Leer - Vide - Empty

Leer - Vide - Empty

Projektive Zusammenhänge und Gewebe

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

MAX JEGER

von Meltingen (Solothurn)

Referent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel

Korreferent: Herr Prof. Dr. B. Eckmann

1949

VERLAG OTTO WALTER AG

OLTEN

Leer - Vide - Empty

MEINEM VATER

(gestorben am 10. April 1946)

GEWIDMET

ALS ZEICHEN DER DANKBAREN

ERINNERUNG

Leer - Vide - Empty

Einleitung

Zur Behandlung differentialgeometrischer Fragen der Gewebegeometrie ist bis jetzt zur Hauptsache der *Kalkül der Differentiatoren* bzw. der *schiefen Differentialformen* verwendet worden. Im zusammenfassenden Werk *Geometrie der Gewebe* von BLASCHKE und BOL[1]) ist zwar im § 29 bereits ein Ansatz in anderer Richtung vorhanden, nämlich gewisse Invarianten von differentierbaren Kurven-4-Geweben dadurch aufzufinden, daß ein vorliegendes Gewebe in ein *quasigeodätisches Kurvensystem* eingebettet wird. Die Differentialgeometrie der Gewebe scheint aber dann in dieser Richtung nicht mehr weiter verfolgt worden zu sein. Die vorliegende Arbeit fügt sich nun an dieser Stelle in die Geometrie der Gewebe ein.

Gewebe sind geometrische Gebilde mit projektivem Charakter. Es ist daher naheliegend, zur Diskussion gewebegeometrischer Fragen die Methoden der *projektiven Differentialgeometrie* beizuziehen. Der oben erwähnte BLASCHKEsche Ansatz führt nun gerade in diese Richtung. Im folgenden wird gezeigt, daß sich dieser Ansatz auf beliebige Dimensionen verallgemeinern läßt und daß er über die quasigeodätischen Kurvensysteme die Einordnung der Differentialgeometrie der Gewebe in die projektive Differentialgeometrie gestattet. Eine Rechtfertigung dieses Vorgehens ist etwa dadurch gegeben, daß einerseits sämtliche differentialgeometrischen Aussagen sich auf diese Weise ohne Schwierigkeiten auf beliebige Dimensionen übertragen lassen und andererseits die Vorteile des weit umfassenderen *Absoluten Differentialkalküls* voll ausgenützt werden können.

In der nun folgenden Arbeit wird zunächst der BLASCHKEsche Ansatz in der Ebene noch weiter ausgewertet. Insbesondere wird der Fragenkomplex bezüglich der topologischen Äquivalenz eines Gewebes mit einem Geradengewebe untersucht. In einem nachfolgenden Abschnitt werden dann sämtliche Theoreme auf beliebige Dimensionen verallgemeinert. Dabei offenbart sich durch alle Dimensionen hindurch die Sonderstellung der parallelisierbaren Gewebe. Ferner zeigt sich, daß die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ vom gewebegeometrischen Standpunkt aus bereits alles Wesentliche enthalten.

Der Rechenapparat ist dem RICCI-*Kalkül* entnommen. Entsprechend den Prinzipien der *Kern-Index-Methode* werden für die *allgemeinen Koordinatensysteme* griechische Indizes $\varkappa$, λ, μ, ν, ..., für die *speziellen Koordi-*

[1]) Vgl. [1] des Literaturverzeichnisses am Schlusse der Arbeit.

natensysteme lateinische Indizes $h, i, j, k, \ldots\ldots\ldots$ verwendet. Dies hat den Vorteil, daß zur Unterscheidung *invarianter* und *nichtinvarianter* Gleichungen kein besonderes Zeichen notwendig wird. Eine Gleichung zwischen Größen mit lateinischen Indizes bezieht sich somit immer auf ein spezielles Koordinatensystem; durch die lateinischen Indizes ist aber gleichzeitig zum Ausdruck gebracht, daß die Gleichung nicht invariant ist, d. h. nur in einem entsprechend speziellen Koordinatensystem richtig ist. Von der Vorschrift des RICCI-*Kalküls*, daß über Indizes, die in derselben Beziehung ko- und kontravariant auftreten, stets zu summieren ist, wird insofern etwas abgewichen, als sie nur für griechische Indizes zur Anwendung kommen soll. Diese Konvention erlaubt, verschiedene, in speziellen Koordinatensystemen öfters auftretende Ausdrücke in einfachere Gestalt zu bringen. Eine Summation über lateinische Indizes wird durch Voranstellung des gewöhnlichen Summenzeichens angedeutet.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird von der BACHschen Symbolik Gebrauch gemacht. Für die Größe $T_{\lambda\mu}$ hat man dann beispielsweise die Abkürzungen

$$T_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu} - T_{\mu\lambda}),$$

$$T_{(\lambda\mu)} = \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu} + T_{\mu\lambda}).$$

