

# Theoretische Untersuchung über die Seitenwandgrenzschichten in Axialverdichtern

VON DER  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH  
ZUR ERLANGUNG DER  
WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
GENEHMIGTE  
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

**Peter Suter**

dipl. Masch.-Ing. ETH  
von Baden (Kt. Aargau)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Traupel

Korreferent: Herr Prof. Dr. J. Ackeret



Erscheint als Mitteilung Nr. 5  
aus dem Institut für thermische Turbomaschinen  
an der Eidgenössischen Technischen Hochschule  
in Zürich

---

Verlag Leemann Zürich

## **Vorwort**

Die vorliegende Untersuchung entstand auf Anregung von Herrn Prof. Dr. W. Traupel. Für sein stetes Interesse und seine wertvollen Ratschläge möchte ich ihm herzlich danken, darüber hinaus aber auch für die vielen fachlichen und menschlichen Hinweise, die er mir während meiner Tätigkeit an seinem Institute gab. Mit meinem Kollegen, Herrn dipl. Ing. W. Rieß, führte ich manche Diskussionen, welche für die Entstehung der Kapitel I und II bedeutsam waren. Nicht zuletzt gebührt auch herzlicher Dank meinen Eltern und meiner Gattin.

**Leer - Vide - Empty**

## Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht . . . . .	7
Bezeichnungen . . . . .	11
<i>Kapitel I: Energiebilanz für eine axiale Verdichterstufe . . . . .</i>	<i>15</i>
1. Allgemeine Energiegleichung . . . . .	15
2. Bedingungen für die Erzielung eines gleichbleibenden Zustandes der Wandgrenzschichten . . . . .	19
<i>Kapitel II: Zusätzliche Energiezufuhr bei der gleichbleibenden, ausgebildeten Kanalströmung . . . . .</i>	<i>21</i>
1. Der Ersatz der Schaufelungen durch Kraftfelder . . . . .	21
2. Bewegungsgleichungen. . . . .	27
3. Energiezufuhr an die Randzonen durch sekundären Druckabfall. Bestimmung der Axialkomponente $C_x(Z)$ bei der ausgebildeten Kanalströmung .	29
4. Direkte zusätzliche Schaufelarbeit in den Randzonen . . . . .	32
5. Lösung für spezielle Fälle, Vergleich . . . . .	33
<i>Kapitel III: Periodische Lösung für die Umfangskomponente <math>C_y</math> bei der gleichbleibenden, ausgebildeten Kanalströmung . . . . .</i>	<i>38</i>
1. Grundlegender Ansatz . . . . .	38
2. Lösung für $C_y$ . . . . .	39
a) Randbedingungen . . . . .	39
b) Vorgehen bei der Lösung . . . . .	40
c) Stromflächen . . . . .	42
3. Ansatz für die turbulente Austauschgröße . . . . .	42
a) Allgemeine Überlegungen . . . . .	42
b) Verlauf von $A$ im glatten Kanal . . . . .	45
c) Rauher Kanal . . . . .	47
4. Die Feldkraft $\Phi_y$ . . . . .	48
5. Lösung für einige Varianten . . . . .	51
6. Der Einfluß einer periodisch veränderlichen Axialgeschwindigkeit . . . . .	55
a) Ansatz für die Axialgeschwindigkeit . . . . .	55
b) Bestimmung von $C_y$ . . . . .	57
c) Lösung für ein Beispiel . . . . .	58

<i>Kapitel IV: Lösung für getrennte, sich entwickelnde Grenzschichten . . . . .</i>	60
1. Grundlegender Ansatz . . . . .	60
2. Bestimmung von $C_y$ . . . . .	63
a) Randbedingungen . . . . .	63
b) Ermittlung der Ausgangsfunktionen $Q_\mu$ . . . . .	64
3. Ansätze für die Austauschgröße und die Geschwindigkeiten $C_x$ und $C_z$ . . . . .	65
4. Lösung für ein Zahlenbeispiel. . . . .	65
a) Daten, Ausgangsfunktionen $Q_\mu$ . . . . .	65
b) Entwicklung der Unterströmung in einer Stufe . . . . .	67
c) Einfluß der Grenzschichtdicke beim Eintritt in die Stufe . . . . .	69
5. Gültigkeitsbereich der reibungsfreien Lösung bei getrennten Grenzschichten und bei ausgebildeter Kanalströmung . . . . .	69
6. Der Wandreibungsverlust bei getrennten Grenzschichten und bei ausgebildeter Kanalströmung . . . . .	72
<i>Kapitel V: Abschätzung des Einflusses der endlichen Gitterteilung . . . . .</i>	77
1. Allgemeines . . . . .	77
a) Problemstellung . . . . .	77
b) Bezeichnungen, Ansatz für die Geschwindigkeiten in der Grenzschicht . . . . .	79
2. Die Grundlösung . . . . .	81
a) Integrale Grenzschichtgleichungen . . . . .	81
b) Numerische Lösung durch ein Differenzenverfahren. . . . .	84
c) Ansatz für das Geschwindigkeitsfeld außerhalb der Grenzschicht . . . . .	87
d) Ergebnisse für spezielle Beispiele . . . . .	89
3. Die Eckenlösung . . . . .	93
a) Grundlegender Ansatz . . . . .	93
b) Impulssatz für die Eckenzone . . . . .	94
c) Beispiel . . . . .	99
4. Vergleichslösung unter Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung (Kraftfeldlösung). . . . .	100
<i>Anhang: Die Entwicklung der Quergrenzschicht an einer querbewegten Platte . . . . .</i>	102
Literatur . . . . .	107

## Einleitung und Übersicht

Die Seitenwandgrenzschichten von Turbomaschinen sind noch weitgehend unerforscht. Dies hängt damit zusammen, daß sie einen ausgeprägt dreidimensionalen Charakter besitzen. Wir stellen uns die Aufgabe, eine Zergliederung der verwickelten Erscheinungen vorzunehmen, um anhand eines vereinfachten Modells eine gewisse Einsicht in die Strömungsverhältnisse zu gewinnen, wobei die gemachten Vernachlässigungen nach Möglichkeit zu überprüfen sind.

Wir beschränken uns dabei auf Axialverdichter und vereinfachen das Problem, indem wir die Schaufelkränze abwickeln, d. h. eine Folge von abwechselnd ruhenden und bewegten ebenen Gittern betrachten. Die Grundannahme ist nun die, daß wegen des großen Teilungsverhältnisses das Gebiet der Seitenwandgrenzschichten aufgeteilt werden kann in einen Bereich in der Nähe der durch Wand und Schaufel gebildeten Ecke, in welchem starke Radialbewegungen und Druckgradienten auftreten und welcher die hauptsächliche Quelle der sogenannten Randverluste ist, sowie in die dazwischenliegende Region in der Umgebung der Teilungsmittle, wo das Druckfeld der Grenzschicht im wesentlichen von der reibungsfreien wandfernen Strömung aufgeprägt wird. Das Strömungsfeld der Grenzschicht in diesem Bereiche bezeichnen wir als *Grundlösung* und die mit ihr verbundene Dissipation als Wandreibungsverlust. Die vorliegende Untersuchung befaßt sich, mit Ausnahme des Abschnittes V. 3, vor allem mit dieser Grundlösung; nach unseren Ergebnissen läßt sich ihr mittleres Verhalten durch eine Feldkraftlösung, die unter Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung gewonnen wird, im allgemeinen recht gut darstellen.

Während für laminare Grenzschichten schon einige ähnliche Untersuchungen veröffentlicht wurden, ist bei turbulenter Strömung das Problem insofern komplizierter, als die Kenntnis des Turbulenzmechanismus in einem dreidimensionalen Strömungsfeld noch sehr mangelhaft ist. Unsere Untersuchung beschreibt daher eigentlich ein Modellbild einer turbulenten Strömung, das im Gegensatz zum laminaren Fall eine — in Funktion des Wandabstandes — um Größenordnungen variierende Austauschgröße besitzt.

Es erhebt sich nun die Frage, wie man dem strömenden Medium in der Wandgrenzschicht überhaupt die erforderliche zusätzliche Energie zuführen solle, damit es den Druckanstieg in der Stufe überwinden kann.

Ein weiteres Problem ist dieses, wieweit die Reibungskräfte an den Seiten-

wänden die Strömung direkt beeinflussen, d. h. wieweit der Gültigkeitsbereich der bekannten Sekundärströmungstheorien gehe, welche zwar verringerte Geschwindigkeit der Zuströmung in Wandnähe annehmen, sonst aber reibungsfreie Strömung voraussetzen.

Im Kapitel I wird anhand einer allgemeinen Energiegleichung das Verhalten der Wandgrenzschichten untersucht, und es wird auf die wichtigsten bestimmenden Größen hingewiesen. Insbesondere fragen wir uns, unter welchen Bedingungen eine gleichbleibende, d. h. längs der axialen Durchtrittsrichtung sich nicht verdickende Wandgrenzschicht auftreten kann. Dabei können wir die zwei Fälle unterscheiden, daß an den beiden Wänden zwei durch ein Kerngebiet getrennte Grenzschichten vorhanden sind, oder daß sich die beidseitigen Grenzschichten vereinigt haben und, den ganzen Querschnitt ausfüllend, die ausgebildete Kanalströmung darstellen.

Für diesen zweiten Fall untersuchen wir im Kapitel II die Wege, auf denen den wandnahen Gebieten zusätzliche Energie zugeführt werden kann; wir betrachten dabei die beiden Extremfälle, daß einerseits den entsprechenden Zonen direkt zusätzliche Schaufelungsarbeit zugeführt wird, andererseits dem gesamten Strömungsquerschnitt gleichmäßig Impuls in der Form des sogenannten sekundären Druckabfalles entzogen und den Mangelgebieten durch turbulenten Austausch vermittelt wird. Auf diese zweite Art ist ein nennenswerter Energiezuschuß an eng begrenzte Randzonen nur möglich bei erhöhter Turbulenzintensität, welche aber an sich größere Wandreibungsverluste bedingt.

Vernachlässigen wir die endliche Gitterteilung und ersetzen wir das Druckfeld durch ein äquivalentes, längs des Umfangs konstantes Kraftfeld, so läßt sich die Bewegungsgleichung für die Umfangskomponente der Geschwindigkeit unter einer Voraussetzung über den turbulenten Austausch, die in Abschnitt III. 3 näher diskutiert wird, separieren von den Gleichungen für die Axial- und Radialkomponente.

Im Kapitel III bestimmen wir für die ausgebildete Kanalströmung und für eine mittlere Stufe des Verdichters, wo die Strömung quasiperiodischen Charakter hat (das Geschwindigkeitsfeld ist in aufeinanderfolgenden Stufen das gleiche, der Druck aber steigt an), die Umfangskomponente der Geschwindigkeit, welche sich unter der Wirkung des die Schaufelung ersetzenden Kraftfeldes einstellt. Wir machen dabei die Feststellung, daß sich die Abweichungen von der reibungsfreien Lösung auf ein wandnahes Gebiet beschränken, dessen Tiefe in einer mittleren Stufe nicht mehr als die Hälfte der Verdrängungsdicke beträgt.

Anschließend verifizieren wir noch, daß die Annahme eines konstanten Profils der Axialgeschwindigkeit längs der axialen Durchtrittsrichtung keine unzulässige Vereinfachung war, indem sich die Lösung für die Umfangskomponente



nur wenig ändert, wenn die Axialgeschwindigkeit längs der Stufe periodisch variiert.

Im Kapitel IV führen wir für eine Stufe am Anfang des Verdichters eine analoge Untersuchung wie im Kapitel III durch, wobei zwei getrennte, längs der Stufe linear anwachsende Wandgrenzschichten vorausgesetzt werden. Schon nach einer Stufe sind die Strömungsverhältnisse ähnlich denjenigen der periodischen Lösung für die ausgebildete Kanalströmung. Wesentlich größer ist der Einflußbereich der Reibungskräfte, und zwar um so größer, je geringer die Lauflänge der Grenzschicht bis zum Eintritt in die Stufe. Hingegen ist er, ins Verhältnis zur Verdrängungsdicke gesetzt, von ähnlicher Größe wie in der laminaren Grenzschicht, die von andern Autoren behandelt wurde.

Für die Wandreibungsverluste stellen wir anhand der Ergebnisse einen Ansatz auf, welcher Anteile von der mittleren Durchströmungsgeschwindigkeit und von den oszillierenden Komponenten her aufweist und welcher sowohl für die ausgebildete Kanalströmung als auch für getrennte Grenzschichten gilt. Während der Sitz der üblichen Dissipation vornehmlich die unmittelbar an die Wand angrenzende Zone ist, entsteht bei Turbomaschinen auch im Strömungsinnern wegen der dort vorhandenen Turbulenz ein gewisser Verlust (neben den Profilverlusten), den wir hier zwar nicht quantitativ angeben können, der aber unter Umständen eine spürbare Größe besitzt.

Im Kapitel V schätzen wir den Einfluß der endlichen Gitterteilung ab, indem wir die Entwicklung der Grenzschicht in einem Gitter anhand eines zweiparametrischen Ansatzes verfolgen. Daraus ergibt sich, daß die Kraftfeldlösung (Vernachlässigung der endlichen Teilung) Ergebnisse liefert, die das mittlere Verhalten der Grenzschicht repräsentieren. Die Bedeutung einer am Eintritt in das Gitter vorhandenen Unterströmung für die weitere Entwicklung der Grenzschicht ist beträchtlich, für die Grenzschicht in der Sauggecke geradezu entscheidend, was aus einer rohen Abschätzung der Eckengrenzschicht folgt. Soll der Gitterversuch bezüglich der Randverluste Ergebnisse liefern, die auf mehrstufige Maschinen übertragbar sind, so ist durch geeignete Vorkehrungen dafür zu sorgen, daß schon die Grenzschicht beim Eintritt dreidimensionalen Charakter hat, d. h. daß sie eine Unterströmung aufweist.

Abschließend untersuchen wir in einem Anhang A die Entwicklung der Quergrenzschicht, wenn in einer gleichbleibenden Grenzschicht die überströmte Wand von einer bestimmten Stelle an quer zur Strömungsrichtung bewegt ist. Das Problem tritt auf, wenn die Grenzschicht, die sich in der Einlaufpartie des Verdichters gebildet hat, dem Anfang der Rotorwand begegnet. Bei unserer Lösung für das turbulente Modell breitet sich der Einfluß der Wand im Vergleich zum laminaren Falle schneller ins Innere der Strömung aus und die Gradienten in Wandnähe sind größer, d. h. das Profil der Quergrenzschicht ist eckiger.

**Leer - Vide - Empty**

## Bezeichnungen

Die Numerierung der Abschnitte und Gleichungen beginnt in jedem Kapitel neu. Bei einem Verweis auf ein anderes Kapitel wird dessen Nummer in römischen Ziffern beigelegt, z. B. Gl. (III. 17).

Die Größen können in beliebigen kohärenten Einheiten eingesetzt werden. Von Abschnitt II. 2 an wird durchwegs mit dimensionslosen (abgekürzt: dml.) Größen gerechnet, deren Definitionen sich für die Kapitel II bis IV und für den Anhang in Abschnitt II. 2, für Kapitel V in Abschnitt V. 1 b finden. Für andere Symbole wird die Definitionsgleichung in der folgenden Zusammenstellung jeweils angegeben.

- $A$  Austauschgröße (dml. II, Seite 27); Koeffizient (V. 16)
- $\dot{A}$  Leistung (dml. II, Seite 27)
- $a_n$  Koeffizient im Ansatz für  $C_y$  (III. 2)
- $B_{ij}$  Koeffizient (V. 15)
- $b_n$  Koeffizient im Ansatz für  $C_y$  (III. 2)
- $C$  Geschwindigkeit (dml. II, Seite 27); Formfunktion für  $C_x$  (IV. 2)
- $c$  Geschwindigkeit; Krümmung (V. 37)
- $c_f$  Reibungskoeffizient ( $= 2\tau/\rho c^2$ )
- $c_L$  Auftriebsbeiwert ( $= 2 \cdot \text{Auftrieb}/\rho s l c_x^2$ )
- $D$  Dissipation (dml. II, Seite 27); Formfunktion für  $C_z$  (IV. 3); Koeffizient (V. 16)
- $D_m$  mittlerer Schaufelddurchmesser
- $D_x$  Anteil an der dimensionslosen Dissipation, der von den Ableitungen von  $C_x$  herrührt;  $D_y$  analog für die Ableitungen von  $C_y$
- $D_0, D_1, D_2$  Anteile an der Dissipation gemäß Gl. (IV. 26, 27, 28)
- $E$  Austauschgrößenfunktion (IV. 6); Koeffizient (V. 16)
- $F$  Feldkraft pro Volumeneinheit
- $f$  Eckenfläche (dml. V. 43);  $f_2$  Impulsmangelfläche (dml. V. 48)
- $G$  Konstante (V. 56)
- $g$  Korrekturfunktion (V. 42)
- $H_{12}$  Formparameter der Grenzschicht (V. 14)
- $h$  Exponent im Gesetz  $c_f \sim (Re)^{-h}$ ; Unterströmungsgröße (V. 13)
- $i$  Exponent (IV. 10); Enthalpie;  $\Delta i_s$  isentrope Enthalpiedifferenz

$K$	Von einer Schaufel ausgeübte Kraft pro Längeneinheit der Schaufelhöhe
$k$	Unterströmungsparameter (V. 1); $k_s$ Rauigkeit (III. 27)
$L_u$	Arbeitsumsetzung pro Zeit- und Masseneinheit
$l$	Schaufellänge (Abb. 1); $l_a$ axiale Stufenlänge (Abb. 1)
$m$	Exponent (IV. 4); (V. 3); $m_{1,2,3}$ Koeffizienten (V. 50)
$\dot{m}$	Massenstrom pro Längeneinheit des Umfanges
$N$	Leistung pro Längeneinheit des Umfanges; Normalkraft der Schaufelung pro Längeneinheit des Umfanges und der Schaufelhöhe; Koordinate (dml. V, Seite 79)
$n$	Ordnungsbezeichnung (III. 2); Exponent (V. 1)
$P$	Druck (dml. II, Seite 27)
$p$	Druck; Dissipationsbeiwert (IV. 27); halbe Amplitude der $C_x$ -Schwankung (III. 37)
$p_i$	Koeffizient im Ansatz für $\Delta_2$ (V. 22)
$Q$	Ausgangsfunktion für $C_y$ (IV. 9)
$q$	Dissipationsbeiwert (IV. 27); halbe Amplitude der $C_z$ -Schwankung (III. 37)
$q_i$	Koeffizient im Ansatz für $h$ (V. 22)
$r$	Reaktionsgrad
$S$	Spannung (dml. II, Seite 27); Koordinate (dml. V, Seite 79)
$S_t$	Totale Bogenlänge (V. 34)
$s$	Profilsehne; Koordinate längs Mittelstromlinie (II)
$T$	Schaufelungs-Umfangskraft pro Längeneinheit des Umfanges und der Schaufelhöhe (II. 17); $T_x$ , $T_y$ Schubspannungen (dml. V, Seite 79)
$t$	Gitterteilung
$U$	Umfangsgeschwindigkeit (dml. V, Seite 79)
$u$	Umfangsgeschwindigkeit des Laufkranzes; Hilfsvariable (A. 4)
$V$	Verlustleistung pro Längeneinheit des Umfanges; Geschwindigkeit der Wand (A)
$v^*$	Schubspannungsgeschwindigkeit (III. 23)
$W$	Relativgeschwindigkeit (dml. II, Seite 27); (dml. V, Seite 79)
$w$	Relativgeschwindigkeit (V); Hilfsvariable (A. 5)
$X$	Koordinate (dml. II, Seite 27); (dml. V, Seite 79)
$x$	Koordinate längs der axialen Durchtrittsrichtung ( $x=0$ in der Mitte des Axialspaltes vor einem Laufrade)
$Y$	Koordinate (dml. II, Seite 27); (dml. V, Seite 79)
$y$	Koordinate in Umfangsrichtung
$Z$	Koordinate (dml. II, Seite 27); (dml. V, Seite 79)
$z$	Koordinate senkrecht zur Seitenwand
$\alpha$	Verstärkungsfaktor der turbulenten Austauschgröße (III. 19)
$\beta$	Verhältnis $C_s/C_x$ (III. 20); Strömungswinkel (V)

$\gamma$	Koeffizient (III. 38); Exponent (V. 42)
$\Delta$	Grenzschichtdicke (dml. II, Seite 27); (dml. V, Seite 79)
$\Delta C_y$	Totale Änderung von $C_y$ in einem Schaufelkranz
$\delta$	Grenzschichtdicke; $\delta_1$ Verdrängungsdicke (I. 8); $\delta_2$ Impulsmangeldicke; $\delta_3$ Energiemangeldicke (I. 8); $\delta_T$ Kraftmangeldicke (I. 8)
$\epsilon$	Turbulente Scheinzähigkeit (III. 16); Phasenverschiebung ( $= \arctg b_1/a_1$ ) (III. 36)
$\zeta$	Verlustziffer (I. 18); Strecke (V. 24)
$\eta$	Viskosität; Variable (dml. III. 22); (Abb. 24)
$\eta_u$	Umfangswirkungsgrad (IV. 23)
$\theta$	Koordinate (dml. A. 2)
$\kappa$	Koeffizient ( $= 0,4$ ) (III. 24)
$\lambda$	Leistungszahl ( $= 2 L_u/u^2 = 2 u \Delta c_y/u^2 = 2 \Delta c_y/u$ )
$\mu$	Exponent (IV. 9)
$\nu$	Kinematische Zähigkeit; Verhältniswert (V. 44)
$\xi$	Variable (III. 26); (IV. 1); Breite der Eckenzone (Abb. 33)
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Spannung; Variable (dml. Abb. 24)
$\tau_w$	Wandschubspannung
$\Phi$	Feldkraft (dml. II, Seite 27)
$\varphi$	Koeffizient im Feldkraftansatz (III. 3); Fehlbetrag (V. 27)
$\Psi$	Dissipation (I. 11)
$\psi$	Koeffizient im Feldkraftansatz (III. 3); Funktion im Ansatz (V. 32)
$\chi$	Hilfsgröße der Unterströmung (V. 45)
$\omega$	Verhältnis der Austauschgrößen ( $A_{yx}/A_{xz}$ ) (III. 21)

### Indizes

0	Vor der Stufe (Abb. 1); nullte Ordnung (III, IV); Mittelstromlinie (V)
1	$\delta_1, Z_1, \Delta_1$ Verdrängungsdicke; 1. Ordnung (III); Zuströmung (V)
2	Nach der Stufe (Abb. 1); 2. Ordnung (III); $\Delta_2$ Impulsmangeldicke (V); Abströmung (V)
e	Eintritt in die Stufe (IV); Eckenlösung (V)
b, f	Bewegte, resp. feste Wand (IV. 18)
h	Homogene Lösung (III, IV)
m	Mittelwert (I); Kanalmitte (II, III)
$\nu$	Nur die Profilverluste berücksichtigend (I, II); partikuläre Lösung (III)
w	Wand
n	Ordnung (III); Koordinatenrichtung (V)
s	Koordinatenrichtung (V)

$x, y, z$	Koordinatenrichtungen
$os$	oszillierend (III. 28); (IV. 20)
$L$	Laminare Endsicht
$R$	$\zeta_R, \Delta \eta_{uR}$ Randverlust
$W$	$\zeta_W, \Delta \eta_{uW}$ Wandreibungsverlust
$\delta$	Außenrand der Grenzschicht, Kernströmung
$\epsilon$	Turbulent
$\eta$	Zähe
$\infty$	Vektorielle mittlere Durchströmgeschwindigkeit
*	Zusatz, Mangel (II, III); Anfang eines Schrittes (V, A)
+	Entsprechend der gewöhnlichen, 2-dimensionalen Grenzschichtströmung für die Geschwindigkeitskomponente $c_x$ .
$\wedge$	Ausgebildete Kanalströmung (III. 37); Geschwindigkeit (dml. A)
"	Lauftrad (II); außerhalb der Eckengrenzschicht (V)
'	Leitrad (II); Ableitung nach $Z$ (III. 4); Ableitung nach $\xi$ (IV. 13)
-	Unterströmungsanteil an $W_y$ (V)

## KAPITEL I

### Energiebilanz für eine axiale Verdichterstufe

#### 1. Allgemeine Energiegleichung

Das Verhalten der Grenzschichten an den Seitenwänden eines Axialverdichters ist sehr unterschiedlich und noch weitgehend ungeklärt. So stellten sich zum Beispiel im dreistufigen Versuchskompressor von *Bowen, Sabersky, Rannie* [1], der für konstanten Arbeitsumsatz über der Schaufelhöhe ohne Berücksichtigung der Wandgrenzschichten ausgelegt war, gleichbleibende, relativ dünne Wandgrenzschichten ein. Bei den Versuchen von *Ainley* [2] sowie von *Andrew, Jeffs* und *Hartley* [3] hingegen wuchs die Grenzschicht oft schnell an und füllte nach wenigen Stufen den ganzen zur Verfügung stehenden Ringquerschnitt aus, wobei das Axialgeschwindigkeitsprofil sehr spitz war. Nach *Eckert* [4] erstrecken sich die Wandgrenzschichten häufig ebenfalls über den gesamten Querschnitt, doch habe das Axialgeschwindigkeitsprofil einen sehr völligen Charakter und entspreche weitgehend der gewöhnlichen turbulenten Strömung in einem Ringkanal.

Wir versuchen nun im folgenden diese wesentlichen Unterschiede anhand der Energiebilanz für eine axiale Verdichterstufe zu interpretieren. Da die Krümmung des Gitters in diesem Zusammenhang nichts Neues bietet, stellen wir es uns in der vorliegenden Untersuchung stets abgewickelt vor, mit andern Worten, wir betrachten den Grenzfall  $1/D_m = 0$ . Im weiteren denken wir uns in diesem Kapitel die Integration längs des Umfanges bereits durchgeführt und fassen die verwendeten Größen als Mittelwerte über der Teilung auf.

Für ein Stufenelement nach Abb. 1 gilt die Energiebilanz

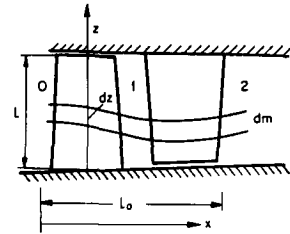


Abb. 1. Element einer Verdichterstufe.

$$dN_\tau + T u dz = d\dot{m} \Delta i_s + dV + d\dot{m} \left( \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right), \quad (1)$$

wo  $d\dot{m}$  den auf das Element entfallenden Massenstrom,  $T$  die Tangentialkraft der Rotorschaukelung pro Längeneinheit der Schaukelhöhe,  $dV$  die im betrachteten Element pro Zeiteinheit entstehende Verlustwärme,  $\Delta i_s$  die isentrope Enthalpiedifferenz und  $dN_\tau$  die von den Schubspannungen der Wandgrenschichten geleistete Arbeit bedeuten, während das Glied  $d\dot{m} \left( \frac{c_{2p}^2 - c_0^2}{2} \right)$  die Vergrößerung der kinetischen Energie in der Stufe darstellt; alles wird pro Längeneinheit in Umfangsrichtung gerechnet.

Die Verhältnisse beim Fehlen der Wandgrenschichten kennzeichnen wir durch den Index  $p$ . Der Massenstrom im Elemente wäre jetzt  $d\dot{m}_p$ ; als Verluste träten nur die Profilverluste auf, die in der Verlustzahl  $\zeta_p$  berücksichtigt seien. Die Energiebilanz würde lauten:

$$(1 - \zeta_p) T_p u dz = d\dot{m}_p \left( \Delta i_{sp} + \frac{c_{2p}^2}{2} - \frac{c_{0p}^2}{2} \right). \quad (2)$$

$T_p, \Delta i_{sp}$  etc. brauchen für die verschiedenen Stufenelemente nicht gleich zu sein, sondern können je nach Auslegungsgesichtspunkten (z. B. räumliche Strömung der nichtabgewickelten Stufe) über der Kanalhöhe variieren.

Für eine Verdichterstufe läßt sich wegen der relativ geringen Druckumsetzung schreiben

$$\Delta i_s = \frac{\Delta p}{\rho}, \quad (3)$$

also auch

$$\Delta i_{sp} = \frac{\Delta p_p}{\rho}. \quad (3')$$

Im weiteren führen wir den sekundären Druckabfall ein

$$\Delta p_p - \Delta p \equiv -\Delta p^*, \quad (4)$$

während  $\tau_{wN}$  die längs  $x$  gemittelte Umfangskomponente der am Rotor an der Nabe angreifenden Schubspannungen bezeichne (meistens gilt  $\tau_{wN} < 0$ ),  $\tau_{wS}$  diejenigen an der Spitze. (Sind die Laufschaufeln mit einem Deckband versehen, so greifen auch an diesem Schubspannungen an; das Deckband ist aber ein Teil des Rotors.) Durch Integration von (1) und (2) über die ganze Kanalhöhe erhalten wir mit (3) und (4):

$$\begin{aligned} & \int_0^l (T_p - T) (1 - \zeta_p) u dz + (\tau_{wN} - \tau_{wS}) u l_a = \\ & = \int_K \frac{\Delta p_p}{\rho} (d\dot{m}_p - d\dot{m}) - \int_K \frac{\Delta p^*}{\rho} d\dot{m} - \int_K dV + \int_0^l T u \zeta_p dz + \\ & + \int_K (c_{2p}^2 - c_2^2 - c_{0p}^2 + c_0^2) \frac{d\dot{m}}{2} + \int_K (c_{2p}^2 - c_{0p}^2) \frac{d\dot{m}_p - d\dot{m}}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$



Das Glied 
$$\int_0^l T u \zeta_p dz \quad (6)$$

stellt die reinen Profilverluste dar, indem wir allfällige Abweichungen, die in den Randzonen wegen der Wandgrenzschichten auftreten, zu den Randverlusten rechnen. Somit enthält der in (5) vorkommende Ausdruck

$$\int_K dV - \int_0^l T u \zeta_p dz \equiv V_W + V_R \quad (7)$$

nur die Wandreibungsverluste  $V_W$  und die Randverluste  $V_R$ .

Weil  $c_{xp}$ ,  $p_p$  etc. über der Kanalhöhe variieren können, definieren wir die integralen Mangeldicken etwas allgemeiner als es in der Grenzschichttheorie sonst üblich ist, nämlich:

Verdrängungsdicke 
$$\delta_1 \equiv \frac{1}{T_m u (1 - \zeta_{pm})} \int_K \left( \frac{\Delta p_p}{\rho} + \frac{c_{2p}^2 - c_{0p}^2}{2} \right) (d\dot{m}_p - d\dot{m}),$$

Energiemangeldicke im Schritte 0 
$$\delta_{30} \equiv \frac{2l}{\dot{m}_m c_{0m}^2} \int_K \left( \frac{c_{0p}^2 - c_0^2}{2} \right) d\dot{m}, \quad (8)$$

Tangentialkraftmangeldicke 
$$\delta_T \equiv \frac{1}{T_m (1 - \zeta_{pm})} \int_0^l (T_p - T) (1 - \zeta_p) dz,$$

wobei 
$$\dot{m}_m \equiv \int_K d\dot{m}_p \quad (9a)$$

die ohne Berücksichtigung des Seitenwandeinflusses durch den Gesamtquerschnitt strömende Menge darstellt und das Produkt  $(1 - \zeta_{pm}) T_m$  in der folgenden Weise definiert ist:

$$(1 - \zeta_{pm}) T_m u l \equiv \int_0^l (1 - \zeta_p) T_p u dz = \int_0^l \left( \frac{\Delta p_p}{\rho} + \frac{c_{2p}^2 - c_{0p}^2}{2} \right) d\dot{m}_p. \quad (9b)$$

Ferner gilt 
$$\dot{m}_m c_{0m}^2 \equiv \int_0^l c_{0p}^2 d\dot{m}_p. \quad (9c)$$

Bei der Definition der Verdrängungsdicke werden die Massenströme der einzelnen Stufenelemente gewertet im Verhältnis der Leistungen, die beim Fehlen der Wandgrenzschichten umgesetzt würden. Die Definitionen (8), (9) umfassen die Grenzschichten an beiden Seitenwänden und gehen in die üblichen Formulierungen über, wenn die mit  $p$  bezeichneten Größen über der Schaufelhöhe konstant sind und so mit den mit dem Index  $m$  gekennzeichneten Größen zusammenfallen; es wird dann

$$\delta_1 = \int_0^l \left( 1 - \frac{c_x}{c_{xm}} \right) dz.$$

Mit den allgemeinen Definitionen (8) lautet nun (5):

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1 - \zeta_{pm}) \left( \frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_T}{l} \right) + \frac{(\tau_{wS} - \tau_{wN}) l_a}{T_m l} - \frac{\int \frac{\Delta p^*}{\rho} d\dot{m}}{T_m u l}}{2 T_m u l} + \frac{\dot{m}_m}{2 T_m u l} \left( \frac{\delta_{32}}{l} c_{2m}^2 - \frac{\delta_{30}}{l} c_{0m}^2 \right) = \frac{V_W + V_R}{T_m u l}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Das erste Glied repräsentiert einen Überschuß an Umfangsarbeit pro Masseneinheit, denn wenn es positiv ist bedeutet dies, daß die Umfangsarbeit in der Grenzschicht weniger stark abgenommen hat als der Massenstrom. Das zweite Glied stellt die Arbeit dar, welche durch die am Rotor angreifenden Schubspannungen geleistet wird. Weiter folgen die durch den sekundären Druckabfall freigemachte Energie und die Verminderung des kinetischen Energiestromes. All das zusammen muß den Verlusten gleich sein, die durch das Auftreten der Seitenwandgrenzschichten hervorgerufen werden (rechte Seite).

In Gl. (7) und (10) haben wir den von den Wandgrenzschichten direkt und indirekt verursachten Verlust zerlegt in den Wandreibungs- und den Randverlust. Dies wollen wir noch etwas präzisieren: Wegen des großen Teilungsverhältnisses  $t/l_a$  von Verdichtergittern läßt sich das Gebiet der Seitenwandgrenzschicht aufteilen in eine *Grundzone*, welche den größten Teil des Gebietes zwischen zwei Schaufeln umfaßt und wesentliche Unterströmung (Geschwindigkeiten in der Grenzschicht nicht parallel zueinander) besitzt; in einer auf die Schaufelnähe beschränkten *Eckenzone* muß diese Grundlösung für das Geschwindigkeitsfeld jedoch korrigiert werden, da zusätzliche Druckkräfte auftreten, die den tangentialen Abfluß an der Schaufel erzwingen. Daß diese Zone beschränkt ist, entnehmen wir experimentellen Darstellungen der Stromlinien an der Wand, z. B. *Fritzsche* [20], *Hansen* und *Herzig* [22], *Moore* und *Richardson* [24].

Die der Grundlösung entsprechende Dissipation (für die ganze Teilung gerechnet) bezeichnen wir als eigentlichen *Wandreibungsverlust*; alles übrige ist *Randverlust*.

Der Begriff der *Dissipation* bedarf bei der turbulenten Grenzschicht noch einer genaueren Umschreibung. Wir verstehen hier darunter, etwas abweichend von der üblichen Bezeichnung, stets die gesamte dem Strömungsfeld der mittleren Geschwindigkeiten (zeitliches Mittel über die turbulenten Schwankungen) entzogene Energie

$$\Psi \equiv \int \left( \sigma_{xx} \frac{\partial c_x}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial c_y}{\partial x} + \dots \right) dx dy dz, \quad (11)$$

wo  $\sigma$  auch die Zusatzspannungen infolge der turbulenten Schwankungen enthält:

$$\sigma_{yx} = \mu \left( \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) - \overline{\rho c'_x c'_y} \quad \text{etc.} \quad (12)$$

Von dieser Energie wird ein Teil direkt am betreffenden Ort in Wärme umgewandelt (Dissipation im strengen Sinne), während der Rest zunächst noch in makroskopischer Form als kinetische Energie der größeren Turbulenzelemente vorhanden ist; schließlich wird aber auch er, wenngleich an anderen Orten, in Molekularenergie übergeführt, vergleiche z. B. die Energiegleichung der turbulenten Strömung bei *Townsend* [6].

## 2. Bedingungen für die Erzielung eines gleichbleibenden Zustandes der Wandgrenzschichten

Wir wollen im folgenden stets voraussetzen, daß beim Fehlen des Seitenwandeinflusses in allen Stufenelementen dieselben Verhältnisse vorlägen, d. h.

$$T_p, c_{xp}, p_p \quad \text{etc. konstant über der Kanalhöhe,} \quad (13)$$

und daß 
$$c_0 = c_2, \quad c_{x0} = c_{x2}, \quad (14)$$

wie es in einer mittleren Stufe eines Verdichters, wo quasiperiodische Verhältnisse vorliegen (Repetierstufe), der Fall ist; eine gleichbleibende Wandgrenzschicht ist auch am ehesten in einer solchen Repetierstufe zu erwarten. Ebenso sei auch der Druckanstieg  $\Delta p$  konstant über der Schaufelhöhe, und weil  $\Delta p_p$  konstant vorausgesetzt ist, gilt auch

$$\Delta p^* = \text{konstant.} \quad (15)$$

Die Wandgrenzschicht soll gleichbleibend sein, d. h. sie soll beim Austritt aus der Stufe (Schnitt 2) gleich sein wie beim Eintritt (Schnitt 0); somit verschwindet in (10) das letzte Glied links und die Gleichung lautet nun

$$\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_T}{l} - \left(1 - \frac{\delta_1}{l}\right) \frac{\Delta p^* \dot{m}_p}{\rho T_p l u (1 - \zeta_p)} + \frac{(\tau_{wS} - \tau_{wN}) l_a}{T_p l (1 - \zeta_p)} = \frac{V_W + V_R}{T_p l u (1 - \zeta_p)} \quad (16)$$

oder

$$\frac{\delta_1}{l} - \frac{\delta_T}{l} - \left(1 - \frac{\delta_1}{l}\right) \frac{2 \Delta p^*}{\lambda_p \rho u^2 (1 - \zeta_p)} + \frac{2 (\tau_{wS} - \tau_{wN}) u l_a}{\lambda_p \rho u^2 (1 - \zeta_p) c_{xp} l} = \frac{\zeta_W + \zeta_R}{(1 - \zeta_p)}, \quad (16')$$

wo die Leistungszahl  $\lambda_p$  so definiert ist:

$$\lambda_p \equiv \frac{2 u \Delta c_{yp}}{u^2} = 2 \frac{\Delta c_{yp}}{u} \quad (17)$$

( $\Delta c_{yp}$  die Änderung der Umfangskomponente der Geschwindigkeit im Lauf-  
rade),

und

$$\zeta_W \equiv \frac{V_W}{T_p l u} = \frac{2 V_W}{\dot{m}_p \lambda_p u^2}, \quad (18a)$$

$$\zeta_R \equiv \frac{V_R}{T_p l u} = \frac{2 V_R}{\dot{m}_p \lambda_p u^2}. \quad (18b)$$

Gl. (16) bringt zum Ausdruck, daß zur Aufrechterhaltung eines gleichbleibenden Zustandes der Wandgrenzschicht in der Stufe soviel zusätzliche Energie (linke Seite) aufzubringen ist, wie durch die Wand- und Randverluste dissipiert wird. Auf diese Weise gelingt es auch der Wandgrenzschicht, den axialen Druckanstieg zu überwinden.

