

KOPPLUNGSEFFEKTE BEI STABSCHWINGUNGEN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
der
EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZUERICH

vorgelegt von

YASAR DEGER

dipl. Bau-Ing. TU Istanbul
geboren am 8. Juni 1951
Türkischer Staatsangehöriger

Angenommen auf Antrag von:
Prof. Dr. M. SAYIR, Referent
Prof. Dr. Ch. WEHRLI, Korreferent

1981

Meinen verehrten
Lehrern gewidmet

INHALTSVERZICHTNIS

Zusammenfassung	II
Summary	IV
1. Einleitung	1
2. Kurze Uebersicht der bisherigen Forschungsbeiträge im Hinblick auf das Dispersionsphänomen	5
3. Allgemeines	8
4. Längsschwingungen	13
5. Torsionsschwingungen	29
6. Biegeschwingungen	46
7. Gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen von Stäben mit dünnwandigem offenem Querschnitt	78
8. Diskussion	91
9. Näherungsweise Bestimmung der Dispersion auf Grund einer Variationsüberlegung (Anhang)	102
Literaturverzeichnis	110

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie die bei Stabschwingungen auftretenden Kopplungseffekte, insbesondere die geometrische Dispersion, mit der Methode der asymptotischen Entwicklungen systematisch untersucht. Zur Bestimmung der Dispersion werden anwendbare Lösungswege gefunden bzw. skizziert, die unter Beschränkung auf das Stabinnere sowie auf die fundamentalen Modes alle Hauptschwingungsarten der klassischen Theorie bei allgemeinen Querschnittsformen umfassen und zu im asymptotischen Sinne exakten Resultaten führen. Die freien Längs-, Torsions- und Biegeschwingungen der Stäbe werden in einzelnen Kapiteln auf die Zielgrösse "Wellengeschwindigkeit" hin einheitlich behandelt.

Die Grundlagen und Technik des angewandten asymptotischen Berechnungsverfahrens sowie die allgemein als Ausgangsbasis dienenden Stoffbeziehungen und Bewegungsdifferentialgleichungen der dreidimensionalen linearen Elastizitätstheorie für isotrope Werkstoffe werden im 3. Kapitel aufgeführt.

Im 4. Kapitel wird eine denkbar einfache Beziehung für die Dispersion bei Längsschwingungen hergeleitet, welche die Wellengeschwindigkeit als Funktion des Verhältnisses zwischen dem polaren Trägheitsradius des Querschnitts und der Wellenlänge angibt und jede weitere Rechnung für alle Querschnittsformen erübrigt. Dabei handelt es sich um die Dispersion von der Grössenordnung h^2/λ^2 . Darüber hinaus wird die Kopplung der Längs- mit den Querschwingungen dargelegt bzw. der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Spannungen höherer Ordnung ermittelt.

Im 5. und 6. Kapitel werden für Torsions-, bzw. Biegeschwingungen Gleichungen zur Bestimmung der Dispersion sowie eventueller Kopplungen zwischen diesen Schwingungen entwickelt. Mit Hilfe numerischer Verfahren zur Integration der sukzessive auftretenden harmonischen und biharmonischen Differentialgleichungen ist damit die Behandlung beliebiger Quer-

hinförmigen möglich.

Bei Torsionsschwingungen, welche - abgesehen vom Sonderfall der Stäbe mit Kreisquerschnitt - von Querschnittsverwölbungen begleitet werden, wird gezeigt, wie die Dispersion $O_s(h^2/\Lambda^2)$ in direktem Zusammenhang mit den Schubspannungen und Querverschiebungen sekundärer Grössenordnung steht, welche als Folge von durch Verwölbung bedingten axialen Spannungen und Beschleunigungen, aber auch ebenen Spannungen zustande kommen. Zur Veranschaulichung der Erhöhung der Torsionssteifigkeit und dadurch der Wellengeschwindigkeit infolge Verwölbung gegenüber jenen nach der elementaren St. Venantschen Theorie werden als Beispiel Stäbe mit elliptischem Querschnitt durchgerechnet.

Bei den Biegeschwingungen werden neben den Einflüssen der Querschnittsrotationen und der Schubspannungen auf die Korrektur $O_s(h^2/\Lambda^2)$ der Dispersion auch jene der Querschnittsdistorsion bzw. der ebenen Normalspannungen quer zur Stabachse erfasst. Das Vorgehen wird anhand von Beispielen ausführlich illustriert.

Im 7. Kapitel wird am Beispiel von Biege- und Torsionsschwingungen eines Trägers mit Halbkreisbogenquerschnitt gezeigt, dass die je nach der Symmetrieeigenschaft des Querschnitts, möglicherweise gekoppelten Schwingungsdifferentialgleichungen von Stäben mit dünnwandigen Profilen, nach einer geeigneten Skalierung und Einführung asymptotischer Entwicklungen auf demselben Weg aufgestellt werden können, wie in den vorangehenden Kapiteln.

Im Anhang wird an einem Beispiel ein Variationsverfahren beschrieben, das in Anlehnung an die Asymptotik für viele Querschnitte Näherungslösungen in geschlossener Form liefern kann.

SUMMARY

In the present work a systematic investigation is made of the coupling effects on the vibrations of uniform cylindrical bars, with special regard to the resulting geometrical dispersion, using the method of asymptotic expansions within the framework of linear theory of elasticity. The solutions developed here are "outer" solutions in the asymptotic sense, i.e. are to apply to the inner part of the bar subject to vibration resp. wave propagation, without any restrictions concerning the shape of its cross-section and making it possible to determine the dispersion on the fundamental modes with a well-defined specific accuracy. The free longitudinal, torsional and bending vibrations of bars are dealt with analogously but separately so as to furnish the dispersive phase velocity.

The fundamentals and technique of the asymptotic method applied as well as the constitutive relations and the differential equations of motion of the three dimensional linear theory of elasticity for isotrop and homogeneous materials are introduced in chapter 3.

In chapter 4, an equation for the dispersion on longitudinal vibrations is derived which is valid for bars with any cross-section and gives the phase velocity as a function of the ratio K/Λ (K : = gyration radius about the bar axis; Λ : = wave length). This result contains the complete dispersion of the order of magnitude h^2/Λ^2 (h : = the characteristic dimension of the cross section). In addition, the coupling between longitudinal and lateral vibrations and the relationship between the displacements and stresses of higher order of magnitude are shown.

The 5th and 6th chapters treat the coupling and dispersion on the torsional resp. bending (flexural) vibrations of bars. Any type of cross-section can be dealt with by means of numerical methods-appropriate to integration of harmonic and biharmonic differential equations which occur successively after asymptotic decomposition of basic equations mentioned above.

As already ascertained, the torsional vibrations are accompanied by warping, except in the case of circular cross-section. The resulting dispersion of the order of magnitude h^2/Λ^2 is found to be related to the shearing stresses of higher order of magnitude and distortion of cross section which are consequences of not only the axial stress and acceleration but also of the plane stresses.

The very interesting phenomenon of the increase in phase velocity resp. in torsional rigidity following the warping of cross-section is illustrated analytically by means of the example of elliptical cross-section.

In the chapter concerning the bending vibrations, the supplementary effects of lateral normal stresses and of the distortion of cross-section as a result of lateral contraction onto the correction of the dispersion of the order of magnitude h^2/Λ^2 are obtained in addition to the contributions of the rotary inertia (Rayleigh) and of the shearing (Timoshenko). The coupling with the torsional vibrations is also found out explicitly.

In chapter 7, the application of the method of asymptotic expansions in order to obtain the differential equations of motion of coupled bending and torsional vibrations of bars of thin walled open cross-section is represented by means of an example. It is pointed out that the method can fail to give satisfactory results due to the singularities of cross-section.

In closing, a variational method combined with the asymptotics performed in this work is introduced, which can be used for many cross-sections of practical importance in order to determine analytical approximate solutions.

EINLEITUNG

Bei Schwingungen von Stäben treten in Abhängigkeit von der Querschnittsform, je nach Symmetrieeigenschaft und Schlankheit, Kopplungen auf. Es entstehen Querschwingungen kleinerer Amplitude bei Längsschwingungen eines Stabes. Ebenfalls werden bei Torsionsschwingungen mit Wölbung zusammenhängende Längsschwingungen und im Falle von Nichtsymmetrie des Querschnitts auch Biegeschwingungen erregt. Andererseits erfolgt bei Biegeschwingungen Kopplung mit Torsionsschwingungen, falls der Schwerpunkt und der Schubmittelpunkt des Querschnitts nicht zusammenfallen. Ferner ist bekannt, dass bei Stäben mit dünnwandigen, offenen Querschnitten Kopplung zwischen Biege-, Torsions- und auch Längsschwingungen vorkommt.

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, Kopplungseffekte bei Stabschwingungen möglichst allgemein und genau zu erfassen und in einzelnen Beispielen zu erläutern. Zu diesem Zweck werden wir als mathematisches Hilfsmittel die Methode der asymptotischen Entwicklungen nach dem kleinen geometrischen Parameter ϵ gebrauchen, der die Schlankheit des Stabes charakterisiert. Auf diese Weise wird es uns gelingen, asymptotisch exakte Lösungen im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie zu finden. Wir beschränken uns auf zylindrische, homogene Stäbe aus isotropem, linearelastischem Material und setzen voraus, dass der jeweilige Belastungsparameter "genügend" klein in bezug auf ϵ bleibt, damit die Gültigkeit der linearisierten Theorie nicht beeinträchtigt, bzw. die Stabilitätsgrenze nicht erreicht wird [1].

Jede beliebige Störung in einem nach allen Richtungen unbegrenzt ausgedehnten, elastischen, isotropen, festen Medium breitet sich in Form von zwei verschiedenen Wellen aus, nämlich einer Dilatations- bzw. einer Distorsionswelle, die beide eigene konstante Geschwindigkeiten aufweisen. Dies gilt auch im Falle eines begrenzten Mediums, wie z.B. eines zylindrischen Stabes. Der Reflexionsvorgang sowie der Erfüllungszwang von Randbedingungen an den Oberflächen des Mediums erschweren aber die mathematisch exakten Lösungen der Gleichungen ausserordentlich, bzw. verhindern die genaue Erfassung der Wellenfortpflanzung.

Auch die Analyse von Schwingungen eines Stabes kann im weitesten Sinne als ein Wellenausbreitungsproblem aufgefasst werden, in welchem sich die oben-erwähnten Komplikationen in Form von erzwungenermaßen auftretenden Kopplungen äussern. Eine typische physikalische Begleiterscheinung dieser Kopplungen bei Stabschwingungen ist die Dispersion, d.h. die Abhängigkeit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge. Die Ermittlung der Dispersionsgleichung ist bei Wellenausbreitungsproblemen in bezug auf Stäbe, wie auch Platten und Schalen, von grundlegender Bedeutung. Diese Gleichung kann in der Praxis z.B. zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten E und G, des Elastizitätsmoduls bzw. des Schubmoduls von einem Werkstoff gebraucht werden, für den man das linearelastische Materialverhalten voraussetzt.

Die klassische elementare Theorie der Stabschwingungen, die wir als Ausgangs- bzw. Vergleichsbasis verwenden, führt zu einfach formulierbaren Bewegungsdifferentialgleichungen und Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten ohne Berücksichtigung allfälliger Kopplungen. Für den Leser werden wir sie im folgenden kurz wiedergeben [2].

a) Längsschwingungen:

Unter den Annahmen, dass die Querschnitte eben bleiben und die Fortpflanzung nur in der Stabachsenrichtung erfolgt (keine Querkontraktion), gelangt man zur eindimensionalen Schwingungs- bzw. Wellengleichung:

$$E u_{,xx} = \rho u_{,tt} \quad (1.1)$$

sowie zur Wellenausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c_0 = \sqrt{E/\rho} \quad , \quad (1.2)$$

welche keine Abhängigkeit von der Querschnittsform aufweisen.

Torsionsschwingungen:

Vorausgesetzt, dass die Querschnitte eben bleiben und nur die Rotationen der Querschnitte um die Stabachse berücksichtigt werden, erhält man die entsprechenden Gleichungen:

$$C \Theta_{,xx} = \rho I_p \Theta_{,tt} \quad , \quad (C = \text{Torsionssteifigkeit}) \quad (1.3)$$

$$c_2 = \sqrt{C / \rho I_p} \quad , \quad (1.4)$$

welche bei endlichen Wellenlängen, je mehr der Querschnitt des Stabes vom Kreis abweicht, desto mehr an Gültigkeit verlieren.

c) Biegeschwingungen:

Basierend auf den Annahmen, dass die Querschnitte eben bleiben und lediglich die Verschiebung der Stabachse in der Querrichtung relevant ist, lautet Bewegungsdifferentialgleichung und Wellenausbreitungsgeschwindigkeit:

$$EI w_{,xxxx} = - \rho F w_{,tt} \quad , \quad (1.5)$$

$$c' = 2\pi c_0 \frac{K}{\Lambda} \quad . \quad (1.6)$$

Der Ausdruck (1.6) deutet auf Dispersion hin, wobei aber festgestellt werden muss, dass dessen Aussagekraft sich auf sehr grosse Wellenlängen beschränkt.

Man kann experimentell leicht veranschaulichen, dass alle oben angegebenen Wellengeschwindigkeiten bei eindlichen Wellenlängen, mit Ausnahme der Torsionswellen in Kreiszyindern, ihre Gültigkeit mehr oder weniger verlieren und Korrekturen bedürfen, die im Zusammenhang mit den jeweils getroffenen, beeinträchtigenden Annahmen und Vereinfachungen stehen müssen. Die Frage ist nämlich, was der Verzicht auf eine exakte Gleichung bzw. Lösung zur Folge hat und zwar insbesondere in bezug auf die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit. Anders ausgedrückt: Wie kann man

für die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit Beziehungen herleiten, welche der geometrischen Dispersion bzw. den Kopplungen bei Stabschwingungen mit einer wohldefinierten Genauigkeit Rechnung tragen?

KURZE UEBERSICHT DER BISHERIGEN FORSCHUNGSBEITRAEGE IM HINBLICK
AUF DAS DISPERSIONSPHAENOMEN

Die Untersuchungen in diesem Gebiet gehen etwa ein Jahrhundert bis zu den Forschungsarbeiten von L. Pochhammer [3] und C. Chree [4] zurück, welche unabhängig voneinander, die Dispersion bei sinusoidalen Längs-, Torsions- und Biegeschwingungen eines unendlich langen Kreiszyinders darstellten, indem sie mit Entwicklungen von Besselschen Funktionen Näherungslösungen der dreidimensionalen Bewegungsdifferentialgleichungen konstruierten. Ihre Resultate, die jeweils den ersten Korrekturterm, d.h. bis und mit zweiter Ordnung, enthalten, fassen wir wie folgt zusammen:

Längsschwingungen:

$$c_L = c_0 \left[1 - \frac{\nu^2}{4} \left(2\pi \frac{R}{\lambda} \right)^2 \right] \approx c_0 \left(1 + 2\pi^2 \nu^2 \frac{R^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} . \quad (2.1)$$

Torsionsschwingungen (keine Dispersion):

$$c_T = c_2 = \sqrt{G/\rho} . \quad (2.2)$$

Biegeschwingungen:

$$c_B = c_1 \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{7}{2} + \frac{E}{G} - \frac{G}{E} \right) \frac{R^2}{\lambda^2} \right] \approx \pi \frac{R}{\lambda} c_0 \left[1 + \frac{2}{3} \pi^2 \left(\frac{7}{2} + \frac{E}{G} - \frac{G}{E} \right) \frac{R^2}{\lambda^2} \right]^{-1/2} . \quad (2.3)$$

(s. Anwendungsbeispiele bzw. Dispersionskurven in den 4., 5. und 6. Kapiteln)

Bereits im Falle eines elliptischen oder rechteckigen Querschnitts wird es wesentlich komplizierter, das Schwingungs- bzw. Wellenausbreitungsproblem mit demselben Vorgehen zu behandeln. Auf Grund dessen konzentrierte man sich nach Pochhammer/Chree auf für gewisse Querschnitte spezialisierte, auf Kosten der Genauigkeit einfachere Näherungslösungen, die wir in zwei Gruppen einteilen wollen:

Der einen Gruppe gehören Lösungsvorschläge an, die entweder direkt, d.h. intuitiv, oder durch Anwendung einer Variationsmethode, die Bewegungsdifferentialgleichungen der oben angegebenen elementaren Theorie modifizieren [5 bis 15].

Der zweiten Gruppe hingegen ordnen wir solche Näherungsversuche zu, die zwar von den exakten dreidimensionalen Bewegungsdifferentialgleichungen ausgehen, aber die Randbedingungen nur bis zu einem gewissen Grad, z.B. in diskreten Randpunkten erfüllen (Collocationsmethode) [21, 22] oder nur für eine Anzahl Schwingungsmoden bzw. deren Kombinationen gültig sind [19, 20]. Ferner könnte man noch eine Reihe Arbeiten zu dieser Gruppe zählen, welche kreisnahe Querschnittsformen mit speziell vereinfachten Fourierreihenansätzen darzustellen versuchen [16, 17, 18].

Im folgenden möchten wir kurz auf die drei representativen Beiträge der ersten Gruppe näher eingehen:

Die Methode von Rayleigh

- a) für Längsschwingungen; besteht aus der Aufstellung des wohlbekannten Rayleighschen Quotienten unter Berücksichtigung der Querkontraktion, welche Dispersion verursacht.
- b) für Biegeschwingungen; geht vom Hamiltonschen Prinzip aus und berücksichtigt bei der Bewegung neben den Verschiebungen der Mittellinie auch die Rotationen der Querschnitte um eine zur Biegungsebene senkrechte Achse, welche den entsprechenden Korrekturterm für die Wellengeschwindigkeit liefern.

Die Methode von Love

basiert auf dem Hamiltonschen Prinzip.

- a) Für Längsschwingungen; ergibt bzw. bestätigt sie das Resultat von Rayleigh, unter Berücksichtigung der Querkontraktion.
- b) Für Torsionsschwingungen; trägt sie der Querschnittsverwölbung Rechnung, bzw. erfasst deren Einfluss auf die Dispersion.
- c) Für Biegeschwingungen; berücksichtigt sie zusätzlich zu den Rotati-

nen der Querschnitte um zur Biegungsebene senkrechte Achsen auch die Distorsionen in der Querschnittsebene selbst.

Die Methode von Timoshenko

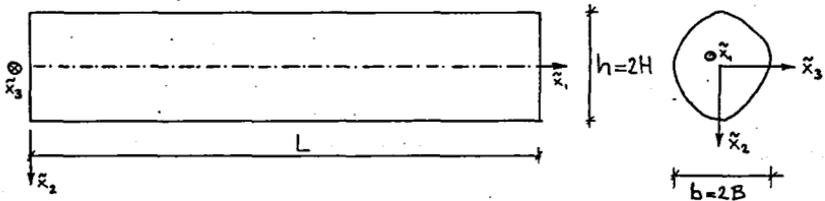
beschränkt sich auf Biegeschwingungen. Im Gegensatz zu den oben erwähnten Autoren, welche Energiemethoden verwendeten, beobachtet man bei seiner Herleitung eine eher intuitiv gefärbte Ueberlegungsweise. Er führt in die Bewegungsdifferentialgleichung die sogenannte Schubkorrektur neben dem aus den Querschnittsrotationen herrührenden Term ein, verfehlt jedoch die Dispersion vollständig in den Griff zu bekommen, da die im gleichen Masse wichtigen Einflüsse der Distorsion sowie der ebenen Spannungen senkrecht zur Stabachse, unberücksichtigt bleiben.

Diese Untersuchung der Entwicklung von Forschungstätigkeit in diesem Gebiet gestattet uns zu folgern, dass niemand bis jetzt auf die einfache Idee gekommen ist, die Methode der asymptotischen Entwicklungen auf die aus der linearen Elastizitätstheorie erhaltenen dreidimensionalen Grundgleichungen anzuwenden.

Nach Skalierung von Spannungen und Verschiebungen bezüglich des kleinen geometrischen Parameters ϵ , der ein Mass für die Schlankheit des Stabes darstellt, weisen diese Grundgleichungen in einzelnen Approximationsschritten wesentlich einfachere Strukturen auf. Die Benutzung der Technik von Lindstedt-Poincaré in diesem Zusammenhang, ermöglicht uns mit vernünftigem Aufwand, die Kopplungseffekte bzw. die Dispersion bei Stabschwingungen in asymptotischem Sinne exakt zu ermitteln.

3. ALLGEMEINES

In diesem Kapitel werden zuerst die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie für Schwingungen isotroper, homogener Körper, deren Materialeigenschaften durch den Elastizitätsmodul E , die Poissonsche Zahl ν und die spezifische Dichte ρ gegeben sind, aufgeführt. Anschliessend werden wir diese für einen allgemeinen zylindrischen Stab mit beliebigem Querschnitt (Fig. 1) in dimensionsloser Form darstellen. Wir benutzen ein kartesisches Koordinatensystem \tilde{x}_i ($i = 1, 2, 3$) und wählen die Stabachse als \tilde{x}_1 -Achse, welche die Schwerpunkte der Querschnitte miteinander verbindet.



Figur 1

Ein (\sim) über einer Grösse bedeutet, dass diese dimensionbehaftet ist.

Wir setzen voraus, dass bezüglich der Stababmessungen folgende Annahmen zutreffen: $b/h \leq 1$ und $h/L = \epsilon \ll 1$, wobei h die maximale Dicke in \tilde{x}_2 -Richtung und b die maximale Breite in \tilde{x}_3 -Richtung sind.

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir uns mit den "äusseren" Lösungen, die sich auf den regulären Bereich des Stabes, nämlich das Stabinnere beziehen, befassen. Dies bedeutet, dass wir die Randbedingungen an den Stabendquerschnitten, für die je eine Grenzschichtlösung ("innere" Lösung), sowie Matching erforderlich wäre, nur global, d.h. im Mittel zu erfüllen imstande sind.

Um Singularitäten innerhalb des Gültigkeitsbereichs unserer Lösungen zu

vermeiden, schliessen wir an der Mantelfläche angreifende, zeitabhängige Einzelkräfte, bzw. Stützstellen ausser an den Stabenden aus. Als Belastung lassen wir die auf der Oberfläche S und im Inneren des Stabes wirkenden, stetig verteilten Kräfte $\tilde{s}_i(\tilde{x}_j, \tilde{t})$ und $\tilde{p}_i(\tilde{x}_j, \tilde{t})$ (Kraft pro Flächen- bzw. Volumeneinheit) zu. Die lateinischen Zeiger stehen hier, wie im weiteren für 1, 2, 3. Die Wiederholung eines Zeigers innerhalb eines Terms weist allgemein auf eine Summation hin. Die Spannungen bezeichnen wir mit $\tilde{\sigma}_{ij}$, die Verschiebungen mit \tilde{u}_i . Die lineare Elastizitätstheorie liefert folgende Beziehungen zwischen zwei Grössen:

Die Stoffgleichungen:

$$\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} = \frac{1}{E} [2(1+\nu) \tilde{\sigma}_{ij} - 2\nu \tilde{\sigma}_{kk} \delta_{ij}] \quad (3.1)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{p}_i = \rho \tilde{u}_{i,tt} \quad (3.2)$$

Nun führen wir folgende dimensionslose Grössen ein, wobei griechische Zeiger die Zahlen 2, 3 bedeuten:

Spannungen: $\sigma_{ij} := \tilde{\sigma}_{ij} / \sigma_0$

Verschiebungen: $u_i := \tilde{u}_i E / \sigma_0 H$

Koordinaten: $x_i := \tilde{x}_i / L$; $x_\alpha := \tilde{x}_\alpha / H$

Belastungen: $s_i := \tilde{s}_i / \sigma_0$; $p_i := \tilde{p}_i H / \sigma_0$

Zeit: $t := \tilde{t} / T$

Das oben als Referenzspannung benutzte σ_0 kann, je nach vorliegender Schwingung, z.B. als Maximalwert der relevanten Oberflächenbelastung gewählt werden, die Referenzzeit T z.B. als Schwingungsperiode.

Die Gleichungen (3.1) und (3.2) lassen sich jetzt anhand der oben eingeführten Grössen ebenfalls dimensionslos schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon U_{i,i} &= \sigma_{ii} - \nu \sigma_{\alpha\alpha} \\ \epsilon U_{\alpha,i} + U_{i,\alpha} &= 2(1+\nu) \sigma_{i\alpha} \\ U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha} &= 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta} - 2\nu (\sigma_{ii} + \sigma_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \sigma_{ii,i} + \sigma_{i\alpha,\alpha} + p_i &= \frac{\rho H^2}{ET^2} u_{i,tt} = \lambda \epsilon^\mu u_{i,tt} \\ \epsilon \sigma_{\alpha i,i} + \sigma_{\alpha\beta,\beta} + p_\alpha &= \frac{\rho H^2}{ET^2} u_{\alpha,tt} = \lambda \epsilon^\mu u_{\alpha,tt} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Die Zahlen λ und μ , beide $O_5(1)$ (d.h. von der Grössenordnung 1, s.[1]) sind zur Vereinfachung gebraucht worden. Das vom Schwingungstyp abhängige μ ist für Längs- und Torsionsschwingungen durch 2 und für Biegeschwingungen durch 4 zu ersetzen, wie man aus den Bewegungsdifferentialgleichungen der elementaren Theorie ersehen kann. Der Wert von λ ist hingegen für das weitere Vorgehen unwesentlich und wird deswegen wie 1 behandelt.

Im Hinblick auf die spätere Anwendung der Technik von Lindstedt- Poincaré führen wir hier folgende Zeittransformation ein, mit der wir schwach nichtlinearer Frequenzabhängigkeit Rechnung tragen [23], [24]:

$$\tau = \kappa t, \quad (3.5)$$

wo κ eine von ϵ abhängige Konstante in der Form

$$\kappa = 1 + \kappa_2 \epsilon^2 + \kappa_4 \epsilon^4 + O_5(\epsilon^6) \quad (3.6)$$

darstellt.

Die Übereinstimmung mit der Definition der Referenzspannung σ_0 nehmen wir an, dass die dimensionslosen Belastungsfunktionen $s_i(x_j, t)$ und $p_i(x_j, t)$ von ϵ unabhängig und insbesondere $O_s(1)$ sind. Wir bezeichnen diejenige Schwingung als Hauptschwingung, die am Stab primär erregt wird. Die Größenordnungen gewisser Spannungen lassen sich, je nach Hauptschwingung, anhand relevanter Randbedingungen, Beanspruchungen bzw. Belastungsfunktionen leicht abschätzen. Z.B. kann man bei Längsschwingungen folgern, dass $\sigma_{11} = O_s(1)$ sein muss. Bei Torsionsschwingungen führt eine ähnliche Überlegung zur Feststellung $\sigma_{1\alpha} = O_s(1)$. Bei Biegeschwingungen suggeriert hingegen die Randbedingung $\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = s_\alpha$, dass $\sigma_{\alpha\epsilon} = O_s(1)$ ist. Ist die Größenordnung der massgebenden Spannung dadurch bestimmt, ergeben sich die Größenordnungen aller übrigen Spannungen und Verschiebungen auf eindeutige Weise durch Verträglichkeitsbetrachtungen der Gleichungen (3.3) und (3.4). Diese Skalierungsergebnisse kann man für unsere drei grundsätzlich verschiedenen Hauptschwingungen wie folgt zusammenfassen:

Für Längsschwingungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= O_s(\epsilon^{-1}) ; & u_\alpha &= O_s(1) \\ \sigma_{11} &= O_s(1) ; & \sigma_{1\alpha} &= O_s(\epsilon) ; & \sigma_{\alpha\beta} &= O_s(\epsilon^2) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für Torsionsschwingungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= O_s(1) ; & u_\alpha &= O_s(\epsilon^{-1}) \\ \sigma_{11} &= O_s(\epsilon) ; & \sigma_{1\alpha} &= O_s(1) ; & \sigma_{\alpha\beta} &= O_s(\epsilon) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für Biegeschwingungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= O_s(\epsilon^{-3}) ; & u_\alpha &= O_s(\epsilon^{-4}) \\ \sigma_{11} &= O_s(\epsilon^2) ; & \sigma_{1\alpha} &= O_s(\epsilon^{-1}) ; & \sigma_{\alpha\beta} &= O_s(1) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun in weiteren Kapiteln auf einzelne Hauptschwingungen eingehen und uns dabei auf freie Schwingungen der Stäbe beschränken. Wie man leicht einsehen kann, wäre die Behandlung erzwungener Schwingungen, d.h. des allgemeineren Falls mit den Belastungsfunktionen s_i und p_i , ohne erheblichen Aufwand möglich.

Zunächst werden wir für Spannungen und Verschiebungen Ansätze von asymptotischen Entwicklungen der Form

$$f(\varepsilon, x_i, \tau) = \sum_{m=n}^P \varepsilon^m f^{(m)}(x_i, \tau) + O_5(\varepsilon^{P+1}) \quad (3.10)$$

einführen, wobei n die jeweilige, die Grössenordnung charakterisierende Potenz von ε bedeutet; und diese in die Gleichungen (3.3) und (3.4) einsetzen. Ueberall dort, wo die Zeit expliziert auftritt, werden wir die Transformation (3.5) berücksichtigen und ausschliesslich τ verwenden. Ferner ist ein Punkt über einer Grösse als Ableitung nach τ zu verstehen.

AENGSSCHWINGUNGEN

Die entsprechenden asymptotischen Entwicklungen für Hauptschwingungen dieser Art können wie unten geschrieben werden:

$$u_i = \frac{1}{\varepsilon} u_i^{(-1)} + u_i^{(0)} + O_5(\varepsilon) \quad (4.1)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + \varepsilon u_\alpha^{(1)} + O_5(\varepsilon^2) \quad (4.2)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{11}^{(1)} + O_5(\varepsilon^2) \quad (4.3)$$

$$\sigma_{1\alpha} = \varepsilon \sigma_{1\alpha}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{1\alpha}^{(2)} + O_5(\varepsilon^3) \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} + \varepsilon^3 \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} + O_5(\varepsilon^4) \quad (4.5)$$

Die Stoffgleichungen (3.3) bleiben unverändert

$$\varepsilon u_{i,1} = \sigma_{11} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon u_{\alpha,1} + u_{1,\alpha} = 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha} \quad (4.7)$$

$$u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} = 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta} - 2\nu(\sigma_{11} + \sigma_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.8)$$

während die Bewegungsdifferentialgleichungen (3.4) mit

$$\kappa^2 = 1 + 2\kappa_2 \varepsilon^2 + O_5(\varepsilon^4) \quad (4.9)$$

und unter Vernachlässigung von p_i folgende Form annehmen:

$$\varepsilon \sigma_{11,1} + \sigma_{1\alpha,\alpha} = \varepsilon^2 \kappa^2 \ddot{u}_i \quad (4.10)$$

$$\varepsilon \sigma_{\alpha i,1} + \sigma_{\alpha\beta,\beta} = \varepsilon^2 \kappa^2 \ddot{u}_\alpha \quad (4.11)$$

Durch Einsetzen der obigen Entwicklungen in die Gleichungen (4.6-8), sowie (4.10 & 11) und Bildung des Grenzwertes für $\varepsilon \rightarrow 0$, erhalten wir schrittweise Näherungen der exakten Gleichungen:

$$u_{i,\alpha}^{(-1)} = 0 \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= u_{1,1}^{(-1)} \\ u_{\alpha,\beta}^{(0)} + u_{\beta,\alpha}^{(0)} &= -2\nu \sigma_{11}^{(0)} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha,1}^{(0)} + u_{1,\alpha}^{(1)} &= 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha}^{(1)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(1)} &= \ddot{u}_1^{(-1)} - \sigma_{11,1}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} &= u_{1,1}^{(1)} + \nu \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} \\ u_{\alpha,\beta}^{(2)} + u_{\beta,\alpha}^{(2)} &= 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - 2\nu (\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}) \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} &= \ddot{u}_\alpha^{(0)} - \sigma_{\alpha 1,1}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha,1}^{(2)} + u_{1,\alpha}^{(3)} &= 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha}^{(3)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(3)} &= \ddot{u}_1^{(1)} + 2k_2 \ddot{u}_1^{(-1)} - \sigma_{11,1}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

etc.

Die Näherungsgleichungen, die zu trivialen (Null-) Lösungen führen, wurden hier unterdrückt. Da wir uns mit den freien Schwingungen befassen, sind auf der Mantelfläche die homogenen Randbedingungen

$$\bar{\sigma}_{1\alpha} n_\alpha = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha = 0; \quad \sigma_{1\alpha}^{(3)} n_\alpha = 0 \quad \text{etc.} \quad (4.17)$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} n_\beta = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta = 0; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(4)} n_\beta = 0 \quad \text{etc.} \quad (4.18)$$

zu erfüllen.

Nun wollen wir auf die Lösungen der einzelnen Approximationsschritte eingehen. Aus den Gleichungen (4.12) und (4.13) folgen:

$$u_1^{(-1)} = u_1^{(-1)}(x_i, \tau) = U(x_i, \tau) \quad (4.19)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{(0)}(x_i, \tau) = U_{,1} \quad (4.20)$$

$$u_\alpha^{(0)} = \bar{u}_\alpha^{(0)}(x_i, \tau) - \theta^{(0)}(x_i, \tau) e_{\alpha\beta} x_\beta - \nu U_{,1} x_\alpha \quad (4.21)$$

Wir setzen $e_{\alpha\beta}$ den Permutationstensor

$$e_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = \beta \\ +1 & \text{für } \alpha = 2, \beta = 3 \\ -1 & \text{für } \alpha = 3, \beta = 2 \end{cases} \quad (4.22)$$

Wir berücksichtigen zunächst die Randbedingung (4.17), die für diesen Näherungsschritt

$$\sigma_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha = 0 \quad (4.23)$$

bedeutet und stellen diese in der Integralform

$$\int_S \sigma_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha ds = 0 \quad (4.24)$$

dar. Die Anwendung des Gausschen Satzes ergibt den Ausdruck

$$\int_F \sigma_{1\alpha, \alpha}^{(1)} df = 0, \quad (4.25)$$

für den gemäss der Gleichung (4.14b)

$$\int_F (\ddot{u}_1^{(-1)} - u_{1,11}^{(-1)}) df = \int_F (\ddot{U} - U_{,11}) df \quad (4.26)$$

geschrieben werden kann. Da der Integrand sich hier als eine von den Querschnittskordinaten unabhängige Grösse erweist, kann man daraus auf

$$\ddot{U} - U_{,11} = 0 \quad (4.27)$$

bzw.

$$\sigma_{1\alpha, \alpha}^{(1)} = 0 \quad (4.28)$$

schliessen. (4.27) ist die eigentliche Bewegungsdifferentialgleichung der Längsschwingungen.

