

Prom. Nr. 2156

Druckwellen-Spülung bei Zweitaktmotoren

(Berechnungen und Versuche)

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER
WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Yian-Nian CHEN

aus China

Referent: Herr Prof. Dr. G. Eichelberg

Korreferent: Herr Prof. Dr. J. Ackeret



Zürich 1953 Dissertationsdruckerei Leemann AG

Erscheint als Nr. 12
der Mitteilungen aus dem Institut für Thermodynamik
und Verbrennungsmotorenbau an der
Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Professor Dr. G. Eichelberg. Nach eingehender Besprechung der in einer instationären Rohrströmung vorkommenden Randprobleme wurde die Möglichkeit der Entstehung der Überschallgeschwindigkeit in ihr behandelt. Zuletzt wurde die Druckwellenenergie in der Spül- und Auspuffleitung eines Zweitakt-Dieselmotors näher untersucht.

Die experimentellen Untersuchungen wurden im Maschinenlaboratorium der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich durchgeführt.

Herrn Prof. Dr. G. Eichelberg möchte ich an dieser Stelle für das große Interesse danken, das er der Arbeit entgegengebracht hat. Für die Mithilfe bei den Messungen bin ich Herrn Dr. K. Elser sehr zu Dank verpflichtet. Herrn P. Hollenstein danke ich für die sorgfältige Ausführung der Versuchseinrichtungen. Zur Drucklegung der Arbeit haben das SKL-Forschungsinstitut an der ETH und die Firma Gebrüder Sulzer AG finanzielle Unterstützungen gewährt; diesen Stellen sei hier bestens gedankt.

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
----------------------	---

Theoretischer Teil

1. Grundgleichungen der Gasdynamik für die Strömung in einem Rohr	9
11. Die Charakteristiken in der $x-t$ -Ebene	9
12. Die Schallgeschwindigkeiten	11
13. Die Charakteristiken in der $w-p$ -Ebene	14
2. Zustands- und Lagediagramm für Strömungen ohne Reibung und Wärmeaustausch	17
21. Zusammenhang zwischen Zustands- und Lagediagramm	17
22. Die $W-P$ -Charakteristiken für nebeneinander liegende Gasschichten verschiedener Art und verschiedener Temperatur	19
23. Bestimmung der Poldistanz H im gemeinsamen $W-P$ -Diagramm für Rauchgas und Luft	22
3. Darstellungselemente für die Druck- und Verdünnungswellen	24
31. Kreuzen von Wellen	24
32. Reflexion von Wellen	25
33. Randproblem für das Einströmen eines Gases in ein Rohr	25
34. Teilweise Reflexion von Wellen an der Trennungsschicht zwischen zwei Gasmassen verschiedener Art und verschiedener Temperatur	26
35. Randproblem für das Einströmen eines Gases in ein Rohr, in dem sich ein anderes Gas mit anderem κ und beliebigem Zustand befindet	29
36. Die Stautemperaturen	31
4. Randbedingungen	32
41. Stationäre Randbedingung für das Einströmen eines Gases in ein Rohr ohne Berücksichtigung der entstehenden Druckwellen	32
42. Randbedingung für das Einströmen eines Gases in ein Rohr unter Berücksichtigung der entstehenden Druckwellen	34
43. Randbedingung für das Ausströmen eines Gases aus einem Rohr	36
44. Randbedingung für eine Bordamündung	39
5. Zusammenhang zwischen dem Randbedingungs- und dem $W-P$ -Diagramm	40
51. Einströmen eines Gases aus einem endlich großen Behälter in ein Rohr	40
52. Übertragung der Charakteristiken vom Randbedingungs- auf das $W-P$ -Diagramm für das Einströmen eines Gases aus einem Behälter in ein Rohr	42

53. Übertragung der Charakteristiken vom Randbedingungs- auf das W - P -Diagramm für das Ausströmen eines Gases aus einem Rohr in einen Behälter . . .	43
54. Übertragung der Charakteristiken vom Randbedingungsdiagramm für Luft mit $\kappa' = 1,4$ auf das W - P -Diagramm für $\kappa = 1,32$ für das Ausströmen von Luft aus einem Rohr in einen Behälter	44
55. Randbedingung für das Strömen eines Gases durch eine in einem Rohr befindliche Düse unter Berücksichtigung der entstehenden Druck- und Verdünnungswellen	47
6. Verdichtungsstöße	49
61. Die Stautemperaturen bei Verdichtungsstößen	49
62. Reflexion von Verdichtungsstößen an einem geschlossenen Rohrende	50
63. Reflexion von Verdichtungsstößen an offenen Rohrenden	51
64. Reflexion von Verdichtungsstößen an einem frei offenen Rohrende bei Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit	55
65. Reflexion von Verdichtungsstößen an der Trennungsschicht zwischen zwei Gasmassen verschiedener Art und verschiedener Temperatur in einem Rohr	56
7. Betrachtung über die Möglichkeit der Entstehung einer Überschallströmung in einem Rohr	57
71. Verdünnungswellen in einem Rohr, hervorgerufen durch Ausströmen aus seinem verengten Ende	57
72. Erzielung eines möglichst großen Druckgefälles im einströmenden Gas von der Düse bis zu dem voll ausgefüllten Rohrquerschnitt im rechten Rohrteil	59
73. Verdichtungsstoß in dem ursprünglich im rechten Rohrteil befindlichen Gas	62
74. Günstigstes Öffnungsverhältnis f/F zur Erzeugung eines möglichst starken Verdichtungsstoßes im rechten Rohrteil	63
75. Tiefstmögliche Drucksenkung in einem aus einem unendlich großen Behälter in ein Rohr einströmenden Gas	64
76. Anlaufvorgang in einem Rohr nach dem plötzlichen Öffnen einer Düse in ihm	65

Experimenteller Teil

8. Der Versuchsmotor	67
81. Beschreibung der Versuchsanlage	67
82. Untersuchung des Brennstoff-Einspritzsystems	70
83. Das Rückschlagventil in der Spülleitung	72
84. Theoretisches T - s -Diagramm des Motor-Kreisprozesses	73
85. Berechnung des mittleren Zustandes im Zylinder während der Spülung	75
86. Bestimmung der günstigsten Länge der Spül- und Auspuffleitung bei einem Durchmesser von 50 mm	77
87. Das Betriebsverhalten des Motors mit Spül- und Auspuffleitungen von 620, bzw. 936 mm Länge und 50 mm Durchmesser	79
88. Variation der Spül- und Auspuffleitungsquerschnitte	82
89. Vergleich zwischen berechnetem und gemessenem Druckverlauf in der Spül- und Auspuffleitung	84
Zusammenfassung	91
Literaturverzeichnis	93

Einleitung

In Verbrennungsmotoren gehen normalerweise etwa 40% des Brennstoffheizwertes mit den Abgasen verloren. Seit langem wurde versucht, von dieser Energie einen möglichst großen Anteil zurückzugewinnen. Bei Viertaktmotoren hat sich das bekannte Büchi-Verfahren sehr bewährt, wonach die in einer Abgasturbine erzeugte Leistung zur Spülung und Aufladung des Motors verwendet wird. Bei Zweitaktmotoren kann etwa nach dem sog. Kadenacy-Verfahren [1, 2]¹⁾ die Druckwellenenergie der Abgase in einem zweckmäßig ausgebildeten, konischen Auspuffrohr für die Erzeugung eines Unterdruckes im Zylinder und damit für die Durchspülung ausgenutzt werden.

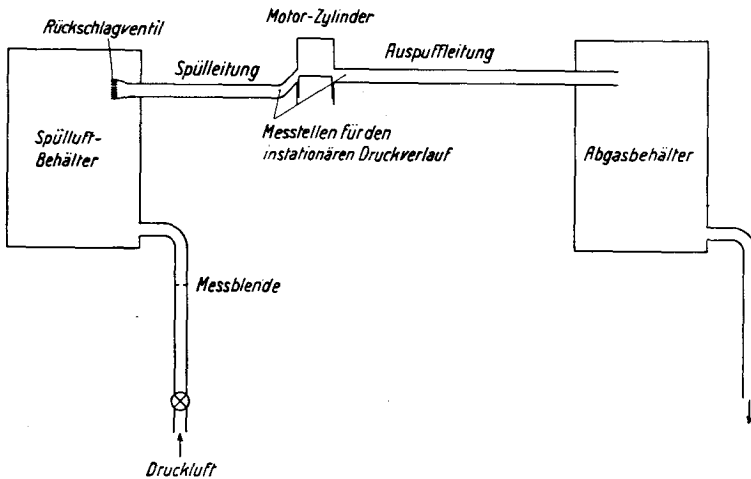


Abb. 1. Schema der Versuchsanlage.

In der vorliegenden Arbeit sollen auch die Möglichkeiten einer Ausnutzung der Druckwellenenergie des in der Spülleitung befindlichen Gases untersucht

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

und einige damit in mehr oder weniger direktem Zusammenhang stehende instationäre Strömungsfragen abgeklärt werden.

Die Abb. 1 zeigt schematisch die untersuchte Anordnung. Der Zylinder eines Zweitakt-Dieselmotors besitze Spül- und Auspuffschlitze von gleicher Höhe. Beim Niedergehen des Kolbens entlädt sich der Zylinder zunächst sowohl in die Auspuff- als auch in die Spülleitung hinein, wobei in jede Leitung je eine Druckwelle vordringt. Am geschlossenen Rückschlagventil am Ende der Spülleitung wird die Druckwelle unter weiterer Verdichtung zurückgeworfen und wandert nach dem Zylinder zurück. Wieder an den Spülschlitzen angekommen, wird sie — da der Zylinder sich inzwischen entleert hat — als Verdünnungswelle reflektiert, die nach dem Rückschlagventil hin wandert und eine intensive Strömung aus der Spülleitung in den Zylinder verursacht. Das Rückschlagventil öffnet sich, sobald die Unterdruckwelle ankommt, worauf Frischluft aus der Umgebung angesaugt wird und die eigentliche Durchspülung beginnt.

Währenddessen spielt sich ein ähnlicher Vorgang in der Auspuffleitung ab. An ihrem offenen Ende wird die Druckwelle als Verdünnungswelle gegen den Zylinder zurückreflektiert. Dies bewirkt eine Entleerung der Auspuffleitung und des Zylinderinhaltes und unterstützt die Durchspülung.

Die in den beiden Leitungen hin- und herpendelnden Druck- und Verdünnungswellen spielen somit die Rolle einer Spülpumpe. Es ist nun zu untersuchen, wie groß der erzielte Effekt ist und ob er zur Spülung des Motors ohne Zuhilfenahme zusätzlicher Einrichtungen ausreicht.

THEORETISCHER TEIL

1. Grundgleichungen der Gasdynamik für die Strömung in einem Rohr

11. Die Charakteristiken in der x - t -Ebene

Es wird vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Strömung in der Rohrleitung keine Komponenten quer zur Rohrachse aufweise und über dem Querschnitt konstant sei. Es handelt sich dann um eine rein lineare Strömung. Für das in der Abb. 2 dargestellte Volumenelement können folgende Gleichungen aufgestellt werden (vgl. *Ackeret* [3]).

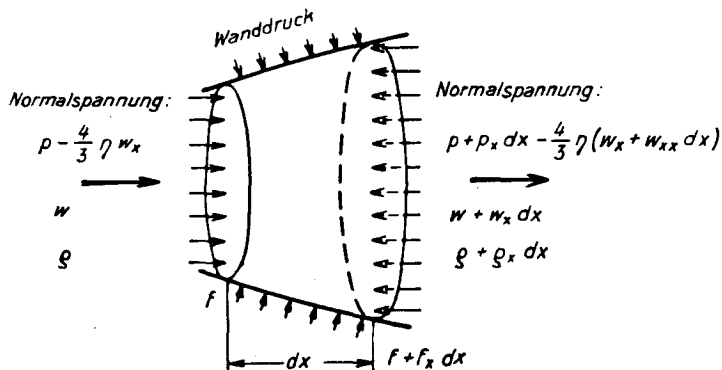


Abb. 2. Volumenelement der Rohrströmung.

a) Kontinuitätsgleichung:

$$f w \rho dt - [f w \rho + (f w \rho)_x dx] dt = f dx \rho_t dt^1$$

Massenzufuhr - Massenabfuhr = Massenänderung

oder

$$\rho_t + w_x \rho + w \rho_x + w \rho \frac{d \ln f}{dx} = 0 \quad (1)$$

b) Impulsgleichung:

$$f dx \rho \frac{dw}{dt} = -(f p)_x dx + \eta \left(f \frac{4}{3} w_x \right)_x dx + p f_x dx - \frac{\xi}{2 d} \frac{w}{|w|} w^2 f dx \rho$$

Masse \times Beschl. = Resultierende Kraft an der Kontur in der Achsenrichtung aus

Statischem
Druck in den
Endquersch.

Innerer Reibung

Wand-
druck

Wandreibung

¹⁾ In der in der Gasdynamik üblichen Weise bedeuten hier und im folgenden Indizes den Differentialquotienten nach der entsprechenden Größe.

Daraus ergibt sich

$$w_t + w w_x + \frac{1}{\rho} p_x - \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{d \ln f}{dx} w_x + w_{xx} \right) + \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 = 0 \quad (2)$$

c) Energiegleichung:

$$f dx \rho \frac{d}{dt} \left(g u + \frac{w^2}{2} \right) = -(p f w)_x dx + \eta \left(\frac{4}{3} w_x f w \right)_x dx + \lambda (f T_x)_x dx + q_a f dx$$

Änderung der Energie pro Zeiteinheit (potent. Energie vernachlässigt) = Leistung der Normalspannungen an den Endquerschnitten + Wärmestrom durch Leitung + Wärmezufuhr von außen

Die durch äußere Reibung aufgezeehrte kinetische Energie geht in Wärme über, wodurch die Gesamtenergiemenge nicht beeinflusst wird. Daher erscheint die äußere Reibung nicht in dieser Gleichung.

Durch Umformen erhält man

$$p_t + w p_x - \frac{\kappa p}{\rho} (\rho_t + w \rho_x) - (\kappa - 1) \left[\rho w \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 + \frac{4}{3} \eta w_x^2 + \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x + q_a \right] = 0 \quad (3)$$

Dies sind drei Gleichungen ((1), (2) und (3)) mit drei abhängigen (p, w, ρ) und zwei unabhängigen (x, t) Variablen. Im allgemeinen kann aber keine analytische Lösung für das ganze Gebiet angegeben werden. Man muß vielmehr für genügend kleine Gebiete Teillösungen suchen und Stück um Stück weiterfahren. Selbst dies ist nach *Sauer* [4] nur bei vereinfachter Form der Gleichungen, längs bestimmter Linien $f(x, t) = 0$, und unter einer besonderen Bedingung möglich. Glieder mit höheren Ableitungen und Ableitungen im Quadrat müssen weggelassen, und die Wärmeleitung und die innere Reibung können somit nicht berücksichtigt werden. Die genannten Linien in der x - t -Ebene werden als charakteristische Linien oder kurz Charakteristiken, und die Bedingung als Verträglichkeitsbedingung bezeichnet. Die Gleichungen (1), (2) und (3) vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned} w w_x + w_t + \frac{1}{\rho} p_x &= -\frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 \\ \rho w_x + w \rho_x + \rho_t &= -\rho w \frac{d \ln f}{dx} \\ w p_x + p_t - \frac{\kappa p}{\rho} w \rho_x - \frac{\kappa p}{\rho} \rho_t &= (\kappa - 1) \left[\rho w \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 + q_a \right] \end{aligned}$$

Die Richtungsgleichung der Charakteristiken in der x - t -Ebene lautet dann nach *Sauer* [4]

$$-(w dt - dx)^3 + \frac{1}{\rho} dt \rho dt \frac{\kappa p}{\rho} (w dt - dx) = 0$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind

$$w dt - dx = 0: \quad dx/dt = w \quad \text{Lebenslinie} \quad (4)$$

$$(w dt - dx)^2 = (\kappa p/\rho) dt^2: \quad dx/dt = w \pm (\kappa p/\rho)^{1/2} = w \pm a \quad \text{Störlinien} \quad (5)$$

Sie entsprechen drei Scharen von Charakteristiken, welche drei Arten von Bewegungserscheinungen in dem Gase darstellen, die gleichzeitig existieren, nämlich

a) Längs der sog. Lebenslinie $dx/dt=w$ in der $x-t$ -Ebene bewegt sich ein Gasteilchen mit der Geschwindigkeit w . Das ist die eigentliche Bewegung des Gases. Über diese lagert sich noch

b) eine Störungserscheinung, welche Druck- oder Verdünnungswelle genannt wird. Diese Störung pflanzt sich längs der sog. Störlinie mit einer Übergeschwindigkeit $\pm (\kappa p/\rho)^{1/2}$ über das sich bewegende Gasteilchen hinweg fort, und zwar in zwei Richtungen; die eine fällt mit der Bewegungsrichtung des Teilchens (positives Vorzeichen) zusammen, die andere ist ihr entgegengesetzt (negatives Vorzeichen). Man spricht auch von hinlaufenden und rücklaufenden Wellen, wobei die Wahl der Bezeichnung willkürlich ist. Die Übergeschwindigkeit wird Schallgeschwindigkeit genannt und mit a bezeichnet. Die eigentliche Bewegung des Gases ist mit dieser Störung eng verknüpft und kann keine Änderung erfahren, solange das Gas nicht von einer Störfrent erreicht wird.

Wenn die Leitung lang genug ist, kann die Druckwelle eine immer steilere Wellenfront annehmen, bis sie schließlich zu einem Verdichtungsstoß wird. Ein solcher stellt eine Unstetigkeit in der Gasströmung dar und kann durch die obigen Gleichungen nicht erfaßt werden, da diese unter der Voraussetzung abgeleitet wurden, daß die Strömung stetig sei.

12. Die Schallgeschwindigkeiten

Die Schallgeschwindigkeit der Druck- oder Verdünnungswellen $a = (\kappa p/\rho)^{1/2} = (g \kappa R T)^{1/2}$ hängt von der absoluten Temperatur ab und kann durch äußere Reibung, Wärmeab- oder -zufuhr von außen und Querschnittsänderung nicht beeinflußt werden, abgesehen von deren Einfluß auf die innere Reibung.

Die Schallgeschwindigkeit kann noch auf einem anderen Weg abgeleitet werden.

In einem langen, geraden Rohr gemäß Abb. 3 sei ein Gas anfangs in Ruhe. Sein Druck sei p , die Dichte ρ . Nun komme eine schwache Störung von links nach rechts ins Rohr herein. In dem durch diese Störung bestrichenen Bereich bekommen die Gasteilchen eine Eigengeschwindigkeit dw ; Druck und Dichte wachsen um dp bzw. $d\rho$. Die Störungsfrent wandert mit der Schallgeschwindigkeit a nach rechts (Abb. 3a).

Einem Beobachter, der sich ebenfalls mit der Schallgeschwindigkeit a nach rechts bewegt (Abb. 3b), erscheint die Störungsfront stillstehend. Er kann die Gleichungen für die gewöhnliche Strömung im Querschnitt mit der Störungsfront anwenden:

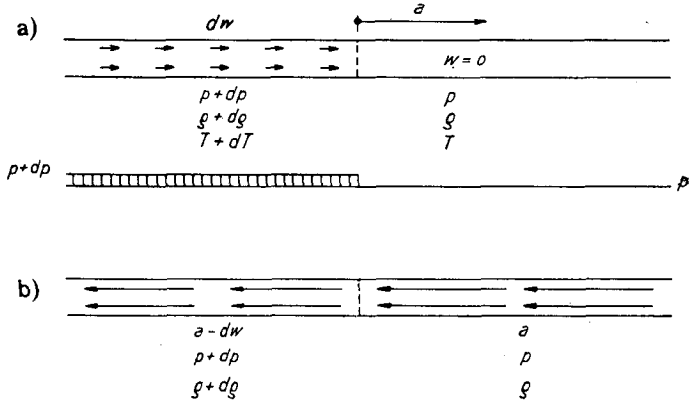


Abb. 3. Fortpflanzung einer schwachen Störung in einem ruhenden Gas.

- a) Absolutes Strömungsbild. Die Störfront wandert mit Schallgeschwindigkeit a fort.
 b) Relatives Strömungsbild. Relativ zu einem sich mit der Schallgeschwindigkeit a bewegendem Beobachter. Somit erscheint ihm die Störfront stehen zu bleiben.

a) Kontinuitätsgleichung

$$(a - dw)(\rho + d\rho) = a\rho$$

$$a = \rho \cdot dw/d\rho \quad (6)$$

b) Impulsgleichung

$$-d\rho = (a - dw)^2(\rho + d\rho) - a^2\rho$$

wobei zu beachten ist, daß die innere Reibung $(4/3)\eta(dw/dx)$ auf beiden Seiten des Querschnittes sich aufhebt und daher nicht im Ausdruck für p auftritt. Die Gleichung läßt sich vereinfachen zu

$$d\rho = a\rho dw \quad (7)$$

Durch Elimination von dw aus den Gl. (6) und (7) folgt

$$a = (d\rho/d\rho)^{1/2} \quad (8)$$

eine differentielle Form für die Schallgeschwindigkeit.

Dieser Ausdruck wurde ohne Heranziehung der Energiegleichung abgeleitet. Somit können die mit der Energie verbundenen Erscheinungen auf ihn keinen Einfluß ausüben und er gilt ganz allgemein, gleichgültig ob eine äußere Rei-

bung, Wärmezufuhr, Wärmeleitung oder selbst auch eine innere Reibung existiert. Auch eine Querschnittsänderung kann daran nichts ändern; der Beobachter braucht ja nur mit einer dem veränderlichen Querschnitt entsprechenden, veränderlichen Schallgeschwindigkeit a zu wandern.

Nach Gleichsetzen der beiden Ausdrücke (5) und (8) für a :

$$(\kappa p/\rho)^{1/2} = (dp/d\rho)^{1/2} \quad \text{oder} \quad dp/p = \kappa d\rho/\rho$$

ergibt sich durch Integration

$$\ln(p/\rho^\kappa) = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad p/\rho^\kappa = \text{konst.}$$

Das ist aber die Beziehung für eine adiabatische Zustandsänderung, woraus geschlossen werden kann:

Ein Gas wird durch Druck- oder Verdünnungswellen adiabatisch komprimiert bzw. expandiert, wenn die Wärmeleitung innerhalb der Gasmasse und die innere Reibung vernachlässigt werden. Äußere Reibung, äußere Wärmezufuhr und Querschnittsänderung des Rohres haben keinen Einfluß auf diese Tatsache, soweit von deren Wirkung auf die innere Reibung abgesehen wird.

Nun betrachten wir den Einfluß der Wärmeleitung in Richtung der Rohrachse auf die Schallgeschwindigkeiten, der bei der Ableitung von Gl. (5) vernachlässigt wurde. Im Extremfall unendlich intensiver Wärmeleitung ($\lambda = \infty$) läßt sich die Gl. (3) vereinfachen zu

$$f T_x = 0$$

Somit ist $f/g \cdot (p/\rho)_x = 0$ und $\frac{f}{g} \frac{1}{\rho} p_x - \frac{f}{g} \frac{p}{\rho^2} \rho_x = 0$

Die Richtungsgleichung der Charakteristiken in der x - t -Ebene lautet dann

$$-(w dt - dx)^2 \frac{f}{g} \frac{1}{\rho} dt + \frac{1}{\rho} dt \rho dt \frac{f}{g} \frac{p}{\rho^2} dt = 0,$$

und für die Störlinien folgt

$$(w dt - dx)^2 = (p/\rho) \cdot dt^2$$

$$\text{oder} \quad dx/dt = w \pm (p/\rho)^{1/2} = w \pm (g R T)^{1/2} = w \pm a. \quad (5')$$

Da in jedem Querschnitt die Temperatur sich mit der Zeit nicht ändert, liegt ein isothermischer Vorgang vor.

Der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit a kann somit verallgemeinert werden:

$$a = (g m R T)^{1/2}$$

Hierbei ist

$m = \kappa$, wenn keine Wärmeleitung zwischen den Gasschichten vorhanden ist;

$m < \kappa$, wenn eine solche Wärmeleitung vorhanden ist;

$m = 1$, wenn diese Wärmeleitung unendlich intensiv ist ($\lambda = \infty$).

Die Wirkung der inneren Reibung auf die Schallgeschwindigkeit kann sinngemäß gefunden werden, indem der vollständige Ausdruck für die Normalspannung eingesetzt wird, nämlich

$$p = p_{stat.} - \frac{4}{3} \eta \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Dann wird

$$a \sim \left\{ \kappa \left(\frac{p}{\rho} - \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\}^{1/2},$$

oder

$$a = (m p / \rho)^{1/2}.$$

Bei veränderlichem Rohrquerschnitt ist der Ausdruck $\partial w / \partial x$ hauptsächlich durch die Querschnittsänderung bestimmt. Bei Erweiterung des Rohrquerschnittes wird vorwiegend $\partial w / \partial x < 0$, und die innere Reibung bewirkt eine Vergrößerung der Schallgeschwindigkeit, also $m > \kappa$ und umgekehrt. Somit ist der Einfluß der inneren Reibung auf die Schallgeschwindigkeiten je nach der Bewegungsrichtung des Gasteilchens verschieden.

Wenn der Rohrquerschnitt konstant bleibt, ist $\partial w / \partial x$ nur durch die Wellenwanderung bestimmt, deren Wirkung dann nicht leicht von vornherein zu übersehen ist; jedenfalls ist sie viel kleiner.

Für Gase, wie sie in den Spül- und Auspuffrohren von Verbrennungsmotoren vorkommen, ist λ klein und die Wärmeleitung ist bei kleinem Temperaturgefälle unbedeutend. Nur wenn etwa ein sehr heißes Gas in ein mit kaltem Gas gefülltes Rohr einströmt, wie es beim Entleerungsvorgang aus dem Zylinder in die Spüleleitung der Fall ist, kann die Wärmeleitung wegen des großen Temperaturgradienten in der Berührungsschicht zwischen den beiden Gasmassen an Bedeutung gewinnen. Die an das warme einströmende Gas anstoßende kalte Gasschicht nimmt durch Leitung intensiv Wärme auf, kann sie aber nicht sofort weiterleiten. Sie wird auf diese Weise erwärmt und hat eine Schallgeschwindigkeit gemäß $m \neq \kappa$.

13. Die Charakteristiken in der w - p -Ebene

Die den in der x - t -Ebene gefundenen Charakteristiken zugeordneten Größen p , w und ρ unterliegen einer Verträglichkeitsbedingung und können sich nicht beliebig ändern. Die Bedingung lautet nach *Sauer* [4]:

$$(w dt - dx) \left\{ \left(\frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 dt + d w \right) (w dt - dx) - \frac{1}{\rho} dt \left[a^2 \rho w \frac{d \ln f}{dx} dt + a^2 d \rho - (\kappa - 1) \left(\rho w \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 + q_a \right) dt - a^2 d \rho + d p \right] \right\} = 0$$

Für die Lebenslinie $w dt - dx = 0$ ist diese Gleichung ohne weiteres erfüllt; die Gleichungen (1), (2) und (3) besitzen volle Gültigkeit längs der Lebenslinie.

Für Störlinien $w dt - dx = \mp (\kappa p / \rho) dt = \pm a dt$ bleibt aber eine Verträglichkeitsbedingung bestehen. Durch Einsetzen von $w dt - dx = \mp a dt$ in die Gleichung ergibt sich

$$\left(\frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 dt + d w \right) (\mp a dt) - \frac{1}{\rho} dt a^2 \rho w \frac{d \ln f}{dx} dt + \frac{1}{\rho} dt (\kappa - 1) \left(\rho w \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 + q_a \right) dt - \frac{1}{\rho} dt d p = 0$$

und daraus

$$d w = \mp \frac{d p}{\rho a} \mp a w \frac{d \ln f}{dx} dt - \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 dt \left[1 \mp (\kappa - 1) \frac{w}{a} \right] \pm (\kappa - 1) \frac{q_a dt}{\rho a}$$

oder

$$d w = \mp \frac{a d p}{\kappa p} \mp a w \frac{d \ln f}{dx} dt - \frac{\xi}{2d} \frac{w}{|w|} w^2 \left[1 \mp (\kappa - 1) \frac{w}{a} \right] dt \pm (\kappa - 1) \frac{a q_a}{\kappa p} dt$$

Wir führen nun passend gewählte Bezugsgrößen ein:

Druck	p_0 ,
Schallgeschwindigkeit	a_0 ,
Länge	L .

a_{0s} ist die Schallgeschwindigkeit, welche durch adiabatische Expansion eines Gases von p ; a auf p_0 erreicht wird, also

$$a_{0s} = a \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}.$$

Dann kann die Gleichung dimensionslos geschrieben werden:

$$d \left(\frac{w}{a_0} \right) = \mp \frac{1}{\kappa} \frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0} \frac{d \left(\frac{p}{p_0} \right)}{\frac{p}{p_0}} \mp \frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0} \frac{w}{a_0} \frac{d \ln f \cdot L}{dx} d \left(\frac{t a_0}{L} \right) - \frac{\xi L}{2d} \frac{w}{|w|} \left(\frac{w}{a_0} \right)^2 \left[1 \mp (\kappa - 1) \frac{\frac{w}{a_0}}{\frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0}} \right] d \left(\frac{t a_0}{L} \right) \pm (\kappa - 1) \frac{\frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0}}{\kappa \frac{p}{p_0}} \frac{q_a L}{p_0 a_0} d \left(\frac{t a_0}{L} \right).$$

Wegen
$$\frac{a}{a_{0s}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$$

ist
$$\frac{d\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\frac{p}{p_0}} \frac{a}{a_{0s}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}-1} d\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{2\kappa}{\kappa-1} d\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right],$$

und damit wird

$$d\left(\frac{w}{a_0}\right) = \mp \frac{2}{\kappa-1} \frac{a_{0s}}{a_0} d\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right] \mp \frac{a_{0s}}{a_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{w}{a_0} \frac{d \ln f \cdot L}{dx} d\left(\frac{ta_0}{L}\right) - \frac{\xi L}{2d} \frac{w}{|w|} \left(\frac{w}{a_0}\right)^2 \left[1 \mp (\kappa-1) \frac{\frac{w}{a_0}}{\frac{a_{0s}}{a_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}\right] d\left(\frac{ta_0}{L}\right) \pm \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}} \frac{a_{0s} q_a L}{a_0 p_0 a_0} d\left(\frac{ta_0}{L}\right).$$

Mit den weiteren dimensionslosen Größen

$$W = \frac{w}{a_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad A_s = \frac{a_{0s}}{a_0}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Z = \frac{ta_0}{L}, \quad F_x = \frac{d \ln f \cdot L}{dx}, \quad \xi_0 = \frac{\xi L}{2d}, \quad Q_a = \frac{q_a L}{p_0 a_0}$$

wird
$$dW = \mp \frac{2}{\kappa-1} A_s d\left[P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right] \mp A_s P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} W F_x dZ - \xi_0 \frac{w}{|w|} W^2 \left[1 \mp (\kappa-1) \frac{W}{A_s P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}\right] dZ \pm \frac{\kappa-1}{\kappa} A_s P^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}} Q_a dZ, \quad (9)$$

oder abgekürzt

$$dW = \mp \frac{2}{\kappa-1} A_s d\left[P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right] + \Delta_f + \Delta_r + \Delta_a$$

Die letzten drei Glieder auf der rechten Seite sind nur Korrekturen durch Querschnittsänderung, äußere Reibung und Wärmezufuhr gegenüber dem ersten Glied; daher stellt die Gleichung (9) im wesentlichen die Beziehung zwischen w/a_0 und p/p_0 dar, welche auf den Störlinien gilt. Man kann diese Beziehung in einer $w/a_0 - p/p_0$ -Ebene durch zwei Kurvenscharen darstellen, welche ebenfalls Charakteristiken genannt werden.

Schließlich können auch die Charakteristiken in der $x-t$ -Ebene mit Hilfe der Größen $W = w/a_0$ und $A = a/a_0$ dimensionslos geschrieben werden

$$\frac{\frac{1}{L} dx}{\frac{a_0 dt}{L}} = \frac{w}{a_0} \pm \frac{a}{a_0}$$

oder
$$dX/dZ = W \pm A \quad (5'')$$

2. Zustands- und Lagediagramm für Strömungen ohne Reibung und Wärmeaustausch

21. Zusammenhang zwischen Zustands- und Lagediagramm

Wir betrachten den einfachsten Fall der reibungsfreien Strömung in einem gegen außen wärmeisolierten, geraden Rohr von konstantem Querschnitt, wobei keine Wärmeleitung im Gas stattfindet. Dann bleibt auf der rechten Seite der Gleichung (9) nur das erste Glied übrig:

$$dW = \mp \frac{2}{\kappa - 1} A_s d\left[P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right].$$

Mit der Festsetzung, daß $a_0 = a_{0s}$ und somit $A_s = 1$ sei, vereinfacht sie sich zur Gleichung

$$dW = \mp \frac{2}{\kappa - 1} d\left[P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right] = \pm \frac{2}{\kappa - 1} dA$$

oder

$$\frac{dA}{dW} = \mp \frac{\kappa - 1}{2}, \quad (10)$$

welche zu den Charakteristikenscharen in der X - Z -Ebene:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{W \pm A}$$

gehört.