Sind die Wandgrenzschichten sehr dünn, so wird das Druckfeld den Grenzschichten vom Strömungsinneren aufgeprägt. Da aus dem Druckfeld die Tangentialkraft hervorgeht, ist folglich  $\delta_T = 0$ . Die Grenzschicht erhält also, im Verhältnis zur durchströmenden Masse, die zusätzliche Umfangsarbeit

$$\delta_1 T_p u (1 - \zeta_p).$$

Im allgemeinen entspricht aber das Druckfeld in der Grenzschicht nicht genau demjenigen außerhalb derselben, d. h. die Tangentialkraft fällt in der Grenzschicht ab (siehe z. B. [24]), daher  $\delta_T > 0$ ; die zusätzliche Umfangsarbeit wird kleiner. Ist  $\delta_T = \delta_1$ , so ist die Umfangsarbeit pro durchströmende Masseneinheit in der Grenzschicht gleich groß wie außerhalb derselben; die zugeführte Arbeit würde beim Fehlen der Wand- und Randverluste gerade zur Überwindung des Stufen-Druckanstieges ausreichen. Wegen der genannten Verluste muß aber den entsprechenden Partien durch Impulsaustausch zusätzliche Energie zugeführt werden.

Es lassen sich zwei Typen von Wandgrenzschichten unterscheiden, vgl. Abb. 2: Entweder sind an den beiden Seitenwänden separate *Grenzschichten*

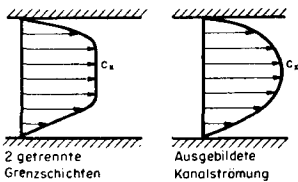


Abb. 2. 2 Typen von Grenzschichten.

vorhanden, die voneinander durch eine Zone ungestörter Strömung *getrennt* sind, oder die Grenzschichten erfüllen den gesamten Strömungsquerschnitt und sind nicht mehr unabhängig voneinander; diesen Typus bezeichnen wir als *ausgebildete Kanalströmung*. Die übliche 2-dimensionale Strömung in einem Kanal, in welchem keine Schaufeln vorhanden sind, bezeichnen wir zur Unterscheidung als *gewöhnliche Kanalströmung*; auch hier ist vor-

ausgesetzt, daß wir uns weit hinter dem Einlaufe befinden.

Wir werden nun im Kapitel II die Möglichkeiten der Erhaltung gleichbleibender Wandgrenzschichten bei der ausgebildeten Kanalströmung näher untersuchen.

## KAPITEL II

### Zusätzliche Energiezufuhr bei der gleichbleibenden, ausgebildeten Kanalströmung

#### 1. Der Ersatz der Schaufelungen durch Kraftfelder

Wir machen von Abschnitt 2 an das 3-dimensionale Strömungsfeld in der Wandgrenzschicht der rechnerischen Behandlung dadurch zugänglich, daß wir nur die Grundlösung in einem mittleren Bereich zwischen zwei Schaufeln betrachten (die Eckenlösung wird in Abschnitt V. 3 roh abgeschätzt) und dabei die Veränderung des Geschwindigkeitsfeldes längs des Umfanges vernachlässigen, so daß

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Die von der Schaufelung auf das Strömungsmedium ausgeübten Kräfte ersetzen wir durch ein — längs des Umfanges konstantes — Kraftfeld.

Es erhebt sich daher die Frage, wieso es möglich und zweckmäßig ist, diese Kraftfeldbetrachtung anzuwenden. Bei dieser Abklärung können wir uns auf die inkompressible, ebene, reibungsfreie Strömung durch die Schaufelung beschränken und den Einfluß der Schaufeldicke vernachlässigen, da dabei nichts prinzipiell Wesentliches verloren geht.

Betrachten wir zuerst den Fall, daß die Schaufeln sehr dicht stehen, daß also das Teilungsverhältnis  $t/l_a$  sehr klein ist. Das Geschwindigkeitsfeld in einem solchen Schaufelgitter für Schnitte parallel und senkrecht zur Umfangsrichtung ist in Abb. 3 schematisch dargestellt. Die Bewegungsgleichungen für die ebene, reibungsfreie Strömung lauten:

$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\rho \partial x}, \quad (1)$$

$$c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\rho \partial y}. \quad (2)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die mittlere axiale Geschwindigkeitskomponente  $c_x$  längs der sehr schmalen Stromröhren konstant. Bezeichnen wir die längs der Stromlinien gemessene Koordinate mit  $s$ , so gilt also

$$\frac{\partial c_x}{\partial s} = 0. \quad (3)$$

Nun ist aber 
$$\frac{\partial c_x}{\partial s} = \frac{\partial c_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial c_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (4)$$

wobei hier 
$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{c_x}{c_s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{c_y}{c_s}. \quad (5)$$

Folglich liefert (3) 
$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

worauf durch Vergleich mit (1) folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (7)$$

auf ähnliche Weise folgt aus (2)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho c_s \frac{\partial c_y}{\partial s}. \quad (8)$$

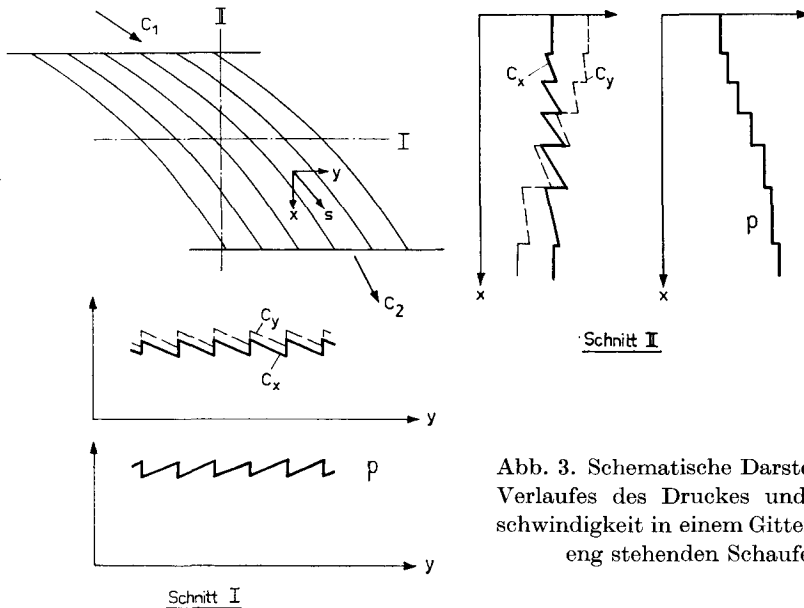


Abb. 3. Schematische Darstellung des Verlaufes des Druckes und der Geschwindigkeit in einem Gitter mit sehr eng stehenden Schaufeln.

Das Druckfeld hat also den in Abb. 3 dargestellten prinzipiellen Verlauf. Das strömende Medium spürt in axialer Richtung keinen Druckanstieg, sondern wandert seitlich (d. h. in Umfangsrichtung) in das Gebiet höheren Druckes hinein.

Wir können demnach die Verhältnisse in einem sehr dicht stehenden Schaufelgitter richtig beschreiben, wenn wir die Veränderung der Geschwindig-

keiten längs  $y$  vernachlässigen und ein Kraftfeld (Feldkraftkomponenten  $F_x$ ,  $F_y$  pro Volumeneinheit) so einführen, daß das strömende Medium in axialer Richtung keine Kraft erfährt, d. h.

$$F_x - \frac{\partial p_{st}}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

wo  $\partial p_{st}/\partial x$  der Anstieg des Druckniveaus in der Stufe längs der axialen Durchtrittsrichtung ist\*), und eine Umfangskraft

$$F_y = \rho c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} \quad (10)$$

so wirkt, daß sich  $c_y$  längs  $x$  entsprechend der Umlenkung in den einzelnen Gittern ändert. Dies gilt, wegen der Voraussetzung sehr dicht stehender Schaufeln, unverändert auch für bewegte Schaufelgitter.

In einem im Raum festen Schaufelgitter stehen die Schaufelkräfte, d. h. in unserem Falle die sie ersetzenden Feldkräfte, stets senkrecht auf den Strombahnen; sie leisten also keine Arbeit am strömenden Medium. Im Laufrad hingegen stehen die Kräfte (welche hier senkrecht zu den relativen Strombahnen stehen) nicht mehr senkrecht auf den absoluten Strombahnen und leisten Arbeit, siehe Abb. 4. Bezeichnen wir das Leitrad mit ', das Laufrad mit ", so können wir also sagen, daß im Leitrad die Arbeit von  $F'_y$  entgegengesetzt gleich derjenigen von  $F'_x$  sein muß. Da wir weiterhin die quasi-periodische Strömung in einer Repetierstufe voraussetzen, muß die Umfangskomponente der Geschwindigkeit vor und nach der Stufe dieselbe sein, d. h.

$$\begin{aligned} \text{totale Arbeit von } F''_y &= -\text{totale Arbeit von } F'_y, \text{ oder} \\ \text{totale Arbeit von } F''_y &= \text{totale Arbeit von } F'_x. \end{aligned}$$

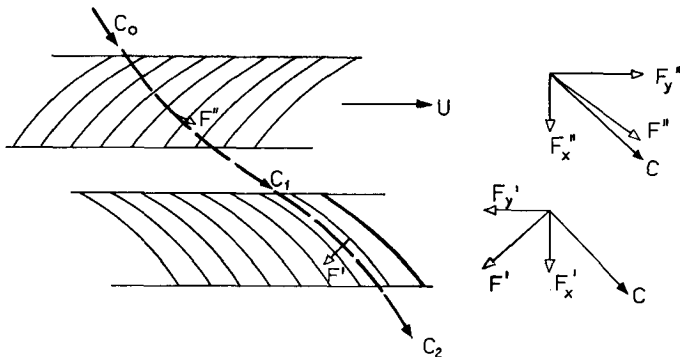


Abb. 4. Bahn des Strömungsmediums sowie Schaufelkräfte in einer Verdichterstufe mit sehr dicht stehenden Schaufeln.

\*) In einer Stromröhre ist  $\partial p/\partial x = 0$ ; beim Übergang von einer Stromröhre auf der andere ergibt sich  $\partial p_{st}/\partial x$ , siehe Schnitt II in Abb. 3.

Aus einer Impulsbetrachtung (immer noch reibungsfreie ebene Strömung vorausgesetzt) läßt sich leicht zeigen, daß

$$\int_{\text{Lauf-+Leitrad}} F_x dx = \Delta p_{st}, \quad (11)$$

und aus einer Energiebilanz

$$\int_{\text{Lauf-+Leitrad}} F_x c_x dx = \int_{\text{Laufrad}} F_y u dx, \quad (12)$$

wo  $\Delta p_{st}$  der Druckanstieg in der Stufe ist. Bezeichnen wir noch die Integrale der Feldkraft über ein Rad mit

$$T' \equiv \int_{\text{Leitrad}} F'_y dx, \quad T'' \equiv \int_{\text{Laufrad}} F''_y dx, \quad (13a)$$

$$N' \equiv \int_{\text{Leitrad}} F'_x dx, \quad N'' \equiv \int_{\text{Laufrad}} F''_x dx, \quad (13b)$$

so gilt also

$$N' + N'' = \Delta p_{st}, \quad (14)$$

$$T'' u = \Delta p_{st} c_x \quad (15)$$

und daraus

$$(N' + N'')/T'' = u/c_x. \quad (16)$$

Betrachten wir nun die Verhältnisse in einer Schaufelung mit *endlicher Gitterteilung*. Die Schaufeln üben pro Längeneinheit der  $z$ -Richtung auf das strömende Medium Kräfte aus, deren Resultierende  $K$  die Komponenten  $K_x$  und  $K_y$  hat. Führen wir noch die auf die Längeneinheit der  $y$ - und  $z$ -Richtung bezogenen Kräfte

$$T' \equiv \frac{K'_y}{t'}, \quad T'' \equiv \frac{K''_y}{t''}, \quad (17a)$$

$$N' \equiv \frac{K'_x}{t'}, \quad N'' \equiv \frac{K''_x}{t''} \quad (17b)$$

ein, so gelten die Beziehungen (14) bis (16) unverändert weiter, denn die Leit-schaufelkraft  $K'$  leistet keine Arbeit, während die Laufschaufelung die Leistung  $K''_y u$  liefert.

Das Geschwindigkeitsfeld in einem Gitter endlicher Teilung mit unendlich dünnen Kreisbogenschaufeln wurde durch konforme Abbildung bestimmt und ist in Abb. 5a dargestellt. Aus den Druckverläufen längs den mit I bis V bezeichneten Schnitten senkrecht zur Gitterfront lassen sich die Druckgradienten  $\partial p/\partial x$  bestimmen, die ein Teilchen bei seiner Wanderung durch das Gitter erfährt. Sie sind in Abb. 5b für die mittlere Stromlinie zwischen 2



Schaufeln eingetragen. Für andere Stromlinien ergeben sich im wesentlichen ähnliche Bilder.

Der Druckgradient  $\partial p/\partial y$  verläuft prinzipiell gleich wie bei sehr eng stehenden Schaufeln. Der Druckgradient  $\partial p/\partial x$ , dem ein Teilchen im Gitter begegnet, schwankt hingegen stark und nimmt sowohl positive wie negative Werte ein,

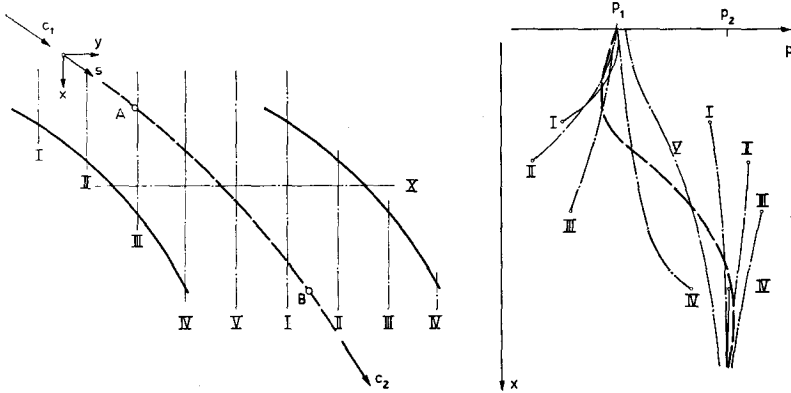


Abb. 5a. Verlauf des Druckes und der Geschwindigkeit in einem Gitter endlichen Teilungsverhältnisses.

— · — — Verhältnisse in Schnitten parallel und senkrecht zur Umfangsrichtung.  
 - - - - - Verhältnisse auf der mittleren Stromlinie (Punkt A: Geometrischer Gittereintritt, Punkt B: Geometrischer Gitteraustritt).

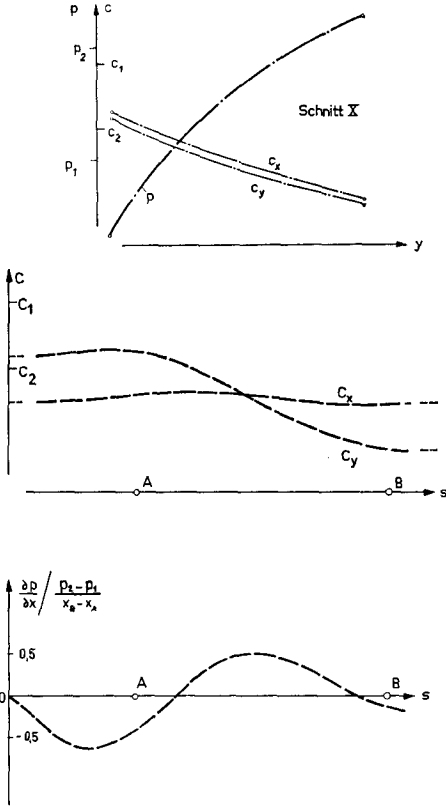


Abb. 5b. Geschwindigkeitskomponenten  $c_x$  und  $c_y$  sowie Druckgradient  $\partial p/\partial x$  (dimensionslos) längs der mittleren Stromlinie. (Punkt A: Geom. Gittereintritt, Punkt B: Geom. Gitteraustritt).

doch verschwindet das Integral über den ganzen Gitterbereich. Die Kraftfeldlösung vernachlässigt also — neben den Veränderungen der Geschwindigkeit in Umfangsrichtung — diese Schwankungen; gewisse Feinheiten der Strömung werden dadurch übergangen, doch ist die Lösung im Mittel richtig.

Ist das Gitter ein bewegtes, so spielen sich in einem festen Raumpunkte instationäre Vorgänge ab; das Druckfeld, dem ein Teilchen begegnet, wird aber richtig beschrieben, wenn die Relativströmung durch das Laufrad betrachtet wird. Abb. 5b gilt also auch hier.

Wir haben die endliche Schaufeldicke sowohl bei sehr kleinem als auch bei endlichem Teilungsverhältnis vernachlässigt. Ihre Wirkung besteht darin, daß in jeder Schaufelreihe die Axialgeschwindigkeit  $c_x$  erhöht und wieder abgesenkt wird. Dieser Effekt ist aber bei Verdichterschaukelungen (großes Teilungsverhältnis, kleines Dickenverhältnis) klein und liegt im gleichen Rahmen wie die soeben erwähnten Schwankungen des axialen Druckgradienten. Wir vernachlässigen ihn deshalb auch bei unserer Kraftfeldlösung.

Die Beziehung (15) gilt bei reibungsfreier Strömung sowohl für endliche wie auch für unendlich feine Gitterteilung. Infolge der Profilverluste modifiziert sie sich mit den Bezeichnungen von Kapitel I in

$$T'' u (1 - \zeta_p) = \Delta p_p c_x \quad (15')$$

und Gl. (16) lautet:

$$(N' + N'')/T'' = (1 - \zeta_p) u/c_x. \quad (16')$$

Ist die Geschwindigkeit  $c_x$  in der Nähe der Seitenwände verringert, so müßte also — ohne Berücksichtigung der Reibungskräfte in den Wandgrenzschichten — die Umfangskomponente  $T''$  gerade proportional  $c_x$  abnehmen, damit die Normalkraft dem axialen Stufen-Druckgradienten das Gleichgewicht hält.

Infolge der durch Seitenwandeffekte verursachten Verluste tritt in den Randzonen eine weitere Verschlechterung des Verhältnisses  $(N' + N'')/T''$  gegenüber Gl. (16') ein. Diese Zonen müssen aber trotzdem den gleichen Druckanstieg in der Stufe aufweisen wie die Gebiete in der Kanalmitte. Dies kann auf eine der 3 folgenden Arten geschehen (siehe auch Gl. (I. 10)):

1. Zusätzliche örtliche Arbeitsleistung.
2. Übertragung anderswo geleisteter zusätzlicher Umfangsarbeit durch Schubspannungen; dieser Energie-, resp. Impulsaustausch kann natürlich nur innerhalb der Grenzschicht erfolgen. Im Extremfall wird allen Stufenelementen gleichmäßig Impuls in der Form eines sekundären Druckabfalles (kleinere Druckerzeugung in der Stufe) entzogen und den Verlustzonen zugeführt.
3. Verlangsamung des betreffenden oder anderer Strömungsbezirke, verbunden mit einer Ausdehnung des von der Grenzschicht erfaßten Gebietes.

Den letzten Fall können wir ausschließen, da wir ja gleichbleibende Wandgrenzschichten betrachten. Die beiden ersten Möglichkeiten werden wir nun in ihren Extremfällen eingehend untersuchen; praktisch werden meistens beide zugleich auftreten.

## 2. Bewegungsgleichungen

Weil die Strömung in einer mittleren Stufe einer mehrstufigen Maschine quasiperiodischen Charakter hat, führen wir folgende dimensionslose Größen ein:

$$\text{Längen: } X \equiv \frac{2\pi x}{l_a}, \quad Y \equiv \frac{2\pi y}{l_a}, \quad Z \equiv \frac{2\pi z}{l_a}, \quad A_1 \equiv \frac{2\pi \delta_1}{l_a} \quad \text{etc.,}$$

$$\text{Geschwindigkeiten: } C_x \equiv \frac{c_x}{u} \quad \text{etc.,}$$

$$\text{Druck: } P \equiv \frac{p}{\rho u^2}, \quad \text{Spannungen: } S_{xy} \equiv \frac{\sigma_{xy}}{\rho u^2} \quad \text{etc.,}$$

$$\text{Kräfte pro Volumeneinheit: } \Phi_x \equiv \frac{F_x l_a}{2\pi \rho u^2} \quad \text{etc.,}$$

$$\text{Leistung: } \dot{A} \equiv \frac{4\pi^2 N}{\rho l_a^2 u^3}, \quad \text{Dissipation: } D \equiv \frac{4\pi^2 \Psi}{\rho l_a^2 u^3}.$$

$\Phi$ ,  $\dot{A}$  und  $D$  werden von uns stets pro dimensionslose Längeneinheit in Umfangsrichtung gerechnet.

$$\text{Austauschgröße: } A \equiv \frac{2\pi}{u l_a} \frac{(\mu + \epsilon)}{\rho}.$$

Auf diese Weise wird die dimensionslose Stufenlänge gerade  $2\pi$ .

Wir beschränken uns auf die ausgebildete Kanalströmung (Grenzschicht erfüllt den ganzen Kanal) und verwenden die in Abschnitt 1 diskutierte Kraftfeldbetrachtung, so daß

$$\frac{\partial}{\partial Y} = 0. \quad (17)$$

Die Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung bietet den großen Vorteil, daß die Bewegungsgleichung für die  $Y$ -Richtung von den beiden andern separiert wird, d. h. daß  $C_y$  in den Bewegungsgleichungen für die  $X$ - und  $Z$ -Richtung sowie in der Kontinuitätsgleichung nicht vorkommt. (Implizit tritt  $C_y$  zwar via die turbulente Austauschgröße auf; da wir diese Abhängigkeit aber durch einen summarischen, von vornherein gegebenen Faktor erfassen, ist die Separierung dennoch möglich.) Deshalb können  $C_x$  und  $C_z$  unabhängig von  $C_y$  bestimmt werden.

Wir betrachten, wie in der gesamten vorliegenden Untersuchung, die inkompressible Strömung durch eine abgewinkelte Stufe und machen wieder die Voraussetzungen (I. 13, 14, 15), die für eine mittlere Stufe geeignet sind. Die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$C_x \frac{\partial C_x}{\partial X} + C_z \frac{\partial C_x}{\partial Z} = \Phi_x - \frac{\partial P_{st}}{\partial X} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial Z}, \quad (18)$$

$$C_x \frac{\partial C_y}{\partial X} + C_z \frac{\partial C_y}{\partial Z} = \Phi_y + \frac{\partial S_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial Z}, \quad (19)$$

$$C_x \frac{\partial C_z}{\partial X} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial Z} = \Phi_z - \frac{\partial P_{st}}{\partial Z} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial X} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial Z}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial X} + \frac{\partial C_z}{\partial Z} = 0. \quad (21)$$

Für die gleichbleibende, ausgebildete Kanalströmung machen wir weiterhin die Voraussetzung, daß die Wandgrenzschicht nicht nur beim Ein- und Austritt aus der Stufe gleich sei, sondern daß das Axialgeschwindigkeitsprofil sich längs der ganzen Stufe nicht ändere:

$$\frac{\partial C_x}{\partial X} = 0, \quad \text{d. h.} \quad C_z = 0, \quad (22)$$

womit (21) identisch erfüllt ist. Wir vernachlässigen damit auch den Einfluß der Schaufeldicke. In Abschnitt III. 6 werden wir Voraussetzung (22) fallen lassen und zeigen, daß die Ergebnisse nicht wesentlich verändert werden.

Damit bleibt von (18) und (19) nur

$$\Phi_x - \frac{\partial P_{st}}{\partial X} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial Z} = 0, \quad (18')$$

$$C_x \frac{\partial C_y}{\partial X} = \Phi_y + \frac{\partial S_{yz}}{\partial Z} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial X}. \quad (19')$$

Führen wir für die Schubspannungen den Ansatz der Austauschgröße ein

$$S_{xz} \equiv A_{xz} \left( \frac{\partial C_x}{\partial Z} + \frac{\partial C_z}{\partial X} \right) \quad \text{etc.}, \quad (23)$$

so lauten (18') und (19')

$$\Phi_x - \frac{\partial P_{st}}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Z} \left( A_{xz} \frac{\partial C_x}{\partial Z} \right) = 0, \quad (18'')$$

$$C_x \frac{\partial C_y}{\partial X} = \Phi_y + \frac{\partial}{\partial Z} \left( A_{yz} \frac{\partial C_y}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( A_{yx} \frac{\partial C_y}{\partial X} \right). \quad (19'')$$

Wir arbeiten mit dem in neuerer Zeit vermehrt benützten Begriff der Austauschgröße, da genauere Erkenntnisse über den Mechanismus der Turbulenz

noch fehlen. Wir sind uns deshalb bewußt, daß unsere Untersuchungen mehr qualitativen Charakter haben. Im Gegensatz zum laminaren Fall besitzt unser Modellbild der turbulenten Strömung eine — in Funktion des Wandabstandes — um Größenordnungen variierende Austauschgröße. Für diese machen wir ebenfalls die Voraussetzung, daß sie längs  $X$  konstant, also nur eine Funktion von  $Z$  sei:

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0. \quad (24)$$

Eine eingehendere Diskussion der turbulenten Austauschgröße findet sich in Abschnitt III. 3.

Im weiteren machen wir die Annahme, daß  $A$  und  $C_x$  symmetrisch zur Kanalmitte  $Z_m = \pi l/l_a$  verlaufen. Soll aber der Turbulenzmechanismus an beiden Wänden derselbe sein, so müssen wir uns im wesentlichen auf Stufen mit dem Reaktionsgrade

$$r = 0,5 \quad (25)$$

beschränken, da hier die mittleren Relativgeschwindigkeiten zur Gehäuse- und Rotorwand  $C_\infty$ , resp.  $W_\infty$ , gleich sind. Die Symmetrie von  $A$  und damit von  $C_x$  ist dann möglich, wenn entweder nirgends Deckbänder vorhanden sind oder wenn alle Schaufelenden mit Deckbändern versehen sind.

Es sei  $\Phi_{xp}$  die Normalkraft, welche die Schaufelung ohne Beeinflussung durch die Wandeffekte erzeugt. Sie ist dem Druckgradienten  $\partial P_{stp}/\partial X$  gleich, der sich in der Stufe unter Berücksichtigung der reinen Profilverluste einstellt.

In den Randzonen tritt nun ein Wert  $\Phi_x$  auf, der im allgemeinen nicht  $\Phi_{xp}$  ist. Soll  $\Phi_x = \Phi_{xp}$  sein, so ist in den Randzonen vergrößerte Arbeit nötig. Ist diese direkte zusätzliche Umfangsleistung in einem Gebiet  $0 < Z < Z^*$  (und analog an der anderen Kanalwand) nicht möglich, so ist  $\Phi_x < \Phi_{xp}$ , d. h. es herrscht ein Mangel an Normalkraft

$$\Phi_x^* \equiv \Phi_x - \Phi_{xp}, \quad (26)$$

welcher durch Impulsaustausch mittels Schubspannungen behoben werden kann.

### 3. Energiezufuhr an die Randzonen durch sekundären Druckabfall. Bestimmung der Axialkomponente $C_x(Z)$ bei der ausgebildeten Kanalströmung

Wir nehmen nun an, daß entsprechend den vergrößerten Verlusten in der Randzone  $0 < Z < Z^*$  gelte:  $\Phi_x < \Phi_{xp}$ , daß also keine genügende zusätzliche Arbeit geleistet werde. Die Randzonen werden durch Schubspannungen mitgeschleppt, d. h. in der Form des sekundären Druckabfalles wird dem ganzen

Kanalquerschnitt gleichmäßig Impuls zugunsten der Mangelzonen entzogen. Wir definieren den sekundären Druckabfall so:

$$\frac{\partial P^*}{\partial X} \equiv \frac{\partial P_{st}}{\partial X} - \frac{\partial P_{stp}}{\partial X}, \quad (27)$$

d. h. der Druckanstieg ist kleiner als theoretisch möglich wäre.

Während wir über den Verlauf von  $\Phi_{xp}$  und  $\partial P_{stp}/\partial X$  in Funktion von  $X$  keine Annahme zu treffen brauchen, da sie sich das Gleichgewicht halten, setzen wir voraus, daß  $\Phi_x^*(Z)$  längs  $X$  konstant sei, womit auch der sekundäre Druckabfall  $\partial P^*/\partial X$  gleichmäßig längs der Stufe verteilt sein muß. Diese Annahme ist aber für einen Reaktionsgrad  $r = 0,5$ , auf den wir uns ja beschränken, zulässig. Damit wird (18')

$$\Phi_x^* - \frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial Z} = 0. \quad (28)$$

Durch Integration über  $Z$  folgt mit (23)

$$-\int_0^Z \Phi_x^* dZ + \frac{\partial P^*}{\partial X} Z + S_{xzw} = S_{xz} = A_{xz} \frac{\partial C_x}{\partial Z}. \quad (29)$$

(Der Index  $w$  kennzeichnet die Größen an der Wand; da keine Verwechslung eintreten kann, lassen wir den Index  $xz$  weg). Für eine Kanalhälfte

$$S_w - \int_0^{\pi l/l_a} \Phi_x^* dZ = -\frac{\pi l}{l_a} \frac{\partial P^*}{\partial X}. \quad (30)$$

Aus (29) und (30)

$$A \frac{\partial C_x}{\partial Z} = S_w \left(1 - \frac{l_a}{\pi l} Z\right) + \int_0^Z \left[ -\Phi_x^* + \frac{l_a}{\pi l} \int_0^{\pi l/l_a} \Phi_x^* dZ \right] dZ, \quad (31)$$

was für einen gegebenen Verlauf von  $\Phi_x^*(Z)$  in der Form

$$A \frac{\partial C_x}{\partial Z} = S_w f_1(Z) + \Phi_x^{*'} f_2(Z) \quad (32)$$

dargestellt werden kann. Hier ist  $\Phi_x^{*'}$  ein geeignet gewählter Bezugswert.  $C_x$  soll in der Kanalmitte (Zeichen  $m$ ) den gegebenen Wert  $C_{xm}$  erreichen:

$$C_{xm} = S_w \int_0^{\pi l/l_a} \frac{f_1(Z)}{A(Z)} dZ + \Phi_x^{*'} \int_0^{\pi l/l_a} \frac{f_2(Z)}{A(Z)} dZ, \quad (33)$$

woraus sich  $S_w$  bestimmt.

Für  $A(Z)$  setzen wir denselben Verlauf ein, der bei der gewöhnlichen Kanalströmung (bei dieser treten keine Normalkräfte auf, da keine Schaufelung vorhanden ist; folglich ist auch  $\Phi_x^* = 0$ ) gälte, und betrachten dabei auch Varianten, die gegenüber einem mit der Reynoldszahl  $Re = c_{xm} l/\nu$  durchströmten

Kanal (Zeichen +) eine um den Faktor  $\alpha$  erhöhte turbulente Austauschgröße besitzen. In Turbomaschinen wird ja stets eine erhöhte Turbulenzintensität gemessen, welche z. B. durch die Nachlaufdüsen vorhergehender Stufen angefaßt wird (siehe z. B. [9]).

Für die gewöhnliche Kanalströmung ist das Problem (33), das den Zusammenhang zwischen  $S_w$  und  $C_{xm}$ , d. h. zwischen der Wandschubspannung und der Reynoldszahl darstellt, schon gelöst, indem der Wandreibungskoeffizient  $c_f^+$  in Funktion von  $Re$  bekannt ist, z. B. in der Form

$$c_f^+ \text{ proportional } Re^{-h},$$

wo  $h \approx 1/5$  bis  $1/4$ . (Vergleiche z. B. [15], aber beachte, daß  $c_f^+$  bei uns auf die Geschwindigkeit  $c_{xm}$  in der Kanalmitte, nicht auf die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{c}_x$  bezogen ist; die Umrechnung bietet aber keine Schwierigkeiten). Bei erhöhtem turbulenten Austausch ist die so gewonnene Wandschubspannung  $S_w^+$  noch nach der folgenden Beziehung zu modifizieren

$$S_w(\alpha, \Phi_x^* = 0) = \alpha^{1-h/2} S_w^+(\alpha = 1, \Phi_x^* = 0). \quad (34)$$

Mit  $S_w^+$  ist für die gewöhnliche Kanalströmung auch die Größe  $A(Z)$  bekannt. Formulierten Ansätze finden sich in Abschnitt (III. 3).

Für die ausgebildete Kanalströmung in einem Verdichter verwenden wir den gleichen Verlauf  $A(Z)$ ; da jetzt aber im allgemeinen  $\Phi_x^* \neq 0$ , muß die Wandschubspannung  $S_w$  aus Gl. (33), in der nun alles übrige bekannt ist, ermittelt werden. Darauf folgen mit (30) und (31) die Größen  $C_x, \partial P^*/\partial X$  und der von den Schubspannungen  $S_{xz}$  herrührende Dissipationsanteil  $D_x$

$$D_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/l_a} A \left( \frac{\partial C_x}{\partial Z} \right)^2 dZ dX = 2\pi \int_0^{2\pi/l_a} A \left( \frac{\partial C_x}{\partial Z} \right)^2 dZ. \quad (35)$$

Da häufig Integrale der Form  $\int [f(Z)/A(Z)] dZ$  auftreten, wird bei der Durchführung der Rechnung vorteilhaft die neue Variable

$$Z' \equiv \int_0^Z \frac{dZ}{A(Z)}$$

verwendet.

Die Energiebilanz (I. 16) lautet in unserer dimensionslosen Schreibweise

$$\frac{(\Delta_1 - \Delta_T) l_a}{2\pi l} - \frac{l_a \frac{\partial P^*}{\partial X} \int_0^{2\pi/l_a} C_x dZ}{l C_{xm} \Delta C_{ym} (1 - \zeta_p)} + \frac{l_a (S_{ywS} - S_{ywN})}{l C_{xm} \Delta C_{ym} (1 - \zeta_p)} = \frac{\zeta_W + \zeta_R}{1 - \zeta_p}, \quad (36)$$

wobei aus (28) durch Multiplikation mit  $C_x$  und Integration folgt

$$-2\pi \frac{\partial P^*}{\partial X} \int_0^{2\pi l/l_a} C_x dZ = -2\pi \int_0^{2\pi l/l_a} \Phi_x^* C_x dZ + D_x. \quad (37)$$

Von der gesamten dem sekundären Druckabfall entsprechenden Energie

$$-2\pi \frac{\partial P^*}{\partial X} \int_0^{2\pi l/l_a} C_x dZ$$

ist also nur der Anteil

$$\Delta \dot{A} = -2\pi \int_0^{2\pi l/l_a} \Phi_x^* C_x dZ \quad (38)$$

nutzbar; der Rest wird dissipiert und stellt den Preis dar, der für den Impulsaustausch zu bezahlen ist. Der für  $\Phi_x^* = 0$  verbleibende Restbetrag der Dissipation entspricht der Impulszufuhr zur Überwindung der bloßen Wandschubspannung  $S_{xzw}$  und ist gleich dem Verlust bei der gewöhnlichen Kanalströmung. Als eigentlicher Verlust wegen der zusätzlichen Energiezufuhr an die Mangelzonen ist also nur der Mehrbetrag

$$\Delta D_x \equiv D_x(\Phi_x^*) - D_x(\Phi_x^* = 0) \quad (39)$$

zu betrachten. Die vom sekundären Druckabfall gelieferte zusätzliche Nettoleistung  $\Delta \dot{A}$  kann mit dem gesamten Arbeitsumsatz in der Stufe beim Fehlen der Wandgrenzschichten verglichen werden

$$\Delta \dot{A} = \zeta^* 2\pi l \Delta C_{ym} C_{xm} / l_a. \quad (40)$$

Die Verhältniszahl  $\zeta^*$  ist gleich definiert wie z. B. die Randverlustzahl  $\zeta_R$  (siehe Gl. (I. 18)); die der Zahl  $\zeta^*$  entsprechende Nettoleistung kann einen gleich großen Betrag der Randverluste kompensieren.

#### 4. Direkte zusätzliche Schaufelarbeit in den Randzonen

Wir betrachten den andern Extremfall, daß es durch entsprechende Ausgestaltung der Schaufelung möglich sei, den Stufenelementen, in denen große Verluste auftreten, direkt durch vergrößerte Umfangskräfte  $\Phi_y$  die nötige Zusatzenergie zuzuführen, so daß die Gitternormalkraft zur Überwindung des axialen Druckgradienten ausreicht. Der Verlauf von  $C_x$  kann deshalb aus den Gl. (31), (33) bestimmt werden mit  $\Phi_x^* = 0$  und entspricht der gewöhnlichen



Kanalströmung, sofern auch die Austauschgröße gleich wie dort über der Kanalhöhe verteilt ist.

Für die Feldkraft  $\Phi_y$ , welche die Umlenkung der Strömung in den Schaufelungen bewirkt, machen wir den einfachen Ansatz

$$\Phi_y = \varphi_1(Z) \sin X. \quad (41)$$

Sie setze sich aus einem Basiswert  $\Phi_{yB}$  und einem zusätzlichen Betrag  $\Phi_y^*$  zusammen:

$$\Phi_y = \Phi_{yB} + \Phi_y^* = [\varphi_{1B}(Z) + \varphi_1^*(Z)] \sin X. \quad (42)$$

Der Basiswert  $\Phi_{yB}$  sei längs der Koordinate  $Z$  so verteilt, daß in allen Stufenelementen die gleiche Umfangsarbeit pro Masseneinheit geleistet wird, d. h.  $\varphi_{1B}(Z)$  sei proportional  $C_x(Z)$ .