Für die Kurven bzw. Hyperflächen der in dieser Arbeit untersuchten Gewebe wird stets vorausgesetzt, daß sie *genügend oft* stetig differentierbar sind. Damit diese Eigenschaft der Gewebe erhalten bleibt, soll dasselbe auch für die zugelassenen topologischen Abbildungen gelten. Diese Forderungen sind natürlich für die differentialgeometrische Behandlung der Gewebe unerläßlich. Um die Ausdrucksweise nicht unnötig zu komplizieren, wollen wir aber die Bezeichnung *topologische Abbildung* gleichwohl belassen, uns aber stets vor Augen halten, daß wir dabei an eine *genügend oft stetig differentierbare topologische Abbildung* denken.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit erhielt ich durch den Besuch eines Seminars über *Geometrie der Gewebe*, welches im Wintersemester 1946/47 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich stattgefunden hat. Ich möchte an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. E. STIEFEL, dem Leiter jenes Seminars, für die mannigfachen Anregungen und Ratschläge während der Ausführung der Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen. Ebenso bin ich Herrn Prof. Dr. J. A. SCHOUTEN in Epe (Holland) zu Dank verpflichtet; als Spezialist auf dem Gebiete der modernen Differentialgeometrie bekundete er in einem Briefwechsel sein Interesse an meiner Arbeit. Ich verdanke ihm einige Hinweise auf die Symbolik des RICCI-Kalküls.

§ 1.

Differentialgeometrie quasigeodätischer Kurvensysteme

Im folgenden sind in gedrängter Form diejenigen Teile der Differentialgeometrie quasigeodätischer Kurvensysteme zusammengestellt, die für die eigentliche Arbeit benötigt werden[2]).

1. *Affine Übertragungen und quasigeodätische Kurvensysteme.*

In einem n-dimensionalen Raum mit den Koordinaten x^ν sei durch die in den untern Indizes symmetrischen Größen $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ eine *affine Übertragung* A_n gegeben.

Wird etwa ein Vektor v^λ längs einer Kurve $x^\nu(t)$ parallel verschoben, so beträgt seine Änderung

$$d\,v^\lambda = -\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,v^\mu\,d\,x^\nu. \tag{1}$$

Verschiebt man ein Linienelement dx^λ im Sinne der zugrunde gelegten Übertragung stets in seiner eigenen Richtung, so heißt seine Bahn eine *geodätische Linie* der A_n. Es ist in diesem Falle

$$v^\lambda = \beta\,\frac{dx^\lambda}{dt}\,,$$

und die Differentialgleichungen der geodätischen Linien lauten somit

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{dt}\,\frac{dx^\nu}{dt} = a\,\frac{dx^\lambda}{dt}\,. \tag{2}$$

Darin ist $a(x^1,\ldots\ldots,x^n)$ eine Funktion, die von der speziellen Wahl des Kurvenparameters t abhängt. Durch eine geeignete Parametertransformation kann a immer zum Verschwinden gebracht werden.

Die Integralkurven von (2) besitzen zwei charakteristische Eigenschaften der geodätischen Linien eines RIEMANNschen Raumes; *von jedem Punkt aus geht in jeder Richtung genau eine Systemkurve, und im Kleinen bestimmen zwei Punkte ebenfalls genau eine solche*[3]).

Die *Transformation der Übertragung*

$$\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + A^\lambda_{\mu\nu} \tag{3}$$

heißt *bahntreu*, wenn die Lage der geodätischen Linien invariant bleibt. Für eine derartige Transformation muß das additive Glied notwendigerweise die Form

---

[2]) Vgl. [1], § 29, Quasigeodätische Systeme; [2], Abschnitt IV, Die affine Übertragung; sowie [3], [4], [5] und [6] des Literaturverzeichnisses.

[3]) Die Beweise verlaufen genau gleich wie für das geodätische System einer RIEMANNschen Übertragung. Für $n = 2$ vgl. L. BIEBERBACH, Differentialgeometrie. Berlin, 1932.

$$A^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu} p_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu} p_{\mu} = 2\, \delta^{\lambda}_{(\mu} p_{\nu)} \text{ }^{4)} \tag{4}$$

haben. Darin ist p_{ν} ein willkürliches Kovektorfeld.

Eine Klasse affiner Übertragungen, deren Elemente sich nur um bahntreue Transformationen voneinander unterscheiden, heißt eine Klasse *isogeodätischer* Übertragungen, und die invariant damit verknüpften Integralkurven von (2) bezeichnet man als das zu dieser Klasse gehörige *quasigeodätische Kurvensystem*[5]).