Das X - Z -Diagramm wird Lagediagramm, das W - A -Diagramm Zustandsdiagramm genannt. Die Charakteristikenscharen $dA/dW = \mp(\kappa - 1)/2$ erscheinen nach *de Haller* [6] im W - A -Diagramm als unter 45° geneigte Linien (vgl. Abb. 4), wenn der Maßstab für die A -Achse $2/(\kappa - 1)$ mal größer gewählt wird als für die W -Achse.

Diese W - A -Charakteristiken können von vornherein eingezeichnet werden, wenn die Randbedingungen hierzu gegeben sind. Darauf beruht die Einfachheit des Verfahrens.

Die Charakteristiken in der X - Z -Ebene $dZ/dX = 1/(W \pm A)$ werden auch Wellenscharen genannt, da sie Wellenfortpflanzungswege darstellen.

Die den beiden W - A -Charakteristikenscharen α und β zugeordneten Wellenscharen α bzw. β sind in der Abb. 4 im Lagediagramm eingezeichnet. Man beachte, daß die Richtung des Wellenstranges sich immer mit der ihm zugehörigen W - A -Charakteristik kreuzt. Beispielsweise gehöre das W - A -Charakteristikenstück $P_1 P_2$ zu dem Wellenstück 12; P_{12} sei der Mittelpunkt. Die

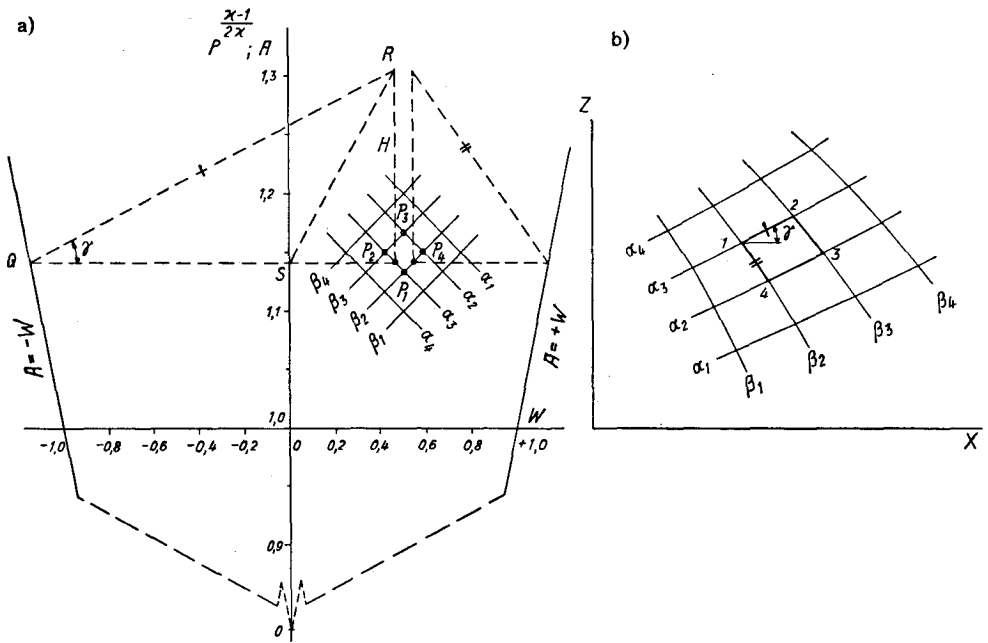


Abb. 4. Charakteristikendiagramme.

- a) Zustandsdiagramm $\frac{dA}{dW} = \mp \frac{\kappa - 1}{2}$ (- für α -Schar
+ für β -Schar)
- b) Lagediagramm $\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{W \pm A}$ (+ für hinlaufende Wellen α)
- für rücklaufende Wellen β)

Poldistanz $RP_{12} = H$ sei parallel zur A -Achse gleich der Einheit gemacht. QP_{12} sei waagrecht durch P_{12} gezogen, wobei Q auf der Geraden $W = \pm A$ liegt. Dann ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{RP_{12}}{QP_{12}} = \frac{H}{QS + SP_{12}} = \frac{1}{A_{12} + W_{12}}$$

Da die Neigung des Wellenstranges 12 nach Gl. (5'') $\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{A_{12} + W_{12}}$ ist, stellt die Gerade QR seine Richtung dar. Die Gerade RS ergibt dann die Neigung der Lebenslinie des Mittelpunktes 12. Somit kann durch Konstruieren des Dreiecks $P_{12}QR$ die Richtung des Wellenstranges 12 gefunden werden. Wenn von einer Wellenmasche bereits zwei Seiten bekannt sind, lassen sich die anderen zwei nach der erörterten Methode ohne weiteres konstruieren. Man geht so von einer Masche zur benachbarten über und kann den ganzen Wellenplan konstruieren, soweit die hierzu nötigen W - A -Charakteristiken gegeben sind.

22. Die W - P -Charakteristiken für nebeneinander liegende Gasschichten verschiedener Art und verschiedener Temperatur

Eine Gasmasse schiebe im Rohr eine zweite von verschiedener Temperatur und mit einem anderen Adiabatenexponenten κ vor sich her. Die Trennungsschicht zwischen den beiden Gasmassen werde der Einfachheit halber als unendlich dünn angesehen und die Diffusion vernachlässigt.

Wir betrachten folgendes Beispiel. Rauchgas mit $\kappa = 1,32$ und Luft mit $\kappa' = 1,4$ seien in einem Rohr nebeneinander vorhanden. Für Rauchgas ist $(\kappa - 1)/2\kappa = 0,1211$ und für Luft $(\kappa' - 1)/2\kappa' = 0,1429$. Nach Abschnitt 13 kann a_0 beliebig gewählt werden. Hier sei a_0 die Schallgeschwindigkeit für das Rauchgas vom Zustand p_0 , welcher durch adiabatische Expansion vom Zustand p, a erreicht wird. Dann ist

$$a_0 = a(p_0/p)^{(\kappa-1)/2\kappa} \quad \text{mit} \quad \kappa = 1,32.$$

Die Abb. 5a und b zeigen die W - A -Diagramme für Rauchgas und für Luft.

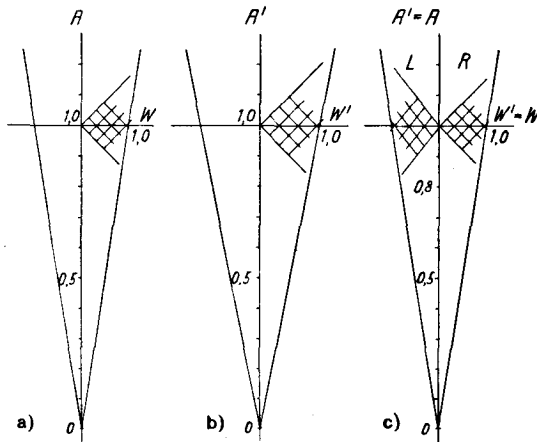


Abb. 5. W - A -Diagramme.

a) für Rauchgas $\kappa = 1,32$, $[A] = 6,25 [W]$, $\text{tg} \alpha = 1,0$; b) für Luft $\kappa' = 1,4$, $[A'] = 5,0 [W']$, $\text{tg} \alpha' = 1,0$; c) für Rauchgas und Luft gemeinsam, $[A] = 6,25 [W]$, $\text{tg} \alpha = 1,0$ für Rauchgas (R), $\text{tg} \alpha' = 1/0,8$ für Luft (L).

Für Rauchgas ist der Maßstab für die a/a_0 -Achse $2/(\kappa - 1) = 6,25$ mal größer als für w/a_0 ; für Luft ist der Maßstab für die a'/a_0 -Achse $2/(\kappa' - 1) = 5,0$ mal größer als für w'/a_0 .

Wenn die Maßstäbe für a/a_0 und a'/a_0 wie in den Abb. 5a und b gleich gewählt werden, müssen die Maßstäbe für w/a_0 und w'/a_0 im Verhältnis

5,0/6,25 = 0,8 verschieden sein. Die Charakteristiken erscheinen dann in beiden Bildern als unter 45° geneigte Gerade. Würde der Maßstab für die w'/a_0 -Achse gleich demjenigen für w/a_0 gewählt, so hätten die Charakteristiken für Luft eine Neigung von $\text{tg } \alpha' = 1/0,8 = 1,25$, und die beiden Diagramme könnten gemäß Abb. 5c übereinander gezeichnet werden.

Es ist aber praktischer, ein gemeinsames $(p/p_0)^{(\kappa-1)/2\kappa} - w/a_0$ -Diagramm zu benutzen. Seine Konstruktion soll anhand eines Beispiels mit den in der Abb. 6a angegebenen Zahlen gezeigt werden. p_0, a_0 und p_0', a_0' seien die Anfangszustandsgrößen für Rauchgas bzw. Luft, wobei wegen der Stetigkeit an der Trennungsschicht $p_0 = p_0'$ und $w_0 = w_0'$ nicht aber $a = a_0$ sein muß. Nun soll eine Druckwelle durch das Rohr hindurch wandern. In einem bestimmten Augenblick ist der Druck an der Trennungsschicht zwischen Luft und Rauchgas

$$\begin{aligned} \text{auf der Rauchgasseite} \quad p &= p_0 (a/a_0)^{2\kappa/(\kappa-1)} = p_0 (a/a_0)^{8,25} \\ \text{und auf der Luftseite} \quad p' &= p_0' (a'/a_0')^{2\kappa'/(\kappa'-1)} = p_0' (a'/a_0')^7. \end{aligned}$$

Da es sich um eine Druckwelle (bzw. Verdünnungswelle) handelt, kann keine Unstetigkeit an der Trennungsschicht auftreten. Somit muß $p = p'$ sein, oder

$$p_0 (a/a_0)^{8,25} = p_0' (a'/a_0')^7.$$

Da

$$p_0 = p_0'$$

ist, wird

$$a/a_0 = \{(a_0/a_0') (a'/a_0')\}^{7/8,25} = 1,528 (a'/a_0')^{0,849}.$$

Zahlentabelle 1

$\frac{a'}{a_0} = 1,0$	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,607	0,55
$\frac{a}{a_0} = 1,528$	1,463	1,397	1,332	1,265	1,197	1,13	1,06	1,0	0,921
$\frac{a'}{a_0} = 0,50$	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,10	0	
$\frac{a}{a_0} = 0,849$	0,776	0,703	0,626	0,55	0,471	0,39	0,216	0	

Die in der Tabelle 1 zusammengestellten Schallgeschwindigkeiten a' und a für Luft bzw. Rauchgas gelten für gleiche Drücke. Wenn der Maßstab für a/a_0 (Rauchgas) in der Abb. 5c beibehalten und der Maßstab für a'/a_0 (Luft) nach der in Tabelle 1 angegebenen Beziehung verzerrt wird, entsteht ein gemeinsames $(p/p_0)^{0,1211} - w/a_0$ -Diagramm gemäß Abb. 6c.

Die Charakteristiken für das Rauchgas bleiben als die unter 45° geneigten Geraden bestehen, ebenso die beiden Geraden $A = \pm W$. Es fragt sich nun, wie die Charakteristiken und die Linien $A = \pm W$ für Luft aussehen.

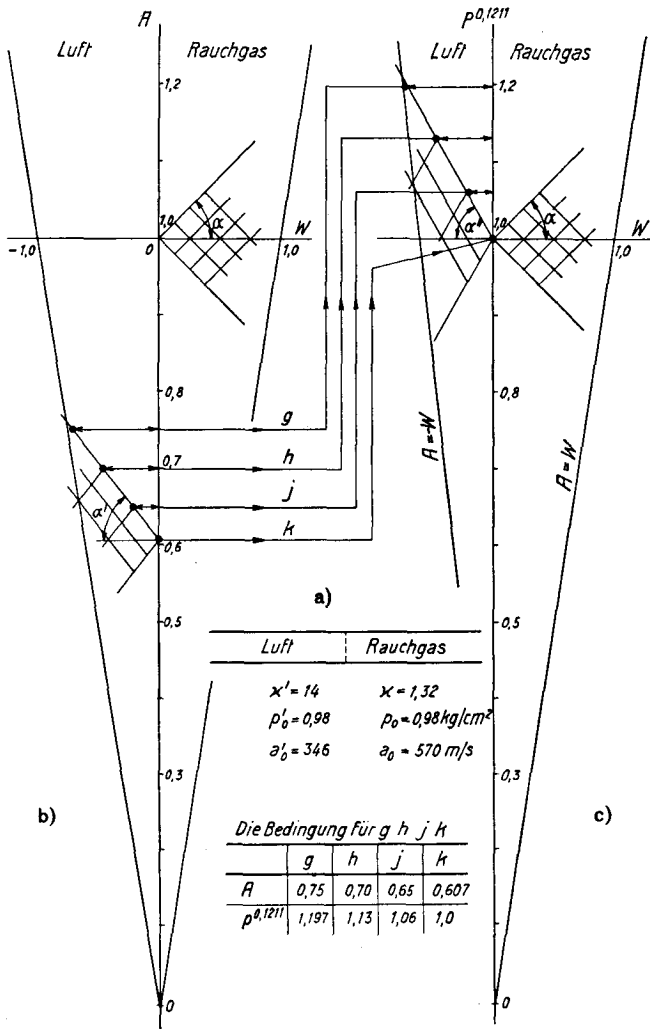


Abb. 6. Entwurf eines gemeinsamen W - P -Diagrammes für Luft und Rauchgas.
a) Zustand der zwei verschiedenen Gase in einem Rohr; b) Ausgangs- W - A -Diagramm, bei Luft $\text{tg } \alpha' = 1/0,8 = 1,25$, bei Rauchgas $\text{tg } \alpha = 1,0$; c) Anpassung des P -Maßstabes, bei Luft $\text{tg } \alpha'' = 1,75$, bei Rauchgas $\text{tg } \alpha = 1,0$.

Von dem auf der Achse a/a_0 liegenden Punkt $(a'/a_0) = 0,607$ aus sind zwei Charakteristiken eingezeichnet, welche die Neigung $\text{tg } \alpha' = 1,25$ haben. Zur

Konstruktion der entsprechenden Charakteristiken im W - P -Diagramm greift man z. B. auf der Charakteristik die Punkte $a'/a_0 = 0,607, 0,65, 0,7$ und $0,75$ heraus, sucht ihre entsprechenden Lagen in dem W - P -Diagramm und verbindet sie durch eine Linie. Sie ist normalerweise gekrümmt, kann aber der Einfachheit halber durch eine Gerade ersetzt werden, deren Neigungen für verschiedene Charakteristiken verschieden sind. Ihr Mittelwert für den in Frage kommenden Bereich beträgt in unserem Fall $(\operatorname{tg} \alpha'')_{\text{mittel}} = 1,75$. Wenn wir alle Charakteristiken durch Gerade mit dieser mittleren Neigung ersetzen, erhalten wir wieder ein sehr einfaches Diagramm. Der Faktor der Transformation von dem W - A - zum W - P -Diagramm ist $i = \operatorname{tg} \alpha'' / \operatorname{tg} \alpha' = 1,75 / 1,25 = 1,4$. Analog können die $(A = \pm W)$ -Linien für das W - P -Diagramm konstruiert und durch Gerade ersetzt werden, wie dies in der Abb. 6c getan ist.

Dieses Diagramm eignet sich zur Untersuchung der Gaszustände an der Trennungsschicht zwischen Rauchgas und Luft sehr gut und wird später zur Behandlung der instationären Strömung in den Spül- und Auspuffleitungen ausschließlich benützt.

Die Behandlung wird viel einfacher, wenn die im Rohr nebeneinander vorhandenen Gasmassen, deren Zustände nicht auf der gleichen Adiabate liegen, gleiches κ aufweisen. Dann ist die Bedingung für die Stetigkeit an der Trennungsschicht $a/a_0 = a'/a_0' = (a_0/a_0')(a'/a_0')$ und der Faktor der Transformation einfach $i = a_0/a_0'$, wobei a_0 und a_0' immer die auf irgend einen gleichen Druck $p_0 = p_0'$ bezogenen Größen sind. Meistens wird für $p_0 = p_0'$ der Ruhedruck gewählt.

23. Bestimmung der Poldistanz H im gemeinsamen W - P -Diagramm für Rauchgas und Luft

In der Beziehung $dx/dt = w \pm a$ oder $dX/dZ = (W \pm A)/H$ sind a_0 und L beliebig gewählte Konstanten und die Poldistanz H ist gleich der Einheit 1. So wird

$$\text{Einheit von } H = \frac{\text{Einheit von } W \times \text{Einheit von } Z}{\text{Einheit von } X},$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$[H] = \frac{[W] \times [Z]}{[X]}.$$

231. W - A - und X - Z -Diagramme für Rauchgas

Mit den Einheiten von $[W] = 3,2$ cm; $[Z] = 2,5$ cm und $[X] = 8$ cm beträgt die Länge von H $(3,2 \cdot 2,5) / 8 = 1$ cm. Für den Punkt P ($a/a_0 = 1,05$; $w/a_0 = 0,3125$)

ist die Charakteristik im X - Z -Diagramm, also der Fortpflanzungsweg, in der Abb. 7a als Gerade parallel zu QR eingezeichnet.

232. W - A - und X - Z -Diagramme für Luft

Hier ist die Einheit von $[W'] = 4$ cm. Wenn die Einheiten von Z und X beibehalten werden, ist $[H'] = (4,0 \cdot 2,5) / 8 = 1,25$ cm. Für P' ($a'/a_0 = 1,05$; $w'/a_0 = 0,25$) ist die Charakteristik im X - Z -Diagramm in der Abb. 7b konstruiert.

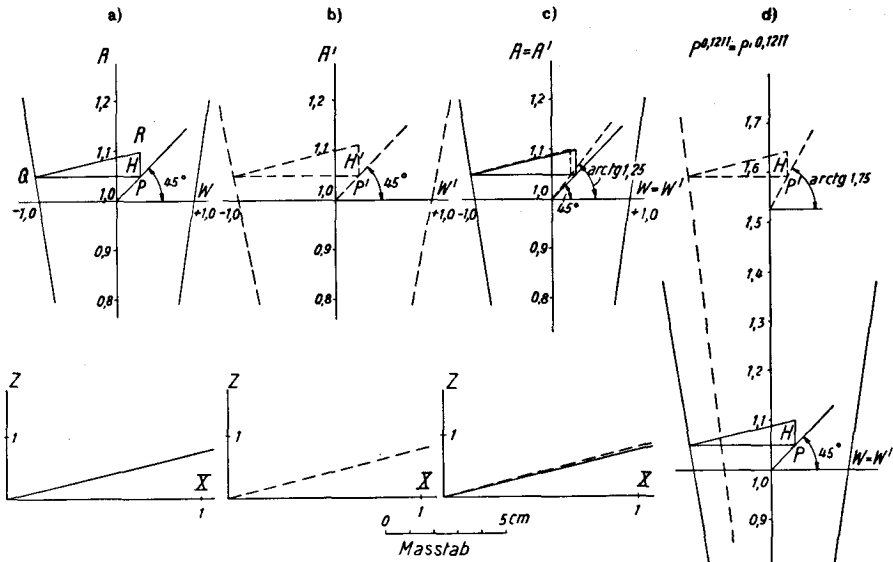


Abb. 7. Bestimmung der Poldistanzen H für Rauchgas und Luft.

————— Rauchgas - - - - - Luft

a) für Rauchgas im W - A -Diagramm; b) für Luft im W - A -Diagramm; c) für Rauchgas und Luft im gemeinsamen W - A -Diagramm; d) für Rauchgas und Luft im W - P -Diagramm.

Wird die Einheit von W' ebenfalls gleich 3,2 cm wie bei Rauchgas gewählt, während der Maßstab für A' beibehalten wird, so verläuft die Charakteristik mit der Neigung von $\text{tg } \alpha' = 1,25$ und $[H'] = 1,0$ cm wie bei Rauchgas, und die beiden Diagramme können zusammengezeichnet werden, vgl. Abb. 7c.

233. W - P -Diagramm für Rauchgas und Luft zusammen

Bei der Transformation vom W - A -Diagramm für Luft ins W - P -Diagramm (Abb. 7d) bleibt die Größe H_{Luft} gleich. Somit kommt man zum Resultat, daß die Poldistanzen im W - P -Diagramm für Rauchgas und Luft gleich sind.

3. Darstellungselemente für die Druck- und Verdünnungswellen

Zur Gewinnung einer Übersicht über die Behandlungsweise der Wellen sollen in diesem Abschnitt anhand des W - A -Diagramms allein einige Darstellungsgesetze für die Charakteristiken besprochen werden.

31. Kreuzen von Wellen

Nach den im Abschnitt 21 gefundenen Beziehungen $\frac{dA}{dW} = -\frac{\kappa-1}{2}$ und $\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{W+A}$ für hinlaufende Wellen und $\frac{dA}{dW} = +\frac{\kappa-1}{2}$ und $\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{W-A}$ für rücklaufende Wellen ist jeder Charakteristik im X - Z -Diagramm, also jeder Welle, eine Charakteristik im W - A -Diagramm zugeordnet, deren Richtungen sich wegen der entgegengesetzten Vorzeichen kreuzen. Die Lagen der Charakteristiken werden durch die jeweiligen Anfangsbedingungen festgelegt.

Diese Feststellung kann noch anders formuliert werden. Eine W - A -Charakteristik ist immer mit einer Welle in der X - Z -Ebene fest verbunden. Eine Welle kann beliebig von anderen, in entgegengesetzter Richtung laufenden Wellen gekreuzt werden; die ihr zugeordnete W - A -Charakteristik bleibt vor

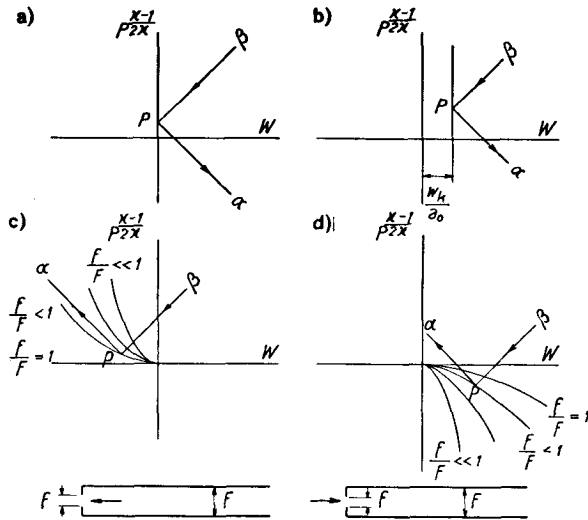


Abb. 8. Reflexion der Welle im Rohr.

a) am geschlossenen Ende; b) an einem sich mit der Geschwindigkeit w_k bewegenden Kolben; c) am offenen Ende, wobei das Gas ausströmt; d) am offenen Ende, wobei das Gas einströmt.

und nach der Kreuzung dieselbe. Die Zugehörigkeit der W - A -Charakteristik zu einer Welle wird also durch Kreuzen mit anderen Charakteristiken nicht beeinflusst¹⁾).

32. Reflexion von Wellen

Wenn eine hinlaufende Welle mit $\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{W+A}$ an irgend einer Berandung reflektiert wird, wandert sie als rücklaufende Welle in entgegengesetzter Richtung mit $\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{W-A}$ zurück, wobei auch die ihr zugeordnete W - A -Charakteristik $\frac{dA}{dW} = -\frac{\kappa-1}{2}$ das Vorzeichen ändert und zu $\frac{dA}{dW} = +\frac{\kappa-1}{2}$ wird. Die W - A -Charakteristiken ändern also ihre Neigung bei der Reflexion. Die Abb. 8 zeigt einige Fälle von Reflexionen, wobei die Charakteristik β in die Charakteristik α übergeht. Der auf der Randbedingungskurve liegende Punkt P stellt immer den Zustand an der Berandung nach der Reflexion dar.

33. Randproblem für das Einströmen eines Gases in ein Rohr

Ein Rohr stehe gemäß Abb. 9a mit einem Behälter mit unendlich großem Querschnitt in Verbindung und sei durch einen Schieber gegen ihn abgeschlossen-

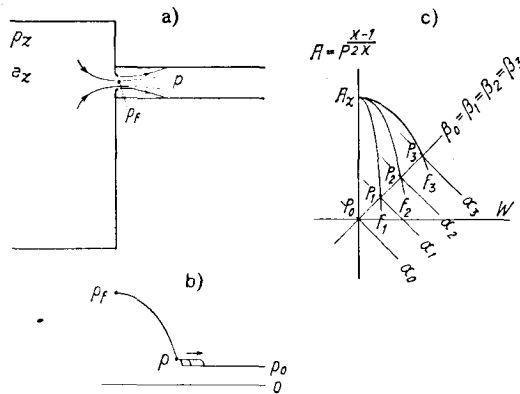


Abb. 9. Entstehung der Druckwelle beim Einströmen eines Gases in ein Rohr.

sen. Der Druck im Behälter sei p_z , derjenige im Rohr p_0 ; beide sollen auf ein- und derselben Adiabate liegen. Das Gas im Rohr sei anfangs in Ruhe. Wird nun der Schieber geöffnet, so wird das im Rohr neben dem Schieber befindliche

¹⁾ In *Schultz-Grunow* [7] ist dies mathematisch bewiesen.

Gas zunächst durch die eindringende Gasmasse verdichtet. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß das Einströmen vom Behälter durch die Öffnung ins Rohr rein adiabatisch verlaufe. Im W - A -Diagramm der Abb. 9c sei der Punkt P_0 der Zustand des Gases im Rohr vor dem Öffnen des Schiebers. Im Augenblick des Öffnens erleidet das dicht neben dem Schieber befindliche Gas eine Störung, welche sowohl eine nach rechts fortschreitende Welle mit der Charakteristik α_0 als auch eine rücklaufende Welle mit der Charakteristik β_0 , welche in den Behälter hinein wandern will, verursacht. Ist der Querschnitt des Behälters unendlich groß, so wird diese rücklaufende Welle in ihm ganz verschwinden.

Im Augenblick, da der Schlitz bis auf den Querschnitt f_1 geöffnet ist, wird diese Welle β_0 an der Randbedingungskurve f_1 zur Welle α_1 reflektiert, die nach rechts wandert; gleichzeitig entsteht eine Welle β_1 , die nach links in den Behälter wandern will. Die Charakteristik β_1 stimmt mit derjenigen von β_0 überein.

Nun wird die Welle β_1 wieder an der Randbedingung für den inzwischen auf f_2 erweiterten Schlitz zu einer nach rechts laufenden Welle α_2 reflektiert, wobei eine Welle β_2 entsteht und in den Behälter wandern will, deren Charakteristik wiederum mit β_0, β_1 zusammenfällt, usf.

Die Charakteristik β_0 mit ihren Punkten $P_0, P_1, P_2, P_3 \dots$ stellt also die Druckwelle dar, die im Rohr durch die eindringenden Gasmassen ausgelöst wird, und dieses Einströmungsrandproblem kann somit ganz nach der Auffassung der Reflexion von Wellen gelöst werden.

Eine Ungenauigkeit liegt aber insofern in dieser Betrachtung, als erstens das Gas im Rohr nicht schon dicht an der Öffnung des Schlitzes von der eindringenden Masse verdichtet wird, sondern erst weiter stromabwärts, wo der eindringende Strahl das Rohr voll ausfüllt. Diese Stelle ändert sich noch mit der Größe der freigemachten Öffnung, was eine weitere Unsicherheit mit sich bringt. Zweitens besteht auch keine scharfe Trennung zwischen dem eindringenden und dem bereits im Rohr vorhandenen Gas, sondern es wird vielmehr eine gewisse Mischung eintreten, so daß die ausgelöste Welle niemals so stark sein wird wie die theoretisch berechnete.

34. Teilweise Reflexion von Wellen an der Trennungsschicht zwischen zwei Gasmassen verschiedener Art und verschiedener Temperatur

Wir verfolgen wieder dasselbe Beispiel wie im Abschnitt 22, und zwar mit den in der Abb. 10 angegebenen Anfangszuständen. An dem linken Ende des Rohres befinde sich ein Kolben, während das rechte Ende offen sei. Nun bewege sich der Kolben plötzlich mit der konstanten Geschwindigkeit w_k ins

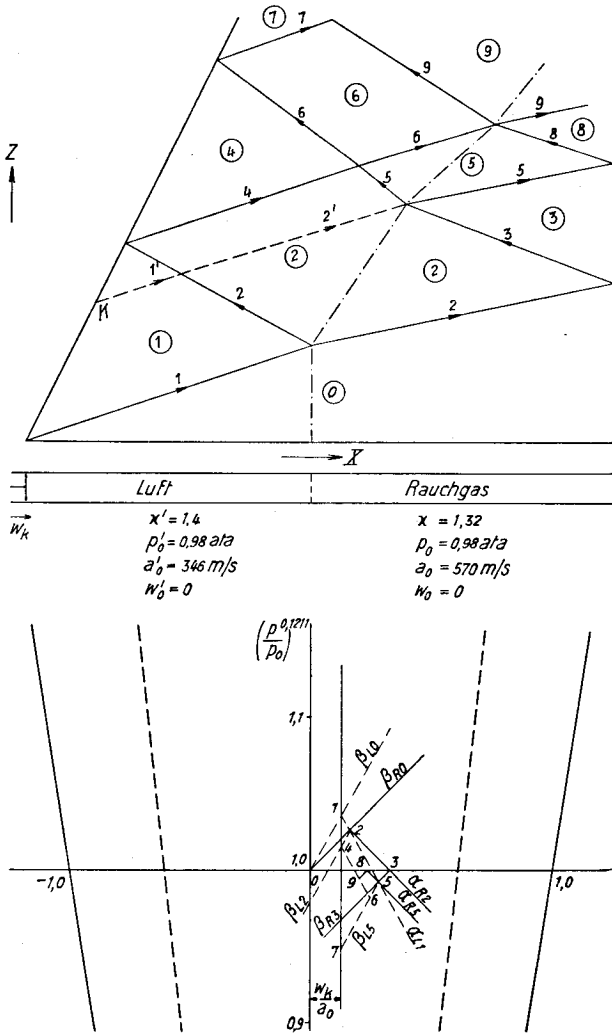


Abb. 10. Konstruktion der Wellen in einem Rohr mit zwei verschiedenen Gasmassen nebeneinander.

———— Rauchgas - - - - - Luft

Rohr hinein, wodurch ein Verdichtungsstoß ausgelöst wird und nach rechts wandert. Da die Geschwindigkeit w_k im Vergleich mit a_0 nicht groß gewählt ist, darf der Stoß noch als Druckwelle behandelt werden¹⁾.

¹⁾ Nach *Schultz-Grunow* [7] ist dies bis $0,1 \cdot a_0$ zulässig.

Die Welle wandert zunächst durch das Luftgebiet. Nach Abschnitt 33 ist ihr Zustand durch die Charakteristik β_L bestimmt, welche durch den Punkt 0 geht. Da die senkrechte Linie, welche durch den Punkt w_k/a_0 geht, die Randbedingung auf der Kolbenseite bedeutet, stellt deren Schnittpunkt 1 mit β_{L0} den Zustand der Welle dar. Die Charakteristik α_L durch den Punkt 1 ist ihr zugeordnet.

Hat die Welle die Trennungsschicht erreicht, so wird sie dort teilweise reflektiert und gleichzeitig weiter ins Rauchgas vordringen, allerdings mit einer anderen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die nach Abschnitt 33 durch einen Punkt auf der Charakteristik β_R durch den Punkt 0 repräsentiert wird. Anders gesagt stellt diese Charakteristik β_{R0} die Randbedingung auf der Seite der Trennungsschicht dar. Damit kann die Aufgabe ganz einfach als Reflexion der Welle an dieser Randbedingung behandelt werden; doch ist zu beachten, daß die Welle auch über den Rand hinweg weiterwandern wird.

Der Schnittpunkt 2 der beiden Charakteristiken α_{L1} und β_{R0} stellt somit den Zustand an der Trennungsschicht nach der schwachen Reflexion und gleichzeitigen Weiterwanderung der Welle dar. Vom Punkt 2 gehen zwei Charakteristiken β_{L2} und α_{R2} aus, wobei die erste die in die Luft zurückgeworfene Welle, die zweite die in das Rauchgas weiterwandernde repräsentiert.

Die Wellenfortpflanzungswege im X - Z -Diagramm können dann konstruiert werden. Sie sind in der Abb. 10 mit gleichen Zahlen gekennzeichnet, wie die ihnen zugeordneten Punkte im W - P -Diagramm.