Nun befassen wir uns näher mit $\sigma_{1\alpha}^{(1)}$ und sehen dafür durch Einführung einer Spannungsfunktion ϕ den folgenden Ansatz vor:

$$\sigma_{1\alpha}^{(1)} = \frac{\Theta_{,1}}{2(1+\nu)} e_{\alpha\beta} \phi_{, \beta} \quad (4.29)$$

welcher (4.28) erfüllt. Aus (4.14a) erhalten wir durch die Operation

$$e_{\alpha\beta} (u_{\alpha,1}^{(0)} + u_{1,\alpha}^{(1)})_{, \beta} = 2(1+\nu) e_{\alpha\beta} \sigma_{1\alpha, \beta}^{(1)} \quad (4.30)$$

und Berücksichtigung von (4.21) und (4.29) die Poissonsche Differentialgleichung

$$\phi_{, \beta\beta} = -2 \quad (4.31)$$

deren Lösung gemäss (4.23) und

$$n_{\alpha} = e_{\alpha\beta} \frac{dx_{\beta}}{ds} \quad (4.32)$$

am Rande des Querschnitts

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi = \text{konst.} \quad (4.33)$$

erfüllen muss. Ebenfalls aus (4.14a) können wir $u_i^{(1)}$ anhand (4.21) als

$$u_i^{(1)} = \bar{u}_i^{(1)}(x_i, \tau) - x_{\gamma} \bar{u}_{\delta,1}^{(0)} + \frac{\gamma}{2} x_{\gamma} x_{\delta} u_{,11} + 2(1+\nu) \int \sigma_{1\gamma}^{(1)} dx_{\gamma} \quad (4.34)$$

ausdrücken. Falls die Gleichung (4.31) zusammen mit der Randbedingung (4.33) eine Lösung besitzt, sollte diese unabhängig von U sein, bzw. nur im Zusammenhang mit θ stehen. Da wir hier davon ausgehen, dass Torsionsschwingungen nicht primär angeregt werden, schliessen wir darauf, dass ϕ resp. $\sigma_{1\alpha}^{(1)}$ identisch null angenommen werden dürfen. Diese Folgerung kann man auch durch folgende Überlegungen bestätigen:

Gemäss (4.18) gelten für $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$ die Randbedingungen

$$\bar{U}_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta = 0 \quad (4.35)$$

die in Form von

$$e_{\alpha\gamma} x_\gamma \bar{G}_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta = 0 \quad (4.36)$$

erweitert werden können. Aus der entsprechenden Integraldarstellung

$$\int_S e_{\alpha\gamma} x_\gamma \bar{G}_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta ds = 0 \quad (4.37)$$

und der Anwendung des Gaussschen Satzes folgt

$$\int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma \bar{G}_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} df = 0 \quad (4.38)$$

bzw. (4.15c) benutzend:

$$\int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma (\ddot{u}_\alpha^{(0)} - \sigma_{i\alpha,1}^{(1)}) df = 0. \quad (4.39)$$

Die letzte Gleichung führt unter Berücksichtigung von (4.21) und (4.29) sowie partieller Integration zu

$$2(1+\nu)\bar{\Theta} \int_F x_\gamma x_\gamma df - 2\Theta_{,11} \int_F \phi df = 0, \quad (4.40)$$

welche die Bewegungsdifferentialgleichung einer torsionsartigen Hauptschwingung wiedergibt. Also ist der Ausschluss von θ resp. $\sigma_{1\alpha}^{(1)}$ in diesem Näherungsschritt berechtigt und die Verschiebungen sind anstatt (4.21) und (4.34) wie folgt auszudrücken:

$$U_\alpha^{(0)} = \bar{u}_\alpha^{(0)} - \nu U_{,1} x_\alpha \quad (4.41)$$

$$U_i^{(1)} = \bar{u}_i^{(1)} - x_\gamma \bar{u}_{\gamma,1}^{(0)} + \frac{\nu}{2} x_\gamma x_\gamma U_{,11} \quad (4.42)$$

Wendet man den Satz von Gauss diesmal auf die Randbedingungen (4.35)

bzw. auf

$$\int_S \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta ds = 0 \quad (4.43)$$

an, so besagt die Gleichung (4.15c), die nun als

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} = \ddot{u}_\alpha^{(0)} \quad (4.44)$$

figuriert, dass der Term $\ddot{u}_\alpha^{(0)}$ ebenfalls nicht erlaubt werden kann, da

$$\int_F \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} df = 0 \quad (4.45)$$

zu erfüllen ist.

Als nächsten Schritt ziehen wir die Spannung $\sigma_{11}^{(2)}$ in Betracht, die gemäss (4.15a) und (4.42) als

$$\sigma_{11}^{(2)} = \bar{u}_{1,1}^{(1)} + \frac{\nu}{2} x_\gamma x_\gamma U_{,111} + \nu \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} \quad (4.46)$$

geschrieben werden kann. Diesen Ausdruck setzen wir in (4.16b) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(3)} &= \ddot{u}_1^{(1)} - \bar{u}_{1,11}^{(1)} + \frac{\nu}{2} x_\gamma x_\gamma \ddot{U}_{,11} - \frac{\nu}{2} x_\gamma x_\gamma U_{,1111} + 2\kappa_2 \ddot{U} - \sigma_{\gamma\gamma,1}^{(2)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(3)} &= \ddot{u}_1^{(1)} - \bar{u}_{1,11}^{(1)} + 2\kappa_2 \ddot{U} - \sigma_{\gamma\gamma,1}^{(2)} \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (4.47)$$

Gleichung (4.47) zusammen mit dem Gausschen Satz angewendet auf die Randbedingung

$$\sigma_{1\alpha}^{(3)} n_\alpha = 0 \quad (4.48)$$

bzw. deren Integralform

$$\int_S \sigma_{1\alpha}^{(3)} n_\alpha ds = 0 \quad (4.49)$$

gestattet uns

$$\int_F \sigma_{i\alpha,\alpha}^{(3)} df = \int_F (\ddot{u}_i^{(1)} - \ddot{u}_{i,||}^{(1)} + 2\kappa_2 \ddot{U} - \gamma \sigma_{\delta\delta,1}^{(2)}) df = 0 \quad (4.50)$$

oder

$$\ddot{u}_i^{(1)} - \ddot{u}_{i,||}^{(1)} = 2\kappa_2 \ddot{U} - \frac{\gamma}{F} \int_F \sigma_{\delta\delta,1}^{(2)} df \quad (4.51)$$

zu schreiben. Nun wollen wir uns etwas einfallen lassen, damit uns die Bestimmung des Integralterms auf der rechten Seite von (4.51) gelingt, ohne den Integrand explizit kennen zu müssen: Wir betrachten wieder die Randbedingung (4.35) und schreiben diese durch Einführung eines noch zu bestimmenden Vektors v_α wie folgt erweitert:

$$v_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta = 0 \quad (4.52)$$

und in Integralform

$$\int_S v_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta ds = 0 \quad (4.53)$$

welches nach dem Gauss'schen Satz auch als

$$\int_F (v_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(2)})_{,\beta} df = \int_F v_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} df + \int_F v_\alpha \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} df = 0 \quad (4.54)$$

dargestellt werden kann. Es ist leicht zu erkennen, dass der Integralausdruck

$$\int_F v_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} df \quad (4.55)$$

mit dem gesuchten Term

$$\int_F \sigma_{\delta\delta,1}^{(2)} df \quad (4.56)$$

(abgesehen von einer unwesentlichen Ableitung nach x_1) zusammenfallen würde, falls wir anstatt $v_{\alpha\beta}$ einfach $\delta_{\alpha\beta}$ einsetzen könnten.

Diese Feststellung lässt uns auf die Wahl

$$v_{\alpha} = x_{\alpha} \quad (4.57)$$

schliessen, da in diesem Falle

$$v_{\alpha, \beta} = x_{\alpha, \beta} = \delta_{\alpha \beta} \quad (4.58)$$

automatisch erfüllt wird. Damit erhalten wir

$$\int_F \sigma_{\gamma\delta}^{(2)} df = - \int_F x_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta, \beta}^{(2)} df \quad (4.59)$$

bzw. durch die Beziehung (4.44)

$$\int_F \sigma_{\gamma\gamma, 1}^{(2)} df = - \int_F x_{\alpha} \ddot{u}_{\alpha, 1}^{(a)} df = \gamma \ddot{u}_{, 11} \int_F x_{\gamma} x_{\gamma} df \quad (4.60)$$

Das Integral

$$\int_F x_{\gamma} x_{\gamma} df \quad (4.61)$$

auf der rechten Seite bedeutet das polare Trägheitsmoment C_{11} (dimensionslos) des Stabquerschnitts und ermöglicht uns anhand der Definition

$$K_{11} = \sqrt{C_{11}/F} \quad (= \bar{K}_{11}/H) \quad (4.62)$$

des polaren Trägheitsradius, (4.51) in folgender Form auszudrücken:

$$\ddot{u}_1^{(1)} - \ddot{u}_{1, 11}^{(1)} = 2 K_2 \ddot{u} - \gamma^2 K_{11}^2 \ddot{u}_{, 11} \quad (4.63)$$

Die Differentialgleichung (4.63) weist auf eine homogene Lösung hin, die von der Struktur her genau so aussehen sollte, wie die mit der vorangehenden Näherung zusammenhängenden Inhomogenitätsterme. Dies bedeutet, dass in der partikulären Lösung Säkularterme vorkommen müssen. Solche Säkularterme dürfen aber, entsprechend der Idee von Lindstedt-Poincaré, nicht zu-

erhalten werden, da die Periodizität des Schwingungsvorgangs erhalten bleiben muss. Also ist die unbekannte Konstante κ_2 so zu bestimmen, dass die rechte Seite von (4.63) identisch null wird. D.h. wir bekommen

$$\kappa_2 = \frac{\gamma^2}{2} \kappa_{11} \frac{\ddot{U}}{U} \quad (4.64)$$

wobei (4.63) sich auf folgende, mit (4.27) zusammenfallende Form bringen lässt:

$$\ddot{u}_1^{(1)} - \ddot{u}_{1,11}^{(1)} = 0 \quad (4.65)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung können wir auf die von (4.27) zurückführen und für $\ddot{u}_1^{(1)}$ identisch null setzen.

Nun fassen wir die endgültigen Verschiebungen dieses Näherungsschritts zusammen:

$$u_\alpha^{(0)} = -\gamma x_\alpha U_{,1} \quad (4.66)$$

$$u_1^{(1)} = \frac{\gamma}{2} x_\beta x_\beta U_{,11} \quad (4.67)$$

Um die Dispersion zu veranschaulichen, setzen wir für U z.B.

$$U = U_0 \cos \omega \tau \cdot \sin \omega x_1 \quad (4.68)$$

an, welche (4.27) erfüllt. Dieser Ansatz kann auch als

$$U = U_0 \cos \frac{2\pi}{T} \tilde{t} \sin \frac{2\pi}{\Lambda} \tilde{x}_1 \quad (4.69)$$

ausgedrückt werden. Wenn wir nun berücksichtigen, dass hier

$$\tilde{t} = T t = T \frac{c}{k} ; \quad \tilde{x}_1 = L x_1 \quad (4.70)$$

sind und wir für die Wellenlänge durch Einführung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c

$$\Lambda = cT \quad (4.71)$$

schreiben, erhalten wir aus dem Vergleich von (4.68) und (4.69):

$$\omega = \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi \frac{L}{cT} \quad (4.72)$$

bzw.

$$c = \frac{L}{T} \kappa \quad (4.73)$$

In Anlehnung an die Diskussion der Gleichungen (3.4) benutzen wir die Beziehung

$$\frac{\rho L^2}{E T^2} = O_s(1) = \lambda = 1 \quad (4.74)$$

und ersetzen L/T durch

$$c_0 = \sqrt{E/\rho} \quad (4.75)$$

Bezüglich κ berücksichtigen wir, dass

$$\kappa_2 \varepsilon^2 = -\frac{\nu^2}{2} K_{11}^2 \left(\frac{2\pi}{\Lambda} L \right)^2 \frac{H^2}{L^2} = -\frac{\nu^2}{2} \left(2\pi \frac{\bar{K}_{11}}{\Lambda} \right)^2 \quad (4.76)$$

geschrieben werden kann und bekommen schliesslich das für alle Querschnittsformen gültige Ergebnis

$$c = c_0 \left[1 - \frac{\nu^2}{2} \left(2\pi \frac{\bar{K}_{11}}{\Lambda} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.77)$$

oder

$$c = c_0 \left[1 + \nu^2 \left(2\pi \frac{\bar{K}_{11}}{\Lambda} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (4.78)$$

falls man die Entwicklung hier abgebrochen annimmt. Der Leser kann sich leicht vergewissern, dass der allgemeine Fall $\lambda \neq 1$ zum selben Resultat für die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit führen würde.

Zunächst wären die Spannungen $\sigma_{ij}^{(2)}$ und anschliessend die Verschiebungen $u_{\alpha}^{(2)}$ des Problems der ebenen Verzerrungen zu bestimmen. Dafür stehen uns die Gleichungen (4.15) und die Randbedingungen (4.35) zur Verfügung. Wir machen für die Spannungen $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$ durch Einführung einer biharmonischen Spannungsfunktion Ψ folgende Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{22}^{(2)} &= \Psi_{,33} - \frac{\gamma}{2} U_{,III} \left(x_2^2 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} x_3^2 \right) \\ \sigma_{33}^{(2)} &= \Psi_{,22} - \frac{\gamma}{2} U_{,III} \left(\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} x_2^2 + x_3^2 \right) \\ \sigma_{23}^{(2)} &= -\Psi_{,23} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

welche die Gleichungen (4.15c) bzw. (4.44) sowie die durch Elimination von $\sigma_{11}^{(2)}$ und den Verschiebungen $u_{\alpha}^{(2)}$ innerhalb (4.15) entstehende Verträglichkeitsbedingung

$$2(1+\gamma) \sigma_{23,23}^{(2)} = (1+\gamma)(1-\gamma)(\sigma_{22,33}^{(2)} + \sigma_{33,22}^{(2)}) - \gamma(1+\gamma)(\sigma_{22,22}^{(2)} + \sigma_{33,33}^{(2)}) - 2\nu U_{,III} \quad (4.80)$$

erfüllen. (4.80) gibt uns gleichzeitig die Differentialgleichung von Ψ als

$$\Psi_{,\alpha\alpha\beta\beta} = 0 \quad , \quad (4.81)$$

die mit den entsprechenden Randbedingungen (4.35) gelöst werden kann. Hat man die Spannungen $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$ damit bestimmt, so kann man durch (4.15a) $\sigma_{11}^{(2)}$ und durch (4.15b) $u_{\alpha}^{(2)}$ herausfinden.

Als nächsten Schritt behandeln wir nun die Gleichungen (4.16), welche wieder ein Torsionsproblem zu verkörpern scheinen. Wenn man unter Berücksichtigung von (4.47) die Inhomogenität der Gleichung

$$\sigma_{1\alpha,\alpha}^{(3)} = 2\kappa_2 \ddot{U} - \gamma \sigma_{\beta\beta,1}^{(2)} \quad (4.82)$$

betrachtet, ist leicht zu erkennen, dass die Schubspannungen $\sigma_{1\alpha}^{(3)}$ i.a. von null verschieden sind bzw. eine neue Kopplung vorliegt. Um Wiederholungen zu vermeiden, werden wir aber auf deren Ermittlung nicht ein-

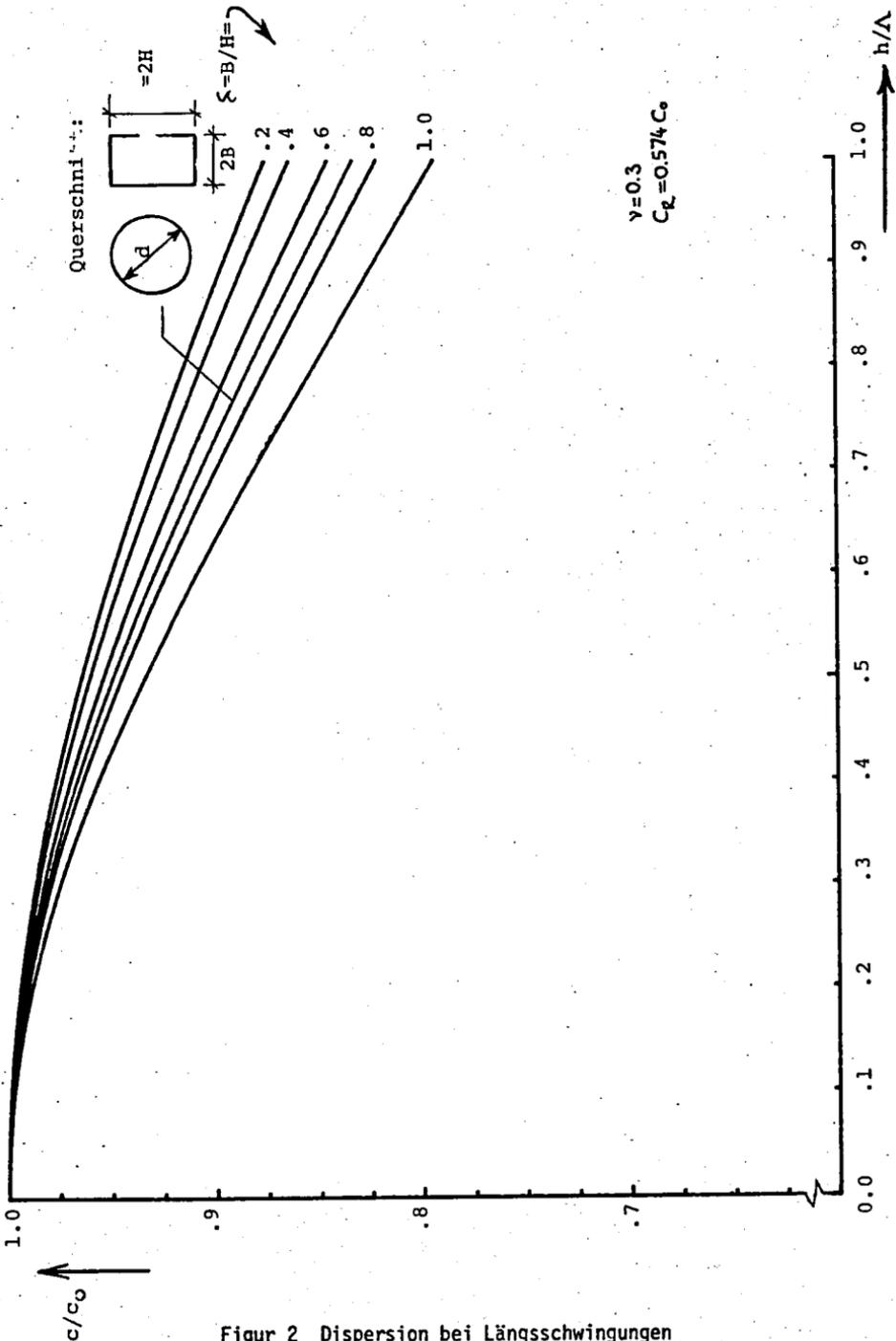
gehen und die Approximationsschritte hier abbrechen. Fassen wir unsere Feststellungen zusammen:

Bei Längsschwingungen eines Stabes entstehen als Effekt 2. Ordnung ebene Spannungen $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$, begleitet von der Längsspannungskorrektur $\alpha_{11}^{(2)}$, und als Effekt 3. Ordnung Schubspannungen $\sigma_{1\alpha}^{(3)}$. Selbstverständlich ist das Auftreten dieser Spannungen mit dazugehörigen Verschiebungsgrößen höherer Ordnung verknüpft.

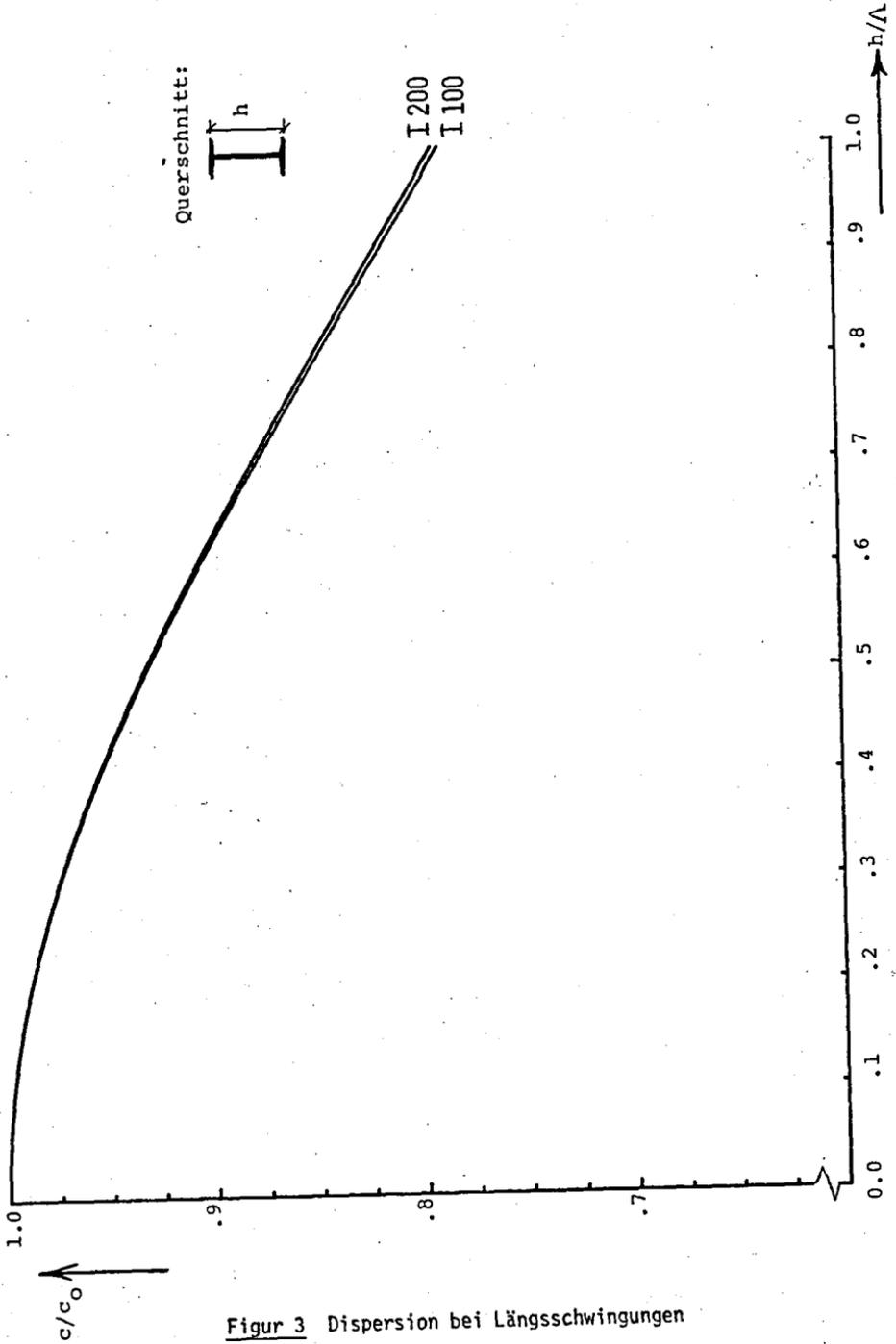
Die geometrische Dispersion lässt sich im asymptotischen Sinne genau darstellen.

Die unserem Vorgehen zugrundeliegenden asymptotischen Entwicklungen ermöglichen uns, diese Näherungsschritte beliebig fortzusetzen. Es sei hier jedoch auf den rasch anwachsenden Rechenaufwand und auf den Gültigkeitsbereich unserer Resultate hingewiesen.

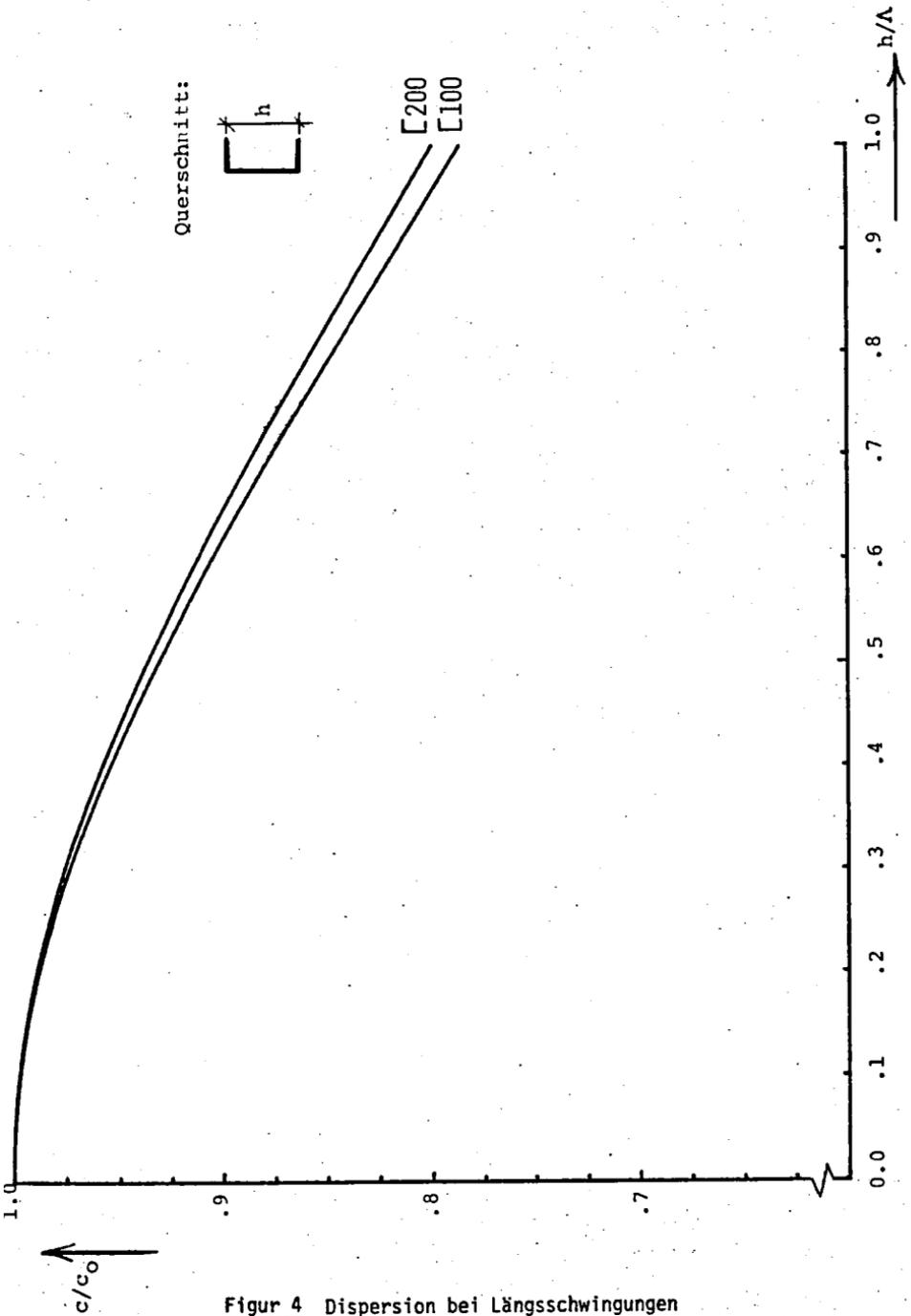
Im folgenden findet der Leser einige Dispersionsdiagramme für Längsschwingungen von Stäben verschiedener Querschnittsformen.



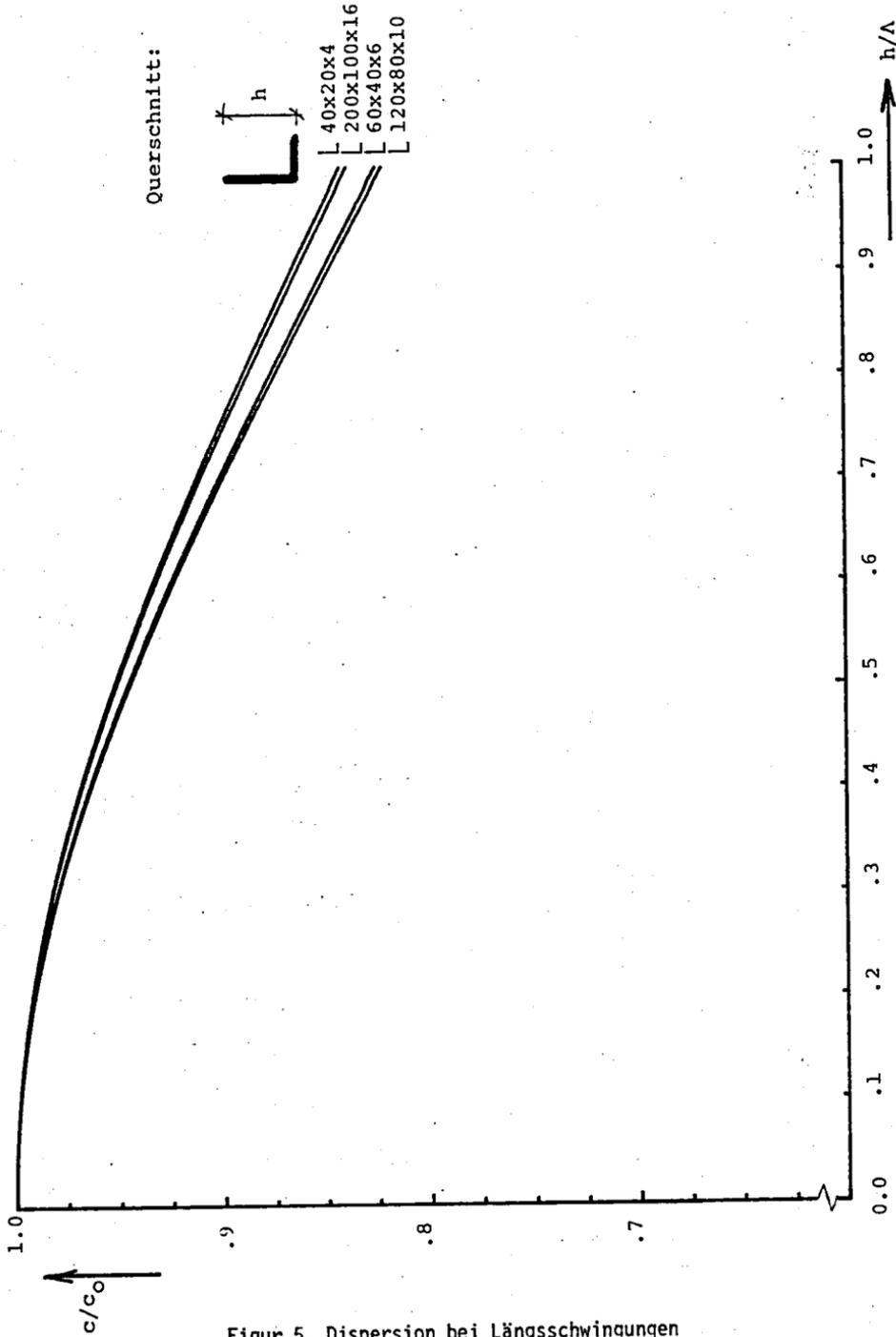
Figur 2 Dispersion bei Längsschwingungen



Figur 3 Dispersion bei Längsschwingungen



Figur 4 Dispersion bei Längsschwingungen



Figur 5 Dispersion bei Längsschwingungen

7. TORSIONSSCHWINGUNGEN

Für die asymptotische Analyse dieser Hauptschwingungen von zylindrischen Stäben führen wir auf Grund der im 3. Kapitel aufgeführten Skalierung folgende Entwicklungen für die dimensionslosen Verschiebungs- und Spannungsgrößen ein:

$$u_1 = u_1^{(0)} + \varepsilon u_1^{(1)} + O_3(\varepsilon^2) \quad (5.1)$$

$$u_{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon} u_{\alpha}^{(-1)} + u_{\alpha}^{(0)} + O_3(\varepsilon) \quad (5.2)$$

$$\sigma_{11} = \varepsilon \sigma_{11}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{11}^{(2)} + O_3(\varepsilon^3) \quad (5.3)$$

$$\sigma_{1\alpha} = \sigma_{1\alpha}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{1\alpha}^{(1)} + O_3(\varepsilon^2) \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} + O_3(\varepsilon^3) \quad (5.5)$$

Das Stoffgesetz (3.3) in Form von

$$\varepsilon u_{1,1} = \sigma_{11} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon u_{\alpha,1} + u_{1,\alpha} = 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha} \quad (5.7)$$

$$u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} = 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta} - 2\nu(\sigma_{11} + \sigma_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta} \quad (5.8)$$

bleibt weiterhin gültig. Die Bewegungsdifferentialgleichungen (3.4) schreiben sich, wie bei den Längsschwingungen, als

$$\varepsilon \sigma_{11,1} + \sigma_{1\alpha,\alpha} = \varepsilon^2 \kappa^2 \bar{u}_1 \quad (5.9)$$

$$\varepsilon \sigma_{\alpha 1,1} + \sigma_{\alpha\beta,\beta} = \varepsilon^2 \kappa^2 \bar{u}_{\alpha} \quad (5.10)$$

Setzt man die Entwicklungen (5.1-5) in die Gleichungen (5.6-10) ein und bildet den Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$, so ergeben sich in den einzelnen Näherungsschritten folgende Sätze von Gleichungen:

$$u_{\alpha,\beta}^{(-1)} + u_{\beta,\alpha}^{(-1)} = 0 \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{1,\alpha}^{(0)} + u_{\alpha,1}^{(-1)} &= 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha}^{(0)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^{(1)} &= u_{1,1}^{(0)} + \nu \sigma_{\gamma\delta}^{(1)} \\ u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)} &= 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - 2\nu (\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{\gamma\delta}^{(1)}) \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} &= \ddot{u}_{\alpha}^{(-1)} - \sigma_{1\alpha,1}^{(0)} \\ u_{1,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,1}^{(1)} &= 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha}^{(2)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(2)} &= \ddot{u}_{1,\alpha}^{(0)} - \sigma_{11,1}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^{(3)} &= u_{1,1}^{(2)} + \nu \sigma_{\gamma\delta}^{(3)} \\ u_{\alpha,\beta}^{(3)} + u_{\beta,\alpha}^{(3)} &= 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} - 2\nu (\sigma_{11}^{(3)} + \sigma_{\gamma\delta}^{(3)}) \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(3)} &= \ddot{u}_{\alpha}^{(1)} + 2k_2 \ddot{u}_{\alpha}^{(-1)} - \sigma_{1\alpha,1}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

etc.

Da wir uns für "äussere" Lösungen interessieren, sind lediglich die Randbedingungen für die Mantelfläche von Bedeutung, welche für den Fall von freien Schwingungen in homogener Form

$$\sigma_{1\alpha} n_{\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{1\alpha}^{(0)} n_{\alpha} = 0, \quad \sigma_{1\alpha}^{(2)} n_{\alpha} = 0 \quad \text{etc.} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_{\beta} = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} n_{\beta} = 0 \quad \text{etc.} \quad (5.17)$$

formuliert werden können.

Zunächst befassen wir uns mit den Lösungen der einzelnen Gleichungssätze (5.11), (5.12), (5.13) etc. Die Gleichungen (5.11) liefern die primären Verschiebungen $u_{\alpha}^{(-1)}$ in Form von

$$u_{\alpha}^{(-1)} = -\theta e_{\alpha\beta} x_{\beta}, \quad (5.18)$$

wobei θ den nur von x_1 und τ abhängigen Torsionswinkel des Querschnitts und $e_{\alpha\beta}$ den Permutationstensor (4.22) bedeuten. Um die Lösung der Gleichungen (5.12) zu bestimmen, machen wir für die Spannungen $\sigma_{1\alpha}^{(0)}$ folgenden Ansatz:

$$u_{1\alpha}^{(0)} = \frac{\theta_{,1}}{2(1+\nu)} e_{\alpha\beta} \phi_{, \beta} , \quad (5.19)$$

womit ϕ als eine Spannungsfunktion eingeführt und dabei (5.12b) erfüllt wird. Aus (5.12a) erhalten wir nach Elimination von $u_1^{(0)}$ gemäss

$$e_{\alpha\beta} (u_{1,\alpha}^{(0)} + u_{\alpha,1}^{(0)})_{, \beta} = -2\theta_{,1} = \theta_{,1} e_{\alpha\beta} e_{\alpha\gamma} \phi_{, \beta\gamma} \quad (5.20)$$

die Poissonsche Differentialgleichung

$$\phi_{, \beta\beta} = -2 , \quad (5.21)$$

deren Lösung am Rande des Querschnitts, laut (5.16)

$$\sigma_{1\alpha}^{(0)} n_{\alpha} = 0 , \quad (5.22)$$

oder nach Anwendung der für Normalenkoordinaten gültigen Beziehung

$$n_{\alpha} = e_{\alpha\beta} \frac{dx_{\beta}}{ds} , \quad (5.23)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi = \text{konst.} \quad (5.24)$$

befriedigen muss. Vorausgesetzt, dass dieses ϕ , wenn nicht in geschlossener Form, so doch mittels Computermethoden näherungsweise für jede beliebige Querschnittsform ermittelt werden kann, bestimmt sich gleichzeitig auch die Verwölbung $u_1^{(0)}$, anhand (5.12a).