Ist nur ein quasigeodätisches System gegeben, so sind dadurch die CHRISTOFFELschen Symbole $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ nur bis auf bahntreue Transformationen bestimmt. Man spricht dann von einem *projektiven Zusammenhang.*

2. *Der Projektivkrümmungstensor.*

Bei der Bildung von Differentialquotienten zweiter Ordnung in einer A_n tritt der Krümmungstensor

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = \partial_{\mu} \Gamma^{\omega}_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma^{\omega}_{\nu\mu} + \Gamma^{\omega}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\omega}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \text{ }^{6)} \tag{5}$$

auf. Dieser ändert sich bei bahntreuer Transformation der Übertragung. Charakterisiert man eine solche durch das Kovektorfeld p_{ν}, so ergibt sich in der neuen Übertragung:

$$\bar{R}_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} - 2\, p_{[\lambda\mu]}\, \delta^{\omega}_{\nu} + 2\, \delta^{\omega}_{[\lambda} p_{\mu]\nu}\,, \tag{6}$$

wobei

$$p_{\lambda\mu} = \nabla_{\lambda} p_{\mu} - p_{\lambda} p_{\mu} \text{ }^{7)}$$

gesetzt ist.

Es sei

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\lambda}$$

der verjüngte Krümmungstensor. Mit der daraus abgeleiteten Größe

$$P_{\mu\nu} = -\frac{1}{n^2 - 1} (n\, R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})\,,$$

stellt

$$P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} - 2\, P_{[\lambda\mu]}\, \delta^{\omega}_{\nu} + 2\, \delta^{\omega}_{[\lambda} P_{\mu]\nu} \tag{7}$$

einen Tensor dar, der gegenüber bahntreuen Transformationen invariant bleibt, d. h. dieser Tensor ist invariant mit dem durch eine Klasse isogeodätischer Übertragungen bestimmten quasigeodätischen System verbunden.

$P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega}$ heißt der *Projektivkrümmungstensor* des quasigeodätischen Systems bzw. des projektiven Zusammenhangs. Er verschwindet identisch für $n = 2$.

---

[4]) δ^{λ}_{μ} ist das KRONECKERsche Symbol: $\delta^{\lambda}_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \lambda \\ 0 & \mu \neq \lambda. \end{cases}$

[5]) In der englischen Literatur "*system of paths*" genannt.

[6]) $\partial_{\mu} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$.

[7]) ∇_{μ} ist das Symbol für den kovarianten Differentialquotienten.

Von Interesse sind diejenigen quasigeodätischen Systeme, welche sich durch eine Koordinatentransformation in die Geraden des projektiven Raumes P_n überführen lassen. Die A_n, die zu einem solchen System gehören, heißen *projektiveuklidisch* und das quasigeodätische System selbst ein projektiveuklidisches.

Es gilt der folgende

Satz: *Eine affine Übertragung ist für $n > 2$ dann und nur dann projektiveuklidisch, wenn der Projektivkrümmungstensor verschwindet, und für $n = 2$ dann und nur dann, wenn für den Tensor $P_{\mu\nu}$ die Gleichungen*

$$2\, \nabla_{[\lambda} P_{\mu]\nu} = \nabla_\lambda P_{\mu\nu} - \nabla_\mu P_{\lambda\nu} = 0$$

gelten.

Es sei hier noch hervorgehoben, daß die Geradlinigkeitsbedingungen für die Dimension $n = 2$ eine Differentiationsordnung mehr verlangen als für alle übrigen Dimensionen.

Ist ein vorgelegtes quasigeodätisches System projektiveuklidisch, so ist dies gleichbedeutend mit der Existenz eines Koordinatensystems, in welchem sämtliche CHRISTOFFELschen Symbole $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ verschwinden. Dies ist weiter äquivalent damit, daß es über dem quasigeodätischen System eine A_n gibt, für welche der Krümmungstensor $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\omega}$ verschwindet. Eine derartige A_n heißt *euklidischaffin* und wird mit E_n bezeichnet.

Für eine projektiveuklidische A_n ist gemäß (7)

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = 2\, P_{[\lambda\mu]}\, \delta^{\omega}_{\nu} - 2\, \delta^{\omega}_{[\lambda}\, P_{\mu]\nu}\,. \tag{8}$$

Zur Ermittlung einer Abbildung, welche das zugehörige quasigeodätische System in die Geraden des projektiven Raumes P_n überführt, hat man zunächst eine bahntreue Transformation zu bestimmen, welche die A_n zu einer E_n macht. Durch Vergleich von (8) mit (6) stellt man fest, daß die Kovektorfelder p_ν, welche Lösungen von

$$\nabla_\lambda\, p_\mu - p_\lambda\, p_\mu = P_{\lambda\mu} \tag{9}$$

sind, zu derartigen bahntreuen Transformationen führen[8]).