Die Welle mit der Charakteristik α_{R2} wird am rechten, offenen Rohrende als eine Welle mit der Charakteristik β_{R3} reflektiert und erreicht bald wieder die Trennungsschicht. Sie wird an ihr teilweise reflektiert und wandert gleichzeitig weiter in die Luft hinein. Jetzt kann die Randbedingung an der Trennungsschicht für diese Welle nicht ohne weiteres aufgestellt werden; vielmehr ist zu berücksichtigen, daß vom Kolben her immer noch weitere Wellen kommen. Wir greifen eine Welle 1' heraus, welche bei der konstanten Geschwindigkeit des Kolbens die gleiche Neigung hat wie die Welle 1. Sie kreuzt zuerst die Welle 2 und wandert als Welle 2' weiter, welcher der Punkt 2 im W - P -Diagramm zugeordnet ist, während die Welle 2 nach dem Kreuzen ihre Neigung beibehält.

Die Welle 2' kreuzt die Welle 3 gerade an der Trennungsschicht, was durch geeignete Wahl der Hilfswelle 1' leicht zu erzielen ist. Somit haben wir jetzt eine Wellenkreuzung vor uns, die auf bekannte Art ohne weiteres lösbar ist. Der Schnittpunkt 5 der Charakteristik β_{R3} mit $\alpha_{L2'} = \alpha_{L2} = \alpha_{L1}$ stellt dann den Zustand der Trennungsschicht nach dem Kreuzen der beiden Wellen 2' und 3 dar. Vom Punkt 5 gehen wieder zwei Charakteristiken α_{R5} und β_{L5} für die nach dem Rauchgas zurückreflektierte, bzw. für die in die Luft weiterwandernde Welle aus, usw.

So kann das Problem der teilweisen Reflexion an der Trennungsschicht immer als Kreuzung zweier Wellen, welche von verschiedenen Medien kommen und sich gerade an der Trennungsschicht treffen, betrachtet und entsprechend gelöst werden.

35. Randproblem für das Einströmen eines Gases in ein Rohr, in dem sich ein anderes Gas mit anderem κ und beliebigem Zustand befindet

Auch dieses Problem soll anhand eines Beispiels gemäß Abb. 11 behandelt werden.

Ein Rohr stehe durch einen Schlitz, der anfangs geschlossen sei, mit einem Behälter von unendlich großem Querschnitt in Verbindung. Im Behälter befinde sich Rauchgas mit $p_z, a_z, T_z, \kappa = 1,32$ und im Rohr Luft mit $p_0', a_0', T_0', \kappa' = 1,4$. Wird nun der Schieber allmählich aufgemacht, so strömt das Rauchgas in das Rohr ein, wobei wieder angenommen sei, daß das Einströmen adiabatisch verlaufe.

Der Punkt 0 sei der Anfangszustand der Luft vor dem Öffnen des Schiebers, und wir denken uns, daß bereits eine ganz dünne Rauchgasschicht zwischen dem Schieber und der Luftmasse liege. Die Öffnung f_1 teilen wir noch in kleine Teilöffnungen $f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3} \dots$ ein und betrachten zunächst die Teilöffnung $f_{0,1}$. Die gedachte, vor der Luftmasse liegende, dünne Rauchgasschicht wird von der eindringenden Rauchgasschicht zuerst verdichtet und die in ihr ausgelöste Druckwelle hat einen Zustand, der nach Abschnitt 33 durch den Schnittpunkt $(0,1)$ der Charakteristik β_{R0} mit der Randbedingungskurve $f_{0,1}$ dargestellt ist. Die dieser Welle zugeordnete Charakteristik ist $\alpha_{R0,1}$. Sie wandert dann nach rechts, trifft aber sofort auf die Trennungsschicht und wird dort teilweise reflektiert. Nach Abschnitt 34 stellt der Schnittpunkt $(0,1a)$ den Zustand der Trennungsschicht nach dieser teilweisen Reflexion, die Charakteristik $\beta_{R0,1}$ die reflektierte Welle dar. Bis sie zum Schieber zurückgewandert ist, hat sich dieser bereits auf $f_{0,2}$ geöffnet. So wird sie an dessen Randbedingung $f_{0,2}$ reflektiert und wandert wieder ins Rohr nach rechts zurück, wird wieder an der Trennungsschicht teilweise reflektiert, usw., bis schließlich eine von der Trennungsschicht reflektierte Welle in dem Augenblick am Schieber ankommt, da dieser die Öffnung f_1 hat. Der Punkt $(1a)$ stellt dann den Zustand der Gase am Schieber nach der Reflexion dieser Welle an demselben dar. Der Punkt $(1a)$ liegt nur wenig abseits der Charakteristik β_{L0} der Luft. Da es sich um ein stark vergrößertes Diagramm handelt, kann man für ihn einfach den Schnittpunkt 1 der Charakteristik β_{L0} mit der Randbedingung f_1 nehmen, wie dies auch in dem eigentlichen W - P -Diagramm getan wurde.

Analog kann der Punkt 2 für die Öffnung f_2 gefunden werden. Im Intervall zwischen f_2 und f_3 erfolgen nur zwei Hin- und Herwanderungen der Wellen zwischen Schieber und Trennungsschicht. Der Punkt 3 ist dann der gesuchte Punkt für die Öffnung f_3 .

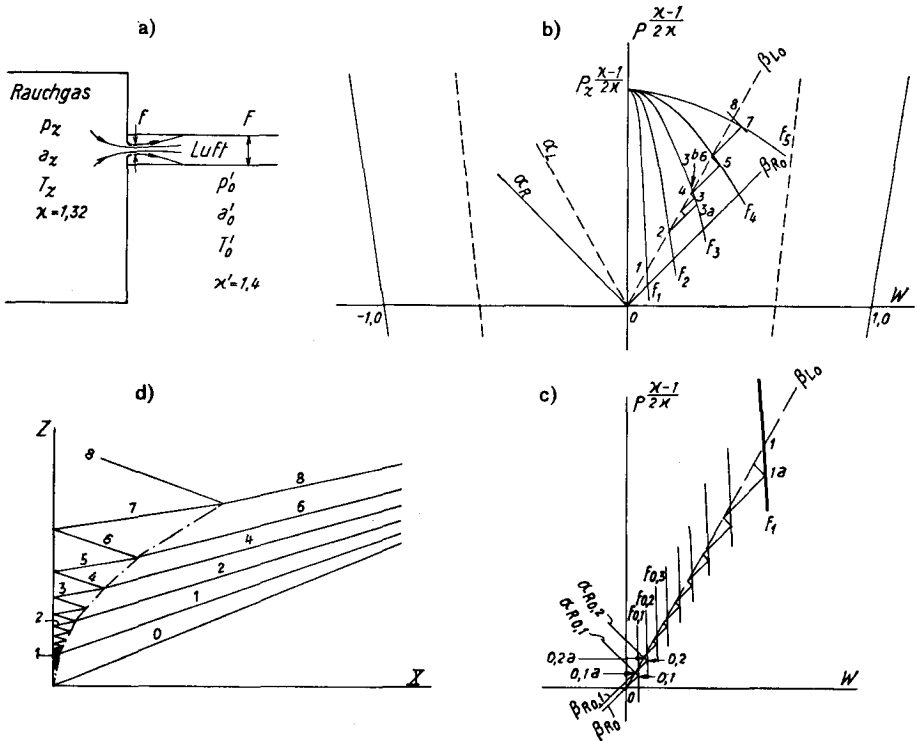


Abb. 11. Konstruktion der Trennungsschicht und der Reflexion an ihr. ——— für Rauchgas, - - - - - für Luft. Bild c ist das vergrößerte W - P -Diagramm für das Charakteristikelement 01 auf β_{L0} .

Im Intervall zwischen f_3 und f_4 wandert die Welle nur einmal zwischen Schieber und Trennungsschicht hin und her. So bekommt man den Punkt 5 als Zustand der Welle nach der Reflexion am Schieber von der Öffnung f_4 . Dasselbe gilt für die Öffnung f_5 , usw.

Man sieht, daß das Intervall $f_2 f_3$ eine Übergangsstufe darstellt. Vor ihr können die Schnittpunkte der Randbedingungskurven mit der Charakteristik β_{L0} als die gesuchten Zustände der Wellen nach der Reflexion am Schieber angesehen werden; nach ihr müssen die gesuchten Zustände auf den entsprechenden Charakteristiken β_R liegen. Man kann aber für die Übergangsstufe eine Vereinfachung treffen, indem man anstatt Punkt 3 entweder Punkt

(3b) auf der Charakteristik β_{L0} nimmt, das heißt so verfährt wie bei den vorhergehenden Intervallen, oder Punkt (3a) auf der Charakteristik β_{R2} , wie dies bei den nachfolgenden Intervallen geschieht. Die Abweichung der Punkte (3b) und (3a) von dem richtigen Punkt 3 ist nicht groß, wenn die Intervalle genügend klein sind, und der Fehler ist in den meisten Fällen zulässig. Durch die einheitliche Darstellungsweise wird die Lösung des Problems sehr vereinfacht.

Im X - Z -Diagramm der Abb. 11 sind die Wellen mit den gleichen Zahlen gekennzeichnet wie die ihnen zugeordneten Punkte im W - P -Diagramm. Die Richtung der Trennungsschicht im X - Z -Diagramm wird durch den jeweiligen Mittelpunkt des Charakteristikelementes von β_{L0} bestimmt.

Wenn die Trennungsschicht weit in das Rohr hineingetrieben ist, wird das Zeitintervall für ein einmaliges Hin- und Herwandern der Welle zwischen ihr und dem Schieber für unser Differenzenverfahren zu groß. Man ist dann gezwungen, kleinere Zeitintervalle zu nehmen und entsprechend zu interpolieren. Das gleiche gilt auch, wenn das Zeitintervall nicht so gewählt werden kann, daß es im Takt mit der Ankunft der Wellen am Schieber liegt.

36. Die Stautemperaturen

Das W - A -Diagramm in der Abb. 12 stelle irgend einen Wellenzustand in einem Rohr dar. Wir greifen einen Punkt P heraus, der w und a für ein Gasteilchen in einem bestimmten Augenblick und an einer bestimmten Stelle im Rohr angibt. Wenn dieses Gasteilchen auf stationärem Weg adiabatisch wieder zur Ruhe gebracht wird, ergibt sich ein Stauzustand mit

$$a_{stau}^2 = a^2 + \frac{\kappa - 1}{2} w^2$$

oder
$$(a/a_{stau})^2 + \left(\frac{w}{\sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} a_{stau}}} \right)^2 = 1,$$

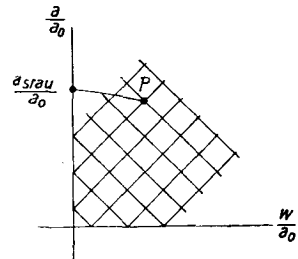


Abb. 12. Stauzustand eines Wellenelementes.

was die Gleichung einer Ellipse darstellt. Der Schnittpunkt dieser Ellipse durch den Punkt P mit der Ordinatenachse liefert den Zustand a_{stau} . Da zu jedem Punkt im Diagramm eine solche Ellipse gehört, kann ein bestimmtes Gasteilchen zu verschiedenen Zeiten ganz verschiedene Stauzustände annehmen, wenn es von Wellen durchwandert worden ist.

4. Randbedingungen

41. Stationäre Randbedingung für das Einströmen eines Gases in ein Rohr ohne Berücksichtigung der entstehenden Druckwellen

Das Gas ströme nach Abb. 13 aus einem Behälter von unendlich großem Querschnitt durch eine Düse f in das Rohr. Von den im Bild angegebenen Zuständen des Gases sind diejenigen im Behälter mit dem Index z , diejenigen in der Austrittsmündung der Düse mit dem Index f , und diejenigen im Rohr ohne besonderen Index gekennzeichnet. Der Druck auf der Düsenrückwand sei p_r und im Fall $w_f < a_f$ gleich dem Druck p_f im Strahl. Der Ringquerschnitt zwischen Rohrwand und Düsenaustrittsmündung sei f_r . Die Kontraktion des Strahls werde vernachlässigt und die Strömung sei als reibungsfrei angenommen. Wenn der Einströmvorgang als quasistationär betrachtet wird, gelten folgende Gleichungen:

a) Kontinuitätsgleichung $f w_f / v_f = F w / v.$

b) Impulsgleichung $(F w^2 / v - f w_f^2 / v_f) / g = f p_f + f_r p_r - F p.$

c) Energiegleichung für die Strecke vom Behälter zum Düsenaustritt

$$A (w_f^2 - w_z^2) / 2g = c_p (T_z - T_f),$$

und von der Düse zu dem vom Strahl voll ausgefüllten Querschnitt des Rohrs

$$A (w^2 - w_f^2) / 2g = c_p (T_f - T).$$

Die Zustandsänderung auf der Strecke vom Behälter zum Düsenaustritt verläuft adiabatisch, dagegen tritt nach der Düse ein Carnotscher Stoß auf.

Durch einige Umformungen entstehen folgende Resultate.

411. Für Unterschallgeschwindigkeit in der Düsenaustrittsmündung, Machsche Zahl $M_f = w_f / a_f < 1$ und $p_r = p_f$:

$$\frac{p_f}{p_z} = \left(\frac{\kappa - 1}{2} M_f^2 + 1 \right)^{\frac{\kappa}{1 - \kappa}},$$

$$M_f^2 = \frac{\left(\frac{p}{p_f} - 1 \right) \left(\frac{F}{f} \right)^2 \left[\frac{p}{p_f} (\kappa + 1) + \kappa - 1 \right]}{2 \kappa \left[\kappa \left(\frac{F}{f} - 1 \right) + \frac{F}{f} \left(\frac{p}{p_f} - 1 \right) \right]}$$

und
$$\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_f}{p_z} \right)^{\frac{1 - \kappa}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{\left(\frac{p}{p_z} - \frac{p_f}{p_z} \right) \left(\frac{F}{f} \right)^2 \left[\frac{p}{p_z} (\kappa + 1) + \frac{p_f}{p_z} (\kappa - 1) \right]}{2 \kappa \left[\kappa \left(\frac{F}{f} - 1 \right) \frac{p_f}{p_z} + \frac{F}{f} \left(\frac{p}{p_z} - \frac{p_f}{p_z} \right) \right] \frac{p_f}{p_z}}. \quad (11)$$

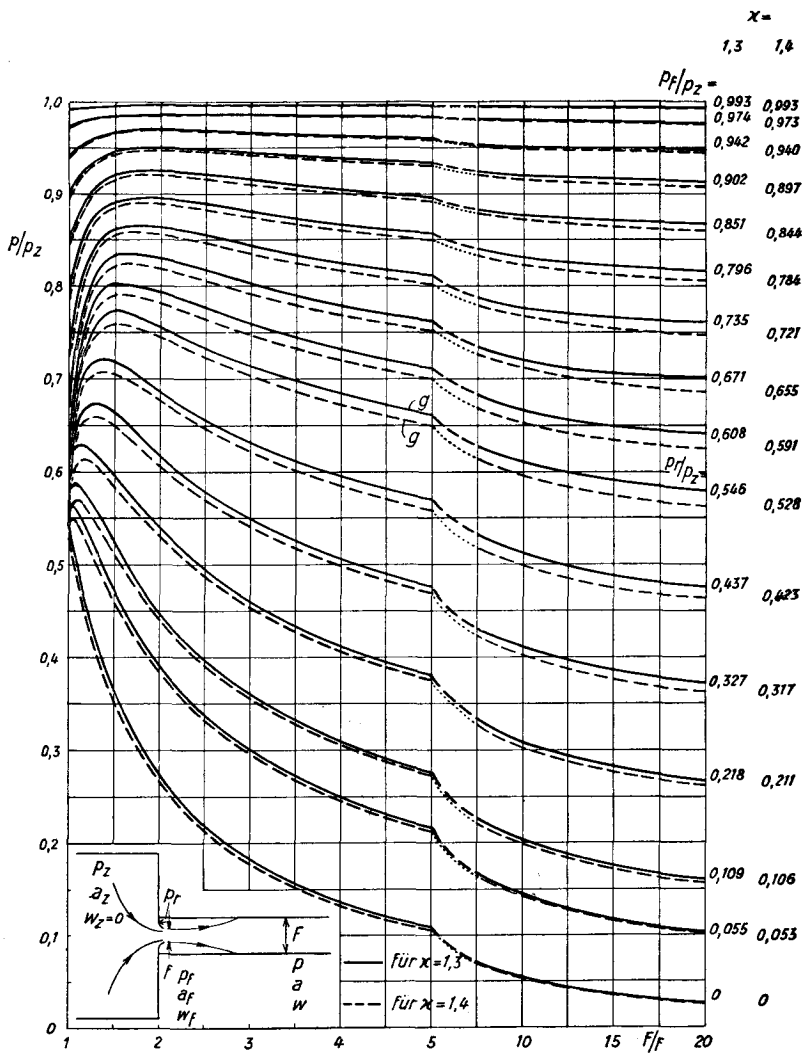


Abb. 13. Diagramm zur Ermittlung des Druckes p_f/p_z am Düsenaustritt bzw. p_r/p_z im Düsenringraum aus dem Druck- und Öffnungsverhältnis p/p_z , bzw. F/f . Die Grenzkurve g grenzt das Gebiet der Unterschallgeschwindigkeit w_f von demjenigen der Schallgeschwindigkeit w_g ab.

412. Für Schallgeschwindigkeit in der Düsenaustrittsmündung, $M_f=1$ und $p_r \neq p_f$:

$$\left(\frac{F}{f} \frac{p}{\beta p_z}\right)^2 (\kappa + 1) - 2 \frac{F}{f} \frac{p}{\beta p_z} \left[(1 + \kappa) + \frac{p_r}{\beta p_z} \left(\frac{F}{f} - 1\right) \right] - (\kappa - 1) \left(\frac{F}{f} - 1\right) \frac{p_r}{\beta p_z} \left\{ \left(\frac{F}{f} - 1\right) \frac{p_r}{\beta p_z} + 2(1 + \kappa) \right\} + \kappa + 1 = 0, \quad (12)$$

worin $\beta = p_f/p_z = \{2/(\kappa + 1)\}^{\kappa/\kappa-1}$ das kritische Druckverhältnis ist.

Die beiden Gleichungen (11) und (12), welche die Beziehung zwischen p/p_z und F/f mit p_f/p_z , M_f bzw. $M_{f0} = w_f/a_z$ als Parameter im Unterschallgebiet und mit p_r/p_z als Parameter im Schallgebiet darstellen, sind in der Abb. 13 als Kurvenscharen dargestellt, und zwar für $\kappa = 1,3$ und $\kappa = 1,4$. Wenn das Verhältnis zwischen den Drücken im Behälter und im Rohr für eine bestimmte Düsenöffnung bekannt ist, kann daraus unter Vernachlässigung der entstehenden Druckwellen im Rohr der Strahlzustand in der Düsenaustrittsmündung überschlägig berechnet werden. Je größer das Druckverhältnis, um so genauer ist diese Überschlagsrechnung. Aus den Kurven läßt sich noch folgendes ablesen:

Im Unterschallgebiet sind immer $p_f < p$ und $p_r = p_f$; während im Schallgebiet $p_f \leq p$ je nachdem $p \geq \beta p_z$, und $p_r < p_f$ oder $p_r < p$ sind.

Im Schallgebiet herrscht also im Ringraum zwischen Düse und Rohrwand ein tieferer Druck als im Strahl und in dem nächsten, vom Strahl voll ausgefüllten Rohrquerschnitt. Dieser tiefe Druck übt eine saugende Wirkung auf die Strömung aus.

42. Randbedingung für das Einströmen eines Gases in ein Rohr unter Berücksichtigung der entstehenden Druckwellen

Die Behandlung des Einströmens als instationärer Vorgang ist schwierig, da sowohl die stationäre als auch die lokale Geschwindigkeitsänderung gleichzeitig zu berücksichtigen sind. Bei starker Querschnittsänderung überwiegt der stationäre Anteil, und man darf nach Lutz [8] meist mit dem stationären Anteil allein operieren, während man den lokalen bewußt vernachlässigt.

Wir benützen wieder die Beziehungen der Abb. 13, wobei nun allerdings p, w und a den Zustand der im Rohr durch die eindringenden Massen ausgelösten Welle darstellen (vgl. Abb. 9), und erhalten folgende Randbedingungen:

a) Energiegleichung für die Strecke vom Behälter zum Düsenaustritt

$$i_z - i_f = c_p (T_z - T_f) = A w_f^2 / 2g$$

$$\text{oder} \quad w_f^2 = \frac{2}{\kappa - 1} (a_z^2 - a_f^2) \quad (13)$$

und vom Behälter über die Düse hinweg bis zur Stelle, von wo an der Strahl den Rohrquerschnitt voll ausfüllt,

$$w^2 = \frac{2}{\kappa - 1} (a_z^2 - a^2). \quad (14)$$

b) Kontinuitätsgleichung

$$w \rho = (f/F) w_f \rho_f; \quad (15)$$

c) Schallgeschwindigkeit

$$a^2 = \kappa p / \rho^2, \quad (16)$$

$$a_f^2 = \kappa p_f / \rho_f^2; \quad (17)$$

d) Adiabatische Expansion vom Behälter bis zum Düsenaustritt

$$p_f / p_z = (\rho_f / \rho_z)^\kappa = (a_f / a_z)^{2\kappa / (\kappa - 1)}; \quad (18)$$

e) Impulsgleichung für das Gebiet vom Düsenaustritt bis zu dem vom Strahl voll ausgefüllten Rohrquerschnitt für den Fall der Unterschallgeschwindigkeit im Düsenaustritt

$$p - p_f = (f/F) \rho_f w_f (w_f - w). \quad (19)$$

Aus den oben aufgestellten Gleichungen ergeben sich folgende Resultate:

421. Für Schallgeschwindigkeit im Düsenaustritt

$$\frac{\rho}{p_z} = \frac{f}{F} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \frac{a_z}{w} \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w}{a_z} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Wir werden diese Gleichung nach *Jenny* [5] in einem Koordinatensystem $\{(p/p_z)^{(\kappa-1)/2\kappa}; w/a_z\}$ als Kurvenschar mit f/F als Parameter eintragen, damit sie gut zum W - P -Diagramm paßt.

422. Für Unterschallgeschwindigkeit im Düsenaustritt

$$\frac{w}{a_z} = \frac{w_f}{a_z} - \left(\frac{p}{p_z} - \frac{p_f}{p_z} \right) \frac{F}{f} \frac{1}{\left(\frac{p_f}{p_z} \right)^\kappa \frac{w_f}{a_z} \kappa}. \quad (21)$$

Um diese Gleichung in dasselbe Koordinatensystem einzeichnen zu können, müssen die Glieder w_f/a_z und p_f/p_z zuerst mit Hilfe der obigen Gleichungen eliminiert werden, was nur schrittweise durch numerische Berechnung erfolgen kann.

Für $\kappa = 1,32$ ist ein solches Randbedingungsdiagramm in der Abb. 14 konstruiert worden, worin die Gleichung

$$\frac{\left(\frac{p}{p_f} - 1 \right) \left(\frac{F}{f} \right)^2 \left[\frac{p}{p_f} (\kappa + 1) + \kappa - 1 \right]}{2 \kappa \left[\kappa \left(\frac{F}{f} - 1 \right) + \frac{F}{f} \left(\frac{p}{p_f} - 1 \right) \right]} = 1$$

die Grenzkurve darstellt, auf der die Unterschallgeschwindigkeit im Düsenaustritt in die Schallgeschwindigkeit übergeht.

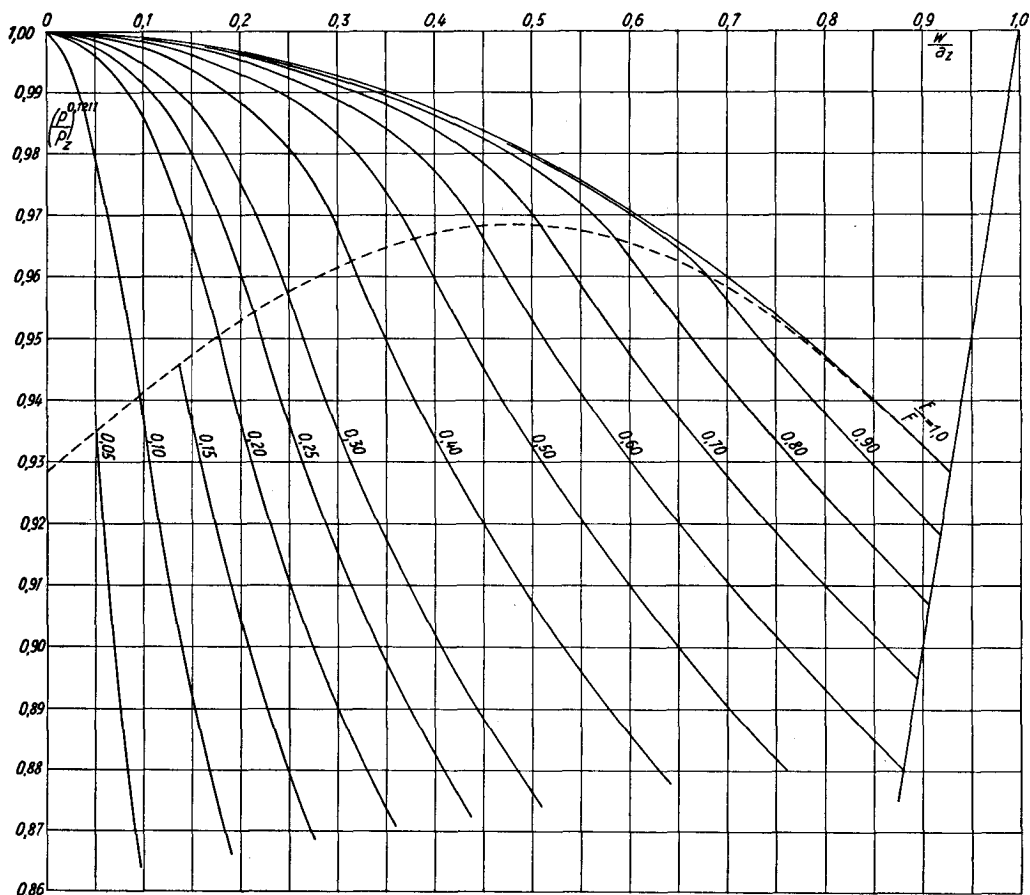


Abb. 14. Randbedingungsdiagramm für das Einströmen eines Gases mit $\kappa = 1,32$ in ein Rohr. ----- die Grenzkurve

43. Randbedingung für das Ausströmen eines Gases aus einem Rohr

Das Gas ströme gemäß Abb. 15a aus dem Rohr durch eine Düse von veränderlichem Querschnitt in einen Behälter, wobei die Randbedingung wie unter 42 als stationär betrachtet werden kann.

431. Bei Unterschallgeschwindigkeit im Düsenaustritt ist $p_f = p_z$, und aus der Energiegleichung vom Rohr bis zum Düsenaustritt ergibt sich für adiabatische Expansion nach Abb. 15b:

$$w_f^2 - w^2 = \frac{2}{\kappa - 1} (a^2 - a_{p_z}^2),$$

oder
$$(w_f/a_{p_z})^2 - (w/a_{p_z})^2 = \frac{2}{\kappa - 1} [(a/a_{p_z})^2 - 1]. \quad (22)$$

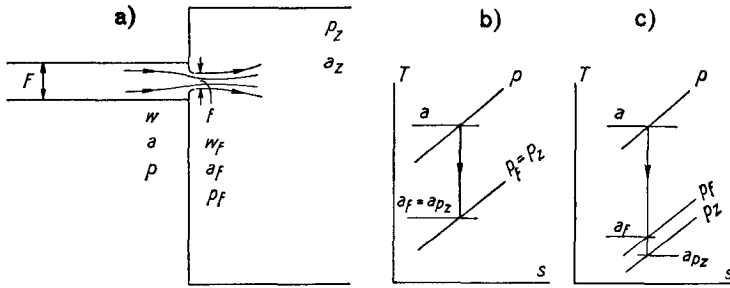


Abb. 15. Ausströmen eines Gases aus einem Rohr.
 b) Entropie-Diagramm für $w_f < a_f$, c) Entropie-Diagramm für $w_f = a_f$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$w \rho F = w_f \rho_f f$$

oder $(w/a_{p_2}) (a/a_{p_2})^{2(\kappa-1)} \cdot (F/f) = w_f/a_{p_2}$ (23)

folgt
$$\left(\frac{w}{a_{p_2}}\right)^2 = \frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{2 \frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right] \cdot \left(\frac{F}{f}\right)^2 \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa} \cdot \frac{4}{\kappa-1} - 1}$$
 (24)

432. Bei Schallgeschwindigkeit im Düsenaustritt ist $w_f = a_f$ und $p_f > p_2$. Die Energiegleichung liefert gemäß Abb. 15c:

$$a^2 + \frac{\kappa-1}{2} w^2 = a_f^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_f^2 = a_f^2 \frac{\kappa+1}{2} \quad (25)$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$w \rho F = w_f \rho_f f = a_f \rho_f f,$$

oder
$$a_f = w \frac{\rho}{\rho_f} \frac{F}{f} = w \left(\frac{a}{a_f}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}} \frac{F}{f}$$

ergibt
$$a_f = w^{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} a^{\frac{2}{\kappa+1}} \left(\frac{F}{f}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \quad (26)$$

Nach Einsetzen in Gl. (25) entsteht

$$a^2 + \frac{\kappa-1}{2} w^2 = \frac{\kappa+1}{2} w^{\frac{2}{\kappa+1}} a^{\frac{4}{\kappa+1}} \left(\frac{F}{f}\right)^{\frac{2}{\kappa+1}},$$

oder
$$\left(\frac{a}{a_{p_2}}\right)^2 + \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{w}{a_{p_2}}\right)^2 = \frac{\kappa+1}{2} \left(\frac{w}{a_{p_2}}\right)^{\frac{2}{\kappa+1}} \left(\frac{a}{a_{p_2}}\right)^{\frac{4}{\kappa+1}} \left(\frac{F}{f}\right)^{\frac{2}{\kappa+1}},$$

oder
$$\left(\frac{p}{p_z}\right)^{2\frac{\kappa-1}{2\kappa}} + \frac{\kappa-1}{2}\left(\frac{w}{a_{p_z}}\right)^2 = \frac{\kappa+1}{2}\left(\frac{w}{a_{p_z}}\right)^{2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}\frac{4}{\kappa+1}}\left(\frac{F}{f}\right)^{2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}. \quad (27)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = \alpha \frac{w}{a_{p_z}}$$

ergibt sich aus Gl. (27)

$$\alpha^2 + \frac{\kappa-1}{2} = \frac{\kappa+1}{2} \alpha^{\frac{4}{\kappa+1}} \left(\frac{F}{f}\right)^{2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}},$$

womit der Koeffizient α für jedes Öffnungsverhältnis F/f bestimmt werden kann.

Wählt man w/a_{p_z} und $(p/p_z)^{(\kappa-1)/2\kappa}$ als Koordinaten, so stellt eine durch den Nullpunkt gehende Geradenschar mit Parameter F/f die Randbedingung bei Schallgeschwindigkeit in der Düsenaustrittsmündung dar.

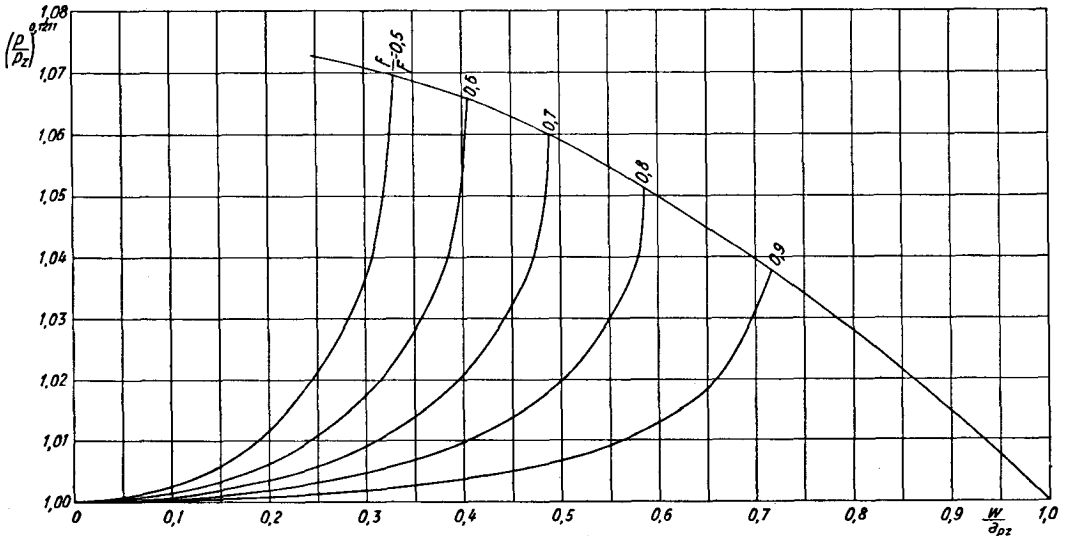


Abb. 16. Randbedingungsdiagramm für das Ausströmen eines Gases mit $\kappa=1,32$ aus einem Rohr.