Die zusätzliche Feldkraft  $\Phi_y^*$  tritt in einer gewissen Zone  $0 < Z < Z^*$  in Wandnähe (und analog an der anderen Kanalwand) auf und leistet hier zusätzliche Arbeit. Dadurch ergibt sich in den betreffenden Gebieten eine größere oszillierende  $C_y$ -Komponente, was natürlich eine erhöhte Dissipation bedingt:

$$\Delta D_y = D_y(\Phi_y^*) - D_y(\Phi_y^* = 0), \quad (43)$$

wo  $D_y$  der von den Ableitungen von  $C_y$  anfallende Dissipationsanteil ist:

$$D_y \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/l_a} \left[ A_{yz} \left( \frac{\partial C_y}{\partial Z} \right)^2 + A_{yx} \left( \frac{\partial C_y}{\partial X} \right)^2 \right] dZ dX. \quad (44)$$

Außerdem können sich wegen der stärkeren Umlenkung weitere zusätzliche Verluste  $\Delta V^*$  einstellen, die von den Eigenschaften der Schaufelprofile abhängen. Somit bleibt als zusätzliche Nettoleistung

$$\Delta \dot{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/l_a} \Phi_y^* dZ dX - \Delta D_y - \Delta V^*, \quad (45)$$

wobei  $\Delta \dot{A}$  mit dem gesamten Arbeitsumsatz in der Stufe beim Fehlen der Wandgrenzschichten nach Gl. (40) verglichen werden kann.  $C_y$  und  $D_y$  können nach der Vorgabe von  $\varphi_1^*(Z)$  aus den Gl. (19'') und (44) bestimmt werden, was nach der in Kapitel III beschriebenen Methode geschieht.

## 5. Lösung für spezielle Fälle, Vergleich

Der Verlauf der Austauschgröße über  $Z$  wird analog wie bei der gewöhnlichen turbulenten Kanalströmung angenommen. Dabei werden im Falle des sekundären Druckabfalles auch Beispiele mit wesentlich erhöhtem turbulentem Austausch durchgerechnet. Die Daten sind die folgenden:

$$c_{xm} l / \nu = 10^6$$

$$l / l_a = 1$$

$$C_{xm} = 0,5$$

$$r = 0,5 \text{ (Reaktionsgrad)}$$

$$\lambda_m = 2 \Delta C_{ym} = 0,6.$$

Das Geschwindigkeitsdreieck für die Kanalmitte findet sich in Abb. 6.

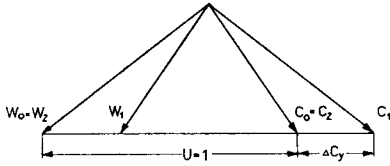


Abb. 6. Den Zahlenbeispielen zu Grunde gelegtes Geschwindigkeitsdreieck in Kanalmitte.

$$C_{xm} = 0,5$$

$$\Delta C_{ym} = 0,3$$

$$r = 0,5 \text{ (Reaktionsgrad)}$$

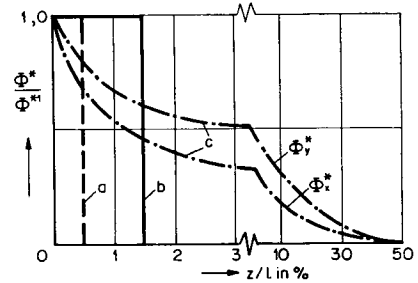


Abb. 7. Gewählter Verlauf von  $\Phi_x^*$  und  $\Phi_y^*$  für die 3 Varianten a, b und c.

Bezüglich der Mangelgebiete betrachten wir die drei Varianten (in Abb. 7 dargestellt):

- Das Mangelgebiet erstreckt sich an beiden Seitenwänden über je  $1/2 \cdot 0/0$  der Kanalhöhe;  $\Phi_x^*(Z)$  beim sekundären Druckabfall, resp.  $\varphi_1^*(Z)$  bei der direkten Zusatzarbeit haben dort einen konstanten Wert, um für  $Z > Z^*$  zu verschwinden.
- Dasselbe wie oben für Mangelgebiete von je  $1 \cdot 1/2 \cdot 0/0$  der Kanalhöhe.
- Das Mangelgebiet erstreckt sich über die ganze Grenzschicht, doch ist der Mangel am stärksten an der Wand. Beim sekundären Druckabfall setzen wir

$$\Phi_x^*(Z) = \Phi_{xw}^* \left( \frac{1}{g(Z)} - 1 \right),$$

bei der direkten Zusatzarbeit

$$\varphi_1^*(Z) = \varphi_{1w}^* 2 [1 - g(Z)].$$

Wir verwenden beidemale die gleiche Funktion  $g(Z)$ , und zwar setzen wir

$$g(Z) = [C_x(Z) / C_{xm}] \Phi_x^* = 0.$$

Diese Wahl wurde getroffen, damit die Nettozusatzleistung in beiden Fällen über die Kanalhöhe ungefähr ähnlich verteilt ist, so daß die Vergleichsmöglichkeit gewährleistet ist; dies ist aber nur in erster Näherung richtig, da sich das Axialgeschwindigkeitsprofil beim sekundären Druckabfall ändert, wenn ein Mangel an Normalkraft auftritt. — Um an der Wand nicht eine singuläre Stelle zu haben, verwenden wir die obige Festlegung von  $g$  nur bis an die Stelle  $Z'$ , wo  $g$  den Wert 0,7 erreicht; für  $Z < Z'$  setzen wir  $g$  knickfrei so fort, daß an der Wand ( $Z=0$ ) die Größe  $g$  den Wert 0,5 einnimmt. Die Stelle

$Z'$  liegt bei turbulenter Strömung sehr nahe bei der Wand. (Analog an der Spitze ( $Z_w = 2\pi l/l_a$ .)

Die Ergebnisse finden sich in den Abb. 8a, b, c, wo in Funktion der Dissipation  $D_x$  resp.  $D_y$  die Zusatzarbeit  $\dot{A}$  und der sekundäre Druckgradient

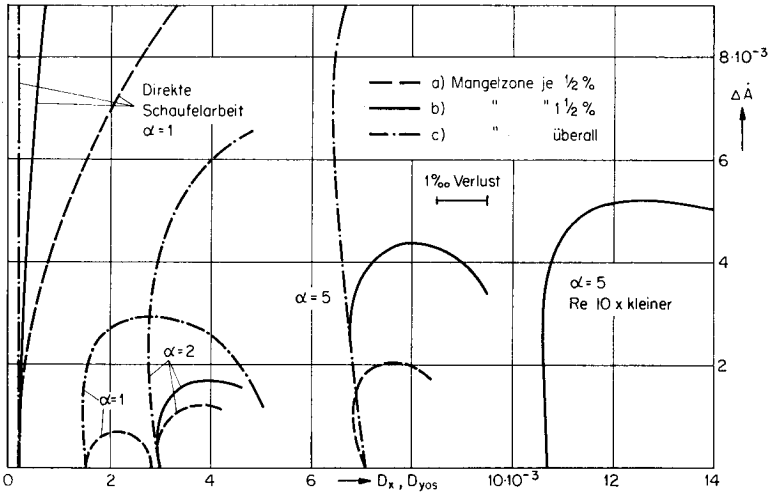


Abb. 8a. Den Randzonen erteilte Zusatzleistung und Dissipation beim sekundären Druckabfall ( $\Delta \dot{A}$  über  $D_x$ ) und bei der direkten zusätzlichen Schaufelarbeit ( $\Delta \dot{A}$  über  $D_{yos}$ ).

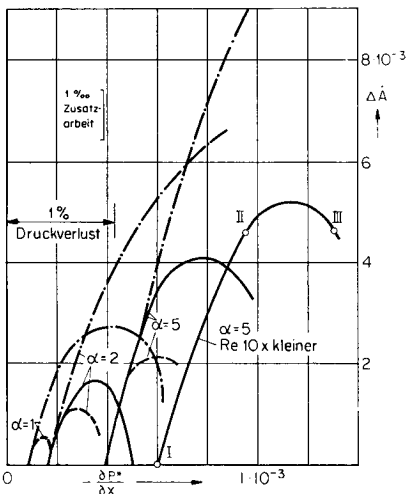


Abb. 8b. Zusatzleistung und sekundärer Druckgradient. (Vergleichswerte gelten für eine Stufe nach Abb. 6.)

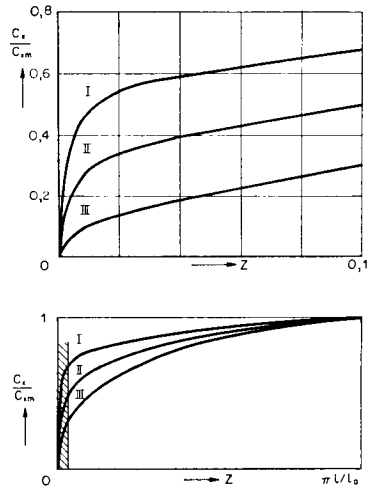


Abb. 8c. Verschlechterung des Geschwindigkeitsprofils bei wachsendem Normaldruckmangel  $\Phi_x^*$  für ein Mangelgebiet von  $1\frac{1}{2} \frac{0}{0}$  der Kanalhöhe an beiden Seitenwänden.

$\partial P^*/\partial X$  aufgetragen sind. Für die einzelnen dargestellten Kurven ist der Bereich, in welchem ein Mangel an Normalkraft, resp. ein Zusatz an Umfangskraft auftritt, jeweils konstant; längs der Kurven variiert die Größe von  $\Phi_x^*$ , resp. von  $\Phi_y^*$ .

Bei der direkten zusätzlichen Schaufelarbeit wird nur der Dissipationsanteil  $D_y$  direkt beeinflusst; dieser enthält einen Anteil von der mittleren Durchströmgeschwindigkeit und einen Anteil von den oszillierenden  $C_y$ -Komponenten; der erstere wird hier nicht verändert und wurde deshalb weggelassen; ebenso ändert sich auch der von  $\partial C_y/\partial X$  anfallende oszillierende Dissipationsanteil (in Abschnitt IV. 6 mit  $D_2$  bezeichnet) nur wenig, weshalb nur der von  $\partial C_y/\partial Z$  herrührende oszillierende Anteil aufgetragen wurde. Vorausgesetzt ist  $\lambda_m = 2 \Delta C_{ym} = 0,6$ ; für andere  $\lambda_m$  ist  $\Delta \dot{A}$  proportional  $\lambda_m$  und  $D_y$  proportional  $\lambda_m^2$  umzurechnen.

Beim sekundären Druckabfall wird nur  $D_x$  direkt beeinflusst, doch darf nicht vergessen werden, daß sich bei erhöhter Turbulenz auch die andern Dissipationsanteile vergrößern. Die Größe von  $\lambda_m$  hat beim sekundären Druckabfall auf die Darstellung in den Abb. 8a bis 8c keinen Einfluß. (Die eingetragenen Vergleichsstrecken gelten für eine Stufe mit  $C_{xm} = 0,5$ ;  $\lambda_m = 0,6$ ;  $l/l_a = 1$  (siehe Abb. 6).)

Betrachten wir zunächst die Verhältnisse beim *sekundären Druckabfall*: Es fällt sogleich auf, daß bei gegebener Turbulenzintensität und gegebenem Mangelbereich ein nichtüberschreitbares Maximum an Zusatzenergie besteht. Dies hat seinen Grund in folgendem: Wird  $-\Phi_x^*$  von Null an gesteigert, so bleibt die Dissipation vorerst praktisch konstant, weil die Schubspannungen in der laminaren Endschicht, in der normalerweise der Hauptteil der Dissipation entsteht, kleiner werden. Bald aber wird die Dissipation in den wandferneren Gebieten immer stärker und verzehrt einen immer größeren Anteil der durch den sekundären Druckabfall freigemachten Energie, so daß die Nettoleistung schließlich wieder abnimmt, um so mehr, als auch das Axialgeschwindigkeitsprofil immer schlechter wird, denn die Schubspannungsgradienten werden wegen der stärkeren Impulsübertragung immer größer. Einige Geschwindigkeitsprofile bei wachsendem  $-\Phi_x^*$  finden sich in Abb. 8c für die in Abb. 8b mit I bis III bezeichneten Punkte.

Die maximale Zusatzenergie ist um so größer, je größer der Bereich, der sie benötigt. Der Mangel an Normalkraft in einem sehr engen Gebiet ist durch sekundären Druckabfall nur ersetzbar, wenn die Turbulenz stark erhöht ist (dabei erhöht sich aber gleichzeitig das Verlustniveau).

Bei kleinerer Reynoldszahl ist die Wandschubspannung größer und damit auch die Dissipation; die Zusatzenergie wächst leicht an.

Ist  $\Phi_x^* = 0$  (kein Mangel an Normalkraft), so liegen die Verhältnisse der gewöhnlichen Kanalströmung vor; der Druckabfall dient nur zur Überwindung

der Wandreibungskräfte. Aus Bild 8b geht hervor, daß der zusätzliche sekundäre Druckabfall einige % des nützlichen Stufen-Druckanstieges ausmacht pro % Zusatzenergie.

Eine Vergrößerung der dimensionslosen axialen Durchtrittsgeschwindigkeit  $C_{xm}$  (in unserem Beispiel  $C_{xm} = 0,5$ ) bringt auch eine Erhöhung der maximalen Zusatzenergie mit sich, allerdings auch begleitet von erhöhter Dissipation (beide Male sind unsere dimensionslosen Werte gemeint), wie aus den Gl. (30) bis (40) hergeleitet werden kann. (Erhöhen wir  $C_{xm}$  z. B. dadurch, daß wir bei unveränderter Reynoldszahl und unveränderter Leistungszahl  $\lambda_m$  die Umfangsgeschwindigkeit  $u$  absenken, so sind  $\Delta \dot{A}$  und  $D_x$  proportional  $C_{xm}^3$  zu vergrößern; das Verhältnis  $\xi^*$  der Zusatzleistung zum Arbeitsumsatz in der Stufe erhöht sich proportional  $C_{xm}^2$ . Wird  $C_{xm}$  bei unveränderter Umfangsgeschwindigkeit  $u$  durch eine Erhöhung der Reynoldszahl vergrößert, so ist die Zunahme von  $\Delta \dot{A}$  etwas schwächer, doch ist der Umrechnungsexponent immer noch stärker als 2.) Dies bedeutet, daß die Verluste zwar an sich größer sind, daß dafür aber den Randzonen auch relativ mehr zusätzliche Energie zugeführt wird, so daß die Aufrechterhaltung eines gleichbleibenden Zustandes der Wandgrenzschichten leichter möglich ist. Diesem Umstande ist es zuzuschreiben, daß die im Laufe der Entwicklung ständig vorgenommene Erhöhung des spezifischen Massendurchsatzes von keiner Verschlechterung im Verhalten der Verdichter begleitet war, wie sie mancherorts befürchtet wurde.

Wird die Zusatzenergie hingegen in der Form *direkter zusätzlicher Schaufelarbeit* den betreffenden Mangelzonen zugeführt, so kann eine beträchtliche Zusatzenergie auch einer sehr kleinen Zone in Wandnähe zugeführt werden, ohne daß die Turbulenz erhöht zu sein braucht, siehe Abb. 8a. Auch die Zunahme der Dissipation ist geringer; zwar werden nach Gl. (45) noch weitere, hier nicht erfaßte Verluste  $\Delta V^*$  auftreten, doch sind auch im Falle des sekundären Druckabfalles wegen des verschlechterten Axialgeschwindigkeitsprofils zusätzliche Verluste zu erwarten, so daß auf diese Weise ein Gewinn erzielt werden kann.

Die direkte Zufuhr zusätzlicher Schaufelungsarbeit ist also ein viel besser geeignetes Mittel als der Impulsaustausch durch Schubspannungen, um den wandnahen Strömungspartien, in denen wegen der Seitenwandgrenzschichten große Verluste auftreten, die Überwindung des axialen Druckanstieges zu ermöglichen. Direkte zusätzliche Schaufelarbeit wird geleistet, wenn die Umfangskraft der Laufschaufeln weniger stark abnimmt als der Massenstrom, d. h. wenn  $\Phi_y(Z)/\Phi_{ym} > C_x(Z)/C_{xm}$ . Wieweit dies möglich ist, müssen wir dahingestellt sein lassen; wahrscheinlich ist die Zufuhr direkter Zusatzarbeit an enge Gebiete beschränkt; sollen gleichbleibende Wandgrenzschichten auftreten, muß daher die Turbulenz in der Maschine stark sein, womit sich die großen bislang festgestellten Randverluste erklären.

## KAPITEL III

### Periodische Lösung für die Umfangskomponente $C_y$ bei der gleichbleibenden, ausgebildeten Kanalströmung

#### 1. Grundlegender Ansatz

Wir bestimmen in diesem Kapitel das Geschwindigkeitsfeld in der Wandgrenzschicht, das sich bei der ausgebildeten Kanalströmung unter der Wirkung des die Schaufeln ersetzenden Kraftfeldes (Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung) einstellt. Die Grundgleichungen sind Gl. (II. 18 bis 21); unter den im Abschnitt II. 2 aufgeführten Voraussetzungen lassen sich die Axialkomponente  $C_x$  und die Umfangskomponente  $C_y$  unabhängig voneinander ermitteln.

$C_x(Z)$  ändert sich bei der ausgebildeten Kanalströmung definitionsgemäß nicht und kann bestimmt werden, sobald die Austauschgröße  $A_{xz}$  gegeben ist; das einzuschlagende Vorgehen ist in den Abschnitten II. 2 und 3 beschrieben. (In den im vorliegenden Kapitel behandelten Beispielen wurde dabei stets  $\Phi_x^* = 0$  gesetzt, d. h. der auftretende sekundäre Druckabfall dient nur zur Überwindung der  $X$ -Komponente der Wandschubspannungen; Beispiele mit  $\Phi_x^* \neq 0$  brächten bezüglich  $C_y$  nichts prinzipiell Neues, da nur der in Gl. (1) auftretende Koeffizient  $C_x$  etwas verändert würde.)

Wir befassen uns deshalb in diesem Kapitel nur noch mit der Umfangskomponente  $C_y(Z)$ . Sie bestimmt sich aus der Gl. (II. 19'')

$$C_x \frac{\partial C_y}{\partial X} = \Phi_y + \frac{\partial}{\partial X} \left( A_{yx} \frac{\partial C_y}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( A_{yz} \frac{\partial C_y}{\partial Z} \right), \quad (1)$$

welche eine lineare partielle Differentialgleichung für  $C_y$  darstellt. Die zugrunde liegenden Voraussetzungen sind im Abschnitt II. 2 aufgeführt.

Im Abschnitt 6 wird noch die Voraussetzung  $\partial C_x / \partial X = 0$  fallen gelassen, und es zeigt sich, daß  $C_y$  nur wenig beeinflusst wird, wenn  $C_x$  längs  $X$  periodisch schwankt.

Weil in einer mittleren Verdichterstufe periodische Strömungsverhältnisse vorliegen, lösen wir Gl. (1) durch Reihenentwicklung nach Fourier und setzen

$$C_y = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(Z) \cos nX + b_n(Z) \sin nX]; \quad (2)$$

ebenso für das die Umfangskraft der Schaufelung ersetzende Kraftfeld

$$\Phi_y = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(Z) \sin nX + \psi_n(Z) \cos nX]. \quad (3)$$

Setzen wir ein in (1), so resultiert durch Koeffizientenvergleich für jede Ordnung  $n$  ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches von den andern Ordnungen unabhängig ist:

$$\left. \begin{aligned} -n C_x a_n &= \varphi_n + (A_{yz} b'_n)' - n^2 A_{yx} b_n \\ +n C_x b_n &= \psi_n + (A_{yz} a'_n)' - n^2 A_{yx} a_n \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

(' bedeutet Ableitung nach  $Z$ .)

Die Randbedingungen fordern das Haften an den beiden Seitenwänden; somit ergeben sich für  $a_n, b_n$  je zwei Bedingungen.

Die Glieder nullter Ordnung wollen wir „stationäre“ Glieder nennen, da sie sich längs der Stufe nicht ändern; die andern ( $n \neq 0$ ) bezeichnen wir als *oszillierende* Glieder.

## 2. Lösung für $C_y$

### a) Randbedingungen

Es treten folgende Randbedingungen auf (mit  $C_{yw} \equiv C_y(Z = Z_w)$ , wobei  $w$  die Wand kennzeichnet):

Seitenwand *ruhend*:  $C_{yw} = 0$ , d. h.  $a_{nw} = b_{nw} = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$  (5)

Seitenwand *bewegt*:  $C_{yw} = 1$ , d. h.  $a_{0w} = 1$ ,  $a_{nw} = b_{nw} = 0$ ,  $n \neq 0$ . (6)

Seitenwand *abwechselnd ruhend und bewegt*:

Die Randbedingung hat den in Abb. 9 dargestellten periodischen Verlauf, der sich ebenfalls in eine Fourierreihe entwickeln läßt:

$$C_{yw} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nX}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

d. h.  $a_{0w} = \frac{1}{2}$ ; (7)

$$a_{nw} = 0, \quad n \neq 0;$$

$$b_{nw} = 0, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$b_{nw} = 2/\pi n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Ist nirgends ein Deckband vorhanden, so sind an der Nabe ( $Z_w = 0$ ) die Bedingungen (6), an der Spitze ( $Z_w = 2\pi l/l_a$ ) die Bedingungen (5) zu verwenden. Die beiden Fälle unterscheiden sich nur im Gliede  $a_0$ .

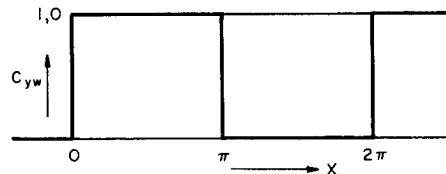


Abb. 9. Randbedingung bei abwechselnd ruhender und bewegter Wand.

Ist sowohl an der Laufradspitze als auch an der Leitkranznabe ein Deckband angebracht, so finden die Bedingungen (7) Anwendung, die für Nabe und Spitze gleich lauten, siehe Abb. 14 b.

Einem über der gesamten Kanalhöhe durchgerechneten Beispiel konnten wir entnehmen, daß sich der Einfluß der Wandbedingungen bei den oszillierenden Termen ( $n \neq 0$ ) auf ein wandnahes Gebiet beschränkt. Für diese kann deshalb jede Kanalhälfte separat behandelt werden. Anstelle der Bedingung an der gegenüberliegenden Kanalwand ist dann in einem genügenden Abstand  $Z_k$  von der Wand zu fordern, daß  $a_n$  und  $b_n$  die Werte annehmen, die sich aus Gl. (4) beim Verschwinden der Reibungsglieder ergeben, d. h.

$$a_n = -\frac{\varphi_n}{nC_x}, \quad b_n = \frac{\psi_n}{nC_x}. \quad (8)$$

Die Größe  $Z_k$  dieses Abstandes muß aus der Erfahrung bei der Durchführung der Rechnung festgelegt werden und läßt sich dadurch kontrollieren, daß die so gewonnenen Lösungen für  $a_n$  und  $b_n$  in der Umgebung von  $Z_k$  noch praktisch zusammenfallen müssen mit den reibungsfreien Werten, d. h. daß der Übergang knickfrei erfolgen muß.

Für das längs  $X$  konstante „stationäre“ Glied  $a_0$  hingegen erstreckt sich der Einfluß der Wandbedingungen über den ganzen Querschnitt (analog wie bei  $C_x$ ), da wir ausgebildete Kanalströmung weit vom Kanaleinlauf entfernt voraussetzen. Wenn wir uns auf den Reaktionsgrad  $r=0,5$  und auf die Fälle „überall Deckband“ und „nirgends Deckband“ beschränken, ist  $a_0$  symmetrisch zur Kanalmitte und hat dort den Wert

$$a_{0m} = 0,5. \quad (9)$$

#### b) Vorgehen bei der Lösung

$b_0$  tritt nicht auf;  $a_0$  entspricht der mittleren Geschwindigkeit  $C_{y\infty}$  und legt den Reaktionsgrad fest. Aus (4) folgt

$$a_0 = a_{0w} + \int_0^Z \left[ \frac{A_{yzw} a'_{0w} - \int_0^Z \psi_0 dZ}{A_{yz}} \right] dZ. \quad (10)$$

Die beiden Konstanten  $a_{0w}$  und  $a'_{0w}$  ergeben sich aus den beiden Randbedingungen; in unserem Falle mit  $r=0,5$  genügt die Lösung für eine Kanalhälfte mit den Randbedingungen an der Wand nach (5), (6) oder (7) und in der Mitte nach (9).

Für die *oszillierenden Terme* ( $n \neq 0$ ) superponieren wir eine Lösung  $a_{np}, b_{np}$  der inhomogenen Gl. (4) mit den Bedingungen an der Wand (an der Nabe ist  $Z \equiv Z_w = 0$ , an der Spitze  $Z \equiv Z_w = 2\pi l/l_a$ )



$$Z = Z_w: \quad a_{np} = b_{np} = a'_{np} = b'_{np} = 0 \quad (11)$$

und Lösungen  $a_{nh1}$ ,  $a_{nh2}$  etc. der homogenen Gl. (4) mit den Werten an der Wand

$$\begin{aligned} Z = Z_w: \quad a_{nh1} = b_{nh1} = b'_{nh1} = 0, \quad a'_{nh1} = 1, \\ Z = Z_w: \quad a_{nh2} = b_{nh2} = a'_{nh2} = 0, \quad b'_{nh2} = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

wobei dann eine die Randbedingungen (8) und (5) oder (6) erfüllende Lösung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} a_n &= a_{np} + \lambda_1 a_{nh1} + \lambda_2 a_{nh2}, \\ b_n &= b_{np} + \lambda_1 b_{nh1} + \lambda_2 b_{nh2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Bedingung (5), resp. (6) ist durch (11, 12) schon erfüllt, (8) liefert  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

Die Größen  $a_{np}$ ,  $a_{nh1}$  etc. wurden durch numerische Integration des Systems (4) von der Wand aus bestimmt unter Verwendung der Simpsonschen Integrationsformel<sup>1)</sup>.

Die Ausgangswerte für die ersten zwei Intervalle wurden dabei analytisch ermittelt. In unmittelbarer Nähe einer glatten Wand gilt nämlich:

$$\begin{aligned} A = A_\mu = \text{konstant}, \quad C_x = \gamma Z, \\ \varphi_n, \psi_n \approx \text{konstant.} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a_{np} &\approx -\frac{\psi_n Z^2}{2 A_\mu} - n \gamma \frac{\varphi_n Z^5}{40 A_\mu^2}, \\ b_{np} &\approx -\frac{\varphi_n Z^2}{2 A_\mu} + n \gamma \frac{\psi_n Z^5}{40 A_\mu^2}, \end{aligned}$$

und für die homogene Lösung

$$\begin{aligned} a_{nh1} &\approx Z, \\ b_{nh1} &\approx -n \gamma \frac{Z^4}{12 A_\mu} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

An einer rauhen Wand ergeben sich etwas kompliziertere Ausdrücke, da  $A$  bei großer Rauigkeit proportional  $Z$  ist.

Zur Erfüllung von Randbedingungen (7) wird der obigen Lösung (13) einfach eine weitere homogene Lösung  $a_{nh3}$ ,  $b_{nh3}$  überlagert, welche im Strömungsinne verschwindet und an den Wänden (7) gehorcht. Es kommen dabei aber nur ungerade Ordnungen in Frage ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ).  $a_{nh3}$ ,  $b_{nh3}$  be-

<sup>1)</sup> Die Schrittweite wurde an der Wand so gewählt, daß

$$\Delta \eta = \frac{\alpha v^{*+} l_a}{2 \pi v} \Delta Z = 1$$

(vergleiche Gl. (22)). Beim Fortschreiten der Rechnung wurde sie dann einige Male verdoppelt.

stimmen sich ihrerseits durch Kombination von Lösungen (12) mit einer neuen homogenen Lösung der Anfangswerte

$$a_{nh4w} = a'_{nh4w} = b'_{nh4w} = 0, \quad b_{nh4w} = 2/\pi n.$$

Es wird also

$$\begin{aligned} a_{nh3} &= a_{nh4} + \mu_1 a_{nh1} + \mu_2 a_{nh2}, \\ b_{nh3} &= b_{nh4} + \mu_1 b_{nh1} + \mu_2 b_{nh2}, \end{aligned} \quad (14)$$

wobei  $\mu_1$  und  $\mu_2$  so bestimmt werden, daß

$$a_{nh3}(Z_k) = b_{nh3}(Z_k) = 0.$$

### c) Stromflächen

Die Bahnen des strömenden Mediums liegen wegen der Voraussetzung längs  $X$  nicht variierender Axialgeschwindigkeiten in Ebenen  $Z = \text{konstant}$  und lauten

$$Y = Y_0 + \frac{a_0}{C_x} X + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{nC_x} \sin nX - \frac{b_n}{nC_x} \cos nX \right], \quad (15)$$

wo alle Größen Funktionen von  $Z$  sind.

## 3. Ansatz für die turbulente Austauschgröße

### a) Allgemeine Überlegungen

Für die turbulenten Zusatzspannungen läßt sich formell stets der Austauschgrößenansatz einführen:

$$-\rho \overline{c'_x c'_z} = \epsilon_{xz} \left( \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) \text{ etc.}, \quad (16)$$

doch ist entsprechend der Natur der Turbulenz  $\epsilon_{ik}$  nicht nur aus den Verhältnissen gerade des betrachteten Strömungsquerschnittes bestimmt, sondern auch aus der Vorgeschichte. Eine eindeutige Zuordnung von Turbulenz und örtlichem Strömungsfeld ist nur in ausgebildeten Strömungen möglich. Solche sind z. B. bei der gewöhnlichen ausgebildeten Rohr- oder Kanalströmung vorhanden und auch in gewissen Fällen von Plattengrenzschichten (self-preserving flow nach *Townsend* [6], ähnliche Lösungen nach *Rotta* [11]); für allgemeinere Fälle ist oft wenigstens abschnittsweise eine solche Darstellung möglich.

Bei der periodischen Strömung durch eine mittlere Stufe ist ein derartiger Gleichgewichtszustand im Mittel wohl voraussetzbar (natürlich nicht, wenn wir die Einzelheiten der Strömung unter Berücksichtigung der endlichen

Gitterteilung betrachten wollen); da die oszillierenden Geschwindigkeitskomponenten in einem Verdichter gegenüber den „stationären“ klein sind, ist auch eine mittlere Annahme für die Austauschgröße zulässig, und wir setzen bei der gleichbleibenden ausgebildeten Kanalströmung in unserer dimensionslosen Schreibweise

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0. \quad (17)$$

In Kapitel IV (Untersuchung einer sich verdickenden Grenzschicht) lassen wir (17) weg.

$A$  hat i. a. tensoriellen Charakter (wie z. B. die Elastizitätsbeiwerte) und umfaßt einen viskosen und einen turbulenten Teil

$$A = A_\mu + A_\epsilon. \quad (18)$$

Bei uns treten  $A_{xz}$ ,  $A_{yz}$  und  $A_{yx}$  auf.  $A_{xz\epsilon}$  und  $A_{yz\epsilon}$  entsprechen demselben Mechanismus, nämlich turbulentem Austausch in der Richtung  $Z$  senkrecht zur Wand und können deshalb *gleichgesetzt* werden. Der Verlauf in Funktion des Wandabstandes ist für die gewöhnliche Kanalströmung relativ gut bekannt. Bei uns treten sicher Abweichungen davon auf, z. B. wegen der Unterströmung in der Grenzschicht. Da aber die Details noch nicht erforscht sind, machen wir folgende einfache Annahme:

Es entspreche  $A^+(Z)$  dem Verlauf der Austauschgröße  $A_{xz}$  in einem gewöhnlichen Kanal, der dieselbe Höhe  $l$  wie unsere Verdichterstufe habe und mit der Geschwindigkeit  $c_{xm}$  durchströmt werde, für den also die maßgebende Reynoldszahl  $c_{xm} l/\nu$  dieselbe sei. Für die Verdichterströmung setzen wir den turbulenten Anteil  $A_\epsilon$  um einen Faktor  $\alpha$  erhöht an:

$$A_{xz\epsilon} = A_{yz\epsilon} \equiv A_\epsilon = \alpha A_\epsilon^+, \quad (19)$$

wobei an einer festen Wand:  $\alpha \geq \beta \equiv \sqrt{\frac{C_{xm}^2 + C_{ym\infty}^2}{C_{xm}^2}}, \quad (20)$

an einer bewegten Wand:  $\alpha \geq \beta \equiv \sqrt{\frac{C_{xm}^2 + W_{ym\infty}^2}{C_{xm}^2}}, \quad (20a)$

zum Ausdruck bringend, daß wir, wenn  $\Delta C_y$  verschwindet, relativ zur Wand die Geschwindigkeit  $C_{s\infty} = (C_x^2 + C_y^2)^\frac{1}{2}$ , resp.  $W_{s\infty}$  haben, wobei die Turbulenz durch diese Relativgeschwindigkeit bestimmt ist. Findet Umlenkung statt, d. h. ist  $\Delta C_y \neq 0$ , so ist  $\alpha$  größer als  $\beta$ . Dazu herrscht in Turbomaschinen an sich höhere Turbulenz wegen der Nachlaufdüellen vorhergehender Kränze. Mit dem Ansatz (19) wirkt also  $C_y$  nur über den summarischen Faktor  $\alpha$  auf  $A_{xz}$  etc. ein, so daß die Gl. (II. 18, 20, 21) von Gl. (II. 19) separiert bleiben.

Wir betrachten zur Illustration die Grenzschicht einer ebenen Platte an einer Stelle, wo sie die Dicke  $\delta$  hat, wenn die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht in einem ersten Falle  $c_\delta^+$ , in einem zweiten  $c_\delta' = \beta c_\delta^+$  beträgt.

Für den Reibungskoeffizienten  $c_f$  gilt das Gesetz

$$c_f \sim \left( \frac{c_\delta \delta}{\nu} \right)^{-h},$$

wo  $h \approx 1/5 \div 1/4$ . Also muß gelten

$$c_f' = c_f^+ \beta^{-h}$$

und für die Wandschubspannung

$$\tau_w' = \tau_w^+ \beta^{2-h}.$$

Da die turbulente Austauschgröße  $A_\epsilon$  proportional ist der sogenannten Schubspannungsgeschwindigkeit  $v^* = \sqrt{\tau_w/\rho} = c_\delta \sqrt{c_f/2}$ , folgt

$$A_\epsilon' = A_\epsilon^+ \beta^{1-h/2}.$$

Der Erhöhungsfaktor beim Übergang von  $c_\delta^+$  auf  $c_\delta'$  beträgt somit

$$\alpha = \beta^{1-h/2} \approx \beta.$$

Multiplizieren wir in dem mit ' bezeichneten Falle alle Geschwindigkeiten mit  $1/\beta$ , so erreicht die Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht wieder den alten Wert  $c_\delta^+$ ; die Reynoldszahl ist also bei erhöhtem turbulentem Austausch (als Folge irgendeines turbulenzanfachenden Einflusses) die ursprüngliche; die Wandschubspannung bleibt um den Faktor

$$\beta^{2-h-1} = \beta^{1-h} = \alpha^{\frac{1-h}{1-h/2}} \approx \alpha^{1-h/2}$$

vergrößert.

Der Erhöhung von  $A_\epsilon$  um einen Faktor  $\alpha$  bei konstanter Außengeschwindigkeit entspricht also eine Erhöhung der Schubspannung (d. h. von  $c_f$ ) und des Gradienten  $\partial C_x / \partial Z$  an der Wand um den Faktor  $\alpha^{1-h/2}$ .

Während wir so für  $A_{xz} = A_{yz} \equiv A$  plausible Annahmen treffen können, ist dies für  $A_{yx}$  nicht möglich, da noch keine Strömung diesbezüglich untersucht wurde, die der unsrigen ähnlich wäre. An der Wand muß  $A_{yx\epsilon}$  Null sein, während im Strömungsinnern ein konstanter Wert zu erwarten ist, doch ist die absolute Größe unbekannt. Wenn wir in unseren Rechnungen

$$A_{yx\epsilon} = \omega A_{xz\epsilon} = \omega A_\epsilon \tag{21}$$

setzen und  $\omega = 1$  verwenden, so geschieht dies mehr „pro memoria“; der Einfluß des Gliedes

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( A_{yx} \frac{\partial C_y}{\partial X} \right)$$

in (1) auf  $C_y$  ist sehr klein, da in Wandnähe, wo überhaupt nur wesentliche Abweichungen von der reibungsfreien Lösung auftreten,  $\partial/\partial X \ll \partial/\partial Z$ .

Unsere Annahmen über  $A_\epsilon$  sind also recht unsicher; dies ist auch der Grund dafür, daß bis heute meist nur *laminare* dreidimensionale Grenzschichten behandelt wurden, z. B. *Mager* [17], *Timman, Zaat* [18], *Hansen, Herzig* [22] (Ausnahme *Becker* [16], der für die turbulente Austauschgröße die Werte der gewöhnlichen Kanalströmung verwendet). Wir können deshalb nicht den Anspruch erheben, quantitative Ergebnisse zu liefern, sondern wollen anhand eines Modelles, das den turbulenten Fall durch stark veränderliche Austauschgröße (je nach Reynoldszahl von der Wand bis ins Strömungsinere bis 1 : 10000!) nachahmt, qualitativ den Verhältnissen in Turbomaschinen näherkommen und gleichzeitig die Übertragbarkeit der einfacher zu gewinnenden Resultate für laminare Strömung überprüfen.

b) Verlauf von  $A$  im glatten Kanal<sup>2)</sup>

$A$  kann den nachstehenden Formeln (24, 25) entnommen werden, die denjenigen der gewöhnlichen Kanalströmung entsprechen und nur gemäß der um den Faktor  $\alpha$  verstärkten turbulenten Austauschgröße modifiziert sind.

Von den vielen vorgeschlagenen Ansätzen scheint derjenige von *Reichardt* [13] theoretisch und experimentell am besten fundiert, vergleiche Abb. 10: Die turbulente Austauschgröße  $A_\epsilon$  verschwindet an der Wand; dann wächst sie zunächst proportional  $Z^3$  an (folgt aus den Randbedingungen an der Wand), um darauf in einem längeren Bereiche proportional  $Z$  anzusteigen; im Strömungsinern flacht die Kurve aus<sup>3)</sup>.

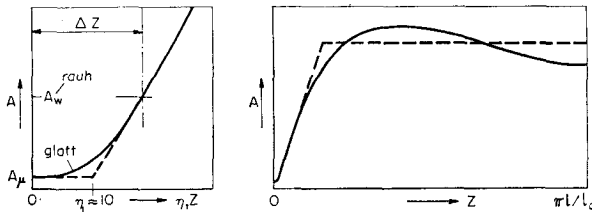


Abb. 10. Die Austauschgröße bei ausgebildeter Kanalströmung. Links die Verhältnisse in Wandnähe, rechts über einer Kanalhälfte.