Wir wollen nun die eigentliche Bewegungsdifferentialgleichung der Torsionsschwingungen herleiten. Dafür benutzen wir die Randbedingungen (5.17), geschrieben für $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ in Form von

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_{\beta} = 0 . \quad (5.25)$$

Wenn man $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_{\beta}$ als einen (Null-)Vektor von einem zweidimensionalen Vektorfeld auffasst, ist leicht zu verstehen, dass sein Skalarprodukt mit einem anderen Vektor mit zwei Komponenten, wie

$$V_{\alpha} = e_{\alpha\gamma} x_{\gamma} \quad , \quad (5.26)$$

ebenfalls null betragen muss. Der Satz von Gauss ermöglicht uns die Integraldarstellung der erweiterten Randbedingung

$$e_{\alpha\gamma} x_{\gamma} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_{\beta} = 0 \quad , \quad (5.27)$$

d.h.

$$\int_S e_{\alpha\gamma} x_{\gamma} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_{\beta} ds = 0 \quad , \quad (5.28)$$

in ein Flächenintegral umzuwandeln:

$$\int_F e_{\alpha\gamma} x_{\gamma} \sigma_{\alpha\beta, \beta}^{(1)} df = 0 \quad . \quad (5.29)$$

Setzen wir (5.13c) in (5.29) ein und berücksichtigen die Randbedingung (5.24) bei deren partiellen Integration, so erhalten wir

$$2(1+\nu) \ddot{\Theta} \int_F x_{\gamma} x_{\gamma} df - 2 \Theta_{,11} \int_F \phi df = 0 \quad . \quad (5.30)$$

Die Definition des polaren Trägheitsmoments des Querschnitts als

$$C_{11} = \int_F x_{\gamma} x_{\gamma} df \quad (5.31)$$

und der statischen Torsionssteifigkeit desselben als

$$C = \frac{2}{2(1+\nu)} \int_F \phi df \quad (5.32)$$

führen dann zur gesuchten Differentialgleichung für Θ :

$$C_{11} \ddot{\Theta} - C \Theta_{,11} = 0 \quad . \quad (5.33)$$

Nun befassen wir uns mit der Lösung der Gleichungen (5.13) und gehen

von u_α , dass $\sigma_{1\alpha}^{(0)}$ bzw. $u_1^{(0)}$ bereits bestimmte Funktionen sind. Durch Einführung einer Spannungsfunktion Ψ machen wir folgende Ansätze für $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)} &= \Psi_{,33} - \ddot{\Theta} x_2 x_3 - \int \sigma_{12,1}^{(0)} dx_2 \\ \sigma_{33}^{(1)} &= \Psi_{,22} + \ddot{\Theta} x_2 x_3 - \int \sigma_{13,1}^{(0)} dx_3 \\ \sigma_{23}^{(1)} &= -\Psi_{,23} \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

indem wir (5.13c) erfüllen, und wir erhalten aus der Verträglichkeitsbedingung sämtlicher Gleichungen (5.13), d.h. aus der Beziehung

$$2(1+\nu)\sigma_{23,23}^{(1)} = (1-\nu^2)(\sigma_{22,33}^{(1)} + \sigma_{33,22}^{(1)}) - \nu(1+\nu)(\sigma_{22,22}^{(1)} + \sigma_{33,33}^{(1)}), \quad (5.35)$$

die biharmonische Differentialgleichung

$$\Psi_{,\alpha\alpha\beta\beta} = 0. \quad (5.36)$$

Ψ ist so zu bestimmen, dass (5.36) und die Randbedingungen

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_\beta = 0, \quad (5.37)$$

welche uns die am Querschnittsrand vorzuschreibenden Werte bzw. Funktionen für Ψ und $d\Psi/dn$ liefern, erfüllt werden.

Für die Lösung bei beliebigen Querschnittsformen eignen sich z.B. für Platten übliche Computerprogramme (PLATTE, FLASH, NASTRAN, etc.)

Sehen wir die biharmonische Spannungsfunktion Ψ resp. die Spannungen $\sigma_{ij}^{(1)}$ als gegeben an, so können wir durch die Beziehungen

$$u_{2,2}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} - \nu(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{33}^{(1)}) = \Theta_{,11} F_2(x_\alpha) \quad (5.38)$$

$$u_{3,3}^{(1)} = \sigma_{33}^{(1)} - \nu(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}) = \Theta_{,11} F_3(x_\alpha) \quad (5.39)$$

$$u_{2,3}^{(1)} + u_{3,2}^{(1)} = 2(1+\nu)\sigma_{23}^{(1)} = -2(1+\nu)\Psi_{,23} \quad (5.40)$$

$u_\alpha^{(1)}$ wie folgt bestimmen:

$$\ddot{u}_2^{(1)} = \Theta_{,11} \int F_2 dx_2 = \bar{u}_2^{(1)}(x_1, \tau) - \bar{\Theta} x_3 + \Theta_{,11} \hat{u}_2^{(1)}(x_\alpha) \quad (5.41)$$

$$\ddot{u}_3^{(1)} = \Theta_{,11} \int F_3 dx_3 = \bar{u}_3^{(1)}(x_1, \tau) + \bar{\Theta} x_2 + \Theta_{,11} \hat{u}_3^{(1)}(x_\alpha) \quad (5.42)$$

In einem nächsten Approximationsschritt betrachten wir den Gleichungssatz (5.14). Wir bezeichnen den Inhomogenitätsterm von (5.14b)

$$\ddot{u}_i^{(2)} - \sigma_{i,1}^{(1)} = 2\Theta_{,111} g(x_\alpha) \quad (5.43)$$

und führen ϕ und Ω , zwei verschiedene Spannungsfunktionen ein, von denen nur die erste im Zusammenhang mit $\bar{\Theta}$ stehen soll. Schreibt man nun für die Schubspannungen 2. Ordnung die Ansätze

$$\sigma_{i\alpha}^{(2)} = \frac{\bar{\Theta}_{,1}}{2(1+\nu)} e_{\alpha\beta} \phi_{,\beta} + \Omega_{, \alpha} + \Theta_{,111} G_\alpha \quad (G_\alpha = \int g dx_\alpha) \quad (5.44)$$

(Vgl. (5.19))

vor, so erhält man aus (5.14a) durch Bildung von

$$e_{\alpha\beta} (u_{i,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,i}^{(1)})_{,\beta} = 2(1+\nu) e_{\alpha\beta} \sigma_{i\alpha,\beta}^{(2)} \quad (5.45)$$

die ϕ allein betreffende Poissonsche Differentialgleichung

$$\phi_{,\beta\beta} = -2 \quad (5.46)$$

und zusätzlich die Beziehung

$$e_{\alpha\beta} \hat{u}_{\alpha,\beta}^{(1)} = 2(1+\nu) e_{\alpha\beta} G_{\alpha,\beta} \quad (5.47)$$

Die Gleichung (5.14b) liefert uns eine andere Laplacesche Differentialgleichung, nämlich

$$\Omega_{,\beta\beta} = 0 \quad (5.48)$$

in der Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingung

$$G_{\alpha\alpha}^{(2)} n_{\alpha} = 0 \quad (5.49)$$

als

$$\left[\frac{\bar{\Theta}}{2(1+\nu)} e_{\alpha\beta} \phi_{,\beta} + \Omega_{,\alpha} + \Theta_{,III} G_{\alpha} \right] \cdot n_{\alpha} = 0 \quad (5.50)$$

ziehen wir die Beziehungen

$$\frac{d\Omega}{dn} = \Omega_{,\alpha} n_{\alpha} \quad (5.51)$$

und

$$n_{\alpha} = e_{\alpha\gamma} \frac{dx_{\gamma}}{ds} \quad (5.52)$$

heran und bekommen dadurch

$$\frac{d\Omega}{dn} + \frac{\bar{\Theta}}{2(1+\nu)} \frac{d\phi}{ds} + \Theta_{,III} G_{\alpha} n_{\alpha} = 0 \quad (5.53)$$

oder gemäss unserer Voraussetzung separiert,

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi = \text{konst.} ; \quad (5.54)$$

$$\frac{d\Omega}{dn} = -\Theta_{,III} G_{\alpha} n_{\alpha} , \quad (5.55)$$

welche, mit (5.46) und (5.48) zusammen betrachtet, auf ein Dirichletsches bzw. ein Neumannsches Problem hinweisen.

Durch Modifizierung der Randbedingungen

$$G_{\alpha\beta}^{(3)} n_{\beta} = 0 \quad (5.56)$$

in Form

$$e_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} n_\beta = 0 \quad (5.57)$$

bzw.

$$\int_S e_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} n_\beta ds = 0 \quad (5.58)$$

oder nach dem Gaussischen Satz

$$\int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta, \beta}^{(3)} df = 0 \quad (5.59)$$

erhält man anhand (5.15c) folgende Integralbeziehung:

$$\int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma \left(\ddot{u}_\alpha^{(1)} - \sigma_{\alpha 1, 1}^{(2)} + 2 k_2 \ddot{u}_\alpha^{(-1)} \right) df = 0 \quad (5.60)$$

Diese ergibt uns unter Berücksichtigung von (5.18), (5.41 & 42), (5.44) sowie (5.31 & 32)

$$C_{11} \ddot{\Theta} - C \bar{\Theta}_{,11} = -2 k_2 C_{11} \ddot{\Theta} + \int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma \left[\ddot{\Theta}_{,11} \hat{u}_\alpha^{(1)} - (\Omega_{,1\alpha} + \Theta_{,111} G_\alpha) \right] df, \quad (5.61)$$

oder mit einer neuen Bezeichnung

$$\Omega = \Theta_{,111} \hat{\Omega}, \quad (5.62)$$

$$C_{11} \ddot{\Theta} - C \bar{\Theta}_{,11} = -2 k_2 C_{11} \ddot{\Theta} + \ddot{\Theta}_{,11} \int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma \left[\hat{u}_\alpha^{(1)} - \frac{C_{11}}{C} (\hat{\Omega}_{,1\alpha} + G_\alpha) \right] df. \quad (5.63)$$

Ein Vergleich zwischen (5.33) und (5.63) führt uns zur Folgerung, dass gemäss der rechten Seite der Differentialgleichung (5.63) Säkularterme in deren partikulären Lösung erforderlich sein müssen. Mit derselben Argumentation, wie bei Längsschwingungen, nämlich dass die Periodizitätseigenschaft der Schwingungen nicht verletzt werden darf, wollen wir aber solche Säkularterme ausschliessen. Durch diese Ueberlegung bzw. Auflage bekommen wir den bisher unbekanntenen Wert von k_2 als

$$\kappa_2 = \frac{\partial \bar{\theta}_{11}}{\partial \theta} \frac{1}{2} \int_F e_{\alpha\gamma} x_\gamma \left[\frac{1}{C_{11}} \hat{u}_\alpha^{(1)} - \frac{1}{C} (\hat{\Omega}_{,\alpha} + G_\alpha) \right] df, \quad (5.64)$$

und schreiben (5.63) in Form von

$$C_{11} \ddot{\bar{\theta}}_{11} - C \bar{\theta}_{11} = 0, \quad (5.65)$$

welche mit (5.33) übereinstimmt. Indem wir die Lösung von (5.65) in die von (5.33) zurückführen, können wir im weiteren $\bar{\theta} = 0$ setzen. Wir betrachten zunächst die Randbedingungen (5.49) und erweitern diese wie folgt

$$e_{\gamma\beta} x_\beta \sigma_{1\alpha}^{(2)} n_\alpha = 0 \quad (5.66)$$

bzw. bilden das Integral

$$\int_S e_{\gamma\beta} x_\beta \sigma_{1\alpha}^{(2)} n_\alpha ds = 0. \quad (5.67)$$

Durch Verwendung vom Gausschen Satz erhalten wir anschliessend

$$\int_F (e_{\gamma\beta} x_\beta \sigma_{1\alpha}^{(2)})_{,\alpha} df = \int_F e_{\gamma\beta} \sigma_{1\beta}^{(2)} df + \int_F e_{\gamma\beta} x_\beta \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(2)} df = 0 \quad (5.68)$$

bzw. anhand (5.14b) sowie (5.43)

$$\int_F e_{\gamma\beta} \sigma_{1\beta,1}^{(2)} df + 2\Theta_{,1111} \int_F e_{\gamma\beta} x_\beta g df = 0 \quad (5.69)$$

oder

$$\int_F \sigma_{1\alpha,1}^{(2)} df + 2\Theta_{,1111} \int_F x_\alpha g df = 0. \quad (5.70)$$

Da man laut der Randbedingung (5.56) und dem Gausschen Satz

$$\int_F \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(3)} df = 0 \quad (5.71)$$

formulieren kann, ergibt sich aus (5.15c) und (5.41 & 42)

$$\int_F \sigma_{1\alpha,1}^{(2)} df = \int_F \ddot{u}_\alpha^{(1)} df = \int_F (\ddot{u}_\alpha^{(1)} + \ddot{\theta}_{11} \hat{u}_\alpha^{(1)}) df, \quad (5.72)$$

bzw. nach Einsetzen in (5.70),

$$\int_F [\ddot{u}_\alpha^{(1)} + \ddot{\Theta}_{,11} \hat{u}_\alpha^{(1)} + 2\Theta_{,111} x_\alpha q] df = 0. \quad (5.73)$$

Gleichung (5.73) gibt Aufschluss über $\ddot{u}_\alpha^{(1)}(x_1)$, d.h. über die Kopplung mit Biegeschwingungen, welche allenfalls bei Stäben mit nichtsymmetrischem Querschnitt zu erwarten ist.

In einem nächsten Approximationsschritt wären die Gleichungen (5.15) zu behandeln. Wie man leicht ersehen kann, bestehen, sowohl die Bestimmung von $\sigma_{ij}^{(3)}$ und $u_\alpha^{(3)}$ daraus, als auch das weitere Vorgehen, im wesentlichen aus einer Wiederholung der bisher aufgeführten. Deswegen verzichten wir hier auf deren Wiedergabe.

Zum Schluss möchten wir, ähnlich wie bei Längsschwingungen, zeigen, wie sich die Dispersion in bezug auf Torsionsschwingungen ergibt, und führen dafür folgenden Ansatz ein:

$$\Theta = \Theta_0 \cos \omega t \sin \chi x_1. \quad (5.74)$$

Damit (5.33) erfüllt wird, muss zwischen ω und χ die Beziehung

$$C_{11} \omega^2 - C \chi^2 = 0 \quad (5.75)$$

gelten. Wir schreiben (5.74) in der Form

$$\Theta = \Theta_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x_1 = \Theta_0 \cos \left(\frac{2\pi}{T} T \frac{c}{k} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{\Lambda} L x_1 \right) \quad (5.76)$$

und identifizieren damit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \chi = \frac{2\pi}{\Lambda} L = \frac{2\pi}{c_T T} L = \frac{2\pi}{c_T} \frac{L}{T} \quad (5.77)$$

Benutzt man die im 3. Kapitel getroffene, mittels elementarer Theorie begründete Annahme

$$\frac{S L^2}{E T^2} = O_s(1) = \lambda = 1, \quad (5.78)$$

so kann man in (5.77)

$$1 = \sqrt{\frac{C}{C_0}} = C_0 \quad (5.79)$$

einsetzen und für die Wellengeschwindigkeit, durch

$$\frac{\omega}{\chi} = \frac{c_T}{\epsilon c_0} = \sqrt{\frac{C}{C_{11}}} \quad (5.80)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{C}{C_{11}}} c_0 \kappa = \sqrt{\frac{CE}{C_{11} \xi}} (1 + \kappa_2 \epsilon^2 + O_3(\epsilon^4)) \quad (5.81)$$

erhalten. Da κ_2 gemäss (5.64) einen Faktor

$$\frac{\Theta_{,11}}{\Theta} = -\chi^2 = -4\pi^2 \frac{L^2}{\lambda^2} \quad (5.82)$$

enthält, dürfen wir den Term $\kappa_2 \epsilon^2$ in (5.81), durch Einführung von $\hat{\kappa}_2$ für dessen Rest, durch

$$\kappa_2 \epsilon^2 = -4\pi^2 \frac{L^2}{\lambda^2} \frac{H^2}{L^2} \hat{\epsilon}_2 = -\hat{\epsilon}_2 \cdot 4\pi^2 \frac{H^2}{\lambda^2} = -\hat{\kappa}_2 \pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} \quad (5.83)$$

ersetzen und damit die Abhängigkeit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge bestätigen.

Als Anwendungsbeispiel befassen wir uns im folgenden etwas ausführlich mit der Behandlung eines Stabes mit elliptischem Querschnitt.

Im Anhang wird eine Variationsmethode in Anlehnung an die hier aufgeführte Asymptotik wiedergegeben und am Beispiel eines Stabes mit Rechteckquerschnitt gezeigt, wie man für kompliziertere Querschnittsformen die Dispersion bei Torsionsschwingungen näherungsweise bestimmen kann.

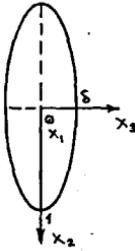


Fig. 6

Ellipse:

Wir bestimmen zuerst die Funktion ϕ als Lösung von (5.21) und (5.24) in Form von

$$\phi = \frac{\delta^2}{1+\delta^2} \left(1 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\delta^2} \right) \quad (5.84)$$

und anschliessend gemäss (5.31) und (5.32)

$$C_{11} = \frac{\pi}{4} \delta (1 + \delta^2) \quad (5.85)$$

$$C = \frac{\pi}{4} \delta \frac{4\delta^2}{2(1+\nu)(1+\delta^2)} \quad (5.86)$$

Gleichung (5.19) liefert die Schubspannungen

$$\sigma_{12}^{(0)} = - \frac{2\Theta_{,1}}{2(1+\nu)(1+\delta^2)} x_3 \quad (5.87)$$

$$\sigma_{13}^{(0)} = \frac{2\Theta_{,1}\delta^2}{2(1+\nu)(1+\delta^2)} x_2 \quad (5.88)$$

und (5.12a) die Verwölbung:

$$u_1^{(0)} = - \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \Theta_{,1} x_2 x_3 \quad (5.89)$$

Die Ansätze (5.34) für $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ gestalten sich in Übereinstimmung mit (5.13c) als

$$\sigma_{22}^{(1)} = \psi_{,33} + \frac{1-\delta^2}{(1+\nu)(1+\delta^2)^2} \Theta_{,11} x_2 x_3 \quad (5.90)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = \psi_{,22} + \frac{(1-\delta^2)\delta^2}{(1+\nu)(1+\delta^2)^2} \Theta_{,11} x_2 x_3 \quad (5.91)$$

$$\sigma_{23}^{(1)} = -\psi_{,23} \quad (5.92)$$

Wir suchen für ψ eine polynomiale Lösung in Form von

$$\psi = A_{40} x_2^4 + A_{31} x_2^3 x_3 + A_{22} x_2^2 x_3^2 + A_{13} x_2 x_3^3 + A_{04} x_3^4 + A_{20} x_2^2 + A_{11} x_2 x_3 + A_{02} x_3^2 \quad (5.93)$$

welche (5.36) und am Rand, d.h. für

$$1 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\delta^2} = 0 \quad (5.94)$$

unter Berücksichtigung von

$$\frac{n_3}{n_2} = -\frac{dx_2}{dx_3} = \frac{1}{\delta^2} \frac{x_3}{x_2} \quad (5.95)$$

die Bedingungen

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_\beta = 0 \quad (5.96)$$

erfüllen muss, und finden:

$$\Psi = \frac{\delta^2(1-\delta^2)}{6(1+\nu)(1+\delta^2)^2} \Theta_{,11} x_2 x_3 \left(3 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\delta^2} \right) \quad (5.97)$$

Die Spannungen $\sigma_{ij}^{(1)}$ werden damit

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \Theta_{,11} x_2 x_3 \quad (5.98)$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = 0 \quad (5.99)$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0 \quad (5.100)$$

$$\sigma_{23}^{(1)} = -\frac{\delta^2(1-\delta^2)}{2(1+\nu)(1+\delta^2)^2} \Theta_{,11} \left(1 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\delta^2} \right) \quad (5.101)$$

Bezüglich Verschiebungsgrößen $u_\alpha^{(1)}$ schreiben wir nach (5.38 -42)

$$u_{2,2}^{(1)} = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \nu \Theta_{,11} x_2 x_3 \quad (5.102)$$

$$u_{3,3}^{(1)} = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \nu \Theta_{,11} x_2 x_3 \quad (5.103)$$

$$u_{2,3}^{(1)} + u_{3,2}^{(1)} = -\frac{\delta^2(1-\delta^2)}{(1+\delta^2)^2} \Theta_{,11} \left(1 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\delta^2} \right) \quad (5.104)$$

$$u_2^{(1)} = \bar{u}_2^{(1)}(x_1, \tau) + \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \frac{\nu}{2} \Theta_{,11} x_2^2 x_3 + \Theta_{,11} \left(\frac{1}{3} A_3 x_3^3 + A_1 x_3 \right) \quad (5.105)$$

$$u_3^{(1)} = \bar{u}_3^{(1)}(x_1, \tau) + \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \frac{\nu}{2} \Theta_{,11} x_2 x_3^2 + \Theta_{,11} \left(\frac{1}{3} B_3 x_2^3 + B_1 x_2 \right) \quad (5.106)$$

Setzt man nun (5.105) und (5.106) in (5.104) ein und macht zusätzlich von der Bedingung

$$e_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^{(1)} \Big|_{x_\beta=0} = \left| u_{3,2}^{(1)} - u_{2,3}^{(1)} \right|_{x_\beta=0} = 2\bar{\Theta} = 0 \quad (5.107)$$

Gebrauch, so erhält man

$$u_2^{(1)} = \bar{u}_2^{(1)} + \theta_{,11} \hat{u}_2^{(1)} = \bar{u}_2^{(1)} + \theta_{,11} (a_1 x_2^2 x_3 + a_2 x_3^3 + a_3 x_3) \quad (5.108)$$

$$u_3^{(1)} = \bar{u}_3^{(1)} + \theta_{,11} \hat{u}_3^{(1)} = \bar{u}_3^{(1)} + \theta_{,11} (a_4 x_2^3 + a_1 x_2 x_3^2 + a_3 x_2) \quad (5.109)$$

wobei

$$a_1 = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \frac{\gamma}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{1-\delta^2}{3(1+\delta^2)} \left(\frac{1}{1+\delta^2} - \frac{\gamma}{2} \right) \quad ,$$

$$a_3 = -\frac{\delta^2(1-\delta^2)}{2(1+\delta^2)^2} \quad , \quad a_4 = \frac{1-\delta^2}{3(1+\delta^2)} \left(\frac{\delta^2}{1+\delta^2} - \frac{\gamma}{2} \right)$$

Zwecks Bestimmung von $g(x_\alpha)$ benutzen wir nun (5.43) unter Berücksichtigung von (5.89) und (5.98) und erhalten:

$$2\theta_{,11} g = (\theta_{,11} - \bar{\theta}_{,11}) \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} x_2 x_3 \quad (5.110)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C}{C_{11}} \right) \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} = \left[\frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{(1+\gamma)(1+\delta^2)^2} \right] \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \quad (5.111)$$

$$g = \hat{G} x_2 x_3 \quad (5.112)$$

Die Funktionen G_α , gemäss der Definition

$$G_\alpha = \int g dx_\alpha \quad (5.113)$$

sind so festzulegen, dass die Beziehung (5.47) erfüllt wird. Die Ansätze

$$G_2 = \frac{1}{2} \hat{G} x_2^2 x_3 + B_1 x_3^3 \quad (5.114)$$

$$G_3 = B_2 x_2^3 + \frac{1}{2} \hat{G} x_2 x_3^2 \quad (5.115)$$

erweisen sich dabei als geeignet und konkretisieren sich mit

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{(1+\gamma)\hat{G} - a_1 + 3a_2}{6(1+\gamma)} \\ B_2 &= \frac{(1+\gamma)\hat{G} - a_1 + 3a_4}{6(1+\gamma)} \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

Nach dieser Vorbereitung kann man zur Lösung der Differentialgleichung (5.48) oder

$$\hat{\Omega}_{,\beta\beta} = 0 \quad (5.117)$$

ergehen, indem man von (5.62) Gebrauch macht. $\hat{\Omega}$ wird neben (5.117) die Randbedingung

$$(\hat{\Omega}_{,\alpha} + G_{\alpha}) n_{\alpha} = 0 \quad (5.118)$$

vorgeschrieben. Dank der Querschnittsform gelingt uns die Bestimmung dieser harmonischen Funktion durch die Wahl eines polynomialen Ansatzes in Form von

$$\hat{\Omega} = x_2 x_3 [D_{31} (x_2^2 - x_3^2) + D_{11}] \quad (5.119)$$

und wir erhalten für dessen Koeffizienten

$$D_{31} = -\frac{B_2 - B_1 \delta^4}{1 + 6\delta^2 + \delta^4} \quad (5.120)$$

$$D_{11} = \frac{1 + 3\delta^2}{(1 + \delta^2)(1 + 6\delta^2 + \delta^4)} (B_2 - B_1 \delta^4) - \frac{2B_2 + \hat{G}_1 \delta^2}{2(1 + \delta^2)} \quad (5.121)$$

Damit sind wir imstande, anhand (5.64) κ_2 anzuschreiben bzw. auszurechnen. Es ergibt sich, nach der Gleichung

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \frac{\Theta_{11}}{\Theta} \int_F \left\{ \frac{1}{C_{11}} [-a_4 x_2^4 + a_2 x_3^4 + a_3 (-x_2^2 + x_3^2)] - \frac{1}{C} [B_2 x_2^4 + B_1 x_3^4 + D_{11} (-x_2^2 + x_3^2) - D_{31} (x_2^4 - 6x_2^2 x_3^2 + x_3^4)] \right\} df \quad (5.122)$$

$$\kappa_2 = \frac{\pi \delta}{16} \frac{\Theta_{11}}{\Theta} \left[\frac{D_{31} + B_2 + 2D_{11}}{C} - \frac{a_4 + 2a_3}{C_{11}} - \delta^2 \left(\frac{D_{31} + D_{11}}{C} - \frac{a_3}{C_{11}} \right) + \delta^4 \left(\frac{D_{31} - B_1}{C} + \frac{a_2}{C_{11}} \right) \right] \quad (5.123)$$

und dadurch die Wellengeschwindigkeit

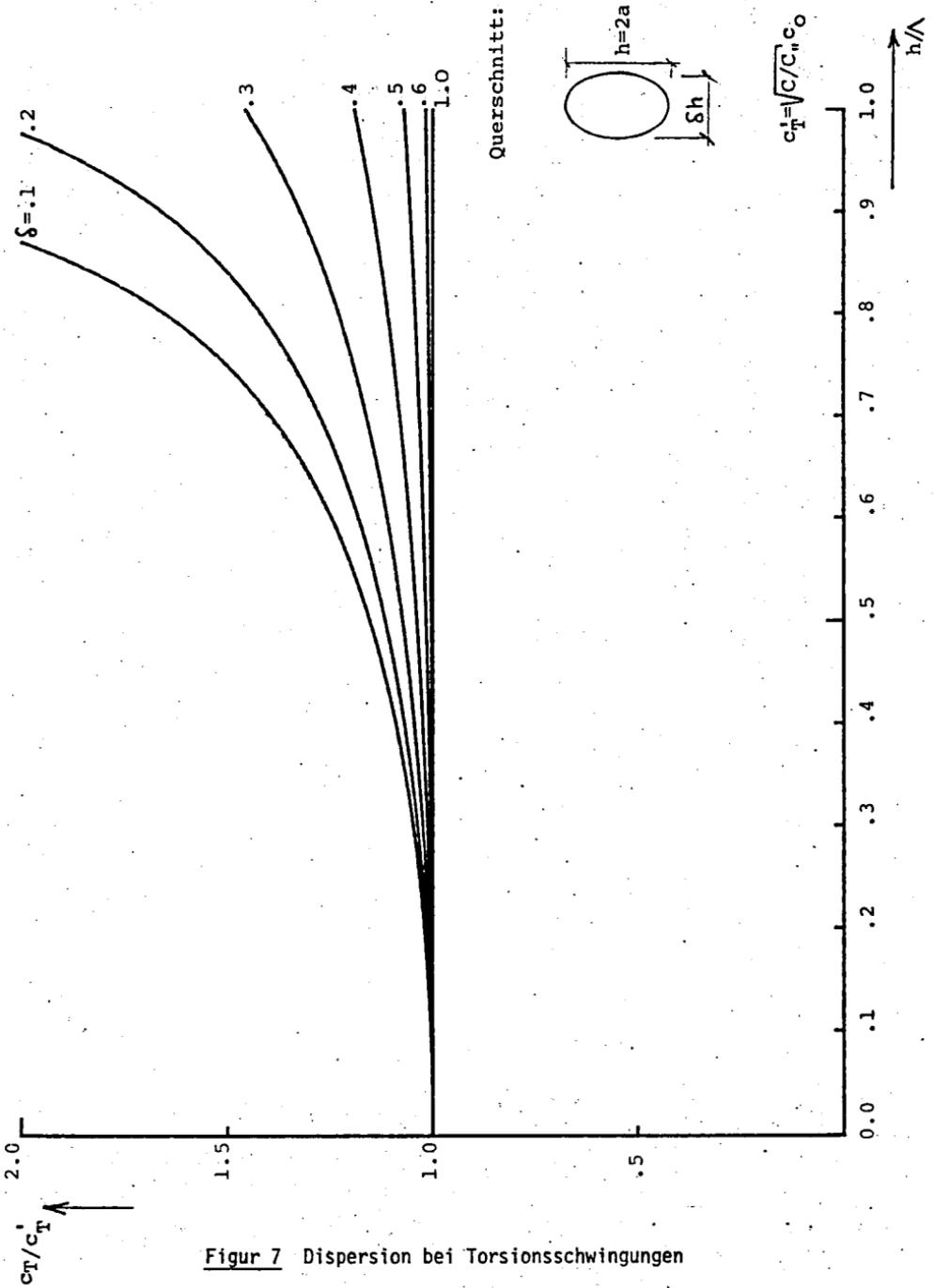
$$C_T = \sqrt{\frac{CE}{C_{11} \rho}} \left(1 + \kappa_2 \varepsilon^2 + O_3(\varepsilon^4) \right) = \frac{2\delta}{1 + \delta^2} C_{T_0} \left(1 - 8\pi^2 \hat{\varepsilon}_2 \frac{a^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2}, \quad (5.124)$$

wobei

$$C_{T_0} = \sqrt{G/\rho} \quad ; \quad a = H \quad (\text{Die grosse Halbachsenlänge}) \quad ; \quad \hat{\varepsilon}_2 = -\frac{\Theta}{\Theta_{11}} \kappa_2 \quad (5.125)$$

Der Sonderfall "Kreisquerschnitt" lässt sich leicht untersuchen. Setzt man oben $\delta=1$ ein, so wird bestätigt, dass bei diesen Querschnitten keine Dispersion vorkommt.

Unsere Resultate für die Ellipse kann man als Vergleichsgrösse für entsprechende Rechteckquerschnitte ansehen. Im folgenden findet der Leser einige Dispersionskurven für elliptische Querschnittsformen verschiedener Exzentrizität.



Figur 7 Dispersion bei Torsionsschwingungen

6. BIEGESCHWINGUNGEN

Der asymptotischen Analyse von Biegeschwingungen zylindrischer Stäbe bzw. der Ermittlung der entsprechenden Dispersion legen wir wieder die im 3. Kapitel aufgeführte Skalierung zugrunde, welche uns zu folgenden Entwicklungen für die dimensionslosen Verschiebungs- und Spannungsgrößen führt:

$$U_1 = \frac{1}{\varepsilon^3} U_1^{(-3)} + \frac{1}{\varepsilon^2} U_1^{(-2)} + O_5(\varepsilon^{-1}) \quad (6.1)$$

$$U_\alpha = \frac{1}{\varepsilon^4} U_\alpha^{(-4)} + \frac{1}{\varepsilon^3} U_\alpha^{(-3)} + O_5(\varepsilon^{-2}) \quad (6.2)$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{11}^{(-2)} + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{11}^{(-1)} + O_5(1) \quad (6.3)$$

$$\sigma_{1\alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{1\alpha}^{(-1)} + \sigma_{1\alpha}^{(0)} + O_5(\varepsilon) \quad (6.4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} + O_5(\varepsilon^2) \quad (6.5)$$

Da wir uns nach wie vor auf linearelastische Stoffe beschränken, gelten auch hier die dimensionslosen Stoffgleichungen (3.3) in Form von

$$\varepsilon U_{1,1} = \sigma_{11} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \quad (6.6)$$

$$\varepsilon U_{\alpha,1} + U_{1,\alpha} = 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha} \quad (6.7)$$

$$U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha} = 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta} - 2\nu(\sigma_{11} + \sigma_{\gamma\gamma}) \delta_{\alpha\beta} \quad (6.8)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen (3.4) nehmen unter Berücksichtigung des den Biegeschwingungen entsprechenden Wertes $\mu=4$ sowie Vernachlässigung von p_i folgende Form an:

$$\varepsilon \sigma_{11,1} + \sigma_{1\alpha,\alpha} = \varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{U}_1 \quad (6.9)$$

$$\varepsilon \sigma_{1\alpha,1} + \sigma_{\alpha\beta,\beta} = \varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{U}_\alpha \quad (6.10)$$

wobei

$$\kappa^2 = 1 + 2 \kappa_2 \varepsilon^2 + O_5(\varepsilon^4) \quad (6.11)$$

Durch Einsetzen der Entwicklungen (6.1) bis (6.5) in die Gleichungen

(6.6) is (6.10) and Bildung des Grenzwertes für $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir folgende Sätze von Gleichungen, welche aufeinanderfolgende Näherungsschritte darstellen:

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha,\beta}^{(-4)} + U_{\beta,\alpha}^{(-4)} &= 0 \\ U_{1,\alpha}^{(-3)} + U_{\alpha,1}^{(-4)} &= 0 \\ \sigma_{11}^{(-2)} &= U_{1,1}^{(-3)} \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha,\beta}^{(-2)} + U_{\beta,\alpha}^{(-2)} &= -2\nu \sigma_{11}^{(-2)} \delta_{\alpha\beta} \\ U_{1,\alpha}^{(-1)} + U_{\alpha,1}^{(-2)} &= 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha}^{(-1)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(-1)} &= -\sigma_{11,1}^{(-2)} \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= U_{1,1}^{(-1)} + \nu \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)} \\ U_{\alpha,\beta}^{(0)} + U_{\beta,\alpha}^{(0)} &= 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - 2\nu (\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}) \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(0)} &= \ddot{U}_{\alpha}^{(-4)} - \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)} \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{1,\alpha}^{(1)} + U_{\alpha,1}^{(0)} &= 2(1+\nu) \sigma_{1\alpha}^{(1)} \\ \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(1)} &= \ddot{U}_1^{(-3)} - \sigma_{11,1}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)} &= U_{1,1}^{(1)} + \nu \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} \\ U_{\alpha,\beta}^{(2)} + U_{\beta,\alpha}^{(2)} &= 2(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} - 2\nu (\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}) \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} &= \ddot{U}_{\alpha}^{(-2)} + 2\kappa_2 \ddot{U}_{\alpha}^{(-4)} - \sigma_{1\alpha,1}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

etc.

Die Gleichungen (6.12) entsprechen der elementaren Theorie für Biegung gerader Balken und geben uns die axialen Normalspannungen mit dazugehörigen Verschiebungen infolge Biegung.

Der Gleichungssatz (6.13) stellt das St. Venantsche Problem für Biegeschubspannungen und -verschiebungen dar.

Die Gleichungen (6.14) sind als ein Problem der ebenen Verzerrungen, die-

jenige (6.15) als ein St. Venantsches Problem für Schubspannungen zu identifizieren und zwar jeweils mit "Trägheitskräften". Setzt man die Schritte fort, so sieht man, dass die Gleichungssätze der Struktur (6.14) bzw. (6.15) sich sukzessiv wiederholen. Die Randbedingungen für die Spannungen, welche an der Mantelfläche des Stabes erfüllt werden müssen, schreiben sich auch für Biegeschwingungen als

$$\bar{\sigma}_{1\alpha} n_\alpha = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma}_{1\alpha}^{(-1)} n_\alpha = 0, \quad \bar{\sigma}_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha = 0 \quad \text{etc.}, \quad (6.17)$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} n_\beta = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} n_\beta = 0, \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta = 0 \quad \text{etc.} \quad (6.18)$$

Zunächst lösen wir die Gleichungen (6.12) und bekommen die primären Verschiebungen und Spannungen

$$u_\alpha^{(-4)} = u_\alpha^{(-4)}(x_i, \tau) = U_\alpha \quad (6.19)$$

$$u_i^{(-3)} = -x_\alpha U_{\alpha,i} \quad (6.20)$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(-2)} = -x_\alpha U_{\alpha,11} \quad , \quad (6.21)$$

die der elementaren Balkentheorie entsprechen. Um die Differentialgleichung der Biegeschwingungen zu erhalten, betrachten wir nun die Randbedingung (6.17), bzw.

$$\bar{\sigma}_{1\alpha}^{(-1)} n_\alpha = 0 \quad , \quad (6.22)$$

welche sich wie folgt erweitern lässt:

$$x_\beta \bar{\sigma}_{1\alpha}^{(-1)} n_\alpha = 0 \quad . \quad (6.23)$$

Indem wir diese in Integralform bringen und den Gausschen Satz anwenden, können wir schreiben:

$$\int_S x_\beta \bar{\sigma}_{1\alpha}^{(-1)} n_\alpha ds = \int_F (x_\beta \bar{\sigma}_{1\alpha}^{(-1)})_{,\alpha} df = 0 \quad (6.24)$$

bzw.

$$\int_F \delta_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_{1\alpha}^{(-1)} df + \int_F x_\beta \bar{\sigma}_{1\alpha,\alpha}^{(-1)} df = 0 \quad (6.25)$$

$$\int_F \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)} df + \int_F x_\beta \sigma_{1\alpha,\alpha_1}^{(-1)} df = 0 \quad (6.26)$$

Die Gleichung (6.13.3) ergibt uns unter Berücksichtigung von (6.21)

$$\sigma_{1\alpha,\alpha_1}^{(-1)} = -\sigma_{11,11}^{(-2)} = x_\alpha U_{\alpha,1111} \quad (6.27)$$

während die Randbedingung (6.18), bzw.

