitsmoment nie verschwinden kann.

Zur Bestimmung der Verstärkungen wird die optimale Lösung $z_p(t)$, $w_p(t)$ benutzt, da der Fehler für alle Zeiten verschwinden muss, falls er zur Zeit t_o bereits Null ist. Bei der Berechnung der Schranken ist in den obigen Bedingungen also überall $x_1(t)$ durch $z_1(t)$ zu ersetzen. Durch Simulation des Referenzmodells findet man dann die Verstärkungen.

Die Reglerverstärkungen d_{e1} und d_{e2} können auch Null gewählt werden, da die anderen Bedingungen die Stabilität des Gleitzustandes alleine schon garantieren. Wählt man sie grösser als Null, so wird dadurch die Stabilität bei eventuellen Fehlern (z.B. numerischer Natur) tendenziell verbessert.

Numerische Simulation :

Die zur Simulation verwendeten Daten lauten :

$$m_a = 3.7 \text{ (kg)} \quad m_n = 4.6 \text{ (kg)} \quad 0 \leq \delta m_n(t) \leq 2 \text{ (kg)}$$

$$r_o = 0.37 \text{ (m)} \quad \Theta_o = 0.37 \text{ (m}^2 \text{ kg)}$$

Die Montageaufgabe besteht darin, einen Gegenstand bei $r(t_o) = 0.15$ und $\varphi(t_o) = 0$ aufzunehmen und ihn bei $r(t_1) = 0.15$ und $\varphi(t_1) = \pi$ geschwindigkeitsfrei abzusetzen.

Der Steuervektor $w_p(t)$, der diese Aufgabe bei beschränkten Steuersignalen zeitoptimal bewerkstelligt, wurde in [10] bestimmt :

$$0 < t < 0.382 \quad w_1(t) = -15 \text{ (N)} \quad w_2(t) = 5 \text{ (Nm)}$$

$$0.382 < t \leq 0.582 \quad w_1(t) = 15 \text{ (N)} \quad w_2(t) = 5 \text{ (Nm)}$$

$$0.582 < t \leq 0.782 \quad w_1(t) = 15 \text{ (N)} \quad w_2(t) = -5 \text{ (Nm)}$$

$$0.782 < t \leq 1.164 \quad w_1(t) = -15 \text{ (N)} \quad w_2(t) = -5 \text{ (Nm)}$$

Durch eine vorgängige numerische Simulation des Referenzmodells mit diesen Werten können die gesuchten Reglerverstärkungen gefunden werden. Die resultierenden Reglerverstärkungen sind :

$$d_{w1} > 0.314... \quad d_{w2} > 0.477...$$

$$d_{x1} > 1.606... \quad d_{x2} > 2.024...$$

In den folgenden zwei Simulationen wurden die Verstärkungen d_{e1} und d_{e2} gleich Null gewählt.

Das Bild III.6.2.1 zeigt das Verhalten des Systems, falls die zusätzliche Handlast $\delta m_n(t)$ die angenommene Schranke respektiert.

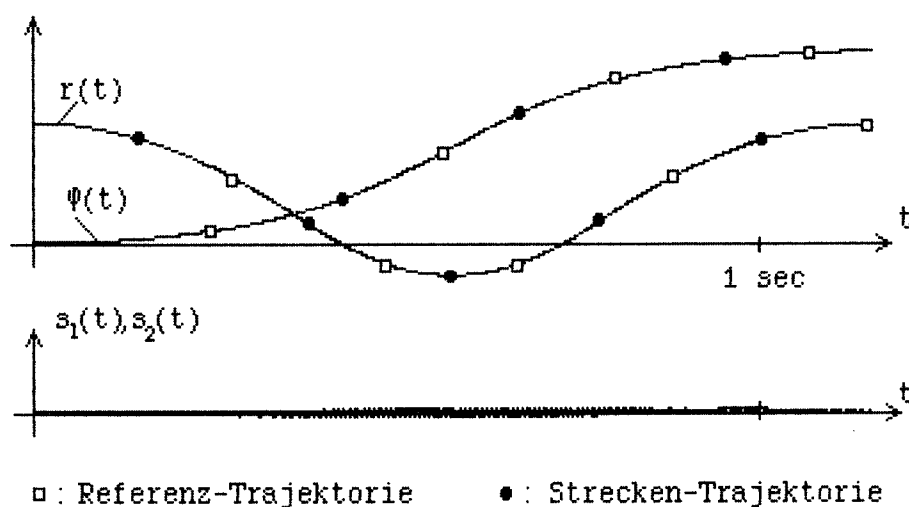
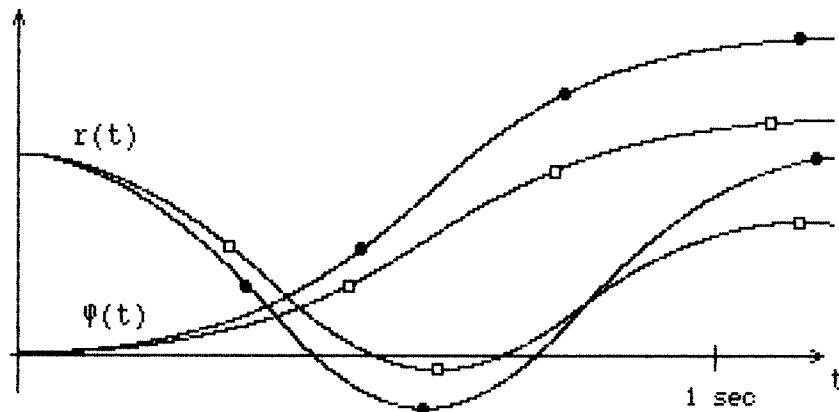


Bild III.6.2.1

Wie erwartet, fallen die Trajektorien des Referenzmodells und der Strecke zusammen. Die kleinen, hochfrequenten Abweichungen der Schaltvariablen von der Nulllage sind eine Folge des notwendigerweise endlichen Integrations schritts.

Falls die Reglerverstärkungen die Stabilitätsbedingungen nicht erfüllen, ergibt sich das im Bild III.6.2.2 gezeigte Verhalten.



□: Referenz-Trajektorie ●: Strecken-Trajektorie

Bild III.6.2.2

In diesem Fall gelingt es dem Regler nicht mehr den Gleitzustand aufrecht zu erhalten. Dementsprechend weichen die Zustände des Referenzmodells und der Strecke voneinander ab.

Zusammenfassung III.6.2 :

In diesem Abschnitt wurde eine Klasse von nichtlinearen Systemen definiert, für welche gezeigt wurde, dass prinzipiell immer ein ideales Verhalten erreicht werden kann.

Benutzt man die Methode der Linearisierung, so stellen sich keine neuen Probleme, insbesondere können die im Kapitel II eingeführten Regler verwendet werden.

Strebt man direkt Gleitzustände an, so stellt sich die nichttriviale Frage nach den hinreichenden Stabilitätsbedingungen für die Reglerverstärkungen. In einem Beispiel wurde gezeigt, wie man in einem solchen Fall vorgehen kann.

Die durchgeführten Simulationen haben die Tauglichkeit des vorgeschlagenen Reglers mit variabler Struktur bestätigt.

IV. ERWEITERTES GLEITEN

IV.1. Einführung

IV.1.1. Systembeschreibung, Annahmen

Im zweiten Kapitel wurde gezeigt, dass ein dynamisches System asymptotisch stabil ist, falls sein Zustand $\mathbf{x}(t)$ auf m Gleitebenen gefesselt ist, vorausgesetzt, dass die zur Konstruktion der Matrix \mathbf{C} verwendeten Eigenwerte in der linken Halbebene liegen.

Falls der Zustandspunkt nun nicht mehr exakt auf $\mathbf{s}(t) = \mathbf{0}$ fixiert bleibt, sondern sich in der "näheren" Umgebung der Gleit-Hyperebenen aufhält, ist es intuitiv klar, dass die Stabilitätseigenschaft nicht unbedingt verloren gehen muss.

Aus diesem Grunde befassen sich die Abschnitte IV.2.1 und IV.2.2 mit der Frage, wie das Gleitebenen-Prinzip auf solche Fälle verallgemeinert werden kann. Es werden Aussagen gemacht, welchen Bedingungen ein Gebiet zu gehorchen hat, damit ein System, dessen Zustand für alle Zeiten in ihm bleibt, asymptotisch stabil ist. Es wird sich herausstellen, dass das "equivalent-control"-Prinzip [1] als Spezialfall der untenstehenden Betrachtungen interpretiert werden kann.

Der Abschnitt IV.2.3 beschäftigt sich mit der allgemeinen Formulierung der Kriterien, welche garantieren, dass der Zustand im betrachteten Gebiet bleibt. Um diese Frage vollständig beantworten zu können, muss die betreffende Problemstellung analysiert werden.

In diesem vierten Kapitel wird angenommen, dass das betrachtete System nur einen Eingangskanal besitzt ($m=1$). Die meisten der anschliessend aufgeführten Überlegungen lassen sich aber auf den multivariablen Fall erweitern.

Die Klasse aller zugelassenen Systeme ist durch die folgenden Gleichungen definiert :

$$\text{Strecke : } \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{b}_0 + \delta\mathbf{b}(t)) u(t)$$

$$\text{Regler : } u(t) = -\mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{y}(t) - d \operatorname{sign}(\mathbf{c} \mathbf{y}(t)) |\mathbf{y}(t)| \quad (\text{IV.1.1.1})$$

$$\text{Messeinrichtung : } \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n; \quad u(t) \in \mathfrak{R}^1; \quad \mathbf{y}(t), \mathbf{r}(t) \in \mathfrak{R}^n$$

Die Parameterstörungen $\delta\mathbf{A}(t)$ und $\delta\mathbf{b}(t)$ erfüllen die Bedingungen (II.1.2.2/3). Die Störung $\mathbf{r}(t)$ ist unbekannt und es werden noch keine Bedingungen an sie geknüpft. Man beachte, dass diese Formulierung sehr allgemein ist (verrauschte Messungen, Einsatz von Beobachtern, etc.).

IV.1.2. Einführendes Beispiel

Zur Einführung wird ein geregeltes System zweiter Ordnung betrachtet :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -c x_2(t) + f(x_1(t), x_2(t), t) \quad (\text{IV.1.2.1})$$

Die Gleitgerade ist wie üblich als Linearkombination der Zustände definiert :

$$s(t) = c x_1(t) + x_2(t)$$

Wegen irgendwelchen Störeinflüssen kann der verwendete Regler den Zustand des Systems (IV.1.2.1) nur in der "Nähe" der Gleitgeraden halten. Bild IV.1.2.1 zeigt einen Fall, bei dem das System zwar nicht mehr perfekt gleitet, die asymptotische Stabilität jedoch erhalten geblieben ist.

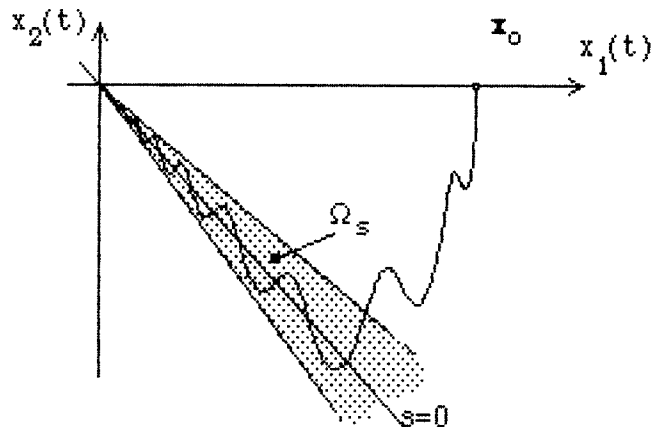


Bild IV.1.2.1

Natürlich ist man daran interessiert Angaben über die Grösse des stabilen Gebietes Ω_s machen zu können.

Voraussetzung:

Es wird angenommen, dass der Zustandspunkt, sobald er einmal in Ω_s eingetreten ist, für alle Zeiten darin enthalten bleibt (die Eintrittszeit sei t^*).

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $x_1(t^*)$ positiv ist. Da $\mathbf{x}(t)$ immer in Ω_s enthalten ist, wird $x_1(t)$ für $t > t^*$ nie negative Werte annehmen können. Die linke Halbebene kann völlig analog untersucht werden.

Für das stabile Gebiet wird folgender Ansatz gemacht :

$$\Omega_s := \{ \mathbf{x}(t) : k_2 x_1(t) \leq x_2(t) \leq k_1 x_1(t) ; x_1(t) > 0 \}$$

Behauptung :

Falls die Voraussetzung erfüllt ist und k_1, k_2 die Bedingung

$$-\infty \leq k_2 \leq k_1 < 0 \quad (\text{IV.1.2.2})$$

erfüllen, ist das System (IV.1.2.1) asymptotisch stabil :

Beweis :

Der Beweis wird mit Hilfe der folgenden Ljapunow-Funktion geführt :

$$v(t) = x_1^2(t) > 0 \quad \forall x_1(t)$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) = 2 x_1(t) \dot{x}_1(t) = 2 x_1(t) x_2(t)$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) < 0 \quad \forall x_1(t), x_2(t) \in \Omega_s$$

Bedingung (IV.1.2.2) garantiert, dass $v(t)$ immer kleiner als Null ist, und dass demzufolge $x_1(t)$ gegen Null gehen muss. Da der Zustandspunkt aber nach Voraussetzung immer in Ω_s bleibt, muss auch $x_2(t)$ gegen Null gehen.

EdB.

Leider ist dieses Vorgehen für Systeme höherer Ordnung nicht anwendbar, da erstens die Definitionsgleichung für Ω_s nicht mehr linear sein kann und zweitens keine einfache Aussage über die Vorzeichen der Zustände mehr möglich ist.

Diese Schwierigkeiten können überwunden werden, wenn statt des gesamten stabilen Gebietes nur ein Teil davon gesucht wird (man begnügt sich mit hinreichenden aber nicht notwendigen Stabilitätskriterien).

Betrachtet man Bild IV.1.2.1 wird folgender Ansatz für eine Koordinatentransformation $\mathbf{x}(t) = \Phi \boldsymbol{\varphi}(t)$ plausibel :

$$\Phi = (1 + c^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{bmatrix}$$

Die Koordinatentransformation Φ ist eine Drehung um den Winkel $\alpha = \text{Arctg}\{c\}$, d.h. die $x_1(t)$ -Achse wird auf die Gleitgerade und die $x_2(t)$ -Achse auf den Vektor $[c \ 1]^T$ gedreht. Die symmetrische Definition des gesuchten stabilen Gebiets im neuen Koordinatensystem lautet nun :

$$\Omega_k := \{ \boldsymbol{\varphi}(t) : \varphi_2^2(t) < \lambda^2 \varphi_1^2(t) \}$$

Das Gebiet Ω_k beschreibt zwei Keile mit Öffnungswinkel $\beta = 2 \operatorname{Arctg}\{\lambda\}$ und Spitzen im Ursprung :

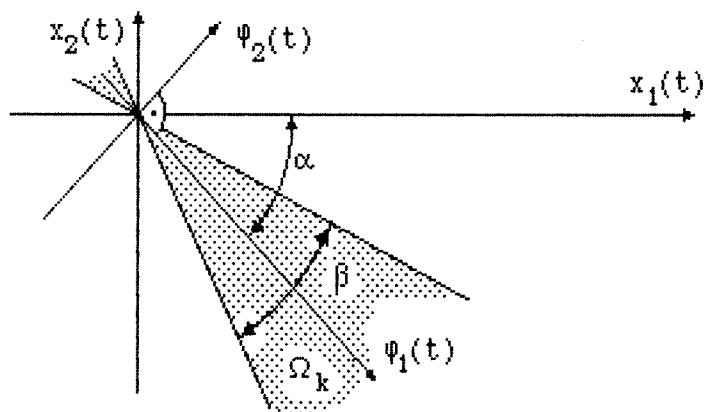


Bild IV.1.2.2

Der Winkel β kann mit Hilfe der Bedingung (IV.1.2.2) gefunden werden :

$$\begin{array}{ll} \beta/2 < \alpha & \text{falls } \alpha < \pi/4 \\ \beta/2 < \pi/2 - \alpha & \text{falls } \alpha > \pi/4 \end{array}$$

Daraus folgt die entsprechende Schranke für den Parameter λ :

$$\lambda < \min\{c, 1/c\}$$

Die Frage, wie man garantieren kann, dass $\mathbf{x}(t)$ in Ω_k bleibt, kann nur dann beantwortet werden, wenn man die Funktion $f(x_1(t), x_2(t), t)$ in der Gleichung (IV.1.2.1) genauer kennt. Die dazu benutzten Methoden werden im Abschnitt (IV.2.3) eingeführt und anschliessend auf spezielle Problemstellungen angewendet werden.