433. Die Gleichung der Grenzkurve zwischen Schall- und Unterschallgebiet

$$a^2 + \frac{\kappa-1}{2} w^2 = a_f^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_f^2 = \frac{\kappa+1}{2} a_f^2$$

oder
$$\frac{\left(\frac{a}{a_f}\right)^2}{\frac{\kappa+1}{2}} + \frac{\left(\frac{w}{a_f}\right)^2}{\frac{\kappa-1}{2}} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\left(\frac{p}{p_z}\right)^{2\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}{\frac{\kappa+1}{2}} + \frac{\left(\frac{w}{a_{p_z}}\right)^2}{\frac{\kappa-1}{2}} = 1 \quad (28)$$

ist die Gleichung einer Ellipse.

Nun können die Gl. (24) und (27) in einem Koordinatensystem $\{w/a_{pz}; (p/p_z)^{(\kappa-1)/2\kappa}\}$ als Kurvenscharen dargestellt werden. Dies wurde aber in den Abb. 16 und 17 nur für das Unterschallgebiet für $\kappa=1,32$ und $\kappa=1,4$ getan, da wir später nur Randbedingungen in diesem Gebiet benötigen.

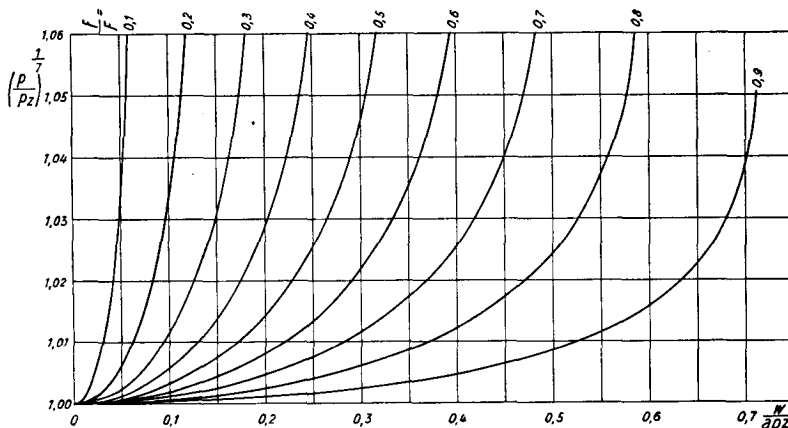


Abb. 17. Randbedingungsdiagramm für das Ausströmen der Luft mit $\kappa=1,4$ aus einem Rohr.

44. Randbedingung für eine Bordamündung

Strömt ein Gas von außen in ein Rohr ohne Flansch am Ende ein, so handelt es sich um eine sog. Bordamündung. Sie wirkt wie eine Senke, in welche das Gas aus allen Richtungen einströmt. Man wählt die in die Abb. 18 eingezeichnete Kontrollfläche und denkt sich die Fläche $a-b$ in sehr großer Entfernung vom Rohr. Nach dem Impulssatz ist

$$F(p_{A\infty} - p) = F\rho w^2.$$

Die Drücke und Impulsströme heben sich bis auf diejenigen, welche auf die der Rohrmündung gegenüberliegende Fläche wirken, auf. So wird

$$\begin{aligned} p_{A\infty} - p &= \rho w^2 \\ &= \kappa p \frac{w^2}{a^2} \\ &= \kappa p \frac{w^2}{a_{A\infty}^2 - \frac{\kappa-1}{2} w^2}, \end{aligned}$$

worin $a_{A\infty}$ die Schallgeschwindigkeit im ungestörten äußeren Gas ist, und damit

$$\frac{p_{A\infty}}{p} = \frac{\kappa}{\left(\frac{a_{A\infty}}{w}\right)^2 - \frac{\kappa-1}{2}} + 1. \quad (29)$$

Das ist die Randbedingung für eine Bordamündung. Sie gilt sowohl für Unterschall- als auch für Schallgeschwindigkeit im Mündungsquerschnitt

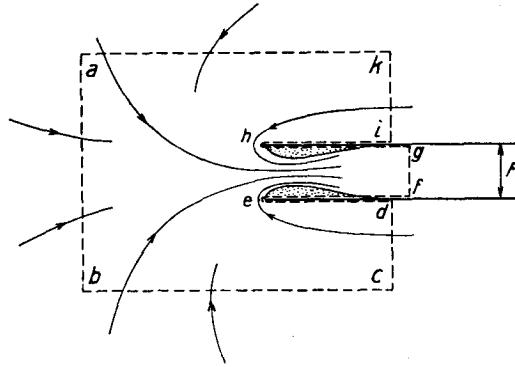


Abb. 18. Bordamündung.

5. Zusammenhang zwischen dem Randbedingungs- und dem W - P -Diagramm

51. Einströmen eines Gases aus einem endlich großen Behälter in ein Rohr

Die Öffnung zwischen Behälter und Rohr werde durch einen Schieber allmählich freigegeben. Da der Behälter ein endliches Volumen aufweist, wird sich der Druck p_z darin mit der Zeit senken. Die Temperatur T_z und damit auch die zugehörige Schallgeschwindigkeit a_z ändern sich dabei nach einer Adiabate. In einem bestimmten Augenblick sei z. B. der Druck p_z vom Anfangsdruck p_{z0} auf p_{z3} gesunken und a_{z0} auf a_{z3} ; die Schlitzöffnung sei nun f_3 . Die Randbedingung vom Behälter über die Schlitzöffnung bis zu dem Rohrquerschnitt, von welchem an der Strahl das Rohr voll ausfüllt, ist mit den Bezeichnungen der Abb. 9

$$a_{z3}^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_{z3}^2 = a_{j3}^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_{j3}^2 = a_3^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_3^2.$$

Wegen $w_z \approx 0$ wird-

$$a_{z3}^2 = a_{j3}^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_{j3}^2 = a_3^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_3^2.$$

Mit einer beliebigen Bezugsgröße a_0 kann die Gleichung dimensionslos gemacht

$$\left(\frac{a_{23}}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{a_{f3}}{a_0}\right)^2 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_{f3}}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{a_3}{a_0}\right)^2 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_3}{a_0}\right)^2,$$

und nach Abb. 19 durch eine Parabel im W - A -Diagramm dargestellt werden. Wenn w_f Schallgeschwindigkeit wird, liegt der Punkt $(w_f/a_0; a_f/a_0)$ auf der Geraden $A = +W$, sonst links davon.

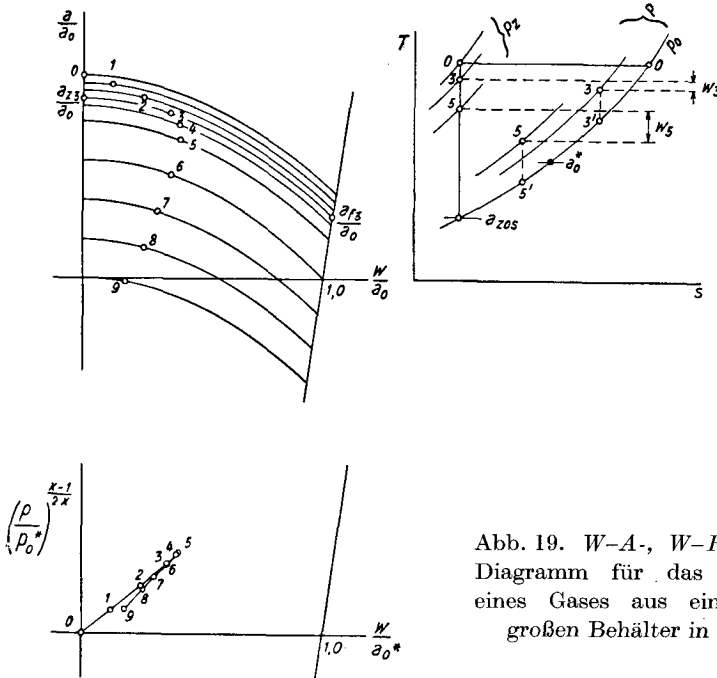


Abb. 19. W - A -, W - P - und T - s -Diagramm für das Einströmen eines Gases aus einem endlich großen Behälter in ein Rohr.

Die eingedrungenen Gasmassen mit den Zuständen $(w, a)_0, (w, a)_1, (w, a)_2, \dots$, die aber auf verschiedenen Adiabaten liegen, befinden sich im Rohr schichtweise nebeneinander. Die entstehenden Druck- und Verdünnungswellen können nach dem im Abschnitt 34 erörterten Verfahren behandelt werden. Wir müssen somit ein W - P -Diagramm konstruieren, dessen Bezugsgrößen p_0^* und a_0^* zunächst willkürlich gewählt werden können. Das W - A -Diagramm wird dann auf das W - P -Diagramm transformiert, wo sich die entsprechenden Punkte 0, 1, 2... auf einem Linienzug befinden, und die Charakteristiken durch jeden Punkt verschieden geneigt sein werden. Da es schwierig wäre, mit so vielen verschieden geneigten Charakteristiken zu operieren, ersetzt man sie durch eine Charakteristik von mittlerer Neigung und vernachlässigt die

teilweise Reflexion an der Trennungsschicht der verschiedenen Gasmassen. Wie *Jenny* [5] gezeigt hat, ist dieses Verfahren zulässig, wenn die Druckschwankung der Wellen klein ist.

Wählt man p_0^* gleich dem atmosphärischen Druck p_0 und a_0^* gleich dem Mittelwert für alle im Rohr befindlichen Gasschichten, wenn sie adiabatisch auf p_0 expandieren würden, also gleich dem Mittelwerte für die Punkte $0, 1', 2' \dots$, so wird die mittlere Neigung der Charakteristiken 45° betragen.

In dieser Arbeit wird ausschließlich das vereinfachte W - P -Diagramm benützt und a_0 und p_0 statt a_0^* und p_0^* geschrieben.

52. Übertragung der Charakteristiken vom Randbedingungs- auf das W - P -Diagramm für das Einströmen eines Gases aus einem Behälter in ein Rohr

Der Druck des Gases im Rohr sei anfangs p_0 , derjenige im Behälter p_z . Nun wird die Schlitzöffnung f freigegeben. Der Zustand des Gases im Rohr wird infolge der entstehenden Druckwelle im W - P -Diagramm der Abb. 20a durch den Schnittpunkt P der β -Charakteristik mit der Randbedingungskurve dargestellt.

Im Randbedingungsdiagramm b sind die entsprechenden Linien ebenfalls eingezeichnet. Zwischen beiden Diagrammen besteht die Beziehung

$$x : y = a_z : a_0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{p_0}{p_z} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{a_z}{a_0} \\ &= \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{p_0}{p_z} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{a_z}{a_0} \frac{\left(\frac{p_z}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}{\frac{a_z}{a_{z0s}}}, \end{aligned}$$

oder
$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \gamma \frac{a_{z0s}}{a_0}. \quad (30)$$

Da der Zustand des Gases im Behälter während der Expansion auf derselben Adiabate liegt, bleibt a_{z0s} konstant, und somit ist auch $\operatorname{tg} \delta$ konstant.

Das Randbedingungsdiagramm mit seinen Randbedingungskurven ist schon im Abschnitt 42 ein für allemal konstruiert worden. Die Randbedingungskurve im W - P -Diagramm braucht aber nicht konstruiert zu werden, da P bereits durch die oben angegebenen Beziehungen aus P' gefunden werden kann.

In der Abb. 20d und e wird ein allgemeines Beispiel behandelt. Der Anfangszustand des Gases sei im W - P -Diagramm durch P_1 dargestellt. Nachdem der Schieber sich von f_1 auf f_2 geöffnet hat, kann der Zustand P_2 des Gases wie

folgt auf einem Umweg über das Randbedingungsdiagramm gefunden werden. Man bringt die β_1 -Charakteristik zunächst mit der Achse $(p/p_0)^{(\kappa-1)/2\kappa}$ zum Schnitt, sucht den zum Schnittpunkt P_0^* gehörenden Punkt P_0' im Randbedingungsdiagramm, zieht durch ihn eine Gerade unter dem Winkel δ und erhält ihren Schnittpunkt P_2' mit der Randbedingungskurve f_2 . Der Punkt P_2 im W - P -Diagramm ist dann durch die Beziehung $x=y(a_{z2}/a_0)$ gegeben.

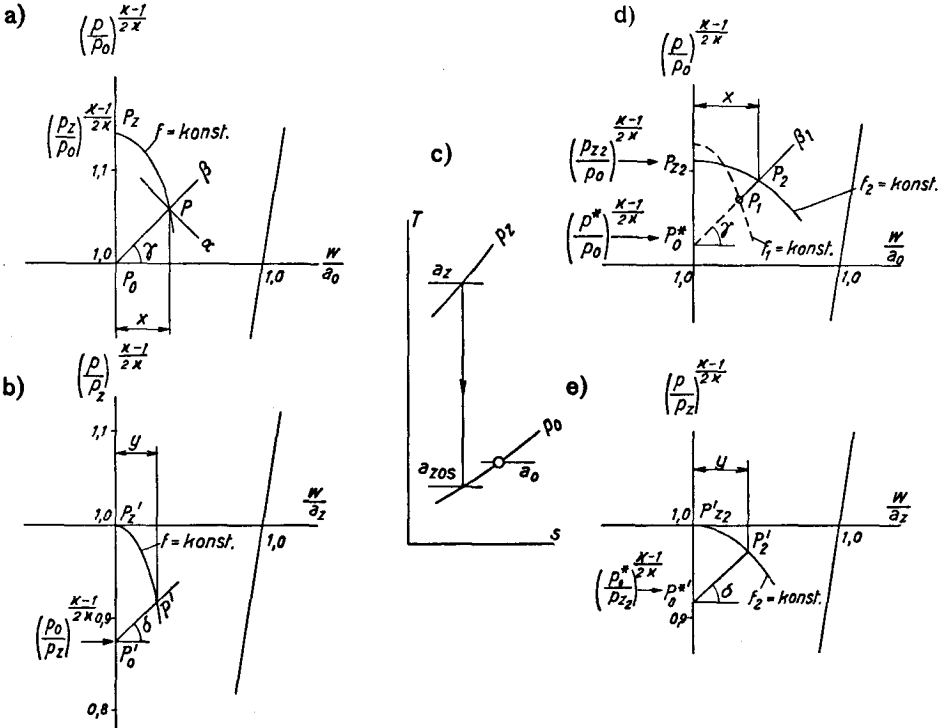


Abb. 20. Beziehung zwischen Randbedingungs- und W - P -Diagramm für das Einströmen eines Gases in ein Rohr.

a) W - P -Diagramm; b) Randbedingungsdiagramm; c) Entropie-Diagramm; d) W - P -Diagramm; e) Randbedingungsdiagramm.

53. Übertragung der Charakteristiken vom Randbedingungs- auf das W - P -Diagramm für das Ausströmen eines Gases aus einem Rohr in einen Behälter

Der Punkt P_1 im W - P -Diagramm der Abb. 21 stelle den Anfangszustand der Welle dar. Der Zustand der beim Öffnen des Schlitzes auf f_2 entstehenden Welle kann genau so ermittelt werden wie im vorangehenden Abschnitt. Die Beziehung zwischen dem Randbedingungs- und W - P -Diagramm ist dabei

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \gamma \cdot \left(\frac{p_0}{p_z} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{a_{p_z}}{a_0}, \\ &= \operatorname{tg} \gamma \cdot \left(\frac{p_0}{p_z} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{a_{p_z}}{a_0} \frac{\left(\frac{p_z}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}{\frac{a_{p_z}}{a_{0s}}}, \end{aligned}$$

oder $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \gamma \frac{a_{0s}}{a_0}$ (31)

und $x:y = a_{p_z}:a_0$.

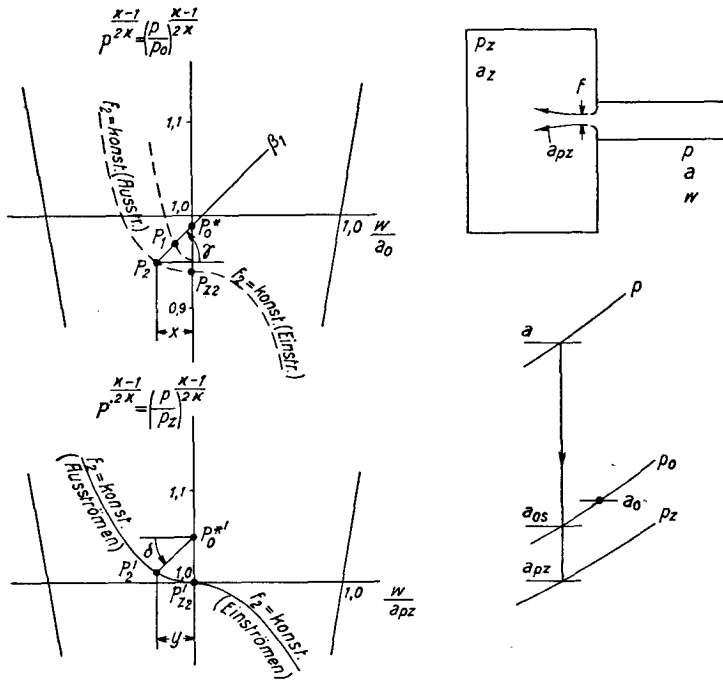


Abb. 21. Beziehung zwischen Randbedingungs- und W - P -Diagramm für das Ausströmen eines Gases aus einem Rohr.

54. Übertragung der Charakteristiken vom Randbedingungsdiagramm für Luft mit $\kappa' = 1,4$ auf das W - P -Diagramm für $\kappa = 1,32$ für das Ausströmen von Luft aus einem Rohr in einen Behälter

Im vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, wie bei gleichem κ eine Charakteristik vom Randbedingungs- auf das W - P -Diagramm transformiert wird. Im vorliegenden Falle ist zunächst das Randbedingungsdiagramm für Luft

mit den Achsen $\{w/a_{pz}; (p/p_z)^{(\kappa'-1)/2\kappa'}\}$ ($\kappa'=1,4$) in ein neues mit den Achsen $\{w/a_{pz}; (p/p_z)^{(\kappa-1)/2\kappa}\}$ ($\kappa=1,32$) zu transformieren, worauf von diesem zum W - P -Diagramm mit den Achsen $\{w/a_0; (p/p_0)^{(\kappa-1)/2\kappa}\}$ übergegangen werden kann. Die entsprechenden Punkte im ursprünglichen Randbedingungsdiagramm

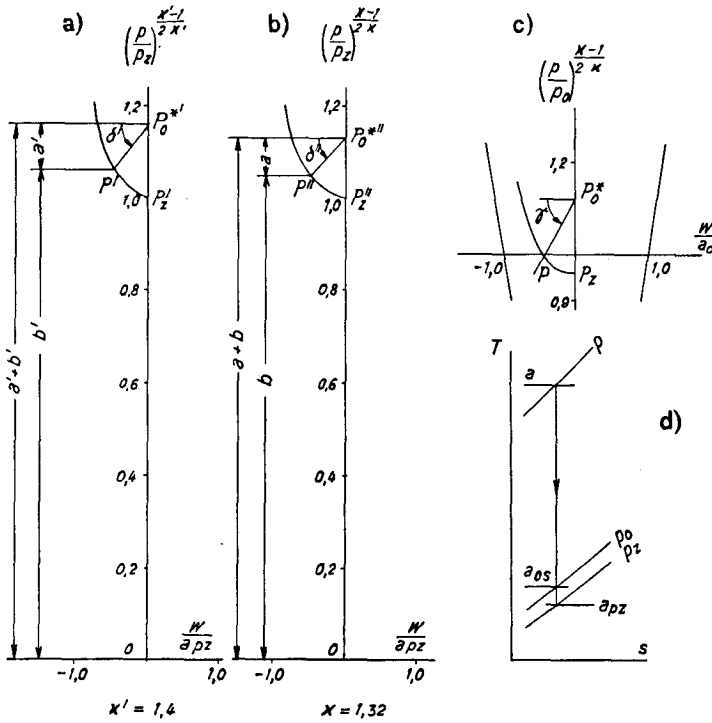


Abb. 22. Beziehung zwischen Randbedingungsdiagramm für Luft mit $\kappa'=1,4$ und W - P -Diagramm mit $\kappa=1,32$ für das Ausströmen von Luft aus einem Rohr.

a) Randbedingungsdiagramm für Luft $\kappa'=1,4$; b) Transformation des Diagrammes a von $\kappa'=1,4$ auf $\kappa=1,32$; c) W - P -Diagramm für $\kappa=1,32$; d) Entropiediagramm.

gramm ($\kappa'=1,4$) und im transformierten ($\kappa=1,32$) sind in der Abb. 22a und b mit gleichen Buchstaben gekennzeichnet, welche sich durch verschiedene Striche unterscheiden. Es gelten folgende Beziehungen:

$$a + b = (a' + b')^{\frac{\kappa-1}{2\kappa} \cdot \frac{2\kappa'}{\kappa'-1}} = (a' + b')^{\frac{1}{1,18}}$$

$$\text{und} \quad b = b' \frac{1}{1,18}$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} a &= (a' + b')^{\frac{1}{1,18}} - b'^{\frac{1}{1,18}} \\ &= b'^{\frac{1}{1,18}} \left[\left(\frac{a'}{b'} + 1 \right)^{\frac{1}{1,18}} - 1 \right] \\ &\approx \frac{1}{1,18} \frac{a'}{b'^{1 - \frac{1}{1,18}}}, \end{aligned}$$

da die Glieder von $(a'/b')^2$ an wegen $a'/b' \ll 1$ vernachlässigt werden dürfen. Die Größe b' kann in der weiteren Berechnung den Wert 1,07 nicht überschreiten; deshalb ist

$$b'^{1 - \frac{1}{1,18}} < 1,07^{\frac{0,18}{1,18}} < 1,01$$

und da außerdem stets $b' > 1$ ist, darf

$$a' = 1,18 a$$

und

$$\operatorname{tg} \delta' = 1,18 \cdot \operatorname{tg} \delta'' \quad (32)$$

gesetzt werden.

Nun kann man auf das W - P -Diagramm der Abb. 22c für $\kappa = 1,32$ übergehen. Es folgt

$$\operatorname{tg} \delta'' = \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{p_0}{p_z} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \frac{a_{p_z}}{a_0} \frac{\left(\frac{p_z}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}{\left(\frac{a_{p_z}}{a_{0s}} \right)^{\frac{2\kappa'}{\kappa'-1} \cdot \frac{\kappa-1}{2\kappa}}} = \operatorname{tg} \gamma \frac{a_{p_z}}{a_0} \left(\frac{a_{0s}}{a_{p_z}} \right)^{\frac{1}{1,18}}$$

Da sich in unserem Fall der Druck in dem als Behälter gedachten Zylinder bei Einströmen der Luft aus dem Spülrohr nicht stark vom atmosphärischen Druck p_0 unterscheidet, kann

$$a_{0s} \approx a_{p_z}$$

und

$$\operatorname{tg} \delta'' = \operatorname{tg} \gamma \cdot (a_{0s}/a_0)$$

gesetzt werden, und schließlich wird

$$\operatorname{tg} \delta' = 1,18 \operatorname{tg} \gamma \frac{a_{0s}}{a_0}. \quad (33)$$

Die Größe a_0 ist willkürlich und braucht in keiner Beziehung zum untersuchten System zu stehen.

55. Randbedingung für das Strömen eines Gases durch eine in einem Rohr befindliche Düse unter Berücksichtigung der entstehenden Druck- und Verdünnungs-Wellen

In diesem Abschnitt wird nur der Fall behandelt, daß die Austrittsgeschwindigkeit aus der Düse unter der Schallgeschwindigkeit bleibt. Der Fall für Schallgeschwindigkeit wird dem späteren Abschnitt 72 vorbehalten.

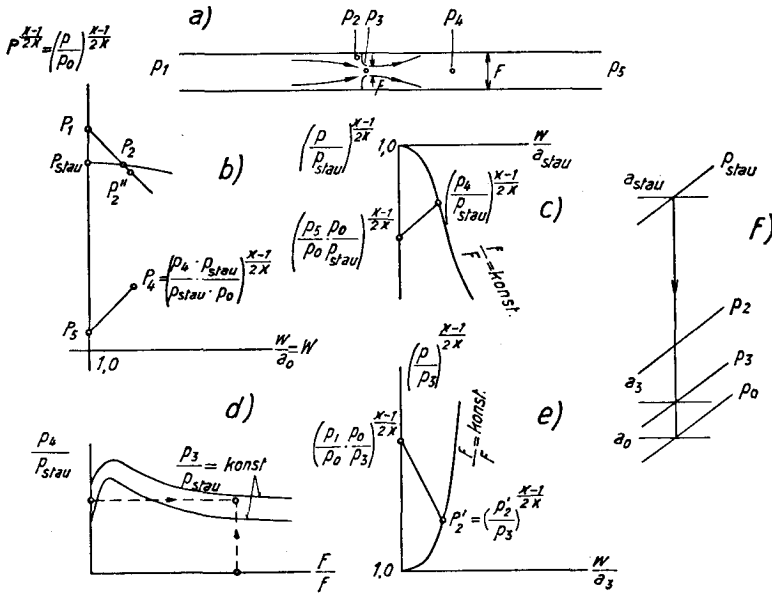


Abb. 23. Bestimmung der Randbedingung für das Strömen eines Gases durch eine Düse in einem Rohr.

Die Düse sei am Anfang geschlossen. Die Zustände der ruhenden Gase in beiden Rohrteilen seien mit den Nummern 1 und 5 gekennzeichnet (Abb. 23a und b) und es werde außerdem angenommen, sie lägen auf einer gleichen Adiabate. Die Düse wird dann plötzlich freigegeben und das Gas strömt durch dieselbe nach rechts hindurch. Es entsteht eine Verdünnungswelle (2) im linken Rohrteil und eine Druckwelle (4) im rechten. Der Zustand im Düsenaustritt sei mit Nummer 3 gekennzeichnet. Alle diese Zustände 2, 3 und 4 seien zu suchen. Der Rechnungsvorgang ist folgender:

1. Durch Punkt P_1 im W - P -Diagramm (Bild b) zieht man die α -Charakteristik, auf welcher die Verdünnungswelle darstellende Punkt liegen soll. Es wird zunächst angenommen, er sei P_2 .

2. Suche den Staudruck p_{stau} für den Punkt P_2 (Punkt P_{stau} im Bild b).

3. Aus $(p_5/p_0)^{(\kappa-1)/2\kappa}$ und $(p_{stau}/p_0)^{(\kappa-1)/2\kappa}$ kann der Zustandspunkt P_4 der im rechten Rohrteil entstehenden Druckwelle unter Zuhilfenahme des Diagrammes Abb. 14 gefunden werden, vgl. Bild c.

4. Aus dem gefundenen Druckverhältnis p_4/p_{stau} und F/f kann der Druck p_3 im Düsenaustritt aus der Kurventafel Abb. 13 abgelesen werden, vgl. Bild d.

5. Da nun der Gegendruck p_3 für die Düse bekannt ist, kann der Druck vor derselben wiederum auf dem Diagramm Abb. 16 aus dem Ruhedruck p_1 bestimmt werden, vgl. Bild e.

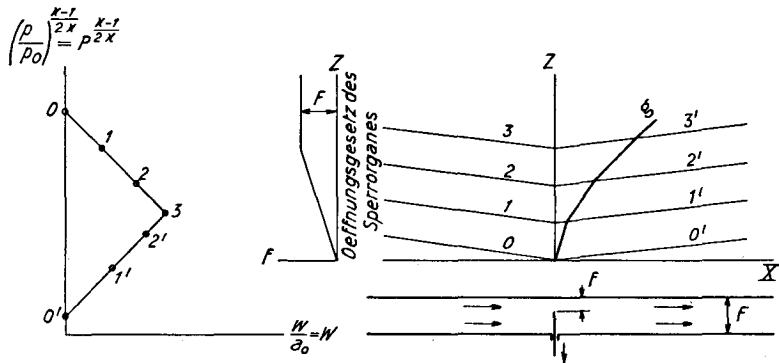


Abb. 24. W - P - und X - Z -Diagramm zur Bestimmung der Randbedingung für das Strömen eines Gases in einem Rohr beim allmählichen Öffnen des Rohrquerschnittes durch ein Sperrorgan.

Der auf diese Weise gefundene Druck soll gleich dem anfänglich für die Verdünnungswelle angenommenen Druck p_2 sein. Sollte aber der zum Punkt P_2' (Bild e) gehörende Punkt P_2'' im W - P -Diagramm (Bild b) nicht mit P_2 übereinstimmen, dann muß die ganze Operation mit einem neuen Punkt P_2 wiederholt werden.

Das beschriebene Verfahren kann für das Strömen eines Gases in einem Rohr durch ein allmählich geöffnetes Sperrorgan angewendet werden. Die für das Öffnen des Sperrorgans benötigte Zeit wird in genügend kleine Intervalle eingeteilt und die Randbedingung für jeden dazu gehörenden, frei gewordenen Querschnitt des Sperrorgans wird genau nach dem oben gesagten behandelt. Ein solches Beispiel ist in der Abb. 24 dargestellt. Die Punkte für die Verdünnungs- und Druckwelle, welche zu demselben Durchflußquerschnitt des Sperrorgans gehören, sind mit gleicher Nummer gekennzeichnet und nur durch Strich unterschieden. Beim Schnittpunkt 3 der beiden Charakteristiken α und β im W - P -Diagramm ist der Rohrquerschnitt vollständig freigegeben worden und es ist $F/f = 1$. Die Verdünnungswelle im linken Rohrteil geht dann stetig in die Druckwelle im rechten Rohrteil über.

Im X - Z -Diagramm sind die entsprechenden Verdünnungs- und Druckwellen eingezeichnet und die Front der in den rechten Rohrteil eingedrungenen Gasmasse ist durch den Linienzug g dargestellt.

Wenn die Zustände der Gase auf beiden Seiten der anfangs noch geschlossenen Düse nicht auf derselben Adiabate liegen, oder außerdem wenn die Gase verschiedener Art sind, muß die Teilreflexion an der Trennungsschicht zwischen den beiden Gasmassen berücksichtigt werden, vgl. Abschnitt 35.

6. Verdichtungsstöße

61. Die Stautemperaturen bei Verdichtungsstößen

Ein Verdichtungsstoß wandere mit dem Zustand 2 über die Gasmasse vom Zustand 1 hinweg. Seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei c . Für einen Beobachter, der sich mit der gleichen Geschwindigkeit c in der gleichen Richtung bewegt, gelten folgende Gleichungen:

a) Kontinuitätsgleichung

$$\gamma_1(c-w_1) = \gamma_2(c-w_2),$$

b) Impulsgleichung

$$p_1 - p_2 = (c-w_1) \frac{\gamma_1}{g} [(c-w_2) - (c-w_1)],$$

c) Energiegleichung

$$A \frac{(c-w_2)^2}{2g} + i_2 = A \frac{(c-w_1)^2}{2g} + i_1.$$

Mit der Stautenthalpie $i_{stau} = A \frac{w^2}{2g} + i$ lautet die Energiegleichung

$$i_{2\ stau} = i_{1\ stau} + \frac{A}{g} c(w_2 - w_1).$$

Mit $a = \sqrt{g\kappa R\bar{T}}$ lassen sich die Gleichungen vereinfachen zu

$$i_{2\ stau} = i_{1\ stau} + \frac{A}{g} \left\{ \frac{a_1^2}{\kappa} \frac{p_2 - p_1}{p_1} + w_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{p_1} \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}} \right\},$$

oder

$$T_{2\ stau} = T_{1\ stau} + \frac{A}{g c_p} \left\{ \frac{a_1^2}{\kappa} \frac{p_2 - p_1}{p_1} + w_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{p_1} \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}} \right\}. \quad (34)$$

Die Stautemperaturen vor und nach der Verdichtungsstoßfront sind verschieden. Sie können auch nach Abschnitt 36 graphisch ermittelt werden.