- Ansatz (24), (25)
- Ansatz (24a), (25a)

<sup>2)</sup> Für  $A_{xz} = A_{yz}$  schreiben wir der Einfachheit halber  $A$ .

<sup>3)</sup> Die folgenden Beziehungen werden für die Seitenwand an der Nabe ( $Z_w = 0$ ) angegeben. Sinngemäß übertragen gelten sie auch an der Spitze ( $Z_w = 2\pi l/l_a$ ), da  $A$  symmetrisch zur Kanalmitte ist.

In Wandnähe wird mit Vorteil die dimensionslose Variable

$$\eta \equiv \alpha \frac{z v^{*+}}{\nu} = \alpha Z \frac{v^{*+}}{u} \frac{l_a}{2\pi l} \frac{u l}{\nu} \quad (22)$$

verwendet mit

$$\frac{v^{*+}}{u} \equiv C_{xm} \sqrt{\frac{c_f^+}{2}} = \sqrt{S_{xz}^+}, \quad (23)$$

wobei  $c_f^+$  für die gewöhnliche ausgebildete Kanalströmung gilt bei  $Re = c_{xm} l/\nu$  und auf  $c_{xm}$  bezogen ist. Für die Austauschgröße gilt nun in Wandnähe:

$$A = \left[ 1 + \kappa \left( \eta - \eta_L \operatorname{Tg} \frac{\eta}{\eta_L} \right) \right] \frac{2\pi l}{l_a} \frac{\nu}{u l}. \quad (24)$$

Der Koeffizient  $\kappa$  hat etwa den Wert 0,4.  $\eta_L \approx 10$  entspricht der Dicke der laminaren Endschicht, die so bei erhöhtem  $\alpha$  automatisch erniedrigt wird.

Im Strömungsinern ist  $A$  unabhängig von der Viskosität  $\mu$ , da  $A_\epsilon$  überwiegt, und läßt sich als Funktion des Abstandes  $\xi$  von der Kanalmitte darstellen

$$A = \alpha \frac{\pi l}{l_a} \frac{v^{*+}}{u} \frac{\kappa}{3} (0,5 + \xi^2) (1 - \xi^2) \quad (25)$$

mit

$$\xi \equiv 1 - \frac{2z}{l} = 1 - \frac{l_a Z}{\pi l}. \quad (26)$$

Die Austauschgröße ist im Strömungsinern also in einem längeren Abschnitte annähernd konstant (wie auch bei freier Turbulenz und bei der Plattengrenzschicht, siehe *Townsend* [6]); die Annahme über  $A$  im Strömungsinern hat auf unsere Ergebnisse übrigens nur einen geringen Einfluß, ausgenommen  $D_2$  nach Gl. (IV. 28).

Die Anschließbarkeit von (24) und (25) ist durch die Ansätze gewährleistet, da der Anschlußpunkt sehr nahe bei der Wand liegt.

Der Verlauf nach den obigen Gleichungen kann auch so angenähert werden (in Abb. 10 gestrichelt):

Laminare Endschicht:  $A = A_\mu = \frac{2\pi l}{l_a} \frac{\nu}{u l}, \quad \eta < \eta_L. \quad (24a)$

Gemischte Zone:  $A = [1 + \kappa(\eta - \eta_L)] \frac{2\pi l}{l_a} \frac{\nu}{u l}, \quad \eta > \eta_L.$

Vollturbulentes Strömungsinernes:  $A = A_\epsilon = 0,07 \alpha \frac{v^{*+}}{u} \frac{\pi l}{l_a}. \quad (25a)$

Bei *getrennten Grenzschichten* (Plattengrenzschicht) gilt für die laminare Endschicht und die gemischte Zone ebenfalls (24) oder (24a); im vollturbulenten

ten Strömungsinnern kann nach *Clauser* [14] gesetzt werden

$$A = \text{konstant} = 0,018 C_{x\delta} Z_1 \alpha \quad (25b)$$

( $Z_1$  die dimensionslose Verdrängungsdicke an *einer* Wand). Die Verhältnisse sind hier schwieriger zu erforschen, da meist kein Gleichgewichtszustand vorhanden ist.

Den Beispielen dieses Kapitels liegen (24, 25) zu Grunde, während für Kapitel II der gröbere Ansatz (24a, 25a) und für Kapitel IV (24a, 25b) verwendet werden.

Sofern die Normalkraft  $\Phi_x$  längs der Schaufelhöhe konstant ist, d. h.  $\Phi_x^* = 0$ , können bei der ausgebildeten Kanalströmung wie auch bei getrennten Grenzschichten die üblichen Formulierungen des Geschwindigkeitsverlaufes  $C_x$  (siehe z. B. [11], [13], [15]) durch ein wandnahes Gesetz

$$C_x = \frac{v^{*+}}{u} g_1(\eta)$$

und ein strömungsinneres oder Mittengesetz

$$C_{xm} - C_x = \frac{v^{*+}}{u} g_2(\xi)$$

verwendet werden, wenn die rechten Seiten der obigen Ausdrücke mit  $\alpha^{-h/2}$  multipliziert werden und für  $\eta$  und  $v^{*+}/u$  die Definitionen (22, 23) beachtet werden, siehe auch Abschnitt II. 3.

### c) *Rauher Kanal*

Je größer die Rauigkeitserhebungen, desto weiter ragen sie in die Grenzschicht. Die Dicke der laminaren Endschicht wird deshalb immer kleiner, bei vollständiger Rauheit verschwindet sie ganz. Vom Verlaufe  $A(Z)$  des glatten Kanales wird also je nach Rauheit der unterste Teil  $\Delta Z$  weggeschnitten; vergleiche Abb. 10.  $A$  besitzt deshalb an der (ideellen) Wand i. a. einen Wert  $A_w$  größer als  $A_\mu$ .

Die Zuordnung von  $k_s/1$  und  $\Delta Z$  bestimmt sich daraus, daß der Geschwindigkeitsverlauf  $C_x(Z)$  einerseits in Funktion von  $k_s/1$  gegeben ist, z. B. [15], andererseits nach (II. 31), mit  $\Phi_x^* = 0$ , berechnet werden kann. Aus der Bedingung des Übereinstimmens folgt  $\Delta Z$  sowie  $A_w$ . Bei vollständiger Rauheit ist  $c_f$  unabhängig von  $Re$ , und  $A_w$  läßt sich explizit angeben

$$\ln(A_w/A_\mu) \approx \ln(\alpha k_s v^{*+}/\nu) - \kappa B + \ln \kappa, \quad (27)$$

wobei  $B \approx 8,5$  nach [15].

#### 4. Die Feldkraft $\Phi_y$

Die oszillierende Feldkraft der Schaufeln, die die Umlenkung der Strömung in den Gittern bewirkt, läßt sich etwa darstellen als

$$\Phi_{yos} = \varphi_1(Z) \sin X, \quad (28)$$

was für moderne Profile mit starker Dickenrücklage eine gute Näherung ist. Genauere Ansätze, die der exakten Lage des Kraftschwerpunktes in den Gittern und dessen Verschiebung in der Grenzschicht Rechnung tragen, lassen sich durch Hinzunahme weiterer Glieder höherer Ordnung darstellen; sie bringen aber nichts prinzipiell Neues und beeinflussen den Integralwert für die Seitenwandreibung nur wenig; da auch die nötigen Unterlagen fehlen, beschränken wir uns auf den einfachen Ansatz (28). Dort, wo der Einfluß der Seitenwandreibung verschwindet (d. h. praktisch im ganzen Kanalquerschnitt mit Ausnahme einer wandnahen Zone) hängt die Feldkraft mit der totalen Umlenkung im Laufrade nach Gl. (8) und (28) so zusammen:

$$\varphi_1(Z) = C_x(Z) \Delta C_y(Z)/2. \quad (29)$$

Bei der reibungsfreien Strömung durch eine Repetierstufe ist kein „stationärer“ Feldkraftanteil  $\psi_0$  vorhanden; wegen der Wandreibung kann ein solcher hingegen auftreten. Betrachten wir einmal den Fall, daß keine Deckbänder vorhanden sind und richten wir unser Augenmerk nur auf die „stationäre“ (längs  $X$  unveränderliche) Umfangskomponente  $a_0(Z)$  der Geschwindigkeit. Die Rotorwand zieht das Strömungsmedium in Umfangsrichtung mit sich; an der Gehäusewand ist  $a_0$  gleich Null. Wir haben somit bezüglich  $a_0(Z)$  den Fall der Scherströmung zwischen einer ruhenden und einer bewegten Wand — die sogenannte Couette-Strömung —, der ein bestimmter Verlauf  $a_0(Z)$  entspricht; der Mittelwert über der Kanalhöhe ist gleich 0,5. Eine davon abweichende Verteilung  $a_0(Z)$  kann nur auftreten, wenn örtlich „stationäre“ Feldkräfte  $\psi_0(Z)$  wirken. Diese spielen bei der ausgebildeten Strömung weit vom Kanaleinlauf entfernt die gleiche Rolle, die der sekundäre Druckabfall bezüglich der (längs  $X$  ebenfalls nicht ändernden) Geschwindigkeitskomponente  $C_x$  spielt, und haben deshalb auch dieselbe Größenordnung. Zwei Beispiele von Verläufen  $a_0(Z)$  für denselben Mittelwert über der Kanalhöhe finden sich in Abb. 17.

Dem „stationären“ Geschwindigkeitsanteil  $a_0$  überlagern sich die oszillierenden Anteile, welche von den umlenkenden Feldkraftanteilen  $\Phi_{yos}$  erzeugt werden. Letztere haben die Größenordnung des nützlichen Stufen-Druckgradienten, wie aus den Gl. (II. 11—16) ersichtlich ist.

Die im Laufradraume geleistete Arbeit pro dimensionslose Längeneinheit in Umfangsrichtung beträgt (weil  $n \leq 1$ )



$$\dot{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi/l_a} 1 \cdot \Phi_y dZ dX = C_{xm} \Delta C_{ym} \int_0^{2\pi/l_a} \frac{\varphi_1}{\varphi_{1m}} dZ + \pi \int_0^{2\pi/l_a} \psi_0 dZ, \quad (30)$$

wobei der zweite Anteil in der Regel sehr klein ist<sup>4)</sup>. Wir betrachten deshalb im folgenden ausschließlich die oszillierenden Feldkräfte.

Wegen der Wandgrenzschichten ist  $\varphi_1$  i. a. nicht konstant über der Schaufelhöhe, da die Schaufelkraft in der Grenzschicht meist abnimmt, wenn die Schaufeln nicht speziell verwunden sind, doch verschwindet sie auch beim Vorhandensein eines Spaltes an der Wand nicht gänzlich, vergleiche z. B. *Strscheletzky* [10]. Wir haben die folgenden Fälle untersucht:

*α) Feldkraft längs Z konstant*

$$\varphi_1(Z) = \varphi_{1m}. \quad (31)$$

In diesem Falle ist die Tangentialkraftmangeldicke  $\Delta_T = 0$ ; die Umfangsarbeit pro Masseneinheit ist in der Grenzschicht erhöht. Bei der ausgebildeten Kanalströmung ist dieser Verlauf nur möglich, wenn die Schaufeln entsprechend verwunden sind. Bei unverwundener Schaufelung wird er nur bei sehr dünner Grenzschicht auftreten. Die Zusatzarbeit beträgt

$$\Delta \dot{A} = C_{xm} \Delta C_{ym} \Delta_1, \quad (32)$$

( $\Delta_1$  die Verdrängungsdicke des ganzen Kanals)

wovon aber noch ein Abzug zu machen ist wegen zusätzlicher Verluste, vergleiche Gl. (II. 45). Dieser Kraftverlauf entspricht gerade der in Abschnitt II. 5 mit c) bezeichneten Variante der direkten Zufuhr zusätzlicher Schaufelarbeit.

*β) Die Feldkraft verläuft proportional  $C_x$*

$$\varphi_1(Z)/\varphi_{1m} = C_x(Z)/C_{xm}. \quad (33)$$

Wir haben den Fall *konstanter Umfangsarbeit*  $L_u$  pro Masseneinheit ( $\Delta_1 = \Delta_T$ ), d. h. ohne Seitenwandreibungskräfte den Fall konstanter Zirkulation. Die Wandgrenzschicht kann aber ohne Zusatzenergie (z. B. vom sekundären Druckabfall geliefert) nicht gleichbleibend sein, da ja die Wandreibungs- und Randverluste gedeckt werden müssen.

Der Verlauf nach Gl. (33) wird nicht ganz bis an die Wand beibehalten, da

<sup>4)</sup> Ist die Tangentialkraft in Wandnähe wegen des Radialspaltes verschieden groß in aufeinanderfolgenden Schaufelkränzen, so treten in der Reihenentwicklung (3) örtlich merkliche  $\psi$ -Werte auf. Wir beschränken uns in unseren Beispielen auf den Grenzfall verschwindender Spaltweite, so daß Ansatz (28) anwendbar ist. Allgemeiner Fälle lassen sich nach der dargelegten Methode ohne weiteres ebenfalls behandeln.

er, entsprechend dem Charakter einer turbulenten Grenzschicht, in Wandnähe einen scharfen Abfall mit sich bringen würde, was aber experimentell nirgends beobachtet wurde. Wir geben deshalb  $\varphi_1$  an der Wand selbst einen endlichen Wert, und zwar der Einfachheit halber den Wert  $\varphi_{1m}/2$ , von wo an  $\varphi_1$  nach einer Potenzfunktion verlaufe

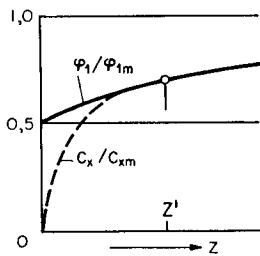


Abb. 11. Verlauf von  $\varphi_1$  in Wandnähe beim Fall  $\beta$ .

$$\varphi_1(Z)/\varphi_{1m} = 0,7 + c_1(Z - Z') + c_2(Z' - Z)^{3,5}, \quad (33a)$$

die an der Stelle  $Z'$ , wo  $C_x/C_{xm}$  den Wert 0,7 erreicht, knickfrei in (33) übergehe, siehe Abb. 11. Da sich die Abweichungen auf die Wandnähe beschränken, beeinflussen sie den integralen Wert  $\Delta_T$  kaum. (Analog an der andern Wand.)

$\gamma$ ) Die Schaufelkraft verläuft proportional  $C_x^2$

$$\varphi_1(Z)/\varphi_{1m} = [C_x(Z)/C_{xm}]^2, \quad (34)$$

wobei in Wandnähe statt dessen das Quadrat des Ausdruckes (33a) verwendet wird. Wir haben hier den Fall *konstanter Schaufelbelastung*  $c_L$  (Auftriebskoeffizient, aber mit  $C_x$  gebildet). Ohne Berücksichtigung der Reibungskräfte verlief  $a_1$  (entsprechend Gl. (8)) proportional  $C_x$ ; es träte keine Sekundärströmung auf; die Grenzschicht würde aber schon jetzt einen Mangel an  $L_u$  aufweisen, der durch das Hinzutreten der Verluste noch verschärft wird, und vermag den axialen Druckanstieg ohne zusätzlichen Impuls nicht zu überwinden.

#### $\delta$ ) Konzentrierte Zusatzkraft in Wandnähe

Für die Vergleichsrechnung von Kapitel II wurden noch Fälle betrachtet, in denen dem Verlaufe nach (33, 33a) in Wandnähe konstante Zusätze  $\varphi_1^*$  überlagert sind. Wegen der Linearität von Gl. (1) kann dies so geschehen, daß der Lösung (13) mit der Feldkraft nach (33, 33a) eine weitere Lösung der inhomogenen Gl. (4) superponiert wird, bei welcher  $\varphi_1^*(Z)$  den in Abb. 7 mit a) und b) bezeichneten Verlauf hat. Die zusätzliche Umfangsleistung beträgt für beide Kanalhälften zusammen

$$\Delta \dot{A} = 4 Z^* \varphi_1^*. \quad (35)$$

Um die den Mangelzonen netto gelieferte Energie zu erhalten, ist hiervon nach Gl. (II. 45) noch die zusätzliche Dissipation abzuziehen.

Die Ausbildung der Schaufelung und die Erfüllung des Gleichgewichtes in  $Z$ -Richtung bei den obigen Ansätzen für  $\Phi_y$  ist eine Frage, die wir im Rahmen unserer Untersuchung offen lassen.

## 5. Lösung für einige Varianten

Wir haben für einen *Basisfall* mit den folgenden Zahlenwerten die Lösungen für alle im Abschnitt 4 beschriebenen Feldkraftansätze bestimmt.

$$c_{xm} l/\nu = 10^6$$

$$\alpha = 1 \quad c_f^+ = 2,2 \cdot 10^{-3}$$

$$r = 0,5 \text{ (Reaktionsgrad).}$$

$C_{xm} = 0,5$  legt die Größe von  $u$  fest; im physikalischen Sinne abhängig von  $u$  sind nur die in Abb. 14 und 23 dargelegten Resultate sowie alle Ergebnisse im Zusammenhang mit  $a_0$ ; in den übrigen Resultaten tritt  $u$  nur als Bezugsgröße auf.

$$l/l_a = 1 \text{ glatte Wand.}$$

Die Ergebnisse für die uns hauptsächlich interessierenden oszillierenden Anteile finden sich in Abb. 12 für die Kraftfelder  $\alpha$ ) (Feldkraft über die Kanalhöhe konstant),  $\beta$ ) (Feldkraft proportional  $C_x$ ) und  $\gamma$ ) (Feldkraft proportional  $C_x^2$ ) des Abschnittes 4. Die Lösungen für den Ansatz  $\delta$ ) wurden im Kapitel II verwendet. Abb. 12a gibt eine Übersicht über eine Kanalhälfte; Abb. 12b zeigt die Verhältnisse in Wandnähe.

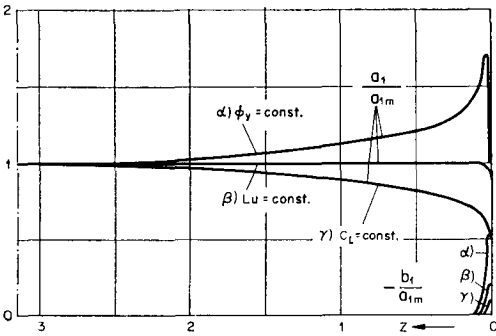


Abb. 12a. Oszillierender Anteil an  $C_y$  für den Basisfall bei verschiedenen Verläufen von  $\Phi_y$  längs  $Z$ .

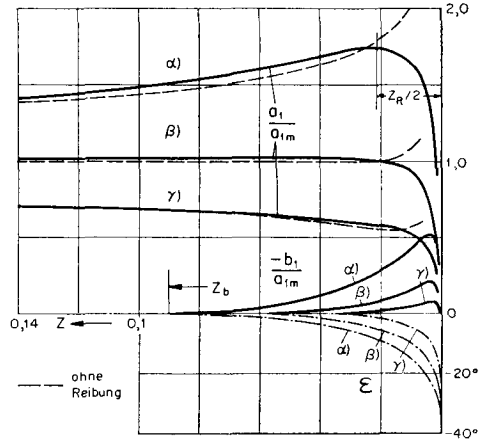


Abb. 12b. Verhältnisse in Wandnähe.

Allgemein gelten bis nahe an die Wand die (gestrichelt eingetragen) reibungsfreien Werte nach Gl. (8); dann macht sich der Wandeinfluß langsam bemerkbar ( $a_1$  weicht ab vom reibungsfreien Werte  $-\varphi_1/C_x$ ,  $b_1$  wird verschieden von 0), und es tritt eine *Phasenverschiebung* der Strömung

$$\epsilon = \arctg(b_1/a_1) \tag{36}$$

ein, welche an der Wand ihren Maximalwert  $\epsilon_w$  erreicht und eine Voreilung des oszillierenden Anteiles von  $C_y$  bewirkt, d. h. die Reibungskräfte übertragen den Einfluß des Schaufelkraftfeldes in den vorhergehenden Kranz hinein. Die Geschwindigkeitsfelder in den einzelnen Schaufelkränzen sind also nicht voneinander unabhängig; dies bedeutet aber, daß mit Versuchen an einzelnen Schaufelgittern keine restlose Erfassung der in einer mehrstufigen Maschine auftretenden Wand- und Randverluste möglich ist. Zahlenwerte für  $\epsilon_w$  sind in der Zahlentafel I (S. 55) angegeben.

Wir haben in Abschnitt II. 1 gesehen, daß für reibungsfreie Strömung die Arbeit der Umfangskomponente der Feldkraft im Integral über eine Repetierstufe verschwindet; dies ist bei uns der Fall, denn ohne Reibung lautet unsere Lösung

$$\Phi_y = \varphi_1 \sin X, \quad C_y = a_0 - \frac{\varphi_1}{C_x} \cos X,$$

so daß die in jedem Stufenelement  $dZ$  geleistete Arbeit Null ist:

$$dZ \int_0^{2\pi} \Phi_y C_y dX = 0.$$

Bei Berücksichtigung der Wandreibung leistet die gleiche Feldkraft nun Arbeit in denjenigen Stufenelementen, in welchen eine Phasenverschiebung, ausgedrückt durch das Glied  $b_1 \sin X$ , auftritt:

$$dZ \int_0^{2\pi} \Phi_y C_y dX = dZ \int_0^{2\pi} \varphi_1 b_1 \sin^2 X dX \neq 0.$$

Diese Arbeit dient zur Deckung eines Teiles der Dissipation.

Die für die untere Kanalhälfte ( $0 \leq Z \leq \pi l/l_u$ ) dargestellten Ergebnisse gelten auch für die andere Kanalhälfte, da  $C_{yos}$  für die Beispiele dieses Abschnittes symmetrisch zur Kanalmitte ist.

Mit dem Feldkraftansatz  $\gamma$ ) (Feldkraft proportional  $C_x^2(Z)$ ) ist  $a_1$  praktisch über der ganzen Kanalhöhe proportional  $C_x$ .

Mit dem Ansatz  $\beta$ ) (Feldkraft proportional  $C_x$ ) wird  $a_1$  konstant bis in unmittelbare Wandnähe. Es tritt also eine gewisse Unterströmung auf. Reibungsfrei würde  $a_1$  in unmittelbarer Wandnähe ansteigen, da dort der Ansatz (33) durch (33a) ersetzt ist.

Im Falle  $\alpha$ ) (Feldkraft längs  $Z$  konstant) ist die Unterströmung, entsprechend der größeren Schaufelkraft, ausgeprägter; dies ist wegen der größeren Geschwindigkeitsgradienten in Wandnähe natürlich auch mit erhöhter Dissipation verbunden. In Abb. 13a finden sich die Geschwindigkeitsprofile längs der Stufe, in Abb. 13b die Stromfläche, die von den Bahnen all jener Teilchen beschrieben wird, welche beim Eintritt in die Stufe ( $X=0$ ) auf demselben Strahle  $Y=0$  liegen. Es wurde nur der von den oszillierenden  $C_y$ -Komponen-

ten herrührende Anteil im Schrägbild aufgetragen. Deutlich ist die starke Unterströmung und die Phasenverschiebung im Vergleich zu den Verhältnissen in der Kanalmitte ( $Z = \pi l/l_u$ ) ersichtlich. Für den Ansatz  $\beta$ ) gälte ein prinzipiell ähnliches Bild mit schwächerer Unterströmung.

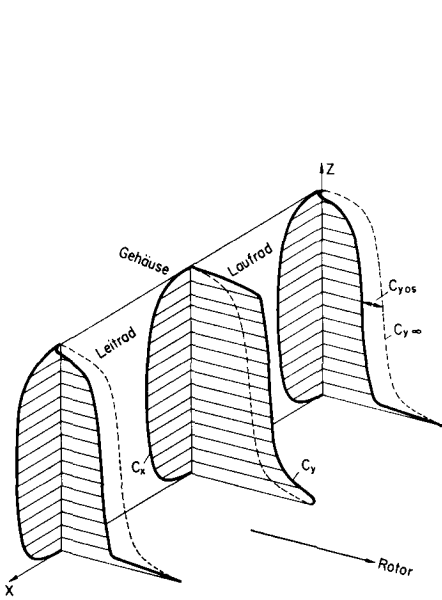


Abb. 13a Schematische Darstellung der Geschwindigkeitsprofile zwischen den Schaufelreihen einer mittleren Stufe ohne Deckbänder (ausgebildete, gleichbleibende Kanalströmung).

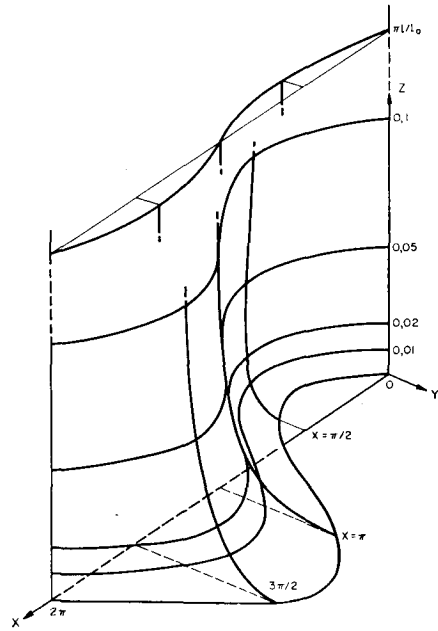


Abb. 13b. Stromfläche für längs  $Z$  konstante Feldkraft (nur oszillierender Anteil der Umfangsgeschwindigkeit berücksichtigt).

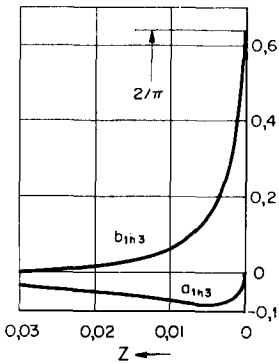


Abb. 14a. Zusatz 1. Ordnung zu  $C_y$  bei abschnittsweise querbewegter Seitenwand.

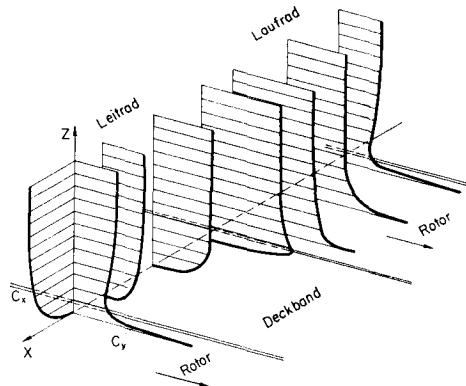


Abb. 14b. Die Ausbildung der Umfangsgeschwindigkeit  $C_y$  an der Nabe in einer mittleren Stufe, wenn die Schaufeln mit Deckbändern versehen sind.

Für eine sich entwickelnde Grenzschicht sind die Ergebnisse prinzipiell die gleichen (Kapitel IV).

Sind alle Schaufelenden mit Deckbändern versehen, so ist  $\alpha_0(Z) = \text{konstant} = 0,5$ . Dafür treten noch zusätzliche oszillierende Anteile hinzu, von denen jene erster Ordnung in Abb. 14a dargestellt sind. Der Wandeinfluß klingt bei den in Verdichtern üblichen hohen Reynoldszahlen äußerst rasch ab. Die Glieder höherer Ordnung ( $n=3, \dots$ ) sind an der Wand  $n$ -mal kleiner und klingen noch schneller ab. Abb. 14b zeigt schematisch die Geschwindigkeitskomponente  $C_y$  mit den scharfen Umlenkungen in Wandnähe.

In Abb. 15 sind für die über der Kanalhöhe konstante Feldkraft (Fall  $\alpha$ ) noch Varianten gezeigt, die gegenüber dem Basisfalle je die folgenden Abweichungen aufweisen:

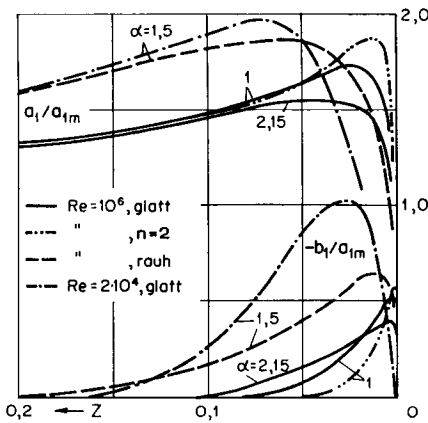


Abb. 15a. Oszillierender Anteil an  $C_y$  für verschiedene Varianten.

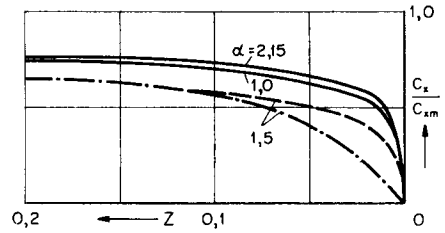


Abb. 15b. Verlauf von  $C_x$  für die verschiedenen Varianten.

1.  $\alpha = 2,15$  statt  $1,0$ . ( $c_f^+ = 2,2 \cdot 10^{-3}$ ).

Der schärfere Anstieg der Turbulenz an der Wand verringert die Unterströmung, vergrößert aber die Gradienten in Wandnähe. Der Wert für  $\alpha$  wurde so groß gewählt, daß die Austauschgröße im Strömungsinne gleich ist wie bei den Varianten 2 und 3.

2.  $c_{xm} l/\nu = 2 \cdot 10^4$  statt  $1 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 1,5$  statt  $1,0$ . ( $c_f^+ = 4,6 \cdot 10^{-3}$ ).

Der Einfluß der Wand erstreckt sich weiter ins Innere; die Gradienten in Wandnähe sind geringer.

3. Rauhe statt glatte Wand,  $\alpha = 1,5$  statt  $1,0$ .

( $c_f^+ = 4,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_s/l = 2,4 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_w/A_\mu = 2,3$ ).

Die Rauigkeit wurde so groß genommen, daß  $c_f^+$  und damit der Geschwindigkeitsverlauf  $C_x(Z)$  im wandfernen Bereich gleich sind wie bei der Variante 2. Wegen der höheren Reynoldszahl aber sind die Gradienten an

der Wand größer. Gegenüber dem Basisfalle erstreckt sich der Wandeinfluß weiter ins Innere, da der Anstieg von  $A$  relativ zum Werte  $A_w$  an der Wand schwächer ist, denn  $A_w$  enthält jetzt auch einen turbulenten Anteil.

4.  $n = 2$  statt 1, d. h.  $\Phi_y = \varphi_1 \sin 2X$ . ( $c_f = 2,2 \cdot 10^{-3}$ ).

Wir haben den Fall schmalerer Schaufeln, indem jetzt auf den axialen Abschnitt  $l_a$  zwei Stufen entfallen. Der Einfluß der Wandreibungskräfte macht sich um so weniger weit bemerkbar, je schnellere Oszillationen das Kraftfeld verursacht; da die für eine gegebene Geschwindigkeitsänderung erforderliche Kraftamplitude größer ist, wird die Unterströmung stärker.

Die Werte  $\epsilon_w$  der Phasenverschiebung an der Wand sind in Zahlentafel I für die verschiedenen Varianten aufgeführt.

Zahlentafel I

Variante			$-\epsilon_w$
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1$	$34,6^\circ$
Basis	$\varphi_1 \sim C_x$	$\alpha = 1$	$29,2^\circ$
Basis	$\varphi_1 \sim C_x^2$	$\alpha = 1$	$22,9^\circ$
Turbulenz erhöht	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	$30,4^\circ$
Turbulenz erhöht	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 2,15$	$24,5^\circ$
$Re \ 50 \times$ kleiner	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	$55,6^\circ$
Rauhe Wand	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	$32,6^\circ$
Halbe Schaufelbreite	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1$	$40,4^\circ$
Halbe Schaufelbreite	$\varphi_1 \sim C_x^2$	$\alpha = 1$	$33,5^\circ$

Je stärker der Abfall der Feldkraft in Wandnähe, je höher die Reynoldzahl und je breiter die Schaufeln, desto kleiner die Phasenverschiebung.

Mit dem nun bekannten Geschwindigkeitsfeld kann auch die Dissipation (d. h. der Wandreibungsverlust) bestimmt werden. Wir verweisen diesbezüglich auf Abschnitt IV. 6.

## 6. Der Einfluß einer periodisch veränderlichen Axialgeschwindigkeit

### a) Ansatz für die Axialgeschwindigkeit

Unsere bisherige Lösung fußte auf der Voraussetzung  $\partial C_x / \partial X = 0$ , womit auch  $C_z = 0$ . Nun treten aber im Verdichter sehr oft — zur Erfüllung des radialen Gleichgewichtes — radiale Verschiebungen auf, die in einer mittleren Stufe periodischen Charakter haben. Wir denken uns, daß in unserer abge-

wickelten Stufe durch passende Schaufelverwindung solche Oszillationen von  $C_x$  und damit nach der Kontinuitätsbedingung auch von  $C_z$  erzwungen werden:

$$\begin{aligned} C_x &\equiv \hat{C}_x(Z) + 2p(Z) \cos X, \\ C_z &= - \int_0^Z \frac{\partial \hat{C}_x}{\partial X} dZ \equiv 2q(Z) \sin X. \end{aligned} \quad (37)$$

Der längs  $X$  gleichbleibende Anteil  $\hat{C}_x(Z)$  entspricht der bisher verwendeten ausgebildeten Kanalströmung;  $p$  und  $q$  sind die halben Amplituden der veränderlichen Anteile. Wir setzen

$$2p(Z) = -\gamma \left(1 - \frac{l_a}{\pi l} Z\right) \hat{C}_x(Z), \quad (38)$$

d. h. die Amplitude der prozentualen Wechselkomponente sei linear über der Kanalhöhe verteilt und in der Mitte Null (vergleiche Abb. 16), was nach der

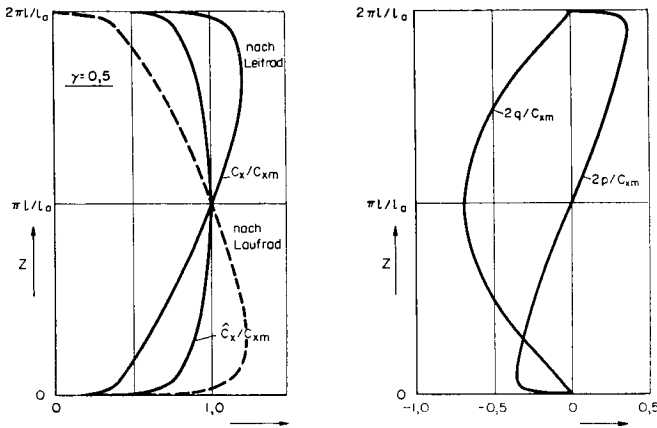


Abb. 16. Ansatz für die oszillierenden Geschwindigkeiten  $C_x$  und  $C_z$ .

reibungsfreien Lösung für die Sekundärströmung von *Seippel* [21] für kurze Schaufeln sehr gut zutrifft;  $\gamma$ , der Höchstbetrag der axialen Wechselkomponente an der Wand, ist dabei kaum größer als 0,2.

$C_z(Z)$ , resp.  $q(Z)$  folgt jetzt durch Integration

$$2q(Z) = -\gamma \int_0^Z \hat{C}_x(Z) \left[1 - \frac{l_a}{\pi l} Z\right] dZ. \quad (39)$$

$A_{yz}$  und  $A_{yx}$  seien hingegen immer noch konstant längs  $X$  und entsprechen den Gl. (21) bis (26).



b) Bestimmung von  $C_y$

Wir lassen in dieser Strömung unser Umfangs-Kraftfeld  $\Phi_y$  wie vorher wirken und vergleichen den Verlauf von  $C_y$  mit den früheren Ergebnissen.

Ausgangsgleichung ist nun Gl. (II. 19); im weiteren übernehmen wir den Ansatz (2) für  $C_y$ . Um die größtmöglichen Änderungen in  $C_y$  zu erhalten, verwenden wir für die Feldkraft den Verlauf nach Gl. (31), d. h.  $\varphi_1 = \text{konstant}$ . Setzen wir alles in Gl. (II. 19) ein, so folgt durch Koeffizientenvergleich

$$n = 0: \quad 0 = \psi_0 + (A_{yz} a_0)' + \underbrace{(-p b_1 - q b_1')}_{\Delta \psi_{01}}, \quad (40)$$

$$n = 1: \quad \begin{cases} -a_1 \hat{C}_x = \varphi_1 + (A_{yz} b_1)' - A_{yx} b_1 + \underbrace{2 p a_2 + q a_2'}_{\Delta \varphi_{12}} + \underbrace{(-2 q a_0')}_{\Delta \varphi_{10}}, \\ b_1 \hat{C}_x = (A_{yz} a_1)' - A_{yx} a_1 + \underbrace{(-2 p b_2 - q b_2')}_{\Delta \psi_{12}}, \end{cases} \quad (41)$$

$$n = 2: \quad \begin{cases} -2 a_2 \hat{C}_x = (A_{yz} b_2)' - 4 A_{yx} b_2 + \underbrace{p a_1 - q a_1'}_{\Delta \varphi_{21}} + \underbrace{3 p a_3 + q a_3'}_{\Delta \varphi_{23}}, \\ 2 b_2 \hat{C}_x = (A_{yz} a_2)' - 4 A_{yx} a_2 + \underbrace{(-p b_1 + q b_1')}_{\Delta \psi_{21}} + \underbrace{(-3 p b_3 - q b_3')}_{\Delta \psi_{23}}, \end{cases} \quad (42)$$

⋮

Vergleichen wir mit (4), so stellen wir fest, daß nun die einzelnen Ordnungen nicht mehr separiert sind;  $a_1$  wird durch  $a_0$ ,  $a_2$  und  $b_2$  beeinflusst etc., d. h. je die nächstniedere und nächsthöhere Ordnung wirken ein. Diese Glieder können auch als Zusatzkräfte aufgefaßt werden, weshalb wir sie  $\Delta \varphi_{nk}$ ,  $\Delta \psi_{nk}$  nennen, wo  $_n$  die beeinflusste,  $_k$  die beeinflussende Ordnung bezeichnet. Das Glied  $\Delta \varphi_{10} = -2 q a_0'$  in Gl. (41) z. B. bringt zum Ausdruck, daß die Quergeschwindigkeit  $C_z$  der Schaufelkraft entgegenwirkt; im Laufrade sucht letztere die Absolutgeschwindigkeit zu vergrößern, während  $C_z$  gegen die Nabe gerichtet ist und langsames, an der Gehäusewand gebremstes Material weiter innen gelegenen Stufenelementen zuführt.