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(0)} n_\beta = 0 \quad (6.28)$$

nach Bildung des Integrals

$$\int_S \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} n_\beta ds = 0 \quad (6.29)$$

sowie Umschreibung gemäss dem Gaussischen Satz und Verwendung von (6.14.3) zu

$$\int_F \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(0)} df = \int_F (\ddot{u}_\alpha^{(-4)} - \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)}) df = 0 \quad (6.30)$$

$$\int_F \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)} df = F \ddot{u}_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \int_F \sigma_{1\beta,1}^{(-1)} df = F \ddot{u}_\beta \quad (6.31)$$

führt. (6.27) und (6.31) in (6.26) eingesetzt ergeben die gesuchte Bewegungsdifferentialgleichung

$$F \ddot{u}_\beta + U_{\alpha,1111} \int_F x_\alpha x_\beta df = 0 \quad (6.32)$$

oder nach Identifizierung des Integralterms als das durch

$$C_{\alpha\beta} = \int_F x_\alpha x_\beta df \quad (6.33)$$

definierte, dimensionslose Flächenträgheitsmoment des Querschnitts,

$$F \ddot{u}_\beta + C_{\alpha\beta} U_{\alpha,1111} = 0 \quad (6.34)$$

Befasst man sich nun mit der Lösung des Gleichungssatzes (6.13), so stellt man fest, dass Spannungs- und Verschiebungsansätze von der Form

$$\sigma_{1\alpha}^{(-1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(e_{\alpha\beta} \varphi_{,\beta} - \theta_{,1} e_{\alpha\beta} x_\beta + \frac{1-2\nu}{4} U_{\alpha,1111} x_\beta x_\beta + \frac{1+2\nu}{2} x_\alpha x_\beta U_{\beta,1111} \right) \quad (6.35)$$

$$u_\alpha^{(-2)} = \hat{u}_\alpha(x_1, \tau) - \theta e_{\alpha\beta} x_\beta + \nu x_\alpha x_\beta U_{\beta,11} - \frac{\nu}{2} U_{\alpha,11} x_\beta x_\beta \quad (6.36)$$

$$u_i^{(-1)} = \hat{U}_i(x_i, \tau) - x_\alpha \hat{U}_{\alpha, i} + \bar{\varphi} + \frac{1}{4} U_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta x_\beta \quad (6.37)$$

diese Gleichungen erfüllen. Wir setzen dabei voraus, dass die Spannungsfunktion φ die Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\varphi_{, \alpha \alpha} = 0 \quad (6.38)$$

darstellt, welche durch Bildung von $e_{\alpha\beta} \sigma_{1\alpha, \beta}^{(-1)}$ entsteht. $\bar{\varphi}$ ist die φ entsprechende konjugierte Funktion, definiert durch

$$\bar{\varphi}_{, \alpha} = e_{\alpha\beta} \varphi_{, \beta} \quad (6.39)$$

Die Randbedingung (6.22) ergibt uns, unter Berücksichtigung von (6.35) sowie

$$n_\alpha = e_{\alpha\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \quad (6.40)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \theta_{, i} e_{\alpha\beta} x_\beta n_\alpha - \frac{1-2\nu}{4} U_{\alpha, \beta} x_\beta x_\beta n_\alpha - \frac{1+2\nu}{2} x_\alpha x_\beta U_{\beta, \alpha} n_\alpha \quad (6.41)$$

welche zusammen mit (6.38) zur Bestimmung von φ vollkommen genügt. Der erst in den Gleichungen (6.35) bis (6.37) eingeführte Faktor θ , definiert durch

$$\theta = \theta(x_i, \tau) = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} \left[u_{\beta, \alpha}^{(-2)}(x_\beta = 0) \right] \quad (6.42)$$

entspricht der Verdrehung der Querschnitte und gibt somit die Kopplung der Biegeschwingungen mit Torsionsschwingungen wieder. Zur Bestimmung von θ ist folgende Überlegung nötig: Berücksichtigt man die Randbedingung (6.28) und schreibt daher für die spannungsfreie Mantelfläche des Stabes

$$e_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} n_\beta = 0 \quad (6.43)$$

vor, so ergibt uns dies, über den Querschnittsrand integriert,

$$\int_S e_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} n_\beta ds = 0 \quad (6.44)$$

mittels Gaußschen Satzes sowie (6.14.3) und (6.19) folgt dann

$$\int_F (\epsilon_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta}^{(0)})_{,\beta} df = \int_F \epsilon_{\alpha\gamma} x_\gamma \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} df = 0 \quad (6.45)$$

$$\int_F \epsilon_{\alpha\gamma} x_\gamma (\ddot{U}_\alpha - \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)}) df = 0 \quad (6.46)$$

oder

$$\int_F \epsilon_{\alpha\beta} x_\beta \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)} df = 0. \quad (6.47)$$

Durch Einsetzen von (6.35) in (6.47) gelingt es uns nun θ zu bestimmen. Um die Korrektur der Dispersion in den Griff zu bekommen, müssen wir die Differentialgleichung der Biegeschwingungen in einem weiteren Approximationsschritt aufstellen. Gemäss (6.17) haben die Schubspannungen $\sigma_{1\alpha}^{(1)}$ nächster Ordnung die Randbedingung

$$\sigma_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha = 0 \quad (6.48)$$

zu erfüllen, welche wir als

$$x_\beta \sigma_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha = 0 \quad (6.49)$$

erweitert schreiben und längs des Querschnittsrandes integriert formulieren:

$$\int_S x_\beta \sigma_{1\alpha}^{(1)} n_\alpha ds = 0 \quad (6.50)$$

Mit dem Gaussischen Satz wird das Integral zu

$$\int_F (x_\beta \sigma_{1\alpha}^{(1)})_{,\alpha} df = 0, \quad (6.51)$$

woraus wir

$$\delta_{\alpha\beta} \int_F \sigma_{1\alpha}^{(1)} df + \int_F x_\beta \sigma_{1\alpha, \alpha}^{(1)} df = 0 \quad (6.52)$$

erhalten. Unter Berücksichtigung von (6.15.2) und abgeleitet nach x_1 ergibt dies die Gleichung

$$\int_F \sigma_{1\beta,1}^{(1)} df + \int_F x_\beta (\ddot{U}_{1,1}^{(-3)} - \sigma_{11,11}^{(0)}) df = 0 \quad (6.53)$$

Andererseits führt uns die (6.18) entsprechende Randbedingung

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta = 0, \quad (6.54)$$

nach Bildung des Integrals

$$\int_S \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} n_\beta ds = 0 \quad (6.55)$$

sowie dessen Umformung gemäss dem Gaussischen Satz

$$\int_F \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(2)} df = 0, \quad (6.56)$$

unter Berücksichtigung von (6.16.3) zu

$$2\kappa_2 F \ddot{U}_\beta + \int_F (\ddot{u}_\beta^{(-2)} - \sigma_{1\beta,1}^{(1)}) df = 0. \quad (6.57)$$

Aus der Kombination von (6.53) und (6.57) erhalten wir

$$2\kappa_2 F \ddot{U}_\beta + \int_F [\ddot{u}_\beta^{(-2)} + x_\beta (\ddot{u}_{1,1}^{(-3)} - \sigma_{11,11}^{(0)})] df = 0, \quad (6.58)$$

welche durch (6.14.1), (6.20), (6.36) und (6.37) sowie durch die Abkürzungen

$$C_{11} = \int_F x_\gamma x_\gamma df, \quad C_{\alpha\beta} = \int_F x_\alpha x_\beta df \quad (6.59)$$

für die Flächenträgheitsmomente in folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} F \ddot{U}_\beta + C_{\alpha\beta} \hat{U}_{\alpha,1111} &= \\ &= -2\kappa_2 F \ddot{U}_\beta + (1-\nu) C_{\alpha\beta} \ddot{U}_{\alpha,11} + \frac{\nu}{2} C_{11} \ddot{U}_{\beta,11} + \int_F x_\beta \bar{\varphi}_{,11} df + \frac{1+\nu}{4} \int_F x_\gamma x_\beta x_\alpha x_\alpha df + \nu \int_F x_\beta \sigma_{\alpha,11}^{(0)} df \end{aligned} \quad (6.60)$$

Nun wollen wir zeigen, dass der letzte Integralterm in (6.60) mit dem noch unbekanntem $\sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}$ d.h.

$$\int_F x_\beta \sigma_{\gamma\gamma,11}^{(0)} df \quad (6.61)$$

sich so ausdrücken lässt, dass nur bisher bekannte Grössen bzw. Funktionen darin vorkommen.

Dazu führen wir eine Matrix $V_{\beta\alpha}$ ein und multiplizieren diese mit dem Vektor $\sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} n_\gamma$. Wir integrieren über den Querschnittsrand und setzen das Ergebnis gemäss (6.28) gleich null. Mit dem Gaussischen Satz folgt also:

$$\int_S V_{\beta\alpha} \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} n_\gamma ds = \int_F (V_{\beta\alpha} \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)})_{,\gamma} df = 0 \quad (6.62)$$

oder

$$\int_F V_{\beta\alpha,\gamma} \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} df + \int_F V_{\beta\alpha} \sigma_{\alpha\gamma,\gamma}^{(0)} df = 0 \quad (6.63)$$

Man erkennt leicht, dass es uns mittels (6.14.3) und der Wahl

$$V_{\beta\alpha,\gamma} = x_\beta \delta_{\alpha\gamma} \quad (6.64)$$

gelingt, (6.61) wie vorgesehen auszurechnen. (6.64) liefert uns die Komponenten der Matrix $V_{\beta\alpha}$ in Form von

$$V_{\beta\alpha} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) & x_2 x_3 \\ x_2 x_3 & \frac{1}{2}(x_3^2 - x_2^2) \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

und wir bekommen

$$\int_F x_\beta \sigma_{\gamma\delta}^{(0)} df = - \int_F V_{\beta\alpha} \sigma_{\alpha\gamma,\gamma}^{(0)} df = - \int_F V_{\beta\alpha} (\ddot{U}_\alpha - \sigma_{1\alpha,1}^{(-1)}) df \quad (6.66)$$

Halten wir uns vor Augen, dass $\sigma_{1\alpha}^{(-1)}$ sowie $\bar{\varphi}$ bzw. φ ebenfalls Funktionen von U_β sind, so können wir mit derselben Begründung wie bei Längs- und Torsionsschwingungen, nämlich dass die linke Seite von (6.60) dieselbe Struktur aufweist wie (6.34) und wir keine Säkularterme in deren Lösung zulassen können, fordern, dass κ_2 nun so zu bestimmen ist, dass die rechte Seite von (6.60) identisch null wird. Somit ergeben sich

$$F \ddot{U}_\beta + C_{\alpha\beta} \hat{U}_{\alpha,1111} = 0 \quad (6.67)$$

$$2\kappa_2 F \bar{U}_\beta = (1-\nu) C_{\alpha\beta} \bar{U}_{\alpha,11} + \frac{\nu}{2} C_{11} \bar{U}_{\beta,11} + \int_F x_\beta \bar{\varphi}_{,11} df + \frac{U_{\beta,1111}}{4} \int_F x_\gamma x_\beta x_\alpha df + \nu \int_F x_\beta \sigma_{\alpha\alpha} df, \quad (6.68)$$

wobei \bar{U}_β , die Lösung von (6.67), in die von (6.34) zurückgeführt bzw. $\hat{U}_\beta = 0$ gesetzt werden kann. Die Gleichung (6.68) genügt uns, unter Berücksichtigung von (6.35) und (6.66) κ_2 in folgender Form zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2 = & \frac{1}{2F\bar{U}_\beta} \left\{ (1-\nu) C_{\alpha\beta} \ddot{U}_{\alpha,11} + \frac{\nu}{2} C_{11} \ddot{U}_{\beta,11} + \int_F x_\beta \bar{\varphi}_{,111} df + \frac{U_{\beta,1111}}{4} \int_F x_\beta x_\beta x_\alpha x_\alpha df - \right. \\
 & \left. - \nu \ddot{U}_{\alpha,11} \int_F V_{\beta\alpha} df + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \int_F V_{\beta\alpha} (\bar{\varphi}_{,111} - \Theta_{,111} e_{\alpha\beta} x_\beta + \frac{1-2\nu}{4} x_\beta x_\beta U_{\alpha,1111} + \frac{1+2\nu}{4} x_\alpha x_\alpha U_{\beta,1111}) df \right\} \quad (6.69)
 \end{aligned}$$

Ohne auf weitere Approximationsschritte, die im wesentlichen aus einer Wiederholung der bisherigen bestehen, einzugehen, wollen wir uns nun mit der Illustration der Korrektur der Dispersion befassen. Wir benutzen dazu die Ansätze

$$U_2 = U_{20} \cos \omega t \sin \chi x_1, \quad U_3 = 0, \quad (6.70)$$

wobei gemäss (6.34)

$$-F \omega^2 + C_{22} \chi^2 = 0 \quad (6.71)$$

erfüllt werden muss. Schreibt man (6.70) in der Form

$$U_2 = U_{20} \cos \frac{2\pi}{T} \tilde{t} \sin \frac{2\pi}{\Lambda} \tilde{x}_1 = U_{20} \cos \left(\frac{2\pi T}{T} \frac{\tilde{t}}{T} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{\Lambda} L x_1 \right) \quad (6.72)$$

und stellt fest, dass

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \chi = \frac{2\pi}{\Lambda} L = \frac{2\pi}{c'T} L = \frac{2\pi}{c'} \frac{L}{T}, \quad (6.73)$$

so bekommt man unter Berücksichtigung der im 3. Kapitel getroffenen, durch die elementare Theorie begründete Annahme

$$\frac{\rho L^2}{E T^2} = O_3(\epsilon^2) = \lambda \epsilon^2 = \epsilon^2 = \frac{H^2}{L^2} \quad (6.74)$$

zusammen mit (6.71)

$$\frac{\omega}{\chi^2} = \sqrt{\frac{C_{22}}{F}} = \frac{c^2 \rho L^2}{2\pi^2 E H^2} = \frac{c' (\Lambda/T) (\rho/E)^{1/2} (\rho/E)^{1/2} (L/H) (L/H)}{2\pi^2} \quad (6.75)$$

bzw.

$$c' = 2\pi \sqrt{\frac{C_{22}}{F}} \frac{H}{\Lambda} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \kappa. \quad (6.76)$$

Führt man

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad K_3 = \sqrt{\frac{C_{22}}{F}} \quad (K_3 = \bar{K}_3/H) \quad (6.77)$$

ein, wobei K_3 den dimensionslosen Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich der x_3 -Achse darstellt, so ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für Biegeschwingungen gegeben durch

$$c' = 2\pi \frac{\bar{K}_3}{\Lambda} c_0 \left(1 + \kappa_2 \epsilon^2 + O_3(\epsilon^4) \right) ; \quad (6.78)$$

wobei κ_2 von Λ abhängt.

Es ist leicht zu verstehen, dass man im Falle von Biegeschwingungen um die x_2 -Achse ($U_2=0$, $U_3 \neq 0$) anstatt (6.78),

$$c' = 2\pi \frac{\bar{K}_2}{\Lambda} c_0 \left(1 + \hat{\kappa}_2 \epsilon^2 + O_3(\epsilon^4) \right) \quad (6.79)$$

findet.

Im folgenden wollen wir als Beispiel einige Querschnittsformen behandeln und die entsprechenden Dispersionsdiagramme aufzeichnen.

Kreis:

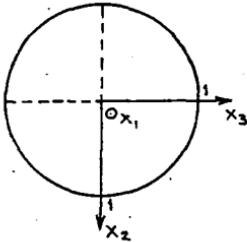


Fig. 8

Für die dimensionslose Fläche und die dimensionslosen Flächenträgheitsmomente eines Kreisquerschnitts gelten

$$F = \pi, \quad C_{11} = \frac{\pi}{2}, \quad C_{22} = C_{33} = \frac{\pi}{4}, \quad C_{23} = 0. \quad (6.80)$$

Da jede Querschnittsachse durch dessen Schwerpunkt gleichwertig bezüglich Biegeschwingungen eines Kreiszyinders ist, setzen wir

$$U_2 = V = V_0 \cos \omega \tau \sin \chi x_1, \quad U_3 = 0 \quad (6.81)$$

ein und erhalten aus (6.34 und (6.80)

$$\ddot{V} + \frac{1}{4} V_{,III} = 0 \quad (6.82)$$

Wir befassen uns zunächst mit der durch (6.39) definierten Spannungsfunktion $\bar{\varphi}$, für deren Bestimmung wir aus (6.13.3) und (6.35) die Laplacesche Differentialgleichung

$$\bar{\varphi}_{, \alpha \alpha} = 0 \quad (6.83)$$

und aus (6.22) die Randbedingung

$$\bar{\varphi}_{, \alpha} n_{\alpha} = - \left(\frac{3+2\nu}{4} x_2^2 + \frac{1-2\nu}{4} x_3^2 \right) V_{,III} n_2 - \frac{1+2\nu}{2} x_2 x_3 V_{,III} n_3 \quad (6.84)$$

zur Verfügung haben. Hier wurde die Querschnittsverdrehung θ aus Symmetriegründen bereits gestrichen. Für den Rand des Querschnitts gilt

$$1 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (6.85)$$

und die Normalenkomponenten gemäss (6.40) werden dadurch

$$n_{\alpha} = x_{\alpha} \quad (6.86)$$

Nun kann man leicht ersehen, dass die gesuchte Funktion aus

$$\bar{\varphi} = - \frac{3+2\nu}{4} x_2 V_{,III} \quad (6.87)$$

besteht. Nach Auswertung der Gleichung (6.69) erhalten wir

$$\kappa_2 = \frac{1}{24} \frac{V_{III}}{V} \left[4(3+\nu) - \frac{2+\nu}{1+\nu} \right] = \frac{1}{12} \frac{V_{III}}{V} \left(\frac{7}{2} + \frac{E}{G} - \frac{G}{E} \right) \quad (6.88)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{V_{III}}{V} = -\chi^2 = -(2\pi \frac{L}{\lambda})^2, \quad \varepsilon^2 = \frac{R^2}{L^2} \quad (6.89)$$

bzw. (6.78) ergibt sich schliesslich die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

$$c' = 2\pi \frac{R/2}{\lambda} c_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{7}{2} + \frac{E}{G} - \frac{G}{E} \right) \frac{R^2}{\lambda^2} + O_3(\varepsilon^4) \right] \approx \pi \frac{R}{\lambda} c_0 \left[1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{7}{2} + \frac{E}{G} - \frac{G}{E} \right) \frac{R^2}{\lambda^2} \right]^{1/2} \quad (6.90)$$

welche mit dem in (2.3) wiedergegebenen Resultat von Pochhammer vollkommen übereinstimmt.

Ellipse:

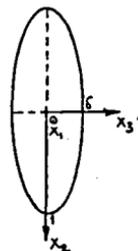


Fig. 9

Die dimensionslose Fläche und die dimensionslosen Flächenträgheitsmomente einer Ellipse lassen sich wie folgt darstellen:

$$F = \pi a b, \quad C_{xx} = \frac{\pi a^3}{4} (1 + \delta^2), \quad C_{yy} = \frac{\pi a^3}{4}, \quad C_{zz} = 0, \quad C_{xy} = \frac{\pi a^3}{4} \delta^3 \quad (6.91)$$

Für den betrachteten Stab mit Ellipsenquerschnitt werden wir die Biegeschwingungen in zwei verschiedenen Schwingungsebenen, nämlich in $x_1 - x_2$ - und $x_1 - x_3$ -Ebenen, einzeln behandeln:

a) Der Fall $U_2 \neq 0, U_3 = 0$:

Wir wählen den Verschiebungsansatz

$$U_2 = V = V_0 \cos \omega t \sin \chi x_1, \quad (6.92)$$

welcher gemäss (6.34) und (6.91)

$$\ddot{V} + \frac{1}{4} V_{,III} = 0 \quad (6.93)$$

erfüllen muss. Ferner setzen wir, auf Grund der Symmetrie, die Querschnittsverdrehung $\vartheta = 0$ und bestimmen, wie bei dem Kreisquerschnitt, die Spannungs-

funktion $\bar{\varphi}$ in Form von

$$\bar{\varphi} = -V_{III} \frac{x_2}{3+\delta^2} \left[2(1+\nu) + \delta^2 + \frac{(1-2\nu)(1-\delta^2)}{12} (x_2^2 - 3x_3^2) \right] \quad (6.94)$$

Aus der Gleichung (6.69) erhalten wir

$$K_2 = \frac{V_{III}}{V} \frac{1}{24(1+\nu)(3+\delta^2)} \left[29 + 47\nu + 18\nu^2 + 11(1+\nu)\delta^2 + 2\nu(1-\nu)\delta^4 \right] = \frac{V_{III}}{V} K_2^* \quad (6.95)$$

und können nun unter Berücksichtigung von

$$\frac{V_{III}}{V} = -\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right)^2, \quad \bar{K}_3 = K_3 H = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} a, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2}{L^2} \quad (6.96)$$

die durch (6.78) gegebene Wellenausbreitungsgeschwindigkeit wie folgt ausdrücken:

$$c' = 2\pi \frac{a/2}{\lambda} c_0 \left(1 - 4\pi^2 K_2^* \frac{a^2}{\lambda^2} + O_5(\varepsilon^4) \right) \approx \pi \frac{a}{\lambda} c_0 \left(1 + 8\pi^2 K_2^* \frac{a^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (6.97)$$

oder

$$c' \approx \frac{\pi}{2} \frac{h}{\lambda} c_0 \left(1 + 2\pi^2 K_2^* \frac{h^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2}, \quad (6.98)$$

wobei $h=2H=2a$.

b) Der Fall $U_2 = 0$, $U_3 \neq 0$:

Wir machen für die Verschiebungen den Ansatz

$$U_3 = W = W_0 \cos \omega t \sin \chi x_1 \quad (6.99)$$

und bekommen aus (6.34) anhand (6.91)

$$\ddot{W} + \frac{\delta^2}{4} W_{,III} = 0 \quad (6.100)$$

Als Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\bar{\varphi}_{,\alpha\alpha} = 0 \quad (6.101)$$

mit der entsprechenden Randbedingung

$$\bar{\varphi}_{,\alpha} n_\alpha = -\frac{1+2\nu}{2} x_2 x_3 W_{,III} n_2 - \left(\frac{3+2\nu}{4} x_3^2 + \frac{1-2\nu}{4} x_2^2 \right) W_{,III} n_3 \quad (6.102)$$

ergibt sich die Funktion

$$\bar{\Phi} = -W_{,III} \frac{x_3}{1+3\delta^2} \left[2(1+\nu)\delta^4 + \delta^2 + \frac{1}{12}(1-2\nu)(1-\delta^2)(3x_2^2 - x_3^2) \right]. \quad (6.103)$$

Setzt man diese in (6.69) ein, so findet man für den Koeffizienten des Korrekturterms 2. Ordnung in der Dispersionsgleichung

$$\hat{\epsilon}_2 = \frac{W_{,III}}{W} \frac{1}{24(1+\nu)(1+3\delta^2)} \left[(29+47\nu+18\nu^2)\delta^4 + 11(1+\nu)\delta^2 + 2\nu(1-\nu) \right] = \frac{W_{,III}}{W} \delta^2 \bar{\kappa}_2 \quad (6.104)$$

Mit

$$\frac{W_{,III}}{W} = -\left(2\pi \frac{1}{\lambda}\right)^2, \quad \bar{\kappa}_2 = \kappa_2 H = \frac{\delta}{2} H = \frac{b}{2}, \quad \epsilon^2 = \frac{a^2}{L^2} \quad (6.105)$$

folgt dann aus (6.79) die Wellengeschwindigkeit in Form von

$$c' = 2\pi \frac{b/2}{\lambda} c_0 \left(1 - 4\pi^2 \bar{\epsilon}_2 \frac{b^2}{\lambda^2} + O_3(\epsilon^4) \right) \cong \pi \frac{b}{\lambda} c_0 \left(1 + 8\pi^2 \bar{\kappa}_2 \frac{b^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (6.106)$$

oder durch Einführung von $h=2a=2b/\delta$,

$$c' \cong \frac{\pi}{2} \delta \frac{h}{\lambda} c_0 \left(1 + 2\pi^2 \delta^2 \bar{\kappa}_2 \frac{h^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2}. \quad (6.107)$$

Rechteck:

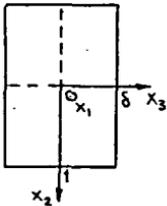


Fig. 10

Wir bestimmen zunächst die dimensionslose Fläche und die dimensionslosen Flächenträgheitsmomente eines solchen Querschnitts und erhalten:

$$F = 4\delta, \quad C_{11} = \frac{4}{3}\delta(1+\delta^2), \quad C_{22} = \frac{4}{3}\delta, \quad C_{23} = 0, \quad C_{33} = \frac{4}{3}\delta^3. \quad (6.108)$$

Für die primären Verschiebungen setzen wir

$$U_2 = V = V_0 \cos \omega t \sin \chi x_1, \quad U_3 = 0 \quad (6.109)$$

an und stellen anhand (6.34) und (6.108) folgende Beziehung fest:

$$\ddot{V} + \frac{1}{3}V_{,III} = 0 \quad (6.110)$$

Löst man nun die Laplacesche Differentialgleichung

$$\bar{\Phi}_{, \alpha\alpha} = 0 \quad (6.111)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingung

$$\bar{\varphi}_{, \alpha} n_{\alpha} = - \left(\frac{3+2\nu}{4} x_2^2 + \frac{1-2\nu}{4} x_3^2 \right) V_{,III} n_2 - \frac{1+2\nu}{2} x_2 x_3 V_{,III} n_3, \quad (6.112)$$

so findet man

$$\bar{\varphi} = -V_{,III} \left[(1+\nu - \frac{\nu}{3} \delta^2) x_2 + \frac{1+2\nu}{12} (x_2^3 - 3x_2 x_3^2) + \frac{4\nu\delta^3}{\pi^3} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\text{Sh}(\frac{n\pi}{\delta} x_2)}{\text{Ch} \frac{n\pi}{\delta}} \cos(\frac{n\pi}{\delta} x_3) \right] \quad (6.113)$$

Einsetzen dieser Funktion in die Gleichung (6.69) führt uns zum Ergebnis

$$\kappa_2 = \frac{V_{,III}}{V} \left[\frac{17+10\nu}{30} - \frac{\nu^2 \delta^4}{15(1+\nu)} \left(1 - \frac{30}{\pi^5} \delta \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \text{Th} \frac{n\pi}{\delta} \right) \right]. \quad (6.114)$$

Wie man leicht ersehen kann, weist dieser Koeffizient eine sehr schwache, vernachlässigbare Abhängigkeit von dem Querschnittsparameter δ ($\delta \ll 1$) auf und kann deswegen in die einfachere Form

$$\kappa_2 = \frac{V_{,III}}{V} \frac{17+10\nu}{30} \quad (6.115)$$

gebracht werden. Anhand (6.78) sowie unter Berücksichtigung von

$$\frac{V_{,III}}{V} = - \left(2\pi \frac{L}{\Lambda} \right)^2, \quad \bar{\kappa}_3 = K_3 H = \frac{\sqrt{3}}{3} H = \frac{\sqrt{3}}{6} h \quad (6.116)$$

erhalten wir schliesslich für die Wellengeschwindigkeit

$$c' = 2\pi \frac{\sqrt{3} H / 3}{\Lambda} c_0 \left(1 - \frac{17+10\nu}{30} \cdot 4\pi^2 \frac{H^2}{\Lambda^2} + O_3(\epsilon^4) \right) \approx 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{H}{\Lambda} c_0 \left(1 + \frac{17+10\nu}{15} \cdot 4\pi^2 \frac{H^2}{\Lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (6.117)$$

oder

$$c' \approx \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \frac{h}{\Lambda} c_0 \left(1 + \frac{17+10\nu}{15} \pi^2 \frac{h^2}{\Lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (6.118)$$

Untersucht man anschliessend die Biegeschwingungen in der $x_1 - x_3$ -Ebene mit den Verschiebungsansätzen

$$U_2 = 0, \quad U_3 = W = W_0 \cos \omega t \sin \lambda x_1, \quad (6.119)$$

bzw. mit der Bewegungsdifferentialgleichung

$$W + \frac{\delta^2}{3} W_{,III} = 0 \quad (6.120)$$

so findet man für den Koeffizienten κ_2 in der Gleichung (6.79)

$$\hat{k}_2 = \frac{W_{11}}{W} \left[\frac{17+10\nu}{30} \delta^2 - \frac{\nu^2}{15(1+\nu)\delta^2} \left(1 - \frac{90}{\pi^2 \delta} \sum_{n=1,2..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{Th}(n\pi\delta) \right) \right] = \frac{W_{11}}{W} \delta^2 \tilde{k}_2, \quad (6.121)$$

und mit den Beziehungen

$$\frac{W_{11}}{W} = -\left(2\pi \frac{L}{\Lambda}\right)^2, \quad \bar{K}_2 = K_2 H = \frac{\sqrt{3}}{3} \delta H = \frac{\sqrt{3}}{3} b = \frac{\sqrt{3}}{6} \delta h, \quad (6.122)$$

für die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

$$c' = 2\pi \frac{\sqrt{3} b/3}{\Lambda} c_0 \left(1 - 4\pi^2 \tilde{k}_2 \frac{b^2}{\Lambda^2} + O_3(\varepsilon^4) \right) \approx 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \frac{b}{\Lambda} c_0 \left(1 + 8\pi^2 \tilde{k}_2 \frac{b^2}{\Lambda^2} \right)^{1/2} \quad (6.123)$$

oder

$$c' \approx \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \delta \frac{h}{\Lambda} c_0 \left(1 + 2\pi^2 \tilde{k}_2 \delta^2 \frac{h^2}{\Lambda^2} \right)^{-1/2}. \quad (6.124)$$

Bei der Aufzeichnung der Dispersionsdiagramme für beide Schwingungsfälle und verschiedene Seitenverhältnisse wurde die Poissonsche Zahl $\nu=0,3$ eingesetzt.

Halbkreis:

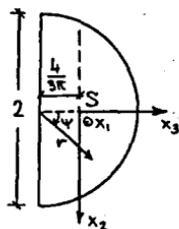


Fig. 11

Als letztes Beispiel behandelt wir diese Querschnittsform, für die die Biegeschwingungen

$$U_2 = V \neq 0 \quad (\text{z.B. } V = V_0 \cos \omega t \sin \alpha x_1), \quad U_3 = 0 \quad (6.125)$$

in einer Ebene ohne Symmetrieeigenschaft erfolgen und dadurch als neue Begleiterscheinung mit den Torsionsschwingungen gekoppelt sind.

Der Halbkreis stellt im übrigen die Eine von wenigen nichtdoppelsymmetrischen Querschnittsformen dar, für die die Lösungen unserer Gleichungen weitgehend in geschlossener Form angegeben werden können. Die dimensionslose Fläche und die dimensionslosen Flächenträgheitsmomente eines Halbkreises schreiben sich als

$$F = \frac{\pi}{2}, \quad C_{11} = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}, \quad C_{22} = \frac{\pi}{8}, \quad C_{23} = 0, \quad C_{33} = \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}. \quad (6.126)$$

(6.34) gibt uns dadurch die Bewegungsdifferentialgleichung in Form von

$$\ddot{V} + \frac{1}{4} V_{,111} = 0. \quad (6.127)$$

Das weitere Vorgehen, das wir vorteilhafterweise für diesen speziellen Querschnitt anwenden, wird im Folgenden kurz beschrieben, da es sich von dem bisherigen einigermaßen unterscheidet:

Wir führen zwei verschiedene Spannungsfunktionen $\bar{\Phi}$ und $\bar{\chi}$ ein und machen dadurch für die Schubspannungen $\sigma_{1\alpha}^{(-1)}$ folgende Ansätze:

$$\sigma_{12}^{(-1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} (\bar{\Phi}_{,3} + \bar{\chi}_{,3}) + \frac{1}{2} x_2^2 V_{,III} + \bar{f}(x_1, x_3, z) \quad (6.128)$$

$$\sigma_{13}^{(-1)} = -\frac{1}{2(1+\nu)} (\bar{\Phi}_{,2} + \bar{\chi}_{,2}) \quad , \quad (6.129)$$

welche (6.13.3) bzw.

$$\sigma_{1\alpha, \alpha}^{(-1)} = x_2 V_{,III} \quad (6.130)$$

erfüllen. \bar{f} oben stellt eine noch zu bestimmende Funktion dar.