62. Reflexion von Verdichtungsstößen an einem geschlossenen Rohrende

Wird die Öffnung des in der Abb. 25a dargestellten Rohres langsam freigegeben, so strömt Gas aus dem Behälter in das Rohr ein und löst eine allmählich anwachsende Druckwelle aus. Beim Punkt S im X - Z -Diagramm der Abb. 25a hat das Druckwellenelement 3 das Element 2 eingeholt, und es entsteht ein Verdichtungsstoß, wobei das Element 3 eine teilweise Reflexion

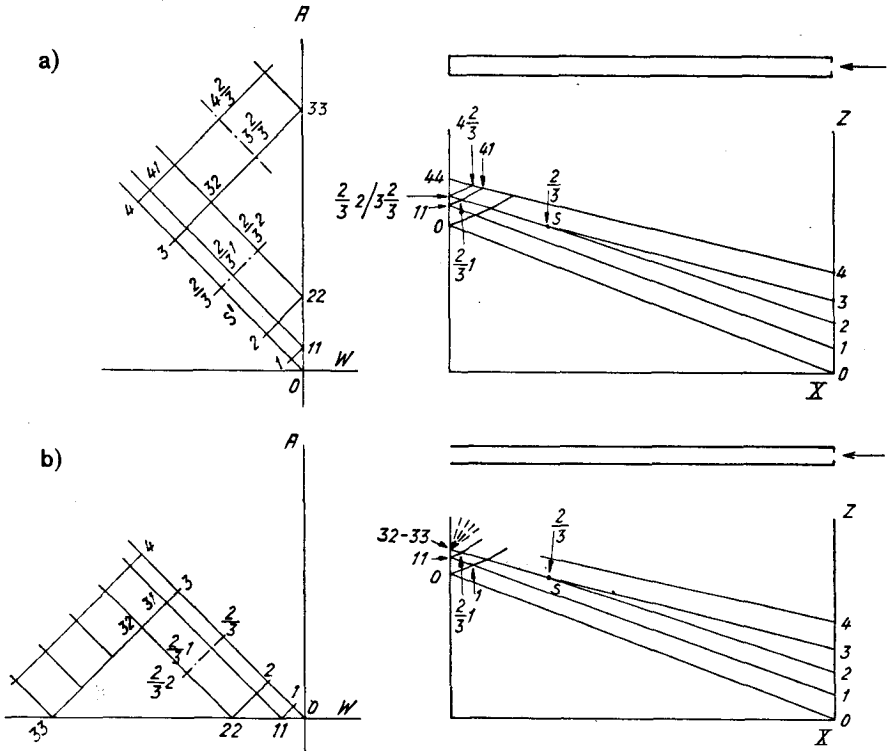


Abb. 25. Reflexion eines Verdichtungsstoßes.

a) an einem geschlossenen Rohrende; b) an einem offenen Rohrende.

an der Stoßfront erfährt. Da es sich in den weiteren Berechnungen stets nur um schwache Verdichtungsstöße handelt, kann diese Reflexion vernachlässigt und angenommen werden, daß der Verdichtungsstoß einfach den Druck p_3 und die Geschwindigkeit w_3 des Wellenelementes 3 übernehme und mit steiler Front über die Gasmassen mit p_2 und w_2 fortwandere. Mit dieser Vereinfachung kann der Verlauf eines solchen schwachen Verdichtungsstoßes als adiabatisch angesehen werden. Nach *Pfriem* [9] ist seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit näherungsweise gleich dem Mittelwert derjenigen der Druckwellenelemente 2 und 3

$$w_s = \frac{1}{2} (a_2 + w_2 + a_3 + w_3)$$

und wird durch den Mittelpunkt S' zwischen den Punkten 2 und 3 im W - A -Diagramm repräsentiert. Diese vereinfachte Methode ist zulässig, solange $\frac{p_{nach\ Stoss}}{p_{vor\ Stoss}} \leq 2,5$ ist. Zur Beschreibung des schwachen Verdichtungsstoßes im W - A -Diagramm stehen drei Punkte zur Verfügung, nämlich die Punkte 2 und 3 für den p - und w -Sprung in der Wellenfront und der Punkt S' für seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Zur Konstruktion des X - Z -Diagramms, also des Wellenplans, genügt indessen der Punkt S' . Man denkt sich die beiden Charakteristiken durch die Punkte 2 und 3 im Punkt S' zu einer einzigen Ersatzcharakteristik zusammengeschrumpft, die in bezug auf Fortpflanzung und Kreuzen der Wellen die gleichen Eigenschaften besitzt wie eine gewöhnliche Charakteristik. In bezug auf die Reflexion des Verdichtungsstoßes bedarf die Ersatzcharakteristik jedoch einer Ergänzung. Der Verdichtungsstoß hat unmittelbar vor der Reflexion als hinlaufender Stoß einen Zustand 22-32 und hernach als rücklaufender einen Zustand 33-32. Der Zustand an der Wand ändert sich bei der Reflexion von 22 plötzlich auf 33. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des hinlaufenden Stoßes ist der Punkt $\frac{2}{3} 2$ maßgebend, für den rücklaufenden der Punkt $3 \frac{2}{3}$. Die Ersatzcharakteristik existiert vom Punkt $\frac{2}{3}$ an nur bis $\frac{2}{3} 2$ als β -Charakteristik, um dann sprunghaft vom Punkt $3 \frac{2}{3}$ an als α -Charakteristik weiterzulaufen.

63. Reflexion von Verdichtungsstößen an offenen Rohrenden

Im einfachsten Fall ist nach Abb. 25 b das Rohrende voll offen. Der Verdichtungsstoß $\frac{2}{3}$ wird dann als Verdünnungswelle reflektiert. Die Ersatzcharakteristik β für den hinlaufenden Verdichtungsstoß verläuft vom Punkt $\frac{2}{3}$ bis $\frac{2}{3} 2$ und hört dort auf. Die reflektierte Verdünnungswelle wird durch die Zustände auf dem ganzen Charakteristikelement 32-33 repräsentiert. Um die Verdünnungswelle weiter zu verfolgen, teilt man die Strecke 32-33 in mehrere Teile und zieht durch jeden Punkt eine α -Charakteristik. Die Geschwindigkeit w_{22} , mit der das Gas unmittelbar vor der Reflexion des Verdichtungsstoßes durch das offene Ende ausströmt, erhöht sich danach plötzlich auf w_{33} .

In der Abb. 26 sind noch einige weitere Reflexionsprobleme von Verdichtungsstößen an Rohrenden behandelt, wobei die benutzten Kennzahlen die gleichen sind wie in der Abb. 25. Aus Abb. 26 ist ersichtlich, daß ein Verdichtungsstoß an einem mit einem Rückschlagventil versehenen Rohrende je nach Umständen als Verdünnungswelle oder wieder als Verdichtungsstoß reflektiert

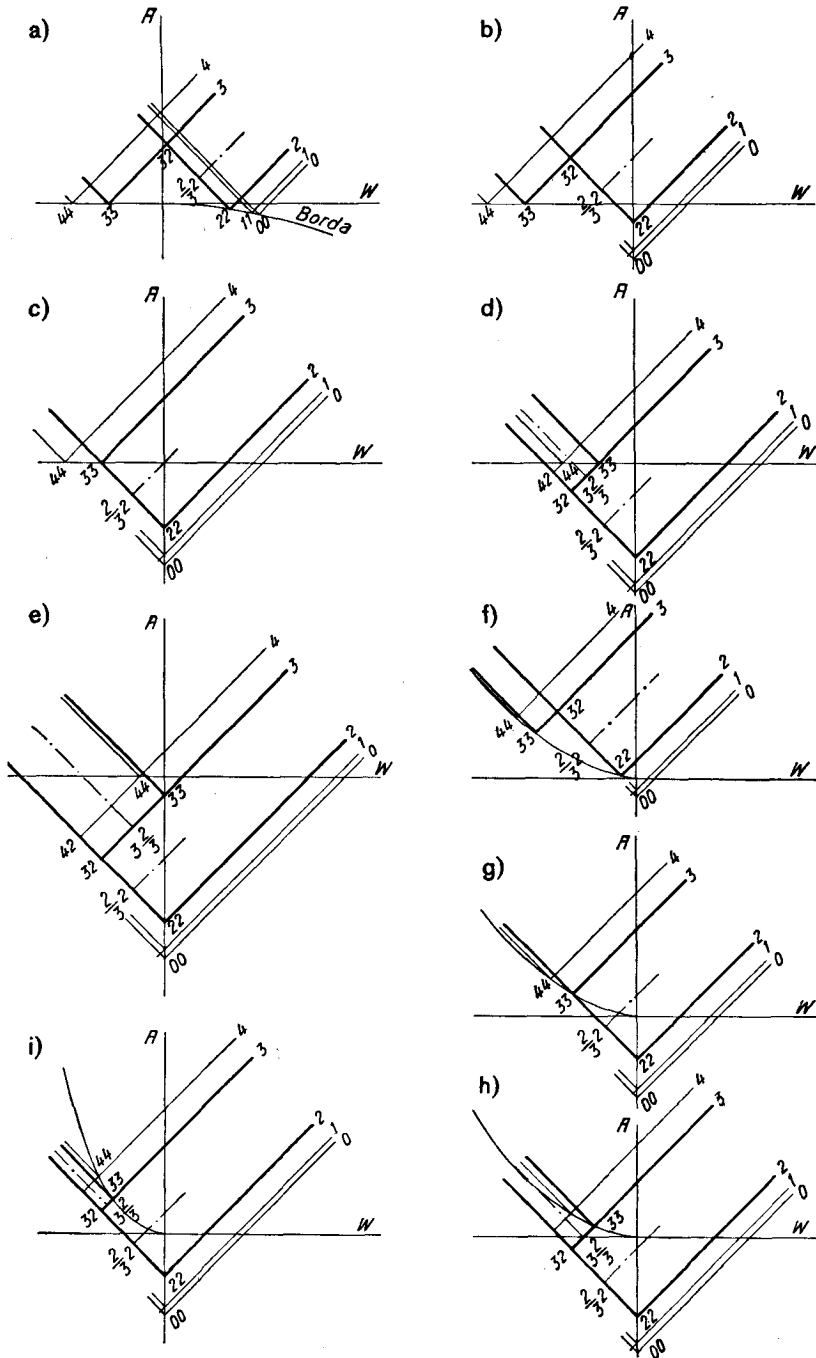


Abb. 26. Reflexion eines Verdichtungsstoßes an Rohrenden mit freier Öffnung (a) oder mit einem Rückschlagventil von verschiedenen Querschnitten (b-i).

Bild	Art des Rohrendes	Zustand 22 des Gases am Rohrende kurz vor Ankunft des Verdichtungsstoßes §	Zustand 33 des Gases am Rohrende kurz nach Reflexion des Verdichtungsstoßes §	Der Verdichtungsstoß § wird reflektiert als...
a	frei offen	Einströmen d. Gases ins Rohr mit w_{22}	Ausströmen des Gases aus dem Rohr mit w_{33}	Verdünnungswelle 33—32
b	Rückschlagventil von gleichem Querschnitt wie das Rohr	Ventil geschlossen; Unterdruck		Verdünnungswelle 33—32
c		Ventil geschlossen; tieferer Unterdruck		keine Reflexion; der Verdichtungsstoß wandert einfach durch die Ventilöffnung hinaus
d		Ventil geschlossen; tieferer Unterdruck		Verdichtungsstoß 33—32
e		Ventil geschlossen; noch tieferer Unterdruck		Ventil noch geschlossen; der Verdichtungsstoß ist nicht fähig, das Ventil zu öffnen
f		Ventil bereits offen; Ausströmen des Gases mit w_{22}	Ausströmen aus dem Rohr mit w_{33}	Verdünnungswelle 33—32
g	Ventil geschlossen; Unterdruck	keine Reflexion		
h	Ventil geschlossen; tieferer Unterdruck	Verdichtungsstoß 33—32		
i	Rückschlagventil von noch kleinerem Querschnitt	gleicher Zustand wie unter g		Verdichtungsstoß 33—32. Ein Verdichtungsstoß wird somit durch einen kleineren Ventilschnitt leichter wieder als Verdichtungsstoß reflektiert

werden kann. Dies erkennt man schon an der Gestalt der W - A -Charakteristiken. Wenn nämlich die Charakteristiken für den hinlaufenden Verdichtungsstoß und seine reflektierte Welle kurz vor, bzw. nach der Reflexion sich kreuzen, handelt es sich um eine Verdünnungswelle, sonst um einen Verdichtungsstoß.

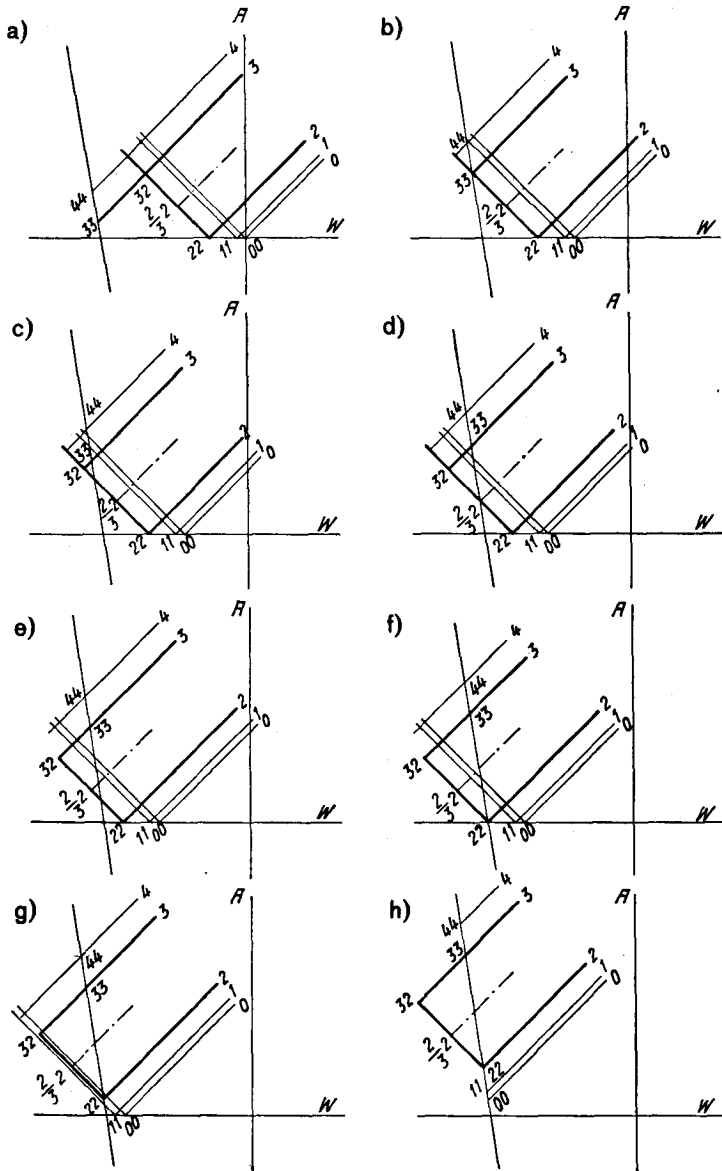


Abb. 27. Reflexion von Verdichtungsstößen an einem frei offenen Rohrende bei Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit.

64. Reflexion von Verdichtungsstößen an einem frei offenen Rohrende bei Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit

Wenn der Druck des Verdichtungsstoßes hoch genug ist, kann gemäß Abb. 27 der Fall eintreten, daß der Stoß an einer der Schallgrenzlinien $A = \pm W$ reflektiert wird.

Im Bild g ist bereits vor der Ankunft des Verdichtungsstoßes am Rohrende in dessen Nähe eine geringe Überschallgeschwindigkeit zustande gekommen. Es ist daher möglich, daß die von 11 reflektierte Welle schon wieder aus dem

Bild	Eigengeschwindigkeit w_{22} des Gases am Rohrende kurz vor Ankunft des Verdichtungsstoßes	Eigengeschwindigkeit w_{22} des Verdichtungsstoßes kurz vor seiner Ankunft am Rohrende	Der Punkt §2 für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Verdichtungsstoßes kurz vor seiner Ankunft am Rohrende liegt	Der Verdichtungsstoß § wird reflektiert als...	
a	Unterschallgeschwindigkeit	Unterschallgeschwindigkeit	innerhalb der Linien $A = \pm W$	Verdünnungswelle 33—32	
b	Unterschallgeschwindigkeit	Schallgeschwindigkeit		auf den Linien $A = \pm W$	keine Reflexion
c	höhere Unterschallgeschwindigkeit	Überschallgeschwindigkeit von Fall c bis h immer höher. Man erkennt die Möglichkeit der Entstehung einer Überschallströmung durch Kreuzen von Wellen.			
d	höhere Unterschallgeschwindigkeit		außerhalb der Linien $A = \pm W$	Verdichtungsstoß 33—32. Da dieser aber Überschallgeschwindigkeit besitzt, kann er nur aus der Rohrmündung hinauswandern, ist dagegen nicht imstande, ins Rohr hereinzukommen. Daher braucht dieser reflektierte, nur nach außen wandernde Stoß nicht weiter verfolgt zu werden.	
e	noch höhere Unterschallgeschwindigkeit				
f	Schallgeschwindigkeit				
g	Überschallgeschwindigkeit				
h	Überschallgeschwindigkeit				

Abb. 27. Reflexion von Verdichtungsstößen an einem frei offenen Rohrende bei Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit.

Rohr wandert, bevor sie den zur Mündung hinlaufenden Verdichtungsstoß kreuzt. Dann existiert die ihr zugeordnete α -Charakteristik durch den Punkt 11 nur als ganz kurze Strecke und kann nicht bis zur β -Charakteristik von 2 weitergezogen werden.

Im Bild h haben auch die Druckwellenelemente 0 und 1 die Schallgrenzlinie $A = -W$ erreicht. Somit wandern sie einfach durch die Mündung hinaus und beeinflussen den nachfolgenden Verdichtungsstoß nicht mehr.

65. Reflexion von Verdichtungsstößen an der Trennungsschicht zwischen zwei Gasmassen verschiedener Art und verschiedener Temperatur in einem Rohr

In einem Rohr befinden sich Rauchgas und Luft mit den in der Abb. 6a angegebenen Zuständen nebeneinander. Somit gelten die in der Abb. 6c dargestellten Neigungen der Charakteristiken auch hier. In der Abb. 28 werden zwei Fälle behandelt. Einmal wandere der Verdichtungsstoß von der Luft

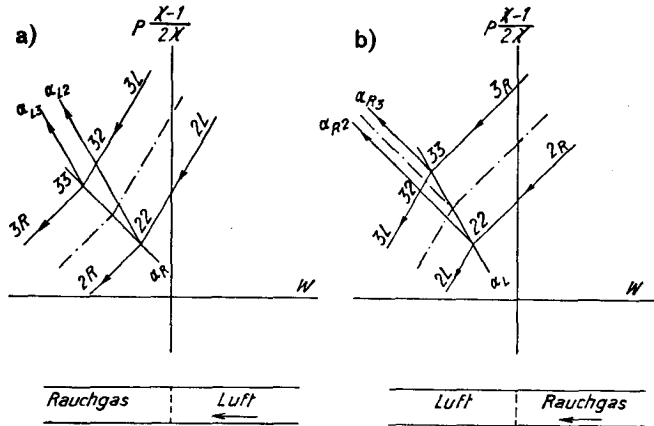


Abb. 28. W - P -Diagramm zur Darstellung der Reflexion eines Verdichtungsstoßes an der Trennungsschicht zwischen zwei Gasmassen verschiedener Art und verschiedener Temperatur in einem Rohr.

(als $2_L, 3_L$) ins Rauchgas (als $2_R, 3_R$) (vgl. Bild a), das andere Mal vom Rauchgas in die Luft (vgl. Bild b). Er kreuzt an der Trennungsschicht eine Welle mit der Charakteristik α_R bzw. α_L , die in der entgegengesetzten Richtung von der anderen Gasmasse herkommt. Der Verdichtungsstoß wandert durch die Trennungsschicht immer als Verdichtungsstoß hindurch, allerdings unter Veränderung seiner Stärke, während die durch seine teilweise Reflexion an der Trennungsschicht entstehende Welle verschiedene Eigenschaften haben kann. Nach

Abschnitt 63 kann schon aus der Form des Charakteristikenplans festgestellt werden, daß die Reflexion $\alpha_{L2}\alpha_{L3}$ im Bild a eine Verdünnungswelle, die Reflexion $\alpha_{R2}\alpha_{R3}$ im Bild b einen schwachen Verdichtungsstoß darstellt. Diese Reflexionswelle stellt natürlich zugleich die Fortsetzung der durch die Trennungsschicht hindurchwandernden Welle α_R bzw. α_L dar.

7. Betrachtung über die Möglichkeit der Entstehung einer Überschallströmung in einem Rohr

71. Verdünnungswellen in einem Rohr, hervorgerufen durch Ausströmen aus seinem verengten Ende

Wir haben im Abschnitt 64 gesehen, daß eine Überschallströmung in einem geraden Rohr bei der Kreuzung von Wellen auftreten kann, wenn das Rohr ein frei offenes Ende aufweist und die Wellen mit hoher Ausströmungsgeschwindigkeit daran reflektiert worden sind. Hier soll untersucht werden, ob auch bei reinem Einströmen durch eine Düse eine Überschallströmung in einem geraden Rohr entstehen kann. Zunächst sei der Fall behandelt, wo die Einströmung aus einem Rohr mit gleichem Querschnitt erfolgt.

Wir denken uns die Düse in der Abb. 29 zunächst durch einen Schieber dicht verschlossen. Auf der linken Seite befindet sich ein Gas mit sehr hohem Druck p_0 , auf der rechten Seite ein Gas mit sehr geringem Druck p_a , so daß $p_a \ll \beta p_0$.

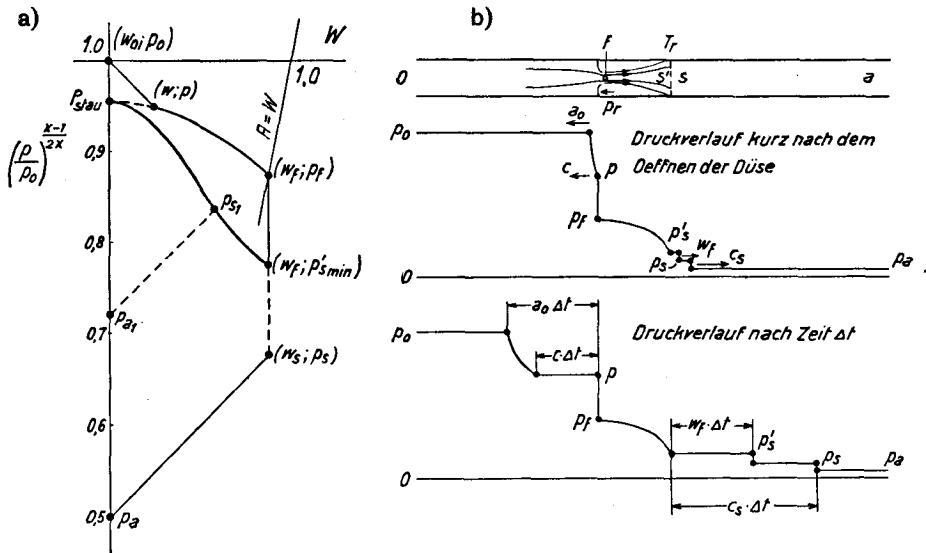


Abb. 29. Druckverlauf vor und hinter der Düse nach ihrem Öffnen bei $w_f = a_f$.

wobei β das kritische Druckverhältnis bedeutet. Wird die Düse plötzlich geöffnet, so strömt das Gas mit der kritischen Geschwindigkeit w_f von der linken nach der rechten Seite. Dadurch wird auf der rechten Seite ein Verdichtungsstoß, auf der linken Seite eine Verdünnungswelle verursacht. Wir wollen zunächst die Verdünnungswelle betrachten.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 29b für den Zustand vor der Düse gelten nach *Eichelberg* [10] folgende Gleichungen:

a) Adiabatische Expansion
$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2,$$

b) Zustandsgleichung der Verdünnungswelle
$$\frac{da}{dw} = -\frac{\kappa-1}{2}$$

oder
$$w - w_0 = \frac{2}{\kappa-1}(a_0 - a)$$

bzw.
$$\frac{w}{a_0} = \frac{2}{\kappa-1} \left(1 - \frac{a}{a_0}\right),$$

c) Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle
$$\frac{c}{a_0} = \frac{a}{a_0} - \frac{w}{a_0},$$

d) Energiegleichung für die quasistationäre Randbedingung
$$A \frac{w_f^2 - w^2}{2g} = c_p (T - T_f),$$

e) Kontinuitätsgleichung
$$F w \rho = f w_f \rho_f.$$

Aus diesen fünf Gleichungen folgt

$$\frac{w_f}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{4}{(\kappa-1)^2} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right]^2}; \quad (35)$$

$$\frac{p_f}{p_0} = \left\{ \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \frac{4}{\kappa^2-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right]^2 \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad (36)$$

$$\frac{f}{F} = \frac{\frac{2}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right] \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\left\{ \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \frac{4}{\kappa^2-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right]^2 \right\}^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}}; \quad (37)$$

$$\frac{p_f}{p} = \frac{p_0}{p} \left\{ \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \frac{4}{\kappa^2-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right]^2 \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (38)$$

Die Gl. (36), (37) und (38) sind in der Abb. 30 wiedergegeben. $f/F=0$ entspricht dem Ausströmen aus einem unendlich großen Behälter durch eine endlich große Düse in das Rohr. Dabei ist $p=p_0$ und $p_f=\beta p_0=\beta p$.

Beim Ausströmen aus einem Rohr ist aber wegen des Auftretens einer Verdünnungswelle in demselben $p < p_0$ und $p_f < \beta p_0$. Dann bedeutet der Anfangszustand 0 weit links im Rohr nicht mehr den Stauzustand der Gase vor der Düse.

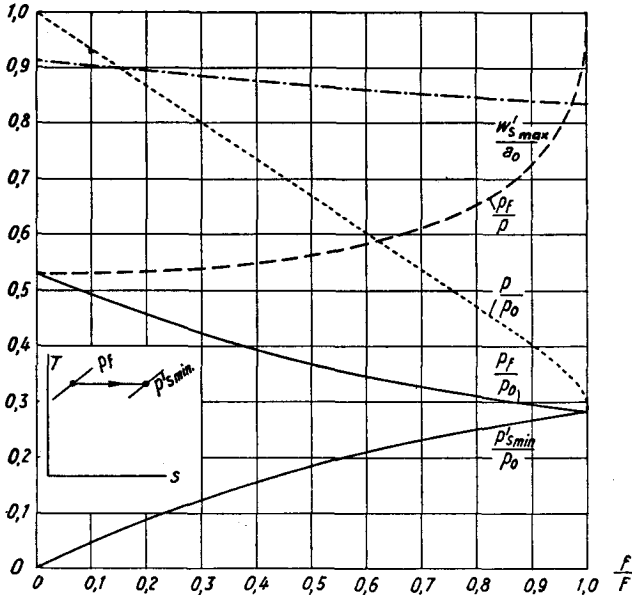


Abb. 30. Die Druckverhältnisse p/p_0 , p_f/p_0 , p_f/p und die nach der Düse höchsterreichbare Drucksenkung $p'_{s,min}/p_0$ in Abhängigkeit von f/F für das Strömen mit Schallgeschwindigkeit durch eine in einem Rohr befindliche Düse, $\kappa = 1,4$.

72. Erzielung eines möglichst großen Druckgefälles im einströmenden Gas von der Düse bis zu dem voll ausgefüllten Rohrquerschnitt im rechten Rohrteil

Das Ende der Umsetzung von kinetischer in Druckenergie sei in der Abb. 29 mit S' gekennzeichnet. Für das Umsetzungsgebiet gelten folgende Gleichungen.

a) Kontinuitätsgleichung

$$w_f \rho_f f = w'_s \rho'_s F;$$

b) Impulsgleichung

$$p_r (F - f) + p_f f - p'_s F = w_s'^2 F \rho'_s - w_f^2 f \rho_f.$$

Zur Erzielung einer möglichst tiefen Drucksenkung, bzw. einer möglichst hohen Geschwindigkeit w'_s muß $p_r = 0$ sein. Dann ist

$$p_f f - p'_s F = w_s'^2 F \rho'_s - w_f^2 f \rho_f = w_f f \rho_f (w_s' - w_f);$$

c) Energiegleichung

$$w_s'^2 - w_f^2 = \frac{2}{\kappa - 1} (a_f^2 - a_s'^2);$$

d) Schallgeschwindigkeit

$$p_s' = \frac{a_s'^2 \rho_s'}{\kappa},$$

$$p_f = \frac{a_f^2 \rho_f}{\kappa}.$$

Aus der Energiegleichung ergibt sich

$$\frac{1}{\kappa} (a_f^2 \rho_f f - a_s'^2 \rho_s' F) = w_f f \rho_f (w_s' - a_f)$$

oder
$$\frac{1}{\kappa} \left(a_f - \frac{a_s'^2}{w_s'} \right) = w_s' - a_f$$

bzw.
$$a_s'^2 = \{(1 + \kappa) a_f - \kappa w_s'\} w_s'.$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes für $(a_s')^2$ in die Energiegleichung folgt

$$w_s'^2 - a_f^2 = \frac{2}{\kappa - 1} a_f^2 - \frac{2(1 + \kappa)}{\kappa - 1} a_f w_s' + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} w_s'^2$$

oder
$$w_s'^2 + a_f^2 - 2 a_f w_s' = 0$$

Somit ist
$$w_{s' max} = a_f = w_f. \quad (39)$$

und mit der Impulsgleichung ferner

$$p_{s' min} = p_f \frac{f}{F} \quad \text{oder} \quad \frac{p_{s' min}}{p_0} = \frac{p_f}{p_0} \frac{f}{F} \quad (40)$$

Der tiefste erreichbare Druck $p_{s' min}$ ist durch das Querschnittsverhältnis f/F begrenzt. Die Geschwindigkeit w_s' kann die kritische Geschwindigkeit w_f bestenfalls erreichen, niemals aber überschreiten. Somit kann die Strömung von der Düse bis zum vollen Ausfüllen des Querschnittes höchstens die Schallgeschwindigkeit beibehalten, aber niemals Überschallgeschwindigkeit erreichen.

Die ganze Betrachtung ist in der Nähe des Grenzfalls $f/F \rightarrow 1$ etwas ungenau, da dann der Einströmvorgang von der Düse bis zum voll ausgefüllten Rohrquerschnitt nicht mehr als quasistationär betrachtet werden darf.

Die Gl. (39) und (40) sind ebenfalls in die Abb. 30 eingezeichnet. Man sieht, daß der Druck von p_f auf $p_{s' min}$ sinkt, ohne daß die Geschwindigkeit sich erhöht. Der Vorgang ist rein isothermisch und die dazu benötigte Wärme rührt ausschließlich von Carnotschen Stößen im Strahl her.

Zur Darstellung im W - P -Diagramm können die beiden Kurven $\frac{p_s'_{min}}{p_0}$ und $\frac{w_s'_{max}}{a_0}$ umgezeichnet werden, indem nach Abb. 31 $\left(\frac{p_s'_{min}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ in Abhängigkeit von $\frac{w_s'_{max}}{a_0}$ aufgetragen wird. Diese Kurve nennen wir die Grenzkurve für höchst erreichbare Drucksenkung und Geschwindigkeit.

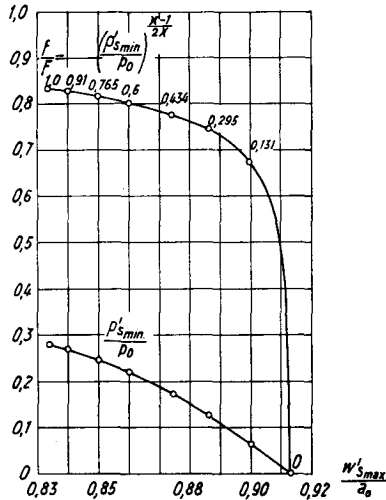


Abb. 31. Grenzkurve für die nach der Düse höchst erreichbare Drucksenkung und Geschwindigkeit beim Strömen mit Schallgeschwindigkeit durch eine in einem Rohr befindliche Düse, $\kappa = 1,4$.

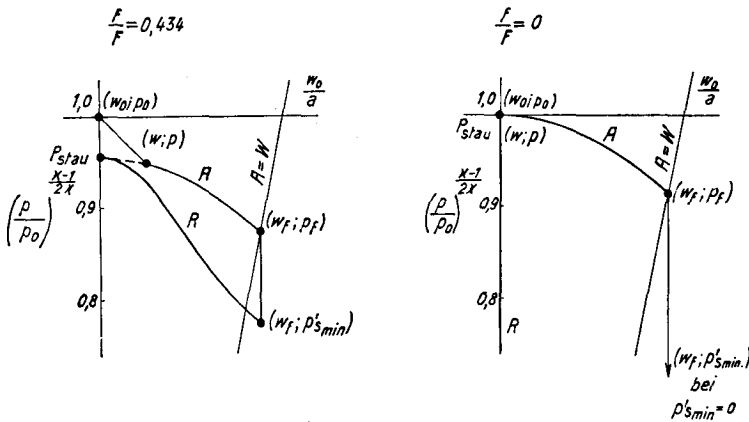


Abb. 32. W - P -Diagramme für Verdünnungswellen im linken Rohrteil und die nach der Düse höchst erreichbare Drucksenkung und Geschwindigkeit im rechten Rohrteil beim Strömen mit Schallgeschwindigkeit durch die Düse, $\kappa = 1,4$.

In Abb. 32 ist der Vorgang im W - P -Diagramm dargestellt, und zwar für einen allgemeinen Fall $f/F = 0,434$ und für einen Sonderfall $f/F = 0$. Der Punkt P_{stau} stellt den Stauzustand des Gases vor der Düse dar. Die Randbedingungs-kurven für das mit einer Düse versehene Ende des rechten Rohrteils sind mit R gekennzeichnet und gehen durch die Punkte P_{stau} und $(w_f; p_s'_{min})$. Für $f/F = 0$ wird die Randbedingungskurve parallel zur Ordinatenachse.