Hat man auf diese Weise über dem quasigeodätischen System eine E_n konstruiert, so kann man schließlich in dieser von einem Punkte X_0 aus n linear unabhängige Kovektoren *parallel* verschieben[9]). Dadurch sind im P_n n parallele Kovektorfelder definiert; ihre Integralhyperflächenscharen seien gegeben durch

---

[8]) Die Integrabilitätsbedingung von (9) ist $\nabla_{[\lambda} P_{\mu]\nu} = 0$. Sie ist für $n > 2$ eine direkte Folge von $P_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} = 0$.

[9]) In einer E_n ist die Parallelverschiebung integrierbar.

$$\Phi^\beta(x^1, \ldots\ldots\ldots, x^n) = \text{const.}; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Parallelität dieser n Hyperflächenscharen drückt sich analytisch durch

$$\nabla_\lambda \Phi^\beta_\mu = 0$$

aus. Geht man jetzt noch durch

$$\xi^\beta = \Phi^\beta(x^1, \ldots\ldots\ldots, x^n)$$

zu einem neuen Koordinatensystem über, so folgt aus der Parallelitätsbedingung, daß in diesem die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ verschwinden, d. h. das quasigeodätische System besteht nun aus den Geraden des P_n.

Zur Diskussion gewisser spezieller Fragen benötigen wir später die Anzahl der *wesentlichen Komponenten* des Projektivkrümmungstensors. Es sei daher hier noch kurz eine Abzählung derselben vorgenommen. Dazu ist die Kenntnis der Identitäten zwischen den Komponenten dieses Tensors notwendig.

Zunächst bestehen für den Krümmungstensor einer A_n die beiden Identitäten

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\omega + R_{\mu\lambda\nu}{}^\omega = 0$$

und

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\omega + R_{\mu\nu\lambda}{}^\omega + R_{\nu\lambda\mu}{}^\omega - R_{\mu\lambda\nu}{}^\omega - R_{\lambda\nu\mu}{}^\omega - R_{\nu\mu\lambda}{}^\omega = 0\,.$$

In der abgekürzten Bachschen Symbolik geschrieben lauten sie

$$R_{(\lambda\mu)\nu}{}^\omega = 0\,; \quad R_{[\lambda\mu\nu]}{}^\omega = 0\,. \tag{10}$$

Aus der Definitionsgleichung (7) des Projektivkrümmungstensors entnimmt man sofort, daß dieser denselben Identitäten genügt:

$$P_{(\lambda\mu)\nu}{}^\omega = 0\,; \quad P_{[\lambda\mu\nu]}{}^\omega = 0\,. \tag{11}$$

$R_{\lambda\mu\nu}{}^\omega$ besitzt keine weiteren Identitäten. Durch einfaches Abzählen folgt aus (10), daß er daher im allgemeinen

$$d_R = \frac{n^2}{3}(n^2-1)$$

wesentliche Komponenten aufweist.

Der Projektivkrümmungstensor erfüllt noch eine weitere Identität, die leicht aus (7) zu verifizieren ist. Es ist nämlich

$$P_{\lambda\mu\nu}{}^\lambda = 0\,. \tag{12}$$

Dies sind noch n^2 zusätzliche lineare Beziehungen zwischen seinen Komponenten, so daß die Zahl seiner wesentlichen Komponenten

$$d_P = d_R - n^2 = \frac{n^2}{3}(n^2-4) \tag{13}$$

beträgt. Daraus folgt, daß er, wie bereits erwähnt, für $n = 2$ überhaupt keine wesentliche Komponente hat, also identisch verschwindet. Diese Tatsache kommt in der Sonderstellung des Falles $n = 2$ bei den Geradlinigkeitsbedingungen zum Ausdruck.

3. Geodätische Hyperflächen.

Eine Hyperfläche

$$\Phi\,(x^1\,,\,\ldots\ldots\ldots,\,x^n) = 0$$

oder der Schnitt mehrerer solcher Hyperflächen heißt geodätisch in einer A_n, wenn jede Integralkurve von (2), die ein Linienelement mit diesem Gebilde gemeinsam hat, ganz darin verläuft.