IV. 2. Stabiles Gebiet

IV.2.1. Asymmetrisches Gebiet

Falls die Parameterstörungen die Rangbedingungen (II.1.2/3) erfüllen, kann das geschlossene System (IV.1.1.1) immer in die, in Kapitel II eingeführte, kanonische Form gebracht werden :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_0 f(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t), t) \quad (\text{IV.2.1.1})$$

Die gesamte Störung $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t), t)$, die sich aus einem inneren Teil $(\delta \mathbf{A}(t), \delta \mathbf{b}(t))$ und aus einem äusseren Teil $(\mathbf{r}(t))$ zusammensetzt, kann demzufolge nur auf die Differentialgleichung des letzten Elementes von $\mathbf{x}(t)$ direkt einwirken (die Struktur der Matrizen \mathbf{A}_{eq} und \mathbf{b}_0 ist im Abschnitt II.3.5 bzw. II.2.1 angegeben).

Als erster Schritt wird die bereits im Abschnitt II.3.5 eingeführte Koordinatentransformation (II.3.5.5) vorgenommen :

$$\mathbf{T} \boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}(t)$$

Für das so transformierte System kann der reduzierte Zustandsvektor $\boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t)$ gemäss Definition (II.3.5.6) eingeführt werden :

$$\boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) \in \mathfrak{R}^{n-1}$$

Im Unterschied zur Gleichung (II.3.5.7) wirken jetzt aber noch die zusätzlichen Störungen auf das System ein. Dadurch wird die Schaltvariable $s(t) = \varphi_n(t)$ nicht mehr identisch verschwinden (siehe auch Bild II.3.6.1) :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{red}}(t) = \mathbf{N} \boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t) + \mathbf{b}_{0,\text{red}} \varphi_n(t) \quad (\text{IV.2.1.2})$$

$$\mathbf{b}_{0,\text{red}} = [0 \dots 0 \ 1]^T ; \quad \mathbf{b}_{0,\text{red}} \in \mathfrak{R}^{n-1}$$

Gesucht ist nun eine Schranke für $s(t)$, welche garantiert, dass (IV.2.1.1) trotzdem asymptotisch stabil bleibt. Diese Schranke wird die Definition des gesuchten Gebietes darstellen.

Das stabile Gebiet wird folgendermassen angesetzt :

$$\Omega_s := \{ \boldsymbol{\varphi}(t) : |\varphi_n(t)| < \alpha |\boldsymbol{\varphi}_{\text{red}}(t)| \} \quad (\text{IV.2.1.3})$$

Die geometrische Interpretation ist analog zum zweidimensionalen Fall. Es wird ein Gebiet um $\varphi_n(t) = s(t) = 0$ definiert, wobei es mit abnehmendem Betrag des Zustandes auch abnehmen soll. Dadurch hat man erreicht, dass die Stabilitätsfrage nicht mehr an Hand der Gleichung (IV.2.1.1), sondern an Hand von geometrischen Ueberlegungen beantwortet werden kann.

Im allgemeinen wird die Matrix \mathbf{N} , da sie ja frei wählbar ist, stabil sein. Demzufolge existiert eine positiv definite Matrix $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ welche zur Konstruktion der folgenden Ljapunow-Funktion beigezogen werden kann:

$$v(t) := \mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{q}_{\text{red}}(t) > 0 \quad \forall \quad \mathbf{q}_{\text{red}}(t) \neq \mathbf{0}$$

Die Matrix \mathbf{P} ist die Lösung der untenstehenden Ljapunow-Gleichung :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{N} = - \mathbf{I}$$

Berechnet man die Ableitung der Ljapunow-Funktion $v(t)$ für das System (IV.2.1.2), so findet man:

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{q}_{\text{red}}(t) + 2 \varphi_n(t) \mathbf{b}_{0,\text{red}}^T \mathbf{P} \mathbf{q}_{\text{red}}(t)$$

Der Vektor \mathbf{p}_{n-1} ist die letzte Kolonne der symmetrischen Matrix \mathbf{P} . Mit dieser Definition kann der obenstehende Ausdruck vereinfacht werden :

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{q}_{\text{red}}(t) + 2 \varphi_n(t) \mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{p}_{n-1}$$

Satz 19 :

Falls der Zustand $\mathbf{q}(t)$ für alle Zeiten $t > t^*$ in Ω_s gemäss (IV.2.1.3) enthalten ist, und der Parameter α die Bedingung

$$\alpha < 1 / (2 |\mathbf{p}_{n-1}|) \quad (\text{IV.2.1.4})$$

erfüllt, ist das System (IV.1.1.1) asymptotisch stabil.

Beweis des Satzes 19 :

Damit das reduzierte System (IV.2.1.2) asymptotisch stabil ist, muss die Ableitung der Ljapunow-Funktion negativ sein. Falls der Parameter α die Bedingung (IV.2.1.4) erfüllt, ist dies der Fall :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &\leq -\mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{q}_{\text{red}}(t) + 2 |\varphi_n(t)| |\mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{p}_{n-1}| \\ &\leq (- 1 + 2 \alpha |\mathbf{p}_{n-1}|) \mathbf{q}_{\text{red}}(t)^T \mathbf{q}_{\text{red}}(t) < 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der reduzierte Zustand $\mathbf{q}_{\text{red}}(t)$ asymptotisch gegen Null geht. Da aber der Zustand $\mathbf{q}(t)$ nach Voraussetzung in Ω_s enthalten ist, muss auch $\varphi_n(t)$ gegen Null gehen.

EdB.

Man beachte, dass die Bedingung (IV.2.1.4) zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist, d.h. das gesamte stabile Gebiet ist i.a. grösser als Ω_s .

Es bleibt nun noch zu überlegen, was bei der Rücktransformation von $\mathbf{q}(t)$ auf $\mathbf{x}(t)$ geschieht.

Wenn man den reduzierten Zustandsvektor $\mathbf{x}_{\text{red}}(t)$ folgendermassen definiert :

$$\mathbf{x}^T(t) = [\mathbf{x}_{\text{red}}^T(t) \mid x_n]$$

$$\mathbf{x}_{\text{red}}^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \dots x_{n-1}(t)]^T$$

stellt man fest, dass $\Phi_{\text{red}}(t)$ gleich $\mathbf{x}_{\text{red}}(t)$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (II.3.5.5) der Transformation \mathbf{T} .

Es wurde bereits gesagt, dass $\Phi_n(t) = s(t)$ ist. Deswegen kann für das stabile Gebiet die Definition (IV.2.1.5) gegeben werden :

$$\Omega_s := \{ \mathbf{x}(t) : |\mathbf{c} \mathbf{x}(t)| \leq \alpha |\mathbf{x}_{\text{red}}(t)| \} \quad (\text{IV.2.1.5})$$

Der letzte Schritt besteht darin, eine explizite geometrische Bedingung anzugeben. Zu diesem Zweck wird der Vektor \mathbf{c} ebenfalls in zwei Teile aufgespalten:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_{\text{red}} \mid 1] \quad ; \quad \mathbf{c}_{\text{red}} = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}]$$

Dann wird die Bedingung (IV.2.1.5) an ihren Extremen ausgewertet, d.h. das " \leq " Zeichen wird durch das "=" Zeichen ersetzt :

$$|\mathbf{c} \mathbf{x}(t)|^2 = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{c}^T \mathbf{c} \mathbf{x}(t) = \alpha^2 \mathbf{x}_{\text{red}}^T(t) \mathbf{x}_{\text{red}}(t)$$

$$\{\mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}}(t)\}^2 + 2 x_n(t) \mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}}(t) + x_n^2(t) = \alpha^2 \mathbf{x}_{\text{red}}^T(t) \mathbf{x}_{\text{red}}(t)$$

Diese Gleichung wird nach $x_n(t)$ aufgelöst und man erhält eine zum zweidimensionalen Fall analoge, asymmetrische Definition des stabilen Gebietes :

$$\Omega_s := \{ \mathbf{x}(t) : -\alpha |\mathbf{x}_{\text{red}}(t)| \leq x_n(t) + \mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}}(t) \leq \alpha |\mathbf{x}_{\text{red}}(t)| \} \quad (\text{IV.2.1.6})$$

Die geometrische Interpretation von Bedingung (IV.2.1.6) besagt, dass $x_n(t)$ nur um einen gewissen, der Länge des Vektors $\mathbf{x}_{\text{red}}(t)$ proportionalen Betrag von seiner Sollposition auf der Gleit-Hyperebene abweichen darf. Falls man garantieren kann, dass dies für alle Zeiten $t > t^*$ gilt, so folgt aus dem Satz 19, dass das geschlossene System (IV.1.1.1) asymptotisch stabil ist.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird ein Satz bewiesen, der weiter unten gebraucht wird.

Satz 20 :

Der Vektor \mathbf{b}_0 kann nicht in Ω_s enthalten sein.

Beweis des Satzes 20 :

Mit der Definition (IV.2.1.6) für Ω_s und mit der Feststellung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_{\text{red}}(t) = \mathbf{0} ; x_n(t) = 1$$

findet man folgenden Widerspruch

$$-\alpha |\mathbf{0}| \leq 1 + \alpha_{\text{red}} \mathbf{0} \leq \alpha |\mathbf{0}|$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 \leq 0$$

Diese Ungleichung ist nicht erfüllbar, demzufolge kann der Vektor \mathbf{b}_0 nicht im stabilen Gebiet Ω_s enthalten sein.

EdB.

IV.2.2. Symmetrisches Gebiet

Die Definition (IV.2.1.6) von Ω_s ist geometrisch nicht sehr anschaulich und deswegen nicht einfach weiter verwendbar. Besser wäre es, eine symmetrische Definition für Ω_s angeben zu können. Wieder hilft das Beispiel des 2-dimensionalen Systems weiter. Die Verallgemeinerung der in Bild IV.1.2.2 dargestellten Keile, ist im n-dimensionalen Fall gegeben durch einen Hyperkegel, dessen Spitze im Ursprung und dessen Symmetrieachse der Vektor \mathbf{c}^T ist. Der Öffnungswinkel des Hyperkegels ist noch unbekannt und wird in diesem Abschnitt so bestimmt, dass der gesamte Hyperkegel in dem durch Bedingung (IV.2.1.6) definierten Gebiet zu liegen kommt.

Natürlich wird bei dieser Operation ein gewisser Teil des Gebietes Ω_s verloren gehen und die Approximation des tatsächlich stabilen Gebietes schlechter werden. Dies ist jedoch der Preis, der für eine anschauliche Definition des stabilen Gebietes zu zahlen ist. Als erstes wird die allgemeine Definition eines Hyperkegels angegeben:

$$\Omega_K := \{ \mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \} \quad (\text{IV.2.2.1})$$

Die quadratische Matrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch und kann deswegen in jedem Fall diagonalisiert werden :

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^{-1} \quad ; \quad \mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Gamma}^T$$

Damit der Hyperkegel die an ihn gestellten Forderungen erfüllt, müssen über die Matrizen $\mathbf{\Gamma}$ und $\mathbf{\Lambda}$ noch weitere Aussagen gemacht werden :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda^2 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & -\lambda^2 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} | & & | & | \\ \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{n-1} & \frac{\mathbf{c}^T}{|\mathbf{c}|} \\ | & & | & | \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{IV.2.2.2})$$

Die Vektoren \mathbf{y}_i stehen alle senkrecht zum Vektor \mathbf{c}^T , sind also demzufolge in der Mannigfaltigkeit $s(t) = 0$ enthalten. Die Konstruktion der Matrix $\mathbf{\Gamma}$ kann z.B. mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren durchgeführt werden.

Eine Koordinatentransformation mit der Matrix $\mathbf{\Gamma}$ bestätigt, dass der durch die Ungleichung (IV.2.2.1) definierte Körper ein Hyperkegel ist :

$$\text{Transformation : } \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x}(t)$$

$$\text{Kegel : } \mathbf{x}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{x}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^T \boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\xi}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \xi_n^2(t) = \lambda^2 \{ \xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) + \dots + \xi_{n-1}^2(t) \}$$

Bild (IV.2.2.1) gibt eine graphische Darstellung der oben analytisch hergeleiteten Beziehungen für ein System mit drei Zuständen :

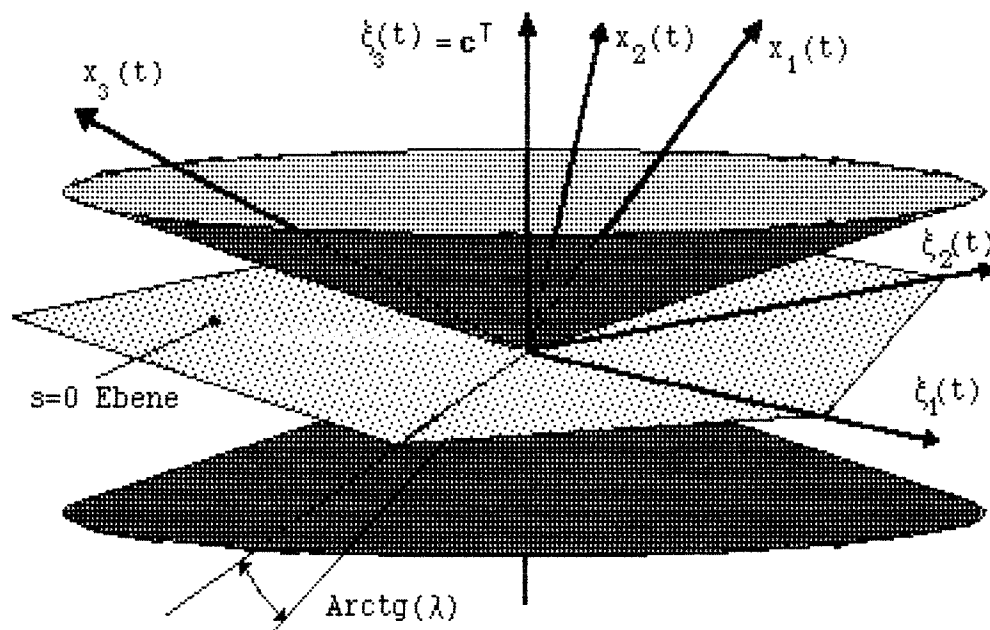


Bild IV.2.2.1

Das orthogonale Komplement des Öffnungswinkels des Hyperkegels ist durch $\text{Arctg}\{\lambda\}$ gegeben. Die Bestimmung dieses Parameters wird mit Hilfe von geometrischen Überlegungen weiter unten erfolgen.