73. Verdichtungsstoß in dem ursprünglich im rechten Rohrteil befindlichen Gas

Das ursprünglich im rechten Rohrteil befindliche Gas kann gemäß Abb. 29 durch das einströmende Gas von p_a nur auf p_s verdichtet werden, wobei aus Stetigkeitsgründen $w_s = w_s'_{max} = w_f$ sein muß. Somit besteht ein Drucksprung $p_s'_{min} - p_s$ in der Trennungsschicht zwischen den beiden Gasmassen.

Die Charakteristik vom Punkt p_a bis p_s für den Verdichtungsstoß weicht um so stärker von der Geraden und vom Neigungswinkel 45° ab, je tiefer p_a liegt; da dann $\frac{p_s}{p_a}$ immer größer wird. Im Grenzfall $p_a \rightarrow 0$ wird $\frac{p_s}{p_a}$ nur dann noch endlich bleiben, wenn $p_s \rightarrow 0$ ist; dann ist die Charakteristik eine flach verlaufende Linie.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieses Verdichtungsstoßes ist c_s , wobei $w_f < c_s < 2w_f$. Die Eigengeschwindigkeit kann eventuell größer als Schallgeschwindigkeit sein, wenn $T_s < T_s'$ ist, da dann $a_s (< a_s') < w_s$ wird, was aber eine tiefe Anfangstemperatur T_a erfordert. Nur auf diese Weise entsteht eine Überschallströmung im Rohr.

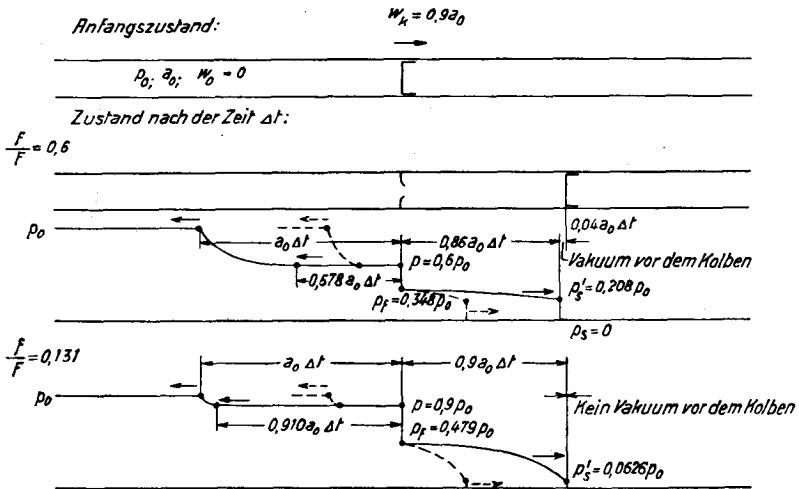


Abb. 33. Druckverlauf für ein in einem Rohr befindliches Gas bei der plötzlichen Expansion ins Vakuum.

Wenn der Anfangsdruck im rechten Rohrteil hoch ist, beispielsweise p_{a1} , so daß seine Charakteristik die Randbedingungskurve R kreuzt, geht der Druck der einströmenden Masse stetig in denjenigen der bereits im Rohr befindlichen über. Der Schnittpunkt P_{s1} stellt dann die gemeinsamen Werte von Druck und Geschwindigkeit dar. Der Druck p_r ist in diesem Fall verschieden von Null.

Z. B. befinde sich ein Gas mit dem Zustand p_0 und a_0 im linken Teil eines langen Rohres, dessen rechtes Ende durch einen Kolben abgeschlossen ist. Der Kolben bewege sich plötzlich mit der Geschwindigkeit $0,9 \cdot a_0$ nach rechts fort. Wir untersuchen zwei Fälle: $f/F = 0,6$ und $0,131$. Die sich ergebenden Drücke und Geschwindigkeiten sind in der Abb. 33 neben den Kurven eingetragen. Bei $f/F = 0,6$ können die einströmenden Massen den Kolben nicht erreichen, und es entsteht ein Vakuum dazwischen. Verkleinert man die Öffnung f auf $f/F = 0,131$, so wird das Vakuumgebiet verschwinden, wobei die einströmenden Massen aber auf einen sehr tiefen Druck herunter expandieren.

74. Günstigstes Öffnungsverhältnis f/F zur Erzeugung eines möglichst starken Verdichtungsstoßes im rechten Rohrteil

Wir konstruieren in der Abb. 34 das W - P -Diagramm und zeichnen die Grenzkurve für die höchsterreichbare Drucksenkung und Geschwindigkeit aus der Abb. 31 ein. Für die angenommene Charakteristik des Verdichtungsstoßes ist $f/F = 0,434$ am günstigsten, wobei ein maximaler Druck von $p_s = 0,169 \cdot p_0$ erzielt wird, und kein Drucksprung in der Trennungsschicht auftritt, also $p_s = p_s'$ ist. Wenn $f/F > 0,434$, beispielsweise $f/F = 0,765$ gemacht wird, liegt p_s tiefer, trotzdem eine größere Gasmasse einströmt. In diesem Fall entstehen ein hoher Druck $p_{s' min}$ und ein Drucksprung in der Trennungsschicht. Wenn andererseits $f/F < 0,434$, beispielsweise $f/F = 0,131$ gemacht wird, ist p_s ebenfalls tiefer. In diesem Fall ist $p_r \neq 0$ und $w_s < w_r$.

Daher wird der maximal erzielbare Druck p_s dargestellt durch den Punkt, in dem die Charakteristik des Verdichtungsstoßes die Grenzkurve für $p_{s' min}$ schneidet. Aus diesem Punkt kann dann das günstigste Öffnungsverhältnis f/F abgelesen werden.

75. Tiefstmögliche Drucksenkung in einem aus einem unendlich großen Behälter in ein Rohr einströmenden Gas

Dieses Problem ist einfacher als dasjenige des Abschnittes 72, da die Verdünnungswelle in dem unendlich großen Behälter vernachlässigt werden kann; die Betrachtungsweise bleibt indessen dieselbe. Hier ist aber unabhängig vom Öffnungsverhältnis f/F

und

$$p = p_0$$

$$p_f = \beta p_0.$$

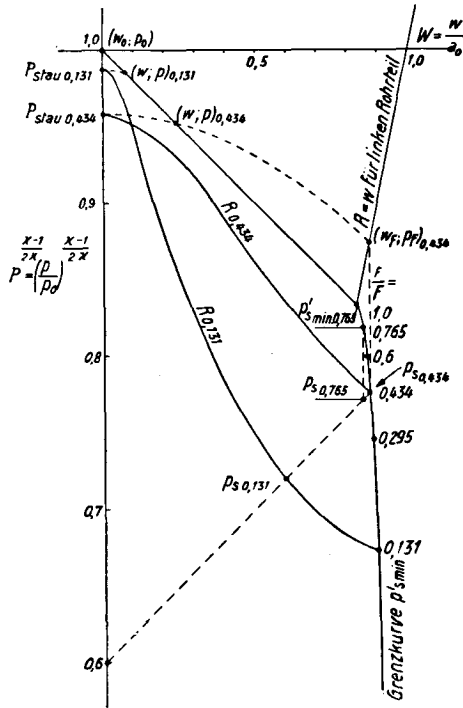


Abb. 34. W - P -Diagramm zur Bestimmung des günstigsten Öffnungsverhältnisses f/F . Der Index bezeichnet den jeweiligen Wert von f/F .

Für möglichst tiefe Drucksenkung im einströmenden Gas muß wieder $p_r = 0$ sein und es ist

$$w_s' = w_s = w_f = a_f = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} a_0 = \text{konst}$$

für jeden Wert von f/F . Diese Geschwindigkeit stellt wieder die höchsterreichbare Geschwindigkeit hinter der Düse dar. Die Beziehung

$$\frac{p_{s,min}'}{p_0} = \frac{p_f}{p_0} \frac{f}{F}$$

bleibt auch hier gültig; somit wird

$$\frac{p_{s,min}'}{p_0} = \beta \frac{f}{F}.$$

Auch das W - P -Diagramm ist gemäß Abb. 35 in diesem Fall wesentlich einfacher, da der Stauzustand der Gase vor der Düse immer gleich dem Zustand im Behälter ist, der wegen des unendlich großen Volumens durch das Ausströmen nicht beeinflusst wird. Beim Anfangsdruck p_a im Rohr besteht ein Drucksprung $p_{s,min}' - p_s$, bei p_{a1} kein solcher mehr. Die für die Abb. 29a gegebene Beschreibung gilt sinngemäß auch hier.

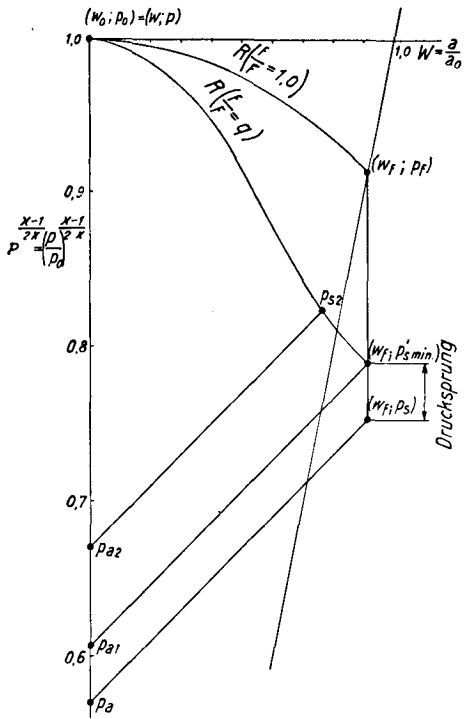


Abb. 35. W - P -Diagramm.

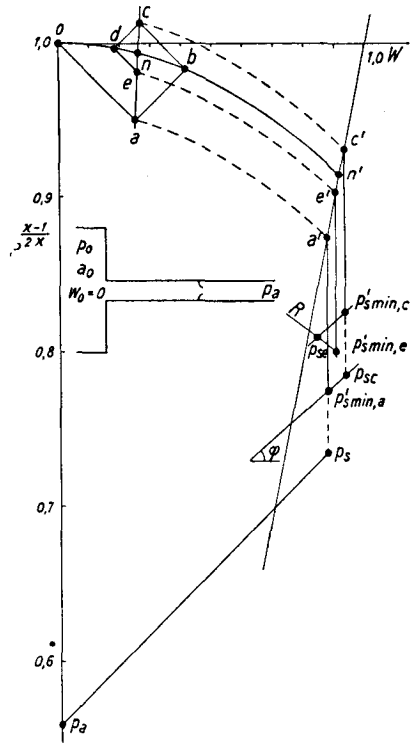


Abb. 36. W - P -Diagramm zur Bestimmung des Anlaufvorganges.

76. Anlaufvorgang in einem Rohr nach dem plötzlichen Öffnen einer Düse in ihm

Das Rohr sei unendlich lang, enthalte im Innern unweit vom linken Ende eine Düse und stehe an diesem Ende mit einem unendlich großen Behälter in Verbindung. Der Anfangszustand sei auf beiden Seiten der Düse wie in der Abb. 36 angegeben, wobei $p_a < \beta p_0$ ist. Nach dem plötzlichen Öffnen der Düse strömt Gas mit Schallgeschwindigkeit durch die Düse hindurch. Der Zustand a' in der Düsenaustrittsmündung, die Verdünnungswelle $0-a$ im linken Rohr und der Verdichtungsstoß p_s , sowie der Drucksprung $p'_{s \min, a} - p_s$ in der Trennungsschicht zwischen den einströmenden und den bereits im rechten Rohrteil vorhandenen Gasmassen sind in der Abb. 36 nach bekannten Verfahren konstruiert worden.

Die Verdünnungswelle $0-a$ wandert nach links und wird am offenen Rohrende reflektiert, wobei die Kurve $0-n'$ als Randbedingung gilt. Als Reflexionswelle wandert eine Druckwelle $a-b$ wieder nach rechts zur Düse zurück. Dort erfährt sie eine Reflexion, für welche die Randbedingungskurve nach Abschnitt 43 durch die Beziehung

$$p^{2\frac{\kappa-1}{2\kappa}} + \frac{\kappa-1}{2} w^2 = \frac{\kappa+1}{2} w^{2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} p^{\frac{\kappa-1}{2\kappa} \cdot \frac{4}{\kappa+1}} \left(\frac{F}{f}\right)^{2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$$

gegeben und in der Abb. 36 durch die Gerade $a-c$ dargestellt ist, und bewirkt gleichzeitig ein intensives Ausströmen mit Schallgeschwindigkeit $w_{fe'}$ durch die Düse. Dieses Ausströmen bewirkt andererseits im rechten Rohrteil einen neuen Verdichtungsstoß p_{sc} , welcher auf der Charakteristik durch den Punkt

$p'_{s\ min,a}$ liegt (man beachte hierbei ihre Neigung $\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{p'_{s\ min,a}}{p_{fa'}}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$; vgl. Abschnitt 51). Es besteht dabei ein Drucksprung $p'_{s\ min,c} - p_{sc}$ in der Trennungsschicht zwischen den einströmenden und den bereits im Rohr befindlichen Gasmassen.

Die im linken Rohrteil an der Düse reflektierte Druckwelle $b-c$ wandert wieder nach links zum Behälter und wird dort als Verdünnungswelle $c-d$ reflektiert, die nach rechts zur Düse wandert und die Ausströmgeschwindigkeit auf den kleineren Wert $w_{fe'}$ reduziert. Es entsteht dann eine Verdünnungswelle von der Größe p_{sc} im rechten Rohrteil, die durch den Schnittpunkt der Charakteristik durch den Punkt $p'_{s\ min,c}$ mit der Randbedingungskurve R dargestellt wird. So wandern die Wellen im linken Rohrteil hin und her und klingen ab, bis sie ganz verschwinden. Dann herrschen die Zustände n vor der Düse und n' im Düsenaustritt, die beide auf der Randbedingungskurve $0-n'$ liegen, und der Vorgang ist stationär geworden. Das Gas strömt dauernd mit der Geschwindigkeit w_n aus dem Behälter in den linken Rohrteil und mit $w_{fn'}$ durch die Düse in den rechten Teil hinüber.

Während des Anlaufvorganges pendelt die Einströmgeschwindigkeit aus dem Behälter in das Rohr um w_n von 0 auf w_b , wieder zurück auf w_d , usw., die Ausströmgeschwindigkeit aus der Düse um $w_{fn'}$ von $w_{fa'}$ auf $w_{fe'}$, und herab auf $w_{fe'}$, usw., bis die endgültigen Geschwindigkeiten w_n und $w_{fn'}$ erreicht werden.

EXPERIMENTELLER TEIL

8. Der Versuchsmotor

8.1. Beschreibung der Versuchsanlage

Die Abb. 37 zeigt den Oberteil des Versuchsmotors im Schnitt. Die wesentlichen Daten sind

Zylinderbohrung	$d = 110 \text{ mm}$
Hub	$s = 132 \text{ mm}$
maximales Hubvolumen	$V_H = 1,26 \text{ l}$
Normaldrehzahl	$n = 1000 \text{ U/min}$
Kompressionsverhältnis	$\epsilon = 1 : 15$
Verhältnis von Kurbelradius zu Pleuelstangenlänge	$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{5}$
mittlere Kolbengeschwindigkeit bei Normaldrehzahl \bar{c}	$= \frac{ns}{30} = 4,4 \text{ m/s}$

Die Spülschlitze sind so ausgebildet, daß sie die einströmende Luft schräg nach oben gegen einen gemeinsamen Punkt führen, damit eine intensive Querspülung erzielt wird.

An den Enden der Spül- und Auspuffleitungen sind Behälter (vgl. Abb. 1) angeordnet, um die Schwingungen von den Zu-, bzw. Ableitungen fernzuhalten. Ihr minimaler Rauminhalt wurde nach dem Verfahren von *Lutz* [8] berechnet und sollte beispielsweise bei einer Leitung von 50 mm Innendurchmesser und 2 m Länge 43 l betragen. Da die untersuchten Spül- und Auspuffleitungen immer kürzer als 2 m waren und zudem Behälter mit viel größerem Inhalt als dem angegebenen verwendet wurden, erfüllen sie mit Sicherheit die ihnen gestellte Aufgabe.

Die Spülluft wurde von einem Drehkolbenkompressor geliefert und konnte mittels eines Reduzierventils in der Zuleitung zum Spülluftbehälter (vgl. Abb. 1) auf den gewünschten Spüldruck gedrosselt werden. Die Spülluftmenge wurde durch eine Blende nach dem Drosselventil gemessen.

Der Druck im Abgasbehälter war während der Versuche nur um wenige mm Wassersäule höher als der Atmosphärendruck, so daß praktisch angenommen werden darf, die Auspuffleitung münde direkt ins Freie.

Für die Brennstoffeinspritzung wurde das in der Abb. 38 schematisch dargestellte Akkumulierverfahren nach *Eichelberg* [11] angewendet. Der für eine

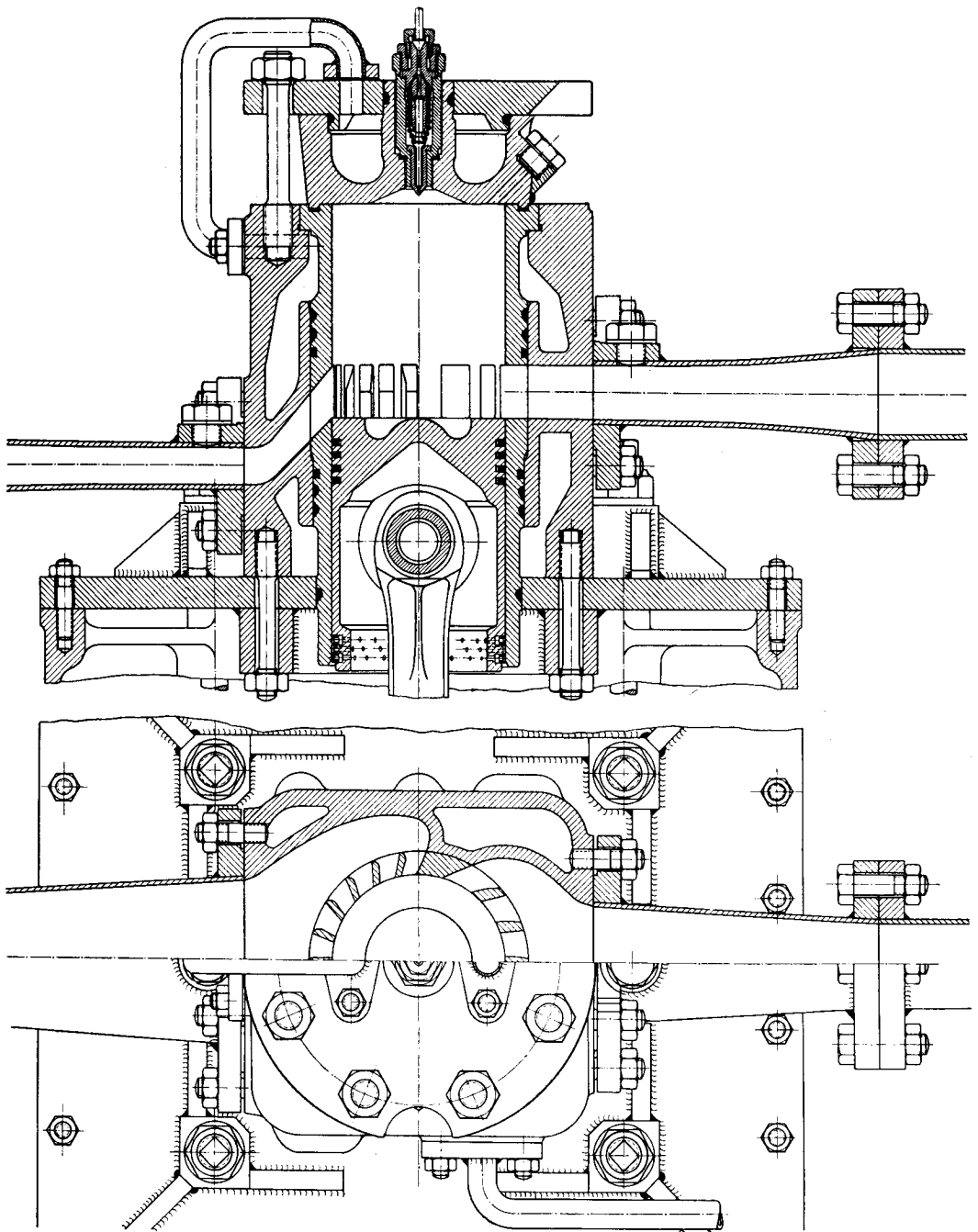


Abb. 37. Quer- und Horizontalschnitt durch den Oberteil des Versuchsmotors.

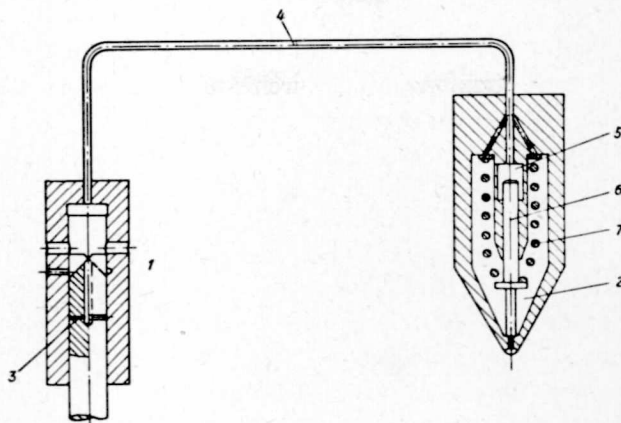


Abb. 38. Brennstoffeinspritzsystem nach dem Akkumulierverfahren, schematisch.

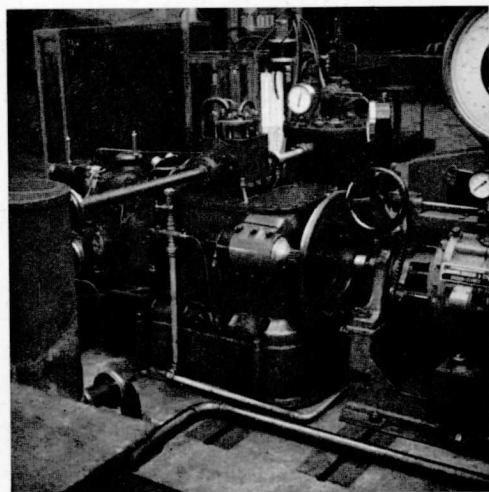


Abb. 39. Ansicht der Versuchsanlage.

Einspritzung benötigte Brennstoff wird von der Pumpe 1 in den Akkumulier-
raum 2 im Einspritzventil gefördert, wobei er auf einige 100 at komprimiert
wird. Gegen Ende des Hubes wird der Druckraum der Pumpe durch die Ent-
lastungsbohrung 3 im Plunger mit der Saugseite verbunden, worauf eine Ver-
dünnungswelle durch die Brennstoffleitung 4 nach dem Vorraum 5 des Ventils
wandert. Wenn dort der Druck abgesunken ist, wird die Ventilnadel 6 durch
den Öldruck im Akkumulierraum gegen die Kraft der Feder 7 angehoben und
der Einspritzvorgang beginnt. Im Moment, da der Druck im Akkumulierraum

soweit abgesunken ist, daß die Federkraft überwiegt, beginnt die Nadel wieder zu schließen. Die Einspritzmenge wird durch Änderung des Förderbeginns mit Hilfe einer schrägen Kante am Pumpenplunger geregelt.

Für den Versuchsmotor mußte ein besonderes Einspritzventil mit einem Akkumulervolumen von $3,14 \text{ cm}^3$ gebaut werden, wogegen eine vorhandene Einspritzpumpe mit passender Förderleistung benützt werden konnte.

Einen Überblick über die ganze Versuchsanlage gibt die Abb. 39. Von links nach rechts erkennt man Abgasbehälter, Auspuffleitung, Motor-Zylinder, Spüleleitung und Spülluftbehälter. Auf dem Deckel des Spülluftbehälters befindet sich ein Stutzen, durch welchen der Motor bei Selbstspülung Luft direkt aus der Atmosphäre ansaugt. Im Vordergrund rechts ist die Wasserwirbelbremse, gekuppelt mit der Leistungswaage, im Hintergrund links die Einspritzpumpe mit ihrer Reguliervorrichtung sichtbar.

Die Messungen des instationären Druckverlaufes in der Spül- und Auspuffleitung wurden direkt neben dem Zylinderblock vorgenommen. Hierzu wurden Piezoquarzindikatoren in Verbindung mit einem Elektronenstrahl-Oszillographen benützt. Die photographische Aufnahme der Druckdiagramme erfolgte direkt auf Papier mit Hilfe einer mit passender Geschwindigkeit rotierenden Trommel.

82. Untersuchung des Brennstoff-Einspritzsystems

Die Brennstoffstrahlen müssen der gegebenen Form des Verbrennungsraumes angepaßt sein. Anzahl und Durchmesser der Düsenbohrungen und Öffnungsdruck der Ventilmadel wurden deshalb variiert und die Wirkung auf den spezifischen Brennstoffverbrauch des Motors untersucht.

Die Abb. 40 zeigt die Ergebnisse bei der Drehzahl $n = 1000 \text{ U/min}$ und mit Spül- und Auspuffleitungen von 40 mm Durchmesser und 740 , bzw. 1120 mm Länge. Als günstig erwiesen sich 10 Düsenbohrungen von $0,14 \text{ mm}$ Durchmesser bei 260 at Öffnungsdruck oder $0,16 \text{ mm}$ Durchmesser bei 200 at . Da die zweite Düse besonders bei höherer Last einen guten spezifischen Brennstoffverbrauch ergibt, wurde sie für die folgenden Versuche beibehalten.

Die Reichweite der Brennstoffstrahlen kann wie folgt abgeschätzt werden. Der Zündverzug beträgt nach *Wolfer* [12]

$$Z_s = \frac{0,44}{p^{1,19}} \cdot e^{\frac{4650}{T}} = \frac{0,44}{38^{1,19}} e^{\frac{4650}{1017}} = 0,6 \cdot 10^{-3} s,$$

worin p und T Kompressionsenddruck, bzw. -temperatur bedeuten. Legt man den etwas ungünstigeren Wert von $Z_s = 0,8 \cdot 10^{-3} s$ zugrunde, so kann die Reichweite nach *Schweitzer* [13] berechnet werden und beträgt 36 mm . Da der Brennraum des Versuchsmotors eine Strahlänge bis zu 39 mm zuläßt,

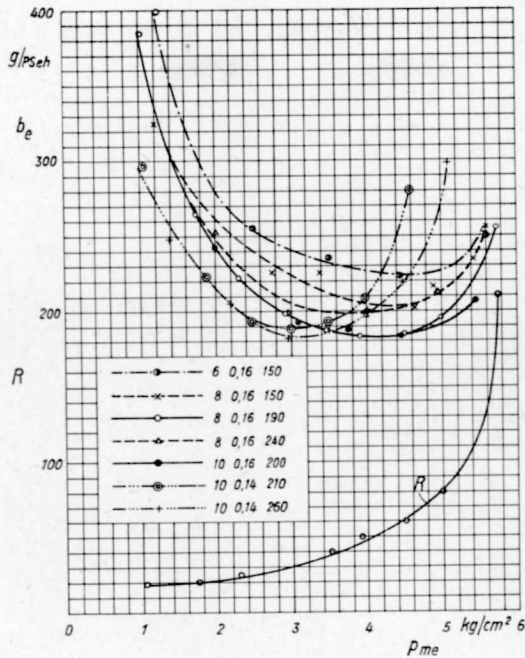


Abb. 40. Effektiver Brennstoffverbrauch b_e für verschiedene Einspritzdüsen und Rauchwert R des Auspuffgases für Düse 8 · 0,16 · 190. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten nacheinander die Anzahl der Düsenbohrungen, den Durchmesser der Bohrungen in mm und den Öffensdruck der Ventalnadel in kg/cm^2 ; $n = 1000 \text{ U}/\text{min}$.



Abb. 41. Kolben.

scheint die Brennstoffdüse der Forderung zu genügen, daß kein flüssiger Brennstoff auf den Kolbenboden trifft. Dies wurde durch die Versuche bestätigt, da keine Verbrennungsrückstände am Kolbenboden (vgl. Abb. 41) gefunden wurden.

83. Das Rückschlagventil in der Spülleitung

Am Anfang der Spülleitung befindet sich ein Plattenrückschlagventil der Bauart Sulzer (Abb. 42), welches die Luft nur in der Richtung vom Spülbehälter zum Zylinder strömen läßt. Bedeutet Δp die Druckdifferenz zwischen

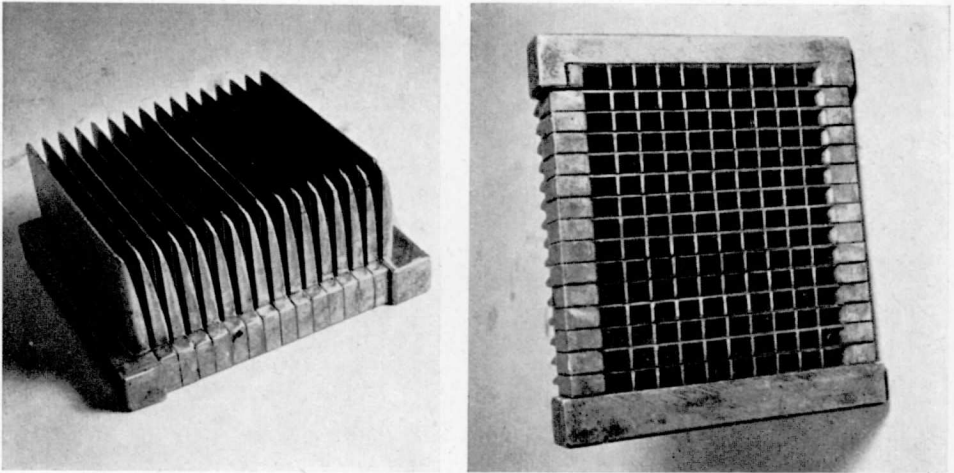


Abb. 42. Rückschlagventil, Bauart Sulzer.

Behälter und Spülleitung unmittelbar nach dem Rückschlagventil und γ das spez. Gewicht der Luft, so ist die theoretische Strömungsgeschwindigkeit im Rohr

$$w_{th} = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}.$$

Die gemessene, wirkliche Geschwindigkeit w ist nach Abb. 43 wesentlich kleiner. Wenn die Druckumsetzung nach dem Ventil vernachlässigt wird, kann eine Durchflußziffer φ des Ventils durch die Gleichung

$$\varphi F_v w_{th} = w F$$

definiert werden, worin F_v die freie Öffnung des Ventils und F den Rohrquerschnitt bedeutet. In unserem Fall ist $F/F_v = 0,9$; so wird $\varphi = 0,9 \frac{w}{w_{th}}$. Aus der Abb. 43 ist ersichtlich, daß das Rückschlagventil einen Druckverlust von ca. 0,01 at bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 40 m/s im Rohr, welche den Betriebsverhältnissen des Versuchsmotors entspricht, verursacht. Der Berechnung der instationären Strömungen im Spülrohr wird der gemessene Zusammenhang zwischen w und Δp zugrunde gelegt werden.

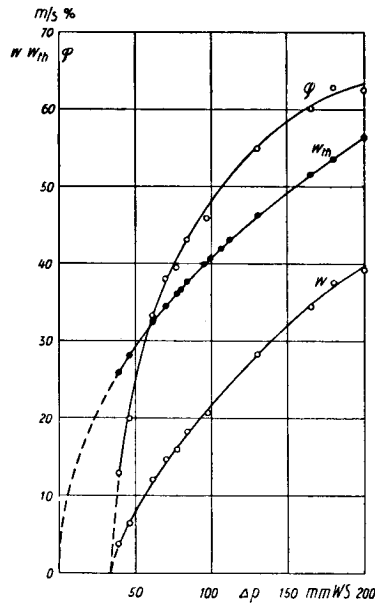


Abb. 43. Theoretische und effektive Geschwindigkeit in der Spülleitung nach dem Rückschlagventil und Durchflußziffer φ des Ventils in Abhängigkeit von der Druckdifferenz Δp am Ventil.