Die einparametrige Hyperflächenschar[10])

$$\Phi\,(x^1,\,\ldots\ldots\ldots,\,x^n) = c \tag{14}$$

mit dem Parameter c ist dann und nur dann geodätisch in einer A_n, wenn es ein Kovektorfeld u_λ gibt, so daß

$$\nabla_\lambda\,\Phi_\mu = 2\,u_{(\lambda}\,\Phi_{\mu)} \tag{15}$$

gilt[11]). Dabei ist $\Phi_\mu = \partial_\mu\,\Phi$.

Wichtig ist der folgende

Satz: *Das Schnittgebilde geodätischer Hyperflächen ist selbst wieder geodätisch.*

Zum Beweise betrachte man ein Linienelement des Schnittgebildes; die zugehörige geodätische Linie liegt dann ganz in allen Hyperflächen und daher auch ganz im Schnittgebilde.

Es sind Versuche gemacht worden, einem festen projektiven Zusammenhang Größen vom Typus der CHRISTOFFELschen Symbole zuzuordnen. Dies ist auch auf verschiedene Arten gelungen[12]). Man könnte ohne weiteres derartige Größen in der vorliegenden Arbeit zur Charakterisierung quasigeodätischer Systeme beiziehen. Allein es würde dadurch nichts Wesentliches gewonnen und zudem die Darstellung nur schwerfälliger gemacht. Für das Folgende wird es vollauf genügen, ein quasigeodätisches System stets durch einen *Repräsentanten* seiner zugeordneten affinen Zusammenhänge darzustellen.

---

10) Für $n = 2$ handelt es sich hier um eine Kurvenschar in der Ebene, für $n = 3$ um eine Flächenschar im Raum.

11) Vgl. [3], Bd. II, S. 181.

12) Vgl. etwa [3], Bd. II, S. 193; ferner [4], [5] und [6].

§ 2.

Kurvengewebe in der Ebene

Zwei stetig differenzierbare, *einparametrige Kurvenscharen*

$$\Phi(x^1, x^2) = \text{const.}; \quad \Psi(x^1, x^2) = \text{const.}$$

bilden innerhalb eines Gebietes G ein Kurvennetz, wenn in jedem Punkte von G

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0 \tag{1}$$

ist. Dies bedeutet, daß im Kleinen zwei Kurven aus verschiedenen Scharen höchstens einen Punkt gemeinsam haben.

Mit Hilfe des Begriffes *Kurvennetz* läßt sich nun sehr einfach erklären, was ein Gewebe ist.

Definition: *Ein System von k Kurvenscharen heißt ein Gewebe, wenn diese zu je zweien Kurvennetze bilden.*

Die Gewebebedingungen für k Kurvenscharen bestehen somit im Nichtverschwinden von $\binom{k}{2}$ Funktionaldeterminanten.

1. Die Klasse projektiver Zusammenhänge, die ein gegebenes 3-Gewebe geodätisch enthalten.

Wir stellen uns hier die Aufgabe, zu einem 3-Gewebe die sämtlichen quasigeodätischen Systeme aufzusuchen, in denen die Gewebekurven geodätische Linien sind.

Zunächst machen wir eine Abbildung, die ein Netz aus unserem Gewebe in die Achsenparallelen überführt. Infolge der Gewebebedingungen [1] ist dies wenigstens im Kleinen immer möglich. Die dritte Kurvenschar gehe dabei über in

$$\Phi(x^1, x^2) = \text{const.}$$

Dann lauten die Differentialgleichungen der 3 Kurvenscharen

$$d\,x^1 = 0; \quad d\,x^2 = 0; \quad d\,\Phi = 0\,, \tag{2}$$

und die Gewebebedingungen heißen

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \neq 0, \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \neq 0 \text{ [13]}. \tag{3}$$

Die Einführung eines speziellen Koordinatensystems durch Abbildung eines Gewebenetzes auf das Netz der Achsenparallelen [14] vereinfacht das Aufsuchen der obgenannten quasigeodätischen Systeme wesentlich.

---

[13]) Die dritte Netzbedingung steckt im Netz der Achsenparallelen.

[14]) Im folgenden kurz als Koordinatennetz bezeichnet.

Für die *Gradientenfelder*[15]) der 3 Kurvenscharen unseres Gewebes entnimmt man aus (2):

$$(1, 0);\ (0, 1);\ (\Phi_1, \Phi_2)\,. \tag{4}$$

Sollen diese in einer A_2 geodätisch sein, so muß jedes ein Gleichungssystem (1, 15) befriedigen. Die ersten beiden Felder haben zur Folge, daß für alle in Betracht kommenden A_2

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = 0 \tag{5}$$

ist. Die Gleichungen (1, 15) heißen dann für das dritte Feld, unter Berücksichtigung von (5),

$$\begin{aligned} \Phi_1 \Gamma^1_{11} \qquad\qquad &= \Phi_{11} - 2\,u_1 \Phi_1 \\ \Phi_1 \Gamma^1_{12} + \Phi_2 \Gamma^2_{12} &= \Phi_{12} - (u_1 \Phi_2 + u_2 \Phi_1) \\ \Phi_2 \Gamma^2_{22} \qquad\qquad &= \Phi_{22} - 2\,u_2\, \Phi_2 \end{aligned} \tag{6}$$

worin $\partial_i \partial_k \Phi = \Phi_{ik}$ gesetzt ist.