Bemerkung :

Das klassische Gleitebenen-Verfahren kann als Spezialfall der obigen Überlegungen aufgefasst werden. Betrachtet man die n-te Komponente des Vektors $\xi(t)$, so ist leicht einzusehen, dass

$$\xi_n(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) / |\mathbf{c}| = s(t) / |\mathbf{c}|$$

Da im klassischen Gleitebenenverfahren $s(t)=0$ verlangt wird, folgt daraus für den Parameter λ , dass er gleich 0 sein muss, damit beide Formulierungen äquivalent sind. In diesem Falle geht aber der Öffnungswinkel gegen Null und der Hyperkegel degeneriert zu einer Hyperebene (der Rang der Matrix \mathbf{K} reduziert sich auf 1).

Damit werden die beiden Definitionsgleichungen für $s(t)$

$$s(t) := \mathbf{c} \mathbf{x}(t)$$

$$s^2(t) := \mathbf{x}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

äquivalent, da die Matrix \mathbf{K} für λ gleich Null gleich $\mathbf{c}^T \mathbf{c}$ ist. Aus diesem Grund kann man eine Trajektorie, die die Bedingung $\mathbf{x}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \leq 0$ erfüllt, als "erweitertes Gleiten" bezeichnen.

Bestimmung des Parameters λ

Der durch die Bedingung (IV.2.1.6) definierte Teilraum ist asymmetrisch. Gesucht ist ein Parameter λ , der einen symmetrischen Hyperkegel gemäss Gleichung (IV.2.2.1) ergibt, welcher ganz im durch Bedingung (IV.2.1.6) definierten Teilraum enthalten sein soll. Insbesondere stellt dann dieser Hyperkegel ein stabiles Gebiet dar.

Zu diesem Zweck wird derjenige Vektor \mathbf{x} gesucht, der zur Leitlinie des Hyperkegels den grössten Oeffnungswinkel γ einschliesst und gleichzeitig die Bedingung (IV.2.1.6) erfüllt. Dieser Vektor ist eine Mantellinie des gesuchten Hyper-Kegels. Zur Verdeutlichung dieser Ueberlegung zeigt Bild IV.2.2.2 eine Projektion der beiden Gebiete auf die Gleitebene.

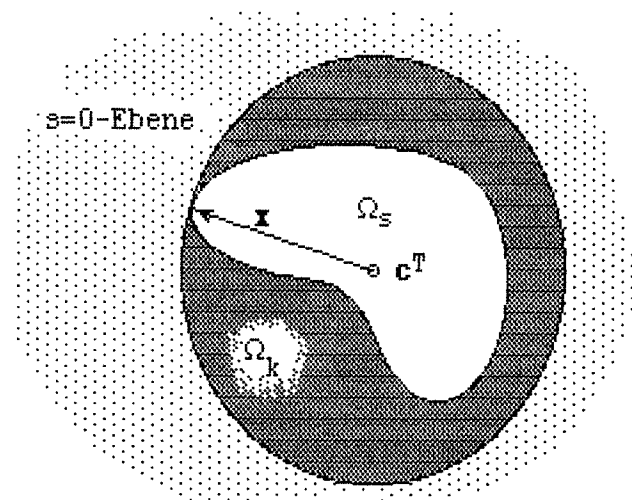


Bild IV.2.2.2

Statt des Oeffnungswinkels selbst wird der Cosinus dieses Winkels betrachtet, der, da die Cosinus-Funktion monoton abnehmend ist, minimiert werden muss.

- Feststellungen :
- Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann der Vektor \mathbf{x}_{red} auf die Länge 1 normiert werden.
 - Bedingung (IV.2.1.6) ist eine Ungleichung. Da man an den Extremwerten interessiert ist, genügt es die Grenzen dieser Ungleichung zu betrachten.
 - Das Problem ist bezüglich des Vorzeichens von α symmetrisch. Es genügt deshalb nur den positiven Fall zu untersuchen.

Präzise Formulierung :

Gesucht ist das Minimum

$$\min_{\mathbf{x}_{\text{red}}} \{ \cos(\gamma) \} = \min_{\mathbf{x}_{\text{red}}} \{ \mathbf{c} \mathbf{x} / (|\mathbf{c}| |\mathbf{x}|) \} \quad (\text{IV.2.2.3})$$

wobei folgende Definitionen

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_{\text{red}} \mid 1] \quad ; \quad \mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{\text{red}}^T \mid x_n]$$

und folgende Nebenbedingungen gelten

$$1.) \quad x_n = - \mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}} + \alpha |\mathbf{x}_{\text{red}}|$$

$$2.) \quad |\mathbf{x}_{\text{red}}| = 1$$

Die erste Nebenbedingung wird direkt in die zu minimierende Beziehung eingesetzt. Das Skalarprodukt $\mathbf{c} \mathbf{x}$ ist selbstverständlich konstant gleich α , da x_n ja dementsprechend gewählt wurde ($|\mathbf{x}_{\text{red}}| = 1$).

Ebenso ist die Norm des Vektors \mathbf{c} konstant. Deshalb kann nur noch die Länge des Vektors \mathbf{x} einen Beitrag an das Minimierungsproblem leisten.

$$|\mathbf{x}| = |[\mathbf{x}_{\text{red}} \mid x_n]| = \{ |\mathbf{x}_{\text{red}}|^2 + (-\mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}} + \alpha |\mathbf{x}_{\text{red}}|)^2 \}^{1/2}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x}| = \{ 1 + (-\mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}} + \alpha)^2 \}^{1/2}$$

Mit diesen Umformungen kann $\cos(\gamma)$ neu geschrieben werden :

$$\cos(\gamma) = \mathbf{c} \mathbf{x} / |\mathbf{c}| |\mathbf{x}| = \alpha / |\mathbf{c}| \{ 1 + (-\mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}} + \alpha)^2 \}^{1/2}$$

Damit $\cos(\gamma)$ minimal wird, muss das folgende Maximierungsproblem gelöst werden :

$$\max_{\mathbf{x}_{\text{red}}} \{ (-\mathbf{c}_{\text{red}} \mathbf{x}_{\text{red}} + \alpha)^2 \}$$

Wenn man sich vergegenwärtigt, dass der Parameter α grösser als Null ist, kann die Lösung direkt angegeben werden :

$$\mathbf{x}_{\text{red}} = - \mathbf{c}_{\text{red}}^T / |\mathbf{c}_{\text{red}}| \quad (\text{IV.2.2.4})$$

Der maximale Öffnungswinkel γ ist demzufolge gegeben durch:

$$\gamma_{\text{max}} = \text{Arcos} \{ \alpha / (|\mathbf{c}| [1 + (|\mathbf{c}_{\text{red}}| + \alpha)^2]^{1/2}) \}$$

Damit findet man für den Parameter λ die Bestimmungsgleichung (IV.2.2.5.) :

$$\rho = \alpha / (|c| [1 + (|c_{red}| + \alpha)^2]^{1/2})$$

$$\lambda = \tan \{ \pi/2 - \text{Arcos}(\rho) \} \quad (\text{IV.2.2.5.})$$

Zusammenfassung IV.2.2 :

In diesem Abschnitt wurde ein Gebiet Ω_K gemäss (IV.2.2.1) gefunden, das für das System (IV.2.1.1) asymptotische Stabilität garantiert, falls der Zustand dieses Systems sich für alle Zeiten im Gebiet aufhält.

Die Analogie zum klassischen Reglerentwurf für Systeme mit variabler Reglerstruktur wurde aufgezeigt. Das gefundene n-dimensionale stabile Gebiet kann als natürliche Erweiterung der (n-1)-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die durch die Gleitebene $s(t)=0$ definiert ist, verstanden werden.

IV. 2. 3. Aufenthaltsbedingungen

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass um die Gleitebene herum ein Gebiet Ω_x existiert, das die Eigenschaft hat, dass ein geschlossenes System (IV.1.1.1) asymptotisch stabil ist, falls dessen Zustand dieses Gebiet nie verlässt.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Bedingungen, welche garantieren, dass der Zustand im Gebiet Ω_x bleibt. Dieses Problem ist nichttrivial und muss für jede spezielle Systemformulierung separat gelöst werden. In diesem Abschnitt werden die generellen Ideen entwickelt, mit deren Hilfe dann die entsprechenden Fälle analysiert werden können.

Bild IV.2.3.1 zeigt das Phasenportrait eines ungestörten Systems zweiter Ordnung, welches durch den Regler (II.3.3.1) zum Gleiten gezwungen wird.

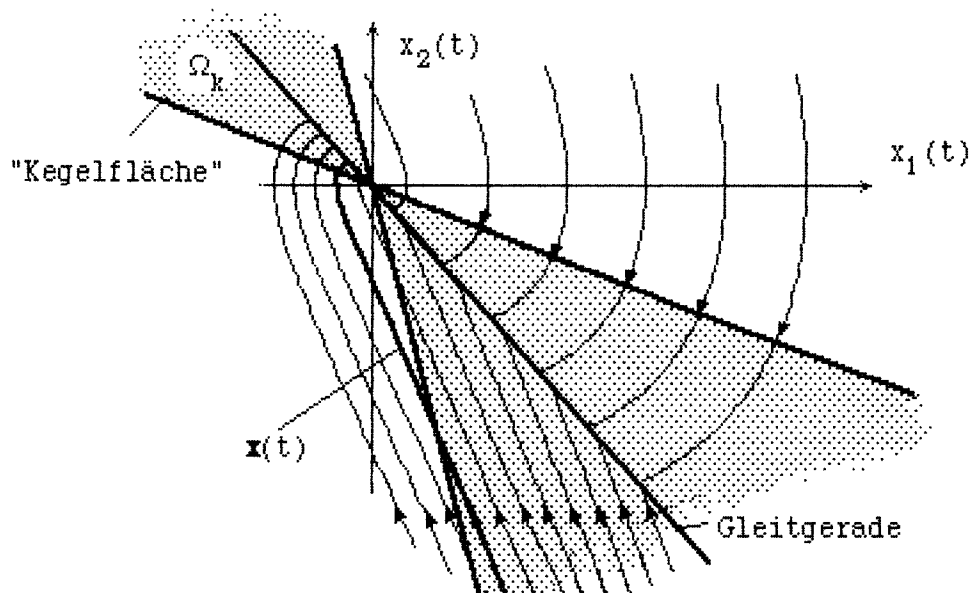


Bild IV.2.3.1

Betrachtet man den Verlauf der dick eingezeichneten Trajektorie $\mathbf{x}(t)$, so stellt man fest, dass diese zwar innerhalb des stabilen Gebietes beginnt, dieses jedoch verlässt, obwohl keine zusätzliche Störung aktiv wurde.

Um den Aufenthalt in Ω_x garantieren zu können, müssen offenbar zusätzliche Anstrengungen unternommen werden. Im Bild IV.2.3.2 sind die zwei Fälle, die bei zweidimensionalen Systemen auftreten können, angegeben. Im Punkt $\mathbf{x}_a(t)$ zeigt der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}_a(t)$ in das stabile Gebiet hinein, der Zustand wird also den Keil nicht unmittelbar verlassen. Anders hingegen im Punkt $\mathbf{x}_b(t)$, wo der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}_b(t)$ den Zustand zum stabilen Gebiet hinaus führt.

Im Bild IV.2.3.2 sind zusätzlich die beiden Gradienten an die "Kegelfläche" eingetragen ($\mathbf{K} \mathbf{x}_a(t)$ und $\mathbf{K} \mathbf{x}_b(t)$). In das stabile Gebiet hineinzeigen bedeutet demzufolge für den Geschwindigkeitsvektor ein negatives Skalarprodukt mit dem Gradienten an der "Kegelfläche" zu haben.

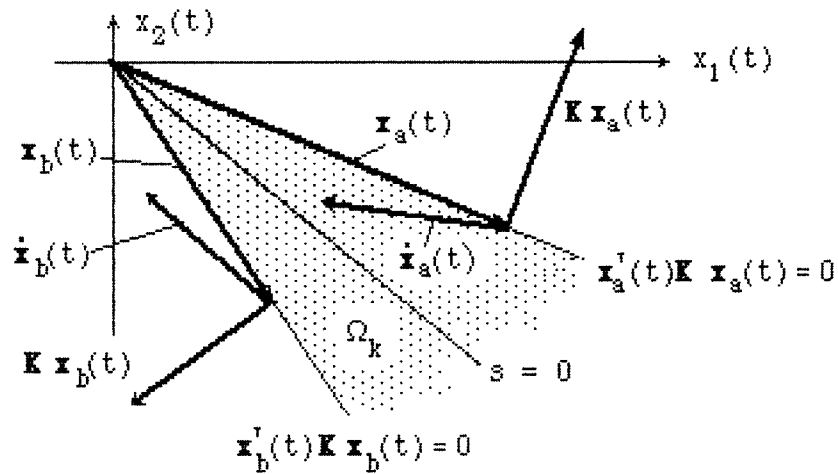


Bild IV.2.3.2

Mathematisch können diese Sachverhalte folgendermassen festgehalten werden :

$$\Omega_{k,rand} = \{ \mathbf{x}(t) : \mathbf{x}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = 0 \} \quad (IV.2.3.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{x}(t) < 0 \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \Omega_{k,rand}$$

Die Bedingung (IV.2.3.1) ist natürlich auch für eine beliebige Systemordnung gültig. Der Zustand von geschlossenen Systemen (IV.1.1.1), die diese Bedingung erfüllen, kann nicht aus Ω_k entweichen. Falls Ω_k gemäss Abschnitt IV.2.2 bestimmt wurde, ist demzufolge das betrachtete System asymptotisch stabil.

Es stellt sich die Frage, wie die Bedingung (IV.2.3.1) erfüllt werden kann. Gemäss Gleichungen (IV.1.1.1) setzt sich der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ aus zwei Komponenten zusammen, wobei im nichtlinearen Teil der Verstärkungsfaktor d noch frei wählbar ist. Durch Vergrössern des Faktors d kann immer erreicht werden, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ in das stabile Gebiet hinein zeigt ($\mathbf{e}_2 = [0, 1]^T$).

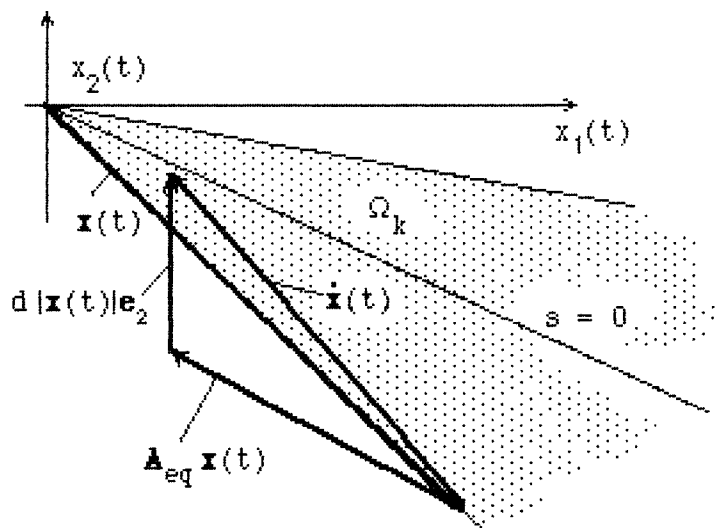


Bild IV.2.3.3

IV. 3. Abgetastete Systeme

IV. 3. 1 Problemdefinition

In diesem Abschnitt werden die in den Unterkapiteln IV.2 entwickelten Ideen auf ein digital geregeltes System angewendet. Das betrachtete System wird durch die Gleichung (IV.3.1.1) beschrieben :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_0 u(t_k) \\ u(t_k) &= - \mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t_k) - d \operatorname{sign}(s(t_k)) |\mathbf{x}(t_k)| \\ t_k \leq t \leq t_k + \tau\end{aligned}\tag{IV.3.1.1}$$

Die Abtastzeit τ ist konstant. Man beachte, dass das System frei von Parameterstörungen angesetzt wurde. Dies hat den Vorteil, dass die wesentlichen Aspekte von digital geregelten Systemen einfacher dargestellt werden können. Im Abschnitt IV.3.4 werden Systeme untersucht, welche diese Annahmen nicht erfüllen.

