Diss. ETH Nr. 7449

GRUPPENPAARE MIT VIRTUELLER POINCARE-DUALITAET IN DER DIMENSION ZWEI

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER MATHEMATIK

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Ghislain J. Wies

Dipl. Math. ETH

geboren am 11. März 1955

von Luxemburg

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. Eckmann, Referent

Prof. Dr. G. Mislin, Koreferent

1984

Abstract

This work deals with group pairs $(G,\underline{S})$, which virtually fulfill the relative Poincaré duality in dimension two, analogous to that known for compact surfaces-with-boundary. These group pairs are called virtual PD^2-pairs (in short vPD^2-pairs).

The first result is a homological characterization of these vPD^2-pairs: $(G,\underline{S})$ is a vPD^2-pair if and only if G is a finitely generated virtually free group, $\underline{S}$ a finite family of subgroups of G with two ends, and $H^2(G,\underline{S},ZG) \cong Z$. With this criterion we then prove that the amalgamation of two vPD^2-pairs yields again a vPD^2-pair: If $(G_1,\underline{S}_1 \cup T)$ and $(G_2,\underline{S}_2 \cup T)$ are two vPD^2-pairs, then the pair $(G_1 *_T G_2, \underline{S}_1 \cup \underline{S}_2)$ is a vPD^2-pair.

In [7] Eckmann-Müller have shown that one naturally obtains a presentation list of the group G and the subgroups S_i for all vPD^2-pairs. They raised incidentally the question whether all pairs of this list are in fact vPD^2-pairs. In the next part of our work we investigate this question to a certain amount. We show that the presentation list of [7] may be built up by amalgamation of pairs of a "small list" of very special group pairs. We finally prove that the group G of the pairs $(G,\underline{S})$ of that small list is a finitely generated, virtually free group. The computation of the second relative cohomological group $H^2(G,\underline{S},ZG)$, which would give a complete answer to the question raised above, is only carried through in two special cases.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit handelt von Gruppenpaaren $(G,\underline{S})$, welche virtuell die relative Poincaré-Dualität in der Dimension zwei, wie sie bei geschlossenen Flächen mit Rand auftritt, erfüllen. Diese Gruppenpaare werden als virtuelle PD^2-Paare (kurz vPD^2-Paare) bezeichnet.

Das erste Resultat ist eine homologische Charakterisierung dieser vPD^2-Paare: $(G,\underline{S})$ ist ein vPD^2-Paar genau dann, wenn G eine endlich erzeugte, virtuell freie Gruppe ist, $\underline{S}$ eine endliche Familie von Untergruppen von G mit zwei Enden, und $H^2(G,\underline{S},ZG) \cong Z$. Mit Hilfe dieses Kriteriums wird dann bewiesen, dass die Eigenschaft ein vPD^2-Paar zu sein beim Amalgamieren nicht verloren geht: Sind $(G_1,\underline{S}_1 \cup T)$ und $(G_2,\underline{S}_2 \cup T)$ zwei vPD^2-Paare, so ist das Paar $(G_1 *_T G_2, \underline{S}_1 \cup \underline{S}_2)$ ein vPD^2-Paar.

In der Arbeit [7] von Eckmann-Müller wird gezeigt, dass sich für vPD^2-Paare zwangsläufig eine Liste von Präsentierungen, der Gruppe G und der Untergruppen S_i, ergibt. Wir befassen uns in der vorliegenden Arbeit mit der dort am Rande gestellten Frage, ob alle Paare dieser Liste wirklich vPD^2-Paare sind. Wir zeigen nämlich, wie man die Präsentierungsliste aus [7] aus einer "kleinen Liste" von sehr speziellen Paaren, durch Amalgamieren aufbauen kann. Für die Paare $(G,\underline{S})$ dieser kleinen Liste wird schliesslich bewiesen, dass G virtuell frei (endlich erzeugt) ist. Auf die zur vollständigen Lösung der genannten Frage nötige Berechnung der zweiten relativen Cohomologiegruppen $H^2(G,\underline{S},ZG)$ wird nur in zwei speziellen Fällen eingegangen.