Bilden wir nun unter Berücksichtigung von (6.36) in (6.13.2) $2(1+\nu)e_{\alpha\beta} \sigma_{1\alpha, \beta}^{(-1)}$ und setzen da die neu eingeführten Spannungsansätze ein, so entsteht die Beziehung

$$\bar{\Phi}_{, \alpha\alpha} + \bar{\chi}_{, \alpha\alpha} + 2(1+\nu)\bar{f}_{,3} = -2\Theta_{,1} - 2\nu x_3 V_{,III} \quad , \quad (6.131)$$

die wir im Hinblick auf die θ -Abhängigkeit in folgende zwei Poissonsche Differentialgleichungen zerlegen:

$$\bar{\Phi}_{, \alpha\alpha} = -2\Theta_{,1} \quad , \quad (6.132)$$

$$\bar{\chi}_{, \alpha\alpha} = -2\nu x_3 V_{,III} - 2(1+\nu)\bar{f}_{,3} \quad . \quad (6.133)$$

Aus (6.22) erhalten wir durch Einsetzen von (6.128) und (6.129)

$$\frac{d\bar{\Phi}}{ds} + \frac{d\bar{\chi}}{ds} + 2(1+\nu) \left(\bar{f} + \frac{1}{2} x_2^2 V_{,III} \right) \frac{dx_3}{ds} = 0 \quad (6.134)$$

und teilen diese in zwei voneinander unabhängige Randbedingungen auf, nämlich:

$$\frac{d\bar{\Phi}}{ds} = 0 \quad , \quad (6.135)$$

$$\frac{d\bar{\chi}}{ds} = -2(1+\nu) \left(\bar{f} + \frac{1}{2} x_2^2 V_{,III} \right) \frac{dx_3}{ds} \quad (6.136)$$

(6.132) mit (6.135) zusammen betrachtet, entspricht einem gewöhnlichen Torsionsproblem. Mit der Wahl

$$\bar{f} = \bar{f}(x_1, x_3, z) = \frac{1}{2} V_{,III} \left[\left(x_3 + \frac{4}{3\pi} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.137)$$

gelingt es uns auch die Randbedingung (6.136) in die simple Form

$$\frac{d\bar{X}}{ds} = 0 \quad (6.138)$$

zu bringen, wobei die Differentialgleichung (6.133) dadurch

$$\bar{X}_{, \alpha\alpha} = -V_{,III} \left[\frac{8}{3\pi} (1+\nu) + 2(1+2\nu) x_3 \right] \quad (6.139)$$

wird. Sucht man nun eine polynomiale Lösung für diese Gleichung mit der Randbedingung (6.138), so findet man

$$\bar{X} = \frac{1}{4} V_{,III} \left[\frac{4}{3\pi} + (1+2\nu) x_3 \right] \left[1 - x_2^2 - \left(x_3 + \frac{4}{3\pi} \right)^2 \right]. \quad (6.140)$$

Zunächst befassen wir uns mit der Bestimmung von $\bar{\Phi}$ und bedienen uns dabei der Polarkoordinaten

$$0 \leq r \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \Psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.141)$$

bzw. der Beziehungen

$$r \sin \Psi = x_2, \quad r \cos \Psi - \frac{4}{3\pi} = x_3 \quad (6.142)$$

Die Differentialgleichung (6.132) liefert uns unter Berücksichtigung der Randbedingung (6.135)

$$\bar{\Phi} = \theta_{,I} \left[\frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{r^n}{n(n^2-4)} \cos n\Psi - \frac{r^2}{2} (1 + \cos 2\Psi) \right]. \quad (6.143)$$

Damit sind wir in der Lage, die Schubspannungsverteilung im Querschnitt bis auf den Faktor $\theta_{,I}$, wie folgt anzugeben:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(-1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} & \left[\left(\frac{4\nu}{3\pi} V_{,III} - 2\theta_{,I} \right) r \cos \Psi - \frac{1}{4} (1+2\nu) V_{,III} r^2 \cos 2\Psi + \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{2} V_{,III} - \frac{3+2\nu}{4} V_{,III} + \frac{8\theta_{,I}}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{r^{n-1}}{n^2-4} \cos(n-1)\Psi \right] \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$G_{13}^{(-1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{4\nu}{3\pi} V_{III} - 2\Theta_{,1} \right) r \sin \Psi - \frac{1}{4}(1+2\nu) V_{III} r^2 \sin 2\Psi + \frac{8\Theta_{,1}}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{r^{n-1}}{n^2-4} \sin(n-1)\Psi \right]. \quad (6.145)$$

Die Querschnittsverdrehung Θ bekommen wir aus der Gleichung (6.47), die die Kopplung der Biegeschwingungen mit den Torsionsschwingungen wiedergibt, als

$$\Theta = - \frac{1-2\nu}{4,463} V_{,11} \quad (6.146)$$

Zur Ermittlung des Koeffizienten κ_2 in der Dispersionsgleichung ist noch im Zusammenhang mit dem in (6.69) auftretenden Integral

$$\int_F x_2 \bar{\Phi}_{,III} df \quad (6.147)$$

die Bestimmung der Funktion $\bar{\Phi}$ nötig. Unter Berücksichtigung von (6.35) und (6.39) sowie (6.146) erhalten wir aus (6.144)

$$\bar{\Phi}_{,2} = V_{,III} \left[a_1(x_3^2 - x_2^2) + a_2 x_3 + a_3 + a_4 P(x_2, x_3) \right], \quad (6.148)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4}(1+2\nu), & a_2 &= \frac{2}{3\pi} + \frac{1-2\nu}{4,463}, \\ a_4 &= -\frac{8(1-2\nu)}{\pi \cdot 4,463}, & a_3 &= \frac{8}{3\pi} \frac{1-2\nu}{4,463} - \frac{1}{2} + \frac{1+2\nu}{4} \left(\frac{16}{3\pi^2} - 1 \right) \end{aligned} \right\}, \quad (6.149)$$

$$P(x_2, x_3) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2-4} \left[\left(x_3 + \frac{4}{3\pi} \right)^2 + x_2^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cos \left[(n-1) \arctg \frac{x_2}{x_3 + \frac{4}{3\pi}} \right] \quad (6.150)$$

und integrieren diese in Form von

$$\bar{\Phi} = \tilde{f}(x_1, x_3, z) + V_{,III} \left[a_1(x_2 x_3^2 - \frac{1}{3} x_2^3) + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_2 + a_4 \int_0^{x_2} P(x_2, x_3) dx_2 \right]. \quad (6.151)$$

Die von x_2 unabhängige Funktion \tilde{f} in (6.151) ist wegen der Symmetrie des Querschnitts bezüglich x_3 -Achse hinsichtlich (6.147) belanglos. Das Integral (6.150) bestimmen wir mittels einer numerischen Integrationsmethode. Anschliessend kann auch (6.147) numerisch ausgewertet werden und man er-

hält aus (6.69)

$$K_2 = \frac{V_{II}}{V} \left[0,45779 + 0,07893v - \frac{1}{1+v} (0,05466 + 0,03005v^2) \right] = \frac{V_{II}}{V} \bar{K}_2 \quad (6.152)$$

Mit

$$\frac{V_{II}}{V} = - \left(2\pi \frac{l}{\lambda} \right)^2, \quad \bar{K}_3 = K_3 H = K_3 R = \frac{1}{4} R = \frac{1}{8} d = \frac{1}{8} h \quad (6.153)$$

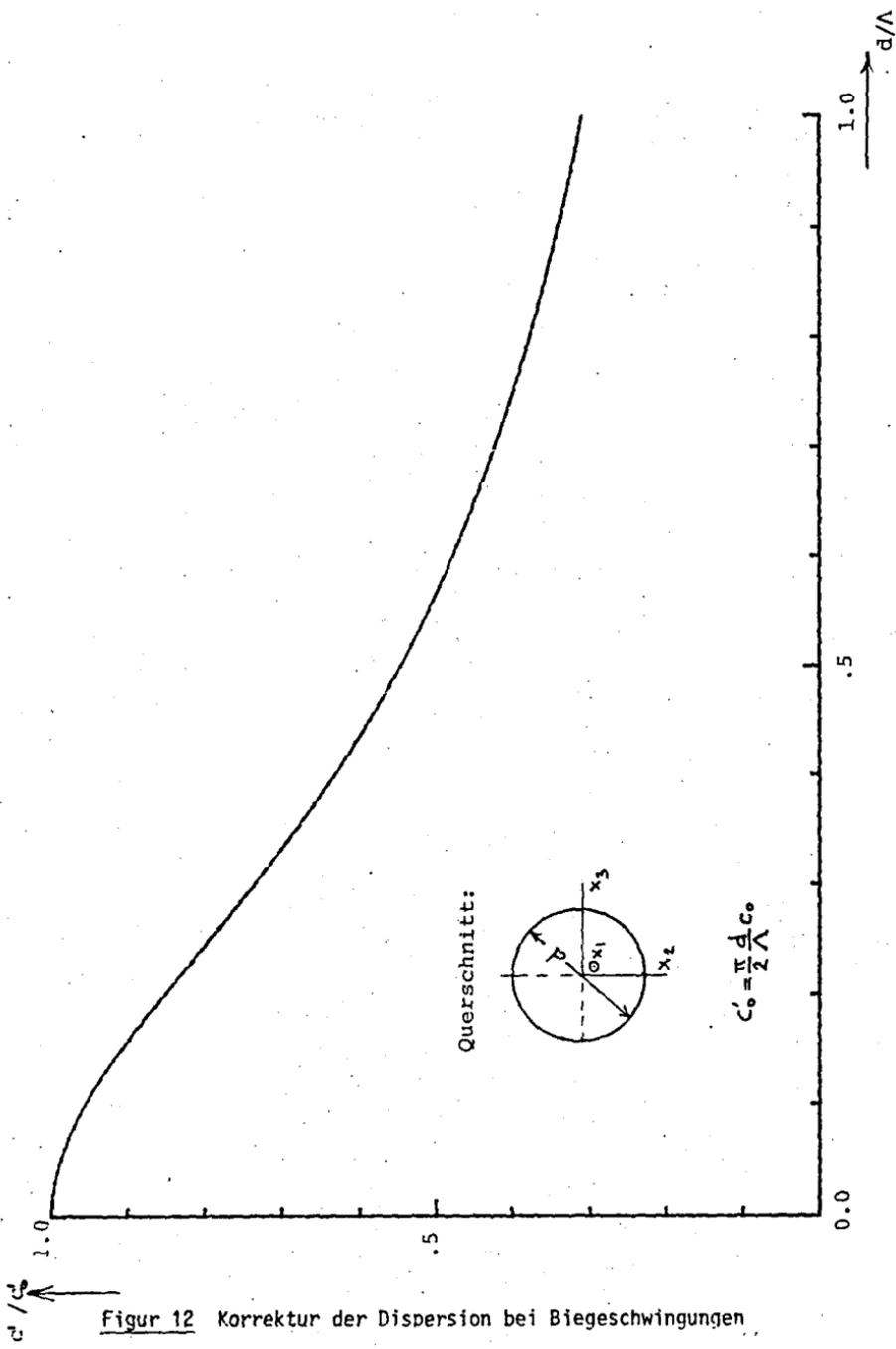
folgt dann aus (6.78) die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

$$c' = 2\pi \frac{R/4}{\lambda} c_0 \left(1 - 4\pi^2 \bar{E}_2 \frac{R^2}{\lambda^2} + O_3(\varepsilon^4) \right) \cong \frac{\pi}{2} \frac{R}{\lambda} c_0 \left(1 + 8\pi^2 \bar{E}_2 \frac{R^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (6.154)$$

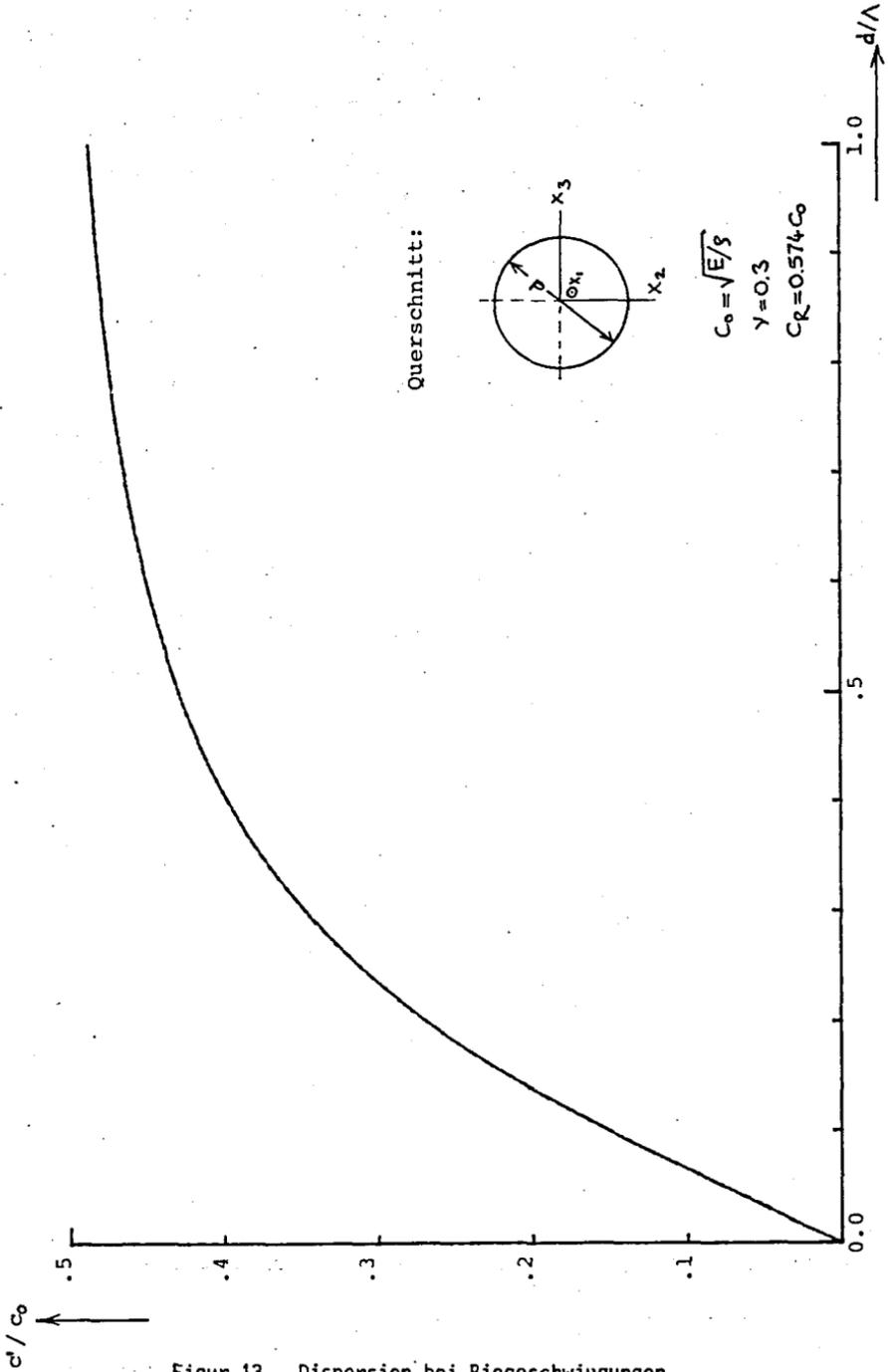
oder

$$c' \cong \frac{\pi}{4} \frac{h}{\lambda} c_0 \left(1 + 2\pi^2 \bar{E}_2 \frac{h^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \quad (6.155)$$

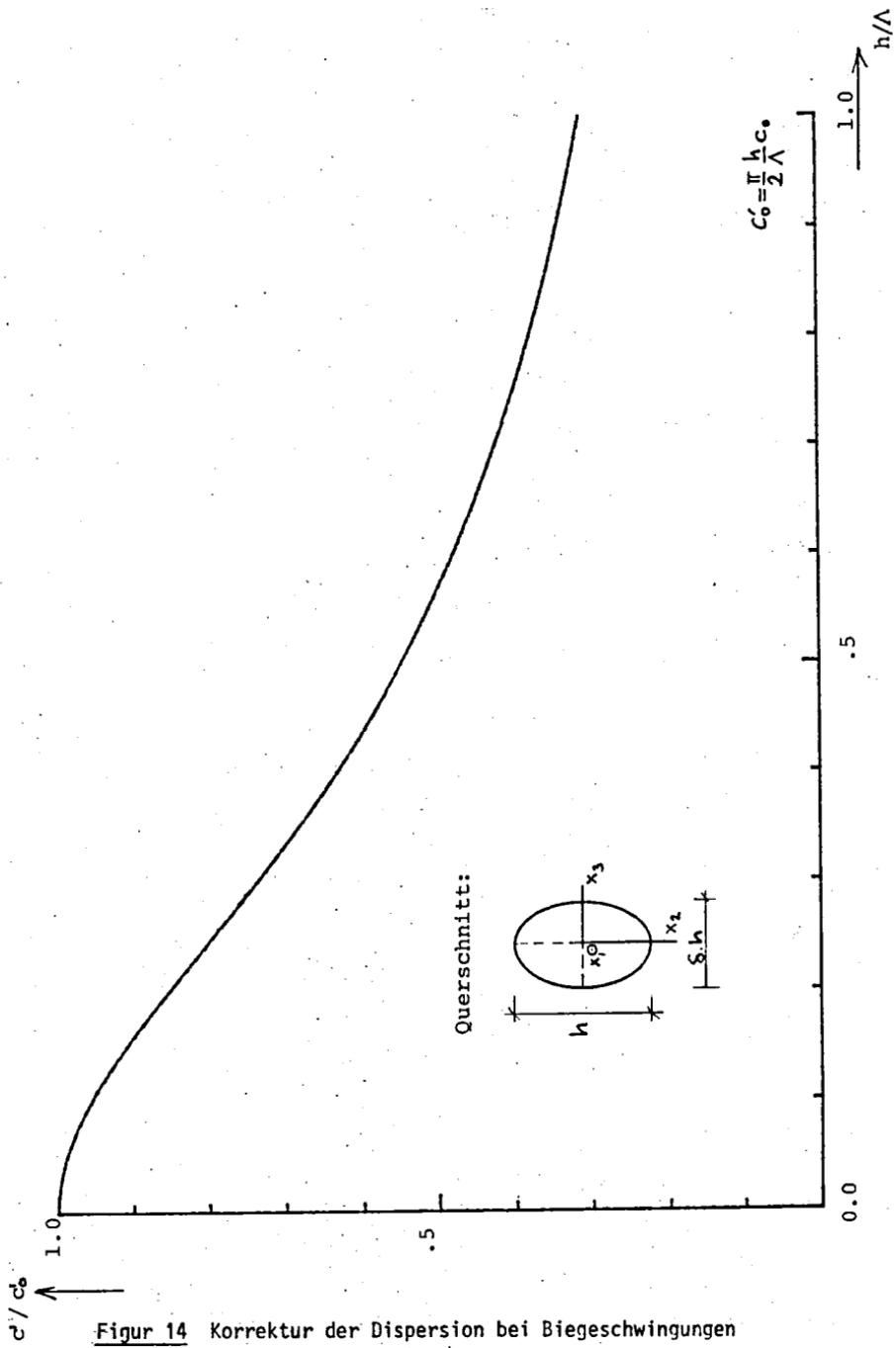
Bei graphischer Darstellung der Dispersion wurde als Beispiel $v = 0,3$ verwendet.



Figur 12 Korrektur der Dispersion bei Biegeschwingungen

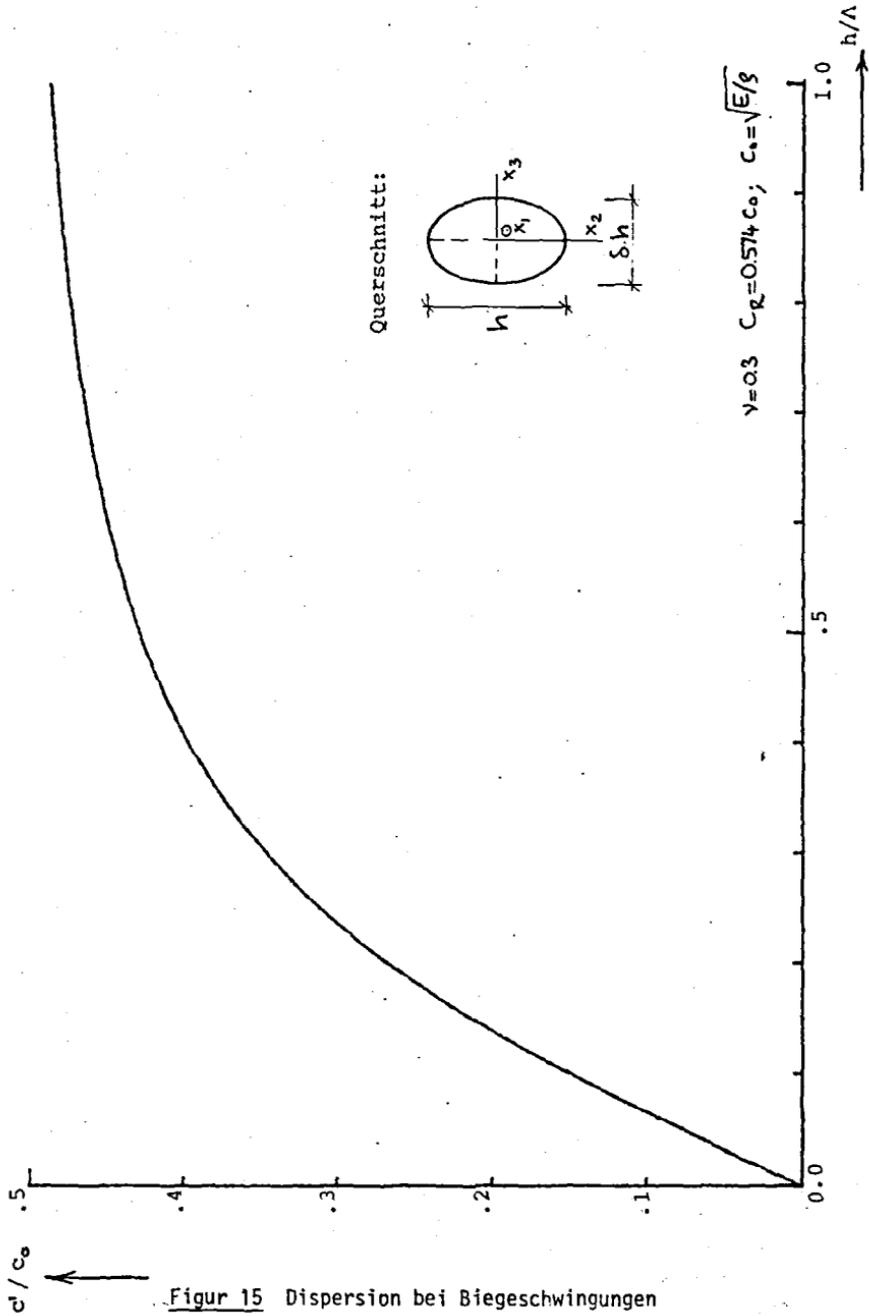


Figur 13 Dispersion bei Biegeschwingungen

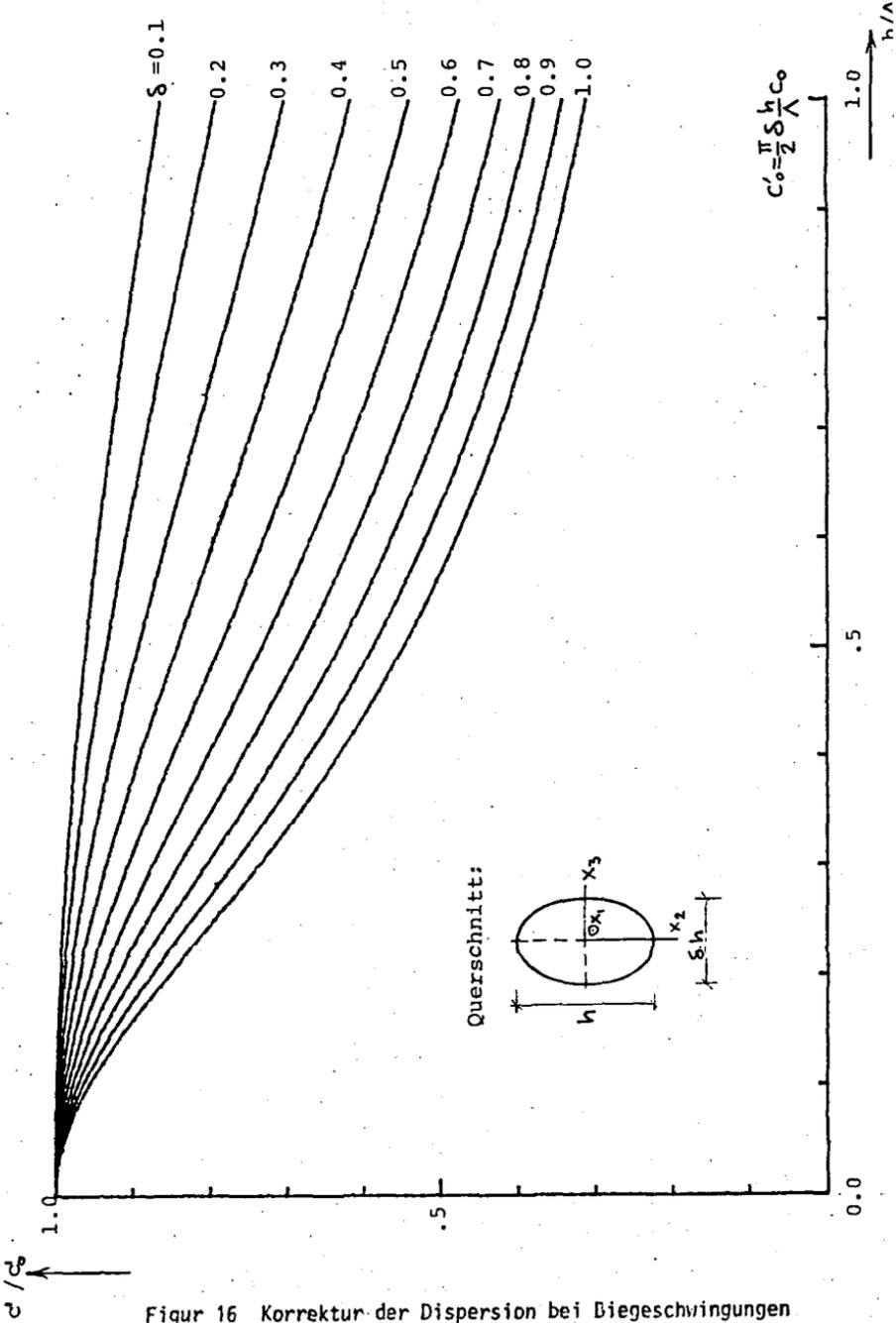


Figur 14 Korrektur der Dispersion bei Biegeschwingungen

$$U_2 \neq 0, U_3 = 0.$$

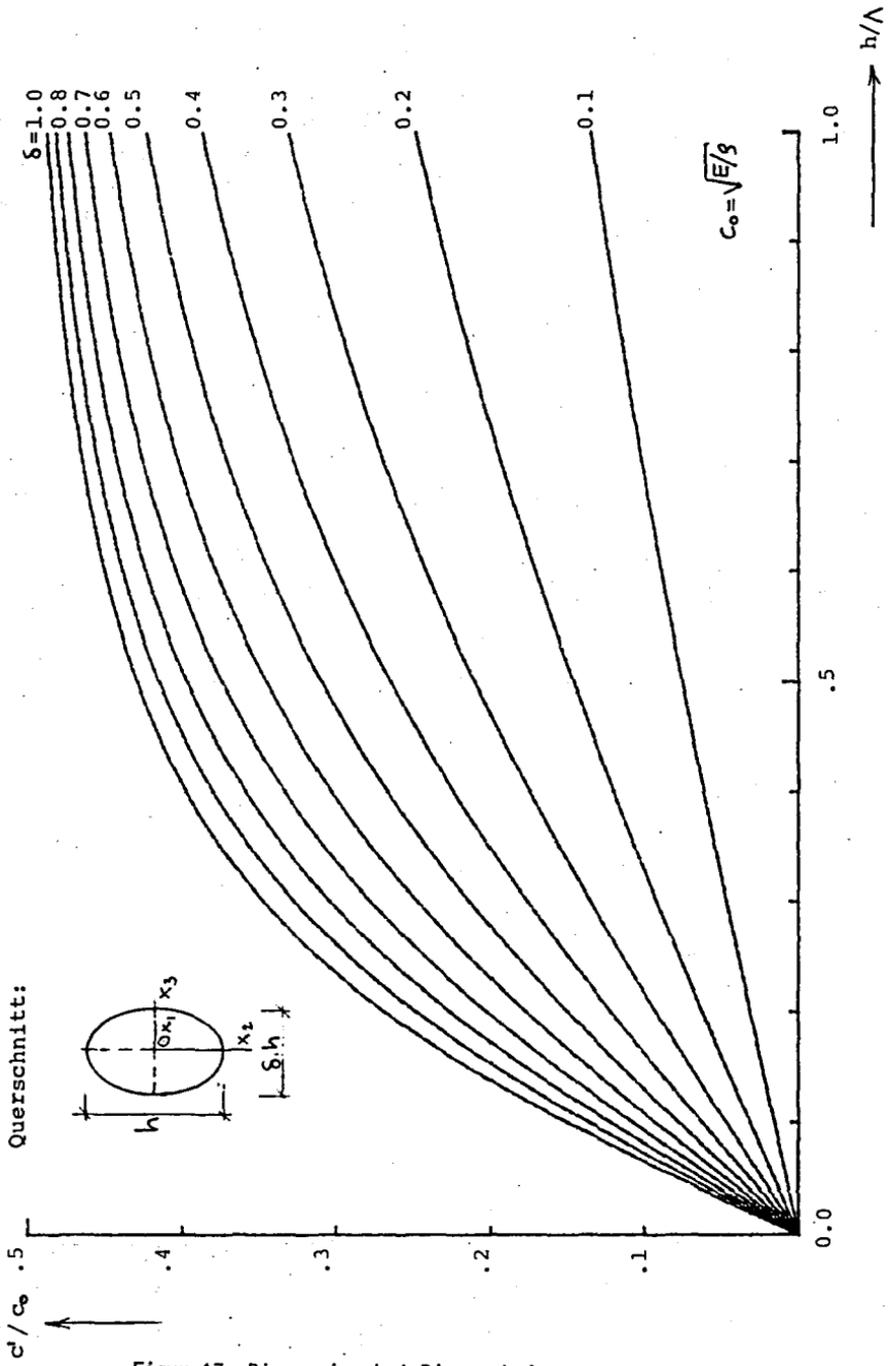


Figur 15 Dispersion bei Biegeschwingungen
 $U_2 \neq 0, U_3 = 0.$



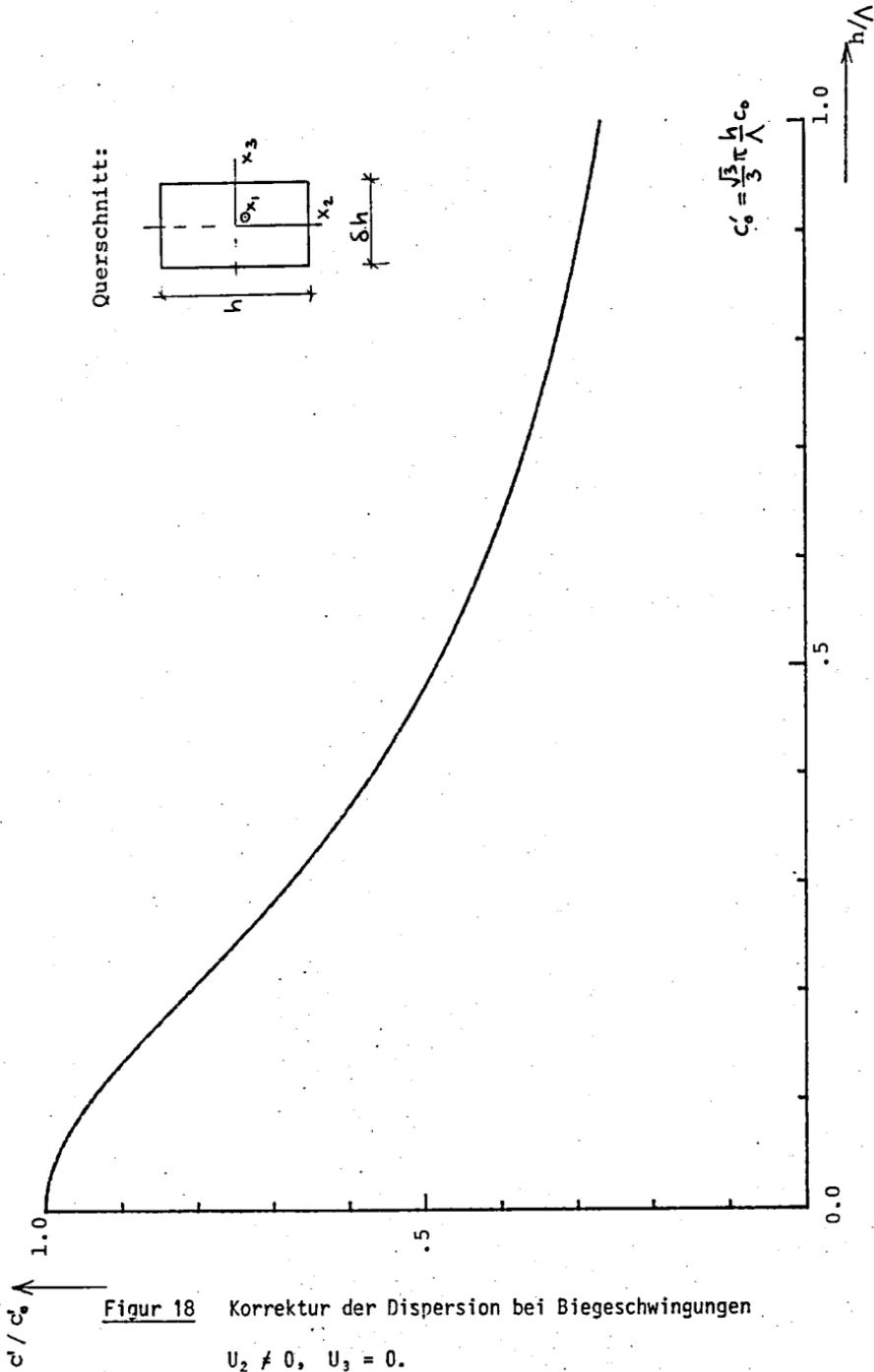
Figur 16 Korrektur der Dispersion bei Biegeschwingungen