Natürlich kann bei einem digital geregelten System kein perfektes Gleiten mehr auftreten, da die endliche Abtastzeit eine endliche Schaltfrequenz bewirkt. Von besonderem Interesse ist daher die Frage nach der maximal zulässigen Abtastperiode, so dass das System erstens asymptotisch stabil bleibt und zweitens den Gleitzustand wenigstens im Sinne eines erweiterten Gleitens approximiert.

Um diese beiden Forderungen erfüllen zu können, wird folgendes Vorgehen gewählt :

- Bestimmen eines stabilen Kegels um $s(t) = 0$ herum gemäss Abschnitt IV.2.2
- Zeigen, dass der Zustand das stabile Gebiet nicht verlassen kann, falls die Reglerverstärkung genügend gross gewählt wird und falls gewisse Voraussetzungen erfüllt sind (Abschnitt IV.3.2)
- Bestimmen einer oberen Schranke für die Abtastzeit, so dass die in Abschnitt IV.3.2 getroffenen Annahmen erfüllt sind (Abschnitt IV.3.3)

Der erste Punkt wurde im Abschnitt IV.2.2 ausführlich dargelegt und braucht deswegen nicht wiederholt zu werden.

Zum Abschluss der Einführung werden noch einige Bemerkungen über die Lösungen der Gleichung (IV.3.1.1) gemacht. Diese Lösungen können folgendermassen geschrieben werden :

$$\mathbf{x}(t_k + \tau) = \exp\{\mathbf{A}_0 \tau\} \mathbf{x}(t_k) + \int_0^{\tau} \exp\{\mathbf{A}_0(\tau - \sigma)\} d\sigma \mathbf{b}_0 u(t_k) \quad (\text{IV.3.1.2})$$

Die transzendenten Terme können, ausser in wenigen Ausnahmen, nur mit numerischen Methoden bestimmt werden. Um trotzdem zu analytischen Aussagen zu kommen, wird deshalb die Annahme getroffen, dass die Abtastzeit im Vergleich zur Systemdynamik kurz ist. Die Gleichung (IV.3.1.2) kann in diesem Fall durch die Gleichung (IV.3.1.3) approximiert werden :

$$\mathbf{x}(t_k + \tau) \approx \mathbf{x}(t_k) + \tau \{ \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{b}_0 d \operatorname{sign}(s(t_k)) |\mathbf{x}(t_k)| \} \quad (\text{IV.3.1.3})$$

Man muss sich natürlich bewusst sein, dass diese Annäherung nur für Abtastzeiten zulässig ist, welche relativ klein sind.

IV.3.2. Stabilitätsbedingungen

Damit das stabile Gebiet nicht verlassen wird muss, gemäss den in Abschnitt IV.2.3 entwickelten Ideen, die folgende Bedingung erfüllt sein :

$$\text{Definition : } \quad \delta \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)$$

$$\text{Stabilitätsbedingung : } \quad \delta \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) < 0 \quad (\text{IV.3.2.1})$$

$$\text{Nebenbedingungen : } \quad \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) \leq 0$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann der Betrag des Zustandes normiert werden :

$$|\mathbf{x}(t_k)| = 1$$

Die einzige noch freie Grösse ist die Reglerverstärkung d , welche in diesem Abschnitt dazu benutzt werden wird, um die Stabilitätsbedingung (IV.3.2.1) zu erfüllen.

Allerdings ist diese Bedingung nur notwendig, aber nicht hinreichend. Zusätzlich muss man nämlich die Annahme treffen, dass der Zustandspunkt in einem Zeitintervall nicht auf der entgegengesetzten Seite des Kegels austreten kann. In Bild IV.3.2.1 sind die zwei möglichen Fälle angegeben.

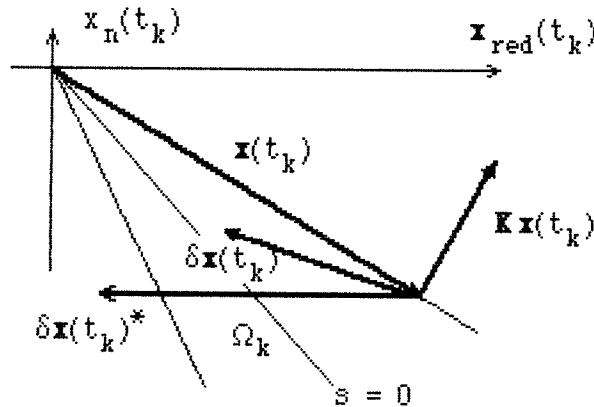


Bild IV.3.2.1

Die Differenz $\delta \mathbf{x}(t_k)^*$ erfüllt zwar die Bedingung (IV.3.2.1), trotzdem verlässt der Zustandspunkt das stabile Gebiet. Im nächsten Abschnitt wird deshalb die Frage untersucht, wie ein solches Verhalten vermieden werden kann. Hier in diesem Abschnitt wird die Bedingung (IV.3.2.1) untersucht. Mit der approximativen Lösung (IV.3.1.3) kann die Stabilitätsbedingung (IV.3.2.1) folgendermassen umgeschrieben werden :

$$\tau^* \{ \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{A}_0^T \mathbf{H}^T - d \text{sign}(s(t_k)) \mathbf{b}_0^T \} \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) < 0 \quad (\text{IV.3.2.2})$$

In der linearen Approximation spielt die Abtastzeit für die Stabilitätsbetrachtungen keine Rolle. Das Problem ist bezüglich des Vorzeichens von $s(t_k)$ symmetrisch. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann das Vorzeichen von $s(t_k)$ deshalb positiv angenommen werden.

Damit erhält man die endgültige Problemformulierung :

Gesucht ist Verstärkung d , so dass

$$d > \max_{\mathbf{x}(t_k)} \{ \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{A}_0 \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) / \mathbf{b}_0^T \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) \}$$

(IV.3.2.3)

mit den Nebenbedingungen :

$$|\mathbf{x}(t_k)| = 1; \quad \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) = 0; \quad \text{sign}(s(t_k)) > 0$$

Satz 21 :

Für das Maximierungsproblem (IV.3.2.3) existiert immer eine Lösung.

Beweis des Satzes 21 :

Die Existenz einer Lösung ist gesichert, falls der Nenner in (IV.3.2.3) nie verschwindet (der Zähler ist, da die Norm des Vektors $\mathbf{x}(t_k)$ gleich eins ist, und da die Matrix $\mathbf{A}_0^T \mathbf{K}$ endliche Elemente hat, sicher endlich).

Die Matrix \mathbf{K} repräsentiert einen stabilen Hyperkegel, gemäss Abschnitt IV.2.2. Mit Satz 20 kann der Vektor \mathbf{b}_0 deshalb nicht zum stabilen Gebiet gehören :

$$\mathbf{b}_0^T \mathbf{K} \mathbf{b}_0 = \mu \lambda^2 > 0 \quad ; \quad \mu > 0, \text{ sonst beliebig}$$

Mit Hilfe der Koordinatentransformation Γ (IV.2.2.2) können die Nebenbedingungen einfacher ausgewertet werden :

$$\Gamma \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \Gamma \boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}_0^T \mathbf{K} \mathbf{b}_0 = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \mu \lambda^2$$

Die n -dimensionalen Vektoren $\boldsymbol{\xi}(t_k)$ und $\boldsymbol{\beta}$ werden jeweils in einen $(n-1)$ -dimensionalen Teil $\boldsymbol{\xi}_{\text{red}}(t_k)$, bzw. $\boldsymbol{\beta}_{\text{red}}$ und in ihre letzte Komponente aufgespalten :

$$\boldsymbol{\xi}^T(t_k) = [\boldsymbol{\xi}_{\text{red}}^T(t_k) \mid \xi_n(t_k)] \quad ; \quad \boldsymbol{\beta}^T = [\boldsymbol{\beta}_{\text{red}}^T \mid \beta_n]$$

Der Nenner $\mathbf{b}_0^T \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k)$ kann nun folgendermassen umgeschrieben werden :

$$\mathbf{b}_0^T \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\xi}(t_k) = -\lambda^2 \boldsymbol{\beta}_{\text{red}}^T \boldsymbol{\xi}_{\text{red}}(t_k) + \xi_n(t_k) \beta_n$$

Setzt man für das Produkt $\xi_n(t_k) \beta_n$ den, durch die Nebenbedingungen geforderten Wert ein, so erhält man :

$$\xi_n^2(t_k) = \lambda^2 \xi_{red}^T(t_k) \xi_{red}(t_k) = \lambda^2 |\xi_{red}(t_k)|^2$$

$$\beta_n^2 = \lambda^2 (\mu + \beta_{red}^T \beta_{red}) = \lambda^2 (\mu + |\beta_{red}|^2)$$

$$\Rightarrow b_o^T K x(t_k) = \lambda^2 \{ |\xi_{red}(t_k)| (\mu + |\beta_{red}|^2)^{1/2} - \beta_{red}^T \xi_{red}(t_k) \}$$

Dieser Ausdruck kann nur Null werden wenn entweder :

$$1) \quad |\xi_{red}(t_k)|^2 (\mu + |\beta_{red}|^2) = (\beta_{red}^T \xi_{red}(t_k))^2$$

oder

$$2) \quad \xi_{red}(t_k) = 0$$

In beiden Fällen stösst man jedoch auf einen Widerspruch.

Fall 1) : Die Gleichung 1) ist für $\mu > 0$ nicht erfüllbar, da immer gilt :

$$(\beta_{red}^T \xi_{red}(t_k))^2 < |\beta_{red}|^2 |\xi_{red}(t_k)|^2$$

Fall 2) : Aus der Nebenbedingung $|\xi(t_k)| = 1$ folgt, dass $\xi_n(t_k) = 1$ sein muss. Dies führt jedoch auf den folgenden Widerspruch :

$$\xi^T(t_k) \Delta \xi(t_k) = \xi_n^2(t_k) = 1 \neq 0$$

Deswegen kann der Nenner in (IV.3.2.3) nie verschwinden.

EdB.

Man beachte, dass bei der Berechnung von (IV.3.2.3) i. a. mehrere lokale Maxima existieren, von denen das absolute gesucht ist. Glücklicherweise stehen zur numerischen Lösung des Problems (IV.3.2.3) einige gute Software-Pakete zur Verfügung, welche auch in der Lage sind die Nebenbedingungen zu berücksichtigen [23].

Zusammenfassung IV.3.2. :

In diesem Abschnitt wurde ein Verfahren eingeführt, welches eine untere Schranke für die stabilisierende Reglerverstärkung liefert. Die gefundene Schranke stellt nur eine Schätzung dar, da nicht mit der exakten Lösung (IV.3.1.2) sondern mit der linearen Approximation (IV.3.1.3) operiert wurde. In diesem Fall ist die gefundene Schranke für die Reglerverstärkung nicht von der Abtastzeit abhängig.

IV.3.3. Abschätzung der zulässigen Abtastzeit

Als wesentliche Voraussetzung wurde im vorherigen Abschnitt die Annahme getroffen, dass der Zustand das stabile Gebiet nicht auf der entgegengesetzten Seite verlässt. Dieser Abschnitt beschäftigt sich damit, eine obere Schranke für die Abtastzeit zu finden, so dass diese Voraussetzung erfüllt ist.

Die grundlegende Idee wird in Bild IV.3.3.1 skizziert. Der kritische Fall ist dadurch gegeben, dass der Zustand zur Zeit t_k (fast) auf der Gleit-Hyperebene liegt.

Die Differenz $\delta \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)$ ist beschränkt. Geometrisch lässt sie sich als Hyperkugel um $\mathbf{x}(t_k)$ darstellen. Der Radius der Hyperkugel ist eine Funktion der Abtastzeit. Demzufolge kann τ solange vergrößert werden, bis die Hyperkugel die Gleitebene tangiert. Die entsprechende Abtastzeit stellt dann die gesuchte Schranke dar, da falls τ kleiner gewählt wird, der Zustand das stabile Gebiet in einem Intervall nicht verlassen kann.

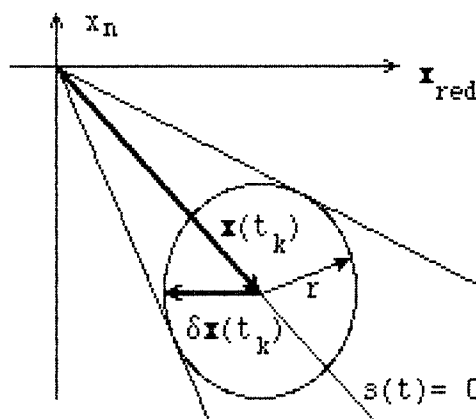


Bild IV.3.3.1

Der Radius der Hyperkugel wird mit Hilfe der Gleichung (IV.3.1.3) bestimmt.

$$\delta \mathbf{x}^T(t_k) \delta \mathbf{x}(t_k) = \tau^2 \{ \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{A}_{\text{eq}}^T \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}(t_k) + d^2 |\mathbf{x}(t_k)|^2 - 2 \mathbf{b}_{\text{eq}}^T \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}(t_k) d \text{sign}(s(t_k)) |\mathbf{x}(t_k)| \}$$

Eine obere Schranke für den Betrag der Zustandsdifferenz kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Abschätzung für Rayleigh-Quotienten gefunden werden :

$$|\mathbf{b}_{\text{eq}}^T \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}(t_k)| \leq |\mathbf{b}_{\text{eq}}^T \mathbf{A}_{\text{eq}}| |\mathbf{x}(t_k)| = (|\mathbf{c}| - 1) |\mathbf{x}(t_k)|$$

$$\mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{A}_{\text{eq}}^T \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x}(t_k) \leq \sigma_{\max}^2 \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{x}(t_k)$$

$$\sigma_{\max} = \max_1 \{ \sigma_i \} = \text{grösster Singularwert von } \mathbf{A}_{\text{eq}}$$

Damit kann man die gesuchte Schranke für den Radius der Hyperkugel abschätzen :

$$\rho = \{\sigma_{\max}^2 + d^2 + 2(|\sigma| - 1)\}^{1/2} \quad (\text{IV.3.3.1})$$

$$|\delta \mathbf{x}(t_k)| \leq \tau \rho |\mathbf{x}(t_k)|$$

Man sieht, dass die postulierte Abhängigkeit des Radius der Hyperkugel von der Abtastzeit linear ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass nicht die exakte Lösung (IV.3.1.2) sondern die lineare Approximation (IV.3.1.3) verwendet wurde.

Die Ungleichung (IV.3.3.1) ergibt noch keine Schranke für die maximal zulässige Abtastzeit. Diese Schranke folgt erst aus der Ueberlegung, dass der Radius der Hyperkugel höchstens so gross sein darf, dass sie die Grenzfläche des stabilen Gebietes tangiert. Diese Betrachtungen werden im bereits eingeführten ξ -Koordinatensystem durchgeführt :

$$\Gamma \xi(t_k) = \mathbf{x}(t_k) \quad \text{Definition von } \Gamma \text{ siehe (IV.2.2.2)}$$

$$|\xi(t_k)| = |\mathbf{x}(t_k)| \quad \text{weil } \Gamma^T \Gamma = \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow |\delta \xi(t_k + \tau)| \leq \tau \rho |\xi(t_k)|$$

In Bild IV.3.3.2 ist die Bestimmung des Radius der Hyper-Kugel dargestellt.