Da  $p$  und  $q$  kleine Größen sind, genügt es zur Bestimmung von  $a_1$  und  $b_1$  durchaus, wenn bei der Berechnung von  $a_2$  und  $b_2$  die Größen mit  $n \geq 3$  vernachlässigt werden. Dann stellen die Gl. (40) bis (42) ein abgeschlossenes System von 5 Differentialgleichungen für die 5 Unbekannten  $a_0$  bis  $b_2$  dar.

Lösungsvorgehen:  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  und  $\hat{b}_1$  ohne Berücksichtigung der oszillierenden Axialgeschwindigkeit bestimmen (Lösungen von Abschnitt 2). Diese Werte in (42) einsetzen und  $a_2$  und  $b_2$  berechnen, ebenso aus (40) ein verbessertes  $a_0 = \hat{a}_0 + \Delta a_0$ . Mit den nun bekannten Werten  $\Delta \varphi_{10}$ ,  $\Delta \varphi_{12}$ ,  $\Delta \psi_{12}$  folgen aus (41) verbesserte  $a_1$  und  $b_1$ . Die Konvergenz ist sehr rasch, d. h. ein Iterationsschritt genügt.

c) Lösung für ein Beispiel

In Abb. 18 sind die Resultate für eine Stufe mit  $C_{xm}=0,5$ ;  $r=0,5$ ;  $\lambda_m = 2 \Delta C_{ym} = 0,6$ ;  $l/l_a = 1$  aufgetragen. Vorausgesetzt ist  $c_{xm} l/\nu = 10^6$  und  $\alpha = 1$  (gewöhnliche Kanalturbulenz);  $\varphi_1(Z)$  ist konstant. Für  $\gamma$  wählen wir den sehr großen Wert 0,25, d. h. die Amplitude der Schwankung von  $C_x$  beträgt an den Wänden 25 %.

Es seien keine Deckbänder vorhanden. Bezüglich des „stationären“ Anteil  $\hat{a}_0(Z)$  der Umfangskomponente der Geschwindigkeit (ohne Berücksichtigung der veränderlichen Axialgeschwindigkeit) betrachten wir zwei Fälle, vergleiche Abb. 17: Bei der Variante I entspreche  $\hat{a}_0(Z)$  der gewöhnlichen Scherströmung ohne Feldkräfte (d. h.  $\psi_0 = 0$ ) zwischen der festen Gehäusewand und der querbewegten Rotorwand (Couette-Strömung). Bei der Variante II sei in der äußeren Kanalhälfte der Verlauf von  $\hat{a}_0(Z)$  ähnlich demjenigen von  $\hat{C}_x(Z)$ ;

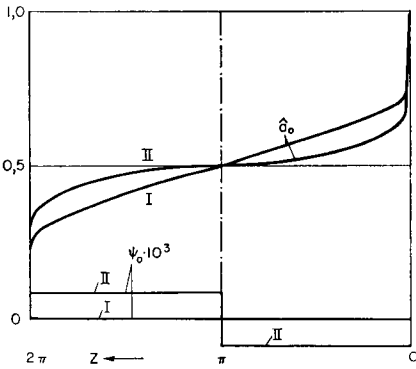


Abb. 17a. Zwei Varianten für die „stationäre“ Umfangskomponente  $\hat{a}_0$  der Geschwindigkeit ohne Berücksichtigung der oszillierenden Axialgeschwindigkeit.

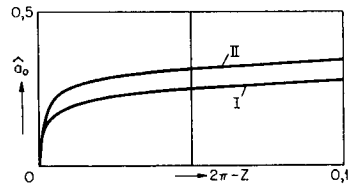


Abb. 17b. Verlauf von  $\hat{a}_0$  in Wandnähe (Gehäusewand).

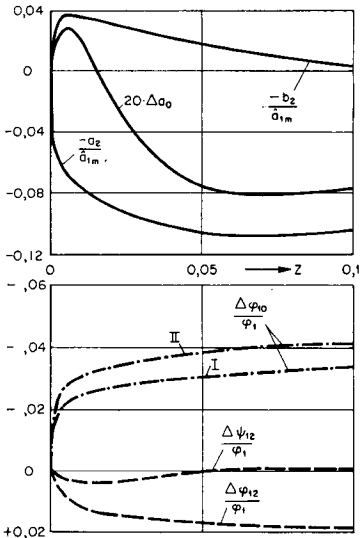


Abb. 18a. Änderungen in der Lösung für  $C_y$  wegen der oszillierenden Axialgeschwindigkeit. Verhältnisse in Wandnähe.

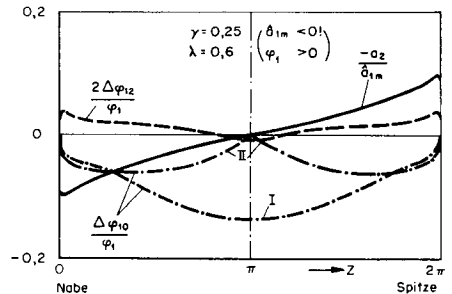


Abb. 18b. Verhältnisse über der ganzen Kanalhöhe.

die mittlere *absolute* Durchströmgeschwindigkeit, gebildet aus den Komponenten  $\hat{a}_0$  und  $\hat{C}_x$ , ist somit unterströmungsfrei (Geschwindigkeiten in beliebigen Höhen  $Z$  parallel); in der inneren Kanalhälfte sei die mittlere *relative* Durchströmgeschwindigkeit unterströmungsfrei, d. h.  $[1 - \hat{a}_0(Z)]$  sei proportional  $\hat{C}_x(Z)$ . Damit sind die Verhältnisse (vor der Berücksichtigung der veränderlichen Axialgeschwindigkeit) relativ zur inneren bewegten und zur äußeren ruhenden Wand in den entsprechenden Kanalhälften wieder die gleichen. Der Verlauf II bedingt aber eine, allerdings sehr kleine, „stationäre“ Feldkraftkomponente  $\psi_0$ , die in Abb. 17 ebenfalls eingetragen ist.

Abb. 18a zeigt die Verhältnisse in Wandnähe, Abb. 18b gibt einen Überblick über den ganzen Kanal. Die Geschwindigkeitskomponente 2. Ordnung  $a_2$  ist antisymmetrisch zur Kanalmitte mit einem Höchstbetrag von 10 % desjenigen der ersten Ordnung; bei anderem  $\gamma$  wäre sie proportional  $\gamma$  umzurechnen. Die Änderung an  $a_0$  ist proportional  $\gamma\lambda_m$ , verläuft ebenfalls antisymmetrisch zur Kanalmitte und erreicht im vorliegenden Falle den Betrag 0,005 nicht ganz.  $\Delta\varphi_{10}/\varphi_1$  ist proportional  $\gamma/\lambda_m$ ,  $\Delta\varphi_{12}/\varphi_1$  und  $\Delta\psi_{12}/\varphi_1$  sind proportional  $\gamma^2$ ; der Betrag der aus Gl. (41) bestimmbaren prozentualen Änderung von  $a_1$  ist gleich oder kleiner als der Betrag von  $(\Delta\varphi_{10} + \Delta\varphi_{12})/\varphi_1$ .

Im Hinblick auf den großen für  $\gamma$  eingesetzten Wert können wir sagen, daß der Einfluß einer periodisch variierenden Axialgeschwindigkeit auf  $C_y$  gering ist; die Setzung  $\partial C_x/\partial X = 0$  in den früheren Abschnitten war somit keine unzulässige Vereinfachung.

Eine ähnliche Erscheinung wird durch die Schaufeldicke bewirkt, welche wegen der Platzversperrung durch die Schaufeln in jedem Schaufelkranze eine — in unserer Untersuchung vernachlässigte — Steigerung und Wiederabsenkung der Axialgeschwindigkeit hervorruft.  $C_x$  vollführt längs  $X$  Oszillationen zweiter und höherer Ordnung:

$$C_x = \hat{C}_x - \gamma \hat{C}_x \cos 2X + \dots$$

während  $C_z$  Null bleibt, da der sich ändernde Durchströmquerschnitt die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung sichert; bei Verdichtern ist  $\gamma$  kleiner als 0,1. Die Auswirkungen auf die Lösung für  $C_y$  bei gegebenem Kraftfeld  $\Phi_y$  lassen sich nach derselben Methode wie oben bestimmen; sie sind ebenfalls sehr gering.

## KAPITEL IV

### Lösung für getrennte, sich entwickelnde Grenzschichten

#### I. Grundlegender Ansatz

Im Kapitel III wurde die Geschwindigkeitskomponente  $C_y$  in einer mittleren Repetierstufe mit ausgebildeter, gleichbleibender Kanalströmung ermittelt. Wir wollen nun die Verhältnisse in einer Stufe am Eintritt des Verdichters betrachten, wo zwei durch ein ungestörtes Kerngebiet getrennte, längs der Stufe wachsende Wandgrenzschichten vorhanden seien. Wir werden sehen, daß sich der Strömungscharakter schon nach einer Stufe demjenigen der ausgebildeten Kanalströmung genähert hat, daß der Wandreibungsverlust in den beiden Fällen nur wenig verschieden ist und daß der Einflußbereich der Wandreibung auf „nichtstationäre“<sup>5)</sup> Glieder, bezogen auf die Verdrängungsdicke, zwar wesentlich größer ist als bei der ausgebildeten Kanalströmung, aber von der gleichen Größenordnung wie im analogen laminaren Falle, der von *Mager* [17] sowie von *Hansen* und *Herzig* [22] behandelt wurde.

Die Grundgleichungen sind Gl. (II. 18 bis 21), wobei Gl. (II. 19) von den andern Gleichungen unter den für die Austauschgröße  $A$  gemachten Voraussetzungen separiert werden kann. Sie läßt sich auch hier auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen, wenn für die durch Gl. (II. 18, 20, 21) bestimmten Geschwindigkeitskomponenten  $C_x$  und  $C_z$  ähnliche Lösungen angegeben werden können.

Da wir uns auf dünne Grenzschichten beschränken, machen wir die üblichen Vernachlässigungen der Grenzschichttheorie, d. h. wir setzen voraus, daß das Druckfeld in der Grenzschicht identisch sei demjenigen in der Kernströmung. (Die Kernströmung bezeichnen wir mit dem Index  $\delta$ .) Für diese seien die Verhältnisse über der Schaufelhöhe konstant, insbesondere ist also das Kraftfeld über der ganzen Grenzschichtdicke dasselbe (entspricht Fall  $\alpha$ ) in Abschnitt II. 4). Die Voraussetzung (I. 14) (Repetierstufe) ist hingegen nicht mehr nötig.

Mit den weiteren Voraussetzungen  $\partial/\partial X \ll \partial/\partial Z$ ,  $C_z \ll C_x$  gehen (II. 18, 20, 21) in die üblichen Gleichungen der ebenen Plattengrenzschicht über. Sie lassen im vollturbulenten Bereiche nach *Rotta* [11] ähnliche Lösungen zu mit der Ähnlichkeitsvariablen

$$\xi \equiv \frac{z}{x} = \frac{Z}{X}. \quad (1)$$

---

<sup>5)</sup> „Stationär“ bedeutet hier: Geschwindigkeitsanteile, die nicht von der Tangentialkraft abhängen; „nichtstationär“ bedeutet: Durch umlenkende Feldkräfte erzeugte Geschwindigkeitskomponenten.

Die Geschwindigkeitsprofile  $C_x(Z)$  und  $C_z(Z)$  ändern sich dabei längs des Strömungsweges nur um einen Maßstabsfaktor:

$$C_x(X, Z) = C_{x\delta}(X) C(\xi), \quad (2)$$

$$C_z(X, Z) = C_{x\delta}(X) D(\xi), \quad (3)$$

mit

$$D(\xi) = \xi C(\xi) - (1+m) \int_0^\xi C(\xi) d\xi,$$

wobei vorausgesetzt werden muß, daß die Geschwindigkeit im Kern nach einem Potenzgesetz verläuft

$$C_{x\delta}(X) \sim X^m \quad (4)$$

mit  $m < 0$  für verzögerte Strömung. Der Exponent  $m$  bestimmt sich aus dem Verlaufe der Kanalhöhe längs der axialen Durchtrittsrichtung unter Berücksichtigung der Verdrängungswirkung der Grenzschicht. Die Grenzschichtdicke  $Z_\delta$ , die Verdrängungsdicke  $Z_1$  für eine Wand etc. sind also proportional  $X$ , siehe auch Abb. 22b:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \xi_1 X, \\ Z_\delta &= \xi_\delta X, \end{aligned} \quad (5)$$

denn  $\xi_1$  und  $\xi_\delta$  sind konstant.

Damit sich diese ähnlichen Lösungen einstellen, muß die Turbulenzstruktur einen gewissen Gleichgewichtszustand erreicht haben; die Austauschgröße darf sich längs  $X$  ebenfalls nur um einen Maßstabsfaktor ändern:

$$A_{xz} = X C_{x\delta}(X) E_{xz}(\xi), \quad (6)$$

wo  $E_{xz}(\xi)$  die Variation der Austauschgröße quer durch die Grenzschicht beschreibt. Während diese Bedingung bezüglich der turbulenten Austauschgröße durchaus denkbar ist, gilt sie in der laminaren Endschicht sicher nicht, denn die Viskosität müßte dort proportional  $X^{1+m}$  variieren, was physikalisch nur möglich wäre, wenn  $m = -1$  (Ablösung wegen starker Verzögerung!), oder wenn die Rauigkeit so groß wäre, daß der Einflußbereich der Zähigkeit überhaupt verschwände. Andernfalls können oft doch wenigstens stückweise, d. h. längs eines gewissen Wegstückes  $\Delta X$ , solche ähnliche Lösungen angesetzt werden, wobei man bezüglich der Viskosität einen gewissen Fehler begeht, was aber angesichts unseres groben Ansatzes für die Austauschgröße verantwortet werden kann. Wählt man die Verhältnisse so, daß die laminare Endschicht wenigstens im Mittel (d. h. in der Mitte des betrachteten Wegstückes) korrekt ist, so besteht der Fehler gerade darin, daß man den örtlichen Schubspannungskoeffizienten  $c_f$  konstant setzt, d. h. daß man die  $Re$ -Abhängigkeit von  $c_f$  vernachlässigt.

Wir transformieren nun auch Gl. (II. 19) auf die Variablen  $\xi$  und  $X$ , wobei nach (1) gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_Z &= \left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)_\xi - \frac{\xi}{X} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_X, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_X &= \frac{1}{X} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)_X, \end{aligned} \quad (7)$$

wenn  $f(Z, X) = g(\xi, X)$ .

Das Glied 
$$\frac{\partial}{\partial X} \left( A_{yx} \frac{\partial C_y}{\partial X} \right)$$

lassen wir weg, da es schon bei der ausgebildeten Kanalströmung von sehr geringem Einfluß war; hier bei getrennten Grenzschichten gilt erst recht  $\partial/\partial X \ll \partial/\partial Z$ .

Unter der Voraussetzung, daß für  $A_{yz}$  eine der Gl. (6) analoge Beziehung gilt, erhalten wir

$$C(\xi) \left[ \frac{\partial C_y}{\partial X} - \frac{\xi}{X} \frac{\partial C_y}{\partial \xi} \right] + D(\xi) \frac{1}{X} \frac{\partial C_y}{\partial \xi} = \frac{\Phi_y(X)}{C_{x\delta}(X)} + \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ E_{yz}(\xi) \frac{\partial C_y}{\partial \xi} \right]. \quad (8)$$

Diese Gleichung kann durch den Ansatz

$$C_y = \sum_{\mu=0}^{\infty} X^\mu Q_\mu(\xi) \quad (9)$$

separiert werden, wenn auch für das inhomogene Glied  $\Phi_y/C_{x\delta}$  in (8) ein Potenzansatz gemacht wird:

$$\frac{\Phi_y}{C_{x\delta}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i. \quad (10)$$

Für die Kernströmung gilt dabei

$$C_{y\delta} = C_{y\delta e} + \int_{X_e}^X \frac{\Phi_y}{C_{x\delta}} dX \quad (11)$$

( $e$  bedeutet Eintritt in das betrachtete Wegstück  $\Delta X$ ).

Mit (9) und (10) folgt aus (8) durch Koeffizientenvergleich

$$\mu = i + 1, \quad i \geq 0 \quad (12)$$

sowie die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Ausgangsfunktionen  $Q_\mu(\xi)$ , wobei ' die Ableitung nach  $\xi$  bezeichnet,

$$C[\mu Q_\mu - \xi Q'_\mu] + D Q'_\mu = a_{\mu-1} + (E_{yz} Q'_\mu)'. \quad (13)$$

Das erste Glied in (9), welches nach (10) und (12) unabhängig von der Feldkraft ist,

$$C_{y0} = Q_0(\xi)$$

nennen wir den „stationären“ Anteil<sup>6)</sup> von  $C_y$ , der innerhalb der Grenzschicht beim Fortschreiten längs  $X$  auf Linien  $\xi = \text{konstant}$  gleich bleibt, sich für ein bestimmtes  $Z$  also nach Maßgabe der Grenzschichtentwicklung ändert.

Auch für laminare Grenzschichten führt derselbe Ansatz (9) zum Ziel, obwohl dort die Ähnlichkeitsvariable anders definiert ist, siehe [22] und [17].

## 2. Bestimmung von $C_y$

### a) Randbedingungen

Gl. (8) ist parabolisch. Wir können deshalb die Anfangsbedingungen beim Eintritt in die Stufe vorschreiben:

$$X = X_e, \quad C_y = C_{ye}(\xi) \quad (14)$$

sowie zwei Randbedingungen formulieren:

An einer *festen* Wand (Spitze):

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad Q_\mu &= 0, & \mu &= 0, 1, \dots \\ \xi = \xi_\delta: \quad Q_0 &= C_{y0\delta}; \quad Q_\mu = \frac{a_{\mu-1}}{\mu}, & \mu &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

An einer *bewegten* Wand (Nabe):

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad Q_0 &= 1, \quad Q_\mu = 0, & \mu &= 1, 2, \dots \\ \xi = \xi_\delta: \quad Q_0 &= C_{y0\delta}, \quad Q_\mu = \frac{a_{\mu-1}}{\mu}, & \mu &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Die Bedingungen (15), resp. (16) werden jeweils bei der Bestimmung der Ausgangsfunktionen  $Q_\mu$  aus Gl. (13) erfüllt. Mit diesen  $Q_\mu$  erhält man nach Gl. (9) eine Lösung für  $C_y$ , die den Randbedingungen und dem Kraftfeld (10) entspricht, die aber i. a. die Eintrittsbedingung (14) nicht erfüllt. Es müssen daher noch weitere Lösungen der homogenen Gl. (8) ( $\Phi_y = 0$ ) mit den Randbedingungen

$$Q_{\mu h}(0) = Q_{\mu h}(\xi_\delta) = 0$$

überlagert werden, so daß die Summe Gl. (14) erfüllt. Die Werte  $\mu$  für diese homogenen Lösungen ergeben sich aus einem Eigenwertproblem, das aber bei den stark variierenden Koeffizienten von (13) sehr mühsam zu lösen wäre.

Wir setzen deshalb

$$X_e = 0, \quad (17)$$

<sup>6)</sup> Vergleiche die Fußnote 5 auf Seite 60.

d. h. die Wirkung von  $\Phi_y$  beginnt im Ursprunge der Grenzschicht. Das Geschwindigkeitsprofil in der jetzt unendlich dünnen Eintrittsgrenzschicht besteht nur aus dem „stationären“ Anteil

$$C_{ye}(\xi) = \frac{Q_0(\xi)}{Q_{0\delta}} C_{y\delta e}. \quad (17a)$$

Dasselbe gilt auch an einer bewegten Wand, wie *Mager* [17] in seiner Arbeit über laminare Grenzschichten feststellt, indem sich an einer quer zur Außenströmung bewegten Platte die Quergrenzschicht um so schneller ausbildet, je dünner die anfängliche Grenzschicht; ist sie im Extremfalle unendlich dünn, so herrscht schon von Anbeginn der ausgebildete „stationäre“ Zustand.

Im Anhang wird der andere Extremfall untersucht, daß sich nämlich bei einer turbulenten Plattengrenzschicht *konstanter Dicke* die Wand von einer bestimmten Stelle  $X_0$  an quer zur Außenströmung bewegt, vergleiche Abb. 35. Die Lösung wird dann mit der analogen laminaren Lösung verglichen.

Mit der Festlegung (17) ist die Hinzunahme zusätzlicher homogener Lösungen nicht mehr nötig; die  $Q_\mu$ , welche (15), resp. (16) befriedigen, liefern eingesetzt in (9) Lösungen, welche die Eintrittsbedingung (17a) identisch erfüllen.

#### b) Ermittlung der Ausgangsfunktionen $Q_\mu$

Das „stationäre“ Glied  $Q_0$  läßt sich durch bloße Integration bestimmen. An einer *festen Wand* gilt

$$\frac{Q_0(\xi)}{C_{y0\delta}} = \frac{\int_0^\xi \left[ \frac{1}{E_{yz}} \exp \left( \int_0^\xi \frac{S}{E_{yz}} d\xi \right) \right] d\xi}{\int_0^{\xi\delta} \left[ \frac{1}{E_{yz}} \exp \left( \int_0^\xi \frac{S}{E_{yz}} d\xi \right) \right] d\xi} \equiv \left( \frac{Q_0(\xi)}{Q_{0\delta}} \right)_f \quad (18)$$

mit 
$$S(\xi) \equiv D(\xi) - \xi C(\xi), \quad (18a)$$

während an einer *bewegten Wand*

$$\frac{1 - Q_0(\xi)}{1 - C_{y0\delta}} = \frac{W_{y0}}{W_{y0\delta}} = \left( \frac{Q_0(\xi)}{Q_{0\delta}} \right)_f, \quad (18b)$$

d. h. 
$$\left( \frac{Q_0(\xi)}{Q_{0\delta}} \right)_b = \frac{1 - (1 - C_{y0\delta})(Q_0/Q_{0\delta})_f}{C_{y0\delta}}.$$

$W_y = 1 - C_y$  stellt die Relativgeschwindigkeit gegenüber der bewegten Wand dar.

Für  $\mu \neq 0$  werden (von der Wand ausgehend) durch schrittweise Integration eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (13) mit



$$Q_\mu(0) = Q'_\mu(0) = 0$$

und eine Lösung der homogenen Gl. (13) mit

$$Q_{\mu h}(0) = 0, \quad Q'_{\mu h} = 1$$

berechnet und so superponiert, daß die Randbedingung in  $\xi_\delta$  erfüllt ist.

### 3. Ansätze für die Austauschgröße und die Geschwindigkeiten $C_x$ und $C_z$

Wir setzen wie in Kapitel III

$$A_{yz} = A_{xz}, \quad \text{d. h.} \quad E_{yz} = E_{xz} \quad (19)$$

und verwenden die Ansätze (III. 24a, 25b) so, daß in der *Mitte* des betrachteten Wegstückes  $\Delta X$  (d. h. ungefähr beim Austritt aus dem Laufrade, da wir die Lösung für eine Stufe betrachten) die laminare Endschicht richtig erfaßt wird. Gegenüber den Verhältnissen an einer mit  $C_{x\delta}$  überströmten gewöhnlichen Platte (gekennzeichnet durch den Index +) wird die turbulente Austauschgröße wieder um einen Faktor  $\alpha$  erhöht.

Im Innern der Grenzschicht ist die Schubspannungsverteilung nicht bekannt; wir verwenden deshalb für die Geschwindigkeitsverteilung  $C_x(Z)$  in diesem Mittelschnitte die halbempirischen Ansätze von *Rotta* [11], die vom Druckgradienten in der Kernströmung, also von  $m$  abhängen und entsprechend  $\alpha$  zu modifizieren sind, indem im Innern der Grenzschicht die Differenz  $[C_{x\delta} - C_x(Z/Z_\delta)]$ , in Wandnähe der Ausdruck  $C_x(\eta)$  um den Faktor  $\alpha^{-h/2}$  zu verkleinern ist. Die Zusammenschließbarkeit der wandnahen und der strömungsinernen Lösung gewährleistet das  $c_j$ -Gesetz (hier repräsentiert durch  $h \approx 1/4,4$ ), das wir also bei der  $\alpha$ -Korrektur berücksichtigen.

Aus diesem für den Mittelschnitt korrekt dargestellten Geschwindigkeitsprofil kann die auch für andere  $X$  maßgebende Formfunktion  $C(\xi)$  sowie nach Gl. (3)  $C_z$ , resp.  $D(\xi)$  ermittelt werden, wobei dann die Veränderung von  $c_j$  längs  $X$  vernachlässigt wird, vergleiche Abschnitt 1.

### 4. Lösung für ein Zahlenbeispiel

#### a) Daten, Ausgangsfunktionen $Q_\mu$

Da für die turbulente ähnliche Grenzschicht mehr freie Parameter vorhanden sind als für die laminare, ist es hier nicht möglich, eine allgemeine Lösung zu geben. Wir beschränken uns deshalb auf ein Beispiel, dessen Daten im

Hinblick auf einen praktischen Fall folgendermaßen gewählt wurden ( $c''_{x\delta}$  ist die Geschwindigkeit des Kernes im Mittelschnitte  $X = \pi$ ):

glatte Wand,  $l/l_a = 1, \quad \alpha = 1,64, \quad m = -1/7,$   
 $\frac{c''_{x\delta} l}{\nu} = 5,4 \cdot 10^5, \quad \frac{c''_{x\delta} \delta_1''}{\nu} = 2360,$

woraus nach [11] mit  $H_{12} = 1,47, \quad c\tau = 3,4 \cdot 10^{-3}:$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 8,75 \cdot 10^{-3}, \\ \xi_\delta &\approx 46 \cdot 10^{-3}, \quad \eta_\delta \approx 840, \\ Z_1'' &= 0,0275, \text{ d. h. 10mal kleiner als bei unserem Zahlenbeispiel für die ausgebildete Kanalströmung.} \end{aligned}$$

$m = -1/7$  entspricht einer verzögerten Strömung, wie sie z. B. in einer Versuchsmaschine, die für inkompressibles Verhalten ausgelegt ist, bei erhöhter Mach-Zahl auftritt. (Die Verdrängungswirkung der Grenzschicht wird überkompensiert.) Die in  $X=0$  vorhandene Singularität ist sehr schwach und deshalb ungefährlich. Der Einfluß von  $m$  auf die Umfangskomponente  $C_y$  ist überhaupt nur quantitativ, indem die Formfunktion  $C(\xi)$  um so völliger ist, je größer  $m$ .  $m$  beeinflusst auch  $D(\xi)$  gemäß Gl. (3) in geringem Maße, aber der Einfluß von  $D$  auf die Lösung der Gl. (13) ist selbst klein. Qualitativ geändert werden nur die Stromlinien in der unmittelbaren Umgebung von  $X=0$ , welche uns aber hier nicht speziell interessieren.

Die Ausgangsfunktionen  $Q_\mu(\xi)/Q_{\mu\delta}$  für  $\mu=0,2,4,6,8$  finden sich Abb. 19.

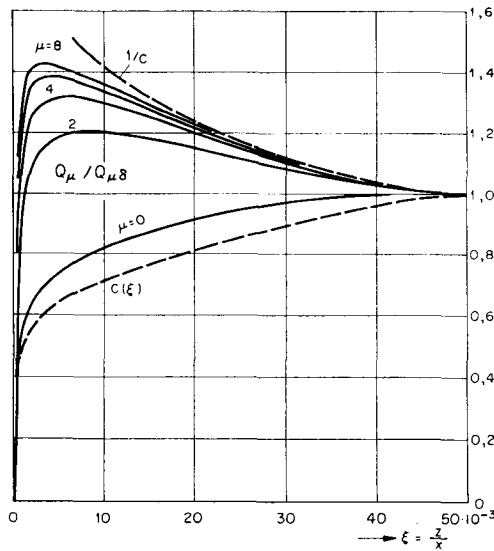


Abb. 19. Die Ausgangsfunktionen  $Q_\mu$ .

Der dargestellte Verlauf für  $\mu = 0$  gilt für die feste Wand; die „stationäre“ Lösung für die bewegte Wand läßt sich daraus nach Gl. (18b) bestimmen: die „nichtstationären“ Lösungen ( $\mu \neq 0$ ) sind an einer festen und an einer bewegten Wand gleich. Wegen  $m \neq 0$  sind  $C(\xi)$  und  $(Q_0(\xi)/Q_{0\delta})_j$  verschieden.

b) Entwicklung der Unterströmung in einer Stufe

Wir wollen die erste Stufe eines Verdichters betrachten und die Entwicklung der Unterströmung vergleichen mit der gleichbleibenden, ausgebildeten Kanalströmung. Durch einen Vorleitapparat habe die Zuströmung schon den nötigen Eintrittsdrall erhalten; der Fall ohne Eintrittsdrall wäre mit unserer Lösung ebenfalls darstellbar, doch wollen wir des Vergleiches wegen eine Stufe mit  $C_{y\delta 2} = C_{y\delta e}$  voraussetzen. Da die Wandgrenzschicht erst beim eigentlichen Stufeneintritt beginnt (was z. B. durch Absaugung zu verwirklichen wäre), ist vom Vorleitkranz her keine Unterströmung vorhanden.

Die Feldkraft  $\Phi_y$  hat in einer Verdichterstufe oszillierenden Charakter. Da sie nach Gl. (10) durch ein Polynom dargestellt werden soll, ist ein ziemlich vielgliedriger Ansatz zu verwenden. Der bei der ausgebildeten Kanalströmung benützte sinusförmige Feldkraftverlauf kann z. B. durch die 7. Legendresche Kugelfunktion angenähert werden, welche die ungeraden Potenzen von 1 bis 7 enthält, siehe *Jahnke, Emde* [23]. Durch geringe Modifikation derselben (Verschieben der ersten Nullstelle unter Beibehaltung der zweiten) läßt sich das Verhältnis der Integralwerte über das Lauf- und Leitrad entsprechend den Umlenkungen festlegen, während die Stufenlänge  $2\pi$  und die Kraftamplitude durch affine Transformation eingestellt werden, siehe Abb. 20.

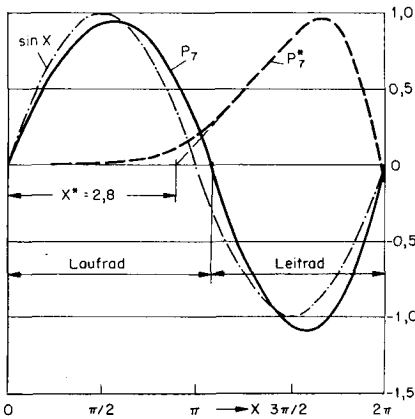


Abb. 20. Annäherung eines sinusförmigen Feldkraftverlaufes durch ein Polynom  $P_7$ .  
 ----- Laufrad mit verschobenem Eintritt.

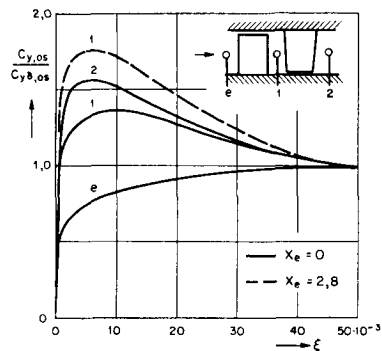


Abb. 21. Oszillierender Anteil an  $C_{y,os}$  für eine erste Stufe.

Durch Verschiebung der ganzen Funktion um zwei Nullstellen erhalte man den Feldkraftverlauf für zwei aufeinanderfolgende Stufen; da die  $Q_\mu$  mit einer Bürorechenmaschine berechnet wurden (3 Stellen), konnten wir davon keinen Gebrauch machen, denn die  $Q_\mu$  müßten (es treten kleine Differenzen großer Zahlen auf) wesentlich genauer vorliegen (5 bis 6 Stellen); die maschinell ermittelten Werte von [22] für die laminare Grenzschicht (eine Stelle mehr) würden ebenfalls nicht ausreichen.

Abb. 21 zeigt die Ergebnisse für eine erste Stufe. Da wir mit der ausgebildeten Kanalströmung (Abb. 12) vergleichen wollen, bilden wir eine der dortigen oszillierenden Lösung entsprechende Größe  $C_{y os}$ , indem wir von  $C_y$  die der mittleren Umfangskomponente  $C_{y \infty \delta}$  entsprechende „stationäre“ Lösung subtrahieren

$$C_{y os} = C_y - \frac{Q_0(\xi)}{Q_{0\delta}} C_{y \infty \delta}. \quad (20)$$

Bezüglich  $C_{y os}$  liefern die bewegte und die feste Seitenwand das gleiche, denn  $C_y$  unterscheidet sich nur um Vielfache von  $Q_0$ . Ebenso spielt die absolute Größe der Umlenkung im Kern keine Rolle, sofern  $C_{y \delta e} = C_{y \delta 2}$ .

Beim Eintritt ist nur die  $C_{y \delta e}$  entsprechende „stationäre“ Lösung vorhanden; die Unterströmung fehlt noch, doch schon nach dem Laufrade ist sie deutlich. Da die Änderung von hier bis nach dem Leitrade nicht mehr so stark ist, sehen wir, daß schon in einer Stufe eine beträchtliche Annäherung an die periodische Lösung erfolgt. Daß sich auch eine Phasenverschiebung im Sinne einer Voreilung bemerkbar macht, zeigt der Verlauf des Gradienten  $(\partial C_y / \partial \xi)_w$  an der festen Wand für eine Stufe mit  $\lambda = 2 \Delta C_y = 0,6$ , dessen Extremalstelle vor  $X = 2\pi$  auftritt, siehe Abb. 22a. Abb. 22b zeigt zur Illustration im Schrägbild die Geschwindigkeitskomponenten  $C_x$  und  $C_y$  längs der Stufe.

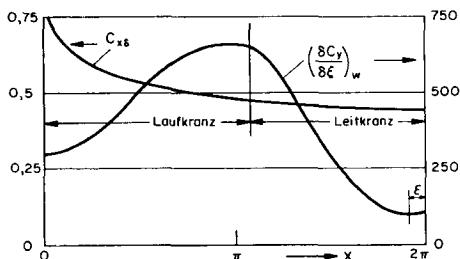


Abb. 22a. Verlauf der Geschwindigkeit  $C_{x\delta}$  im Kern und der Ableitung  $(\partial C_y / \partial \xi)_w$  an der Wand für eine Stufe mit  $\Delta C_y = 0,3$ .

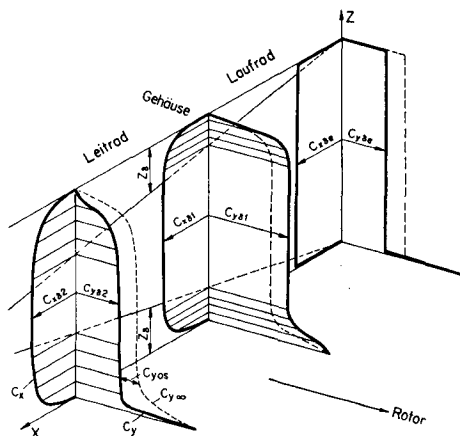


Abb. 22b. Schematische Darstellung der Geschwindigkeitsprofile zwischen den Schaufelreihen einer ersten Stufe ohne Deckbänder (linear anwachsende Wandgrenzschichten).

### c) *Einfluß der Grenzschichtdicke beim Eintritt in die Stufe*

Die Untersuchung dieses Kapitels bezog sich auf eine Grenzschicht, welche beim Eintritt in die Stufe die Dicke Null aufwies. Wir können eine Stufe mit endlicher Grenzschichtdicke am Eintritt approximieren, wenn wir im Ansatz (10) für das Kraftfeld nur höhere Potenzen von  $X$  verwenden, denn dann beginnt die Feldkraft erst von einer gewissen Stelle  $X^*$  an merklich zu wirken, vergleiche Abb. 20. An dieser Stelle  $X^*$  hat aber die von  $X=0$  an wachsende Grenzschicht bereits eine gewisse Dicke erreicht.

Wir setzen also

$$\frac{\Phi_y}{C_{x\delta}} = P_7^*(X) = k_5 X^5 + k_7 X^7$$

und bestimmen  $k_5$  und  $k_7$  so, daß die Strecke von  $X^*$  bis zur ersten Nullstelle  $X_0$  gleich der Laufkranzlänge ist und daß das Integral von 0 bis  $X_0$  der Umlenkung im Laufrade entspricht. In Abb. 21 ist der oszillierende Anteil der Umfangskomponente der Geschwindigkeit nach dem Laufrade für diesen Fall gestrichelt eingetragen; je dicker die Grenzschicht beim Stufeneintritt, um so stärker die Unterströmung und um so dünner die Zone, in der die Lösung vom reibungsfreien Werte abweicht; der Charakter der Lösung ist aber der gleiche geblieben. Für unser Zahlenbeispiel hatte die Verdrängungsdicke in  $X^* = 2,8$  den Wert  $Z_1 = 0,024$ .

## 5. Gültigkeitsbereich der reibungsfreien Lösung bei getrennten Grenzschichten und bei ausgebildeter Kanalströmung

Diese Frage ist besonders im Hinblick auf die verschiedenen Sekundärströmungstheorien von Interesse, die im betrachteten Schaufelgitter meist die Voraussetzung der Reibungsfreiheit machen; die Wirkung der Wandreibung beschränkt sich dann darauf, eine über  $Z$  variierende Anströmgeschwindigkeit zu verursachen, siehe z. B. [12], [21]. Wir wenden unser Augenmerk dabei nur auf die von den umlenkenden Feldkräften hervorgerufenen Geschwindigkeitskomponenten. Bei den der mittleren Durchströmgeschwindigkeit entsprechenden Anteilen an der Geschwindigkeit ( $C_x$  und  $a_0$  bei der ausgebildeten Kanalströmung,  $C_x$  und  $Q_0$  bei getrennten Grenzschichten) erstreckt sich der Wandreibungseinfluß über die ganze Grenzschicht, da keine (oder nur kleine) Feldkräfte vorhanden sind, welche in einem großen Bereich der Grenzschicht über die Reibungskräfte dominieren könnten.

Die reibungsfreie Lösung bei der ausgebildeten periodischen Kanalströmung lautet nach Gl. (III. 8):

$$a_1 = \frac{-\varphi_1}{C_x}, \quad b_1 = 0, \quad (21)$$

bei getrennten Grenzschichten nach Gl. (13) und (18a) annähernd

$$\frac{Q_\mu}{Q_{\mu\delta}} \approx \frac{1}{C} \left( 1 + \frac{SC'}{\mu C^2} \right), \quad \mu > 0, \quad (22)$$

wobei das zweite Glied in der Klammer negativ und — ausgenommen sehr wandnahe Gebiete — von geringer Größe ist (im Zahlenbeispiel von Abschnitt 4a hat es in  $\xi = 10 \cdot 10^{-3}$  etwa den Wert  $-0,25/\mu$ ); auch ist es um so kleiner, je größer  $\mu$ , weshalb in Abb. 19 die Kurven für größeres  $\mu$  höher liegen.