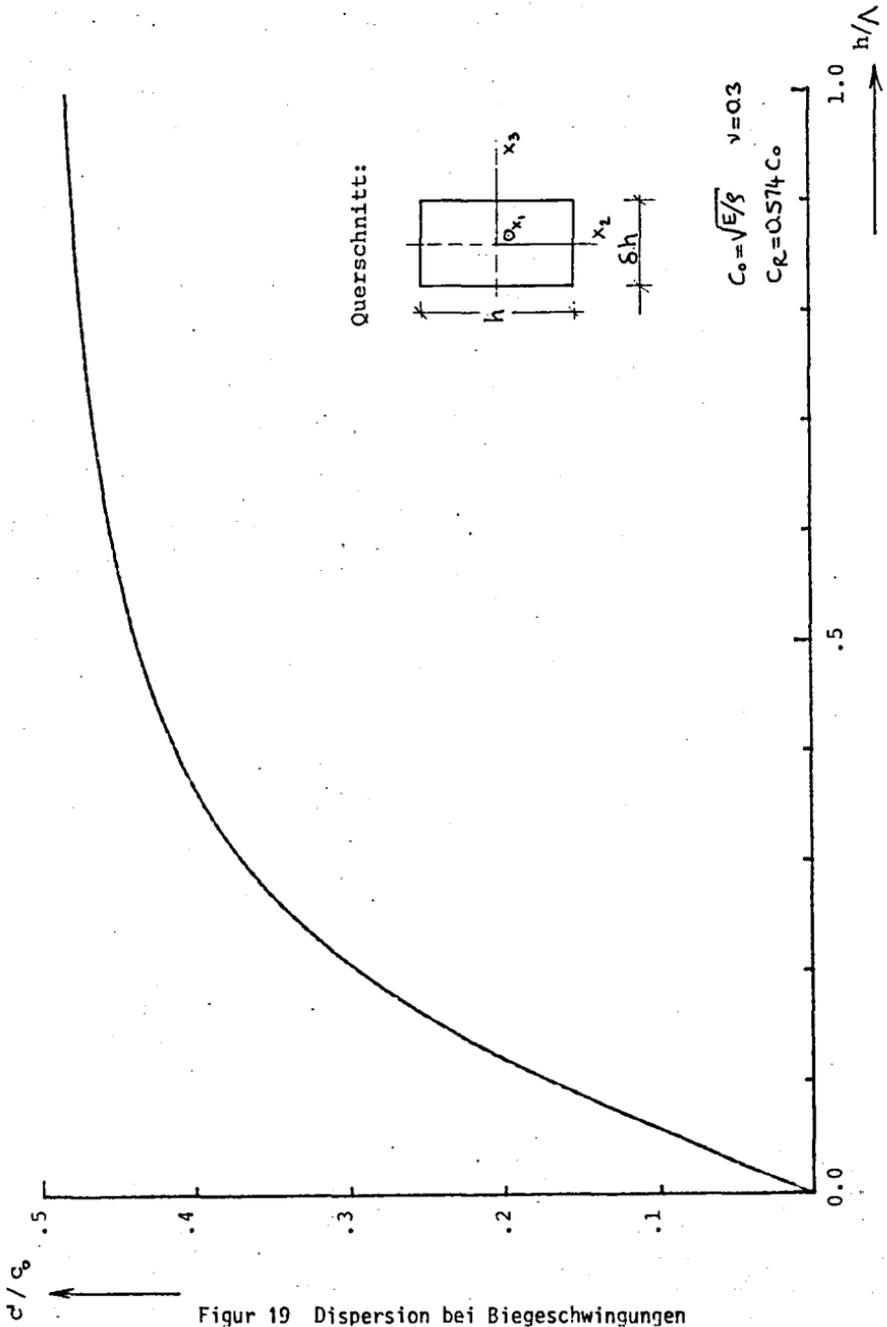
$U_2 = 0, U_3 \neq 0.$



Figur 17 Dispersion bei Biegeschwingungen

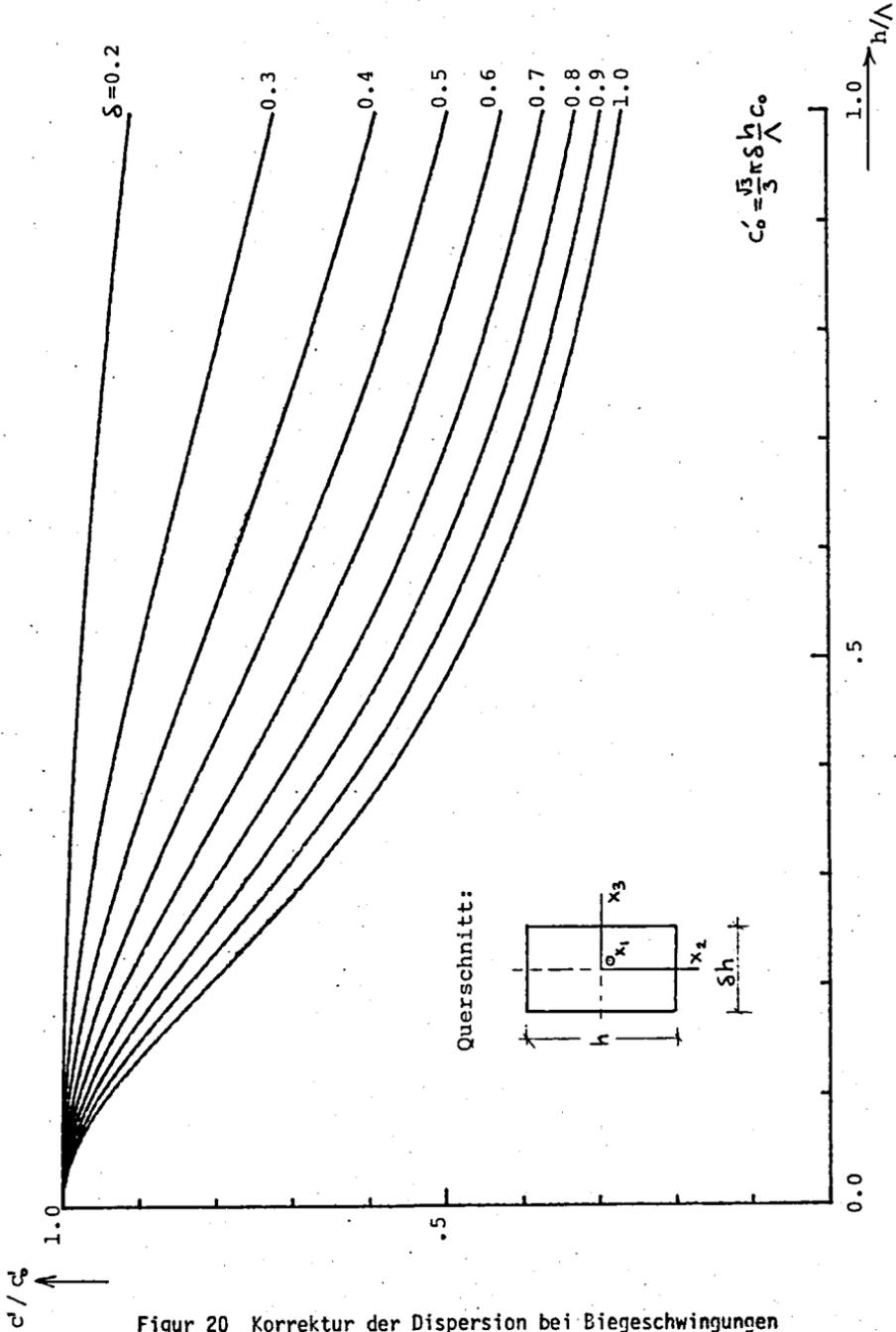
$U_2 = 0, U_3 \neq 0.$



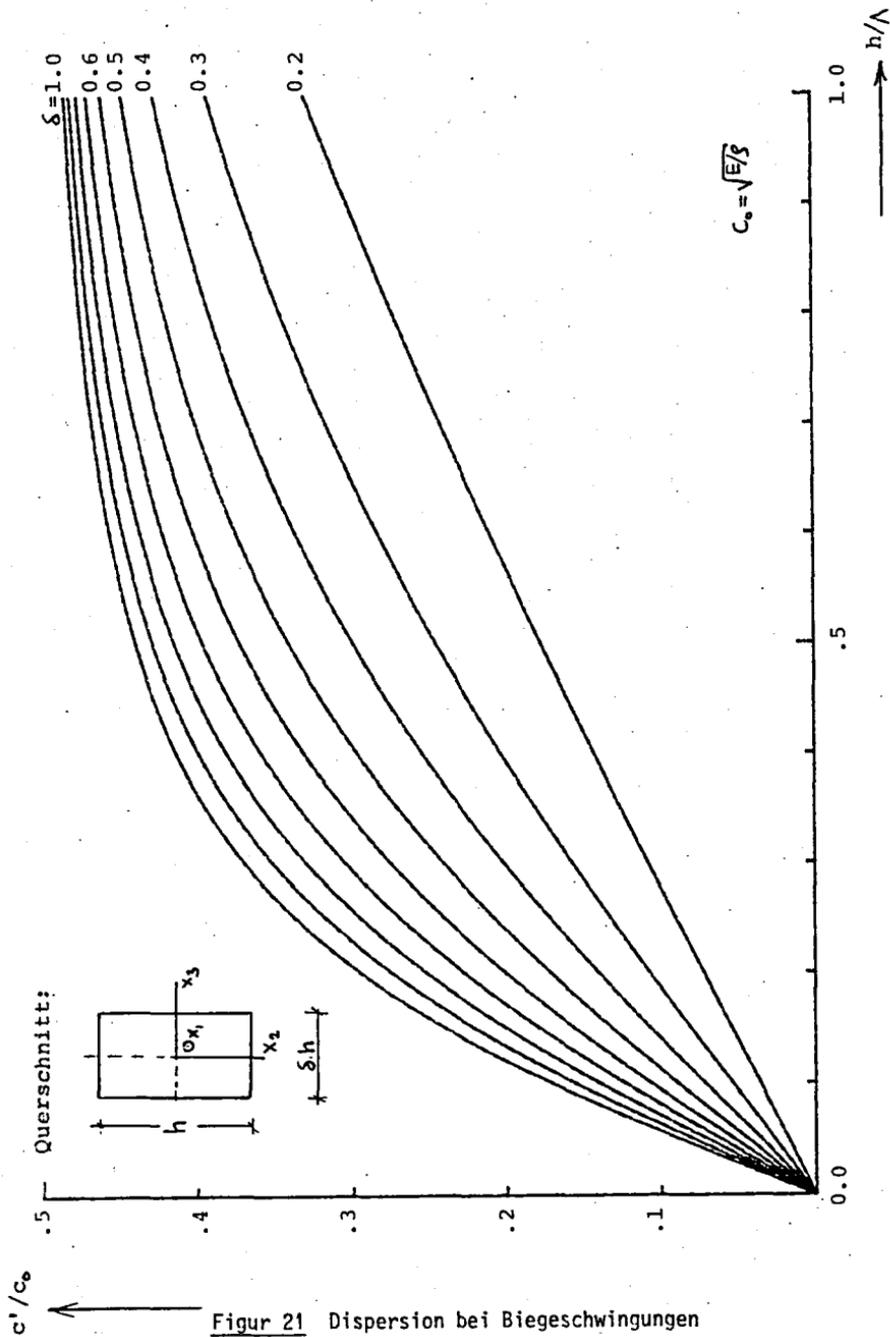


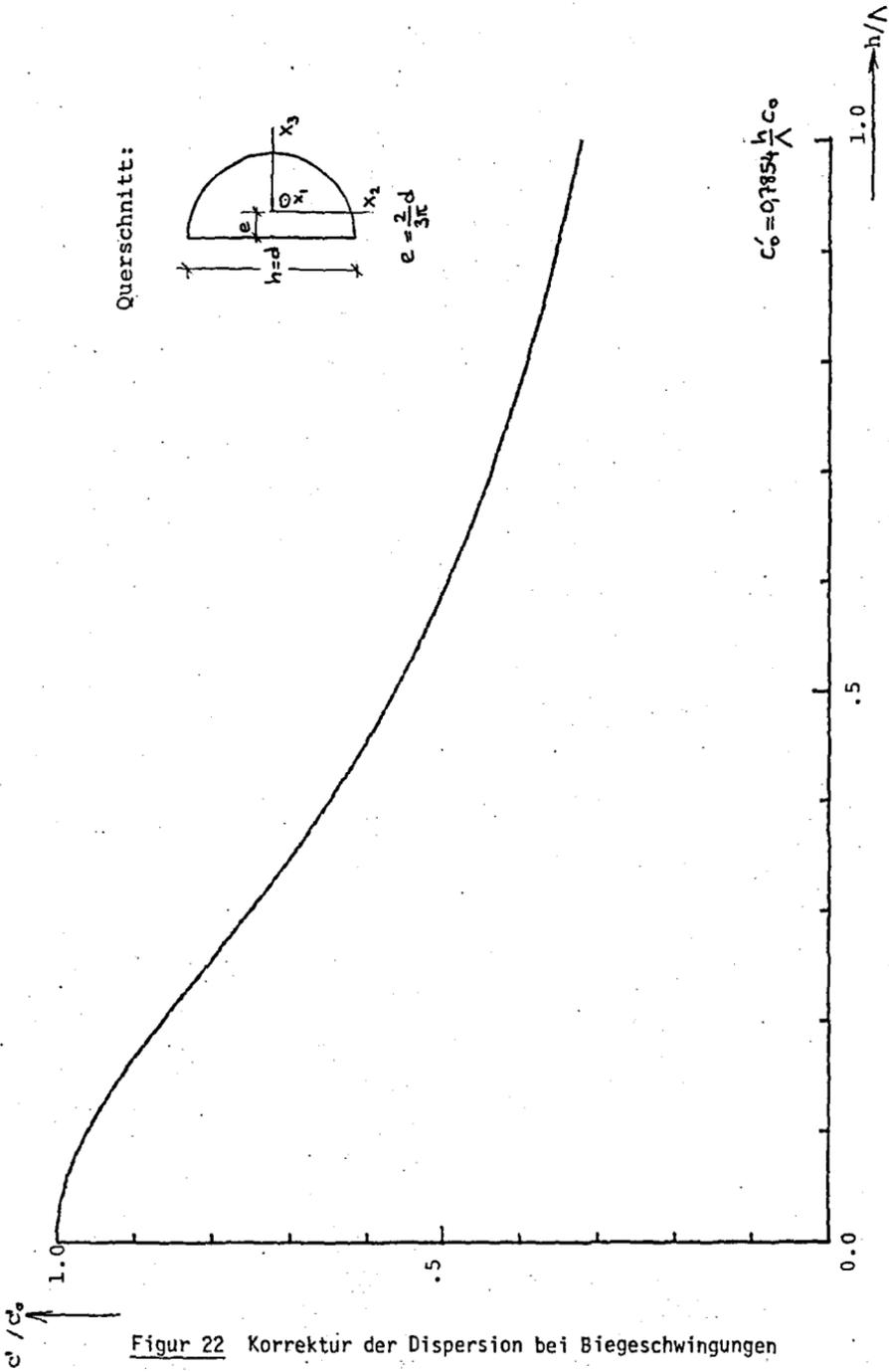
Figur 19 Dispersion bei Biegeschwingungen

$U_2 \neq 0, U_3 = 0.$



Figur 20 Korrektur der Dispersion bei Biegeschwingungen
 $U_2 = 0, U_3 \neq 0.$

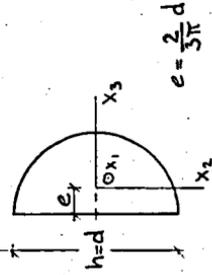




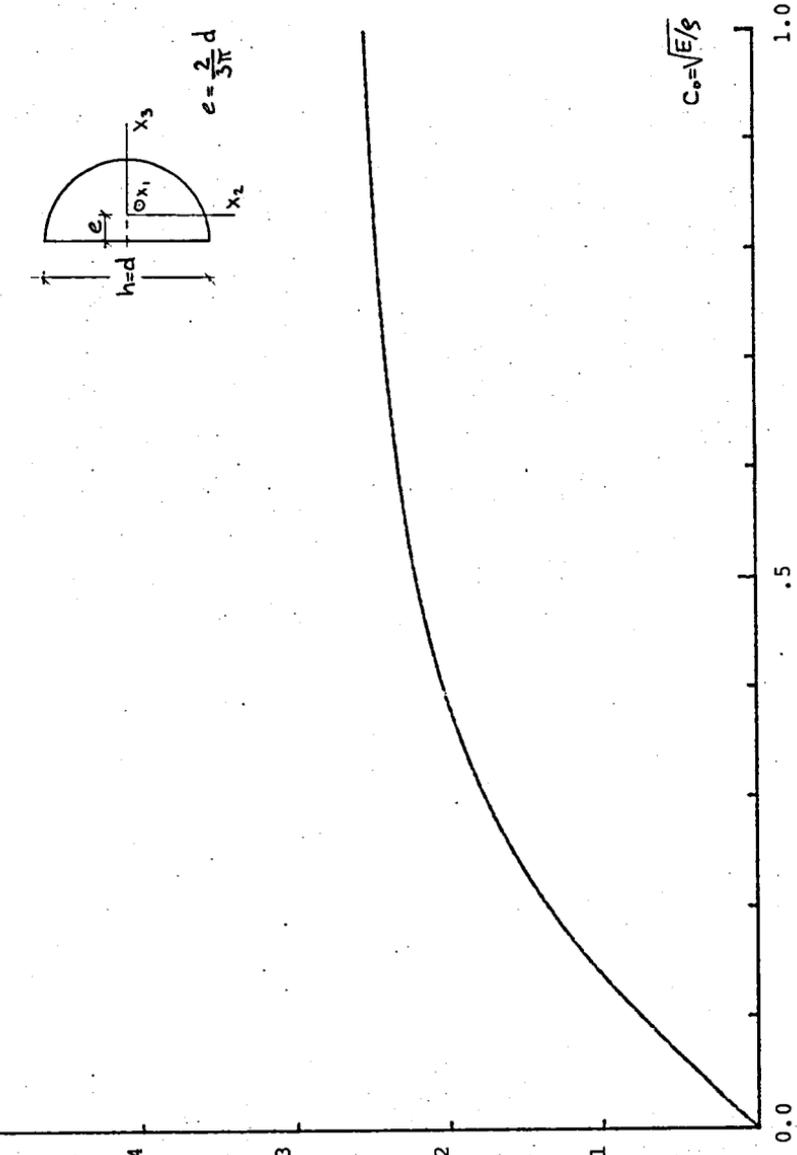
Figur 22 Korrektur der Dispersion bei Biegeschwingungen

$U_2 \neq 0, U_3 = 0$

Querschnitt:



c'/c_0



$c_0 = \sqrt{E/\rho}$

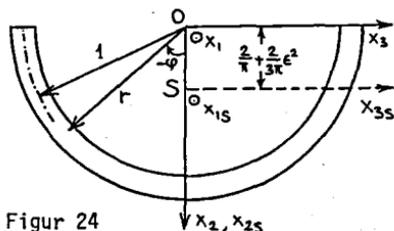
h/λ

Figur 23 Dispersion bei Biegeschwingungen

$U_2 \neq 0, U_3 = 0.$

7. GEKOPPELTE BIEGE- UND TORSIONSSCHWINGUNGEN VON STÄBEN MIT DUENNWANDIGEM OFFENEM QUERSCHNITT

Dass die asymptotische Methode auch in der Analyse von solchen Schwingungsfällen funktioniert, bzw. bei der Ermittlung der Dispersion angewendet werden kann, wollen wir in diesem Kapitel anhand eines konkreten Beispiels vollständigshalber kurz veranschaulichen. Wir wählen einen Querschnitt in Form eines halben Kreisbogens mit Radius R und Dicke $2\bar{t}=R\epsilon_s(\epsilon)=2t\epsilon R$. Im weiteren wird $t=1$ gesetzt, wobei diese Spezialisierung lediglich zur möglich einfachen Illustration des vorgehens dient und als belanglos angesehen werden darf. Wir nehmen $\epsilon=R/L \ll 1$ an und verwenden zum Teil das zylindrische Koordinatensystem (x_1, r, φ) bzw. (x_1, φ, φ) , sowie folgende Beziehungen zwischen den dimensionsbehafteten und dimensionslosen Koordinaten:



$$r = \frac{\bar{r}}{R} = 1 + \epsilon \vartheta \quad (-1 \leq \vartheta \leq 1) \quad (7.1)$$

$$x_2 = \frac{\bar{x}_2}{R} = r \cos \varphi = (1 + \epsilon \vartheta) \cos \varphi \quad (7.2)$$

$$x_3 = \frac{\bar{x}_3}{R} = r \sin \varphi = (1 + \epsilon \vartheta) \sin \varphi \quad (7.3)$$

Figur 24

Als Schwingungscharakteristik gemäss Gleichungen (3.4) stellen wir die Beziehung

$$\frac{\vartheta R^2}{ET^2} = O_s(\epsilon^4) = \lambda \epsilon^4 = \epsilon^4 \quad (7.4)$$

fest, wobei wiederum willkürlich, jedoch ohne jeglichen Einfluss auf das weitere Vorgehen, $\lambda=1$ gesetzt wird. Im Hinblick auf die Symmetrieeigenschaft des Querschnitts erwarten wir eine Kopplung zwischen Biegeschwingungen in der $x_{1s} - x_{3s}$ -Ebene und Torsionsschwingungen des Stabes. Hingegen werden die Biegeschwingungen $u_2(x_1, \tau)$ nicht mit den beiden anderen Schwingungen gekoppelt sein. Auf Grund der Skalierungsüberlegungen führen wir folgende Entwicklungen für die dimensionslosen Verschiebungen und Spannungen ein:

$$u_1 = u_1^{(0)} + \varepsilon u_1^{(1)} + O_5(\varepsilon^2) \quad (7.5)$$

$$u_g = \frac{1}{\varepsilon} u_g^{(-1)} + u_g^{(0)} + O_5(\varepsilon) \quad (7.6)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{\varepsilon} u_\varphi^{(-1)} + u_\varphi^{(0)} + O_5(\varepsilon) \quad (7.7)$$

$$\sigma_{11} = \varepsilon \sigma_{11}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{11}^{(2)} + O_5(\varepsilon^3) \quad (7.8)$$

$$\sigma_{1g} = \varepsilon^2 \sigma_{1g}^{(2)} + \varepsilon^3 \sigma_{1g}^{(3)} + O_5(\varepsilon^4) \quad (7.9)$$

$$\sigma_{1\varphi} = \varepsilon \sigma_{1\varphi}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{1\varphi}^{(2)} + O_5(\varepsilon^3) \quad (7.10)$$

$$\sigma_{gg} = \varepsilon^2 \sigma_{gg}^{(2)} + \varepsilon^3 \sigma_{gg}^{(3)} + O_5(\varepsilon^4) \quad (7.11)$$

$$\sigma_{g\varphi} = \varepsilon^2 \sigma_{g\varphi}^{(2)} + \varepsilon^3 \sigma_{g\varphi}^{(3)} + O_5(\varepsilon^4) \quad (7.12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \varepsilon^2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + \varepsilon^3 \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} + O_5(\varepsilon^4) \quad (7.13)$$

Die Zeittransformation (3.5) ersetzen wir durch

$$\tau = \kappa t \quad (7.14)$$

wobei

$$\kappa = 1 + \kappa_1 \varepsilon + \kappa_2 \varepsilon^2 + O_5(\varepsilon^3) \quad (7.15)$$

Das Stoffgesetz (3.3), im zylindrischen Koordinatensystem (x_1, ρ, φ) formuliert, nimmt folgende Form an:

$$\varepsilon u_{1,1} = \sigma_{11} - \nu (\sigma_{gg} + \sigma_{\varphi\varphi}) \quad (7.16)$$

$$u_{1,g} + \varepsilon^2 u_{g,1} = 2(1+\nu)\varepsilon \sigma_{1g} \quad (7.17)$$

$$u_{1,\varphi} + \varepsilon(1+\varepsilon g) u_{\varphi,1} = 2(1+\nu)(1+\varepsilon g) \sigma_{1\varphi} \quad (7.18)$$

$$u_{g,g} = \varepsilon [\sigma_{gg} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{\varphi\varphi})] \quad (7.19)$$

$$u_{\varphi, \varphi} + u_{\varphi} = (1 + \varepsilon \delta) \left[\sigma_{\varphi \varphi} - \gamma (\sigma_{11} + \sigma_{\varphi \varphi}) \right] \quad (7.20)$$

$$\varepsilon u_{\varphi, \varphi} + (1 + \varepsilon \delta) u_{\varphi, \varphi} - \varepsilon u_{\varphi} = 2(1 + \gamma) \varepsilon (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{\varphi \varphi} \quad (7.21)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen (3.4) schreiben sich im neuen Koordinatensystem in Form von

$$\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{s,1} + (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{1s,s} + \varepsilon (\sigma_{1s} + \sigma_{1\varphi, \varphi}) = \varepsilon^5 (1 + \varepsilon \delta) (1 + 2\kappa_1 \varepsilon + \dots) \ddot{u}_1 \quad (7.22)$$

$$\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{s,1} + (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{s,s} + \varepsilon (\sigma_{ss} - \sigma_{\varphi \varphi} + \sigma_{\varphi \varphi, \varphi}) = \varepsilon^5 (1 + \varepsilon \delta) (1 + 2\kappa_1 \varepsilon + \dots) \ddot{u}_s \quad (7.23)$$

$$\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{\varphi,1} + (1 + \varepsilon \delta) \sigma_{\varphi s,s} + \varepsilon (\sigma_{\varphi \varphi, \varphi} + 2\sigma_{\varphi s}) = \varepsilon^5 (1 + \varepsilon \delta) (1 + 2\kappa_1 \varepsilon + \dots) \ddot{u}_{\varphi} \quad (7.24)$$

Setzt man die Entwicklungen (7.5) bis (7.13) in die Gleichungen (7.16) bis (7.24) ein und bildet den Limes für $\varepsilon \rightarrow 0$, so erhält man aus jeder einzelnen folgende sukzessive Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u_{1,1}^{(0)} &= \sigma_{11}^{(1)} \\ u_{1,1}^{(1)} &= \sigma_{11}^{(2)} - \gamma (\sigma_{ss}^{(2)} + \sigma_{\varphi \varphi}^{(2)}) \\ u_{1,1}^{(2)} &= \sigma_{11}^{(3)} - \gamma (\sigma_{ss}^{(3)} + \sigma_{\varphi \varphi}^{(3)}) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{1,s}^{(0)} &= 0 \\ u_{1,s}^{(1)} + u_{s,1}^{(-1)} &= 0 \\ u_{1,s}^{(2)} + u_{s,1}^{(0)} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{1,\varphi}^{(0)} + u_{\varphi,1}^{(-1)} &= 0 \\ u_{1,\varphi}^{(1)} + u_{\varphi,1}^{(0)} + \gamma u_{\varphi,1}^{(-1)} &= 2(1 + \gamma) \sigma_{1\varphi}^{(1)} \\ u_{1,\varphi}^{(2)} + u_{\varphi,1}^{(1)} + \gamma u_{\varphi,1}^{(0)} &= 2(1 + \gamma) (\sigma_{1\varphi}^{(2)} + \gamma \sigma_{1\varphi}^{(1)}) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{s,s}^{(-1)} &= 0 \\ u_{s,s}^{(0)} &= 0 \\ u_{s,s}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\varphi, \varphi}^{(-1)} + U_{\xi}^{(-1)} &= 0 \\ U_{\varphi, \varphi}^{(0)} + U_{\xi}^{(0)} &= 0 \\ U_{\varphi, \varphi}^{(1)} + U_{\xi}^{(1)} &= -\nu \sigma_{11}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\varphi, \xi}^{(-1)} &= 0 \\ U_{\varphi, \xi}^{(0)} + U_{\xi, \varphi}^{(-1)} - U_{\varphi}^{(-1)} &= 0 \\ U_{\varphi, \xi}^{(1)} + U_{\xi, \varphi}^{(0)} - U_{\varphi}^{(0)} + \xi U_{\varphi, \xi}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1\xi, \xi}^{(2)} + \sigma_{1\varphi, \varphi}^{(1)} &= 0 \\ \sigma_{1\xi, \xi}^{(3)} + \sigma_{1\varphi, \varphi}^{(2)} + \sigma_{11, 1}^{(1)} &= 0 \\ \sigma_{1\xi, \xi}^{(4)} + \sigma_{1\varphi, \varphi}^{(3)} + \sigma_{11, 1}^{(2)} + \sigma_{1\xi}^{(3)} + \xi \sigma_{1\xi, \xi}^{(3)} + \xi \sigma_{11, 1}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi, \xi}^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{\xi\xi, \xi}^{(3)} + \sigma_{\xi\varphi, \varphi}^{(2)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{\xi\xi, \xi}^{(4)} + \sigma_{\xi\varphi, \varphi}^{(3)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} + \sigma_{\xi\xi}^{(3)} + \xi \sigma_{\xi\xi, \xi}^{(3)} + \sigma_{\xi 1, 1}^{(2)} &= \hat{U}_{\xi}^{(-1)} \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi\xi, \xi}^{(2)} &= 0 \\ \sigma_{\varphi\xi, \xi}^{(3)} + \sigma_{\varphi\varphi, \varphi}^{(2)} + \sigma_{\varphi 1, 1}^{(1)} &= 0 \\ \sigma_{\varphi\xi, \xi}^{(4)} + \sigma_{\varphi\varphi, \varphi}^{(3)} + \sigma_{\varphi 1, 1}^{(2)} + 2 \sigma_{\varphi\xi}^{(3)} + \xi \sigma_{\varphi\xi, \xi}^{(3)} + \xi \sigma_{\varphi 1, 1}^{(1)} &= \hat{U}_{\varphi}^{(-1)} \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Dass die inneren und äusseren Seitenflächen ($\rho = \pm 1$) des Stabes spannungsfrei sind, bildet die Hauptrandbedingung unseres Problems, welche streng zu erfüllen ist. Hingegen werden wir uns nötigenfalls erlauben, die Randbedingungen bezüglich der kurzen Querschnittskanten ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$), nämlich dass diese ebenfalls spannungsfrei sind, wie bisher für alle Stabendquerschnitte nur im Mittel zu befriedigen, da sonst Grenzschnittbetrachtungen unerlässlich sind.

Nun befassen wir uns mit der Bestimmung der primären Verschiebungen und Spannungen. Durch Integration von (7.30.2) unter Berücksichtigung von (7.28.1) und (7.30.1) erhalten wir

$$U_{\varphi}^{(0)} = \hat{U}_{\varphi}^{(0)}(x, \varphi, \tau) + \xi (U_{\varphi}^{(-1)} - U_{\xi, \varphi}^{(-1)}) \quad (7.34)$$

Aus (7.28.2), (7.29.2) und (7.34) lässt sich die Beziehung

$$u_{\varphi, \varphi}^{(-1)} = u_{\varphi, \varphi \varphi}^{(-1)} \quad (7.35)$$

herleiten, welche in (7.29.1) eingesetzt, zur Differentialgleichung

$$u_{\varphi}^{(-1)} + u_{\varphi, \varphi \varphi}^{(-1)} = 0 \quad (7.36)$$

führt. (7.29.1) und (7.36) genügen uns, die Verschiebungsgrößen $u_{\rho}^{(-1)}$ und $u_{\varphi}^{(-1)}$ in folgender Form zu ermitteln:

$$u_{\varphi}^{(-1)} = \hat{u}_2(x_1, \tau) \cos \varphi + \left(\hat{u}_3(x_1, \tau) - \frac{2}{\pi} \Theta(x_1, \tau) \right) \sin \varphi \quad (7.37)$$

$$u_{\varphi}^{(-1)} = -\hat{u}_2(x_1, \tau) \sin \varphi + \left(\hat{u}_3(x_1, \tau) - \frac{2}{\pi} \Theta(x_1, \tau) \right) \cos \varphi + \Theta(x_1, \tau). \quad (7.38)$$

Der Zusammenhang von (7.37) und (7.38) mit den im kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) ausgedrückten Verschiebungen

$$u_2^{(-1)} = \hat{u}_2(x_1, \tau) - \Theta(x_1, \tau) x_3 \quad (7.39)$$

$$u_3^{(-1)} = \hat{u}_3(x_1, \tau) + \Theta(x_1, \tau) \left(x_2 - \frac{2}{\pi} \right), \quad (7.40)$$

wird bestätigt, wenn man sich die Transformation

$$u_{\varphi}^{(-1)} = u_2^{(-1)} \cos \varphi + u_3^{(-1)} \sin \varphi \quad (7.41)$$

$$u_{\varphi, \varphi}^{(-1)} = -u_2^{(-1)} \sin \varphi + u_3^{(-1)} \cos \varphi \quad (7.42)$$

vor Augen hält. (7.37) und (7.38) in (7.30.2) eingesetzt, liefern, nach deren Integration,

$$u_{\varphi}^{(0)} = \Theta S \quad (7.43)$$

sowie aus (7.29.2)

$$u_{\varphi}^{(0)} = 0 \quad (7.44)$$

Wiederum anhand (7.37) und (7.38) erhalten wir aus (7.26.1) und (7.27.1)

$$u_i^{(0)} = \hat{u}_i(x_i, \tau) - \hat{u}_{2,i} \left(\cos \varphi - \frac{z}{\pi} \right) - \hat{u}_{3,i} \sin \varphi - \Theta_{,i} \left(\varphi - \frac{z}{\pi} \sin \varphi \right) \quad (7.45)$$

und dadurch aus (7.25.1)

$$\sigma_{11}^{(1)} = \hat{u}_{1,1}(x_i, \tau) - \hat{u}_{2,1} \left(\cos \varphi - \frac{z}{\pi} \right) - \hat{u}_{3,1} \sin \varphi - \Theta_{,1} \left(\varphi - \frac{z}{\pi} \sin \varphi \right) \quad (7.46)$$

Durch Ableiten bekommen wir aus (7.26.2) und (7.30.2) die Beziehungen

$$u_{\varphi, \varphi_1}^{(0)} = u_{\varphi, 1}^{(-1)} - u_{\varphi, \varphi_1}^{(-1)} \quad (7.47)$$

$$u_{1, \varphi \varphi}^{(1)} = -u_{\varphi, \varphi_1}^{(-1)} \quad (7.48)$$

welche, in die aus (7.27.2) hergeleitete Gleichung

$$u_{\varphi, \varphi_1}^{(0)} + u_{\varphi, 1}^{(-1)} + u_{1, \varphi \varphi}^{(-1)} = 2(1+\nu) \sigma_{1\varphi, \varphi}^{(1)} \quad (7.49)$$

eingesetzt, zu

$$2(1+\nu) \sigma_{1\varphi, \varphi}^{(1)} = 2\Theta_{,1} \quad (7.50)$$

bzw. nach deren Integration, zur primären Schubspannung

$$\sigma_{1\varphi}^{(1)} = \frac{\Theta_{,1}}{1+\nu} \varphi \quad (7.51)$$

führt. Unter Berücksichtigung von (7.51), sowie der entsprechenden Randbedingung, folgern wir anhand (7.31.1), dass

$$\sigma_{1\varphi}^{(2)} = 0 \quad (7.52)$$

(7.38), (7.42) und (7.51) in (7.27.2) eingesetzt, folgt $u_{1,\varphi}^{(1)}$; ebenfalls findet man aus (7.26.2) und (7.37) $u_{1,\rho}^{(1)}$, welche uns die Längsverschiebungen nächster Ordnung in folgender Form diktieren:

$$u_i^{(1)} = \hat{u}_i^{(1)}(x_i, \tau) - \varphi \left[\hat{u}_{2,i} \cos \varphi + \hat{u}_{3,i} \sin \varphi - \Theta_{,i} \frac{z}{\pi} \sin \varphi \right] \quad (7.53)$$

In Anlehnung an (7.43) und (7.44) kann man aus (7.30.3) auf

$$u_{\varphi}^{(1)} = u_{\varphi}^{(1)}(x_1, \varphi, \tau) \quad (7.54)$$

und aus (7.26.3) auf

$$u_1^{(2)} = u_1^{(2)}(x_1, \varphi, \tau) \quad (7.55)$$

schliessen. Setzt man diese mit (7.43) und (7.51) zusammen in die Gleichung (7.27.3) ein, so folgt daraus

$$2(1+\nu) \sigma_{1\varphi}^{(2)} = -\Theta_{,1} s^2 + u_{\varphi,1}^{(1)} + u_{1,\varphi}^{(2)} \quad (7.56)$$

welche abgeleitet nach φ , uns unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingung, anhand (7.31.2) und (7.46),

$$\sigma_{1s}^{(3)} = 0 \quad (7.57)$$

liefert. Unmittelbar kann man schreiben:

$$\sigma_{1\varphi, \varphi}^{(2)} = -\sigma_{11,1}^{(1)} = -\hat{u}_{1,11}(x_1, \tau) + \hat{u}_{2,111}(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}) + \hat{u}_{3,111} \sin\varphi + \Theta_{,111}(\varphi - \frac{2}{\pi} \sin\varphi) \quad (7.58)$$

bzw.

$$\sigma_{1\varphi}^{(2)} = \frac{\Theta_{,1}}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{3} - s^2 \right) + \hat{u}_{2,111} \left(\sin\varphi - \frac{\varphi}{\pi/2} \right) - \hat{u}_{3,111} \cos\varphi + \Theta_{,111} \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{2}{\pi} \cos\varphi \right) \quad (7.59)$$

indem man die Randbedingung für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ im Mittel erfüllt.

Die Gleichungen (7.32.1) und (7.33.1) jeweils mit dazugehöriger Randbedingung zusammen betrachtet, geben uns

$$\sigma_{ss}^{(2)} = 0 \quad (7.60)$$

$$\sigma_{s\varphi}^{(2)} = 0 \quad (7.61)$$

Somit haben wir alle Spannungsgrößen bis und mit den Termen der Ordnung $O_s(\varepsilon^2)$, bis auf $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ und $\sigma_{11}^{(2)}$ bestimmt. Wir verzichten auf die Bestimmung weiterer Approximationen für die Spannungen und Verschiebungen, da sich deren Berechnung, ohne neue Erkenntnisse zu liefern, als technisch immer komplizierter erweist und insbesondere Grenzschichtbetrachtungen beginnen

eine Rolle zu spielen, und wenden uns der Herleitung der eigentlichen Bewegungsdifferentialgleichungen der Schwingungen zu. Dafür kehren wir zum kartesischen Koordinatensystem zurück und schreiben den Spannungstensor

$$\tilde{T}^* := \begin{bmatrix} \varepsilon \sigma_{11}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{11}^{(2)} & 0 & \varepsilon \sigma_{1\varphi}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{1\varphi}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon \sigma_{1\varphi}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{1\varphi}^{(2)} & 0 & \varepsilon^2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & 0 & \sigma_{1\varphi}^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{1\varphi}^* & 0 & \sigma_{\varphi\varphi}^* \end{bmatrix}, \quad (7.62)$$

der die Spannungen der Ordnungen $O_s(\varepsilon)$ und $O_s(\varepsilon^2)$ enthält, anhand der Transformationsmatrix

$$\tilde{Q} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

sowie der Abkürzungen $s = \sin\varphi$; $c = \cos\varphi$, in Form von

$$\tilde{T} = \tilde{Q} \tilde{T} \tilde{Q}^* := \begin{bmatrix} \varepsilon \sigma_{11}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{11}^{(2)} & \varepsilon \sigma_{12}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{12}^{(2)} & \varepsilon \sigma_{13}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{13}^{(2)} \\ \varepsilon \sigma_{12}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{12}^{(2)} & \varepsilon^2 \sigma_{22}^{(2)} & \varepsilon^2 \sigma_{23}^{(2)} \\ \varepsilon \sigma_{13}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{13}^{(2)} & \varepsilon^2 \sigma_{32}^{(2)} & \varepsilon^2 \sigma_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & -s \sigma_{1\varphi}^* & c \sigma_{1\varphi}^* \\ -s \sigma_{1\varphi}^* & s^2 \sigma_{\varphi\varphi}^* & -s c \sigma_{\varphi\varphi}^* \\ c \sigma_{1\varphi}^* & -s c \sigma_{1\varphi}^* & c^2 \sigma_{\varphi\varphi}^* \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

Nun ersetzen wir die Bewegungsdifferentialgleichungen (7.22) bis (7.24) durch

$$\varepsilon \sigma_{11,1} + \sigma_{1\alpha,\alpha} = \varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_1, \quad (7.65)$$

$$\varepsilon \sigma_{\beta 1,1} + \sigma_{\beta\gamma,\gamma} = \varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_\beta, \quad (7.66)$$

welche (6.9) und (6.10) entsprechen. Die Randbedingung

$$\sigma_{1\alpha} n_\alpha = 0 \quad (7.67)$$

als

$$x_{\beta} \sigma_{1\alpha} n_{\alpha} = 0 \quad (7.68)$$

erweitert und in Integralform

$$\int_S x_{\beta} \sigma_{1\alpha} n_{\alpha} ds = 0 \quad (7.69)$$

gebracht, gibt uns unter Berücksichtigung des Gauss'schen Satzes

$$\int_F \sigma_{1\beta,1} df + \int_F x_{\beta} \sigma_{1\alpha,\alpha} df = 0 \quad (7.70)$$

oder anhand (7.65) die Beziehung

$$\int_F \sigma_{1\beta,1} df + \int_F x_{\beta} (\varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_{1,1} - \varepsilon \sigma_{11,11}) df = 0. \quad (7.71)$$

Aus der Randbedingung

$$\sigma_{\beta\gamma} n_{\gamma} = 0 \quad (7.72)$$

erhalten wir, nach Bildung des Integrals

$$\int_S \sigma_{\beta\gamma} n_{\gamma} ds = 0 \quad (7.73)$$

und dessen Umschreibung gemäss dem Gauss'schen Satz in Form von

$$\int_F \sigma_{\beta\gamma,\gamma} df = 0 \quad (7.74)$$

sowie durch Verwendung von (7.66) in diesem Zusammenhang,

$$\int_F (\varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_{\beta} - \varepsilon \sigma_{1\beta,1}) df = 0 \quad (7.75)$$

Betrachtet man die Gleichungen (7.71) und (7.75) zusammen, so stellt man folgende Beziehung fest:

$$\int_F [\varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_{\beta} + \varepsilon x_{\beta} (\varepsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_{1,1} - \varepsilon \sigma_{11,11})] df = 0 \quad (7.76)$$

Durch Limesbetrachtungen für $\varepsilon \rightarrow 0$ können wir (7.76) in aufeinanderfolgende Näherungsgleichungen zerlegen, wobei wir unsere Berechnungen nun mit bereits in Zylinderkoordinaten bestimmten Spannungsgrossen weiterführen wollen und den ε -abhängigen Strukturen von x_{α} und dem inkrementalen Flächen-

element df , nämlich

$$x_2 = (1 + \varepsilon s) \cos \varphi, \quad x_3 = (1 + \varepsilon s) \sin \varphi \quad (7.77)$$

$$df = r dr d\varphi = \varepsilon (1 + \varepsilon s) ds d\varphi \quad (7.78)$$

Rechnung tragen. Daraus folgen:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 (\ddot{u}_2^{(-1)} - \cos \varphi \sigma_{11,11}^{(1)}) ds d\varphi = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 (\ddot{u}_3^{(-1)} - \sin \varphi \sigma_{11,11}^{(1)}) ds d\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.79)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 [\ddot{u}_2^{(0)} + 2k_1 \ddot{u}_2^{(-1)} - \cos \varphi (\sigma_{11,11}^{(2)} + s \sigma_{11,11}^{(1)})] ds d\varphi = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 [\ddot{u}_3^{(0)} + 2k_1 \ddot{u}_3^{(-1)} - \sin \varphi (\sigma_{11,11}^{(2)} + s \sigma_{11,11}^{(1)})] ds d\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.80)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 [\ddot{u}_2^{(1)} + 2k_1 \ddot{u}_2^{(0)} + 2k_2 \ddot{u}_2^{(-1)} - \cos \varphi (\sigma_{11,11}^{(3)} + s \sigma_{11,11}^{(2)} - \ddot{u}_{1,1}^{(0)})] ds d\varphi = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 [\ddot{u}_3^{(1)} + 2k_1 \ddot{u}_3^{(0)} + 2k_2 \ddot{u}_3^{(-1)} - \sin \varphi (\sigma_{11,11}^{(3)} + s \sigma_{11,11}^{(2)} - \ddot{u}_{1,1}^{(0)})] ds d\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

etc.

