

KOPPLUNGSEFFEKTE BEI STABSCHWINGUNGEN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
der
EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZUERICH

vorgelegt von

YASAR I EGER

dipl. Bau-Ing. TU Istanbul
geboren am 8. Juni 1951
Türkischer Staatsangehöriger

Angenommen auf Antrag von:
Prof. Dr. M. SAYIR, Referent
Prof. Dr. Ch. WEHRLI, Korreferent

1981

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie die bei Stabschwingungen auftretenden Kopplungseffekte, insbesondere die geometrische Dispersion, mit der Methode der asymptotischen Entwicklungen systematisch untersucht. Zur Bestimmung der Dispersion werden anwendbare Lösungswege gefunden bzw. skizziert, die unter Beschränkung auf das Stabinnere sowie auf die fundamentalen Modes alle Hauptschwingungsarten der klassischen Theorie bei allgemeinen Querschnittsformen umfassen und zu im asymptotischen Sinne exakten Resultaten führen. Die freien Längs-, Torsions- und Biegeschwingungen der Stäbe werden in einzelnen Kapiteln auf die Zielgrösse "Wellengeschwindigkeit" hin einheitlich behandelt.

Die Grundlagen und Technik des angewandten asymptotischen Berechnungsverfahrens sowie die allgemein als Ausgangsbasis dienenden Stoffbeziehungen und Bewegungsdifferentialgleichungen der dreidimensionalen linearen Elastizitätstheorie für isotrope Werkstoffe werden im 3. Kapitel aufgeführt.

Im 4. Kapitel wird eine denkbar einfache Beziehung für die Dispersion bei Längsschwingungen hergeleitet, welche die Wellengeschwindigkeit als Funktion des Verhältnisses zwischen dem polaren Trägheitsradius des Querschnitts und der Wellenlänge angibt und jede weitere Rechnung für alle Querschnittsformen erübrigt. Dabei handelt es sich um die Dispersion von der Grössenordnung h^2/λ^2 . Darüber hinaus wird die Kopplung der Längs- mit den Querschwingungen dargelegt bzw. der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Spannungen höherer Ordnung ermittelt.

Im 5. und 6. Kapitel werden für Torsions-, bzw. Biegeschwingungen Gleichungen zur Bestimmung der Dispersion sowie eventueller Kopplungen zwischen diesen Schwingungen entwickelt. Mit Hilfe numerischer Verfahren zur Integration der sukzessive auftretenden harmonischen und biharmonischen Differentialgleichungen ist damit die Behandlung beliebiger Quer-

hinzusformen möglich.

Bei Torsionsschwingungen, welche - abgesehen vom Sonderfall der Stäbe mit Kreisquerschnitt - von Querschnittsverwölbungen begleitet werden, wird gezeigt, wie die Dispersion $O_s(h^2/\Lambda^2)$ in direktem Zusammenhang mit den Schubspannungen und Querverschiebungen sekundärer Grössenordnung steht, welche als Folge von durch Verwölbung bedingten axialen Spannungen und Beschleunigungen, aber auch ebenen Spannungen zustande kommen. Zur Veranschaulichung der Erhöhung der Torsionssteifigkeit und dadurch der Wellengeschwindigkeit infolge Verwölbung gegenüber jenen nach der elementaren St. Venantschen Theorie werden als Beispiel Stäbe mit elliptischem Querschnitt durchgerechnet.

Bei den Biegeschwingungen werden neben den Einflüssen der Querschnittsrotationen und der Schubspannungen auf die Korrektur $O_s(h^2/\Lambda^2)$ der Dispersion auch jene der Querschnittsdistorsion bzw. der ebenen Normalspannungen quer zur Stabachse erfasst. Das Vorgehen wird anhand von Beispielen ausführlich illustriert.

Im 7. Kapitel wird am Beispiel von Biege- und Torsionsschwingungen eines Trägers mit Halbkreisbogenquerschnitt gezeigt, dass die je nach der Symmetrieeigenschaft des Querschnitts, möglicherweise gekoppelten Schwingungsdifferentialgleichungen von Stäben mit dünnwandigen Profilen, nach einer geeigneten Skalierung und Einführung asymptotischer Entwicklungen auf demselben Weg aufgestellt werden können, wie in den vorangehenden Kapiteln.

Im Anhang wird an einem Beispiel ein Variationsverfahren beschrieben, das in Anlehnung an die Asymptotik für viele Querschnitte Näherungslösungen in geschlossener Form liefern kann.

SUMMARY

In the present work a systematic investigation is made of the coupling effects on the vibrations of uniform cylindrical bars, with special regard to the resulting geometrical dispersion, using the method of asymptotic expansions within the framework of linear theory of elasticity. The solutions developed here are "outer" solutions in the asymptotic sense, i.e. are to apply to the inner part of the bar subject to vibration resp. wave propagation, without any restrictions concerning the shape of its cross-section and making it possible to determine the dispersion on the fundamental modes with a well-defined specific accuracy. The free longitudinal, torsional and bending vibrations of bars are dealt with analogously but separately so as to furnish the dispersive phase velocity.

The fundamentals and technique of the asymptotic method applied as well as the constitutive relations and the differential equations of motion of the three dimensional linear theory of elasticity for isotrop and homogeneous materials are introduced in chapter 3.

In chapter 4, an equation for the dispersion on longitudinal vibrations is derived which is valid for bars with any cross-section and gives the phase velocity as a function of the ratio K/Λ (K : = gyration radius about the bar axis; Λ : = wave length). This result contains the complete dispersion of the order of magnitude h^2/Λ^2 (h : = the characteristic dimension of the cross section). In addition, the coupling between longitudinal and lateral vibrations and the relationship between the displacements and stresses of higher order of magnitude are shown.

The 5th and 6th chapters treat the coupling and dispersion on the torsional resp. bending (flexural) vibrations of bars. Any type of cross-section can be dealt with by means of numerical methods-appropriate to integration of harmonic and biharmonic differential equations which occur successively after asymptotic decomposition of basic equations mentioned above.

As already ascertained, the torsional vibrations are accompanied by warping, except in the case of circular cross-section. The resulting dispersion of the order of magnitude h^2/Λ^2 is found to be related to the shearing stresses of higher order of magnitude and distortion of cross section which are consequences of not only the axial stress and acceleration but also of the plane stresses.

The very interesting phenomenon of the increase in phase velocity resp. in torsional rigidity following the warping of cross-section is illustrated analytically by means of the example of elliptical cross-section.

In the chapter concerning the bending vibrations, the supplementary effects of lateral normal stresses and of the distortion of cross-section as a result of lateral contraction onto the correction of the dispersion of the order of magnitude h^2/Λ^2 are obtained in addition to the contributions of the rotary inertia (Rayleigh) and of the shearing (Timoshenko). The coupling with the torsional vibrations is also found out explicitly.

In chapter 7, the application of the method of asymptotic expansions in order to obtain the differential equations of motion of coupled bending and torsional vibrations of bars of thin walled open cross-section is represented by means of an example. It is pointed out that the method can fail to give satisfactory results due to the singularities of cross-section.

In closing, a variational method combined with the asymptotics performed in this work is introduced, which can be used for many cross-sections of practical importance in order to determine analytical approximate solutions.