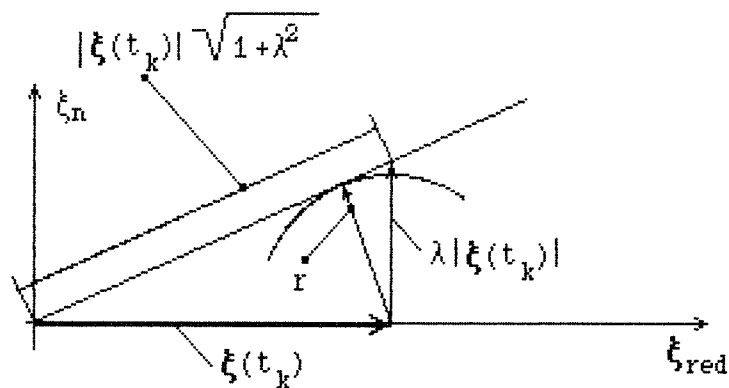


Bild IV.3.3.2

Der Radius ist durch die folgende Gleichung gegeben :

$$r = \lambda (1 + \lambda^2)^{-1/2} |\xi(t_k)|$$

Die maximale Abtastzeit wird durch die folgende Ungleichung bestimmt :

$$|\delta \xi(t_k)| \leq \tau \rho |\xi(t_k)| \leq r$$

Damit findet man die gesuchte Schranke (IV.3.3.2) für die Abtastzeit :

$$\tau_{\max} = \lambda \{\rho^2 (1 + \lambda^2)\}^{-1/2} \quad (\text{IV.3.3.2})$$

Zusammenfassung IV.3.3 :

In diesem Abschnitt wurde eine Schätzung der maximal zulässigen Abtastzeit τ_{\max} hergeleitet. Alle Grössen welche zur Bestimmung der Schranke (IV.3.3.2) benötigt werden sind bekannt, insbesondere muss τ_{\max} nicht iterativ berechnet werden.

Da statt mit der exakten Lösung (IV.3.1.3) mit der linearen Approximation (IV.3.1.4) gearbeitet wurde, ist die Schranke τ_{\max} nur eine Schätzung der tatsächlichen maximalen Abtastzeit.

Prinzipiell wäre es möglich, die in diesem Abschnitt durchgeführte Analyse auch mit der exakten Lösung (IV.3.1.2) durchzuführen. Dabei würden keine qualitativ neuen Schwierigkeiten auftauchen. Der Berechnungsaufwand wäre in diesem Fall aber wesentlich grösser, da man in diesem Fall iterativ vorgehen müsste.

IV. 3. 4. Einfluss der Parameterstörungen

Dieser Abschnitt untersucht den Einfluss der Parameter-Störungen auf das digital geregelte System (IV.3.1.1). Das betrachtete System ist durch die folgende Gleichung gegeben :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \delta\mathbf{A}(t)) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{b}_0 + \delta\mathbf{b}(t)) u(t_k)$$

$$u(t_k) = -c \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t_k) - d \operatorname{sign}(s(t_k)) |\mathbf{x}(t_k)| \quad (\text{IV.3.4.1})$$

$$t_k \leq t \leq t_k + \tau$$

Die Parameterstörungen erfüllen die Rangbedingungen (II.1.2.2/3), insbesondere kann die Störung der Eingangsverstärkung aufgespalten werden :

$$\delta\mathbf{b}(\cdot) = r_b(\cdot) \mathbf{b}_0$$

An der Definition des stabilen Gebiets wird sich, gegenüber dem ungestörten Fall nichts ändern. Die Aufenthaltsbedingungen müssen jedoch neu formuliert werden.

Das dabei verwendete Vorgehen entspricht demjenigen des ungestörten Falls. Mit den genau gleichen Überlegungen wie sie im ungestörten Fall angewendet wurden, kann die Stabilitätsbedingung für die Verstärkung d gefunden werden :

Definition :

$$z(t_k) = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \delta\mathbf{A}(t_k) \mathbf{x} - r_b(t_k) \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{b}_0 c \mathbf{A}_0 \mathbf{x}$$

$$n(t_k) = (1 + r_b(t)) \mathbf{b}_0^T \mathbf{K} \mathbf{x}$$

Nebenbedingungen :

$$\mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{K} \mathbf{x}(t_k) \leq 0; \quad |\mathbf{x}(t_k)| = 1 \quad ; \quad s(t_k) > 0$$

Stabilitätsbedingung :

$$d > \max_{\mathbf{x}, t} \{ z(t_k) / n(t_k) \} \quad (\text{IV.3.4.2})$$

Die Auswertung dieser Bedingung erfordert natürlich einen grösseren Aufwand als die Auswertung der Bedingung (IV.3.2.3), weil zusätzlich die Parameterstörungen $\delta\mathbf{A}(t)$ und $\delta\mathbf{b}(t)$ berücksichtigt werden müssen. Man beachte aber, dass die Existenz einer Lösung durch den Satz 21 und durch die Annahme (II.2.3.1) gesichert ist.

Die maximale Norm des Inkrements $\delta\mathbf{x}(t_k)$ lässt sich, wie es im Abschnitt IV.3.3 angegeben wurde, abschätzen. Wesentlich ist, dass diese Norm endlich und von der Abtastzeit linear abhängig ist.

Daraus kann man, wie es im Abschnitt IV.3.4 angegeben wurde, die maximale Abtastzeit berechnen. Gegenüber dem ungestörten Fall ergeben sich demzufolge keine qualitativ neuen Schwierigkeiten. Die Auswertung der Bedingungen erfordert allerdings mehr Aufwand, da die Parameterstörungen zeitvariabel sind.

Wiederum gilt, dass die erhaltene Schranke nur eine Schätzung darstellt, da allen Berechnungen die lineare Approximation (IV.3.1.3) zu Grunde liegt.

IV. 4 Systeme mit Beobachtern

In diesem Abschnitt werden Systeme untersucht, welche mit Hilfe eines Beobachters geregelt sind. Alle Bezeichnungen werden unverändert aus dem Unterkapitel III.3 übernommen. Der Vektor $r(t)$ in der Gleichung (IV.1.1.1) wird hier durch $-e(t)$ gemäss Definition (III.3.1.2) substituiert. Es wird angenommen, dass der Beobachter bereits im Gleitzustand ist.

Als erstes wird gezeigt, dass "kleine" Fehler $e(t)$ die Stabilität des geregelten Systems nicht gefährden, und dass in diesem Fall eine erweiterte Gleitbewegung stattfindet.

Aus der Definition (III.3.1.3) folgt für den gleitenden Beobachter :

$$c x(t) = c e(t)$$

Mit der Definitionsgleichung (IV.2.1.5) für das stabile Gebiet erhält man die gewünschte Aussage :

$$\Omega_s := \{ x(t) : |c x(t)| \leq \alpha |x_{red}(t)| \} \quad (IV.4.1.1)$$

Falls $|c e(t)| \leq \alpha |x_{red}(t)|$ tritt erweitertes Gleiten auf.

Damit ist gezeigt, dass eine gewisse Stabilitätsreserve auch im Falle des Einsatzes von Beobachtern vorhanden ist.

Diese Aussage ist rein qualitativer Natur. Natürlich ist man daran interessiert, quantitative Angaben über die maximal zulässigen Störungen machen zu können. Dieses Problem wird an Hand der Gleichung (III.3.1.8) studiert.

Dabei treten zwei Problemkreise auf :

1. Bleibt der Beobachter im Falle von Parameterstörungen asymptotisch stabil?
2. Erfüllt der Fehler die an ihn gestellte Bedingung (IV.4.1.1)?

Die Stabilität wird nur durch die Eingangsstörungen $\delta b(t)$ beeinflusst. Mit Hilfe des im Abschnitt III.2.3 eingeführten Verfahrens, kann auch hier gezeigt werden, dass es eine Schranke für die Störung gibt, welche garantiert, dass die Stabilitätseigenschaft nicht verloren geht (die Bezeichnungen sind gleich wie im Abschnitt III.3 gewählt) :

Feststellung : $[A_0 - l g]$ ist eine Hurwitzmatrix

\Rightarrow Es existiert eine Matrix $P = P^T > 0$ mit

$$P [A_0 - l g] + [A_0 - l g]^T P = -I$$

Ljapunow-Funktion $v(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}(t)$

Zeitliche Ableitung von $v(t)$ (siehe Gleichung (III.3.1.8)) :

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + r_b(t) \mathbf{e}^T(t) [\mathbf{M}^T + \mathbf{M}] \mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \mathbf{b}_0 \mathbf{c} [\mathbf{A}_0 - \mathbf{l} \mathbf{g}]$$

Abschätzung :

$$|\lambda_{\max}| = \text{Betragsmässig grösster Eigenwert von } [\mathbf{M}^T + \mathbf{M}]$$

$\Rightarrow |r_b(t)| \leq 1/|\lambda_{\max}|$ ergibt asymptotisch stabilen Beobachter

Falls also die Störung genügend klein ist, wird der Fehler beschränkt bleiben.

Um die zweite oben aufgeworfene Frage zu beantworten, werden zwei Annahmen getroffen. Als erstes wird angenommen, dass die Eingangsstörung nicht aktiv ist. Diese Annahme ist eigentlich nicht unumgänglich, vereinfacht aber die Herleitungen wesentlich.

Die zweite Annahme besteht darin, dass die Parametervariation $\delta\mathbf{A}(t)$ viel "langsamer" als die Fehlerdynamik vorausgesetzt wird. Dies wird z.B. bei unbekanntem aber konstanten Parameterfehlern der Fall sein. In diesem Fall lässt sich der Fehler durch eine algebraische Gleichung angeben :

$$\mathbf{e}(t) \approx -[\mathbf{A}_0 - \mathbf{l} \mathbf{g}]^{-1} \delta\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$$

Mit der Definition (IV.2.1.5) kann eine Bedingung für $\delta\mathbf{A}(t)$ hergeleitet werden :

$$|-\mathbf{c} [\mathbf{A}_0 - \mathbf{l} \mathbf{g}]^{-1} \delta\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{c} [\mathbf{A}_0 - \mathbf{l} \mathbf{g}]^{-1} \delta\mathbf{A}(t)| |\mathbf{x}(t)|$$

$$|\mathbf{c} [\mathbf{A}_0 - \mathbf{l} \mathbf{g}]^{-1} \delta\mathbf{A}(t)| |\mathbf{x}(t)| \leq \alpha |\mathbf{x}_{\text{red}}(t)|$$

Die Norm des Zustandsvektors lässt sich abschätzen, da der Zustand im stabilen Gebiet enthalten sein muss :

$$|\mathbf{x}(t)| \leq (1 + |\mathbf{c}_{\text{red}}| + \alpha) |\mathbf{x}_{\text{red}}(t)|$$

Damit findet man die gesuchte Schranke :

$$\|\delta\mathbf{A}(t)\| \leq \alpha / [(1 + |\mathbf{c}_{\text{red}}| + \alpha) |\mathbf{c} [\mathbf{A}_0 - \mathbf{l} \mathbf{g}]^{-1}|] \quad (\text{IV.4.1.2})$$

Zusammenfassung IV.4 :

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass beim Einsatz von Beobachtern Stabilitätsreserven bestehen, insbesondere dass das geregelte System unter gewissen Bedingungen eine erweiterte Gleitbewegung ausführt. Falls die Parametervariationen genügend klein sind, bleibt die Stabilität des Beobachters und der Strecke bestehen, und der Zustand vollführt eine erweiterte Gleitbewegung.

IV. 5. Rauschbehaftete Systeme

Dieser Abschnitt wendet das erweiterte Gleitprinzip auf Systeme mit verrauschten Messungen an. Das betrachtete System ist durch die Gleichung (IV.1.1.1) gegeben, wobei zunächst angenommen wird, dass keine Parameterstörungen aktiv seien. Vom Rauschsignal $\mathbf{r}(t)$ ist nichts bekannt, ausser dass es durch die folgende Bedingung beschränkt ist :

$$|\mathbf{r}(t)| \leq r_0 \quad (\text{IV.5.1.1})$$

Als nächster Schritt wird der Zustandsraum \mathfrak{R}^n in zwei Teilräume Ω_I und Ω_{II} aufgespalten :

$$\Omega_I := \{ \mathbf{x}(t) : |\mathbf{x}(t)| \leq 2 r_0 \text{ und } |\mathbf{c} \mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{c}| r_0 \}$$

$$\Omega_{II} := \{ \mathfrak{R}^n \} - \{ \Omega_I \}$$

Fall sich der Zustand $\mathbf{x}(t)$ in Ω_{II} aufhält, so gilt :

$$1. \quad \text{sign}(\mathbf{c} \mathbf{x}(t)) = \text{sign}(\mathbf{c} \mathbf{x}(t) + \mathbf{c} \mathbf{r}(t))$$

$$2. \quad |\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)| > |\mathbf{x}(t)| - |\mathbf{r}(t)| > r_0$$

Damit folgt für das geschlossene System (IV.1.1.1) die folgende Differentialgleichung :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Pi \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) - \mathbf{b}_0 \mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{r}(t) - \mathbf{b}_0 d \text{sign}(s(t)) |\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)|$$

$$(\text{Pro memoria : } s(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t))$$

Verwendet man die Ljapunow-Funktion (II.3.4.1), so kann man eine Bedingung für die Reglerverstärkung d finden, welche garantiert, dass $s(t)$ in Ω_{II} monoton abnehmend ist :

$$d > \max_t \{ |\mathbf{c} \mathbf{A}_0 \mathbf{r}(t)| / |\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)| \}$$

Da alle Betrachtungen in Ω_{II} stattfinden, kann dieses Maximum einfach angegeben werden :

$$d > |\mathbf{c} \mathbf{A}_0| \quad (\text{IV.5.1.2})$$

Wird d gemäss der Bedingung (IV.5.1.2) gewählt, so gilt, dass der Zustand $\mathbf{x}(t)$ (zumindest asymptotisch) in das Gebiet Ω_I eintreten muss, da das Minimum der Ljapunow-Funktion (die Gleitebene) ganz in Ω_I enthalten ist.

Da man aber weiss, dass um die Gleitebene herum ein Kegel Ω_k existiert, der asymptotische Stabilität garantiert, so muss der Zustand $\mathbf{x}(t)$ für alle Zeiten beschränkt bleiben. Aus der Kenntnis des Öffnungswinkels des Kegels, und des Maximalbetrags des Rauschens (IV.5.1.1) kann das Gebiet Ω_∞ bestimmt werden, in dem sich der Zustand für $t \rightarrow \infty$ aufhalten wird.

Das folgende Bild IV.5.1.1 verdeutlicht diese Überlegungen (das oben erwähnte Gebiet Ω_∞ ist dick umrandet).

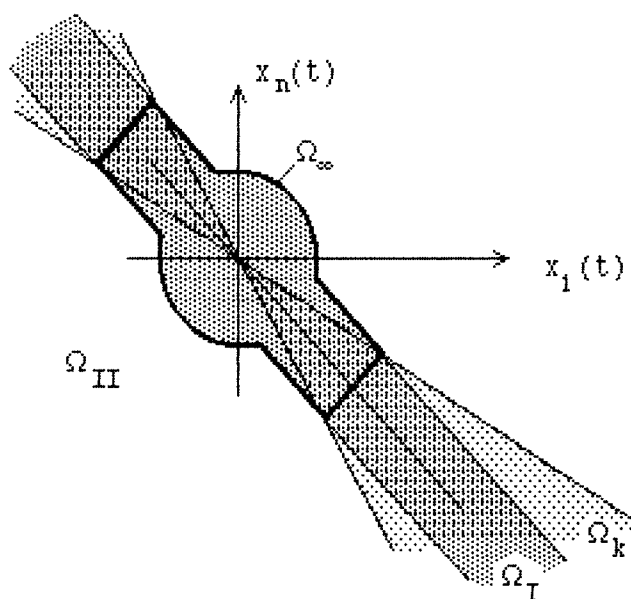


Bild IV.5.1.1

Falls die Parameterfehler nicht Null sind, so gelten völlig analoge Überlegungen, nur die Stabilitätsbedingung (IV.5.1.2) wird in diesem Fall zusätzliche Terme erhalten, welche die Störungen kompensieren. Auf eine explizite Herleitung dieser Bedingung wird aber hier verzichtet.