84. Theoretisches T - s -Diagramm des Motor-Kreisprozesses

Der Zustand der normalen Atmosphäre wird zu $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288^\circ\text{K}$ und $p_0 = 725 \text{ mmHg} = 0,98 \text{ ata}$ angenommen. Das Spülluftverhältnis sei $\lambda_{sp} = 1,3$ und die Luftzahl der Verbrennung bei Normallast betrage $\lambda_v = 1,7$. Die Temperatur der Frischluft nach erfolgter Spülung sei

$$T_1 = T_0 + \Delta T_{wand} = 310^\circ\text{K}.$$

Bei reiner Mischungsspülung würde ein Reinheitsgrad α der Zylinderladung von

$$\alpha = 1 - e^{-\lambda_{sp}} = 0,728$$

erreicht. Die Rauchgastemperatur am Ende der Expansion wird zunächst zu $T_R = 810^\circ\text{K}$ angenommen, dann wird die scheinbare, den Rauchgasrest mitenthaltende Luftzahl

$$\lambda_v^* = \lambda_v \left(1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{T_L}{T_R} \right) = 1,7 \left(1 + \frac{1 - 0,728}{0,728} \frac{310}{810} \right) = 1,935$$

Die Mischtemperatur der Zylinderladung zu Beginn der Kompression beträgt

$$T_1 = \frac{1}{\frac{\alpha}{T_L} + \frac{1 - \alpha}{T_R}} = \frac{1}{\frac{0,728}{310} + \frac{1 - 0,728}{810}} = 373^\circ\text{K}.$$

Der Anfangsdruck der Kompression sei gleich dem Atmosphärendruck, also $p_1 = 0,98 \text{ ata}$. Ferner wird angenommen, daß 21% der im Brennstoff zugeführten Wärme während der Verbrennung und Expansion ins Kühlwasser gehen.

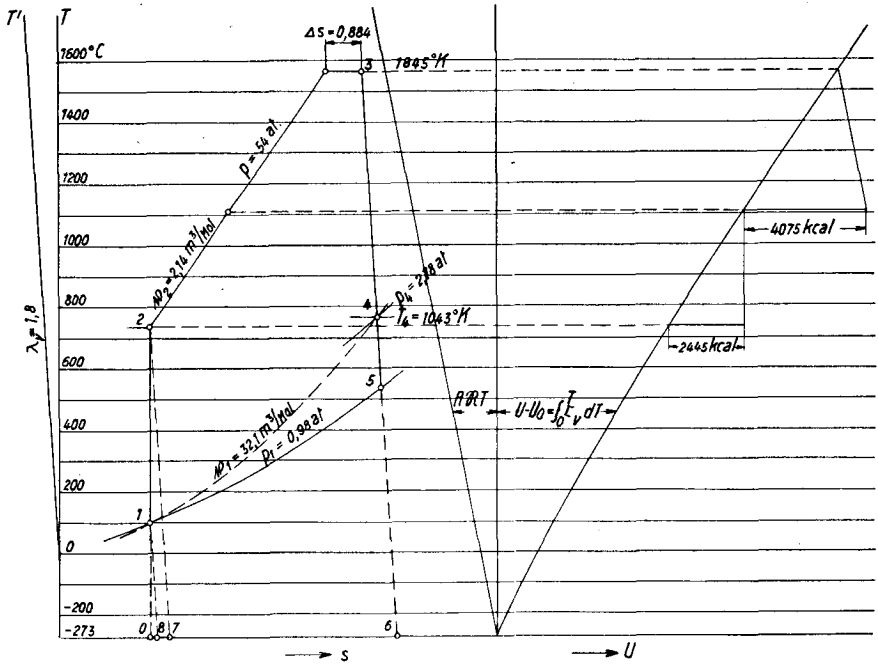


Abb. 44. Entropiediagramm des Motorkreisprozesses in der T - s -Tafel für Rauchgas von Gasöl.

Nachdem alle notwendigen Annahmen getroffen sind, kann das Entropiediagramm des Kreisprozesses nach *Eichelberg* [11] in der T - s -Tafel für die Rauchgase von Gasöl konstruiert werden (vgl. Abb. 44). Da der Gewichtsanteil des Rauchgasrestes nur $\frac{1}{14}$ der gesamten Zylinderladung ausmacht, ist der begangene Fehler sehr klein, wenn für die Kompression vom Punkt 1 nach 2 die Zylinderladung als reine Luft angesehen wird. Nach dem Übergang auf Rauchgas von der endgültigen Zusammensetzung im Punkt 2 geht die Wärmezufuhr zunächst bei $v = \text{konst.}$, dann bei $p = \text{konst.}$ und schließlich bei $T = \text{konst.}$ bis zum Punkt 3 vor sich. Dann folgt die als adiabatisch angenommene Expansion, wobei der Punkt 4 mit $p_4 = 2,78 \text{ ata}$ und $T_4 = 1043^\circ \text{K}$ den Zustand des Rauchgases zu Beginn des Auslasses darstellt. Auf Grund dieser Zustandsgrößen wird im folgenden die Berechnung des instationären Druckverlaufes in der Spül- und Auspuffleitung durchgeführt.

85. Berechnung des mittleren Zustandes im Zylinder während der Spülung

851. Ausströmen der Rauchgase aus dem Zylinder in die Spül- und Auspuffleitung

Es gelten die in der Abb. 45a angegebenen Bezeichnungen. In der Zeit dt strömt die Gasmenge dG_e mit der Geschwindigkeit w_{je} durch den effektiven Schlitzquerschnitt f_e in die Spülleitung und die Menge dG_a mit w_{ja} durch f_a in die Auspuffleitung. Mit φ werde der Kurbelwinkel bezeichnet; $\omega = d\varphi/dt$ ist die Kurbelwinkelgeschwindigkeit.

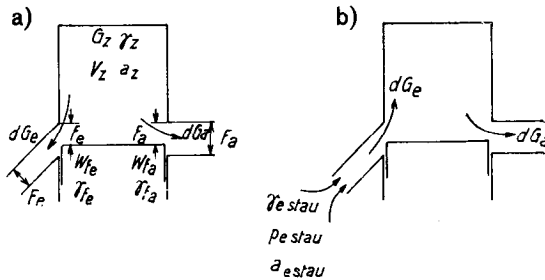


Abb. 45. Bezeichnung der Zustände der Rauchgase.

a) für Ausströmen aus dem Zylinder in die Spül- und Auspuffleitung; b) für Einströmen aus der Spülleitung in den Zylinder, während aus diesem weiter Rauchgas in die Auspuffleitung ausströmt.

Kontinuitäts- und Energiegleichungen liefern für den Druckverlauf p_z im Zylinder die Differentialgleichung (vgl. Eichelberg [14])

$$\frac{d \ln p_z}{d \varphi} = -\kappa \frac{d \ln V_z}{d \varphi} - \kappa \frac{R}{\omega} \frac{f_e w_{je} \gamma_{je} + f_a w_{ja} \gamma_{ja}}{V_z p_z} T_z. \quad (41)$$

Bedeutend w_e , γ_e , p_e , a_e und w_a , γ_a , p_a , a_a die Zustände des Gases an der Stelle, wo der Strahl den Leitungsquerschnitt voll ausfüllt, so gilt, quasistationär betrachtet, folgende Beziehung für die Spülleitung

$$R \frac{f_e w_{je} \gamma_{je}}{V_z p_z} T_z = \frac{F_e w_e \gamma_e}{V_z \gamma_z} = \frac{F_e p_e}{V_z p_z} \frac{w_e}{\left(\frac{a_e}{a_z}\right)^2} = \frac{F_e p_e}{V_z p_z} \frac{w_e}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_e}{a_z}\right)^2},$$

und analog für die Auspuffleitung. Dann läßt sich die Gl. (41) schreiben

$$\frac{d \ln p_z}{d \varphi} = -\kappa \frac{d \ln V_z}{d \varphi} - \frac{\kappa}{\omega} \frac{a_z}{V_z} \left\{ F_e \frac{p_e}{p_z} \frac{\frac{w_e}{a_z}}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_e}{a_z}\right)^2} + F_a \frac{p_a}{p_z} \frac{\frac{w_a}{a_z}}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_a}{a_z}\right)^2} \right\}. \quad (42)$$

852. Zurückströmen des Rauchgases aus der Spülleitung in den Zylinder, während aus diesem weiter Rauchgas in die Auspuffleitung ausströmt

Mit den Bezeichnungen der Abb. 45 b gilt für diesen Fall

$$\frac{d \ln p_z}{d \varphi} = -\kappa \frac{d \ln V_z}{d \varphi} + \frac{\kappa}{\omega} \frac{1}{V_z} \left\{ R f_e \frac{w_{je} \gamma_{je}}{p_z} T_{e \text{ stau}} - R f_a \frac{w_{ja} \gamma_{ja}}{p_z} T_z \right\}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} R f_e \frac{w_{je} \gamma_{je}}{p_z} T_{e \text{ stau}} &= R F_e \frac{w_e \gamma_e}{p_z} T_{e \text{ stau}} = F_e \frac{p_e}{p_z} \left(\frac{a_e \text{ stau}}{a_e} \right)^2 \frac{w_e}{a_0} a_0 = \\ &= F_e \frac{p_e}{p_z} \left\{ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_e}{a_e} \right)^2 \right\} \frac{w_e}{a_0} a_0, \end{aligned}$$

wobei a_0 willkürlich gewählt werden kann. Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{d \ln p_z}{d \varphi} &= -\kappa \frac{d \ln V_z}{d \varphi} + \frac{\kappa}{\omega} \frac{1}{V_z} \left\{ F_e \frac{p_e}{p_z} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_e}{a_e} \right)^2 \right] \frac{w_e}{a_0} a_0 - \right. \\ &\quad \left. - F_a \frac{p_a}{p_z} \frac{\frac{w_a}{a_z}}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{w_a}{a_z} \right)^2} a_z \right\}. \quad (43) \end{aligned}$$

853. Einströmen von Luft aus der Spülleitung in den Zylinder, während aus diesem weiter Rauchgas in die Auspuffleitung ausströmt

Die Stoffwerte von Luft sind von denjenigen des Rauchgases verschieden. Wir rechnen mit folgenden Zahlenwerten:

Rauchgas	$\kappa_R = 1,32;$	Luft	$\kappa_L = 1,4;$
	$R_R = 28,9;$		$R_L = 29,27;$
	$c_{vR, 600^\circ C} = 0,212,$		$c_{vL, 15^\circ C} = 0,172 \text{ kcal/kg}^\circ.$

Damit kommt in die Gl. (43) ein Faktor

$$\frac{\kappa_L}{\kappa_R} \frac{c_{vL}}{c_{vR}} \frac{R_R}{R_L} = 0,848$$

herein, und sie lautet

$$\begin{aligned} \frac{d \ln p_z}{d \varphi} &= -\kappa_R \frac{d \ln V_z}{d \varphi} + \frac{\kappa_R}{\omega} \frac{1}{V_z} \left\{ 0,848 F_e \frac{p_e}{p_z} \left[1 + \frac{\kappa_L - 1}{2} \left(\frac{w_e}{a_e} \right)^2 \right] \frac{w_e}{a_0} a_0 - \right. \\ &\quad \left. - F_a \frac{p_a}{p_z} \frac{\frac{w_a}{a_z}}{1 - \frac{\kappa_R - 1}{2} \left(\frac{w_a}{a_z} \right)^2} a_z \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Aus den bekannten Zuständen des Rohrinhaltes p_e , w_e , p_a und w_a vor den Schlitzten kann der Druckverlauf im Zylinder aus den Differentialgleichungen (42), (43) und (44) berechnet werden. Dies ist jedoch nur mit einem Differenzenverfahren möglich.

86. Bestimmung der günstigsten Länge der Spül- und Auspuffleitung bei einem Durchmesser von 50 mm

Die Abmessungen der Spül- und Auspuffleitung des Versuchsmotors sind so zu bestimmen, daß selbsttätig eine ausreichende Spülung erfolgt und der Motor eine möglichst hohe Leistung abzugeben imstande ist. Zunächst wurden Rohre von 50 mm Innendurchmesser für beide Leitungen gewählt und rechnerisch günstigste Länge bestimmt.

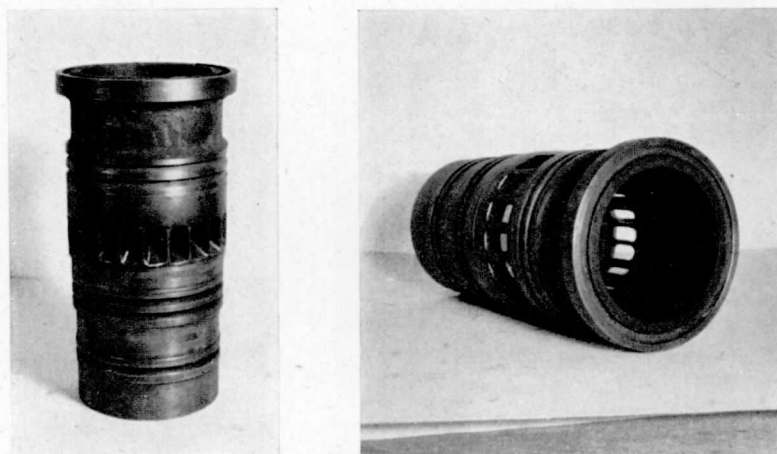


Abb. 46. Zylinderbüchse.

a) Spülseite.

b) Auspuffseite liegt nach vorn.

Abmessungen der Spülschlitze (Abb. 46 a):

Breite	114 mm
Höhe	33 mm
Neigung gegen die Zylinderachse	40°
Effektive Höhe	$33 \cdot \sin 40^\circ = 21,2 \text{ mm}$

Abmessungen der Auspuffschlitze (Abb. 46 b):

Breite	90 mm
Höhe	33 mm,

also gleich wie jene der Spülschlitze.

Die Durchflußzahl wird in beiden Fällen zu $\alpha = 0,9$ angenommen.

Der Zustand der Zylinderladung zu Beginn des Ausströmens wurde im Abschnitt 84 zu $p = 2,78 \text{ ata}$, $T = 1043^\circ \text{ K}$ und $a = 625 \text{ m/s}$ berechnet. Die mitt-

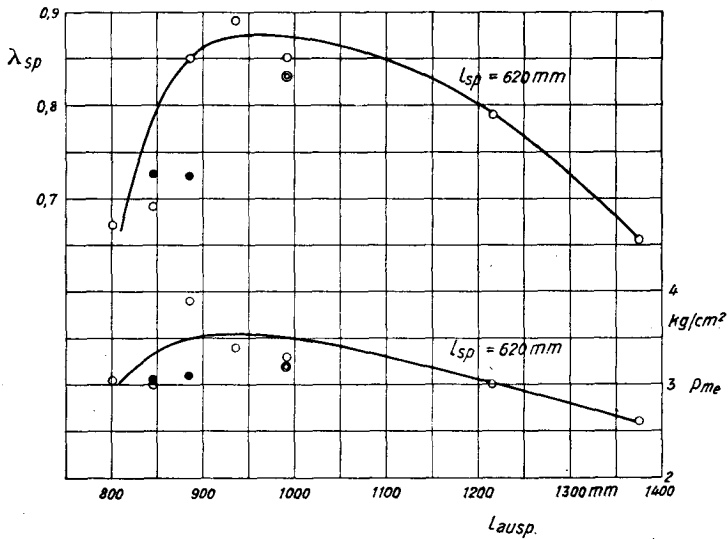


Abb. 47. Spülluftverhältnis λ_{sp} und höchsterreichbarer effektiver Mitteldruck p_{me} bei Selbstspülung mit Spül- und Auspuffleitungen von verschiedener Länge, $n = 1000$ U/min.,
 \circ $l_{sp} = 620$ mm, \bullet $l_{sp} = 563$ mm, \odot $l_{sp} = 700$ mm.

lere Temperatur der Luft im Spülrohr vor dem Öffnen der Schlitze sei $T'_{0L} = 298^\circ \text{K}$ und die entsprechende Schallgeschwindigkeit $a_{0L} = 346$ m/s. Die auf den Atmosphärendruck bezogene, mittlere Temperatur der in die beiden Rohre eindringenden Rauchgase betrage $T_{0R} = 870^\circ \text{K}$, die entsprechende Schallgeschwindigkeit $a_{0R} = 570$ m/s.

Die Berechnung der entstehenden Wellen wurde sodann für wärmeisolierte Rohre unter Vernachlässigung von Reibung und Wärmeleitung bei der Normaldrehzahl $n = 1000$ U/min durchgeführt, allerdings zunächst nur soweit, bis die ersten Reflexionswellen von den äußeren Enden der beiden Leitungen wieder am Zylinder ankommen. Die Länge der beiden Leitungen wird vorerst so gewählt, daß durch die erste Reflexionswelle in der Spülleitung gerade das Entstehen eines Unterdruckes im Zylinder vermieden wird und diejenige in der Auspuffleitung gleichzeitig an den Auspuffschlitzen ankommt. Es ist indessen nicht gesagt, daß diese Längen die günstigste Wirkung ergeben, da auch der weitere Verlauf der Wellen von Einfluß sein kann. Die optimalen Werte können nur durch Versuche gefunden werden, indem die Belastbarkeit des Motors und die selbsttätig angesaugte Spülluftmenge bei verschiedenen Rohrlängen gemessen werden. Die Berechnung ergibt die voraussichtlich günstigste Länge der Spülleitung zu 620 mm und diejenige der Auspuffleitung zu 936 mm.

Zunächst wurde die Länge der Spülleitung mit 620 mm festgehalten und die Länge der Auspuffleitung in weiten Grenzen variiert. Die Abb. 47 zeigt

die Resultate der Messungen des Spülluftverhältnisses λ_{sp} ¹⁾ und des höchst-erreichbaren effektiven Mitteldruckes bei Selbstspülung. Danach liegt die günstigste Auspuffleitungslänge tatsächlich bei etwa $l_{ausp} = 936$ mm. Spül-leitungslängen von $l_{sp} = 563$, bzw. 700 mm, in Verbindung mit entsprechenden Auspuffleitungslängen, lieferten schlechtere Ergebnisse. Somit erweisen sich die Vorausberechnung und das ihr zugrunde gelegte Kriterium für die optimalen Längen als richtig. Das höchste, mit selbsttätiger Druckwellenspülung in der vorliegenden Ausführung erreichte Spülluftverhältnis von $\lambda_{sp} \approx 0,875$ stellt allerdings erst etwa $\frac{3}{4}$ des gewünschten Wertes dar.

87. Das Betriebsverhalten des Motors mit Spül- und Auspuffleitungen von 620, bzw. 936 mm Länge und 50 mm Durchmesser

Mit den Leitungslängen, die sich für die Normaldrehzahl $n = 1000$ U/min als günstig erwiesen hatten, wurde nun das Betriebsverhalten des Motors bei verschiedenen Drehzahlen und Lasten untersucht.

In der Abb. 48 b ist das bei selbsttätiger Spülung erreichte Spülluftverhältnis in Abhängigkeit von der Drehzahl dargestellt. Um einen möglichst breiten Meßbereich zu erhalten, mußte mit geringer Last entsprechend $p_{me} = 2,5$ at gefahren werden. Die Spülluft wurde von einem Drehkolbenkompressor geliefert, ihr Druck aber durch ein Drosselventil in der Zuleitung reduziert, so daß im Spülluftbehälter Atmosphärendruck herrschte. Die Streuung der Meßpunkte rührt einerseits von der schwankenden Liefermenge des mit einem Druckregler versehenen Gebläses her; andererseits hat die Betriebstemperatur des Motors einen gewissen Einfluß auf die Stärke der Wellen. Die bei fallender Drehzahl aufgenommenen Meßpunkte liegen daher durchschnittlich etwas tiefer als bei steigender Drehzahl.

Die Abhängigkeit des Spülluftverhältnisses von der Drehzahl ist überraschend gering, doch deckt sich diese Feststellung mit der Beobachtung, daß die selbsttätige Spülung innerhalb gewisser Grenzen nur wenig von der Länge der Leitungen beeinflusst wird (vgl. Abb. 47). Das Maximum liegt erwartungsgemäß etwa bei der Normaldrehzahl $n = 1000$ U/min, für welche die Rohrleitungen ausgelegt wurden. Außerhalb des Bereiches von $n = 700$ bis 1300 U/min ist der Motor nicht fähig, die zur Erreichung eines effektiven Mitteldruckes von $p_{me} = 2,5$ at notwendige Spülluftmenge aufzubringen. Insbesondere kann er nicht mit Selbstspülung anfahren, sondern muß mit Fremdspülung gestartet werden.

Die Ergebnisse der Messungen des auf die effektive Leistung bezogenen, spezifischen Brennstoffverbrauches bei Selbstspülung sind in der Abb. 49 auf-

¹⁾ Das Spülluftverhältnis λ_{sp} wurde immer auf das mittlere, vom Kolben bei der halben Schlitzhöhe begrenzte Zylindervolumen, das 1,1 Liter beträgt, bezogen.

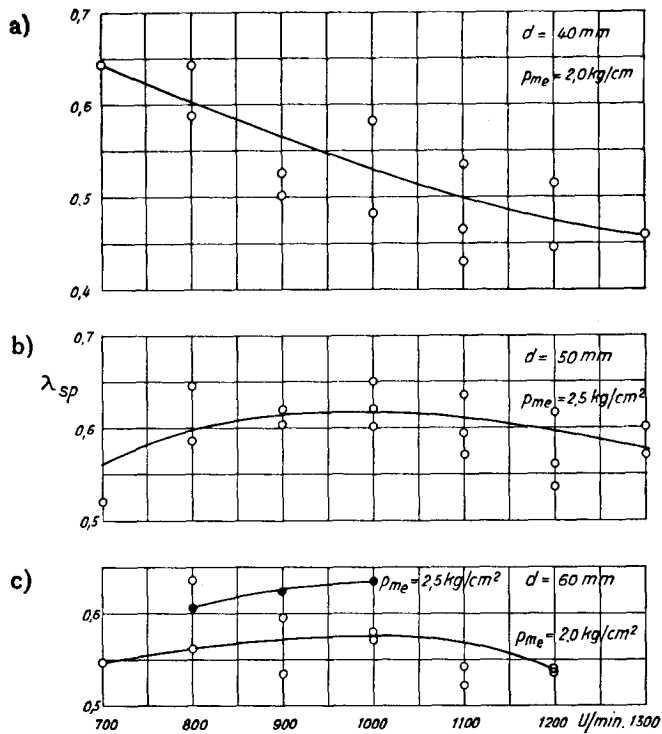


Abb. 48. Spülluftverhältnis λ_{sp} bei Selbstpülung in Abhängigkeit von der Drehzahl n für verschiedene Rohrdurchmesser d .

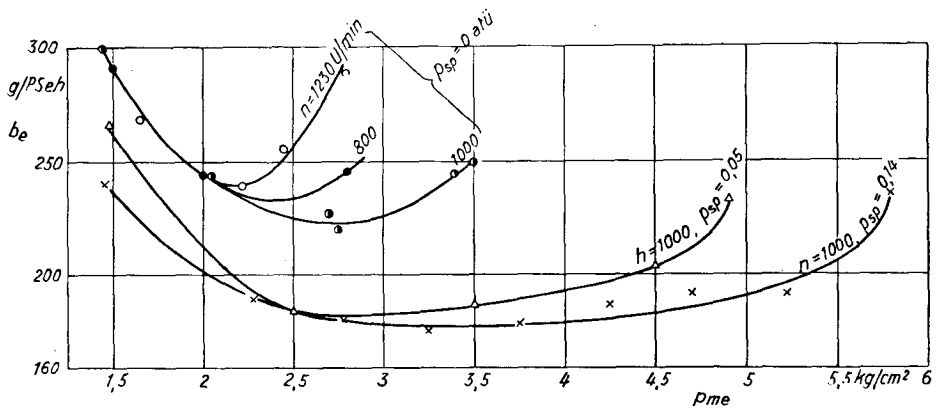


Abb. 49. Effektiver, spezifischer Brennstoffverbrauch mit Rohren von 50 mm Durchmesser.

getragen. Als Folge der ungenügenden Spülluftmenge, bzw. des schlechten Reinheitsgrades der Zylinderladung, ist der Brennstoffverbrauch relativ hoch; im günstigsten Punkt, bei $n = 1000 \text{ U/min}$ und $p_{me} = 2,75 \text{ at}$, beträgt er

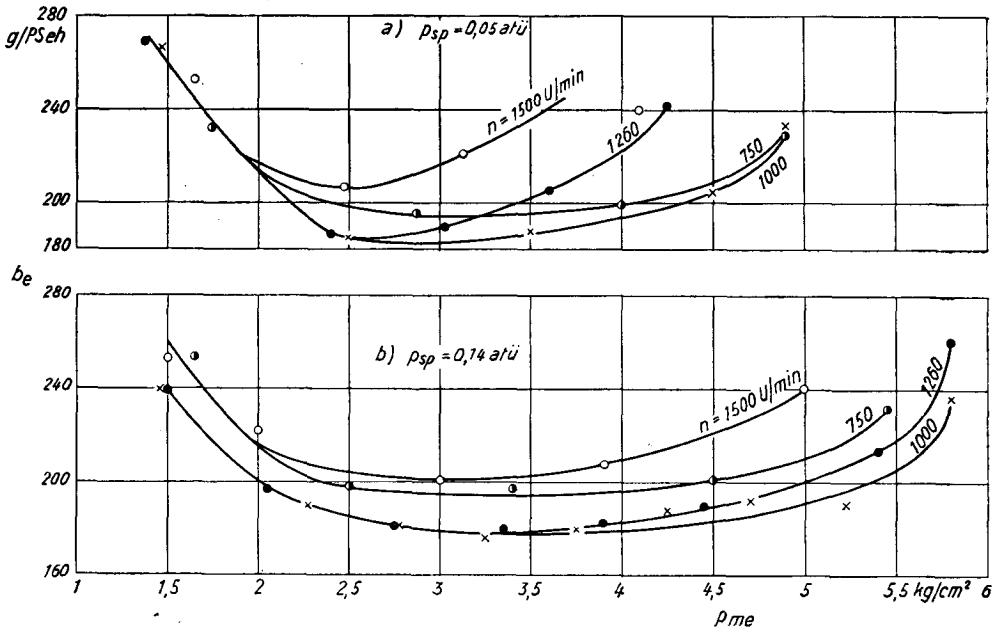


Abb. 50. Effektiver, spezifischer Brennstoffverbrauch bei einem Spüldruck von $p_{sp} = 0,05$, bzw. $0,14 \text{ atü}$ mit Rohren von 50 mm Durchmesser.

$b_e = 222 \text{ g/PS}_e\text{h}$. Unterhalb $p_{me} = 2 \text{ at}$ fallen die Verbrauchskurven für alle drei untersuchten Drehzahlen praktisch zusammen. Während bei $n = 1000 \text{ U/min}$ noch ein effektiver Mitteldruck von $p_{me} = 3,5 \text{ at}$ erreicht werden kann, reicht bei $n = 800$, bzw. 1230 U/min die Spülluftmenge nur noch für eine Last entsprechend $p_{me} = 2,8 \text{ at}$ aus.

Um zu untersuchen, welche Werte bei genügender Spülung erreicht werden könnten, wurden auch Brennstoffverbrauchsmessungen bei einem Überdruck von $0,05$, bzw. $0,14 \text{ at}$ im Spülluftbehälter durchgeführt. Die Ergebnisse bei $n = 1000 \text{ U/min}$ werden auch in der Abb. 49 aufgetragen. Danach bringt schon ein Überdruck von $0,05 \text{ at}$ eine erhebliche Verbesserung; noch größere Leistungen bis zu einem Mitteldruck von $p_{me} = 5,8 \text{ at}$ bei sehr flachem Verlauf des spezifischen Brennstoffverbrauches können mit $p_{sp} = 0,14 \text{ atü}$ erzielt werden.

In Abb. 50 sind die Brennstoffverbrauchswerte mit Überdruck im Spülluftbehälter bei verschiedenen Drehzahlen zusammengestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß der geringe Spüldruck von $p_{sp} = 0,05 \text{ atü}$ nur in der Umgebung der Normaldrehzahl $n = 1000 \text{ U/min}$ dank der Unterstützung durch die Druckwellenspülung befriedigende Ergebnisse liefert. Beim Spüldruck $p_{sp} = 0,14 \text{ atü}$ dagegen tritt der Anteil der Druckwellenspülung zurück und die Drehzahlabhängigkeit des Brennstoffverbrauches ist schwächer. Der tiefste, gemessene Wert beträgt $b_e = 178 \text{ g/PS}_e\text{h}$.

88. Variation der Spül- und Auspuffleitungsquerschnitte

Im weiteren wurde der Einfluß des Rohrquerschnittes auf die Wirksamkeit der Druckwellenspülung untersucht.

Bei unveränderten Spül- und Auspuffschlitzen wurde der Motor zunächst mit Leitungen von 40 mm Durchmesser ausgerüstet. Die voraussichtlich günstigsten Längen wurden nach denselben Gesichtspunkten wie oben zu $l_{sp} = 804$ mm, bzw. $l_{ausp} = 1120$ mm berechnet. Die Ergebnisse der Messungen des

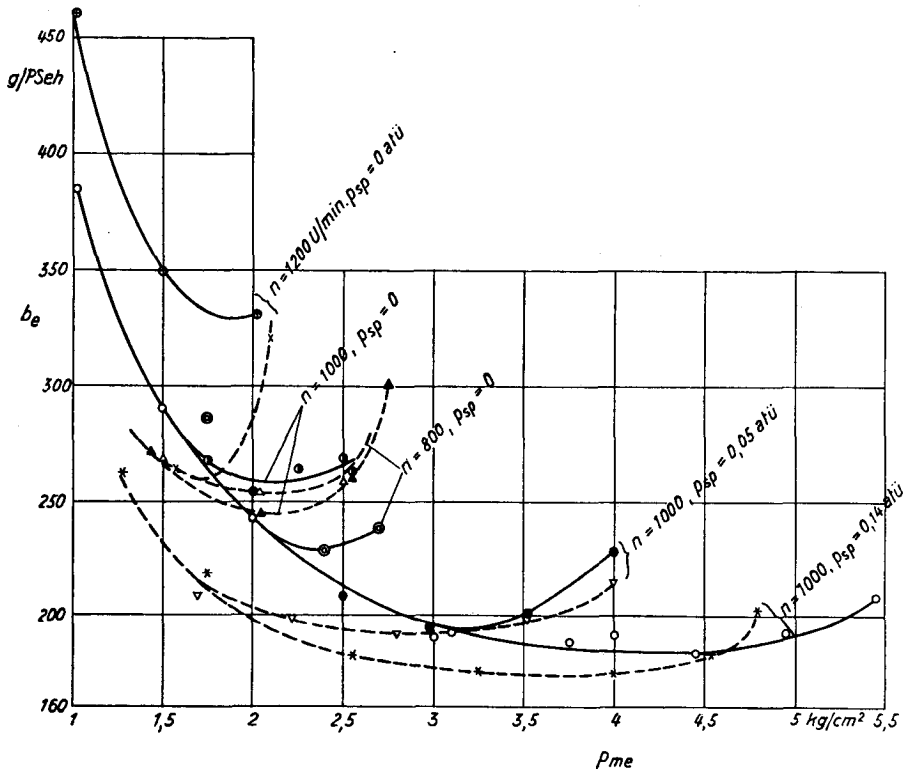


Abb. 51. Effektiver, spezifischer Brennstoffverbrauch.

— für Rohre von 40 mm Durchmesser - - - - für Rohre von 60 mm Durchmesser

Spülluftverhältnisses λ_{sp} und des effektiven, spezifischen Brennstoffverbrauches sind in den Abb. 48a und 51 aufgetragen. Um bei selbsttätiger Spülung in einem größeren Drehzahlbereich messen zu können, mußte der effektive Mitteldruck mit $p_{me} = 2,0$ at tief gehalten werden.

Gegenüber den vorangehenden Messungen besonders auffällig ist das stetige Absinken des erreichten Spülluftverhältnisses mit steigender Drehzahl (Abb. 48a). Mit den gewählten Rohrlängen wird der optimale Wert nicht bei der

Normaldrehzahl $n = 1000$ U/min erreicht; ganz analog verhält sich der spezifische Brennstoffverbrauch (Abb. 51). Dies ist offenbar die Folge des mit kleiner werdendem Rohrquerschnitt steigenden (in der Berechnung jedoch nicht berücksichtigten) Einflusses der Reibung. Die für $n = 1000$ U/min günstigsten Rohrlängen sind demnach kürzer als die berechneten. Da indessen keine besseren Ergebnisse als mit den Leitungen von 50 mm Durchmesser zu erwarten sind, wurde auf weitere Untersuchungen in dieser Richtung verzichtet.

Wie die Abb. 51 zeigt, kann bei einem Überdruck von $p_{sp} = 0,14$ atü im Spülluftbehälter in einem wesentlich erweiterten Bereich mit gutem Brennstoffverbrauch gefahren werden. Dagegen bringt ein Überdruck von nur 0,05 at wegen der wenig wirksamen Unterstützung durch die Druckwellenspülung noch keinen großen Erfolg.

Beim Übergang auf Rohrleitungen von 60 mm Durchmesser mußten auch die Spül- und Auspuffschlitze in der Zylinderbüchse, sowie die Strömungsquerschnitte im Zylindermantel dem größeren Querschnitt entsprechend erweitert werden. Durch Entfernen jedes zweiten Steges konnte die totale Breite der Spülschlitze auf 140 mm, diejenige der Auspuffschlitze auf 95,2 mm vergrößert werden. Allerdings muß befürchtet werden, daß durch die weniger gute Führung der Spülluft in den breiteren Kanälen die Wirksamkeit der Spülung beeinträchtigt wird. Die Abb. 52 zeigt eine Ansicht der abgeänderten Zylinderbüchse.