Dieses lineare Gleichungssystem für die darin enthaltenen CHRISTOFFELschen Symbole ist infolge der Gewebebedingungen (3) lösbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{\Phi_{11}}{\Phi_1} - 2\,u_1\,; \quad & \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} - u_2 + \lambda\,\Phi_2\,; \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{\Phi_{22}}{\Phi_2} - 2\,u_2\,; \quad & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\Phi_{12}}{\Phi 2} - u_1 - \lambda\,\Phi_1\,. \end{aligned} \tag{7}$$

$\lambda\,(x^1, x^2)$ spielt darin die Rolle eines *Lösungsparameters*; es ist nämlich für die beiden Symbole Γ^1_{12} und Γ^2_{12} nur eine einzige Bestimmungsgleichung vorhanden.

Weiter steckt noch das Kovektorfeld u_i als *willkürliche* Größe in der Lösung, denn zu jedem u_i gibt es A_n, welche unseren Forderungen genügen. Durch Vergleich von (7) mit (1, 4) stellen wir fest, daß eine Änderung dieses Kovektorfeldes äquivalent mit einer *bahntreuen Transformation* der Übertragung ist. Damit ergibt sich:

> *Bei Änderung des Kovektorfeldes u_i bleibt man in einer Klasse isogeodätischer A_2, währenddem man durch Änderung der Funktion λ die Gesamtheit der projektiven Zusammenhänge durchläuft, die unser Gewebe enthalten.*

Wir formulieren dieses Resultat in

Satz 1: *Die Gesamtheit der quasigeodätischen Systeme, die ein gegebenes 3-Gewebe enthalten, wird aufgespannt durch eine Funktion in zwei Variabeln.*

Dabei ist die Meinung, daß durch jede feste Wahl dieser Funktion λ ein solches quasigeodätisches System eindeutig bestimmt ist.

---

[15]) Ein Kovektorfeld w_λ heißt ein Gradientenfeld, wenn ein Skalarfeld s existiert, so daß $w_\lambda = \nabla_\lambda s = \dfrac{\partial s}{\partial x^\lambda}$. Vgl. [3], Bd. I, S. 67.

Da u_i nur bahntreue Transformationen charakterisiert, kann man sich für die Darstellung des zur Funktion λ gehörenden quasigeodätischen Systems auf eine spezielle Wahl beschränken. Wir wählen nun diesen Kovektor so, daß die beiden CHRISTOFFELschen Symbole in der ersten Kolonne von (7) ebenfalls verschwinden.

Ein Repräsentant aller A_2, die das zur Funktion gehörende quasigeodätische System besitzen, ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \Gamma^j_{ii} &= 0 \quad \textit{für alle möglichen Indexkombinationen} \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} - \frac{\Phi_{22}}{\Phi_2}\right] + \lambda\Phi_2 = \frac{1}{2}\,\partial_2\, ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) + \lambda\,\Phi_2, \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\Phi_{12}}{\Phi_2} - \frac{\Phi_{11}}{\Phi_1}\right] - \lambda\Phi_1 = \frac{1}{2}\,\partial_1\, ln\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right) - \lambda\,\Phi_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Wir werden in unseren folgenden Betrachtungen ein quasigeodätisches System über einem Gewebe immer durch diese spezielle A_2 charakterisieren.

2. Das quasigeodätische System über einem 4-Gewebe.

Satz 2: *Die Kurven eines 4-Gewebes gehören stets einem eindeutig bestimmten quasigeodätischen System an.*

Dieser Satz ist bereits bekannt[16]), nicht aber seine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen. Wir wollen ihn aus diesem Grunde als Vorbereitung auf den § 3 in derjenigen Form beweisen, die sich dann ohne weiteres auf höhere Dimensionen übertragen läßt.