V. ANWENDUNG: REGELUNG EINES GLEICHSTROMMOTORS

V. 1. Regulatorproblem

Dieser Abschnitt behandelt das Regulatorproblem, wie es im Unterkapitel II.3 definiert wurde.

V. 1. 1. Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau hat zum Ziel, einen robusten Regulator für eine permanent erregte 0.5 kW Maschine zu realisieren. Die Regelung wird mit Hilfe eines kleinen Mikroprozessor-Systems realisiert. Das folgende Bild V.1.1.1 zeigt eine schematische Darstellung des Systems.

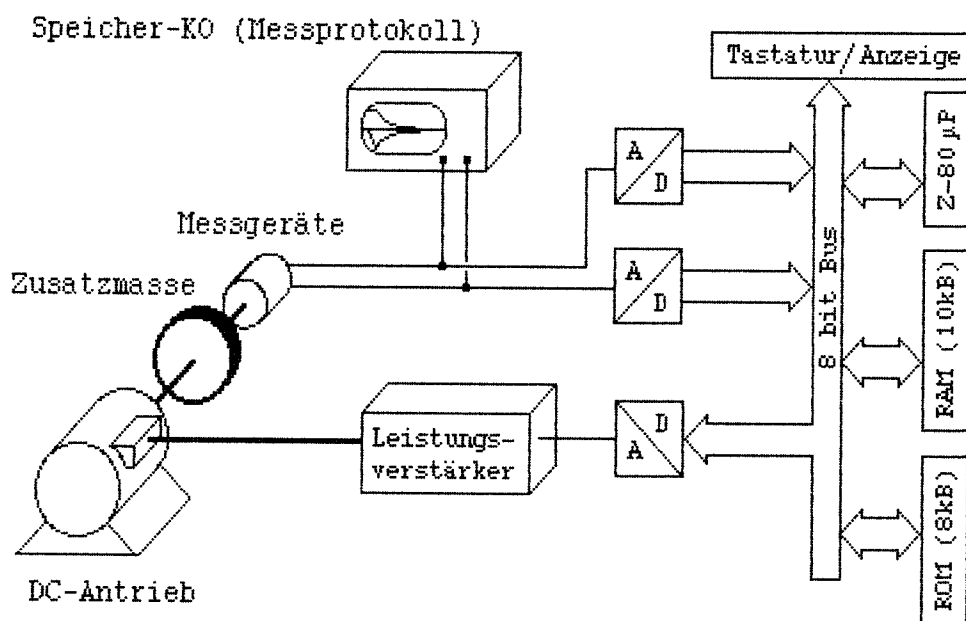


Bild V.1.1.1

Die A/D- bzw. D/A-Wandler haben eine Wortbreite von 8 bits und eine maximale Konversionszeit von 80 µsec. Der Z-80 Mikroprozessor wird mit 1.8 MHz betrieben. Neben 10 kByte an freiem RAM sind 8 kByte mit einem Monitor- und einem Assemblerprogramm vorhanden. Der Leistungsverstärker ist sehr schnell (Grenzfrequenz unter Vollast über 30 kHz). Aus diesem Grunde kann der Einfluss des Verstärkers auf die Dynamik des geschlossenen System vernachlässigt werden. Die Messgeräte werden ebenfalls ideal angenommen. Die elektrische Zeitkonstante des Antriebs liegt unter 1 msec, so dass der Einfluss der Ankerinduktivität vernachlässigt werden kann.

Der Regelalgorithmus wurde zuerst in FORTH geschrieben. Die resultierenden Regelraten waren aber zu klein, um ein einigermaßen ideales Gleiten zu ermöglichen. Erst die Programmierung in Assembler brachte die erwünschten Resultate (Regelrate > 500 Hz).

V. 1. 2. Algorithmus

Mit den oben erwähnten Vereinfachungen lässt sich das System durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreiben :

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) &= \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) &= (a_0 + \delta a(t)) \Omega(t) + (b_0 + \delta b(t)) u(t) + \rho(t)\end{aligned}\tag{V.1.2.1}$$

$\Phi(t)$ = Ankerwinkel (rad); $\Omega(t)$ = Winkelgeschwindigkeit (rad/sec)

$u(t)$ = Ankerspannung (Volt)

Der Parameter $\delta a(t)$ kann durch Hinzufügen oder Entfernen von zusätzlichen Trägheiten absichtlich variiert werden. Die Störung $\rho(t)$ repräsentiert das Haft- und Gleitreibungsverhalten des Antriebs. Der Parameter $\delta b(t)$ beschreibt elektrische Phänomene wie Bürsten- und Wirbelstromverluste.

Die Transformation auf Begleitform kann hier sofort angegeben werden :

$$x_1(t) = \Phi(t) / b_0 ; \quad x_2(t) = \Omega(t) / b_0 \tag{V.1.2.2}$$

Mit den Definitionen $r_b(t) = \delta b(t) / b_0$ und $r(t) = \rho(t) / b_0$ erhält man die folgenden kanonischen Differentialgleichungen :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (a_0 + \delta a(t)) x_2(t) + (1 + r_b(t)) u(t) + r(t)\end{aligned}\tag{V.1.2.3}$$

Die numerischen Werte lauten :

$$\begin{aligned}a_0 &= -2.7 && (\text{sec}^{-1}) \\ r(t) &= -0.14 \text{ sign}(x_2(t)) && (\text{Volt}) \\ -0.62 &\leq r_b(t) \leq 0 && (-)\end{aligned}$$

Das unregelte System hat demzufolge einen Pol bei -2.7 und einen Pol im Ursprung.

Die "Matrix" \mathbf{c} ist hier gegeben durch $\mathbf{c} = [c, 1]$. Mit Hilfe des Parameters c wird der Pol des gleitenden Systems bei $\lambda = -c$ festgelegt.

Der verwendete Regler ist eine Kombination aus dem Regler (II.3.3.2) und dem Regler (III.4.1.5) :

$$u(t) = - (a_0 + c) x_2(t) - [d|x_2(t)| + d_p] \text{ sign}(s(t))$$

Die hinreichenden Stabilitätsbedingungen sind durch die Gleichungen (II.3.4.15) bzw. (III.4.1.9) gegeben. Ausgeschrieben lauten sie folgendermassen :

$$d > \max_t \{ |\delta a(t) - r_b(t)(c + a_0)| / (1 + r_b(t)) \}$$

$$d_p > \max_t \{ |r(t)| / (1 + r_b(t)) \}$$

Die numerische Auswertung dieser Bedingungen ergibt die hinreichenden Bedingungen für stabilisierende Reglerverstärkungen :

$$d > |2.63... \delta a(t)| + |0.368...(c - 2.7)|$$

$$d_p > 0.368...$$

Die nächsten drei Bilder zeigen das Systemverhalten ohne absichtliche Parameterstörungen (d.h. $\delta a(t)=0$) und mit $c=1$. Bild V.1.1.2 zeigt die Winkelposition als Funktion der Zeit.

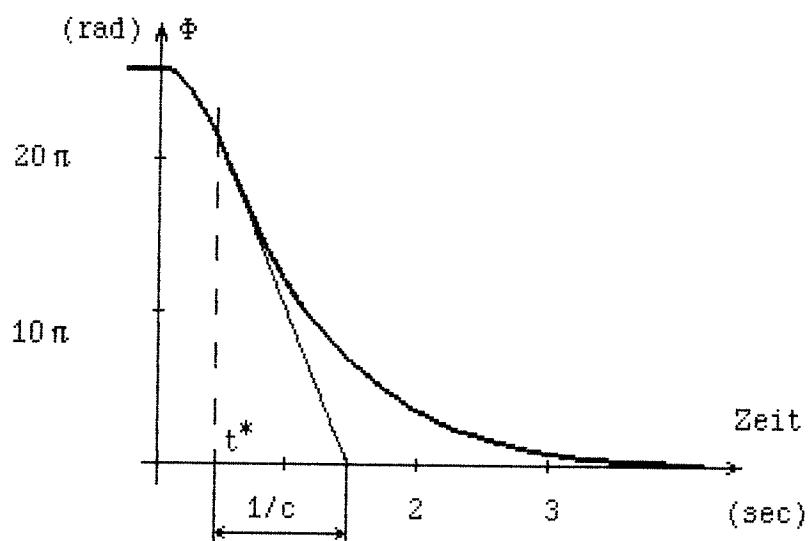


Bild V.1.1.2

Das Bild V.1.1.3 zeigt die Darstellung dieser Bewegung in der Phasenebene. Wegen der endlichen Abtastzeit stellt sich, wie erwartet, kein perfektes Gleiten ein.

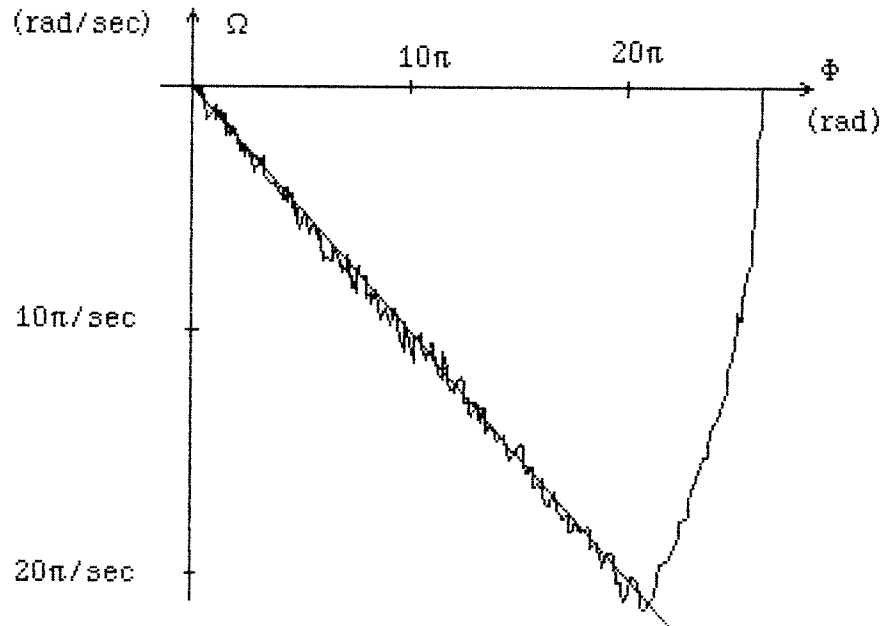


Bild V.1.1.3

Das Bild V.1.1.4 schliesslich zeigt den Verlauf der Steuergrösse $u(t)$. Man beachte, wie die äquivalente Steuergrösse als Mittelwert dieses Verlaufs interpretiert werden kann.

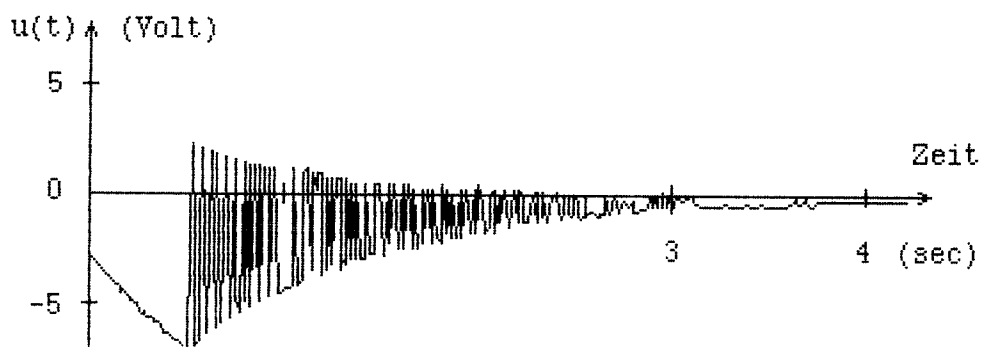


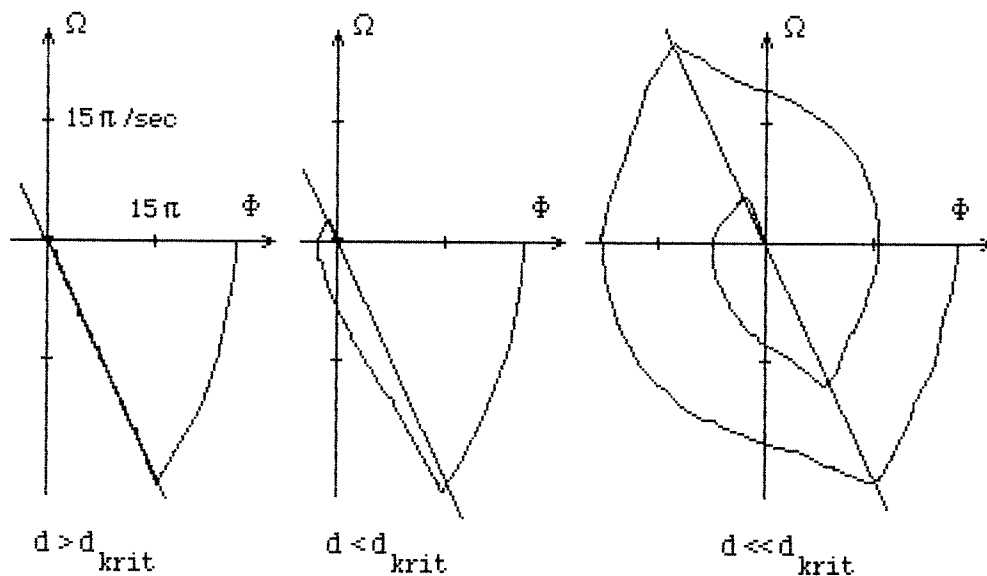
Bild V.1.1.4

V. 1. 3. Robustheitsuntersuchungen

Um die Robustheit der RVS zu untersuchen, wurde durch Anbringen oder Entfernen von Zusatzmassen der Parameter $\delta a(t)$ absichtlich verändert. Die Parametervariationen liegen im Bereich von ca. 50% des Nominalwertes a_0 .

Das folgende Bild V.1.1.5 zeigt den Fall, bei welchem eine zusätzliche Trägheit angebracht wurde.

Im ersten Durchgang (links) wurde eine Reglerverstärkung d gewählt, welche die Stabilitätsbedingung (II.3.4.15) erfüllt. Wie erwartet resultiert ein ideales Systemverhalten. Wird die Verstärkung d zu klein gewählt, so ist der Regler nicht mehr in der Lage den Gleitzustand zu stabilisieren (mittleres und rechtes Bild).



Gleitzustand stabil
Einfluss von $\delta a(t)$
nur für $t < t^*$ bemerk-
bar

Gleitzustand nicht
sofort stabil (erst
beim zweiten Auf-
treffen auf Gleitge-
rade)

Gleitzustand wird nie
erreicht; System trotz-
dem asymptotisch Sta-
bil.

Bild V.1.1.5

Falls das System eine kleinere Trägheit als angenommen besitzt, ergibt sich ein ähnliches Verhalten. In Bild V.1.1.6 sind wieder drei Fälle aufgezeichnet, wobei das Bild links den Verlauf bei korrekter Wahl der Reglerverstärkung zeigt.