Betrachten wir nun die Ergebnisse von Kap. III für die ausgebildete periodische Kanalströmung mit gleichbleibenden Grenzschichten (Abb. 12 und 15) sowie von Kap. IV für getrennte, sich entwickelnde Grenzschichten (Abb. 19 und 21), so sehen wir, daß in einem weiten Bereich der Grenzschicht die Lösungen von den reibungsfreien kaum abweichen. Erst in Wandnähe, in der Umgebung der Maximalstelle der Umfangskomponente, macht sich eine stärkere Abweichung bemerkbar. Der Gültigkeitsbereich der reibungsfreien Lösung reicht also praktisch von der Kanalmitte bis an die Stelle, die von der Wand etwa den Abstand  $Z_R$  hat, wenn in  $Z_R/2$  das Maximum von  $a_1$ , resp. von  $Q_\mu/Q_{\mu\delta}$  oder von  $C_{yos}$  auftritt. Bei dieser Festlegung betrachten wir diejenige Lösung, bei welcher die Feldkraft  $\Phi_y$  durch die Grenzschicht (längs  $Z$ ) konstant ist. Da wir diesen extremen Fall für die Feldkraft zu Grunde legen, wird die Größe der reibungsbeeinflussten Zone sicher nicht unterschätzt, denn sie nimmt ab, wenn die Feldkraft gegen die Wand hin schwächer wird. Als kennzeichnender Wert wird am besten das Verhältnis  $Z_R/Z_1$  dieser Zonenbreite zur Verdrängungsdicke des halben Kanals angegeben (die in Kap. II und III verwendete Größe  $\Delta_1 = 2 Z_1$  ist die Verdrängungsdicke für beide Seitenwandgrenzschichten zusammen). Bei den linear anwachsenden Grenzschichten von Kap. IV gilt  $Z_R/Z_1 = \xi_R/\xi_1$ . In den Zahlentafeln 2 und 3 sind die Werte für die verschiedenen Varianten der ausgebildeten Kanalströmung und für getrennte Grenzschichten aufgeführt. Bei letzteren werden auch die Werte für den analogen laminaren Fall auf Grund einer Arbeit von Hansen und Herzig [22] gegeben; diese gelten zwar für eine Strömung mit konstanter Axialgeschwindigkeit  $C_{x\delta}$  im Kern ( $m = 0$ ), während bei unserer turbulenten Lösung verzögerte Strömung ( $m = -1/7$ ) vorausgesetzt ist, doch ist die Auswirkung von  $m$  auf das Ergebnis klein. Das Resultat für die laminare Grenzschicht ist unabhängig von der Reynoldszahl; bei turbulenter Grenzschicht ist eine geringe Abhängigkeit festzustellen; die Daten der Beispiele von Abschnitt 4a und III.5 entsprechen etwa den Verhältnissen in Verdichtern.

Vergleichen wir die Zahlenwerte, so sehen wir, daß das Verhältnis  $Z_R/Z_1$  für laminare und turbulente *getrennte* Grenzschichten sehr ähnlich ist, aber

Zahlentafel 2. Turbulente, ausgebildete, periodische Kanalströmung

Variante (vgl. Abschnitt III. 5)			$Z_R/Z_1$
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1$	0,15
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	0,22
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 2,15$	0,30
$Re\ 50 \times$ kleiner	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	0,38
Rauhe Wand	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	0,30
Halbe Schaufelbreite	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1$	0,095

Zahlentafel 3. Getrennte, linear wachsende Grenzschichten

$\mu$	Werte von $Z_R/Z_1$ bei den Ausgangsfunktionen $Q_\mu$	
	turbulent	laminar
2	2,1	1,83
4	1,4	1,41
6	0,95	1,25
8	0,7	1,11
Werte von $Z_R/Z_1$ bei $C_{y\ os}$ in einer 1. Stufe		
$X$	turbulent	laminar
3,4 (nach Laufrad)	2,5	2,3
$2\pi$ (nach Leitrad)	1,4	1,45

bedeutend größer als bei der ausgebildeten Kanalströmung. Dies ist aber sofort verständlich, wenn wir eine Arbeit von *Mager* für laminare Strömung [17] zu Rate ziehen, welche auch den Fall behandelt, daß die Grenzschicht beim Einsetzen der Kraftfeldwirkung schon eine gewisse Dicke besitzt. Je dicker nun die anfängliche Grenzschicht, desto dünner die Zone der Reibungswirkung. Dies geht übrigens auch aus unseren Ergebnissen hervor, denn je größer  $\mu$ , um so lahmmer beginnt der Anstieg der Kraftfeldintensität längs  $X$  nach Gl. (10), d. h. ein um so größeres Wegstück mit entsprechender Verdickung der Grenzschicht kann die Strömung durchlaufen, bevor eine merkbliche Wirkung des Kraftfeldes einsetzt. Je größer nun aber  $\mu$ , desto geringer  $Z_R/Z_1$ . Bei  $C_{y\ os}$ , welche Größe nach Gl. (20) und (9) für gegebene  $X$  eine Linearkombination der  $Q_\mu$  ist, ändert sich natürlich die Größe von  $Z_R/Z_1$  längs der axialen Durchtrittsrichtung, und zwar nimmt sie mit wachsender Lauflänge ab. Die gleich-

bleibende, ausgebildete Kanalströmung stellt gewissermaßen einen asymptotischen Grenzfall dar. Trotz der starken Verschiedenheit der Daten der verschiedenen Varianten von Zahlentafel 2 hält sich die Variation von  $Z_R/Z_1$  in bescheidenen Grenzen.

Wir stellen also fest, daß sich die Wirkung der Wandreibungskräfte auf oszillierende (durch umlenkende Feldkräfte erzeugte) Geschwindigkeitskomponenten nach größeren Lauflängen über weniger als die Hälfte der Verdrängungsdicke an einer Wand bemerkbar macht.

## 6. Der Wandreibungsverlust bei getrennten Grenzschichten und bei ausgebildeter Kanalströmung

Als Wandreibungsverlust betrachten wir die Dissipation des Strömungsfeldes, das den Verhältnissen in einem mittleren Bereich zwischen den Schaukeln entspricht und das wir durch die Kraftfeldlösung approximieren (die zusätzlichen Verluste in den Ecken werden zu den Randverlusten gezählt). Wir definieren den Verlust an Umfangswirkungsgrad so:

$$\Delta \eta_{uW} \equiv \frac{D}{\dot{A}}. \quad (23)$$

Die im Laufradraum geleistete Arbeit  $\dot{A}$  beträgt

$$\dot{A} = \int_{\text{Laufrad}} \int_0^{2\pi l/l_a} 1 \cdot \Phi_y dZ dX. \quad (24)$$

$\Delta \eta_{uW}$  ist auf die effektiv geleistete Umfangsarbeit bezogen,  $\zeta_W$  nach Gl. (I. 18) auf die ideelle beim Fehlen von Wandgrenzschichten. Wird insbesondere in allen Stufenelementen gleich viel Umfangsarbeit pro durchströmende Masseneinheit geleistet ( $\Phi_y$  proportional  $C_x$ ), so lautet (24):

$$\dot{A} = 2\pi \bar{C}_x \Delta C_{ym} l/l_a,$$

wo  $\Delta C_{ym}$  die — in diesem Falle im ganzen Querschnitt außerhalb der wandnächsten Zone konstante — totale Umlenkung im Laufrade ist ( $_m$  bedeutet: Kanalmitte).

Die Dissipation in einer Stufe berechnet sich nach der Festlegung (I. 11):

$$D = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi l/l_a} \left[ A_{xz} \left( \frac{\partial C_x}{\partial Z} \right)^2 + A_{yz} \left( \frac{\partial C_y}{\partial Z} \right)^2 + A_{yx} \left( \frac{\partial C_y}{\partial X} \right)^2 \right] dZ dX, \quad (25)$$

wobei weitere Anteile (z. B. von  $\partial C_x/\partial X$ ) verschwinden oder vernachlässigbar klein sind. Wir haben die Dissipation aus den in Kapitel II, III und IV berechneten Geschwindigkeiten durch grafische Integration bestimmt. Vorausgesetzt,



daß das Axialgeschwindigkeitsprofil einigermaßen völlig ist (der Mangel an Normalkraft darf nicht zu groß sein, vgl. Abb. 8a und 8c), ist sowohl bei ausgebildeter Kanalströmung als auch bei getrennten, sich entwickelnden Grenzschichten folgende Darstellung möglich, wobei wir  $D$  in die Anteile  $D_0$ ,  $D_1$  und  $D_2$  zerlegen:

*Anteil  $D_0$  von der mittleren Durchströmgeschwindigkeit her*

keine Deckbänder:

$$D_0 \approx \alpha \pi \bar{c}_f^+ \bar{C}_x [2 \bar{C}_x^2 + \bar{C}_{y\infty}^2 + \bar{W}_{y\infty}^2]. \quad (26)$$

Deckbänder an Leit- und Laufschaufeln:

$$D_0 \approx \alpha \pi \bar{c}_f^+ \bar{C}_x [2 \bar{C}_x^2 + (\bar{C}_{y\infty} - 0,5)^2 + (\bar{W}_{y\infty} - 0,5)^2]. \quad (26')$$

Die mittlere Durchströmgeschwindigkeit (Komponenten  $C_x$  und  $C_{y\infty}$ , resp.  $W_{y\infty}$ ) ist das vektorielle Mittel der Geschwindigkeiten vor und nach dem Leit-, resp. Laufkranz; der Querstrich kennzeichnet den Mittelwert über der Kanalhöhe.  $\bar{c}_f^+$  ist der Reibungskoeffizient des gewöhnlichen Kanales bei  $Re = \bar{c}_x l / \nu$  (bei getrennten Grenzschichten der Reibungskoeffizient einer mit  $\bar{c}_x$  überströmten Platte), welcher hier abweichend von unserer sonstigen Definition auf  $\bar{c}_x$  bezogen ist;  $\alpha$  ist der Verstärkungsfaktor der Turbulenz.

*Anteil  $D_1$  von den Ableitungen  $\partial C_y / \partial Z$  der oszillierenden Geschwindigkeitskomponenten her*

$$\text{Keine Deckbänder: } D_1 \approx \alpha \pi \bar{c}_f^+ \bar{C}_x p \overline{\Delta C_y^2}. \quad (27)$$

Deckbänder an Leit- und Laufschaufeln:

$$D_1 \approx \alpha \pi \bar{c}_f^+ \bar{C}_x (p \overline{\Delta C_y^2} + q + q_1 \overline{\Delta C_y}). \quad (27')$$

Die Zerlegung von  $\iint A_{yz} (\partial C_y / \partial Z)^2 dZ dX$  in einen „stationären“ und einen oszillierenden Anteil gemäß Gl. (26) und (27) ergibt sich bei der ausgebildeten Kanalströmung in einer Repetierstufe von selbst, indem

$$D_0 = 2 \pi \int_0^{2\pi/l_a} (A_{xz} C_x'^2 + A_{yz} \alpha_0'^2) dZ,$$

$$D_1 = \pi \int_0^{2\pi/l_a} [A_{yz} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2)] dZ.$$

Gl. (27) stellt somit eigentlich eine Definition der Beiwerte  $p$  und  $q$  dar, welche von der Reynoldszahl, der Rauigkeit etc. abhängen. Bei sich entwickelnden getrennten Grenzschichten geschieht diese Zerlegung in der Weise, daß vom gesamten Werte

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/l_a} A_{yz} (\partial C_y / \partial Z)^2 dZ dX = \sum_{\text{beide Seitenwände}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_\delta} [E_{yz} (\partial C_y / \partial \xi)^2 d\xi] C_{x\delta} dX$$

ein „stationärer“ Anteil nach Gl. (26) subtrahiert wird und der Rest in der Form (27) dargestellt wird. Der hierbei errechnete Wert für das Zahlenbeispiel von Abschnitt 4 (eine erste Stufe mit  $C_{y\delta e} = C_{y\delta 2}$ ,  $\Delta C_{y\delta} = 0,3$ ;  $C_{x\delta}'' = 0,5$ ; Anordnung ohne Deckbänder;  $\alpha = 1,64$ ;  $c_{x\delta}^* l/\nu = 5,4 \cdot 10^5$ ) beträgt  $p = 1,0$ , woran die bewegte Seitenwand an der Nabe etwa 45 %, die ruhende an der Spitze etwa 55 % beiträgt. Dieser Wert liegt in der gleichen Größenordnung wie derjenige für die ausgebildete Kanalströmung bei der gleichen Reynoldszahl und gleichem  $\alpha$ , siehe Zahlentafel 4. Da der Anteil von  $D_1$  am Wandreibungsverlust gering ist, können die Werte der ausgebildeten Kanalströmung unbedenklich auch für getrennte Grenzschichten verwendet werden.

Zahlentafel 4. Ausgebildete Kanalströmung

Variante (s. Abschnitt III. 5)			$p$
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1$	1,9
Basis	$\varphi_1 \sim C_x$	$\alpha = 1$	0,5
Basis	$\varphi_1 \sim C_x^2$	$\alpha = 1$	0,19
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	1,5
Basis	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 2,15$	1,2
$Re \ 50 \times \text{kleiner}$	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	3,9
Rauhe Wand	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1,5$	2,1
Halbe Stufenlänge	$\varphi_1 = \text{konst.}$	$\alpha = 1$	3,2
Halbe Stufenlänge	$\varphi_1 \sim C_x^2$	$\alpha = 1$	0,25

Je stärker der Abfall der Feldkraft in Wandnähe, je höher die Reynoldszahl und je breiter die Schaufeln, desto kleiner der Dissipationsanteil  $D_1$ .

$q$  und  $q_1$  erfassen die zusätzliche Dissipation bei Anordnungen mit Deckbändern, welche davon herrührt, daß wegen den abschnittsweise bewegten und ruhenden Seitenwänden in den wandnahen Stufenelementen große zusätzliche Umlenkungen mit scharfen Gradienten auftreten, siehe Abb. 14. Sind Leit- und Laufschaufeln mit Deckbändern versehen (ein mehr theoretisch als praktisch wichtiger Fall), so ist für den Anteil  $D_0$  also die Formulierung (26') zu verwenden, welche so gewählt ist, daß sie auch für andere Reaktionsgrade als 0,5 verwendbar ist<sup>7)</sup> und welche kleinere Werte als Gl. (26) liefert. Dafür treten bei  $D_1$  die zusätzlichen Glieder mit  $q$  und  $q_1$  hinzu. In den von uns untersuchten Fällen für glatte Wände und  $l/l_a = 1$  erhalten wir praktisch unabhängig von der Reynoldszahl

$$q = 0,85 \div 0,9,$$

<sup>7)</sup> Den zahlenmäßigen Ergebnissen dieser Untersuchung liegt stets der Reaktionsgrad 0,5 zu Grunde.

worin auch die Glieder höherer Ordnung berücksichtigt sind, während  $q_1$  vernachlässigbar klein ist. Beim Anbringen von Deckbändern vergrößert sich somit der Wandreibungsverlust um mehr als  $D_0/3$ . Dieser Effekt tritt auch in Turbinen auf, weshalb in der Literatur bei Anordnungen mit Deckbändern häufig vergrößerte Randverluste angegeben werden, siehe z. B. [19].

*Anteil  $D_2$  von den Ableitungen  $\partial C_y/\partial X$  der oszillierenden Geschwindigkeitskomponenten her*

$$D_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/l_a} A_{yx} (\partial C_y/\partial X)^2 dZ dX \approx \pi^2 \bar{A}_{yx} \bar{\Delta C_y^2} l/2l_a. \quad (28)$$

Dieser Anteil wurde bis heute übersehen; da aber in Turbomaschinen im gesamten Strömungsquerschnitt Turbulenz vorhanden ist (Nachlaufdübeln), wird der Strömung auch in der Umgebung der Kanalmitte durch die Scherung  $\partial C_y/\partial X$  Energie entzogen. Diese Dissipation würde also auch auftreten, wenn keine Seitenwände vorhanden wären; ihre Größe wird aber durch die Seitenwandreibung beeinflusst (Einwirkung auf  $A_{yx}$ ). Zählen wir diesen Anteil dennoch zu den Wandreibungsverlusten, so enthält  $\zeta_p$  nur die reine Profilreibung. Das Glied

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( A_{yx} \frac{\partial C_y}{\partial X} \right)$$

in der Bewegungsgleichung für die  $Y$ -Richtung ist zwar klein, weshalb es in Kapitel IV bei der Bestimmung von  $C_y$  vernachlässigt wurde; der entsprechende Dissipationsanteil  $D_2$  hat aber trotzdem einen merklichen Wert, da die geringe Größe des Integranden durch die Tatsache kompensiert wird, daß er im gesamten Strömungsquerschnitt vorhanden ist, während die andern Dissipationsanteile ihre Quelle in den wandnahen Grenzschichtzonen besitzen.

Quantitative Angaben über  $D_2$  sind schwierig, da die Austauschgröße  $A_{yx}$  sehr unsicher ist. Sie dürfte in einem weiten Gebiet im Kanalinnern praktisch konstant sein, weshalb in Gl (29) der Wert  $A_{yxm}$  für die Kanalmitte eingesetzt wird. In Ermangelung anderer Unterlagen setzen wir für die ausgebildete Kanalströmung nach Gl. (III. 21) und (III. 25 a)

$$\bar{A}_{yx} = \omega_m A_{xzm} \approx \omega_m 0,07 \pi \alpha \bar{C}_x \sqrt{\bar{c}_f/2} l/l_a, \quad (29)$$

wo  $\omega_m$  das Verhältnis  $A_{yxm}/A_{xzm}$  darstellt und im allgemeinen eine Funktion verschiedener Parameter (z. B.  $l/l_a$ , Kennwerte der Stufe) ist. Anordnungen mit und ohne Deckbänder unterscheiden sich bezüglich  $D_2$  kaum, da sich die Auswirkungen auf die Wandnähe beschränken. Für getrennte Grenzschichten können wir keinen Vorschlag machen.

Für den speziellen Fall, daß  $\omega_m$  unabhängig von  $l/l_a$  ist, wird nach den Ansätzen (28, 29) der von  $D_2$  herrührende Anteil an  $\Delta \eta_{uW}$  bei gegebener

Reynoldszahl proportional  $l/l_a$ , während der von  $D_0$  stammende Anteil proportional  $l_a/l$  und der von  $D_1$  herrührende Anteil etwa proportional  $\sqrt{l_a/l}$  ist, da  $p$  und  $q$  um so kleiner sind, je größer das Verhältnis  $l_a/l$ .

Dies ist ersichtlich aus Abb. 23, wo der nach den obigen Ansätzen berechnete Wandreibungsverlust für eine Stufe mit den Daten

$$\bar{C}_x = 0,5; \quad \bar{\lambda} = 2 \Delta \bar{C}_y = 0,6; \quad r = 0,5 \quad (\text{Reaktionsgrad})$$

Anordnung ohne Deckbänder

aufgeführt ist.  $\beta$  nach Gl. (III. 20) hat den Wert 1,41; für den Erhöhungsfaktor der Turbulenz haben wir den vorsichtigen Wert  $\alpha = 1,5$  verwendet.

Es sind zwei Fälle für glatte Wände und ausgebildete Kanalströmung mit den Reynoldszahlen

$$Re = \bar{c}_x l / \nu = 10^6 \quad \text{und} \quad 2 \cdot 10^4$$

dargestellt. Es ist vorausgesetzt, daß die Feldkraft längs  $Z$  proportional  $C_x$ , d. h. daß die Umfangsarbeit pro Masseneinheit konstant ist; durch Kreuze sind die leicht erhöhten Verluste für den Fall angedeutet, daß  $\Phi_y$  längs  $Z$  konstant ist, daß also den wandnahen Gebieten zusätzliche Schaufelarbeit zugeführt wird. Für eine raue Wand mit  $Re = 10^6$  und derselben Rauhmigkeit wie bei der Variante 3 von Abschnitt III. 5 wäre  $\Delta \eta_{uw}$  praktisch gleich wie bei der dargestellten Variante für die glatte Wand mit  $Re = 2 \cdot 10^4$ .

Der von  $D_2$  herrührende Anteil wurde separat eingetragen; für das Verhält-

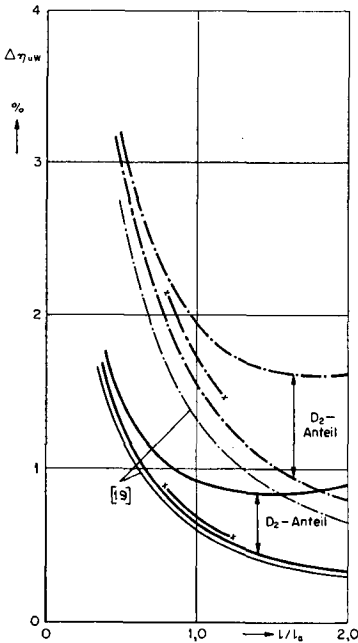


Abb. 23. Wandreibungsverlust in Funktion von  $l/l_a$ . Vergleich der von  $D_2$  mit den von  $D_0 + D_1$  herrührenden Anteilen.

---  $\bar{c}_x l / \nu = 2 \cdot 10^4$ , glatte Wände.

—  $\bar{c}_x l / \nu = 10^6$ , glatte Wände.

Umfangsarbeit pro Masseneinheit längs  $Z$  konstant, d. h.  $\varphi_1 \sim C_x$ .

× — × Von  $D_0 + D_1$  herrührende Anteile für Variante mit  $\varphi_1(Z) = \text{konstant}$ . Anteil von  $D_2$  her gleich wie oben.

[19] Reine Kanalreibung der mittleren Durchströmgeschwindigkeit nach Traupel [19].

nis  $\omega_m$  der Austauschgrößen  $A_{yxm}/A_{xzm}$  wurde der konstante Wert  $\omega_m = 1$  gesetzt. Es soll angedeutet werden, daß auf diese Weise eine fühlbare Erhöhung des Wandverlustes entstehen kann; der entsprechende Betrag wurde bisher zu den Randverlusten gerechnet. Zugleich stellt dies einen der Gründe dafür dar, daß die experimentelle Beobachtung in mehrstufigen Maschinen auch bei getrennten Grenzschichten keine strenge Proportionalität zwischen den Randverlusten und dem Verhältnis  $l_a/l$  ergab. Dies hängt damit zusammen, daß die Quellen der verschiedenen Verlustanteile in verschiedenen Zonen des Strömungsquerschnittes liegen.

Zum Vergleich sind in Abb. 23 auch die Werte nach einem Ansatz von Traupel [19] eingetragen

$$D = \beta \pi \bar{c}_f \bar{C}_x (2 \bar{C}_x^2 + \bar{C}_{y\infty}^2 + \bar{W}_{y\infty}^2),$$

in welchem nur die Kanalreibung der mittleren Durchströmgeschwindigkeit berücksichtigt und  $\alpha = \beta$  gesetzt wird.

## KAPITEL V

### Abschätzung des Einflusses der endlichen Gitterteilung

#### 1. Allgemeines

##### a) Problemstellung

Bis jetzt haben wir den Einfluß der endlichen Teilung vernachlässigt, indem die Geschwindigkeiten längs des Umfanges (Richtung  $y$ ) als konstant betrachtet wurden und die Gitterwirkung durch ein äquivalentes, längs des Umfanges konstantes Kraftfeld ersetzt wurde.

Dabei verfolgten wir die Absolutgeschwindigkeit längs der ganzen Stufe; wollen wir die endliche Teilung berücksichtigen, so müssen wir auf die Relativbewegung in den einzelnen Kränzen übergehen. Die Verhältnisse im vorhergehenden Kranze bestimmen dann die Zuströmung, d. h. die Anfangsbedingungen für den betrachteten Kranz. Diesen denken wir uns wieder abgewickelt, wobei wir uns auf den Fall beschränken, daß an den Seitenwänden, welche relativ zum Gitter ruhen mögen, dünne, getrennte Grenzschichten vorhanden seien.

Unser Versuch zur Berücksichtigung der endlichen Gitterteilung verfolgt

zwei Ziele: Erstens wollen wir die Ausbildung der Grenzschicht im Gitter *vergleichen mit* unserer *Kraftfeldlösung* und verifizieren, daß diese doch etwa das mittlere Verhalten der sogenannten Grundlösung im Bereiche über einer Teilung repräsentiert. Zweitens wollen wir den *Einfluß der Unterströmung* beim Eintritt ins Gitter auf den weiteren Verlauf der Grenzschicht untersuchen: *Moore* und *Richardson* [24] haben darüber erste experimentelle Beobachtungen veröffentlicht; eine von *Mager* [25] angegebene analytische Lösung enthält einige Vereinfachungen, die bei starker Unterströmung zu Zweifeln Anlaß geben könnten. Wir werden in der Folge einen Ansatz in enger Anlehnung an *Mager* wählen, jedoch statt der analytischen Lösung ein schrittweises Differenzenverfahren ohne diese Vernachlässigung benutzen.

Die verwendeten Grenzschichtannahmen (Druckfeld völlig von der reibungsfreien Strömung im Kern aufgeprägt) gelten in unmittelbarer Schaufelnähe nicht mehr (Ecke). Wir bestimmen deshalb zuerst eine *Grundlösung* ohne Berücksichtigung der Bedingung, daß an der Schaufel tangentielle Strömung herrschen muß. In der experimentell begründeten Annahme (vergleiche die Stromlinienbilder an der Wand nach [20], [22], [24]), daß sich diese Schaufelbedingung nur auf ein relativ kleines Gebiet in Schaufelnähe auswirke, ermitteln wir für dieses Gebiet (in Abb. 30 schraffiert) sodann eine *Eckelösung*. Bei der Grundlösung ersetzen wir die Schaufeln in Gedanken durch Gebilde, welche Kräfte entsprechend der reibungsfreien Kernströmung ausüben, im Bereich der Grenzschicht (nur hier tritt Unterströmung auf) jedoch strömungsdurchlässig sind. In der Annahme, daß dann ein auf die Nähe der Schaufeln beschränktes zusätzliches Kraftfeld die Erfüllung der Schaufelbedingung (Undurchlässigkeit) erzwingt, bestimmen wir ausgehend von der Grundlösung die Eckelösung, wobei wir auch das Vorhandensein der Profildgrenzschicht beachten. Enthält schon die Grundlösung eine ganze Reihe von Vereinfachungen, so stellt die Eckelösung überhaupt nur eine grobe qualitative Abschätzung dar.

Zwar tritt in Turbomaschinen auch in der oben als reibungsfrei bezeichneten Kernströmung ein gewisser turbulenter Austausch verbunden mit Dissipation auf (der Dissipationsanteil  $D_2$  von Abschnitt IV. 6); er ist aber über das ganze Gebiet verteilt und beeinflusst das Geschwindigkeitsfeld in so geringem Maße, daß es sich von der reibungsfreien Lösung kaum unterscheidet.

Da jetzt  $\partial/\partial y \neq 0$ , sind die Bewegungsgleichungen nichtlinear. Wir können diese selbst deshalb nicht mehr lösen, sondern müssen uns auf Integralwerte (Integration über  $z$ ) der Grenzschicht beschränken. Wir machen für das gesamte 3-dimensionale Geschwindigkeitsfeld in der Grenzschicht einen 2-parametrischen Ansatz, und zwar wählen wir als Parameter die Grenzschichtdicke  $\delta$  sowie einen Unterströmungsparameter  $k$ , der die Abweichung der Geschwindigkeitsrichtung in der Grenzschicht von derjenigen in der reibungsfreien Außen-

strömung charakterisiert. Die beiden Parameter werden sodann aus den über  $z$  integrierten Bewegungsgleichungen für die  $x$ - und  $y$ -Richtung bestimmt.

b) *Bezeichnungen, Ansatz für die Geschwindigkeit in der Grenzschicht*

Da wir uns nur mit der Strömung durch ein Gitter befassen, gebrauchen wir hier andere dimensionslose Größen als in den Kapiteln II bis IV, indem wir als Bezugslänge die Teilung  $t$  und als Bezugsgeschwindigkeit die Zuströmgeschwindigkeit  $w_{1\delta}$  wählen, vergleiche Abb. 24. (Wir verwenden  $w$ , resp.  $W$ ,

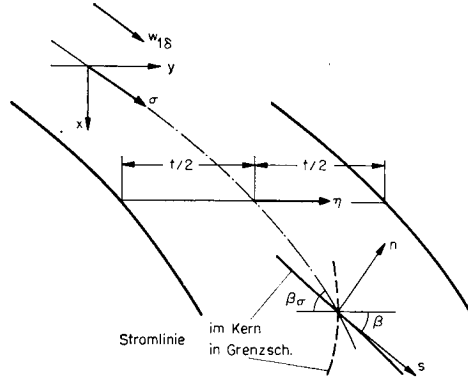


Abb. 24. Bezeichnungen.

um anzudeuten, daß wir die Geschwindigkeiten relativ zum Gitter betrachten, sei dieses selbst nun ruhend oder bewegt.)

$$\begin{aligned}
 X &\equiv x/t \text{ etc.}, & \Delta &\equiv \delta/t, \\
 W_x &\equiv w_x/w_{1\delta} \text{ etc.}, \\
 T_y &\equiv \sigma_{yz}/\rho w_{1\delta}^2, & T_x &\equiv \sigma_{xz}/\rho w_{1\delta}^2.
 \end{aligned}$$

$s, S$  wird gemessen in der Richtung der resultierenden Geschwindigkeit im Kern außerhalb der Grenzschicht; deren Richtungswinkel wird mit  $\beta$  bezeichnet.

Die Indizes  $x, y, z, s, n$  bezeichnen die entsprechenden Richtungen, die Indizes  $w$  die Wand und  $1$  die Zuströmung ( $x=0$ ) zum Gitter.

$W_s$  sei die dimensionslose Geschwindigkeitskomponente parallel der örtlichen Geschwindigkeit  $W_{s\delta}$  im Kern. Wäre die Grenzschicht in jedem Punkte örtlich 2-dimensional, d. h. wäre die Geschwindigkeit in der Grenzschicht parallel zur Kerngeschwindigkeit, so müßte gelten:

$$\frac{W_s(Z)}{W_{s\delta}} = \frac{W_x(Z)}{W_{x\delta}} = \frac{W_y(Z)}{W_{y\delta}} = f\left(\frac{Z}{\Delta}\right),$$

wobei  $f(Z/\Delta)$  an sich von Ort zu Ort differierte. Wegen des Druckgradienten

in der Normalenrichtung und wegen der Relativbewegung des vorhergehenden Gitters hat die Grenzschicht 3-dimensionalen Charakter, d. h. es tritt eine Unterströmung auf, für die wir die folgende Festlegung machen, welche die Ergebnisse unserer Kraftfeldlösung i. a. recht gut repräsentiert. Sie wurde in Anlehnung an einen Ansatz von *Mager* gewählt [25], welcher ihn anhand experimenteller Unterlagen nachprüfte, unterscheidet sich aber insofern von diesem, als *Mager* die Unterströmung in der Richtung  $n$  normal zu  $W_{s\delta}$  ansetzt, während wir sie in die Richtung  $y$  legen, um mit der Kraftfeldlösung besser vergleichen zu können, und weil dies den Verhältnissen beim Übergang zwischen zwei Kränzen in Turbomaschinen eher entspricht. Wir setzen für die Unterströmung  $W_y^-$

$$\frac{W_y^-(Z)}{W_{y\delta}} = k f\left(\frac{Z}{\Delta}\right) \left[1 - \frac{Z}{\Delta}\right]^n, \quad (1)$$

so daß also die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht die folgenden sind (vergleiche Abb. 25):

$$\begin{aligned} \frac{W_x(Z)}{W_{x\delta}} &= f\left(\frac{Z}{\Delta}\right), \\ \frac{W_y(Z)}{W_{y\delta}} &= f\left(\frac{Z}{\Delta}\right) \left\{1 + k \left[1 - \frac{Z}{\Delta}\right]^n\right\} \end{aligned} \quad (2)$$

und daraus 
$$\frac{W_s(Z)}{W_{s\delta}} = f\left(\frac{Z}{\Delta}\right) \left\{1 + \cos^2 \beta k \left[1 - \frac{Z}{\Delta}\right]^n\right\}.$$

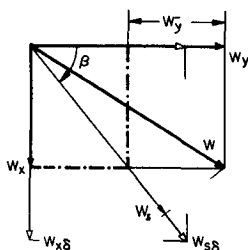


Abb. 25a. Die Unterströmung  $W_y^-$  in der Grenzschicht.

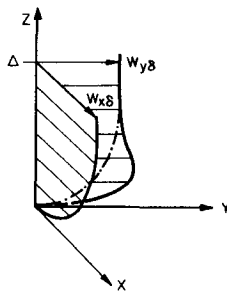


Abb. 25b. Der 3-dimensionale Charakter der Grenzschicht.

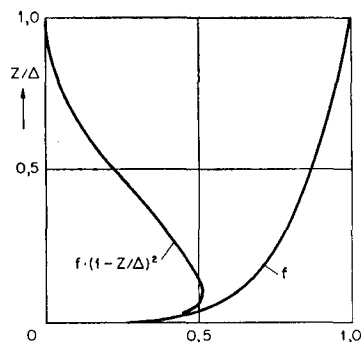


Abb. 25c. Der Ansatz (1) für  $W_y^-$  ( $f(Z/\Delta) = (Z/\Delta)^{0,2}$ ).

Im Rahmen unserer Rechnungen benützen wir für den ganzen Gitterbereich dieselbe Funktion  $f(Z/\Delta)$ . Zwar variiert  $f(Z/\Delta)$  bei Strömungen mit Druckgradienten sicherlich, doch wäre — wenn ein einparametriger Ansatz



für  $f(Z/\Delta)$  gemacht würde — eine weitere Gleichung nötig, aber selbst bei der gewöhnlichen 2-dimensionalen Plattengrenzschicht sind die Verhältnisse noch nicht geklärt (*Rotta* [11] und *Truckenbrodt* [15] verwenden den Energiesatz, *Doenhoff* und andere [15] eine empirische Bedingung). Da für 3-dimensionale Grenzschichten noch keinerlei solche Unterlagen verfügbar sind und da die Benützung einer festen Funktion  $f(Z/\Delta)$  bei der gewöhnlichen Plattengrenzschicht doch qualitativ richtige Ergebnisse liefert, gebrauchen wir ein Potenzgesetz mit festem Exponenten  $m$

$$f\left(\frac{Z}{\Delta}\right) = \left(\frac{Z}{\Delta}\right)^m. \quad (3)$$

In Wandnähe gilt es zwar nicht, aber diese Zone trägt zu den verwendeten Integralwerten fast nichts bei; die Wandschubspannungen werden in Form von Reibungskoeffizienten  $c_f$  unabhängig von  $(\partial f/\partial Z)_{Z=0}$  eingesetzt.

Die Unterströmung hat einen Zusatz zur Wandschubspannung zur Folge, den wir proportional  $k$  ansetzen. Ist  $c_f$  der Reibungskoeffizient, bezogen auf  $w_{s\delta}$ , wie er am betreffenden Orte ohne Unterströmung vorhanden wäre, so setzen wir

$$\begin{aligned} T_{xw} &= \frac{c_f}{2} W_{s\delta}^2 \frac{W_{x\delta}}{W_{s\delta}}, \\ T_{yw} &= \frac{c_f}{2} W_{s\delta}^2 \frac{W_{y\delta}}{W_{s\delta}} (1+k). \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Die Grundlösung

### a) Integrale Grenzschichtgleichungen

Die Bewegungsgleichungen lauten mit den Voraussetzungen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

und

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \ll \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad (6)$$

folgendermaßen:

$$W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial Z} = W_{x\delta} \frac{\partial W_{x\delta}}{\partial X} + W_{y\delta} \frac{\partial W_{x\delta}}{\partial Y} + \frac{\partial T_x}{\partial Z}, \quad (7)$$

$$W_x \frac{\partial W_y}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_y}{\partial Z} = W_{x\delta} \frac{\partial W_{y\delta}}{\partial X} + W_{y\delta} \frac{\partial W_{y\delta}}{\partial Y} + \frac{\partial T_y}{\partial Z}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} + \frac{\partial W_z}{\partial Z} = 0. \quad (9)$$

Wir integrieren (7) und (8) über  $Z$  von der Wand bis zum Außenrand der Grenzschicht ( $Z = \Delta$ ) und erhalten unter Berücksichtigung von (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\Delta} W_x (W_{x\delta} - W_x) dZ + \frac{\partial}{\partial Y} \int_0^{\Delta} W_y (W_{x\delta} - W_x) dZ + \frac{\partial W_{x\delta}}{\partial X} \int_0^{\Delta} (W_{x\delta} - W_x) dZ + \\ + \frac{\partial W_{x\delta}}{\partial Y} \int_0^{\Delta} (W_{y\delta} - W_y) dZ = T_{xw}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \int_0^{\Delta} W_y (W_{y\delta} - W_y) dZ + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\Delta} W_x (W_{y\delta} - W_y) dZ + \frac{\partial W_{y\delta}}{\partial X} \int_0^{\Delta} (W_{y\delta} - W_y) dZ + \\ + \frac{\partial W_{y\delta}}{\partial Y} \int_0^{\Delta} (W_{x\delta} - W_x) dZ = T_{yw}, \end{aligned} \quad (11)$$

die beide ganz analog gebaut sind.