Durch Einsetzen von (7.39), (7.40) und (7.46) in (7.79) und Integration erhalten wir zwei Schwingungsdifferentialgleichungen in Form von

$$2\pi \ddot{\hat{u}}_2 + \left(\pi - \frac{\varepsilon}{\kappa}\right) \hat{u}_{2,III} = 0 \quad (7.82)$$

$$2\pi \ddot{\hat{u}}_3 + \pi \hat{u}_{3,III} + 2\Theta_{,III} = 0 \quad (7.83)$$

Zur dritten Differentialgleichung der Schwingungen führt uns folgende Ueberlegung: Betrachtet man die Randbedingung

$$\sigma_{\beta\gamma} n_\gamma = 0 \quad (7.84)$$

in als

$$e_{\beta\alpha} x_\alpha \sigma_{\beta\gamma} n_\gamma = 0 \quad (7.85)$$

erweiterter Form und integriert diese über den Querschnittsrand als

$$\int_S e_{\beta\alpha} x_\alpha \sigma_{\beta\gamma} n_\gamma ds = 0, \quad (7.86)$$

so folgt gemäss dem Gausschen Satz

$$\int_F (e_{\beta\alpha} x_\alpha \sigma_{\beta\gamma})_{,\gamma} df = \int_F e_{\beta\alpha} x_\alpha \sigma_{\beta\gamma,\gamma} df = 0. \quad (7.87)$$

Unter Berücksichtigung von (7.66) geht aus (7.87) folgende Beziehung hervor:

$$\int_F e_{\beta\alpha} x_\alpha (\epsilon^4 \kappa^2 \ddot{u}_\beta - \epsilon \sigma_{\beta,1}) df = 0. \quad (7.88)$$

(7.88) kann, wie (7.76), in sukzessive Gleichungen zerlegt werden, indem man darin die Entwicklungen von κ , u_β und $\sigma_{1\beta}$ sowie gemäss (7.77) und (7.78) x_α bzw. df einsetzt. Somit bekommt man:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 (\sin\varphi \sigma_{12,1}^{(1)} - \cos\varphi \sigma_{13,1}^{(1)}) d\beta d\varphi = 0 \quad (7.89)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 [\sin\varphi (\ddot{u}_2^{(-1)} - \sigma_{12,1}^{(2)} - 2\varrho \sigma_{12,1}^{(1)}) - \cos\varphi (\ddot{u}_3^{(-1)} - \sigma_{13,1}^{(2)} - 2\varrho \sigma_{13,1}^{(1)})] d\beta d\varphi = 0 \quad (7.90)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^1 [\sin\varphi (\ddot{u}_2^{(0)} + 2\kappa_1 \ddot{u}_2^{(-1)} - \sigma_{12,1}^{(3)} - 2\varrho \sigma_{12,1}^{(2)} - \varrho^2 \sigma_{12,1}^{(1)}) - \cos\varphi (\ddot{u}_3^{(0)} + 2\kappa_1 \ddot{u}_3^{(-1)} - \sigma_{13,1}^{(3)} - 2\varrho \sigma_{13,1}^{(2)} - \varrho^2 \sigma_{13,1}^{(1)})] d\beta d\varphi = 0 \quad (7.91)$$

etc.

Man kann zeigen, dass die mit (7.51) und (7.64) gegebenen Spannungen $\sigma_{1\alpha}^{(1)}$ (7.89) erfüllen. Durch Einbezug von Spannungen $\sigma_{1\alpha}^{(2)}$ anhand (7.59) und (7.64), bzw. Verschiebungen (7.39) und (7.40) liefert uns (7.90) die gesuchte Schwingungsdifferentialgleichung in Form von

$$\left(2\pi - \frac{\varrho}{\pi}\right) \ddot{\Theta} + \left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{\varrho}{\pi}\right) \Theta_{,III} - \frac{4\pi}{3(1+\nu)} \Theta_{,II} + 4\ddot{u}_3 + 4\hat{u}_{3,III} = 0 \quad (7.92)$$

oder unter Berücksichtigung von (7.83),

$$\left(2\pi - \frac{\varrho}{\pi}\right) \ddot{\Theta} + \left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi}\right) \Theta_{,III} - \frac{4\pi}{3(1+\nu)} \Theta_{,II} - 4\ddot{u}_3 = 0, \quad (7.93)$$

welche (7.82) und (7.83) ergänzt.

Wie man anhand (7.82) feststellen kann, sind die Stabschwingungen in der Symmetrieebene erwartungsgemäss unabhängig von weiteren möglichen Schwingungsarten. Hingegen geben (7.83) und (7.93) die Kopplung zwischen \hat{u}_3 - und θ -Schwingungen wieder.

(7.82) könnte man auch unmittelbar aus (6.34) erhalten.

Die Differentialgleichungen (7.83) und (7.93) weisen dieselbe Struktur auf, wie die in [25] am Beispiel von gekoppelten Biege- und Torsionschwingungen eines Trägers mit [- Profil angegebenen. Man kann zeigen, dass sie miteinander völlig übereinstimmen, indem man dort die Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit für einen Halbkreisquerschnitt gemäss [26] einsetzt und die entsprechenden Gleichungen in dimensionslose Form bringt; wobei man gleichzeitig in (7.83) und (7.93) τ durch t ersetzt, bzw. $\kappa=1$ annimmt.

Zum Schluss wollen wir uns kurz mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit befassen, bzw. die Dispersion illustrieren und beschränken uns dabei auf die gekoppelten Schwingungen $\hat{u}_3 \neq 0$ und $\theta \neq 0$, welche man sich zum Beispiel in Form von folgenden einfachen Ansätzen vorstellen kann:

$$\hat{u}_3 = W = W_0 \cos \omega t \sin \chi x_1 = W_0 \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{t}{E}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} L x_1\right) \quad (7.94)$$

$$\theta = \Theta_0 \cos \omega t \sin \chi x_1 = \Theta_0 \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{t}{E}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} L x_1\right) \quad (7.95)$$

Setzt man diese in (7.83) und (7.93) ein, so erhält man das homogene Gleichungssystem

$$(\pi \chi^4 - 2\pi \omega^2) W_0 + 2\chi^4 \Theta_0 = 0 \quad (7.96)$$

$$-4\omega^2 W_0 + \left[\left(2\pi - \frac{8}{\kappa}\right) \omega^2 + \left(\frac{16}{\pi} - \frac{\pi^3}{6}\right) \chi^4 - \frac{4\pi}{3(1+\nu)} \chi^2 \right] \Theta_0 = 0, \quad (7.97)$$

das, ausser den trivialen, nur dann Lösungen besitzt, wenn die charakteristische Gleichung

$$(16 - 4\pi^2) \omega^4 + \left[\left(\frac{\pi^4}{3} + 2\pi^2 - 32\right) \chi^4 + \frac{8\pi^2}{3(1+\nu)} \chi^2 \right] \omega^2 - \frac{4\pi^2}{3(1+\nu)} \chi^6 + \left(16 - \frac{\pi^4}{6}\right) \chi^8 = 0 \quad (7.98)$$

erfüllt wird. (7.98) liefert uns die dimensionslose Frequenz als Funktion von χ , welches von Rand- bzw. Auflagerungsbedingungen an beiden Stabenden abhängt. Als Lösung finden wir in der Regel zwei reelle ω -Werte. Betrachtet man in (7.94) und (7.95) die Beziehungen

$$\omega = \frac{2\pi}{\kappa} \quad , \quad \chi = \frac{2\pi}{\Lambda} L = \frac{2\pi}{c'T} L \quad (7.99)$$

und hält sich auch (7.4) vor Augen, so ist leicht zu sehen, dass (7.98) für uns ebenfalls die Beziehung

$$c' = c'(\kappa) \quad (7.100)$$

darstellt, wenn auch in einer komplizierteren Form als bisher.

Wir verzichten hier auf deren explizite Wiedergabe.

Hat man die Spannungs- und Verschiebungsgrössen bis zur jeweils nötigen Ordnung bestimmt, so kann man, durch ähnliche Ueberlegungen, bzw. Argumente wie in früheren Kapiteln, anhand (7.80), (7.81), (7.91) usw. die in der Zeittransformation (7.14) eingeführten Koeffizienten κ_j herausfinden und κ gemäss (7.15) in (7.100) einsetzen. Aus bereits erwähnten Gründen wird dies jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt. In diesem Zusammenhang sei noch darauf hingewiesen, dass wir als Ursprung des kartesischen Koordinatensystems anstatt S, 0 gewählt haben, um den Einfluss der Grenzschichtspannungen auf die zu den Bewegungsdifferentialgleichungen führenden Gleichungen auszuschliessen. Dies erklärt auch, warum wir, abgesehen von der schwieriger zu behandelnden Geometrie, unser Vorgehen nicht auf allgemeinere offene Querschnitte, insbesondere auf solche mit mehreren Eckpunkten, anwenden können, und sei es nur, um (7.82), (7.83) und (7.93) entsprechende Schwingungsgleichungen herzuleiten.

8. DISKUSSION

Diese Abhandlung bildet einen Beitrag zur Ermittlung der geometrischen Dispersion bei den fundamentalen Modes der Stabschwingungen. Die höheren Modes werden in der Praxis sehr selten erregt und sind physikalisch, hinsichtlich Wellenfortpflanzung, kaum von Bedeutung [2] [27]. Sie stehen oft im Zusammenhang mit höher als cut-off frequencies liegenden Frequenzen und mit Verformungen und Verzerrungen, die meist über den Rahmen der üblichen linearen Elastizitätstheorie hinaus gehen. Angesichts dieser Tatsache ist unsere Spezialisierung auf die fundamentalen (tiefsten) Modes der Längs-, Torsions- und Biegeschwingungen der Stäbe angebracht.

Ferner beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf die äusseren Lösungen, d.h. auf das Stabinnere. Die Stabenden sowie allfällige weitere Diskontinuitäten und singuläre Bereiche, (wie Auflager, Einspannungen, etc.), in denen exponentiell abklingende Schwingungen auftreten, die einer Grenzschichtrechnung bedürfen, werden nicht behandelt. Gerade auf Grund dieses charakteristischen Abklingens haben Schwingungsvorgänge in singulären Bereichen keinen direkten Einfluss auf Wellenfortpflanzung im Inneren des Stabes. Bevor wir uns mit den Einzelheiten und den Ergebnissen dieser Arbeit sowie mit den vorangehenden Forschungsbeiträgen auseinandersetzen, wollen wir den Ausgangspunkt bzw. die Grundidee unserer Untersuchungen wieder aufgreifen und kurz illustrieren. Als Beispiel ziehen wir

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (8.1)$$

die Differentialgleichung der Längswellen zur Betrachtung heran. Legt man nun folgende Ueberlegung an, so ist es leicht zu ersehen, dass sich die Methode der asymptotischen Entwicklungen zur Bestimmung der Dispersion bei Stabschwingungen vorzüglich eignet.

Die Wellengeschwindigkeit c_0 , die hier als eine konstante Grösse auftritt, aber streng genommen für endliche Wellenlängen der Dispersion, d.h. einer wellenlängenabhängigen Störung ausgesetzt ist, muss gegebenenfalls im Zusammenhang mit ebenfalls störungsbehafteten Verschiebungen stehen,

welche ihrerseits wiederum Abweichungen von primär angenommenen Spannungen hervorrufen. All diese Abänderungen müssen einerseits der Zusammenhaltforderung der dreidimensionalen Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie Folge leisten und den Randbedingungen bezüglich der Spannungen auf der Mantelfläche des Stabes genügen, andererseits so beschaffen sein, dass für die entsprechenden Grenzfälle $h/\Lambda \rightarrow 0$ (Λ : = Wellenlänge) die klassische Form der Wellengeschwindigkeit und $\epsilon = h/L \rightarrow 0$ (h : = massgebende Querschnittsabmessung, L : = Stablänge) die der Spannungs- und Verschiebungsgrößen wieder erreicht werden.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass der geometrische Parameter $\epsilon = h/L \ll 1$ angenommen werden kann. Dies entspricht im Grunde genommen nichts anderem als der Eigenschaft des Stabes. Gerade diese Voraussetzung ermöglicht uns die Anwendung der Methode der asymptotischen Entwicklungen. Für die Effizienz der Methode ist wiederum ihr Erfüllungsgrad selbst verantwortlich. Selbstverständlich empfiehlt sich dieses Verfahren auch für die Analyse anderer Tragwerke wie Platten [28] und Schalen [29] sowie im Zusammenhang mit Anisotropie [30] und überhaupt überall dort, wo ein kleiner geometrischer oder physikalischer Parameter festgestellt werden kann.

Unser Vorgehen nach dieser Methode lässt sich wie folgt beschreiben:
- Modifizierung der Zeit durch eine Transformation.

Bekanntlich bedeutet die Dispersion, d.h. die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge, gleichzeitig eine Verzerrung der nach den klassischen Theorien sich ergebenden Frequenz oder Periode. Dies darf als Begründung für die Einführung der sogenannten "Rechenzeit", einer verzerrten Zeit, angenommen werden. Die Grundidee dieser Technik stammt von Lindstedt-Poincaré [23] [24].

- Einführung von Potenzreihenentwicklungen nach dem kleinen Parameter ϵ für die bereits durch Skalierung in dimensionslosen Zustand gebrachten Spannungen und Verschiebungen.
Dabei werden die für den Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ gültigen klassischen Schwingungsdifferentialgleichungen, bzw. die entsprechenden primären Spannungs-

und Verschiebungsgrößen berücksichtigt.

- Einsetzen dieser in den dreidimensionalen Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie und deren Zerlegung in verschiedene Approximationsschritte.
- Bildung von Schwingungsdifferentialgleichung oder -Differentialgleichungen in jeweiligem Approximationsschritt und Bestimmung der an die Wellengeschwindigkeit anzubringenden Korrektur, durch die Forderung nach der Aufrechterhaltung der Periodizität der Schwingungen.

Abgesehen vom rasch anwachsenden Aufwand lassen sich diese Schritte theoretisch beliebig wiederholen, um die Wellengeschwindigkeit entsprechend genauer zu ermitteln. Im Laufe der Rechenschritte ergeben sich auch Spannungs- und Verschiebungsterme höherer Ordnung. Die Wichtigkeit dieser Terme, welche zur wirklichkeitsnahen Erfassung der zugehörigen Spannungen und Verschiebungen dienen, hängt direkt vom aktuellen Wert von ϵ ab. Die sich nach diesem Vorgehen ergebende Wellengeschwindigkeit besteht aus einer Potenzreihe nach dem Verhältnis h/Λ (Λ : = Wellenlänge) anstatt nach $\epsilon = h/L$ und enthält Terme $O_s (h^2/\Lambda^2)$, $O_s (h^4/\Lambda^4)$, etc. Es ist vor den Augen zu halten, dass eine Beziehung, die die Wellengeschwindigkeit bis und mit dem Korrekturterm $O_s (h^2/\Lambda^2)$ wiedergibt, insofern aussagekräftig ist, dass $h^4/\Lambda^4 \ll h^2/\Lambda^2$ gilt. Nimmt man z.B. 16% als genügend klein gegenüber 1 an, so kann man bis zu einem Verhältnis von $h/\Lambda = 0,4$ von einem entsprechend genauen Ergebnis sprechen. Nach dieser Erklärung können die signifikanten Bereiche der Dispersionsdiagramme leichter abgeschätzt werden, welche vorteilhaft nach der Umformung des zugehörigen Ausdrucks der Wellengeschwindigkeit mittels der Binomischen Formel aufgezeichnet wurden. Es ist hier als ein Vorzug der angewandten Methode hervorzuheben, dass alle Effekte, die, ungeachtet der Querschnittsbesonderheiten, in gleicher Masse zur Dispersion beitragen, selbst wenn sie von Spannungs- oder Verschiebungskomponenten unterschiedlicher Größenordnung herrühren, mitberücksichtigt, bzw. vollständig erfasst werden.

Man kann aus den obigen Ausführungen folgern, dass die Asymptotik sich als sehr effizient erweist, solange aktuelle Wellenlängen von der Größenord-

nung der eigentlichen Stablänge bleiben. Der Fall der mit den Querschnitts-
abmessungen vergleichbaren Wellenlängen zeichnet sich dadurch aus, dass die
Schwingungen sich in unmittelbarer Nähe der freien Staboberfläche abspie-
len und mit dem Abstand von der Oberfläche exponentiell abklingen. Dieser
Vorgang ist unter dem Namen "Rayleighschen Oberflächenwellen" bekannt. Ab-
gesehen von dispersionsfreien Torsionsschwingungen (nur 1. Mode) eines
Kreiszyinders, stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Rayleighschen
Wellen* (siehe Fussnote), je nach Schwingungstyp und -Mode, eine untere
oder obere Schranke der Wellengeschwindigkeit dar, bzw. gibt deren zugehö-
rige Asymptote für den Fall $h/\lambda \rightarrow 1$ an. Trotz dieser Erkenntnis haben wir
auf eine entsprechende Manipulation bzw. Anpassung der Dispersionsdiagramme
verzichtet, um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen.

Zunächst wollen wir die in den Kapiteln 4-6 jeweils unter Berücksichtigung
des ersten Korrekturterms ermittelten Dispersionsdiagramme, bzw. deren sig-
nifikanten Bereiche näher betrachten.

Bei Längsschwingungen weisen die Wellengeschwindigkeitskurven in Bezug auf
Profilquerschnitte gleicher Form sehr geringe Abweichungen voneinander auf.
Für Stäbe mit Rechteckquerschnitten stellt man fest, dass die Dispersion
bei dickeren Querschnitten stärker zunimmt. Falls man sich vor Augen hält,
dass die Geschwindigkeit der sich in Platten longitudinal fortplanzenden
Wellen auf

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (8.2)$$

*) Diese Geschwindigkeit lässt sich aus der Gleichung

$$\left(2 - \frac{c_R^2}{c_T^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{c_R^2}{c_L^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c_R^2}{c_T^2}\right)^{1/2} = 0 \quad (8.3)$$

bestimmen [2] [27], wobei $c_T = \sqrt{G/\rho}$, $c_L = \sqrt{E/\rho}$ einzusetzen sind. An-
statt (8.3) kann approximativ auch

$$c_R = \frac{0,862 + 1,14\nu}{1 + \nu} c_T \quad (8.4)$$

benutzt werden. Demnach variiert c_R in Abhängigkeit von ν zwischen
0,862 c_T und 0,955 c_T .

[2] beläuft und dass dies für $\nu \neq 0$ grösser als $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ beträgt, kann man folgern, dass man bei sehr dünnen Rechteckquerschnitten (z.B. $\delta = 0,01$) vermeiden muss, gemäss der hier hergeleiteten Dispersionsbeziehung Aussagen zu machen.

Zieht man Kreis- und Quadratquerschnitte anhand der Diagramme in der Fig. 2 zu einem Vergleich bezüglich Dispersion heran und betrachtet z.B. für den Stab mit dem Kreisquerschnitt das Verhältnis $d/\lambda = 0,3$, so kann man herausfinden, dass die gleiche Dispersion nicht einem quadratischen Querschnitt mit derselben Fläche wie der Kreis, sondern einem mit der um 3% herabgesetzten Fläche entspricht.

In Bezug auf Torsionsschwingungen von Stäben mit elliptischen Querschnitten, für welche die Dispersionsdiagramme in der Figur 3 wiedergegeben worden sind, konstatieren wir, dass die Dispersion mit zunehmender Dicke des Querschnitts abnimmt, und, wie erwartet, im Falle des Kreises nicht zustande kommt.

Bei den Biegeschwingungen ist es, abgesehen vom Kreisquerschnitt, zwischen den zwei verschiedenen Modes zu unterscheiden, nämlich dem ersten Biegemode, in dem der Stab in der Biegungsebene $x_1 - x_2$ schwingt ($U_3 = 0$) und dem zweiten Biegemode, in dem die Stabschwingung in der Biegungsebene $x_1 - x_3$ erfolgt. Hinsichtlich des ersten Biegemodes erhält man für Ellipsen- und Rechteckquerschnitte jeweils für alle Seitenverhältnisse praktisch dieselbe Dispersionskurve. Sowohl für den ersten als auch für den zweiten Biegemode weisen die Wellengeschwindigkeitskurven ab einem Verhältnis von ca. $h/\lambda = 0,15$ grössere Korrekturen der Dispersion gegenüber den linearen Diagrammen gemäss der klassischen Bernoulli-Eulerschen Theorie auf. Bei diesen Querschnittsformen betrachten wir im zweiten Biegemode im Gegensatz zum ersten je nach den Seitenverhältnissen deutlich verschiedene Wellengeschwindigkeitsdiagramme, welche mit der zunehmenden Dicke des Querschnitts umso dichter werden. All diese Dispersionskurven bezüglich der fundamentalen Biegemodes von Stäben mit Ellipsen- und Rechteckquerschnitt basieren auf den asymptotisch exakten Beziehungen, die erstmals hier ermittelt worden sind.

Im Falle von Rechteckquerschnitten gelangt man in Bezug auf den zweiten Biegemode zur Feststellung, dass bei dünnen Querschnitten die Dispersions-

diagramme immer flacher werden (Figur 21). Das bedeutet, dass diese Kurven immer weniger Korrekturanteile enthalten. Diese Eigenschaft stellt deutlich den stetigen Uebergang vom Balken zur Platte dar, falls man sich an die Wellengeschwindigkeitsbeziehung für Biegeschwingungen bei Platten, nämlich an

$$c_B = 2\pi \frac{h\sqrt{3}}{\Lambda} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (8.5)$$

[27] erinnert.

Um die Kopplung zwischen den Biege- und Torsionsschwingungen bei nicht doppelsymmetrischen Querschnitten zu zeigen, wurde als Beispiel ein Halbkreisquerschnitt behandelt. Das Dispersionsdiagramm für den ersten Biegemode eines Stabes mit dieser speziellen Querschnittsform entspricht genau einem mit dem Faktor 1/2 modifizierten Diagramm des Kreis- oder Ellipsenquerschnitts. Die Herleitung der Ergebnisse im 6. Kapitel bildet ebenfalls einen neuen Beitrag. Nun wollen wir in die Vergangenheit zurückblicken:

Wie im 2. Abschnitt erwähnt, war die Dispersion bei Stabschwingungen seit mehr als einem Jahrhundert Untersuchungsgegenstand zahlreicher Forschungsarbeiten. Schon 1876 Pochhammer [3] und 1889, unabhängig von ihm Chree [4] befassten sich von den dreidimensionalen Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie ausgehend anhand harmonischer Ansatzfunktionen für die Verschiebungen mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten "kleinerer" Längs-, Torsions- und Biegeschwingungen in einem unbegrenzten isotropen Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt. Aus den Randbedingungen für die Spannungen auf der Staboberfläche bekamen sie die Frequenzgleichungen. Durch Einführung der Entwicklungen von Besselschen Funktionen konnten sie dann die primären, d.h. auf den Fall $h/\Lambda \ll 1$ bezogenen Lösungen dieser Gleichungen konstruieren und die entsprechenden Wellengeschwindigkeiten erhalten. Dabei fanden sie heraus, dass die Torsionsschwingungen sich im fundamentalen Mode (und nur in diesem Mode) dispersionsfrei fortpflanzen.

Die im Laufe dieser Arbeit gefundenen Resultate, die bei Längs- und Biegeschwingungen der kreiszylindrischen Stäbe die Wellengeschwindigkeiten mit zugehöriger Korrektur $Q_3 (h^2/\Lambda^2)$ wiedergeben, weisen eine vollständige

Uebereinstimmung mit jenen von Pochhammer und Chree auf. Sie bedürfen aber zu ihrer Bestimmung verhältnismässig viel geringeren Aufwands.

Die Wellengeschwindigkeit der Längsschwingungen bildet bis zu Verhältnissen von $d/\lambda = 0,35$ (d : = Durchmesser des Kreisquerschnittes) sehr gute Näherung der exakten Lösung, die erst 1941 von Bancroft [31] sowie 1948 von Davies [32] berechnet, bzw. graphisch dargestellt worden ist.

Dank der Binomischen Formel kann man die Wellengeschwindigkeit der Biegeschwingungen praktisch längs des ganzen Spektrums $0 < d/\lambda < 1$ als sehr befriedigend bezeichnen, falls man einen Vergleich mit der exakten Lösung vornimmt, welche von Hudson [33] stammt. Ausserdem stellt man dabei fest, dass diese Wellengeschwindigkeit bei Verhältnissen bis zu $d/\lambda = 0,1$ keine deutliche Abweichung von jener nach der elementaren Bernoulli-Eulerschen Theorie aufweist.

In einer weiteren Arbeit [34] lieferte Chree ähnliche Lösungen auf derselben Grundlage für Längsschwingungen der Stäbe mit elliptischen und rechteckigen Querschnitten. Die von uns im Rahmen der Abhandlung gefundenen Wellengeschwindigkeiten bei diesen Schwingungen, bzw. Querschnitten, stimmen mit seinen Ergebnissen völlig überein. Es gelang uns hier festzustellen, bzw. zu beweisen, dass für die Dispersion bei Längsschwingungen in Bezug auf alle denkbaren Querschnittsformen lediglich das Verhältnis zwischen dem polaren Trägheitsradius des Querschnitts und der Wellenlänge verantwortlich ist und dass sich die Einschränkung dieser Eigenschaft auf rechteckige und elliptische Querschnitte erübrigt.

Die erste Herleitung der Wellengeschwindigkeit der Längsschwingungen für kreiszylindrische Stäbe anhand einer energetischen Ueberlegung stammt von Rayleigh [5]. Er berücksichtigte die Querkontraktion bzw. die radiale kinetische Energie [2] [38] und erhielt genau dasselbe Resultat von Pochhammer und Chree.

Es wurde lange vermutet und zu beweisen versucht, wie z.B. 1952 von Bishop [35], dass die aus den Stoffgleichungen resultierenden Schubspannungen einen im gleichen Masse wichtigen Effekt verursachen würden wie die Querdehnung. Wir haben gezeigt, dass Normalspannungen $O_s(1)$ zufolge, die Schubspannungen erst $O_s(\epsilon^3)$ zu erwarten sind und deshalb bei einer Korrektur $O_s(d^2/\lambda^2)$ der Wellengeschwindigkeit keine Rolle spielen. Dass dies bisher

nicht überzeugend erklärt werden konnte, ist auf die fehlende Vorstellung der möglichen Spannungen und Verschiebungen noch höherer Ordnung zurückzuführen. Günstigerweise haben solche Grössen auf die betrachtete Korrektur $O_s(h^2/\Lambda^2)$ der Wellengeschwindigkeit bei allen Querschnittsformen keinen Einfluss.

Rayleigh befasste sich ebenfalls mit Biegeschwingungen [5] und fand durch Einführung der Rotationsträgheit bzw. der entsprechenden Energie eine erste Korrektur der Dispersion.

Timoshenko konstruierte unter Berücksichtigung der Schubverformungen neben den Querschnittsrotationen um die Achsen senkrecht zur Biegungsebene ein verbessertes Balkenmodell [6], welches für die von ihm getesteten Kreis- und schmalen Rechteckquerschnitte [36] gute Näherungen liefert, jedoch allgemein die Kenntnis eines auf die Querschnittsform bezogenen Schubfaktors voraussetzt.

Im Zusammenhang mit den Biegeschwingungen wies Love als erster darauf hin, dass die der Querkontraktion entsprechenden höheren Verschiebungsterme bei nichtkreisförmigen Querschnitten einen gleichermassen wichtigen Effekt wie der Schubeinfluss hervorrufen sollten [7].

Aus unseren Ergebnissen im 6. Kapitel geht hervor, dass die Korrektur $O_s(h^2/\Lambda^2)$ der Wellengeschwindigkeit zu ihrer Vollständigkeit neben allen oben erwähnten noch die Berücksichtigung des Effekts der Normalspannungen in den Richtungen quer zur Stabachse benötigt. Damit ist es möglich, mit Hilfe der numerischen Verfahren die Korrektur $O_s(h^2/\Lambda^2)$ der Dispersion bei Biegeschwingungen für beliebige Querschnittsformen als Ganzes in den Griff zu bekommen. Die Genauigkeit der Resultate hängt dann nur noch vom angewandten Berechnungsverfahren, bzw. vom Computer ab.

Die Torsionsschwingungen von Stäben mit nichtkreisförmigen Querschnitten sind bekanntlich dispersiv, d.h. nicht mehr durch die elementare St. Venantsche Schwingungsdifferentialgleichung erfassbar. Die durch die Verwölbung bedingten axialen Spannungen und Beschleunigungen bewirken eine effektive Erhöhung der Torsionssteifigkeit und dadurch der Wellengeschwindigkeit. Im 5. Kapitel gelang es uns diese Dispersion in Bezug auf die Grössenordnung h^2/Λ^2 bei beliebigen Querschnitten vollständig zum Ausdruck

zu bringen. Die Gleichungen (5.38) bis (5.64) gestatten uns folgende Konstatierung: Die aus der Verwölbung resultierenden axialen Spannungen stehen im direkten Zusammenhang mit den ebenen Spannungen quer zur Stabachse und den Querverschiebungen, d.h. mit der Querschnittsdistorsion, welche von der gleichen Größenordnung sind. Infolge der Differenz zwischen der axialen Beschleunigung und dem Inkrement der erwähnten axialen Normalspannung ergeben sich Schubspannungen höherer Ordnung. Gerade diese Schubspannungen und Querverschiebungen höherer Ordnung sind für die Dispersion verantwortlich.

Am Beispiel eines Stabes mit elliptischem Querschnitt haben wir den ersten Korrekturterm der Wellengeschwindigkeit bestimmt. Dabei stellte sich heraus, dass die beiden ebenen Normalspannungen $\sigma_{22}^{(1)}$ und $\sigma_{33}^{(1)}$ null sind, hingegen die zugehörige Schubspannung $\sigma_{23}^{(1)}$, die Verschiebungen $u_2^{(1)}$ und $u_3^{(1)}$ sowie die Schubspannungen $\sigma_{12}^{(2)}$ und $\sigma_{13}^{(2)}$ existieren. Das Vorgehen ist so dargestellt, dass es mit Hilfe numerischer Verfahren ohne weiteres auf die Behandlung anderer Querschnitte übertragen werden kann.

Folgende Uebersicht der hinsichtlich ihrer Besonderheiten ausgewählten neueren Forschungsarbeiten über die Dispersion bei Stabschwingungen kann zu einem besseren Verständnis der diesbezüglichen Entwicklung verhelfen und gegebenenfalls zum Vergleich der Resultate beigezogen werden:

1962 befasste sich Barr mit Torsionsschwingungen [11]. Unter Berücksichtigung der axialen Normalspannungen und Beschleunigungen infolge Verwölbung versuchte er aus der Variationsgleichung der Bewegung die Wellengeschwindigkeit zu bestimmen. Er schlug dabei vor, die eigentliche Bewegungsdifferentialgleichung durch Einführung einer willkürlichen Konstante so zu modifizieren, dass die daraus resultierende Wellengeschwindigkeit für den Grenzfall $h/\lambda \rightarrow 1$ in die Rayleighsche Geschwindigkeit der Oberflächenwellen übergeht.

1965 verfasste Nigro seine Dissertatio. [37] über die Anwendung des Rayleigh-Ritzschen Variationsverfahrens auf die stehenden Längs-, Torsions- und BiegeWellen in Stäben mit rechteckigen Querschnitten bzw. über die approximative Bestimmung der Wellengeschwindigkeiten, jeweils in Bezug auf verschiedene Branches, auf der Grundlage des Hamiltonschen Prinzips, indem

er polynomiale Verschiebungsansätze verwendete. Seine Arbeit bildet eine Erweiterung jener von Kynch [9], der 1957 nur die fundamentalen Modes der Stabschwingungen mit derselben Methode behandelt hatte.

Um wiederum die Dispersion bei allen Modes der Wellenausbreitung in den Stäben mit elliptischen und rechteckigen Querschnitten approximativ in den Griff zu bekommen, benutzte 1969 Fraser [21] [22] die sogenannte Collocationsmethode. Dieses Verfahren führt zur Lösung der dreidimensionalen, in Polarkoordinaten ausgedrückten Wellengleichungen, indem es die Erfüllung der Randbedingungen bezüglich der freien Staboberfläche in diskreten Punkten erzwingt, welche längs des Querschnittsrandes je nach erwünschter Genauigkeit in beliebiger Anzahl zu wählen sind.

Die Beiträge von Bleustein & Stanley [13] und von Mindlin [15] beziehen sich insbesondere auf Torsionsschwingungen. Durch gleichzeitige Einführung von Ansätzen in Form von Potenzreihenentwicklungen nach Querkoordinaten für Verschiebungen und Spannungen erzielten sie, unter Berücksichtigung des Hamiltonschen Prinzips, die approximative Bestimmung einer "dynamischen" Torsionssteifigkeit und dadurch der entsprechend korrigierten Wellengeschwindigkeit. Ihr Verfahren erfordert die Lösung eines aus den Randbedingungen resultierenden linearen Gleichungssystems, das nur die von den Querkoordinaten unabhängigen Faktoren der Ansätze enthält.

Zum Schluss möchten wir auf die Arbeit von Engström [14] über die Torsionsschwingungen von Stäben mit Rechteckquerschnitt hinweisen. In Analogie zu Barr [11] berücksichtigt er die axialen Normalspannungen und Beschleunigungen infolge Verwölbung und macht vom Hamiltonschen Variationsprinzip Gebrauch. Im Gegensatz zu ihm aber, führt er für die Längsverschiebungen anstatt der St. Venantschen Verwölbungsfunktion einen selbständigen Separationsansatz ein. Dieser Ansatz besteht aus einer querkoordinatenabhängigen Funktion ϕ und einer anderen, zeit- und längskoordinatenabhängigen ψ (wie die Querschnittsverdrehung ϵ , jedoch unabhängig davon). Nach Ausführung unabhängiger Variationen $\delta\phi$, $\delta\psi$ und $\delta\theta$ erhält Engström, zusätzlich zu den von Barr gefundenen Gleichungen, in Bezug auf ϕ die Helmholtzsche Differentialgleichung mit der zugehörigen Randbedingung. Dieses Grenzwertproblem, in dem die Verwölbung grundsätzlich von der Wellenlänge abhängig

vorausgesetzt wird, lässt sich als ein Variationsproblem für ein Funktional formulieren und erlaubt dadurch die Anwendung einer Finites-Element-Prozedur. Diese Arbeit verdient unsere Aufmerksamkeit, weil sie die Möglichkeit aufzeigt, die Methode der Finiten Elemente ausserhalb des üblichen Bereichs zu verwenden. In diesem Zusammenhang haben wir jedoch im 5. Kapitel bewiesen, dass, zumindest was den fundamentalen Mode anbelangt, die Verwölbungsfunktion bei allen Querschnitten jener von St. Venant entspricht.

Im 7. Kapitel sind wir auf die im allgemeinen gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen von Trägern mit offenen dünnwandigen Profilquerschnitten eingegangen und haben am Beispiel eines Halbkreisbogenquerschnitts gezeigt, dass sich die Methode der asymptotischen Entwicklungen zur Bestimmung der gekoppelten Schwingungsdifferentialgleichungen anwenden lässt. Wegen der auftretenden Singularitäten im Querschnitt selbst ist jedoch bei der Uebersetzung des Verfahrens auf andere dünnwandige Querschnitte Vorsicht geboten.

9. NAHERUNGSWEISE BESTIMMUNG DER DISPERSION AUF GRUND
EINER VARIATIONSUEBERLEGUNG (ANHANG)

Für die Behandlung von Querschnittsformen, welche nach unserem Verfahren keine Lösung in geschlossener Form ermöglichen, aber dennoch erlauben, die Struktur der Verschiebungsfunktionen wirklichkeitsnahe abzuschätzen, kann eine approximative Methode angewendet werden, welche am Beispiel der Torsionsschwingungen eines Stabes mit Rechteckquerschnitt kurz erläutert wird. Dabei nehmen wir Bezug auf das 5. Kapitel.