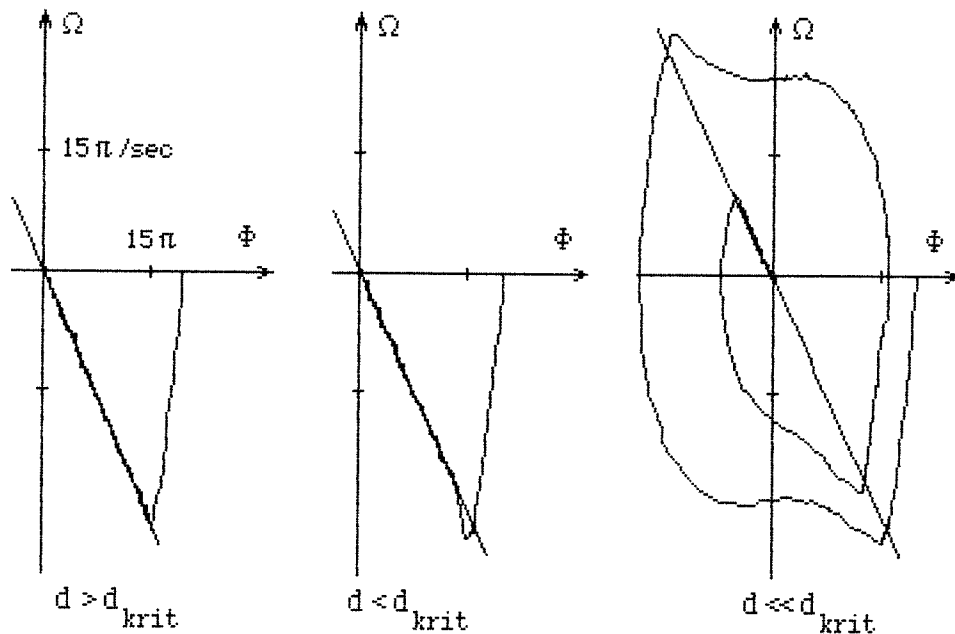


Bild V.1.1.6

Man beachte, dass das Verhalten welches im mittleren Bild von V.1.1.6 dargestellt ist, kein Widerspruch darstellt. Da die Stabilitätsbedingung (II.4.3.12) nur hinreichend, aber nicht notwendig ist, kann der Fall eintreten, bei welchem auch eine kleinere Reglerverstärkung als berechnet, zu einem stabilen Gleitzustand führt.

V. 2. Folgeregelungsproblem

Dieser Abschnitt untersucht das Folgeregelungsproblem, wie es im Unterkapitel II.4 dargestellt wurde.

V. 2. 1. Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau entspricht weitgehend demjenigen des Regulatorproblems, insbesondere bleibt die Strecke unverändert. Da das Folgeregelungsproblem einen grösseren Berechnungsaufwand erfordert, wird statt des Z-80 Mikrorechners ein HP-1000 Minirechner mit entsprechender Prozessperipherie verwendet. Die Wortbreite der Wandler beträgt nun neu 12 Bit. Um eine möglichst kleine Abtastzeit zu erhalten wird das Referenzmodell im Rechner digital realisiert. Die Messwerte können im Rechner intern abgespeichert werden, so dass der KO nicht mehr benötigt wird.

V.2.2. Algorithmus

Das Referenzmodell, welches das gewünschte Verhalten der Strecke repräsentiert, wurde folgendermassen gewählt :

$$\dot{z}(t) = F_0 z(t) + g_0 w(t)$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.86 & -4.40 \end{bmatrix} \quad g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.86 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pollage} \quad : \quad \lambda_{1,2} = -2.2 \pm j 2.24\dots$$

Das Referenzmodell erfüllt natürlich Bedingung (II.4.1.3) und die Aufspaltung (II.4.1.4) lautet :

$$q_F = [-9.86, -1.7]; \quad q_g = [9.86]$$

Ein Regelschritt dauert 6 msec. Das im Rechner nachgebaute Referenzmodell lautet somit :

$$z(t + 0.006) = F_0^{\#} z(t) + g_0^{\#} w(t)$$

$$F_0^{\#} = \begin{bmatrix} 0.999824\dots & 0.005921\dots \\ -0.058382\dots & 0.973771\dots \end{bmatrix} \quad g_0^{\#} = \begin{bmatrix} 0.000176\dots \\ 0.058382\dots \end{bmatrix}$$

Der verwendete Regler ist durch die folgenden Gleichungen gegeben :

$$s(t) = c(x_1(t) - z_1(t)) + (x_2(t) - z_2(t))$$

$$u(t) = - (a_0 + c) (x_2(t) - z_2(t)) + q_F z(t) + q_g w(t)$$

$$- [d_x |x_2(t)| + d_p + d_z |z(t)| + d_w |w(t)|] \text{sign}(s(t))$$

Die Reglerfaktoren müssen den folgenden Bedingungen genügen :

$$d_p > \max_t \left\{ \frac{|r(t)|}{1 + r_b(t)} \right\} = 0.375...$$

$$d_x > \max_t \left\{ \frac{|r_b(t)(c + a_o)|}{1 + r_b(t)} \right\} = |1.678(c - 2.7)|$$

$$d_z > \max_t \left\{ \frac{|r_b(t)[q_{F_1}, q_{F_2} + (c + a_o)]|}{1 + r_b(t)} \right\} = 1.678 \sqrt{9.86^2 + (c - 4.4)^2}$$

$$d_w > \max_t \left\{ \frac{|r_b(t)q_g|}{1 + r_b(t)} \right\} = 16.55...$$

U.2.3 Robustheitsuntersuchungen

In diesem Abschnitt wird nur die Robustheit des RVS gegenüber dem Parameterfehler $r_b(t)$ und der äusseren Störung $\rho(t)$ untersucht (siehe Gleichung (V.1.2.3)). Um die Leistungsfähigkeit des RVS beurteilen zu können, wird als Vergleich ein linearer Zustandsregler implementiert, welcher mit dem gleichen Referenzmodell arbeitet :

$$u(t) = -r e(t) + q_f z(t) + q_g w(t); \quad r \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (\text{V.2.3.1})$$

Die Rückföhrfaktoren r_i werden anhand des Nominalsystems

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + b_o u(t)$$

bestimmt und zwar so, dass der Fehler $e(t) = x(t) - z(t)$ eine gewünschte Dynamik erhält. Die nominale Differentialgleichung des Fehlersystems lautet :

$$\dot{e}(t) = A_o x(t) - b_o r e(t) + b_o q_f z(t) + b_o q_g w(t) - F_o z(t) - g_o w(t)$$

Da das Referenzmodell die Bedingungen (II.4.1.3) erfüllt, kann diese Gleichung erheblich vereinfacht werden :

$$\dot{e}(t) = A_o x(t) - A_o z(t) - b_o r e(t) = (A_o - b_o r) e(t)$$

Die Rückföhrfaktoren werden so gewählt, dass das Fehlersystem einen reellen Doppelpol bei $-2c$ hat. Die Begründung für diese Wahl liegt darin, dass eine Serieschaltung von zwei PT1-Elementen mit doppelt so kleiner Zeitkonstante in etwa einem einzigen PT1-Element mit einfacher Zeitkonstante entspricht. Die Dynamik des Fehlers des gleitenden Systems und diejenige des linear geregelten Systems sind damit (im Nominalfall) vergleichbar.

In den unten gezeigten Experimenten wurde $c=1$ gewählt (die "Matrix" \mathbf{c} hat folgende Gestalt $\mathbf{c} = [c, 1]$). Mit Hilfe des konstanten Teils der Gleichung (V.1.2.3) findet man damit für die beiden Rückföhrfaktoren folgende Werte :

$$\mathbf{r} = [4.00, 1.30]$$

Das Bild V.2.3.1 zeigt den Verlauf der Position $x_1(t)$ und ihres Sollwertes $z_1(t)$ für den Fall, dass der lineare Regler (V.2.3.1) eingesetzt wird. Die Anfangswerte wurden folgendermassen gewählt :

$$x_1(0) = 14; x_2(0) = z_1(0) = z_2(0) = 0$$

Der Verlauf der Referenzsteuergrösse $w(t)$ ist in Bild V.2.3.2 dargestellt.

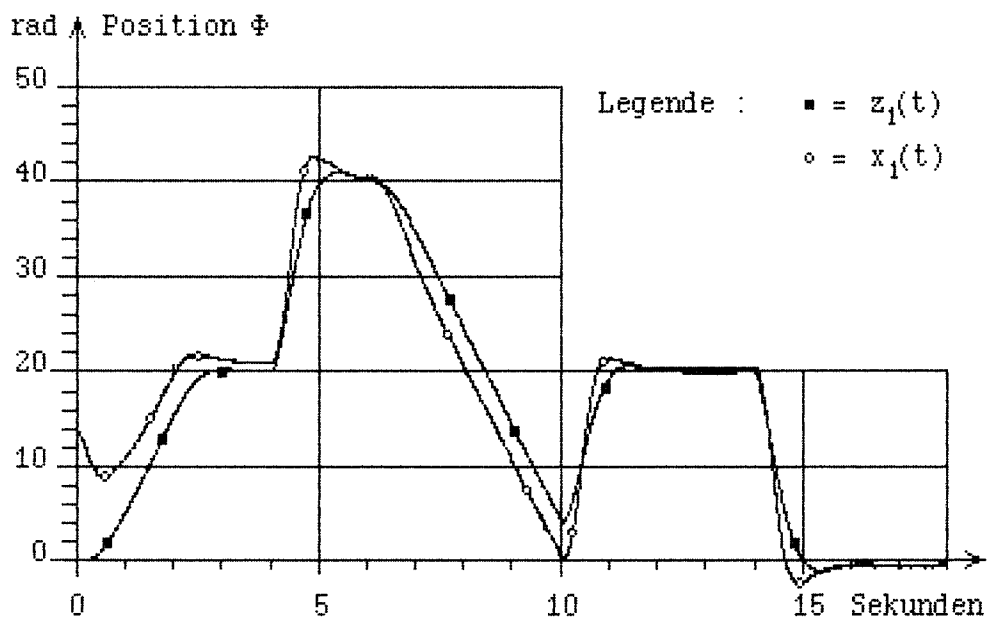


Bild V.2.3.1

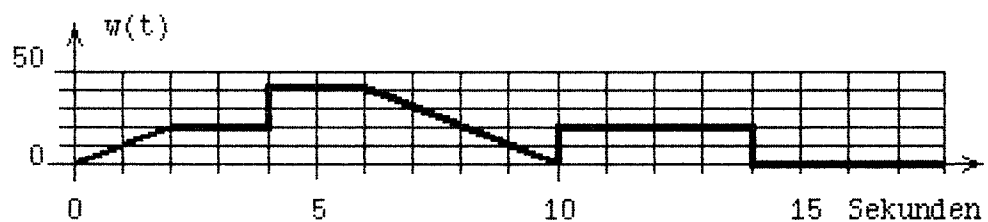


Bild V.2.3.2

Die Abweichungen der realen Strecke von ihrer Nominalform produzieren z.T. erhebliche Positionsfehler, auch nachdem der Anfangsfehler eliminiert ist.

Im folgenden Bild V.2.3.3 ist das Verhalten der Strecke beim Einsatz des RVS dargestellt. Die Anfangswerte und die Referenzsteuergrösse $w(t)$ sind gleich wie beim Einsatz des linearen Reglers.

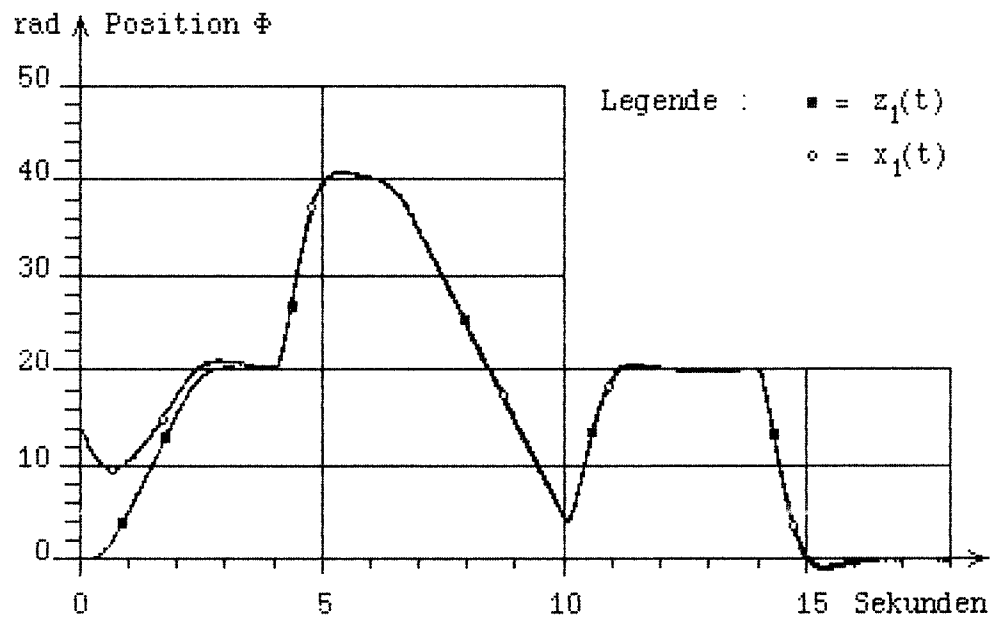


Bild V.2.3.3

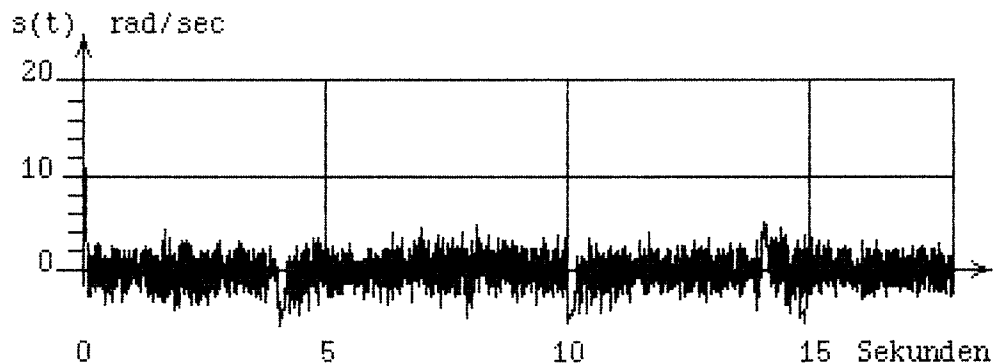


Bild V.2.3.4

In Bild V.2.3.4 ist unten auch der Verlauf der Schaltvariablen $s(t)$ eingezeichnet. Der Gleitzustand wird unmittelbar nach dem Start des RVS erreicht. Zu gewissen Zeitpunkten verlässt der Zustandspunkt kurz die Gleitgerade. Dieses nichtideale Verhalten wird durch die Strombegrenzung im Leistungsverstärker verursacht. Trotzdem ist gegenüber dem linearen Regler eine deutliche Verbesserung des Führungsverhaltens festzustellen.

VI. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Dieses Kapitel versucht, eine abschliessende Wertung der RVS zu geben. Als erstes werden die wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit stichwortartig kurz rekapituliert (Abschnitt VI.1). Anschliessend werden die Vor- und Nachteile der RVS aufgeführt und ihre Anwendbarkeit beurteilt (Abschnitt VI.2).