Vermöge unseres Ansatzes (2), (3) für die Geschwindigkeiten lassen sich nun alle Integrale durch die beiden Parameter  $\Delta$  und  $k$  ausdrücken. Der wesentlicheren physikalischen Bedeutung und der bequemerer Rechnung wegen ersetzen wir dieselben durch

$$\Delta_2 \equiv \frac{m}{(m+1)(2m+1)} \Delta \quad (12)$$

( $\Delta_2$  die Impulsmangeldicke der  $x$ -Komponente — oder auch der  $s$ -Komponente, wenn keine Unterströmung vorhanden wäre —) und

$$h \equiv k \Delta. \quad (13)$$

$k$  ist der Unterströmungsgeschwindigkeit proportional, während  $h$  als Integralwert der Unterströmungsmenge proportional ist. Wir bezeichnen deshalb  $h$  als Unterströmungsgröße,  $k$  als  $\Delta$ -parameter. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta} (W_{x\delta} - W_x) dZ &= W_{x\delta} (2m+1) \Delta_2, & (2m+1) \text{ ist als Formparameter } H_{12} \text{ be-} \\ & & \text{kannt; da wir } m \text{ hier konstant setzen,} \\ \int_0^{\Delta} W_x (W_{x\delta} - W_x) dZ &= W_{x\delta}^2 \Delta_2, & \text{gilt dasselbe auch für } H_{12}. \\ \int_0^{\Delta} (W_{y\delta} - W_y) dZ &= W_{y\delta} (H_{12} \Delta_2 - B_{11} h), \\ \int_0^{\Delta} W_x (W_{y\delta} - W_y) dZ &= W_{x\delta} W_{y\delta} (\Delta_2 - B_{21} h), \\ \int_0^{\Delta} W_y (W_{x\delta} - W_x) dZ &= W_{x\delta} W_{y\delta} (\Delta_2 + D h), \\ \int_0^{\Delta} W_y (W_{y\delta} - W_y) dZ &= W_{y\delta}^2 \left( \Delta_2 + A h - E \frac{h^2}{\Delta_2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

wo

$$B_{ij} \equiv \int_0^1 \left(\frac{Z}{\Delta}\right)^{im} \left(1 - \frac{Z}{\Delta}\right)^{jn} d\left(\frac{Z}{\Delta}\right) = \frac{\Gamma(1+im)\Gamma(1+jn)}{\Gamma(2+im+jn)}, \quad (15)$$

$\Gamma(1+x)$  die Gammafunktion, tabelliert in [23], und

$$\begin{aligned} A &\equiv B_{11} - 2B_{21}, & D &\equiv B_{11} - B_{21}, \\ E &\equiv \frac{B_{22}m}{(2m+1)(m+1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Da nur noch Geschwindigkeiten der Kernströmung vorkommen, lassen wir von nun an den Index  $\delta$  weg. Mit den Ausdrücken (14, 15, 16) lauten nun (10) und (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}(W_x^2 \Delta_2) + \frac{\partial}{\partial Y}[W_x W_y (\Delta_2 + Dh)] + H_{12} \Delta_2 \left( W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) - \\ - B_{11} h W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} = T_{xw}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X}[W_x W_y (\Delta_2 - B_{21}h)] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ W_y^2 \left( \Delta_2 + Ah - E \frac{h^2}{\Delta_2} \right) \right] + \\ + \Delta_2 H_{12} \left( W_x \frac{\partial W_y}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} \right) - B_{11} h W_y \frac{\partial W_y}{\partial Y} = T_{yw}, \end{aligned} \quad (18)$$

wobei gemäß (4)

$$T_{xw} = \frac{c_f}{2} W_s W_x, \quad T_{yw} = \frac{c_f}{2} W_s W_y \left( 1 + \frac{m}{(2m+1)(m+1)} \frac{h}{\Delta_2} \right). \quad (19)$$

(17) und (18) stellen ein System zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die zwei Unbekannten  $h$  und  $\Delta_2$  dar. Es ist linear mit Ausnahme des Gliedes mit  $E$  in (18) und des Ausdruckes  $h/\Delta_2$  in (19). Beide Terme sind aber stets klein, so daß folgende Linearisierung in der Nähe eines Wertepaares  $h^*$ ,  $\Delta_2^*$  zulässig ist:

$$\frac{h^2}{\Delta_2} = 2h \frac{h^*}{\Delta_2^*} - \Delta_2 \left( \frac{h^*}{\Delta_2^*} \right)^2, \quad (20)$$

$$\frac{h}{\Delta_2} = \frac{h^*}{\Delta_2^*} + h \frac{1}{\Delta_2^*} - \Delta_2 \frac{h^*}{\Delta_2^{*2}}. \quad (21)$$

(Für  $h^*$ ,  $\Delta_2^*$  z. B., da wir schrittweise integrieren, die Endwerte des vorhergehenden Schrittes einsetzen.) Die Linearisierung (20) versagt in der Nähe eines Nulldurchganges von  $h$ . Dort ist aber  $h^2/\Delta_2$  so klein, daß sich der Fehler in (18) kaum auswirkt.

Die im System (17, 18) als Koeffizienten auftretenden Geschwindigkeiten der Kernströmung  $W_x$ ,  $W_y$  können nach irgendeinem Verfahren zur Berechnung der reibungsfreien Strömung durch ein Gitter bestimmt werden.

Als *Anfangsbedingungen* können wir  $h$  und  $\Delta_2$  längs einer beliebigen Kurve

$f(X, Y) = 0$ , die keine Charakteristik ist, vorgeben. Wir legen die beiden Größen beim Eintritt in das Gitter fest, d. h. längs  $X = 0$ ; die Zuströmung kann dabei längs des Umfangs als homogen betrachtet werden, denn die Gradienten in  $Y$ -Richtung, die im vorhergehenden Gitter vorhanden waren, wirken sich wegen der Relativbewegung als instationäre Erscheinungen aus; wir betrachten nun das zeitliche Mittel, das längs des Umfangs konstant ist. Wie mit *Jenny* [7] nachgeprüft werden kann, ist das System (17, 18) ganz schwach elliptisch. Wäre es exakt parabolisch, so wäre die Richtung der Charakteristiken gegeben durch

$$\frac{dY}{dX} \approx \frac{W_y}{W_x} \left( 1 + \frac{B_{22}}{B_{21}} k \right) = \frac{W_y}{W_x} \left( 1 + \frac{E h}{B_{21} \Delta_2} \right).$$

$X = \text{konstant}$  wäre nur eine Charakteristik, wenn entweder  $k = \infty$  oder  $W_x = 0$ , was bei uns ausgeschlossen ist. Ist keine Unterströmung vorhanden, so fiel die Richtung der Charakteristiken mit derjenigen der Stromlinien des Kernes zusammen.

Ist  $h_1(X=0) = 0$ , so wird das Gitter unterströmungsfrei angeströmt, wie das bei den üblichen Gitterversuchen meist der Fall ist. In einem Verdichter ist aber i. a. eine erhebliche Unterströmung beim Stufeneintritt vorhanden; wir werden deshalb zwei Vergleichsfälle mit  $h_1 = 0$  und  $h_1 \neq 0$  durchrechnen. ( $h_1$  kennzeichnet die Zuströmung.)

#### *b) Numerische Lösung durch ein Differenzenverfahren*

Wir lösen das System (17, 18) numerisch, indem wir die Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen ersetzen. Entsprechend der Natur des Problems und der vorgegebenen Anfangsbedingungen bauen wir die Lösung, je um Schritte  $\Delta X$  fortschreitend, auf. Wegen Schwierigkeiten bezüglich der Randbedingungen und wegen des Rechenaufwandes können wir das naheliegende Vorgehen, die Werte der gesuchten Größen in einer Anzahl diskret über der Teilung verteilter Punkte zu bestimmen, nicht anwenden. Wir machen statt dessen in jedem Schnitte  $X = \text{konstant}$  für  $\Delta_2(Y)$  und  $h(Y)$  Ansätze in Form von Polynomen  $r$ -ten Grades. In gleicher Weise werden auch die Koeffizienten der Differentialgleichungen, die vom Geschwindigkeitsfeld der reibungsfreien Kernströmung geliefert werden, durch Polynome bezüglich  $Y$  dargestellt. Die Gl. (17, 18) — als Differenzgleichungen für einen Punkt  $M(Y)$  in der Mitte des Intervalles beim Fortschreiten von  $X^*$  zu  $X = X^* + \Delta X$  formuliert — enthalten somit nur Potenzen von  $Y$  und können durch Koeffizientenvergleich gelöst werden. Hat man so aus den in  $X^*$  bekannten Werten diejenigen in  $X$  berechnet, wird wieder um  $\Delta X$  weitgeschritten usw.

Anstelle von  $Y$  führen wir die neue Variable  $\eta$  ein

$$\eta \equiv Y + c(X).$$

$\eta$  ist gegenüber  $Y$  um  $c$  verschoben, und zwar so, daß der Nullpunkt von  $\eta$  stets auf der Teilungsmittle zwischen zwei Schaufelskelettlinien liegt, siehe Abb. 24. Die Kurven  $\eta = \text{konstant}$  sind also parallel zu den Schaufelskelettlinien; die längs ihnen gemessene Bogenlänge bezeichnen wir mit  $\sigma$ , ihren Neigungswinkel gegenüber der Umfangsrichtung mit  $\beta_\sigma$ .

Die Ansätze für  $\Delta_2$  und  $h$  lauten:

$$\begin{aligned} \Delta_2(Y)_{x=\text{konst.}} &= p_0 + p_1 \eta + p_2 \eta^2 + \dots + p_r \eta^r, \\ h(Y)_{x=\text{konst.}} &= q_0 + q_1 \eta + q_2 \eta^2 + \dots + q_r \eta^r, \end{aligned} \quad (22)$$

wobei  $p_i$  und  $q_i$  die bei jedem Schritte neu zu bestimmenden Unbekannten darstellen.

Die gemäß (20, 21) auftretenden gebrochenen, rationalen Funktionen entwickeln wir in Reihen

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{p_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \eta + \frac{p_2}{p_0} \eta^2 + \dots \right) + ( )^2 - ( )^3 + \dots \right], \quad (23)$$

welche wir im Verlaufe der Rechnung jeweils nach Maßgabe der relativen Größe der Glieder abbrechen.  $\eta$  liegt in den Schranken  $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$ .

Die Werte der Größen und ihrer Ableitungen für den in der Mitte des Intervalles  $\Delta X$  liegenden Punkt  $M(\eta)$  setzen wir folgendermaßen ein, siehe Abb. 26 (die Werte in  $X^*$  kennzeichnen wir durch das Zeichen \*):

$$f(M) = \frac{1}{2} [f(B) + f(D)] = \frac{1}{2} [f(\eta) + f^*(\eta)], \quad (24a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X}(M) = \frac{f(A) - f^*(C)}{\Delta X} = \frac{f(\eta - \zeta) - f^*(\eta + \zeta)}{\Delta X}, \quad (24b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(M) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial Y}(B) + \frac{\partial f}{\partial Y}(D) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial Y}(\eta) + \frac{\partial f}{\partial Y}(\eta) \right]. \quad (24c)$$

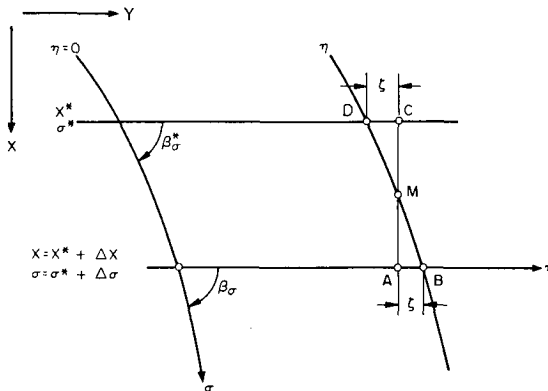


Abb. 26. Bildung der Differenzenausdrücke für den Punkt  $M$  in der Mitte des Intervalles  $\Delta X$ .

$B$  und  $D$  liegen auf derselben Kurve  $\eta = \text{konstant}$ , und  $\zeta$  berechnet sich so:

$$\zeta \approx \frac{\Delta X}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\beta_\sigma + \beta_\sigma^*}{2} \right).$$

Werden die Koeffizienten des Systems (17, 18) durch Polynome  $s$ -ten Grades in  $\eta$  dargestellt (bei unserm durchgerechneten Beispiele war  $r=3$ ,  $s=2$ , siehe Abschnitt 2c), so ergeben sich zusammen mit (22), beim Einsetzen für einen Schritt  $\Delta X$ , Potenzen bis mindestens vom  $(s+r)$ -ten Grade (wegen der Reihen (23) meist noch wesentlich höhere). Unser Ansatz (22), der nur eine endliche Anzahl von Gliedern aufweist, kann also die Gl. (17, 18) nicht exakt befriedigen. Wir gehen deshalb so vor, daß wir diese Gleichungen bezüglich der mit  $\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^{r-1}$  behafteten Glieder exakt erfüllen, was uns beim Koeffizientenvergleich  $2(r-1)$  Gleichungen liefert, nämlich aus Gl. (17):

$$\begin{aligned} f_0(p_0, \dots, p_r, q_0, \dots, q_r) &= K_0, \\ \vdots & \\ f_{r-1}(p_0, \dots, q_r) &= K_{r-1}, \end{aligned} \tag{25}$$

und aus Gl. (18):

$$\begin{aligned} g_0(p_0, \dots, q_r) &= L_0, \\ \vdots & \\ g_{r-1}(p_0, \dots, q_r) &= L_{r-1}. \end{aligned}$$

Die  $f$  und  $g$  sind lineare Ausdrücke in den  $p_i, q_i$ ;  $K$  und  $L$  sind Konstante. Daraus können die Unbekannten  $p_0, \dots, p_{r-1}, q_0, \dots, q_{r-1}$  des Ansatzes (22) eliminiert werden, d. h.

$$\left. \begin{aligned} p_i &= a_i + b_i p_r + c_i q_r, \\ q_i &= d_i + e_i p_r + f_i q_r. \end{aligned} \right\} i = 0, \dots, (r-1) \tag{26}$$

Die beiden verbleibenden Koeffizienten  $p_r$  und  $q_r$  bestimmen wir so, daß die Gl. (17, 18) doch im *Mittel* erfüllt werden, d. h. daß das Integral über die Quadrate der Fehlbeträge minimal wird.

Der Fehlbetrag von (17) beträgt:

$$\varphi_x = (f_r - K_r) \eta^r + (f_{r+1} - K_{r+1}) \eta^{r+1} + \dots, \tag{27}$$

derjenige von (18):

$$\varphi_y = (g_r - L_r) \eta^r + (g_{r+1} - L_{r+1}) \eta^{r+1} + \dots, \tag{28}$$

wobei  $f_r, f_{r+1}$  etc. vermöge (26) lineare Funktionen von  $p_r$  und  $q_r$  sind.  $\varphi_x$  kann deshalb auf die Form gebracht werden:

$$\varphi_x = (\lambda_r + \mu_r p_r + \nu_r q_r) \eta^r + (\lambda_{r+1} + \mu_{r+1} p_r + \nu_{r+1} q_r) \eta^{r+1} + \dots \tag{29}$$

und analog auch  $\varphi_y$ .

Wir fordern nun, daß das Integral des Fehlerquadrates minimal sei

$$\int_{-0,5}^{0,5} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) d\eta = \text{Minimum}, \quad (30)$$

d. h.

$$\int_{-0,5}^{0,5} \left( \varphi_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial p_r} + \varphi_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial p_r} \right) d\eta = 0, \quad (31)$$

$$\int_{-0,5}^{0,5} \left( \varphi_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_r} + \varphi_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_r} \right) d\eta = 0,$$

womit wir wegen (29) zwei lineare Gleichungen für  $p_r$  und  $q_r$  gewonnen haben; somit sind mit (26) alle  $p_i$  und  $q_i$  bekannt.

Die Glieder  $b_i p_r$ ,  $c_i q_r$  etc. in (26) erweisen sich stets als klein, was eine Rechtfertigung für das Vorgehen ist (Erfüllung der Gleichungen nur im Mittel statt exakt, beeinflußt  $p_0, \dots, p_{r-1}$ ,  $q_0, \dots, q_{r-1}$  nur wenig). Analog ist auch der Einfluß höherer Glieder in der Reihenentwicklung (23) schwach.

Damit sind  $\Delta_2(Y)$  und  $h(Y)$  in  $X = X^* + \Delta X$  nach Gl. (22) bestimmt, und wir können um einen Schritt  $\Delta X$  weiterschreiten, wobei wiederum der Rechnungsgang (25) bis (31) durchzuführen ist. Wir haben unsere Beispiele manuell durchgerechnet; das Verfahren wäre an sich für eine elektronische Rechenmaschine geeigneter.

### c) Ansatz für das Geschwindigkeitsfeld außerhalb der Grenzschicht

Wir betrachten in der Folge ein Gitter aus unendlich dünnen Schaufeln, ein sogenanntes Skelettgitter, und machen für die Geschwindigkeiten in der Kernströmung außerhalb der Wandgrenzschicht den einfachen Ansatz:

$$W_s = \psi_1(\sigma) + \psi_2(\sigma) \eta, \quad (32)$$

$$\beta = \arctg \frac{W_x}{W_y} = \beta(\sigma), \quad (33)$$

d. h. für einen gegebenen Schnitt  $\sigma = \text{konstant}$ , resp.  $X = \text{konstant}$ , sei  $\beta$  konstant und verlaufe  $W_s$  linear über der Teilung; somit sind die Stromlinien im Kern parallel.

Der Ansatz vernachlässigt also die Verlagerung der Stromlinien gegen die Saugseite, die im Gitter auftreten, und ist demzufolge sehr speziell. Auch verletzt er die Bedingungen der Rotationsfreiheit und der ebenen Kontinuität, doch hat man sich einfach zusätzliche Feldkräfte zu denken, die dieses Geschwindigkeitsfeld erzwingen, und die Kanalhöhe so zu variieren, daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Da die obigen zwei Bedingungen bei der

Ableitung der Gl. (17, 18) nicht vorausgesetzt wurden, sind letztere auch für diesen Fall korrekt.

Wir geben den Verlauf  $\psi_2(\sigma)$ , der die Geschwindigkeitsdifferenz für entsprechende Punkte der Saug- und Druckseite des Profils darstellt, vor:

$$\psi_2(\sigma) = -\frac{\pi \Delta W_y}{2 S_t} \sin \frac{\pi \sigma}{S_t} \quad (34)$$

( $\Delta W_y$  die totale Umlenkung im Gitter,  $S_t$  die totale Bogenlänge) und bestimmen  $\psi_1(\sigma)$  und  $\beta(\sigma)$  so, daß die ebene Kontinuitätsbedingung und die Rotationsfreiheit wenigstens auf der Linie  $\eta=0$ , die hier mit der Mittelstromlinie zusammenfällt, erfüllt sind. (Der Index  $_0$  bezeichne Größen auf der Mittelstromlinie.)

Die ebene Kontinuitätsgleichung fordert:

$$W_{x0} = W_{s0} \sin \beta = \text{konstant}, \quad (35)$$

womit sie wegen des speziellen Ansatzes (32) auch im Mittel erfüllt ist. Setzen wir

$$\left( \frac{\partial W_{y0}}{\partial \sigma} \right)_{\eta} = \left( \frac{\partial W_{s0}}{\partial \eta} \right)_{\sigma},$$

also 
$$W_{y0} = \int_0^{\sigma} \psi_2(\sigma) d\sigma + W_{y01} = W_{y01} - \frac{\Delta W_y}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi \sigma}{S_t} \right), \quad (36)$$

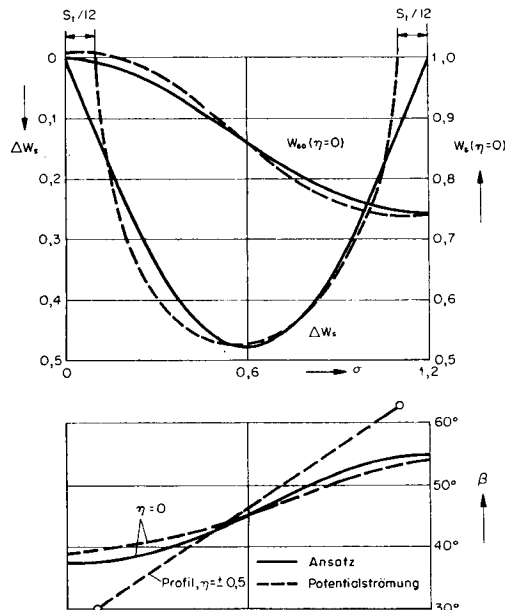


Abb. 27. Ansatz für die Geschwindigkeit in der Kernströmung. Vergleich mit der ebenen Potentialströmung für das Kreisbogen-Skelettgitter.



so werden die Bewegungsgleichungen für wirbelfreie Strömung auf der Mittelstromlinie befriedigt.

(Beachte dabei:  $\left(\frac{\partial}{\partial \sigma}\right)_\eta = \sin \beta \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_Y + \cos \beta \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)_X$ .)

Aus (36) ergibt sich nun  $W_{y0}$ , aus (35) sodann

$$W_{s0} = \psi_1(\sigma) = (W_{x0}^2 + W_{y0}^2)^{1/2} \text{ sowie } \beta.$$

In Abb. 27 ist unser Ansatz verglichen mit der durch konforme Abbildung nach *Weinig* [8] ermittelten ebenen Potentialströmung für ein Gitter mit den folgenden Daten:

$$\begin{aligned} W_{x0} &= 0,61; & \Delta W_y &= 0,366; & t/s &= 1; \\ \text{d. h. } \beta_1 &= 37,6^\circ; & \beta_2 &= 55,0^\circ. \end{aligned}$$

(Entspricht einem Verzögerungsverhältnis im Gitter von 0,745; die entsprechende Stufe mit  $r=0,5$  hätte  $c_x/u=0,5$ ;  $\Delta c_y/u=0,3$ .)

Bei unserem vereinfachten Ansatz lassen wir dabei die Gitterwirkung um  $1/12$  der totalen Bogenlänge  $S_t$  über den geometrischen Ein- und Austritt des Gitters hinausreichen.

Dargestellt sind die Verhältnisse auf der Mittelstromlinie sowie auf der Druck- und der Saugseite des Profils. Die Winkelübertreibung des wirklichen Profils wird natürlich durch den Ansatz (Parallelströmung!) nicht wiedergegeben, doch stellt er sonst die wesentlichen Züge richtig dar.

An sich wäre es möglich, das geschilderte Lösungsverfahren auch mit einem komplizierteren Ansatz zu verwenden, welcher dem wirklichen Strömungsfeld in einem Gitter besser entspräche, doch würde der Arbeitsaufwand wesentlich erhöht.

#### d) Ergebnisse für spezielle Beispiele

In den Abb. 28 bis 32 finden sich die Ergebnisse für ein Gitter mit den im Abschnitt 2c aufgeführten Daten. Mehr als qualitative Hinweise sind ihnen in Anbetracht der Vereinfachungen und einer gewissen Willkür in den Ansätzen nicht zu entnehmen. In (2, 3) wurde gesetzt:

$$\begin{aligned} m &= 1/5 \quad (\text{entspricht } H_{12} = 1,4), \\ n &= 2, \end{aligned}$$

während in den Ansätzen (22) Polynome 3. Grades verwendet wurden.

Der maßgebende Anfangswert ist neben dem Unterströmungsparameter  $k$  nicht  $\Delta_2$ , sondern das Verhältnis des Impulsstromes zu den Wandreibungskräften, d. h.  $\Delta_2/c_f$ . Für die 2-dimensionale Grenzschicht an einer ebenen Platte ist dieses Verhältnis abhängig vom Formparameter und von der Reynoldszahl

(glatte Platte), resp. vom Formparameter und von der relativen Rauigkeit (vollkommen rauhe Platte).

Wir setzen in unseren Beispielen für den gesamten Gitterbereich

$$c_f = \text{konstant}$$

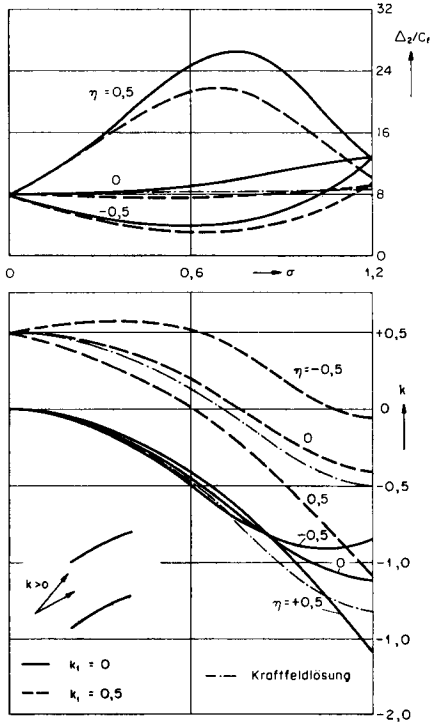


Abb. 28. Grundlösung mit  $(\Delta_2/c_f)_1 = 8$ . Verhältnisse längs des Gitters, Vergleich mit der Kraftfeldlösung.

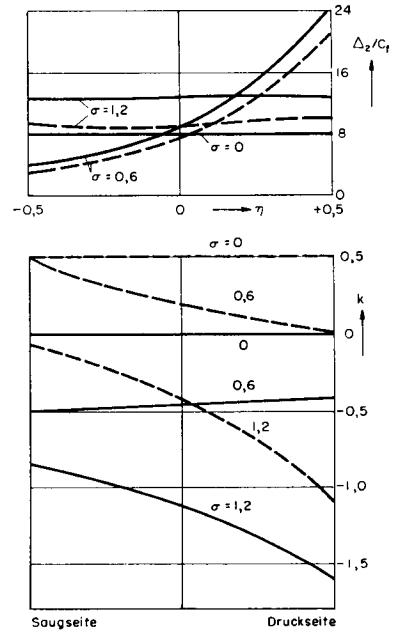


Abb. 29. Grundlösung mit  $(\Delta_2/c_f)_1 = 8$ . Verhältnisse über der Teilung.

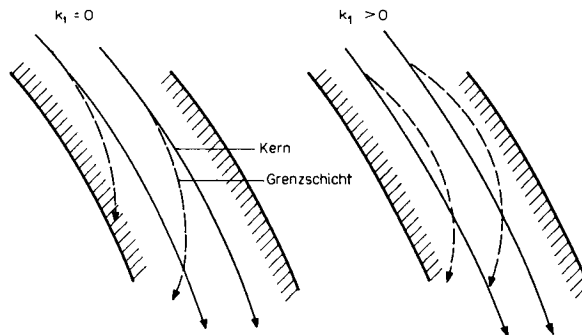


Abb. 30. Schematische Darstellung der Strömung in der Seitenwandgrenzschicht.

und betrachten für das Verhältnis  $\Delta_2/c_f$  beim Eintritt die beiden Varianten:

$$\left(\frac{\Delta_2}{c_f}\right)_1 = 8 \begin{cases} k_1 = 0 & \text{I} \\ k_1 = 0,5 & \text{II} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\Delta_2}{c_f}\right)_1 = 0,8 \begin{cases} k_1 = 0 & \text{III} \\ k_1 = 0,5 & \text{IV} \end{cases}$$

wobei wir bezüglich der Unterströmung am Eintritt je die Fälle  $k_1=0$  und  $k_1=0,5$  untersuchen ( $_1$  bezeichnet hier die Zuströmung).

Bei III und IV ist also die Grenzschicht beim Eintritt viel dünner; die Reibungskräfte sind im Verhältnis 10mal größer.

Setzen wir z. B.  $c_f = 2,5 \cdot 10^{-3}$ , so hat  $\Delta_2$  in den Fällen I und II beim Eintritt die Größe  $2 \cdot 10^{-2}$ , womit nach Gl. (12) die Grenzschichtdicke  $\Delta$  selbst 0,168 beträgt, d. h.  $1/6$  der Teilung; in den Fällen III und IV ist sie 10mal kleiner.

Abb. 28 zeigt für die Varianten I und II die Entwicklung von  $\Delta_2/c_f$  und von  $k$  längs des Gitters, Abb. 29 die Verhältnisse über der Teilung in gewissen Schnitten  $\sigma = \text{konstant}$ , gleichbedeutend mit  $X = \text{konstant}$ , siehe Abb. 26. Infolge unseres speziellen Ansatzes (35) ( $W_{x0} = \text{konstant}$ ) wächst  $\Delta_2$ , die Impulsmangeldicke bezüglich der Geschwindigkeitskomponente  $W_x$ , längs der Mittelstromlinie nur infolge der Wandreibungskräfte und der Änderung der Unterströmung; Druckkräfte haben direkt keinen Einfluß.

Deutlich sichtbar ist der Einfluß der Unterströmung beim Eintritt. Ist eine solche vorhanden (Fall II), so wächst z. B. in der Mitte die Größe  $\Delta_2$  weniger stark an, ja sie sinkt sogar zuerst. Nach dem Gitter ist  $\Delta_2$  wieder praktisch konstant längs des Umfangs.

Im Falle I bildet sich entsprechend dem Druckfeld eine immer stärkere, gegen die Saugseite gerichtete Unterströmung aus ( $k$  negativ). Im Falle II wird die anfänglich gegen die Druckseite gerichtete Unterströmung zurückgebildet und wechselt auf der Mittelstromlinie kurz nach der Gittermitte das Vorzeichen (vergleiche auch die schematische Darstellung in Abb. 30). Die Zurückbildung erfolgt auf der Druckseite viel rascher als auf der Saugseite. Die hier auftretende anfängliche Vergrößerung des Unterströmungsparameters  $k$  könnte aber auf den ersten Blick etwas irreführen, denn die Unterströmungsgröße  $h$  (resp. der ihr proportionale Zusatzimpulsstrom) nimmt doch ab, aber etwas weniger stark als die Grenzschichtdicke, vgl. Gl. (13); die Grundgleichungen (17, 18) sind aber im wesentlichen Impulsstrom-Bilanzen. Der Grund für die Vergrößerung von  $k$  liegt in den Gliedern  $\Delta_2 H_{12} \cdot W_x \cdot \partial W_x / \partial X \dots$  resp.  $h B_{11} \cdot W_y \cdot \partial W_x / \partial Y \dots$ , welche zum Ausdruck bringen, daß Druckgradienten infolge des in der Grenzschicht verminderten Massenstromes ( $\Delta_2 H_{12}$  ist die Verdrängungsdicke) zusätzlicher Impulszufuhr äquivalent sind, die sich auf die Unterströmung anders auswirkt als auf die Hauptströmung.

Die beim Austritt vorhandene Unterströmung (sie ist negativ, relativ zum nächsten Gitter aber positiv) entspricht für das folgende Gitter einer Vermehrung der zur Verfügung stehenden kinetischen Energie. Diese wird teilweise nutzbar verwendet, indem die Grenzschicht weniger stark anwächst, teilweise vernichtet bei der Ausrichtung der Strömung in den Ecken.

Ist die Eintrittsgrenzschicht dünner (Fälle III und IV), d.h. sind die Wandreibrungskräfte im Verhältnis zu den Impulsströmen größer, so verdickt sich die Grenzschicht schneller, vergleiche Abb. 31 und 32, während die Unterströmung schwächer wird, da sie durch die Reibung stärker gebremst wird: Die Eintritts-Unterströmung wird schneller abgebaut; die Differenz der Werte an der Saug- und der Druckseite wird verkleinert. Da die Ergebnisse aber qualitativ die gleichen sind, haben wir die Varianten III und IV nur bis zur Gittermitte durchgerechnet.

Wir können nun auch die kinetische Energie der der Ecke zufließenden Normalströmung abschätzen, die ein Maß für den Verlust darstellt, welcher in den Ecken durch die Umlenkung der Grenzschichtströmung in schaufelparallele Richtung verursacht wird. Wir bilden das Verhältnis  $a$  dieser Energie zur Umfangsarbeit in einer Stufe

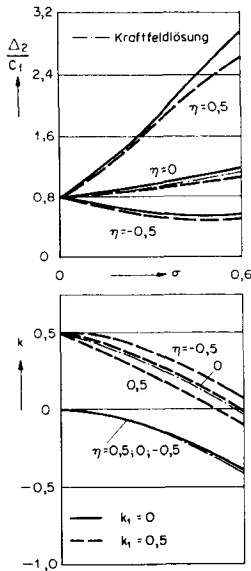


Abb. 31. Grundlösung mit dünneren Grenzschichten, d. h.  $(\Delta_2/c_f)_1 = 0,8$ . Verhältnisse längs des Gitters, Vergleich mit der Kraftfeldlösung.

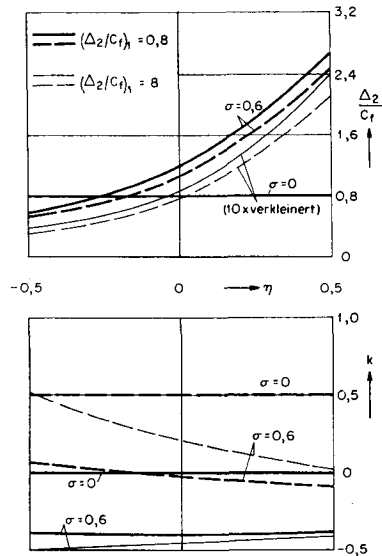


Abb. 32. Grundlösung mit  $(\Delta_2/c_f)_1 = 0,8$ . Verhältnisse über der Teilung. Zum Vergleich auch Werte mit 10 mal größerer Grenzschichtdicke am Eintritt, d. h.  $(\Delta_2/c_f)_1 = 8$ .

$$a = \frac{t \int_0^{\frac{S_t \Delta}{2}} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} W_n^3 dZ d\sigma}{\bar{l} \frac{1}{2} W_{x\delta} U \Delta W_{y\delta}}$$

mit  $W_n$  in  $\eta = \pm 0,5$  nach Gl. (40) und erhalten im Falle I:  $a = 0,0020 t/l$ , im Falle II:  $a = 0,0005 t/l$  (für Saug- und Druckseite zusammen). Da in einer Stufe vier solche Eckenpaare vorhanden sind, wird total die Größenordnung  $1/2 \cdot 0/10$  erreicht.

In den Abb. 28 und 31 sind ferner die Lösungen eingetragen, die sich nach den analogen Ansätzen unter Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung ergeben (siehe Abschnitt 4). Sie stimmen auch bezüglich des Unterströmungsparameters  $k$  mit der exakteren Lösung in der Umgebung der Mittelstromlinie recht gut überein; die Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung ist also zur Gewinnung einer mittleren Lösung erlaubt.

### 3. Die Eckenlösung

#### a) Grundlegender Ansatz

Die soeben bestimmte Grundlösung weist an der Saug- und Druckseite, d. h. in  $\eta = \pm 0,5$ , physikalisch unmögliche Normalkomponenten  $W_n$  zur Schaufel auf; wir denken uns nun, daß ein in dieser Normalenrichtung wirkendes zusätzliches Kraftfeld die tangentiale Strömung an der Schaufel erzwingt. Wir setzen voraus, daß sich diese Zusatzwirkung stets nur auf ein beschränktes Gebiet in Schaufelnähe ( $\eta < \bar{\eta}$  nach Abb. 33) erstreckt und daß sie  $W_n$  von

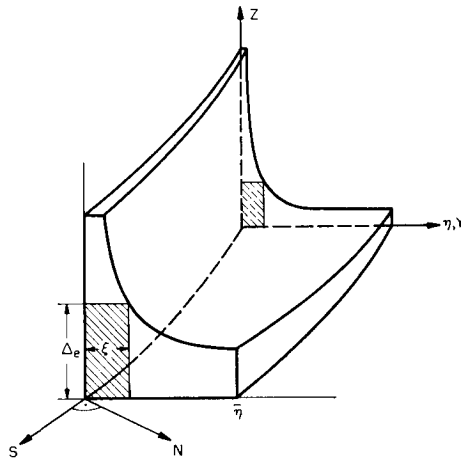


Abb. 33. Bezeichnungen in der Eckengrenzschicht.  
 Fläche  $S-Z$ : Schaufel      Fläche  $S-Y$ : Seitenwand

dem der Grundlösung in  $\bar{\eta}$  entsprechenden Werte exponentiell auf Null an der Schaufel fallen lasse.

Ist  $W_n$  in  $\bar{\eta}$  z. B. negativ, so fließt bei den in Abb. 33 skizzierten Verhältnissen eine gewisse Menge seitlich in die Eckenzone ein, die dann entweder in der Längsrichtung  $S$  abfließt oder an der Schaufel selbst in  $Z$ -Richtung aufsteigt, d. h. in die Profilgrenzschicht übertritt. Die zwischen der Eckenzone und der Profilgrenzschicht ausgetauschten Mengen sind aber entsprechend der Profilgrenzschicht mit Impulsmangel behaftet; darin liegt ein Unterschied der Eckengrenzschicht gegenüber einer 2-dimensionalen Plattengrenzschicht, bei welcher die in  $Z$ -Richtung, d. h. mit der Kernströmung ausgetauschten Mengen keinen Impulsmangel besitzen. Ein weiterer Unterschied liegt darin, daß der Reibungsumfang im Verhältnis zur Durchströmfläche größer (d. h. der hydraulische Durchmesser kleiner) ist. Wir wollen nun versuchen, die Eckengrenzschicht roh abzuschätzen unter der Annahme, daß die mit der Seitenwandgrenzschicht ausgetauschten Massen- und Impulsströme durch die Grundlösung in  $\bar{\eta}$  und den erwähnten Ansatz über die Wirkung des Zusatzkraftfeldes vorgeschrieben seien. Den für diese Eckenzone erhaltenen Wert der Grenzschichtdicke, die *Eckenzonendicke*, fassen wir als Randwert unserer Lösung für  $\eta = \pm 0,5$  auf, von welchem die Lösung exponentiell in die Grundlösung übergehe.

Als Eckenzone betrachten wir nach Abb. 33 eine rechteckige Durchströmfläche der Breite  $\xi$  und der Höhe  $\Delta_e$ , wobei sich  $\xi$  zu  $\Delta_e$  etwa wie die Dicken der Schaufel- und Wandgrenzschicht außerhalb des Einflußbereiches der Ecke verhalten. Dieser Ansatz ist recht willkürlich, aber die Eckenzonendicke soll nur eine qualitative Abschätzung sein.

### b) Impulssatz für die Eckenzone

Wir formulieren die Bewegungsgleichung in der Richtung  $S$  längs der Schaufel

$$W_s \frac{\partial W_s}{\partial S} + W_n \frac{\partial W_s}{\partial N} + W_z \frac{\partial W_s}{\partial Z} - c W_s W_n = W_s'' \frac{\partial W_s''}{\partial S} + \frac{\partial T_{sz}}{\partial Z} + \frac{\partial T_{sn}}{\partial N}, \quad (37)$$

wo  $W_s''$  die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschichten sei. Wir treffen also die Annahme, daß der Druckgradient in der  $S$ -Richtung von der Kernströmung aufgeprägt werde, daß also das Zusatzkraftfeld keine Komponente in  $S$ -Richtung aufweise. Da wir für  $W_s''$  den Wert einsetzen, der für die reibungsfreie Gitterströmung an der Schaufel gälte, muß die Breite  $\xi$  der Eckenzone sehr klein sein.

$c$  bedeutet die Krümmung der Schaufel; sie tritt in der Bewegungsgleichung auf, weil das Koordinatensystem  $S$ - $N$ - $Z$  krummlinig ist.