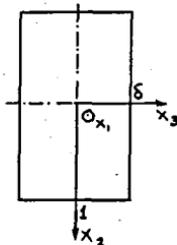


Fig. 25

Als Primär- bzw. Ausgangsverschiebungen gelten gemäss (5.11) und (5.18)

$$u_{\alpha}^{(-1)} = -\Theta e_{\alpha\beta} x_{\beta} \quad (\Theta = \Theta(x_1, \tau)) \quad (9.1)$$

wobei Θ die Verdrehung des Querschnitts um die x_1 -Achse darstellt. Die Stoffgleichungen (5.12.1), (5.13.1), (5.13.2), (5.14.1) vergegenwärtigen wir uns in Form von

$$\sigma_{1\alpha}^{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} (u_{1,\alpha}^{(0)} - \Theta_{,1} e_{\alpha\beta} x_{\beta}) \quad (9.2)$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = \nu \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} + u_{1,1}^{(0)} \quad (9.3)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} (u_{\alpha,\beta}^{(0)} + u_{\beta,\alpha}^{(0)}) + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (u_{1,1}^{(0)} + u_{\gamma,\gamma}^{(0)}) \delta_{\alpha\beta} \quad (9.4)$$

$$\sigma_{1\alpha}^{(2)} = \frac{1}{2(1+\nu)} (u_{1,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,1}^{(1)}) \quad (9.5)$$

Unter Berücksichtigung der Bewegungsdifferentialgleichungen (5.12.2), (5.13.3), (5.14.2) etc. mit den zugeordneten Randbedingungen gemäss (5.16) und (5.17), d.h.

$$\sigma_{1\alpha,\alpha}^{(0)} = 0 \quad ; \quad \sigma_{1\alpha}^{(0)} n_{\alpha} = 0 \quad (9.6)$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} = -\Theta_{,1} e_{\alpha\beta} x_{\beta} - \sigma_{1\alpha,\alpha}^{(0)} \quad ; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_{\beta} = 0 \quad (9.7)$$

$$\sigma_{1\alpha,\alpha}^{(2)} = \ddot{u}_{1,1}^{(0)} - \sigma_{11,1}^{(1)} \quad ; \quad \sigma_{1\alpha}^{(2)} n_{\alpha} = 0 \quad (9.8)$$

führen wir nun eine Reihe von Integralen ein, welche variationstechnisch dann stationär sind, wenn die jeweilige Differentialgleichung und die entsprechende Randbedingung erfüllt werden, wie man unten sieht:

$$J_I = J_I\{u_i^{(0)}\} = \int_F (u_{i,\alpha}^{(0)} - \theta_i, e_{\alpha\beta} x_\beta) (u_{i,\alpha}^{(0)} - \theta_i, e_{\alpha\gamma} x_\gamma) df \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} \delta J_I &= 2 \int_F (u_{i,\alpha}^{(0)} - \theta_i, e_{\alpha\beta} x_\beta) \delta u_{i,\alpha}^{(0)} df = 2 \int [(u_{i,\alpha}^{(0)} - \theta_i, e_{\alpha\beta} x_\beta) \delta u_{i,\alpha}^{(0)}]_{,\alpha} df - \\ &- 2 \int_F (u_{i,\alpha}^{(0)} - \theta_i, e_{\alpha\beta} x_\beta)_{,\alpha} \delta u_i^{(0)} df = 2 \int_S \frac{1}{2(1+\nu)} \sigma_{i\alpha}^{(0)} n_\alpha \delta u_i^{(0)} ds - 2 \int_F \frac{1}{2(1+\nu)} \sigma_{i\alpha}^{(0)} \delta u_i^{(0)} df \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\delta J_I = 0 \iff \{ \sigma_{i\alpha}^{(0)} n_\alpha = 0 ; \sigma_{i\alpha}^{(0)} = 0 \}, \forall \delta u_i^{(0)}. \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} J_{II} = J_{II}\{u_\alpha^{(1)}\} &= \int_F [(u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)}) (u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)}) + \frac{4\nu}{1-2\nu} (u_{i,i}^{(1)} + u_{\beta,\beta}^{(1)})^2] df - \\ &- 8(1+\nu) \int_F (\sigma_{i\alpha}^{(0)} + \bar{\theta} e_{\alpha\beta} x_\beta) u_\alpha^{(1)} df \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \delta J_{II} &= \int_F [2(u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)}) (\delta u_{\alpha,\beta}^{(1)} + \delta u_{\beta,\alpha}^{(1)}) + \frac{8\nu}{1-2\nu} (u_{i,i}^{(1)} + u_{\alpha,\alpha}^{(1)}) \delta u_{\beta,\beta}^{(1)}] df - \\ &- 8(1+\nu) \int_F (\sigma_{i\alpha}^{(0)} + \bar{\theta} e_{\alpha\beta} x_\beta) \delta u_\alpha^{(1)} df = \int_S [2(u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)}) (n_\beta \delta u_\alpha^{(1)} + \\ &+ n_\alpha \delta u_\beta^{(1)}) + \frac{8\nu}{1-2\nu} (u_{i,i}^{(1)} + u_{\alpha,\alpha}^{(1)}) n_\beta \delta u_\beta^{(1)}] ds - \int_F [2[(u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)})_{,\beta} \delta u_\alpha^{(1)} + (u_{\alpha,\beta}^{(1)} + \\ &+ u_{\beta,\alpha}^{(1)})_{,\alpha} \delta u_\beta^{(1)}] + \frac{8\nu}{1-2\nu} (u_{i,i}^{(1)} + u_{\alpha,\alpha}^{(1)})_{,\beta} \delta u_\beta^{(1)}] df - 8(1+\nu) \int_F (\sigma_{i\alpha}^{(0)} + \bar{\theta} e_{\alpha\beta} x_\beta) \delta u_\alpha^{(1)} df \\ &= \int_S [4(u_{\alpha,\beta}^{(1)} + u_{\beta,\alpha}^{(1)}) n_\beta \delta u_\alpha^{(1)} + \frac{8\nu}{1-2\nu} (u_{i,i}^{(1)} + u_{\alpha,\alpha}^{(1)}) \delta_{\alpha\beta} n_\beta \delta u_\alpha^{(1)}] ds - \int_F [4(u_{\alpha,\beta}^{(1)} + \\ &+ u_{\beta,\alpha}^{(1)})_{,\beta} + \frac{8\nu}{1-2\nu} [(u_{i,i}^{(1)} + u_{\alpha,\alpha}^{(1)}) \delta_{\alpha\beta}]_{,\beta} + 8(1+\nu) (\sigma_{i\alpha}^{(0)} + \bar{\theta} e_{\alpha\beta} x_\beta)] \delta u_\alpha^{(1)} df \\ &= \int_S 8(1+\nu) \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_\beta \delta u_\alpha^{(1)} ds - \int_F 8(1+\nu) (\sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} + \sigma_{i\alpha,i}^{(0)} + \bar{\theta} e_{\alpha\beta} x_\beta) \delta u_\alpha^{(1)} df \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\delta J_{II} = 0 \iff \{ \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} n_\beta = 0 ; \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} + \sigma_{i\alpha,i}^{(0)} = \ddot{u}_\alpha^{(1)} \}, \forall \delta u_\alpha^{(1)}. \quad (9.14)$$

$$J_{III} = J_{III}\{u_i^{(2)}\} = \int_F (u_{i,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,i}^{(2)}) (u_{i,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,i}^{(2)}) df - 4(1+\nu) \int_F (\sigma_{ii,i}^{(0)} - \ddot{u}_i^{(0)}) u_i^{(2)} df \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \delta J_{III} &= \int_S 2(u_{i,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,i}^{(2)}) n_\alpha \delta u_i^{(2)} ds - \int_F 2(u_{i,\alpha}^{(2)} + u_{\alpha,i}^{(2)})_{,\alpha} \delta u_i^{(2)} df - 4(1+\nu) \int_F (\sigma_{ii,i}^{(0)} - \\ &- \ddot{u}_i^{(0)}) \delta u_i^{(2)} df = \int_S 4(1+\nu) \sigma_{i\alpha}^{(2)} n_\alpha \delta u_i^{(2)} ds - 4(1+\nu) \int_F (\sigma_{i\alpha,\alpha}^{(2)} + \sigma_{ii,i}^{(0)} - \ddot{u}_i^{(0)}) \delta u_i^{(2)} df \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\delta J_{III} = 0 \iff \{ \sigma_{i\alpha}^{(2)} n_\alpha = 0 ; \sigma_{i\alpha,\alpha}^{(2)} + \sigma_{ii,i}^{(0)} = \ddot{u}_i^{(2)} \}, \forall \delta u_i^{(2)}. \quad (9.17)$$

Mit anderen Worten können wir die Lösung unserer Gleichungen im 5. Kapitel anhand dieser geeigneten Integrale auf diejenigen des entsprechenden Variationsproblems zurückführen, indem wir z.B. polynomiale Verschiebungsansätze wählen und deren Koeffizienten gemäss dem Extremumprinzip bestimmen. Anschliessend kann man aus den Stoffgleichungen die zugehörigen Spannungen und auch mittels (5.60) κ_2 erhalten sowie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit angeben.

Zunächst betrachten wir das eigentliche Torsionsproblem, bzw. das Integral (9.9), welches durch Wahl des Verschiebungsansatzes als

$$u_i^{(0)} = A \Theta_{,1} x_2 x_3 \quad (9.18)$$

die Form

$$J_I = \Theta_{,1}^2 \int_F [(A-1)^2 x_3^2 + (A+1)^2 x_2^2] dF \quad (9.19)$$

annimmt. (9.10) und (9.11) führen uns nach Bildung von

$$\frac{\partial J_I}{\partial A} = 2 \Theta_{,1}^2 \int_{-s}^s \int_{-1}^1 [(A-1) x_3^2 + (A+1) x_2^2] dx_2 dx_3 = 0 \quad (9.20)$$

auf

$$A = \frac{C_{33} - C_{22}}{C_{11}} \quad , \quad (9.21)$$

wobei

$$C_{11} = \int_{-s}^s \int_{-1}^1 (x_2^2 + x_3^2) dx_2 dx_3 = \frac{4}{3} s(1+s^2) \quad , \quad C_{22} = \frac{4}{3} s \quad , \quad C_{33} = \frac{4}{3} s^3 \quad (9.22)$$

Setzt man in (5.29) (5.13.3) ein und berücksichtigt dann (5.12.1) bzw. (9.1) und (9.18), so folgt daraus die Schwingungsdifferentialgleichung in Form von

$$\Theta = \frac{2 C_{22} C_{33}}{(1+\nu) C_{11}^2} \Theta_{,11} = \frac{2 s^2}{(1+\nu)(1+s^2)^2} \Theta_{,11} \quad \left(C = \frac{2 C_{22} C_{33}}{(1+\nu) C_{11}} \right) \quad , \quad (9.23)$$

welche mit jener für einen Stab mit Ellipsenquerschnitt übereinstimmt, wie man sehen kann, indem man (5.85) und (5.86) in (5.33) einsetzt.

Um das (9.14) entsprechende Problem der ebenen Verformungen zu lösen, benutzen wir für $u_i^{(1)}$ folgende Ansätze:

$$u_2^{(1)} = a x_3^3 + b x_2^2 x_3 \quad (9.24)$$

$$u_3^{(1)} = c x_2^3 + d x_2 x_3^2 \quad (9.25)$$

welche in (9.12) eingesetzt,

$$\begin{aligned} J_{II} \{a, b, c, d\} = \int_F \{ & 16 b^2 x_2^2 x_3^2 + 16 d^2 x_2^2 x_3^2 + 2[(3a+d)x_3^2 + (3c+b)x_2^2]^2 + \\ & + \frac{4\gamma}{1-2\nu} [A\Theta_{,11} x_2 x_3 + 2(b+d)x_2 x_3]^2 - 8(1+\nu) \left[-\frac{\Theta_{,11}}{1+\nu} \frac{C_{22}}{C_{11}} (a x_3^4 + b x_2^2 x_3^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\Theta_{,11}}{1+\nu} \frac{C_{33}}{C_{11}} (c x_2^4 + d x_2^2 x_3^2) + \Theta (a x_3^4 + b x_2^2 x_3^2) - \Theta (c x_2^4 + d x_2^2 x_3^2) \right] \} df \end{aligned} \quad (9.26)$$

bzw. nach der Integration

$$\begin{aligned} J_{II} = & 16 b^2 D_{23} + 16 d^2 D_{23} + 2(3a+d)^2 D_{33} + 2(3c+b)^2 D_{22} + 4(3a+d)(3c+b) D_{23} + \\ & + \frac{4\gamma}{1-2\nu} (2b+2d+A\Theta_{,11})^2 D_{23} + 8\Theta_{,11} \frac{C_{22}}{C_{11}} (a D_{33} + b D_{23}) - 8\Theta_{,11} \frac{C_{33}}{C_{11}} (c D_{22} + \\ & + d D_{23}) - 8\Theta_{,11} (1+\nu) \frac{C}{C_{11}} (a D_{33} + b D_{23}) + 8\Theta_{,11} (1+\nu) \frac{C}{C_{11}} (c D_{22} + d D_{23}) \end{aligned} \quad (9.27)$$

ergeben, wobei die Abkürzungen

$$D_{22} = \int_F x_2^2 df = \frac{4}{5} \delta, \quad D_{23} = \int_F x_2^2 x_3^2 df = \frac{4}{3} \delta^3, \quad D_{33} = \int_F x_3^2 df = \frac{4}{5} \delta^5, \quad C = \frac{\Theta}{\Theta_{,11}} C_{11} \quad (9.28)$$

gelten. Die unbekanntenen Koeffizienten bestimmen wir gemäss (9.14) so, dass

$$\frac{\partial J_{II}}{\partial a} = D_{23} \left[12 \frac{D_{33}}{D_{23}} (3a+d) + 12(3c+b) + 8 \frac{D_{33}}{D_{23}} \frac{C_{22}}{C_{11}} \Theta_{,11} - 8(1+\nu) \frac{D_{33}}{D_{23}} \frac{C}{C_{11}} \Theta_{,11} \right] = 0 \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial J_{II}}{\partial b} = D_{23} \left[32b + 4 \frac{D_{22}}{D_{23}} (3c+b) + 12a + 4d + \frac{16\gamma}{1-2\nu} (2b+2d+A\Theta_{,11}) + 8 \frac{C_{22}}{C_{11}} \Theta_{,11} - 8(1+\nu) \frac{C}{C_{11}} \Theta_{,11} \right] = 0 \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial J_{II}}{\partial c} = D_{23} \left[12 \frac{D_{22}}{D_{23}} (3c+b) + 12(3a+d) - 8 \frac{D_{22}}{D_{23}} \frac{C_{33}}{C_{11}} \Theta_{,11} + 8(1+\nu) \frac{D_{22}}{D_{23}} \frac{C}{C_{11}} \Theta_{,11} \right] = 0 \quad (9.31)$$

$$\frac{\partial J_{II}}{\partial d} = D_{23} \left[32d + 4 \frac{D_{33}}{D_{23}} (3a+d) + 12c + 4b + \frac{16\gamma}{1-2\nu} (2b+2d+A\Theta_{,11}) - 8 \frac{C_{33}}{C_{11}} \Theta_{,11} + 8(1+\nu) \frac{C}{C_{11}} \Theta_{,11} \right] = 0 \quad (9.32)$$

erfüllt werden, bzw. a, b, c, d die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 3d_2 & 1 & 3 & d_2 \\ 3 & d_3 & 3d_3 & 1 \\ 3/8 & \lambda_3 & 3d_3/8 & \lambda_1 \\ 3d_2/8 & \lambda_1 & 3/8 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}d_2 \left((1+\nu)\frac{C}{C_{11}} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \right) \Theta_{11} \\ -\frac{2}{3}d_3 \left((1+\nu)\frac{C}{C_{11}} - \frac{C_{33}}{C_{11}} \right) \Theta_{11} \\ \left(\frac{1+\nu}{4}\frac{C}{C_{11}} - \frac{1}{4}\frac{C_{22}}{C_{11}} - \frac{\nu}{2}\frac{C_{33}-C_{22}}{(1-2\nu)C_{11}} \right) \Theta_{11} \\ \left(-\frac{1+\nu}{4}\frac{C}{C_{11}} + \frac{1}{4}\frac{C_{33}}{C_{11}} - \frac{\nu}{2}\frac{C_{33}-C_{22}}{(1-2\nu)C_{11}} \right) \Theta_{11} \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

darstellen, wobei

$$d_2 = \frac{D_{33}}{D_{23}} = \frac{9}{5} \delta^2, \quad d_3 = \frac{D_{22}}{D_{23}} = \frac{9}{5} \frac{1}{\delta^2} \quad (9.34)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{8} + \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{8}d_2 + \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{8}d_3 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \quad (9.35)$$

gilt. Nach Auflösung von (9.33) erhalten wir, unter Berücksichtigung von (9.22), (9.23), (9.28) sowie (9.34) und (9.35),

$$a = -\frac{1-\delta^2}{2(1+\delta^2)^2} \Theta_{11} \left[\frac{2}{5}\nu(1+\delta^2) - \frac{\delta^2}{15} + \frac{2}{7} \right] \quad (9.36)$$

$$b = -\frac{1-\delta^2}{2(1+\delta^2)^2} \Theta_{11} \left[-\frac{6}{5}\nu(1+\delta^2) + \frac{1}{5} \right] \quad (9.37)$$

$$c = -\frac{1-\delta^2}{2(1+\delta^2)^2} \Theta_{11} \left[\frac{2}{5}\nu(1+\delta^2) - \frac{1}{15} + \frac{2}{7}\delta^2 \right] \quad (9.38)$$

$$d = -\frac{1-\delta^2}{2(1+\delta^2)^2} \Theta_{11} \left[-\frac{6}{5}\nu(1+\delta^2) + \frac{1}{5}\delta^2 \right] \quad (9.39)$$

Nun kann man gemäss (9.3) und (9.4) $\sigma_{11}^{(1)}$ in Form von

$$\bar{C}_{11}^{(1)} = u_{1,1}^{(0)} + \frac{\nu}{1+\nu} u_{3,3}^{(0)} + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} (u_{1,1}^{(0)} + u_{3,3}^{(0)}) = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)u_{1,1}^{(0)} + \nu u_{3,3}^{(0)} \right] \quad (9.40)$$

als gegeben betrachten und sich mit dem nächsten Näherungsschritt, bzw. (9.15) befassen. Als Struktur der Verschiebung $u_1^{(2)}$, die ein neues Torsionsproblem verkörpert, stellen wir uns

$$u_1^{(2)} = e x_2^3 x_3 + f x_2 x_3^3 \quad (9.41)$$

vor, durch welches bzw. (9.18), (9.24) und (9.25) (9.15) die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{III} = & \int_F \left\{ (3e x_2^2 x_3 + f x_3^3 + a_{11} x_3^3 + b_{11} x_3 x_2^2) + (3f x_2 x_3^2 + e x_2^3 + c_{11} x_2^3 + d_{11} x_2 x_3^2) \right\}^2 + \\ & - 4 \frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \Theta_{III} \left[1-\delta^2 - \frac{2}{1+\delta^2} - \frac{6}{5} \nu (1+\delta^2) \right] x_2 x_3 (e x_2^2 x_3 + f x_2 x_3^2) \} df \end{aligned} \quad (9.42)$$

annimmt. Führt man die Abkürzungen

$$L_{60} = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} x_2^6 dx_2 dx_3 = \frac{4}{7} \delta^7, \quad L_{42} = \int_F x_2^4 x_3^2 df = \frac{4}{15} \delta^5, \quad L_{24} = \int_F x_2^2 x_3^4 df = \frac{4}{15} \delta^5, \quad L_{06} = \int_F x_3^6 df = \frac{4}{7} \delta^7 \quad (9.43)$$

ein, so gelangt man anhand (9.17) bzw. durch Bildung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}_{III}}{\partial e} = & 18 L_{42} e + 6 L_{24} f + 6 L_{24} a_{11} + 6 L_{42} b_{11} + 6 L_{42} f + 6 L_{60} e + 2 L_{60} c_{11} + \\ & + 2 L_{42} d_{11} - 4 L_{42} \frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \Theta_{III} \left[1-\delta^2 - \frac{2}{1+\delta^2} - \frac{6}{5} \nu (1+\delta^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}_{III}}{\partial f} = & 6 L_{24} e + 2 L_{06} f + 2 L_{06} a_{11} + 2 L_{24} b_{11} + 18 L_{24} f + 6 L_{42} e + 6 L_{42} c_{11} + \\ & + 6 L_{24} d_{11} - 4 L_{24} \frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \Theta_{III} \left[1-\delta^2 - \frac{2}{1+\delta^2} - \frac{6}{5} \nu (1+\delta^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.45)$$

zum folgenden linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 18 L_{42} + 2 L_{60} & 6(L_{24} + L_{42}) \\ 6(L_{24} + L_{42}) & 18 L_{24} + 2 L_{06} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}, \quad (9.46)$$

wobei

$$B_1 = \frac{4}{5} \delta \frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \Theta_{III} \left[-\frac{19}{7} + \frac{8}{3} \frac{1}{1+\delta^2} + \frac{1237}{335} \delta^2 - \frac{103}{105} \delta^4 - \frac{56}{15} + \nu (1+\delta^2) \left(\frac{2}{7} - \frac{16}{5} \delta^2 + \frac{2}{5} \delta^4 \right) \right] \quad (9.47)$$

$$B_2 = \frac{4}{5} \delta^3 \frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2} \Theta_{III} \left[-\frac{41}{15} + \frac{8}{3} \frac{1}{1+\delta^2} + \frac{59}{35} \delta^2 - \frac{683}{335} \delta^4 - \frac{56}{21} + \nu (1+\delta^2) \left(\frac{2}{5} - \frac{16}{5} \delta^2 + \frac{2}{7} \delta^4 \right) \right]. \quad (9.48)$$

(9.46) liefert

$$e = \frac{(1-\delta^2) \Theta_{III}}{210 (1+\delta^2)^3 (7+12\delta^2+7\delta^4)} \left[-392 - 952 \delta^2 - 1243 \delta^4 + 738 \delta^6 - 539 \delta^8 + \nu (1+\delta^2)^2 (294 + 504 \delta^2 - 2646 \delta^4) \right] \quad (9.49)$$

$$f = \frac{(1-\delta^2) \Theta_{III}}{210 (1+\delta^2)^3 (7+12\delta^2+7\delta^4) \delta^2} \left[245 + 49 \delta^2 + 1080 \delta^4 - 901 \delta^6 - 266 \delta^8 - 49 \delta^{10} - 34 \nu \delta^2 (1+\delta^2) (63 + 51 \delta^2 - 19 \delta^4 - 7 \delta^6) \right]. \quad (9.50)$$

Schreibt man anschliessend gemäss (9.5) $\sigma_{1\alpha}^{(2)}$ in Form von

$$\sigma_{12}^{(2)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(a_{,1} + f) x_3^3 + (b_{,1} + 3e) x_3 x_2^2 \right] \quad (9.51)$$

$$\sigma_{13}^{(2)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(c_{,1} + e) x_2^3 + (d_{,1} + 3f) x_2 x_3^2 \right], \quad (9.52)$$

so ist man in der Lage, aus (5.60) κ_2 auszurechnen. Es ergibt sich

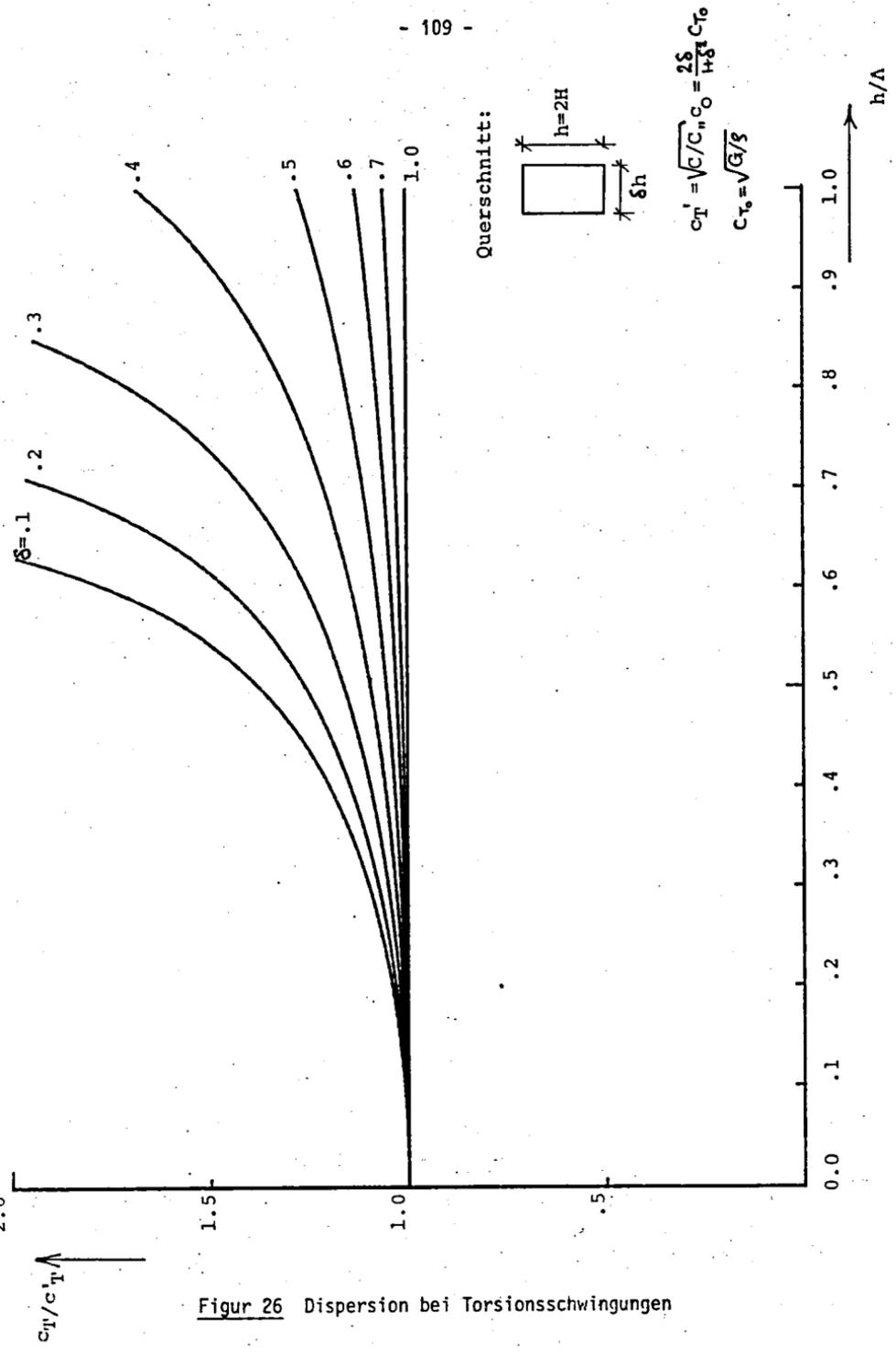
$$\kappa_2 = \frac{C_{11}}{8C_{22}C_{33}} \frac{1}{\Theta_{,11}} \left\{ D_{22} e_{,1} + 3D_{23}(f_{,1} - e_{,1}) - D_{33} f_{,1} - A^2 [D_{33} a_{,11} + D_{23}(b_{,11} - d_{,11}) - D_{22} c_{,11}] \right\} \quad (9.53)$$

Daraus bestimmt sich, nach Einsetzen von bereits gefundenen A, a, b, c, d, e und f , mit (9.23) und (5.81) sowie (5.83) die Wellengeschwindigkeit zu

$$c_T = \frac{2S}{1+\delta^2} c_{T_0} (1 + \kappa_2 \varepsilon^2 + O_5(\varepsilon^4)) \approx \frac{2S}{1+\delta^2} c_{T_0} \left(1 + 2\pi^2 \hat{\kappa}_2 \frac{h^2}{\lambda^2} \right)^{1/2}, \quad (c_{T_0} = \sqrt{G/\rho}) \quad (9.54)$$

Nehmen wir für $\nu = 0,3$ an, so ergeben sich für verschiedene Seitenverhältnisse δ folgende Dispersionsdiagramme (Fig. 26).

Nach der entsprechenden Kurve für $\delta = 1$ oder gemäss der Struktur von (9.53) sollten Torsionsschwingungen eines Stabes mit quadratischem Querschnitt dispersionsfrei erfolgen. Dies ist jedoch in Wirklichkeit nicht der Fall, wie man auch experimentell feststellen kann. Die Torsionsschwingungen eines quadratischen Stabes sind bekanntlich, wenn auch relativ unwesentlich, von Längsschwingungen in Form von Querschnittsverwölbungen begleitet, welche die Wellengeschwindigkeit beeinflussen. Die Ursache der widerprechenden Folgerung bzw. der Unzulänglichkeit dieser Näherungsmethode liegt darin, dass hier die Verwölbungen für Rechteckquerschnitte als jene der entsprechenden Ellipsenquerschnitte gefunden bzw. eingesetzt werden und dass dadurch im Falle $\delta = 1$ der Kreis, als Sonderfall einer Ellipse, hinsichtlich der Verwölbung nicht eine quadratische Querschnittsform zu approximieren vermag.



Figur 26 Dispersion bei Torsionsschwingungen

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. SAYIR & C. MITROPOULOS, "On Elementary Theories of Linear Elastic Beams, Plates and Shells", ZAMP 31 (1980).
- [2] H. KOLSKY, Stress Waves in Solids, Oxford, 1953.
- [3] L. POCHHAMMER, "Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder", J. reine angew. Math. 81, pp 324-336 (1876).
- [4] C. CHREE, "The Equations of an Isotropic Elastic Cylinder in Polar and Cylindrical Coordinates, Their Solution and Applications", Trans. Camb. Phil. Soc. 14, pp. 250-369 (1889).
- [5] RAYLEIGH, "Theory of Sound", London (1889).
- [6] S. TIMOSHENKO, "On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars", Phil. Mag. Ser. 6 41, pp. 744-747 (1921).
- [7] A.E.H. LOVE, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Camb. Univ. Press (1927)(4th Ed.).
- [8] R.D. MINDLIN & G. HERRMANN, "A One-Dimensional Theory of Compressional Waves in an Elastic Rod", Proc. First U.S. Nat. Congr. Appl. Mech pp. 187-191 (1951).
- [9] G.J. KYNCH, "Fundamental Modes of Vibration of Uniform Beams for Medium Wavelengths", Brit. J. Appl. Phys. 8, pp. 64-73 (1957).
- [10] E. VOLTERRA, "Second Approximation of Method of Internal Constraints and its Application", Int. J. Mech. Sci. 3, pp. 47-67 (1961).
- [11] A.D.S. BARR, "Torsional Waves in Uniform Rods of Non-Circular Section J. Mech. Eng. Sci. 4, pp. 127-135 (1962).
- [12] N.J. NIGRO, "Steady-State Wave Propagation in Infinite Bars of Non-circular Cross Section", J. Acoust. Soc. Am. 40, pp. 1501-1508 (1966)
- [13] J.L. BLEUSTEIN & R.M. STANLEY, "A Dynamical Theory of Torsion", Int. J. Solids Structures 6, pp. 569-586 (1970).
- [14] O.L. ENGSTROEM, "Dispersion of Torsional Waves in Uniform Elastic Rod J. Appl. Mech. 41, pp. 1041-1046 (1974).

- [15] R.D. MINDLIN, "Low Frequency Vibrations of Elastic Bars", Int. J. Solids Structures 12, pp. 27-49 (1976).
- [16] G.J. KYNCH & W.A. GREEN, "Vibration of Beams-I. Longitudinal Modes", Q. J. Mech. Appl. Math. 10, pp. 63-73 (1957).
- [17] W.A. GREEN, "Vibration of Beams-II. Torsional Modes", Q. J. Mech. Appl. Math. 10, pp. 74-78 (1957).
- [18] W.A. GREEN, "Vibration of Beams-III. Screw Modes", Q. J. Mech. Appl. Math. 12, pp. 22-28 (1959). X
- [19] R.D. MINDLIN & H.D. McNIVEN, "Axially Symmetric Waves in Elastic Rods", J. Appl. Mech. 27, pp. 145-151 (1960).
- [20] R.D. MINDLIN & E.A. FOX, "Vibrations and Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section", J. Appl. Mech. 27, pp. 152-158 (1960).
- [21] W.B. FRASER, "Stress Wave Propagation in Rectangular Bars", Int. J. Solids Structures 5, pp. 379-397 (1969).
- [22] W.B. FRASER, "Dispersion of Elastic Waves in Elliptical Bars", J. Sound Vib. 10, pp. 247-260 (1969).
- [23] A.H. NAYFEH, "Perturbation Methods", John Wiley & Sons (1973).
- [24] J.D. COLE, "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Blaisdell (1968).
- [25] S. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG, W. WEAVER Jr., "Vibration Problems in Engineering", John Wiley & Sons, New York (1974).
- [26] S. TIMOSHENKO, "Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Cross Section", J. of The Franklin Institute 239, Nr. 3-5 (1945).
- [27] J.D. ACHENBACH, "Wave Propagation in Elastic Solids", North Holland/American Elsevier (1973).
- [28] F.I. NIORDSON, "An Asymptotic Theory for Vibrating Plates", Int. J. Solids Structures 15, pp. 167-181 (1979).
- [29] C.S. MITROPOULOS, "Zur Theorie der schwach- und starkanisotropen faserverstärkten Rotationsschalen", Dissertation Nr. 6317, ETH-Zürich (1978).
- [30] M. SAYIR, "Flexural Vibrations of Strongly Anisotropic Beams", Ingenieur-Archiv 49, pp. 309-323 (1980).

- [31] D. BANCROFT, "Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars", Phys. Rev. 59, pp. 588-593 (1941).
- [32] R.M. DAVIES, "A Critical Study of the Hopkinson Pressure Bar", Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 240, pp. 375-457 (1948).
- [33] G.E. HUDSON, "Dispersion of Elastic Waves in Solid Circular Cylinders", Phys. Rev. 63, pp. 46-51 (1943).
- [34] C. CHREE, "The Equations of an Isotropic Elastic Cylinder in Polar and Cylindrical Coordinates, Their Solution and Applications", Quart. J. Pure and Appl. Math. 23, pp. 335 (1889).
- [35] R.E.D. BISHOP, "Longitudinal Waves in Beams", Aeron. Quart. 3, pp. 280-293 (1952).
- [36] S. TIMOSHENKO, "On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section", Phil. Mag. (6) 43, pp. 125-131 (1922).
- [37] N.J. NIGRO, "The Application of the Ritz Method to the Problems of Steady-State Longitudinal, Flexural and Torsional Wave Propagation in Bars of Rectangular Cross-Section", Dissertation, Univ. of Iowa, USA (1965).
- [38] H. KOLSKY, "Wave Propagation in Solids", Vorlesungsnotizen, Wintersemester 1978/79, Inst. für Mech. ETH-Zürich.

LEBENS LAUF

Ich bin am 8. Juni 1951 in Istanbul geboren. Die Primarschule habe ich im Istanbuler College besucht. Nach der Sekundarschule Sehremini habe ich an der Mittelschule Pertevniyal 1968 das Abitur gemacht. Mein Studium an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Istanbul habe ich 1973 in der Fachrichtung Angewandte Mechanik mit dem Diplom abgeschlossen.

Zwischen September 1973 und April 1974 war ich als wissenschaftlicher Assistent an der Abteilung für angewandte Mathematik der Wissenschaftlichen und Industriellen Forschungsinstitut Marmara (TBTAk-MAE) in Gebze, anschliessend als Unterrichtsassistent am Institut für Mechanik der Technischen Universität Istanbul beschäftigt. Nachdem ich meinen Militärdienst im Laufe des Sommers 1975 absolviert hatte, bin ich als Bundesstipendiat der Schweiz an die ETH-Zürich gekommen. Im Oktober 1976 trat ich eine Assistentenstelle am Institut für Mechanik dieser Hochschule an. Unter der Leitung des Herrn Professor Dr. M. Sayir befasste ich mich neben der Unterrichtsassistenz während vier Jahren mit theoretischen Untersuchungen über das Dispersionsphänomen bei Stabschwingungen. Seit Oktober 1980 bin ich bei ILR (Ingenieurbüro für Luft- & Raumfahrt) in Zürich als Entwicklungsingenieur tätig und habe einen Lehrauftrag für Mechanik am ITR (Interkantonales Technikum Rapperswil-Ingenieurschule).

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. M. Sayir gilt mein ganz besonderer Dank für die Ermöglichung dieser Dissertation und seine wohlwollende Betreuung. Herrn Professor Dr. Ch. Wehrli danke ich für die Uebernahme des Korreferates. Auch die freundliche Atmosphäre unter den Assistenten des Instituts für Mechanik hat sich fördernd auf die Entstehung dieser Arbeit ausgewirkt. In diesem Zusammenhang möchte ich meinen Kollegen, insbesondere Herrn Peter Pleus meinen Dank aussprechen.