Wir geben unser 4-Gewebe durch die vier Differentialgleichungen

$$d\,x^1 = 0;\; d\,x^2 = 0;\; d\,\Phi = 0;\; d\,\Psi = 0$$

bzw. durch die vier Gradientenfelder

$$(\,1\;,0\,);\;(\,0\;,1\,);\;(\Phi_1, \Phi_2);\;(\Psi_1, \Psi_2)$$

was immer durch Abbildung eines seiner Netze auf die Achsenparallelen erreicht werden kann. Die Gewebebedingungen lauten jetzt:

$$\begin{matrix} \Phi_1 \neq 0; & \Phi_2 \neq 0; \\ \Psi_1 \neq 0; & \Psi_2 \neq 0; \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Psi_1 & \Psi_2 \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{9}$$

(8) stellt mit Hilfe der Funktion λ die Klasse der projektiven Zusammenhänge über dem 123-Gewebe dar; entsprechend können wir mit einer anderen Funktion μ die Klasse der projektiven Zusammenhänge über dem 124-Gewebe erzeugen. Der *Durchschnitt* dieser beiden Klassen liefert dann diejenigen projektiven Zusammenhänge, die das ganze 4-Gewebe enthalten. Dies drückt sich aus in:

---

[16]) Vgl. [1], S. 246.

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\,\partial_2\, ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) + \lambda\,\Phi_2 = \frac{1}{2}\,\partial_2\, ln\left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2}\right) + \mu\,\Psi_2$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\,\partial_1\, ln\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right) - \lambda\,\Phi_1 = \frac{1}{2}\,\partial_1\, ln\left(\frac{\Psi_2}{\Psi_1}\right) - \mu\,\Psi_1 .$$

Betrachtet man diese beiden Beziehungen als *lineares Gleichungssystem* für λ und μ, so ist dieses infolge (9) eindeutig lösbar. Der Durchschnitt besteht also aus einem einzigen projektiven Zusammenhang bzw. quasigeodätischen System. Damit ist aber Satz 2 bewiesen.

3. *Das Doppelverhältnissystem.*

Wir gehen nun wieder zurück zu (8) und zeigen, daß der Funktion $\lambda = 0$ eine besondere geometrische Bedeutung zukommt. Infolge (2) ist

$$\sigma\,\Phi_1\,dx^1 + \Phi_2\,dx^2 = 0 \tag{11}$$

für jeden gegebenen (von x^1 und x^2 unabhängigen) Wert σ die Differentialgleichung einer *einparametrigen* Kurvenschar, die mit den Kurven des 3-Gewebes in jedem Punkt das *Doppelverhältnis* σ bildet. Es sei

$$\Psi\,(x^1, x^2) = \text{const.}$$

das Integral von (11) und f der zugehörige *integrierende Faktor.* Dann gelten für das Gradientenfeld dieser Kurvenschar die Beziehungen

$$\Psi_1 = \sigma\,f\,\Phi_1;\; \Psi_2 = f\,\Phi_2 . \tag{12}$$

Für jeden von 1 verschiedenen Wert σ bilden nun (4) und (12) zusammen ein 4-Gewebe, und man findet aus (10), daß das zugehörige eindeutig bestimmte quasigeodätische System für jeden Wert von σ durch $\lambda = 0$ gegeben ist.

Satz 3: *Alle Kurvenscharen, die mit den Kurven eines 3-Gewebes ein festes Doppelverhältnis bilden, liegen in einem ausgezeichneten quasigeodätischen System. Dieses ist in unserem speziellen Koordinatensystem durch $\lambda = 0$ charakterisiert.*

THOMSEN nennt dieses ausgezeichnete System das *Doppelverhältnissystem*[17]. Das Doppelverhältnissystem, im folgenden stets mit *D.V.-System* bezeichnet, erlaubt somit, bereits einem 3-Gewebe *invariant* ein quasigeodätisches System zuzuordnen.

Da keine der 3 Gewebekurvenscharen irgendwie ausgezeichnet ist, folgt sofort, daß das D.V.-System nach Abbildung irgendeines Gewebenetzes auf das Koordinatennetz immer durch

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \frac{1}{2}\,\partial_k\, ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \quad \text{für } i \neq k \\ \Gamma^j_{ik} &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sonst} \end{aligned} \tag{13}$$

[17]) Vgl. [7].

gegeben ist. Dabei ist Φ_i das Gradientenfeld der restlichen Gewebeschar. Wir halten diese Tatsache fest in

Satz 4: *$\lambda = 0$ hat Invariantencharakter; in jedem Koordinatensystem, dessen Parameternetz mit einem Gewebenetz übereinstimmt, ist das D.V.-System durch das Verschwinden von λ gekennzeichnet.*

4. Geradlinigkeitsfragen.

Ein Gewebe lasse sich *geradlinig* machen, d. h. es lasse sich durch eine zugelassene topologische Abbildung in *k Geradenscharen* überführen. Ergänzt man diese durch Hinzunahme aller übrigen Geraden der Ebene zum quasigeodätischen System, das aus allen Geraden der Ebene besteht, so sieht man leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes ein.