Abb. 52. Zylinderbüchse mit erweiterten Schlitzen für Rohrleitungen von 60 mm Durchmesser, rechts Spülseite, links Auspuffseite.

Mit den Rohren, deren voraussichtlich günstigsten Längen wie oben zu $l_{sp} = 575$ mm und $l_{ausp} = 901$ mm berechnet wurden, ergaben sich die in den Abb. 48c und 51 dargestellten Spülluftverhältnisse und spezifischen Brennstoffverbräuche. Qualitativ verlaufen die Kurven ganz ähnlich wie diejenigen, die mit Rohren von 50 mm Durchmesser gemessen wurden. Quantitativ stimmen auch die erreichten Spülluftverhältnisse gut überein; der Brennstoffver-

brauch bei Selbstspülung dagegen ist schlechter. Ebenso liegen die Grenzen der erreichbaren effektiven Mitteldrücke, auch bei Überdruck im Spülluftbehälter, etwas tiefer. Die Feststellung, daß bei gleicher Spülluftmenge der Brennstoffverbrauch höher, bzw. die Leistungsgrenze tiefer ist, läßt auf einen schlechteren Reinheitsgrad der Zylinderladung schließen, die wohl weniger dem vergrößerten Rohrdurchmesser als einer schlechteren Spülluftführung zuzuschreiben ist.

Im ganzen wurden daher mit den ursprünglichen Gaswechselschlitzen und mit Rohren von 50 mm Durchmesser die besten Resultate erzielt.

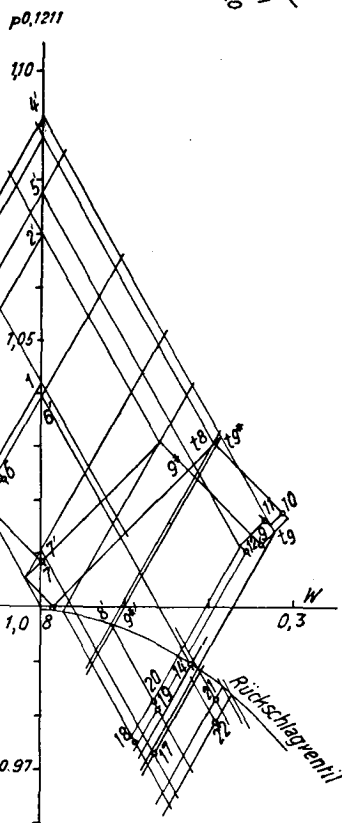
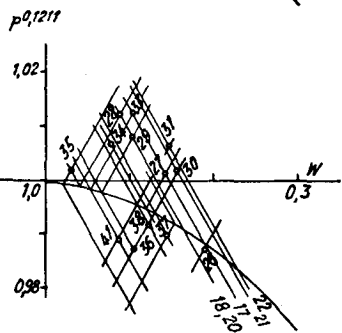
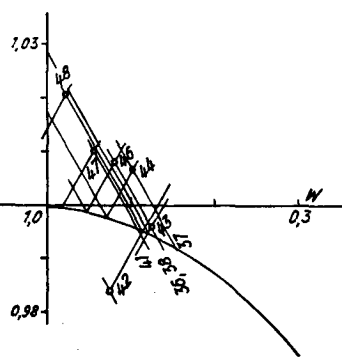
89. Vergleich zwischen berechnetem und gemessenem Druckverlauf in der Spül- und Auspuffleitung

Für die Spül- und Auspuffleitungen mit 50 mm Innendurchmesser und 620, bzw. 936 mm Länge, welche die beste Spülwirkung ergaben, wurde eine ausführliche Berechnung der bei der Motordrehzahl $n = 1000$ U/min auftretenden Wellen gemäß Abb. 53 durchgeführt. Die Strömung wurde reibungsfrei behandelt und der Wärmeaustausch mit der Umgebung vernachlässigt. Der Druck im Spülluftbehälter wurde zu $p_{sp} = 0,05$ atü gewählt, damit der Motor höher belastet werden konnte, und der Atmosphärendruck zu 0,98 ata angenommen. Ferner wurde die mittlere Temperatur der Luft in der Spülleitung zu $T_{0L} = 298^\circ \text{K}$ ($a_{0L} = 346$ m/s), diejenige des Rauchgases in den beiden Leitungen zu $T_{0R} = 867^\circ \text{K}$ ($a_{0R} = 570$ m/s) beim Druck $p_0 = 1,03$ ata, das heißt beim Spül- druck, angenommen. Da die Spül- und Auspuffschlitze gleiche Höhe aufweisen, wurde in der Berechnung für den im Motor zu Beginn der Kompression herrschenden Druck der ungünstigere, tiefere Atmosphärendruck von 0,98 ata eingesetzt.

Die Messung ergab, auf das mittlere Hubvolumen bezogen, ein Spülluftverhältnis von $\lambda_{sp} = 1,5$; auf das maximale Hubvolumen bezogen, betrug es $\lambda_{sp} = 1,3$. Es wurde wieder die ungünstigere Zahl für die Berechnung des Motor- kreisprozesses verwendet.

Da alle hier getroffenen Annahmen mit jenen des Abschnittes 84 übereinstimmen, besitzt der dort berechnete Zustand der Zylinderladung zu Beginn des Ausströmens auch hier Gültigkeit. Die Rauchgase strömen aus dem Zylinder gleichzeitig in die beiden Leitungen ein und erzeugen in jeder von ihnen eine Druckwelle, deren Amplitude (Wellenelemente 0–4) rasch anwächst, um dann langsamer abzuklingen und in eine Verdünnungswelle (Wellenelemente 4–9) überzugehen. Im X - Z -Diagramm der Abb. 53 bedeutet die Linie a auf der Spülseite die Lebenslinie des ersten aus dem Zylinder in die Spülleitung eingeströmten Rauchgasteilchens. Aus ihrem Verlauf ist zu erkennen, wie das Gasteilchen zunächst in die Spülleitung vordringt und dann gegen den Zylinder

$p_{0,1211}$ Spülleitung



$p_{0,1211}$ Auspuffleitung

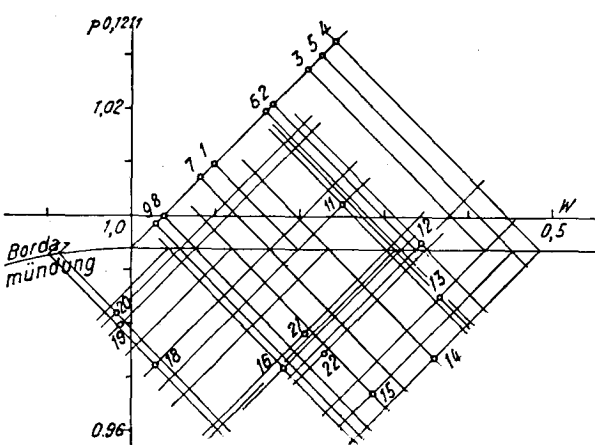
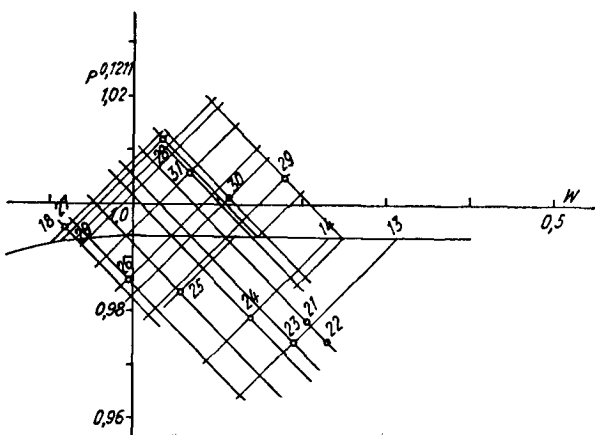
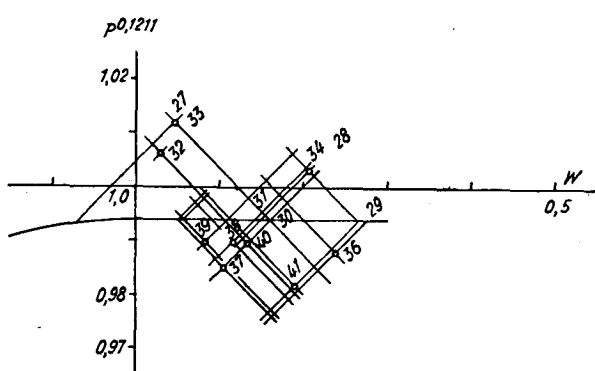
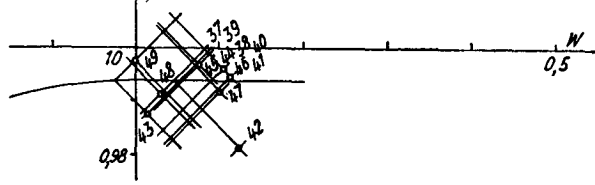


Abb. 53a. W - P -Diagramm zur Berechnung des instationären Druckverlaufes in der Spül- und Auspuffleitung. t bedeutet Zustand an der Trennungsschicht.

zurückgedrängt wird. Sie stellt gleichzeitig die Trennungsschicht zwischen der ursprünglich in der Spülleitung befindlichen Luftmasse und der vorgedrungenen Rauchgasmasse dar. Die Wellenelemente (0–2) vereinigen sich nach der am geschlossenen Rückschlagventil erfolgten Reflexion zu einem Verdichtungsstoß, der an der Trennungsschicht *a* abgeschwächt und gleichzeitig teilweise reflektiert wird. Dieser Verdichtungsstoß trifft in dem Augenblick am Zylinder ein, da der Druck im Zylinder gerade etwa auf den Atmosphärendruck abgesunken ist. Dadurch wird ein intensives Zurückströmen der Rauchgase aus der Spülleitung in den Zylinder verursacht und ein weiteres Sinken des Zylinderdruckes unter die Atmosphäre vermieden. Nach dem ersten Wellenberg (0–9) wandert nun eine Verdünnungswelle (9–10) als Reflexion des am Zylinder angekommenen Verdichtungsstoßes und der ihm folgenden Druckwelle (2–3) in die Spülleitung ein, danach wieder eine Druckwelle (10–18), usw. Die eigentliche Durchspülung im engeren Sinne beginnt erst, wenn das erste Luftteilchen den Zylinder erreicht hat (Punkt *b*).

Andererseits wandert die bei der teilweisen Reflexion des Verdichtungsstoßes an der Trennungsschicht *a* entstehende Verdünnungswelle gegen das Rückschlagventil hin und verursacht erst bei ihrer Ankunft den Beginn des Einströmens von Luft aus dem Spülluftbehälter (Punkt *c*). Der Zeitpunkt von *c* stimmt nicht ganz mit jenem von *b* überein, da die Luftmasse an verschiedenen Stellen der Spülleitung durch die wandernden Wellen verschieden stark komprimiert, bzw. expandiert wird. Das erste durch das Rückschlagventil eingeströmte Luftteilchen bewegt sich längs der Lebenslinie *d* und erreicht den Zylinder beim Punkt *e*. Ein weiteres Luftteilchen wandert auf der Lebenslinie *f* und erreicht die Spülschlitze nicht mehr vor ihrem Abschluß durch den Kolben im Zeitpunkt *g*. Das Rückschlagventil wird später als die Schlitze beim Punkt *h* durch das Druckwellenelement (47/48) geschlossen.

Währenddessen wandert das erste aus dem Zylinder in die Auspuffleitung eingeströmte Rauchgasteilchen längs der Lebenslinie *i* und wird vor Erreichen des offenen Rohrendes zweimal durch (längs der Lebenslinien *j* und *k*) in die Leitung zurückschlagende Gase zurückgedrängt. Die erste Druckwelle (0–4) wird am offenen Rohrende als Verdünnungswelle reflektiert, die, am Zylinder angekommen, eine saugende Wirkung auf dessen Inhalt ausübt. Als Folge davon entsteht eine zweite Druckwelle (9–12), usw. Die Lebenslinie *l* stellt den Bewegungsablauf eines weiteren Rauchgasteilchens dar.

Der zeitliche Druckverlauf an den beiden Meßstellen, welche in der Spülleitung 102 mm, in der Auspuffleitung 80 mm von der Zylinderwand entfernt liegen, wird aus dem *X-Z*-Diagramm der Abb. 53 entnommen und in die Abb. 54 eingetragen. Diesen theoretisch berechneten Kurven werden in derselben Abbildung die unter den gleichen Betriebsbedingungen des Motors ($p_{me} = 4,5 \text{ at}$) gemessenen Kurven aus der Abb. 55 gegenübergestellt.

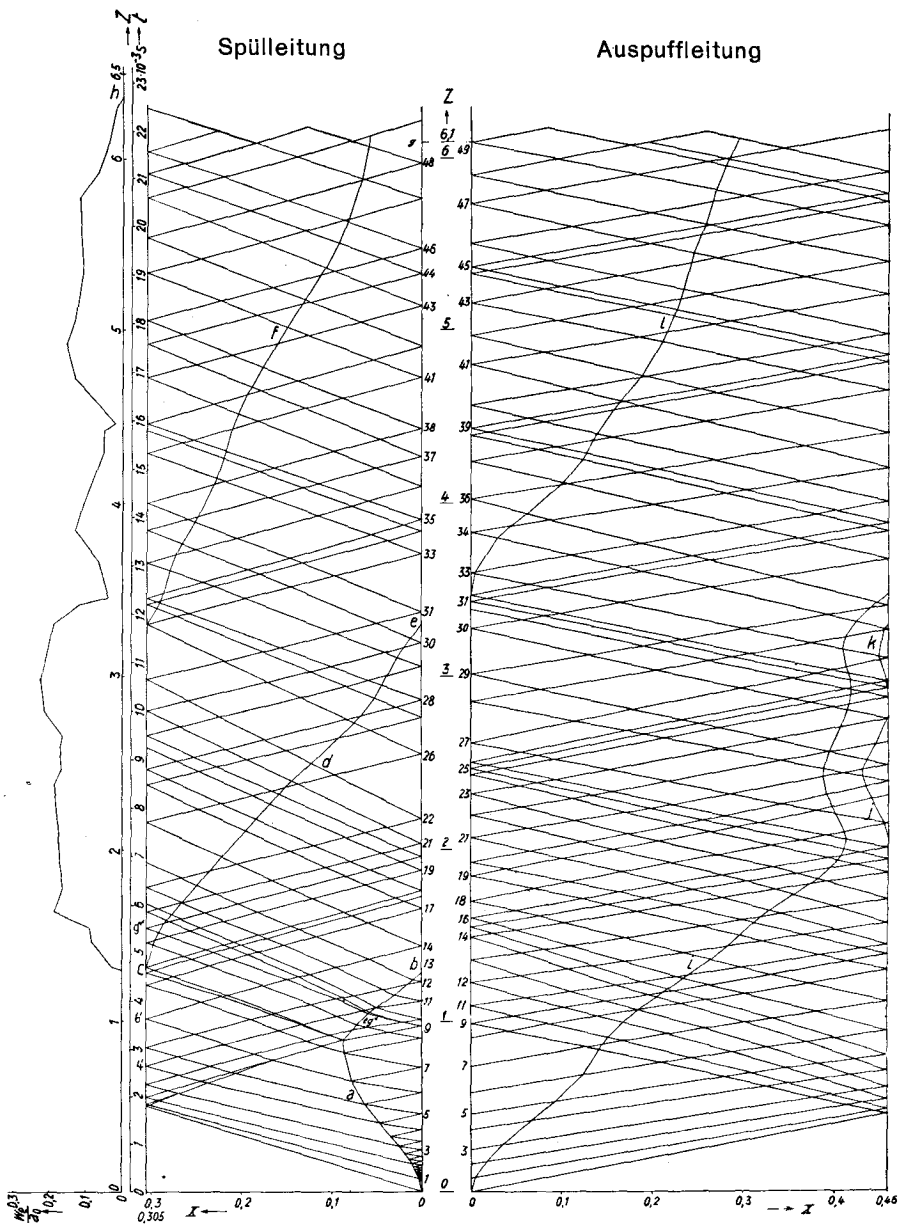


Abb. 53b. X-Z-Diagramm zur Abb. 53a.

Die theoretische Geschwindigkeit $\left(\frac{w_e}{a_0}\right)_{th}$ der durch das Rückschlagventil in die Spülleitung einströmenden Luft kann aus dem $W-P$ -Diagramm für die Spülseite gefunden werden und ist als Funktion der Zeit neben dem $X-Z$ -Diagramm in die Abb. 53b eingezeichnet. Es ergibt sich ein Mittelwert von

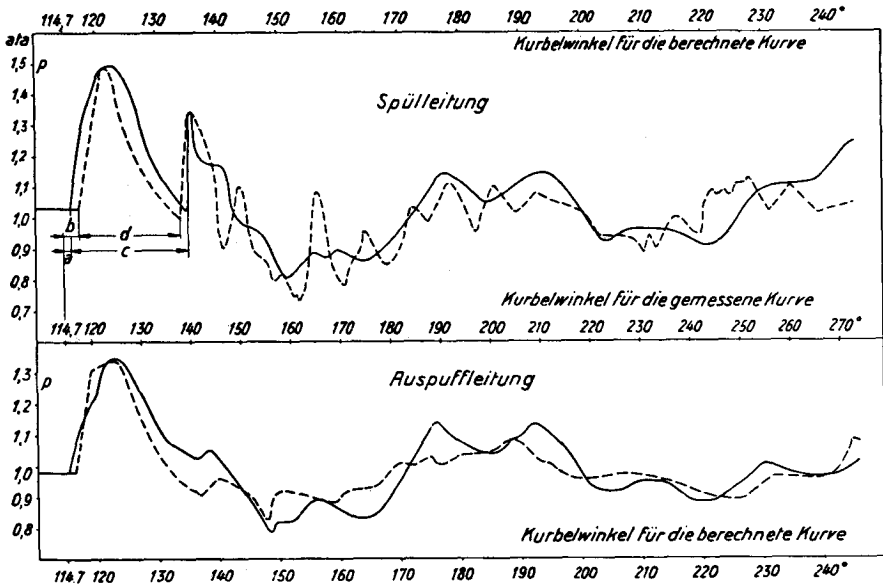


Abb. 54. Der instationäre Druckverlauf an den Meßstellen der Spül- und Auspuffleitung. Öffnungsbeginn der Schlitze liegt bei 114,7° Kurbelwinkel.
 ——— berechnet, - - - - gemessen.

$\left(\frac{w_e}{a_0}\right)_{th,m} = 0,1255$, bzw. $w_{e,th,m} = 71,5$ m/s über der gesamten Öffnungsdauer von 0,0181 s des Rückschlagventils. Nach dem $W-P$ -Diagramm der Abb. 53 entspricht er einem Druck in der Spülleitung von $\left(\frac{p_e}{p_0}\right)_m = 0,9945^{\frac{1}{0,1211}}$ oder $p_{e,m} = 0,985$ ata, also etwa dem Atmosphärendruck.

Die theoretisch durchströmende Spülluftmenge beträgt $Q_{th} = 2,53$ l, was einem Spülluftverhältnis von $\lambda_{sp,th} = 2,3$ entspricht. Da am Versuchsmotor in Wirklichkeit nur ein Spülluftverhältnis von $\lambda_{sp,eff} = 1,5$ gemessen wurde, muß der effektive Mittelwert der Luftgeschwindigkeit zufolge der hydraulischen Reibung in den Leitungen gegenüber dem theoretischen um $\Delta \left(\frac{w_e}{a_0}\right)_{th,m} = 0,044$ kleiner sein.

Die Zeit, welche die erste Druckwelle in der Spülleitung braucht, um von der Meßstelle zum Rückschlagventil und wieder zurück zu laufen, beträgt nach der Messung $\frac{20,6}{6000}$ s, während die Berechnung $\frac{19,4}{6000}$ s liefert. Die Verlangsamung der Wellenfortpflanzung durch die Reibung ergibt sich daraus zu $\frac{20,6 - 19,4}{19,4} = 6,2\%$.

Die Zeit, welche die erste Druckwelle in der Spülleitung zur Zurücklegung der Strecke vom Zylinder bis zur Meßstelle benötigt, beträgt nach der Rech-

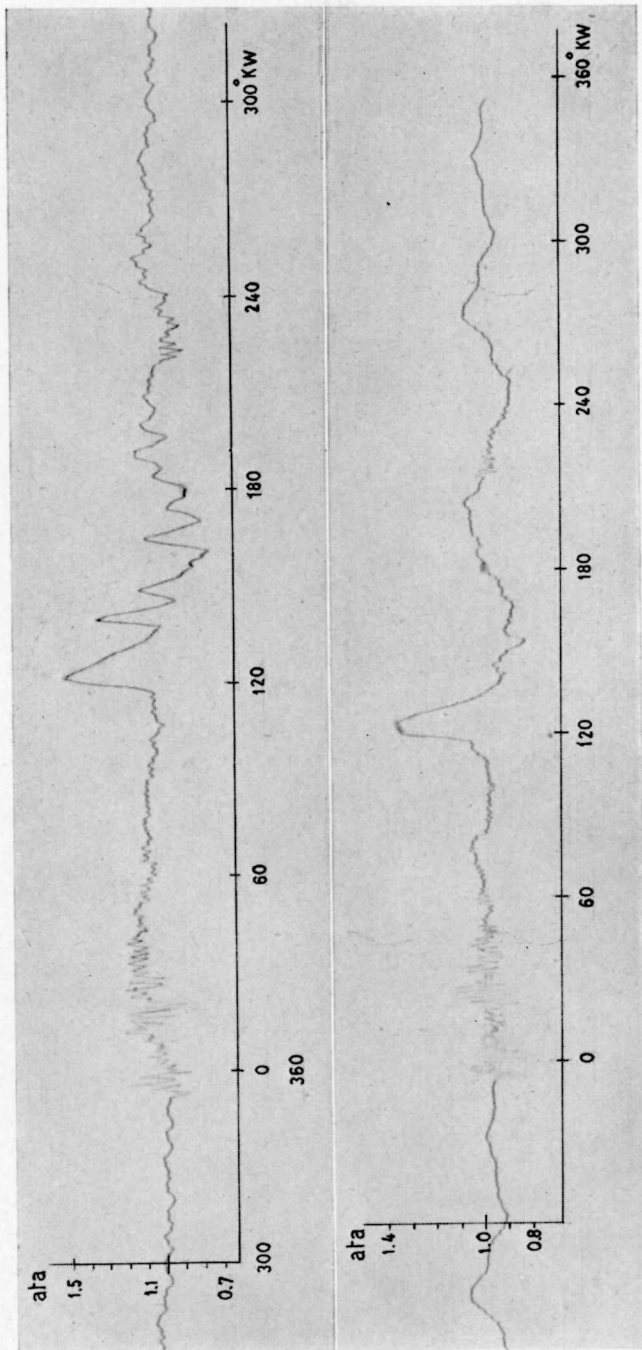


Abb. 55. Gemessener Druckverlauf in der Spül- und Auspuffleitung von 50 mm Innendurchmesser und 620, bzw. 936 mm Länge bei 0,05 at Überdruck im Spülluftbehälter, $n = 1000$ U/min, $p_{me} = 4,5$ at. Die untere Totpunktlage des Kolbens wird durch kurzzeitige Hellsteuerung des Elektronenstrahles als Punkt markiert.

nung $\frac{1,7}{6000}$ s, nach der Messung dagegen $\frac{3,3}{6000}$ s. Sie kommt also mit einer Verspätung von $\frac{1,6}{6000}$ s an. Ursachen dieser Verspätung könnten außer der hydraulischen Reibung unzutreffend angenommene Kontraktionszahlen der Strahlen in den Schlitzen, Carnotsche Stöße in den Strahlen und die nicht genau feststellbare Weglänge der Strömung in der an die Schlitze anschließenden Kammer sein.

Somit wird die für die Durchwanderung der Spülleitung durch die Wellen benötigte Zeit durchschnittlich um

$$\left\{ \frac{1,6}{6000} \cdot 346 + 0,062 (0,620 - 0,102) \right\} \cdot \frac{1}{0,620} = 21 \%$$

größer als nach der theoretischen Berechnung. Auf der Auspuffseite müssen die Verhältnisse ähnlich sein; es wird die Annahme getroffen, daß derselbe Wert auch dort Gültigkeit besitze.

Wird demnach der Maßstab der Zeitachse für den gemessenen, instationären Druckverlauf zu $\frac{1}{1,21} = 82,5\%$ desjenigen für den theoretisch berechneten gewählt, so darf erwartet werden, daß die beiden Kurven einigermaßen übereinstimmen. Gemäß der Abb. 54 trifft dies für die Grundschiwingung zu, während die Oberwellen verhältnismäßig stark voneinander abweichen. Dies kann etwa folgende Gründe haben: Bei der Berechnung wurde angenommen, daß im Zylinder keine Druckschwingungen existieren, d. h. daß sein Inhalt als ganzes gleichzeitig durch die von den beiden Leitungen an den Schlitzen ankommenden Wellen komprimiert oder expandiert werde, bzw. daß die Wellen an den einen Schlitzen diejenigen an den anderen einfach über die im Zylinder befindliche Gasmasse hinweg mit unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit beeinflussen. Dadurch gehen natürlich Feinheiten der gegenseitigen Beeinflussung verloren, und die daraus resultierenden Oberwellen können der Wirklichkeit nicht ganz entsprechen. Außerdem handelt es sich bei der Berechnung um ein Differenzenverfahren, wodurch manchmal kleine Oberschwingungen überbrückt werden. Die aus den verschiedenen Schlitzen in die anschließende Kammer eintretenden Gasstrahlen haben überdies verschiedene Zustände, was theoretisch schwer zu berücksichtigen ist. Vielmehr müssen die verschiedenen Strahlen bei der Berechnung etwa durch den Strahl aus dem mittleren Schlitz repräsentiert werden, was eine weitere Fehlerquelle darstellt. Schließlich muß nochmals darauf hingewiesen werden, daß die hydraulische Reibung, welche sowohl den stationären wie den instationären Druckverlauf beeinflußt, in der Berechnung nicht berücksichtigt wurde.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden einige Berechnungsmethoden für ein-dimensionale instationäre Strömungen beim Überschreiten der Trennungsschicht zwischen Gasmassen von verschiedener Temperatur und mit verschiedenen Adiabatenexponenten entwickelt, Reflexionsprobleme von Verdichtungsstößen an verschiedenen Berandungen behandelt und instationäre Strömungen in einem innen mit einer Düse versehenen Rohr, sowie die Möglichkeit des Entstehens einer Überschallströmung in demselben untersucht. Hierbei stellte sich heraus, daß ein Drucksprung hinter der Düse auftreten kann, und daß sich die zur Herbeiführung eines möglichst starken Verdichtungsstoßes in dem hinter der Düse liegenden Rohrteil günstigste Größe des Düsenquerschnittes berechnen läßt.

Anschließend wurden die entwickelten Berechnungsmethoden auf einen praktischen Fall angewendet, nämlich auf einen Zweitakt-Dieselmotor, bei dem durch Ausnützung der Energie instationärer Strömungsvorgänge in der Spül- und Abspuffleitung eine selbsttätige Spülung bewerkstelligt werden sollte. Die theoretischen Ergebnisse wurden mit Messungen an einem eigens hierfür gebauten Einzylinder-Versuchsmotor verglichen. Die Querschnitte der beiden Leitungen sowie die Höhen der Spül- und Abspuffschlitze waren gleich groß. Bei der Drehzahl $n = 1000$ U/min konnten mit selbsttätiger Spülung ein maximaler effektiver Mitteldruck von $p_{me} = 3,5$ at, ein Spülluftverhältnis von $\lambda_{sp} \approx 0,875$ und ein günstigster effektiver, spezifischer Brennstoffverbrauch von $b_e = 222$ g/PS_eh bei $p_{me} = 2,75$ at erreicht werden. Schon ein sehr geringer Überdruck der Spülluft von 0,05 at führt indessen zu einer erheblichen Verbesserung, indem sich ein maximaler effektiver Mitteldruck von $p_{me} = 4,9$ at und ein günstigster Brennstoffverbrauch von $b_e = 182$ g/PS_eh¹⁾ erzielen ließen.

Der theoretisch erwartete Effekt einer vollkommen selbsttätigen Spülung mittels instationärer Strömungsenergie wurde zwar erreicht, aber bisher nicht in dem erhofften Ausmaße. Weitere Verbesserungen dürften etwa auf folgende Weise möglich sein:

¹⁾ Der Leistungsaufwand für die Spülluft wurde nicht berücksichtigt.

1. Die Höhen der Spül- und Auspuffschlitze werden vergrößert, aber unter sich gleich gehalten. Die instationären Strömungsenergien in den beiden Leitungen können dann vollständiger ausgenützt werden, allerdings unter Einbuße an nutzbarem Hubvolumen des Motors.

2. Die Spülschlitze werden höher gemacht als die Auspuffschlitze, wodurch das Schwergewicht auf die Vorgänge auf der Spülseite gelegt wird. Der erste vom Zylinder in die Spüleleitung wandernde Wellenberg und die danach folgende Verdünnungswelle erhalten größere Amplituden und bewirken eine intensivere Durchspülung. Wie die weiteren Wellen sich auswirken, müßte zuvor durch Berechnung und Versuch abgeklärt werden.

3. Die Auspuffleitung wird (ähnlich wie beim Kadenacy-Motor) konisch erweitert und mit einer passenden Spüleleitung von konstantem Querschnitt kombiniert.

Literaturverzeichnis

1. *Froede, W.*, Zweitaktmotoren ohne Spülgebläse, Z. Ver. dtsch. Ing. **82**, 5, 119—121, 1938.
2. *Schweitzer, P. H.*, The Kadenacy Effect, Engineering **160**, 4158, 241—244, 1945. — Aufklärung des Kadenacy-Effektes, Motortech. Z. **9**, 6, 94—95, 1948.
3. *Ackeret, J.*, Gasdynamik (in Geiger und Scheel, Handbuch der Physik, Bd. 7, Berlin 1927).
4. *Sauer, R.*, Nichtstationäre Probleme der Gasdynamik, Entwurf 1946. (Nicht publiziert. Ein Auszug daraus findet sich in Nr. 5, S. 74—83.)
5. *Jenny, E.*, Berechnungen und Modellversuche über Druckwellen großer Amplituden in Auspuffleitungen, Diss. ETH Zürich, 1949, mit weiteren Literaturangaben über instationäre Strömungen. Ein Auszug aus dieser Arbeit findet sich in den Brown Boveri Mitt. **37**, 11, 447—461, 1950.
6. *de Haller, P.*, Über eine graphische Methode in der Gasdynamik, Sulzer Tech. Rev. **1**, 6—24, 1945.
7. *Schultz-Grunow, F.*, Nichtstationäre eindimensionale Gasbewegung, Forsch. Geb. Ingenieurwesens **13**, 3, 125—134, 1942.
8. *Lutz, O.*, Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen von Kolbenmaschinen, Berichte aus dem Laboratorium f. Verbrennungskraftmaschinen der TH Stuttgart, Heft **3**, 1934.
9. *Pfriem, H.*, Zur Theorie ebener Druckwellen mit steiler Front, Akust. Z. **6**, 4, 222 bis 244, 1941.
10. *Eichelberg, G.*, Instationäre Strömungsvorgänge in Motoren, Forsch. Geb. Ingenieurwesens **14**, 2, 41—47, 1943.
11. *Eichelberg, G.*, Investigations on Internal-Combustion Engine Problems, Engineering **148**, 3857, 682—686, 1939.
12. *Wolfer, H. H.*, Der Zündverzug im Dieselmotor, VDI-Forschungsheft **392**, 1938.
13. *Schweitzer, P. H.*, Zur Physik des Kraftstoffstrahls, Motortech. Z. **8**, 6, 87—91, 1947.
14. *Eichelberg, G.*, Verbrennungsmotoren, Vorlesung ETH Zürich, 1945.

Lebenslauf

Am 1. September 1913 wurde ich in Mukden, China, geboren. In meiner Heimat besuchte ich die Volks- und die Mittelschule, an der ich im Jahre 1929 die Reifeprüfung ablegte. Daran anschließend besuchte ich den Schnellkursus für deutsche Sprache an der Tung-Chi Universität, Shanghai, und zwei Jahre später begann ich mit meinem Studium an der Abteilung für Maschinenbauwesen derselben Universität, wo ich im Jahre 1936 das Diplom-Examen als Maschinen-Ingenieur bestand. Darauf habe ich vier Jahre als Assistent an der gleichen Universität und je ein Jahr als Ingenieur in einem Arsenal und einer Kraftfahrzeugfabrik gearbeitet. Von 1942 bis 1947 war ich als Dozent an der Abteilung für Maschinenbauwesen der Tung-Chi Universität tätig. Von 1948 bis Juni 1951 beschäftigte ich mich mit der vorliegenden Promotionsarbeit. Am 1. Juli trat ich in die Maschinenfabrik Gebrüder Sulzer AG als Ingenieur der Abteilung für Studienwesen ein.