Durch Integration von (37) über die Eckenzone folgt unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$-c W_n + \frac{\partial W_s}{\partial S} + \frac{\partial W_n}{\partial N} + \frac{\partial W_z}{\partial Z} = 0 \quad (37a)$$

die Beziehung (für die Saugseite geschrieben):

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta_e} \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial S} [W_s (W_s'' - W_s)] dN dZ + \frac{\partial W_s''}{\partial S} \int_0^{\Delta_e} \int_0^{\xi} (W_s'' - W_s) dN dZ = T_{snw} \Delta_e + T_{szw} \xi - \\ - \int_0^{\Delta_e} W_n \xi (W_s'' - W_{s\xi}) dZ + \int_0^{\xi} \int_0^{\Delta_e} (W_s'' - W_{s\Delta}) \left( \frac{\partial W_s}{\partial S} + \frac{\partial W_n}{\partial N} \right) dZ dN + \\ + c \int_0^{\Delta_e} \int_0^{\xi} W_n (W_{s\Delta} - 2W_s) dN dZ. \end{aligned} \quad (38)$$

Die (mit  $c$  behafteten) Krümmungsglieder sind klein, so daß wir sie im Rahmen unserer Abschätzung vernachlässigen. Das dritte und vierte Glied rechts besagen, daß die mit der Seitenwand-, resp. der Schaufelgrenzschicht ausgetauschten Mengen nicht den vollen Impuls  $\dot{m} W_s''$ , sondern nur  $\dot{m} W_{s\xi}$ , resp.  $\dot{m} W_{s\Delta}$  besitzen. ( $W_{s\xi}$  bedeutet  $W_s(N=\xi)$ ,  $W_{s\Delta}$  steht für  $W_s(Z=\Delta_e)$ .) Die übliche Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration im ersten Gliede links ist nicht mehr erlaubt, da die Grenzen endliche, von  $S$  abhängige Größen sind.  $T_{snw}$  ist der Mittelwert der Schubspannungen an der Schaufel im Bereiche  $0 \leq Z \leq \Delta_e$ ,  $T_{szw}$  an der Seitenwand im Bereiche  $0 \leq N \leq \xi$ .

Für die Geschwindigkeitskomponente  $W_s$  setzen wir in der Eckenzone

$$W_s = W_s'' \left( \frac{Z}{\Delta_e} \right)^m \left( \frac{\pm N}{\xi} \right)^m \left[ 1 + k \cos^2 \beta \left( 1 - \frac{Z}{\Delta_e} \right)^n \right], \quad (39)$$

wobei der Ansatz für  $N = \pm \xi$  in die Grundlösung übergeht, vergleiche Gl. (2). Nach unseren Festlegungen gilt an der Saugseite das obere Zeichen.

$W_n$  berechnet sich folgendermaßen:

$$W_n = W_y \sin \beta - W_x \cos \beta$$

und hat für die Grundlösung in  $\bar{\eta}$  nach (2) somit den Wert

$$\bar{W}_n = \bar{W}_y \delta \left( \frac{Z}{\Delta} \right)^m \bar{k} \left( 1 - \frac{Z}{\Delta} \right)^n \sin \beta. \quad (40)$$

Von diesem Werte soll nun  $W_n$  infolge der Wirkung des zusätzlichen Kraftfeldes exponentiell gegen die Schaufel auf Null abfallen. Wir machen deshalb für  $W_n$  im Bereiche der Ecke den Ansatz ( $\xi$  ist klein, d. h.  $\bar{\eta} \approx \mp 0,5$ ):

$$W_n = W_s'' \sin \beta \cos \beta \left[ \frac{Z}{\Delta_e} \right]^m k^n \left[ 1 - \frac{Z}{\Delta_e} \right]^n \left[ \frac{\pm N}{\xi} \right]^m g \left( \frac{N}{\xi} \right) \quad (41)$$

mit 
$$g\left(\frac{N}{\xi}\right) = 1 - e^{-\gamma N/\xi} \quad (42)$$

(oberes Zeichen Saugseite).

Der Einflußbereich des Zusatzkraftfeldes sei also proportional der Breite der Eckenzone. An der Schaufel ( $N=0$ ) verschwindet  $W_n$ ; setzen wir  $\gamma=1,5$ , so hat  $g$  in  $N = \pm 2\xi$  (d.h. in einer Entfernung  $2\xi$  von der Schaufel) den Wert 0,95; der Einfluß des Zusatzkraftfeldes ist also schon auf 5% zurückgegangen.

Führen wir die Fläche  $f$  der Eckenzone ein:

$$f \equiv \xi \Delta_e = \nu \Delta_e^2, \quad (43)$$

wobei 
$$\nu \equiv \xi/\Delta_e, \quad (44)$$

und setzen wir zur Abkürzung  $\chi \equiv k'' \cos^2 \beta$ , 
$$(45)$$

so erhalten wir nach der Durchführung der verschiedenen Differentiationen und Integrationen aus dem Impulssatz (38) unter Berücksichtigung der Ansätze (39) bis (45) die Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S} U_1(m, n, \chi) + \frac{\partial}{\partial S} \left( \sqrt{\frac{f}{\nu}} \right) \sqrt{\nu} f U_2(m, n, \chi) + \frac{\partial W_s''}{W_s''} \frac{\partial}{\partial S} f U_3(m, n, \chi) + \\ + \frac{\partial \chi}{\partial S} f U_4(m, n, \chi) = [c_{fv} \nu + c_{fp}] \sqrt{\frac{f}{4\nu}} \pm \frac{\chi}{\text{ctg } \beta} U_5(m, n, \chi) \sqrt{\frac{f}{\nu}}, \end{aligned} \quad (46)$$

wobei 
$$c_{fp} \equiv \frac{2 T_{snw}}{W_s''^2}, \quad c_{fv} \equiv \frac{2 T_{szw}}{W_s''^2}. \quad (47)$$

Gl. (46) läßt sich integrieren, sobald eine Annahme über  $\nu$  getroffen worden ist (z. B.  $\nu = \text{konstant}$ ).

Wir formen Gl. (46) noch etwas um, indem wir die *Impulsmangelfläche*  $f_2$  einführen (analog zur Impulsmangeldicke bei der 2-dimensionalen Plattengrenzschicht):

$$f_2 W_s''^2 \equiv \int_0^\xi \int_0^{\Delta_e} W_s (W_s'' - W_s) dZ dN, \quad (48)$$

d. h. wegen (39) und (43)

$$f_2 = f \left[ m_3 + \left( \frac{B_{11}}{m+1} - \frac{2 B_{21}}{2m+1} \right) \chi - \frac{B_{22}}{2m+1} \chi^2 \right], \quad (49)$$

wobei  $m_1 \equiv \frac{2+2m}{2+3m}$ ,  $m_2 \equiv \frac{1+7m+12m^2+4m^3}{2+3m}$ ,  $m_3 \equiv \frac{2m+3m^2}{(1+m)^2(1+2m)^2}$ . 
$$(50)$$

Definieren wir eine *mittlere Impulsmangeldicke* der Eckenzone

$$\Delta_{2e} \equiv \frac{f_2}{\xi} \quad (51)$$



und gilt im weiteren

$$\nu = \xi/\Delta_e = \text{konstant}, \quad (52)$$

so läßt sich Gl. (46) schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{2e}}{\partial S} V_1(m, n, \chi) + \frac{\partial W_s''}{W_s'' \partial S} \Delta_{2e} V_2(m, n, \chi) + \frac{\partial \chi}{\partial S} \Delta_{2e} V_3(m, n, \chi) = \\ = \frac{c_{fv}}{2} + \frac{c_{fp}}{2\nu} \pm \frac{\chi}{\nu \operatorname{ctg} \beta} V_4(m, n, \chi). \end{aligned} \quad (53)$$

Gl. (53) unterscheidet sich im prinzipiellen Aufbau nicht von dem Impulssatz für die gewöhnliche 2-dimensionale Plattengrenzschicht

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial S} + \frac{\partial W_{s\delta}}{W_{s\delta} \partial S} \Delta_2 (2 + H_{12}) = \frac{c_f}{2}, \quad (54)$$

doch sind die Koeffizienten wegen des Ansatzes (39) für die Geschwindigkeit  $W_s$  andere; insbesondere ist  $W_s$  nach (39) auch von der Unterströmung, d. h. von  $\chi$  abhängig; daneben ist die Wandreibung erhöht und es treten Zusatzglieder auf, hervorgerufen durch die Unterströmung, welche der Ecke von der Seitenwandgrenzschicht her zufließt. Diese ist im vorliegenden Falle gegeben ( $\chi$  in Funktion von  $S$  bekannt), so daß Gl. (53) schrittweise integriert werden kann.

Es erhebt sich noch die Frage nach dem Anfangswerte  $(\Delta_{2e})_{S=0}$ . Ist die Grenzschichtdicke  $\Delta$  der Zuströmung vor dem Gitter gegeben, so bestimmen wir  $(\Delta_{2e})_{S=0}$  nach Gl. (49, 51):

$$(\Delta_{2e})_{S=0} = \Delta \left[ m_3 + \left( \frac{B_{11}}{1+m} - \frac{2 B_{21}}{1+2m} \right) \chi - \frac{B_{22}}{1+2m} \chi^2 \right]. \quad (55)$$

Wir setzen also voraus, daß sich die Reibung an der Schaufel in der plötzlichen Ausbildung einer Schaufelgrenzschicht von der Dicke  $\xi = \nu \Delta_e$  auswirke und daß das Zusatzkraftfeld von keinen zusätzlichen Druckkräften parallel zur Schaufel begleitet sei, so daß die Geschwindigkeitskomponente  $W_s$  der Zuströmung für den anfänglichen Impulsmangel entscheidend ist.

Für die Grenzschicht bei *symmetrischer* Strömung in der Ecke längs einer *geraden Kante* ist  $\chi = 0$  und  $\xi = \Delta_e$ , d. h.  $\nu = 1$ . Gl. (53) lautet nun:

$$\frac{\partial \Delta_{2e}}{\partial S} m_1 + \frac{\partial W_s''}{W_s'' \partial S} \Delta_{2e} (2 + m_2) = 2 \frac{c_f}{2},$$

oder mit  $m = 0,2$ :

$$\frac{\partial \Delta_{2e}}{\partial S} + \frac{\partial W_s''}{W_s'' \partial S} \Delta_{2e} 3,38 = 2,16 \frac{c_f}{2},$$

während für die gewöhnliche Plattengrenzschicht nach Gl. (54) gilt:

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial S} + \frac{\partial W_s''}{W_s'' \partial S} \Delta_2 \approx 3,4 = \frac{c_f}{2},$$

welche sich praktisch nur durch das Reibungsglied unterscheidet. An sich hätte man wohl auch eine Veränderung im Verhältnis der übrigen Glieder erwartet wegen des in der Eckengrenzschicht relativ größeren Impulsmangels, doch wird dieser Einfluß wieder kompensiert durch die Tatsache, daß die von der Eckengrenzschicht nach beiden Seiten ausgetauschten Mengen mit Impulsmangel behaftet sind, während bei der Platte der Austausch mit der reibungsfreien Außenströmung erfolgt.

Die Lösung von Gl. (53) ist prinzipiell nicht schwierig, aber sehr umständlich; die wesentlichen Besonderheiten der Eckengrenzschicht werden besser sichtbar, wenn wir den Fall betrachten, daß die Unterströmung nicht in  $Y$ -Richtung erfolge (unser Ansatz (1)), sondern in  $N$ -Richtung wie bei *Mager* [25]. Dann fällt in (39) das Glied mit  $k$  weg und (53) hat die einfachere Gestalt:

$$\frac{\partial \Delta_{2e}}{\partial S} m_1 + \frac{\partial W_s''}{W_s'' \partial S} \Delta_{2e} (2 + m_2) = \frac{c_{fw}}{2} + \frac{c_{fp}}{2\nu} \mp \frac{\sin \beta \cos \beta}{\nu} G k'' \quad (56)$$

mit 
$$G \equiv g(1) D - m B_{11} \int_0^1 u^{2m-1} g(u) du.$$

(Das obere Zeichen gilt an der Saugseite.)

Da  $G$  positiv ist, sehen wir anhand von Gl. (56), daß eine auf die Schaufel zugerichtete Unterströmung (an der Druckseite  $k'' > 0$ , an der Saugseite  $k'' < 0$ ), wegen des damit verbundenen Transportes von energiearmem Grenzschichtmaterial in die Ecke, eine Vergrößerung von  $\Delta_{2e}$  bewirkt. Wird das Gitter *ohne* Unterströmung angeströmt, so wird durch das Druckfeld im Gitter selbst eine negative, zur Saugseite gerichtete Unterströmung erzeugt, so daß sich die Grenzschicht in der Saugecke verdickt. Erfolgt die Zuströmung *mit* Unterströmung, so wird diese erst nach einer gewissen Strecke rückgängig gemacht, siehe Abb. 30. Die Grenzschicht in der Saugecke verdickt sich bis zum Gitterende total viel weniger stark als bei unterströmungsfreiem Eintritt. Eine von der Schaufel weggerichtete Strömung bewirkt eine Verringerung der Eckengrenzschichtdicke, was so zu erklären ist, daß nun zwar Transport von der Schaufelgrenzschicht her in die Ecke stattfindet, daß aber die in die Seitenwandgrenzschicht abfließende Menge mehr Impulsmangel wegbeefördert, als von der Schaufelgrenzschicht her zuströmt.

Ist die Unterströmung nicht auf die  $N$ -Richtung beschränkt, was beim Übergang zwischen zwei Kränzen in Turbomaschinen sicher der Fall ist, so

wirkt eine vorhandene positive Eintrittsunterströmung im Sinne eines vergrößerten Impulses der anfänglichen Eckengrenzschicht, d. h.  $(\Delta_{2e})_{S=0}$  ist kleiner.

Wesentlich komplizierter werden die Verhältnisse in den Ecken, wenn sich die Seitenwand relativ zu den Schaufeln bewegt und ein Spalt vorhanden ist; im weiteren wirkt sich eine Radialströmung in der Schaufelgrenzschicht (z. B. im Laufrad infolge der Zusatzkräfte der Relativbewegung) in ähnlichem Sinne auf die Eckenlösung aus wie die Unterströmung der Seitenwandgrenzschicht.

### c) Beispiel

Wir bestimmen die Eckenlösung nach der einfacheren Gl. (56), bei welcher vorausgesetzt ist, daß sich die Unterströmung der Seitenwandgrenzschicht auf die Normalrichtung  $N$  beschränke. Der Einfluß der Unterströmung in der Seitenwandgrenzschicht wird in Gl. (56) durch den Unterströmungsparameter  $k''$  der Grundlösung zum Ausdruck gebracht. Der Verlauf von  $k''$  längs  $S$  ist aber wenigstens prinzipiell derselbe, ob nun die Grundlösung mit der Voraussetzung der Unterströmung in  $Y$ -Richtung (unsere Lösung von Abschnitt 2) oder in  $N$ -Richtung (die Lösung von Mager [25]) berechnet wird. Für eine erste rohe Abschätzung des Einflusses der Unterströmung in der Wandgrenzschicht auf die Eckengrenzschicht ist es daher zulässig, die Werte für  $k''$  der Lösung von Abschnitt 2 (Variante I ohne Unterströmung am Eintritt, Vari-

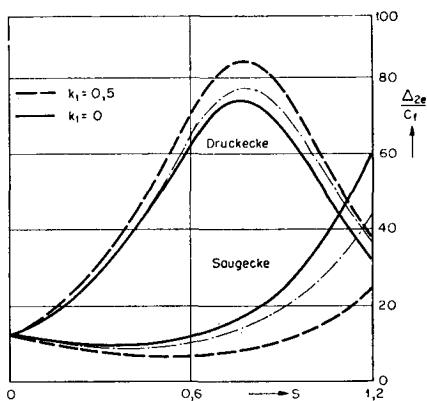


Abb. 34. Der Einfluß der Unterströmung in der Wandgrenzschicht auf die Entwicklung der Eckengrenzschicht.

$k_1 = 0$ : Wandgrenzschicht beim Gittereintritt ohne Unterströmung.

$k_1 = 0,5$ : Wandgrenzschicht beim Gittereintritt mit Unterströmung.

Vergleichslösung ohne Berücksichtigung der Unterströmung in der Wandgrenzschicht ( $k'' = 0$  gesetzt).

ante II mit Unterströmung am Eintritt, nämlich  $k_1 = 0,5$ ) zu entnehmen. Die Ergebnisse finden sich in Abb. 34. Wir setzen dabei

$$m = 0,2; \quad n = 2; \quad c_{fw} = c_{fp} = \text{konstant}; \\ \nu = 1/4; \quad \gamma = 1,5.$$

In der Zuströmung sei  $\Delta_2/c_f = 8$ , womit aus den sinngemäß verwendeten Gl. (12, 55) (die Glieder mit  $\chi$  fallen weg, da Unterströmung nur in  $N$ -Richtung) folgt:

$$(\Delta_{2e}/c_f)_{s=0} = 12,4.$$

Ist am Eintritt Unterströmung vorhanden (Fall II), so ist das Wachstum der Saugeckengrenzschicht bedeutend geringer als ohne Unterströmung. Strichpunktiert ist auch der Verlauf von  $\Delta_{2e}$  eingetragen, der sich ohne Berücksichtigung der Unterströmung (mit  $k'' \equiv 0$ ) unter der Wirkung des Gradienten  $\partial W_s''/\partial S$  und der Reibungskräfte allein ergäbe; er nimmt eine Mittelstellung zwischen den Varianten I und II ein.

Die beim Austritt vorhandene Lösung stellt, entsprechend der Relativbewegung umgerechnet, die Anfangsbedingung für das folgende Gitter dar. Die ausgeprägten Verlustgebiete in den Ecken haben zur Folge, daß die Zuströmung in das folgende Gitter stark instationären Charakter besitzt und daß das zeitliche Mittel der Verdrängungsdicke etc. gegenüber den Verhältnissen im Grundlösungsgebiet erhöht ist.

In unseren Beispielen wird die Eckengrenzschicht an gewissen Stellen (Mitte der Druckseite, Ende der Saugseite) so dick, daß die vorgenommenen Vernachlässigungen unzulässig sind; sofern keine Ablösung auftritt, die wir wegen des festen Exponenten  $m$  im Ansatz für die Geschwindigkeiten nicht erfassen können, sind die Ergebnisse doch qualitativ richtig. Durch eine überschlägige Kontrollrechnung für die Varianten III und IV, wo um eine Größenordnung dünnere Grenzschichten vorhanden sind, wurde dies überprüft. Der Einfluß der Unterströmung ist hier geringer, da sie einerseits an sich geringer ist und weil die Reibungskräfte relativ viel größer sind.

#### **4. Vergleichslösung unter Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung (Kraftfeldlösung)**

Um den Einfluß der Vernachlässigung der endlichen Gitterteilung festzustellen, worauf ja die in den Kapitel II bis IV behandelte Kraftfeldlösung basiert, müssen wir eine analoge Lösung mit dem 2-parametrischen Geschwindigkeitsansatz ermitteln, bei der alle Geschwindigkeiten längs des Umfanges konstant sind und der Druckgradient in  $Y$ -Richtung durch ein Kraftfeld ersetzt wird, das die gewünschte Umlenkung hervorruft. Weil nun

$$\frac{\partial}{\partial Y} = 0, \quad (55)$$

lauten nun (17) und (18): (wobei  $k = \frac{h}{\Delta_2} \frac{m}{(2m+1)(m+1)}$ )

$$\frac{\partial}{\partial X} (W_x^2 \Delta_2) + H_{12} W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} \Delta_2 = T_{xw}, \quad (17')$$

$$\frac{\partial}{\partial X} [W_x W_y (\Delta_2 - B_{21} h)] + H_{12} W_x \frac{\partial W_y}{\partial X} \Delta_2 = T_{xw} \frac{W_y}{W_x} (1+k). \quad (18')$$

$\Delta_2$  kann aus (17') direkt bestimmt werden und ist somit unabhängig von der Unterströmung; (17') ist die Gleichung der gewöhnlichen Plattengrenzschicht, wobei nur in  $T_{xw}$  nach Gl. (19) der Einfluß der Umfangskomponente der Geschwindigkeit eingeht (analog dem erhöhten turbulenten Austausch im Abschnitt III. 3). Der Unterströmungsparameter  $k$  resp. die Unterströmungsgröße  $h$  folgen sodann aus (18').

Bei unserer Lösung des Abschnittes 2 mit Berücksichtigung der endlichen Teilung galt auf der Mittelstromlinie

$$W_{x0}(\sigma) = \text{konstant.}$$

Dieses gilt für die Vergleichslösung überall, so daß (17') übergeht in

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial X} = \frac{T_{xw}}{W_x^2}, \quad (17'')$$

und (18') in

$$B_{21} \frac{\partial (W_y h)}{\partial X} = \frac{\partial (W_y \Delta_2)}{\partial X} + H_{12} \Delta_2 \frac{\partial W_y}{\partial X} - \frac{T_{xw} W_y}{W_x^2} (1+k), \quad (18'')$$

welche ebenfalls schrittweise gelöst werden können parallel zur Lösung des Abschnittes 2. Die Ergebnisse finden sich in den Abb. 28 und 31.

## ANHANG

### Die Entwicklung der Quergrenzschicht an einer querbewegten Platte

Wir untersuchen die Verhältnisse in einer Plattengrenzschicht ohne Druckgradient, wenn von einer bestimmten Stelle  $X_0$  an die Platte nicht mehr ruht, sondern sich mit der Geschwindigkeit  $V$  in der Richtung  $Y$  senkrecht zur Außenströmung  $C_{x\delta}$  bewegt und dabei das Strömungsmedium mitzieht, siehe Abb. 35. Das Problem wurde von *Mager* [17] für die laminare Grenzschicht

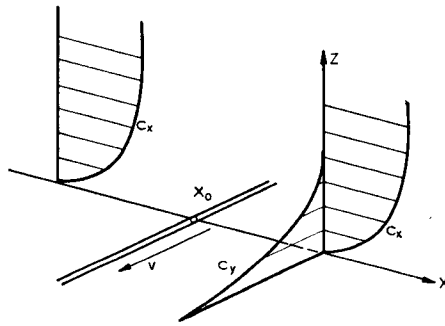


Abb. 35. Schematische Darstellung des Problems.

gelöst. Der turbulente Fall ist insofern komplizierter, als sich die Austauschgröße infolge der Querbewegung ändert, wodurch auch das Geschwindigkeitsprofil  $C_x(Z)$  beeinflusst wird und zusätzliche Strömungen in  $Z$ -Richtung auftreten. Da diese Verhältnisse sehr undurchsichtig sind, vernachlässigen wir überhaupt alle Änderungen von  $C_x$  und  $A$  längs  $X$ , d. h. wir betrachten für die  $X$ -Komponente eine Grenzschicht gleichbleibender Dicke mit  $C_z = 0$ . Analog modifizieren wir auch die Lösung von *Mager* für den laminaren Fall. Unsere turbulente Lösung unterscheidet sich gegenüber der laminaren also nur durch die senkrecht zur Wand stark variierende Austauschgröße, ohne die Veränderung des Turbulenzmechanismus selbst infolge der Querbewegung zu erfassen. Da wir voraussetzen

$$\partial C_x / \partial X = 0,$$

können wir von Gl. (II. 19'') ausgehen, wobei wir noch  $S_{yx}$  gegenüber  $S_{yz}$  vernachlässigen, wie das auch *Mager* für die laminare Grenzschicht tut. Somit gilt

$$C_x \frac{\partial C_y}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Z} \left( A_{yz} \frac{\partial C_y}{\partial Z} \right). \quad (1)$$

Für diese parabolische Differentialgleichung lauten die Anfangs- und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} Z = 0: & \quad C_y = V \\ Z = \infty: & \quad C_y = 0 \\ X = X_0: & \quad C_y = 0. \end{aligned}$$

Für  $A_{yz}$  verwenden wir die Ansätze (III. 24 a, 25 b). Gleichzeitig wollen wir die bei turbulenten Grenzschichten in Wandnähe oft verwendete Variable  $\eta$  nach Gl. (III. 22) gebrauchen

$$\eta \equiv \frac{z v^{*+}}{\nu} \alpha \quad (2)$$

und setzen analog auch

$$\theta \equiv \frac{(x-x_0) v^{*+}}{\nu} \alpha. \quad (2a)$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} \hat{C}_x &\equiv \frac{c_x}{\alpha v^{*+}} = \frac{C_x}{\alpha C_{x\delta}} \sqrt{\frac{2}{c_f^{*+}}}, \\ \hat{C}_y &\equiv \frac{c_y}{\alpha v^{*+}}. \end{aligned} \quad (3)$$

(Definition von  $v^{*+}$  siehe Gl. (III. 23).)

In der laminaren Endschicht lautet nun (1):

$$\frac{\partial \hat{C}_y}{\partial \theta} = \frac{1}{\hat{C}_x(\eta)} \frac{\partial^2 \hat{C}_y}{\partial \eta^2}, \quad (1')$$

denn die Austauschgröße ist hier konstant. In der anschließenden gemischten Zone, wo  $A_{yz}$  nach (III. 24 a) linear verläuft, führt die Variablentransformation

$$u \equiv \ln(1 + \kappa(\eta - \eta_L)) \quad (4)$$

Gl. (1) in die Form über:

$$\frac{\partial \hat{C}_y}{\partial \theta} = \frac{\kappa^2}{\hat{C}_x(u) e^u} \frac{\partial^2 \hat{C}_y}{\partial u^2}. \quad (1'')$$

Im Strömungsinieren ist  $A_{yz}$  nach (III. 25 b) wieder konstant und Gl. (1) hat die Form:

$$\frac{\partial \hat{C}_y}{\partial \theta} = 0,018 \alpha^2 \frac{\delta_1 v^{*+}}{\nu} \frac{\hat{C}_{x\delta}}{\hat{C}_x} \frac{\partial^2 \hat{C}_y}{\partial \eta^2}. \quad (1''')$$

Die Gl. (1'), (1'') und (1''') sind aber in ihrem prinzipiellen Aufbau identisch, so daß wir für den gesamten Grenzschichtbereich eine einheitliche Formulierung der Grundgleichung erhalten haben, nämlich

$$\frac{\partial \hat{C}_y}{\partial \theta} = f(w) \frac{\partial^2 \hat{C}_y}{\partial w^2}, \quad (5)$$

wo je nach Bereich  $w$  gleich  $\eta$  oder  $u$  zu setzen und  $f(w)$  bekannt ist.

Wir lösen Gl. (5) durch ein Differenzenverfahren, indem wir je um einen Schritt  $\Delta \theta$  vorwärtsschreiten. In  $\theta^*$  sei  $C_y(\theta^*, w) \equiv C_y^*(w)$  bekannt. Dann bestimmen wir  $C_y(\theta, w)$  in  $\theta = \theta^* + \Delta \theta$ , indem wir Gl. (5) für eine Anzahl Punkte im Abstände  $0, \Delta w, 2\Delta w, \dots, w - \Delta w, w, w + \Delta w, \dots, k\Delta w$  in der Form von Differenzgleichungen ansetzen.  $k$  ist genügend groß zu wählen, so daß in  $w = k\Delta w$  der Einfluß der querbewegten Wand mit Sicherheit abgeklungen ist. Wir verwenden rückwärts genommene Differenzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta}(w) &= \frac{g(w) - g^*(w)}{\Delta \theta}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(w) &= \frac{g(w + \Delta w) - 2g(w) + g(w - \Delta w)}{\Delta w^2} \end{aligned} \quad (6)$$

und erhalten so ein System von  $(k - 1)$  linearen Gleichungen, das sich durch einen Gaußschen Algorithmus lösen läßt, denn  $\hat{C}_y(0) = \hat{V}$  und  $\hat{C}_y(k\Delta w) = 0$  sind gegeben.

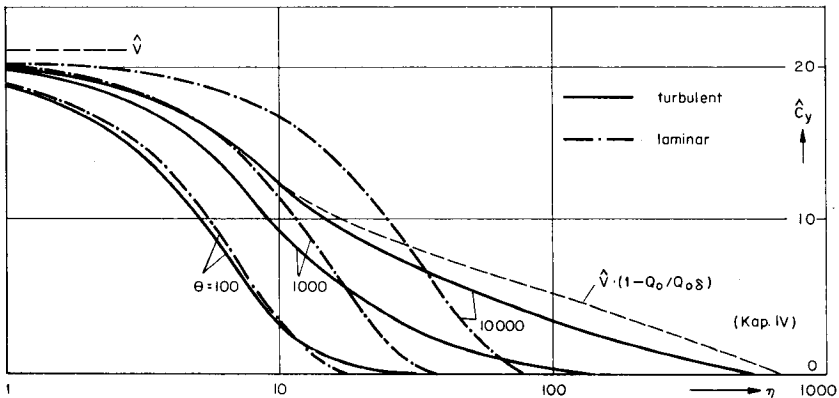


Abb. 36a. Entwicklung der Quergrenzschicht an einer querbewegten Platte. Verlauf von  $\hat{C}_y(\eta)_{\theta=\text{konstant}}$ .



Das Ergebnis findet sich in den Abb. 36 a und 36 b für ein Beispiel, dem die folgenden Daten zugrunde liegen. (Sie entsprechen den Verhältnissen des Zahlenbeispiels von Kapitel IV im Mittelschnitte):

$$\hat{C}_{x\delta} = 14,76, \quad \hat{V} = 1,43 \hat{C}_{x\delta} = 21,09,$$

$$\alpha = 1,64, \quad \alpha \frac{\delta_1 v^{*+}}{\nu} = 160, \quad \eta_\delta = \frac{\alpha \delta v^{*+}}{\nu} \approx 840,$$

$$\frac{\hat{C}_x(\eta/\eta_\delta)}{\hat{C}_{x\delta}} = C(\xi/\xi_\delta) \text{ nach Abschnitt IV. 3.}$$

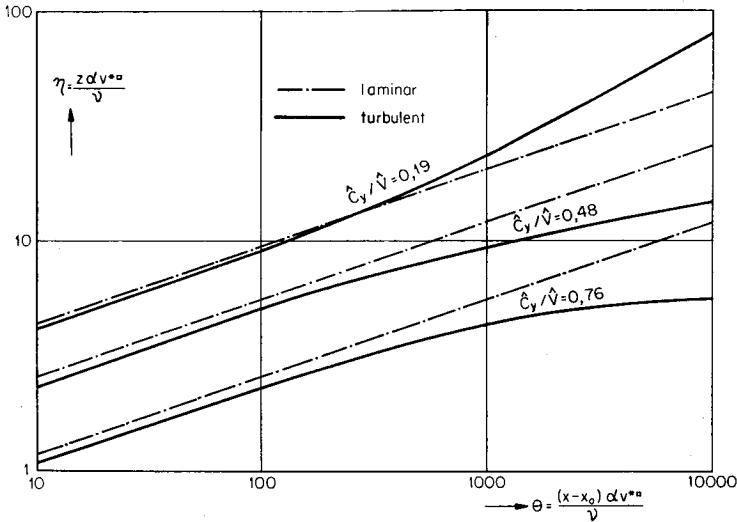


Abb. 36b. Kurven konstanter Geschwindigkeit  $\hat{C}_y$ .

Für die laminare, gleichbleibende Grenzschicht gilt Gl. (1'), und die Lösung läßt sich analog dem Vorgehen von Mager [17] in analytischer Form geben

$$1 - \frac{\hat{C}_y}{\hat{V}} = E_3 \left( \frac{0,48 \eta}{\theta^{1/2}} \right), \quad (6)$$

wo  $E_3$  eine verwandte Funktion des Fehlerintegrals ist, siehe [23]. Das Geschwindigkeitsprofil  $\hat{C}_x(\eta)$  wird dabei durch die Tangente im Ursprung ersetzt, so daß die Schnelligkeit der Ausbreitung des Wandeinflusses im wandfernen Gebiet unterschätzt wird.

Wir vergleichen unsere turbulente Lösung mit einer laminaren, welche bezogen auf die Variable  $\eta$  denselben Geschwindigkeitsgradienten  $\partial \hat{C}_x / \partial \eta$  an der Wand besitzt. Da nun bei der turbulenten Grenzschicht wegen der um den Faktor  $\alpha$  erhöhten turbulenten Austauschgröße die Gradienten  $\partial C_x / \partial Z$ ,

resp.  $\partial \hat{C}_x / \partial \eta$  um die Faktoren  $\alpha^{1-h/2}$ , resp.  $\alpha^{-1-h/2}$  vergrößert sind, so korrigieren wir dementsprechend auch die laminare Lösung und erhalten

$$1 - \frac{\hat{C}_y}{\hat{V}} = E_3 \left( \frac{0,48 \eta}{(\theta \alpha^{1+h/2})^{1/3}} \right), \quad (6')$$

vergleiche auch Abschnitt III. 3 a.

Der Unterschied der turbulenten und laminaren Lösung ist anfänglich gering, da auch im turbulenten Fall die laminare Endschicht die Übertragung des Wandeinflusses ins Innere reguliert. Weil aber im turbulenten Gebiet ein stärkerer Transport möglich ist, werden wandferne Zonen schneller beeinflusst; Endschicht und Übergangszone aber weisen größere Gradienten auf, um diesen erhöhten Transport zu ermöglichen, d. h. das turbulente Geschwindigkeitsprofil  $\hat{C}_y(\eta)$  ist eckiger.

Es zeigt sich, daß eine Lauflänge von vielen Grenzschichtdicken nötig ist (Grenzschichtdicke hier, in der dimensionslosen Variablen  $\eta$  ausgedrückt,  $\eta_\delta \approx 840$ ), bis sich der Wandeinfluß stärker in die wandfernen Zonen der Grenzschicht ausgebreitet hat. Dies stimmt überein mit dem Ergebnis von Abb. 14 (der Einfluß einer periodischen Hin- und Herbewegung der Wand erstreckt sich nur sehr wenig weit ins Strömungsinne).

Zur Illustration ist gestrichelt auch die „stationäre“ Lösung von Kapitel IV eingetragen; weil die Querbewegung dabei im Ursprung der Grenzschicht beginnt ( $x_0 = 0$ ), ist die Quergrenzschicht von Anbeginn völlig ausgebildet. Diese Lösung gibt daher einen qualitativen Anhaltspunkt für den asymptotischen Endzustand bei dem in diesem Anhang betrachteten Problem. (Bei dem Beispiel von Kapitel IV ist zwar  $C_z \neq 0$  wegen der längs  $x$  anwachsenden Grenzschichtdicke, doch ist der Einfluß des betreffenden Gliedes auf  $C_y$  klein.)

## Literatur

1. *Bowen, Sabersky, Rannie*: Theoretical and Experimental Investigation of Axial Flow Compressors. Mechanical Engineering Laboratory of California, 1949.
2. *Ainley, Jeffs*: Air Flow through 4 Stages of Half-Vortex Blading. Aeron. Res. Council., Rep. and Mem. 2383, London, 1950.
3. *Andrew, Jeffs, Hartley*: Tests Concerning Novel Design of Blades for Axial Flow Compressors. Aeron. Res. Council. Rep. and Mem. 2929, London, 1956.
4. *Eckert*: Axial- und Radialkompressoren. Springer, Berlin, 1953.
5. *Truckenbrodt*: Quadraturverfahren zur Berechnung laminarer und turbulenter Grenzschichten. Ing. Archiv (20), 1952.
6. *Townsend*: The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge University Press, 1956.
7. *Jenny*: Berechnungen und Modellversuche über Druckwellen großer Amplituden. Diss. ETH, 1949.
8. *Weinig*: Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Barth-Verlag, Leipzig, 1935.
9. *de Haller*: Das Verhalten von Tragflügelgittern in Axialverdichtern im Windkanal. VDI-Berichte, 1955, Band 3.
10. *Strscheletzky*: Spaltverluste in Axialturbinen, Forschg. Ing.-Wesen (21), 1955.
11. *Rotta*: Über die Theorie der turbulenten Grenzschicht. Mittg. Nr. 1 aus dem Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung, Göttingen, 1950.
12. *Gersten*: Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung in der Zuströmung auf die Sekundärströmungen in geraden Schaufelgittern. Forschg. Ing.-Wesen (23), 1957.
13. *Reichardt*: Vollständige Darstellung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils im Rohr. ZAMM (31), 1951.
14. *Clouser*: General Behaviour of Turbulent Boundary Layers. Advances of Appl. Mech., Vol. IV, Academic Press, New York, 1956.
15. *Schlichting*: Boundary Layer Theory. Pergamon Press, London, 1955.
16. *Becker*: Beitrag zur Berechnung von Sekundärströmungen. Mittg. Nr. 13 aus dem Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung, Göttingen, 1956.
17. *Mager*: Thick Laminar Boundary Layer under Sudden Lateral Perturbation. 50 Jahre Grenzschichtforschung. Vieweg, Braunschweig, 1955.
18. *Timmerman, Zaat*: Rechenmethode für 3-dimensionale Grenzschichten. 50 Jahre Grenzschichtforschung. Vieweg, Braunschweig, 1955.
19. *Traupel*: Thermische Turbomaschinen, I. Springer, Berlin, 1958.
20. *Fritzsche*: Strömungsvorgänge in Schaufelgittern. Techn. Rundschau Sulzer, Nr. 3, 1955.
21. *Seippel*: Räumliche Strömung durch vielstufige Turbinen. BBC-Mitteilungen, Nr. 3, 1958.
22. *Hansen, Herzig*: Experimental and Analytical Investigation of Secondary Flow in Ducts. Journal Aeron. Sciences (24), 1957.
23. *Jahnke, Emde*: Tables of Functions. Dover Publications, New York, 1945.
24. *Moore, Richardson*: Skewed Boundary Layer Flow near the End-Walls of a Compressor Cascade. ASME paper No. 56-A-131, 1956.
25. *Mager*: Generalization of Boundary Layer Momentum-Integral Equations to 3-Dimensional Flows. NACA Rep. 1067, 1952.

## **Lebenslauf**

Am 14. Juni 1930 wurde ich in St. Gallen geboren. Dort besuchte ich die Primarschule und anschließend bis zur Maturität im Jahre 1949 das Gymnasium B. Seither lebe ich in Winterthur, wo ich zunächst bei der Firma Gebrüder Sulzer A.-G. ein 7 monatiges Praktikum absolvierte. Im Herbst 1950 begann ich das Studium an der Abteilung für Maschineningenieurwesen der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und erwarb 1954 das Diplom als Maschinen-Ingenieur. Einige Semesterferien benützte ich zur praktischen Ausbildung bei Gebrüder Sulzer sowie in Frankreich.

Nach Abschluß der Studienzeit war ich bis im Frühjahr 1958 am Institut für thermische Turbomaschinen der Eidgenössischen Technischen Hochschule unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. W. Traupel als Assistent tätig. Während dieser Zeit ist die vorliegende Arbeit größtenteils entstanden.

Seit August 1958 arbeite ich in der Firma Gebrüder Sulzer A.-G., Winterthur, in der Abteilung für Turbomaschinen.