VI.1. Zusammenfassung

Kapitel II :

- Für ideale Systeme ist die angestrebte absolute Robustheit gegenüber Parameterschwankungen immer erreichbar.
- Die Analyse- und Synthesaufgabe ist im kanonischen Koordinatensystem einfach lösbar (Polvorgabe).
- Ein neuer, symmetrischer Regler wurde eingeführt, welcher in zwei Teile aufgespalten ist.
- Der lineare Teil dieses Reglers vollführt eine Pol-Nullstellen-Kürzung am Nominal-System, die restlichen m Pole werden in den Ursprung verlegt.
- Der nichtlineare Teil eliminiert die Anfangsbedingung der isolierten Integratoren und stabilisiert die Gleitbewegung bei eventuellen Parameterfehlern.
- Explizite Stabilitätsaussagen sind bei unbekanntem aber begrenztem Parameterfehler einfach möglich; zusätzlich gibt es Bedingungen die eine endliche Treffzeit garantieren.
- Alle Aussagen des Regulatorproblems sind auf das Folgeregelungsproblem mit Referenzmodell anwendbar, wenn man statt des Zustands den Fehler betrachtet.

Kapitel III :

- Kleine Abweichungen der Parameterstörungen von der Idealform werden verkräftet, das Systemverhalten wird dann aber parameterabhängig.
- Der Einsatz von Beobachtern verunmöglicht die absolute Robustheit, d.h. perfekte Gleitbewegungen sind nicht mehr möglich.
- Eine gewisse Klasse von Motorrauschen kann vollständig unterdrückt werden.
- Messrauschen verhindert immer perfektes Gleiten.

- Das Existenzgebiet des Gleitzustandes ist bei beschränkten Steuergrößen relativ einfach abzuschätzen, das Einzugsgebiet ist i.a. schwieriger zu finden.
- Es existiert einer Klasse von nichtlinearen Strecken, welche durch Linearisieren, zu idealem Verhalten gezwungen werden können.
- Für gewisse nichtlineare Strecken sind Gleitzustände direkt erreichbar, besonders im Zusammenhang mit Referenzmodell-Ansätzen.
- Für einen speziellen Robotertyp wurde das vollständige Analyse- und Syntheseproblem gelöst.

Kapitel IV. :

- Eine natürliche Erweiterung der $(n-1)$ -dimensionalen, idealen Gleitbewegung auf eine n dimensionale Bewegung (erweitertes Gleiten) wurde angegeben.
- Diese Betrachtungsweise wurde auf diverse nichtideale Fälle, insbesondere auf digitale RVS, angewendet.
- Die Robustheit der RVS gegenüber kleinen Abweichungen von den idealen Voraussetzungen (Robustheit zweiter Art) wurde bestätigt.

Kapitel V. :

- Für einen Gleichstrom-Antrieb wurde die Durchführbarkeit der vorgeschlagenen Regelalgorithmen gezeigt. Die spezielle Eignung der RVS für elektrische Antriebe wurde bestätigt.
- Die Erwartungen bezüglich Robustheit wurden erfüllt, ein ideales Verhalten ist aber nur bei genügend schnellen Reglerkomponenten erreichbar.
- Der Einsatz von Mikroprozessoren (ev. Signalprozessoren) und schneller moderner Leistungselektronik ist deswegen erforderlich.

Ul. 2. Beurteilung der Regler mit variabler Struktur :

Vorteil	Nachteil
Absolute Robustheit, gewisse Störungen haben gar keinen Einfluss	Nur spezielle Klassen von Störungen zugelassen
Einfacher Reglerentwurf	Zusätzliche Transformationen
Einfacher Regler, leicht zu realisieren	Zustand muss vollständig messbar sein, mit Beobachter Verlust der Robustheit
Motor-Rauschen kann z.T. vollständig neutralisiert werden	Mess-Rauschen verunmöglicht immer perfektes Gleiten
Ideales Systemverhalten auch bei schnell variierenden Parametern	Steuerleistung hoch, da auf den schlechtesten Fall dimensioniert werden muss
Ideales Systemverhalten im Gleitzustand	Vor Erreichen des Gleitzustandes parameterabhängiges Verhalten

Die Konsequenz dieser Erkenntnisse ist, dass RVS sicher nicht für den allgemeinen oder nicht besonders anspruchsvollen Einsatz geeignet sind. Der Einsatz von RVS ist dann sinnvoll, wenn :

- die Parameterstörungen die Rangbedingungen (II.1.2.2/3) erfüllen
- der Zustand vollständig messbar ist
- höchste Regelgüte, besonders in der Schlussphase, nötig ist

(die letzte Bedingung kann fallengelassen werden, wenn ein Ansatz mit Referenzmodell möglich ist).

Die RVS sind ausgesprochene Spezialisten, insbesondere sind sie nicht ein universell einsetzbares Instrument, um ungenau bekannte Systeme zu regeln. In gewissen Fällen kann jedoch mit ihrer Hilfe eine bisher unerreichbare Regelgüte erzielt werden. Ihr Einsatz kann demzufolge unter gewissen Bedingungen sinnvoll sein, aber man sollte sich davor hüten, in den RVS das Regelungskonzept zu sehen, welches alle Robustheitsprobleme lösen kann.

Literatur-Liste

- [1] V. Utkin, *Sliding Modes and Their Application to Variable Structure Systems*. Moscow: MIR, 1978.
- [2] H.A.Nour Eldin, M.Heister, "Zwei neue Zustandsdarstellungsformen zur Gewinnung von Kroneckerindizes, Entkoppelungsindizes und eines Prim-Matrix-Produktes," *Regelungstechnik*, Heft 12, 1980.
- [3] B. Drazenovic, "The Invariance Condition in Variable Structure Systems," *Automatica*, vol. 5, pp. 287-295, 1969.
- [4] U. Itkis, *Control Systems of Variable Structure*. New York: J. Wiley & Sons, 1976.
- [5] J. Lasalle, S. Lefschetz, *Die Stabilitätstheorie von Ljapunow*. Mannheim: BI-Taschenbücher, 1967.
- [6] V. Utkin, "Variable Structure Systems With Sliding Modes, a Survey," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-23, pp. 212-222, 1977.
- [7] T.Kailath, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1980.
- [8] P.C. Müller, *Stabilität und Matrizen*. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [9] P. Popow, J. Paltow, *Näherungsmethoden zur Untersuchung nichtlinearer Regelungssysteme*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1963.
- [10] H.P. Geering, L. Guzzella, S. Hepner, Ch. Onder, "Time-Optimal Motions of Robots in Assembly Tasks," *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-31, pp. 512-518, 1986.
- [11] S.V. Emeljanov, *Automatische Regelsysteme mit veränderlicher Struktur*. München-Wien: Oldenbourg Verlag, 1969.
- [12] A.F. Filippov, "Application of the Theory of Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides," *Proceedings 1st IFAC Congress*, Moscow, 1961.

- [13] E.A. Barbashin, *Introduction to the Theory of Stability*. Groningen (Holland): Wolters-Noorhof, 1970.
- [14] A. Sabanovic, D. Izosimov, F. Bilalovic, O. Music, "Sliding Modes in Controlled Motor Drives," *Proceedings IFAC Control in Power Electronics and Electrical Drives*, pp. 133-138, Lausanne, Switzerland, 1983.
- [15] K.K. Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybenetics*, vol. SMC-8, pp. 101-109, 1978.
- [16] J.J. Slotine, "The Robust Control of Robot Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 4, No. 2, pp. 49-64, 1985.
- [17] K.K. Young, "Design of Variable Structure Model-Following Control Systems," *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. AC-23, pp. 1079-1085, 1978.
- [18] O. Föllinger, *Nichtlineare Regelungen*. München-Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1982.
- [19] G. Stein, M. Athans, *The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design*. LIDS-P-1348, Laboratory for Information and Decision Systems, M.I.T., Cambridge, USA, 1984.
- [20] K.J. Åström, B. Wittenmark, "On Self Tuning Regulators," *Automatica*, pp. 185-199, vol. 9, 1973.
- [21] I. D. Landau, *Adaptive Control - the Model Reference Approach*. New York: Marcel Dekker, 1979.
- [22] CH. Rohrs, *Adaptive Control in the Presence of Unmodeled Dynamics*. LIDS-TH-1254, Laboratory for Information and Decision Systems, M.I.T., Cambridge, USA, 1982.
- [23] Numerical Optimisation Centre of The Hatfield Polytechnic, *OPTIMA Manual*. Hatfield, Hertfordshire AL10 9AB, U.K.
- [24] H. Bühler, *Reglage par mode de glissement*. Interner Bericht des Laboratoire d'Electronique Industrielle, EPF-Lausanne, 1985.

Verdankungen

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Mess- und Regeltechnik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich verfasst. Sie wurde durch einen Kredit der ETH ermöglicht, wofür ich dieser Institution meinen besonderen Dank aussprechen möchte.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für das stetige Interesse und Entgegenkommen möchte ich Herrn Prof. Dr. H. P. Geering herzlich danken. Gleichzeitig gilt mein Dank auch Herrn Prof. Dr. M. Morf, der sich spontan zur Uebernahme des Korreferates bereit erklärte.

Danken möchte ich aber auch allen Institutsangehörigen und Studenten, die in den vergangenen drei Jahren in manchen Diskussionen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Kurzfassung :

In dieser Arbeit wird die Klasse der strukturvariablen Regler untersucht, welche mit Gleitzuständen operieren. Diese Regler besitzen die Eigenschaft, gegenüber gewissen Parameterstörungen absolut robust zu sein.

Als erstes wird die Klasse der "idealen" Systeme definiert, welche alle notwendigen Bedingungen erfüllen. Anschliessend wird eine kanonische Formulierung des Systems gegeben, wobei besonderes Gewicht auf die Herleitung der dazu benötigten Koordinaten-Transformationen gelegt wird. Die Äquivalenz zwischen den bekannten Rangbedingungen für die zulässigen Parameterstörungen und der Formulierung mit kanonischen Koordinaten wird gezeigt.

Sowohl für das "Regulator-" wie auch für das "Folgeregelungsproblem" wird die Synthese und Analyse von geeigneten strukturvariablen Reglern gezeigt. Die vorgeschlagenen Regler besitzen eine neue symmetrische Form, welche den eigentlichen Grundmechanismus der strukturvariablen Regler besonders deutlich aufzeigt. Die Synthese wird durch die Wahl orthogonaler Gleitebenen wesentlich erleichtert, weil das gleitende System in diesem Falle in lauter "Single-Input"-Subsysteme aufgespalten wird. Die Vorgehensweise wird bei beiden Problemen durch Beispiele illustriert.

Im nächsten Kapitel werden Systeme untersucht, welche auf irgendeine Art von der "idealen" Form abweichen. Darunter fallen Systeme, deren Störungen die erwähnten Rangbedingungen nicht erfüllen, deren Zustand nicht vollständig messbar oder deren Eingangs- und Ausgangsgrössen verrauscht sind. Für gewisse Abweichungen von der Idealform wird gezeigt, dass sie ohne Einfluss auf das Systemverhalten bleiben. Für andere Nichtidealitäten wird gezeigt, dass sie das System beeinflussen. Diese Einflüsse können mehr oder weniger gravierend sein.

Die bei linearen Systemen gefundenen Resultate lassen sich auf eine gewisse Klasse von nichtlinearen Systemen übertragen. Es wird gezeigt, dass z.B. alle Roboter dieser Klasse angehören. Anhand eines Beispiels ("zylindrischer" Montageroboter) wird das Vorgehen bei einem nichtlinearen System demonstriert.

Anschliessend wird das "erweiterte Gleiten" eingeführt. Hierbei handelt es sich um eine Bewegung, welche nicht mehr nur auf der Gleitebene, sondern in einer kegelförmigen Nachbarschaft derselben stattfindet. Es wird ein Verfahren vorgeschlagen, mit welchem das Kegelgebiet berechnet werden kann. Anschliessend wird gezeigt, dass bei nichtidealen Systemen oft eine erweiterte Gleitbewegung stattfindet, insbesondere dann, wenn die Abweichungen von der idealen Form klein sind.

Das vorletzte Kapitel befasst sich mit den Problemen, welche bei der Anwendung der vorgeschlagenen Regelalgorithmen auftauchen. An einem Gleichstromantrieb wird sowohl das Regulator, wie auch das Folgeregelungsproblem studiert. Die Robustheit des Regelsystems wird untersucht und mit derjenigen von rein linearen Zustandsreglern verglichen. Dabei werden die theoretischen Vorhersagen gut bestätigt und die Anwendbarkeit der strukturvariablen Regler demonstriert.

Im letzten Kapitel wird eine Bewertung der strukturvariablen Regler vorgenommen. Grundsätzlich kann man sagen, dass mit strukturvariablen Reglern in gewissen Fällen, nämlich dann wenn die idealen Voraussetzungen erfüllt sind, absolut robuste Regelsysteme resultieren. Es wäre aber ein Trugschluss in diesen Reglern das Mittel gegen Parameterfehler zu sehen. Ihre sinnvolle Anwendung bleibt auf gewisse, in der Praxis allerdings recht häufig anzutreffende Fälle beschränkt.

Summary

This work analyses the class of variable structure regulators which operate with sliding planes. These regulators are known to be absolutely robust against some parameter disturbances.

First the class of "ideal systems" is introduced the elements of which are those systems which fulfill all necessary conditions. For these systems a canonical formulation is given. The equivalence between the known rank conditions for the parameter disturbances and the formulation with canonical coordinates is shown.

The synthesis and analysis procedure is shown for both the regulator and the tracking problem. The new proposed regulators have a symmetric form which clearly reflects the basic mechanism of all sliding systems. The synthesis is notably simplified by choosing orthogonal sliding planes, i.e., the resulting sliding closed loop system is separated into single-input subsystems. Examples are given for both problems.

The next chapter analyses those systems which do not belong to the class of the ideal systems. The following nonidealities are analyzed :

- disturbances which do not fulfill the mentioned rank conditions
- state not completely measurable
- noisy inputs and outputs.

Some of these nonidealities do not destroy the absolute robustness but most of them will affect more or less the system behavior.

The results of linear ideal systems can be carried over to a certain class of nonlinear systems. It is shown that all robots fulfill the requirements of this class. For an assembly robot the complete analysis and synthesis procedure is shown.

The next chapter expands the ideal sliding motion to a "generalized sliding" motion. The state isn't fixed anymore on the sliding plane but is allowed to remain in a certain neighborhood of this plane. An explicit procedure for calculating this domain is proposed. These ideas are used to show that some nonidealities will not completely destroy the robustness of the closed-loop systems.

The proposed algorithms are applied to a DC-drive. Both the regulator and the tracking problem are studied. The controllers are implemented using digital computers. The robustness of the proposed controllers is compared with the robustness of linear state feedback controllers. The superiority and feasibility of the variable structure regulators is clearly demonstrated.

The last chapter gives a final evaluation of the variable structure regulators. The main result is that these regulators can produce very robust closed-loop systems but it is certainly not true that they can be used to master all parameter uncertainties.

Lebenslauf :

Name : **Guzzella Lino**

Geburtsdatum : **13. Oktober 1957**

Bürgerort : **Italien**

Zivilstand : **verheiratet, eine Tochter**

Schulen : **1964-1973 Volksschule in Zürich**
**1973-1977 Mathematisch Naturwissenschaftliches
Gymnasium Ramibühl in Zürich**

Studium : **1977-1982 ETH Zürich, Abteilung für Maschineningenieur-
wesen (IIIA)**

Tätigkeiten : **1982-1984 Assistent am Institut für Mess- und Regeltechnik
(IMRT) ETH-Zürich, (Prof. Dr. H.P.Geering)**
**seit 1984 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am selben Institut
Ausführung einer Dissertation**