Satz 5: *Damit sich ein Gewebe geradlinig machen läßt, ist notwendig und hinreichend, daß seine Kurven einem projektiveuklidischen quasigeodätischen System angehören.*

Gemäß (8) lassen sich die quasigeodätischen Systeme über einem Gewebe durch die beiden wesentlichen Größen

$$\Gamma^1_{12} = H(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \lambda)$$
$$\Gamma^2_{12} = L(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \lambda)$$

darstellen. Die zugehörige A_2 ist projektiveuklidisch, wenn

$$\nabla_{[i} P_{j]k} = 0$$

ist. Die Rechnung liefert hiefür:

$$\begin{aligned} 2H(2H_1 + L_2) + 2H_{12} + L_{22} &= 0 \\ 2L(2L_2 + H_1) + 2L_{12} + H_{11} &= 0\,, \end{aligned} \tag{14}$$

worin die Indizes Ableitung nach x^1 bzw. x^2 bedeuten.

Sollen nun die Kurven eines 3-Gewebes einem projektiveuklidischen quasigeodätischen System angehören, so heißt dies, daß eine Funktion λ existiert, derart, daß (14) befriedigt wird. Da Φ durch das Gewebe gegeben ist, kann man diesen Sachverhalt auch folgendermaßen formulieren:

Satz 6: *Ein 3-Gewebe läßt sich dann und nur dann geradlinig machen, wenn das System (14) von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in λ eine Lösung hat*[18]).

Die Entscheidung, ob sich ein vorgelegtes 3-Gewebe geradlinig machen lasse, führt somit auf die Aufgabe, für ein gewisses *partielles Differentialgleichungssystem* die *Existenz von Lösungen* abzuklären.

---

[18]) Vgl. [1], S. 173.

Die Abbildung, die ein projektiveuklidisches quasigeodätisches System in die Geraden der Ebene überführt, ist bis auf *Projektivitäten* eindeutig bestimmt; denn sind etwa T_1 und T_2 zwei Abbildungen, die ein solches System gerade machen, so ist

$$T_1 \cdot T_2^{-1}$$

eine geradentreue Abbildung der Ebene auf sich, d. h. eine Projektivität. Diese Tatsache gibt Anlaß zu

Satz 7: *Zu einer Lösung λ von (14) gehört genau eine Klasse projektiv äquivalenter gerader Realisationen des Gewebes*[19]).

Da die *parallelisierbaren* Gewebe[20]) nach einem Satz von GRAF und SAUER unendlich viele projektiv verschiedene gerade Realisationen gestatten, haben wir in diesen Geweben ein Beispiel dafür, daß die Lösung λ von (14), falls sie überhaupt existiert, nicht unbedingt eindeutig zu sein braucht. Die Vermutung, daß (14) für ein nichtparallelisierbares Gewebe höchstens eine Lösung hat, ist der Inhalt des bekannten *Eindeutigkeitsproblems der Nomographie*[21]).

Der Lösung $\lambda = 0$ kommt eine spezielle Bedeutung zu; sie hat zur Folge, daß das invariant mit dem Gewebe verknüpfte D.V.-System projektiveuklidisch ist.

Satz 8: *Ein vorgelegtes 3-Gewebe ist dann und nur dann parallelisierbar, wenn das zugehörige D.V.-System projektiveuklidisch ist.*

Durch diesen Satz gelangen die parallelisierbaren Gewebe im Rahmen dieser Geradlinigkeitsbetrachtungen zu einer Sonderstellung.

Zum Beweise führen wir die Hilfsgröße

$$\varrho = \partial_1 \partial_2 \, ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) \quad ^{22)} \tag{15}$$

ein. Die Geradlinigkeitsbedingungen

$$\nabla_{[i} P_{j]k} = 0$$

heißen dann laut (14) für das D.V.-System

$$\begin{aligned} -\varrho_1 + \varrho\, \partial_1 ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) &= 0 \\ \varrho_2 + \varrho\, \partial_2 ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) &= 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[19]) Vgl. [1], S. 173.

[20]) BLASCHKE bezeichnet sie auf Grund einer Schließungseigenschaft als *Sechseckgewebe*.

[21]) Vgl. [1], S. 176.

[22]) Die Größe ϱ ist identisch mit der von BLASCHKE eingeführten *Sechseckinvarianten*. Vgl. [1], § 16.

Durch Differentiation nach x^2 bzw. x^1 entnimmt man daraus

$$\varrho_{12} - \varrho^2 - \varrho_2\, \partial_1 ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0; \quad \varrho_{12} + \varrho^2 + \varrho_1\, \partial_2 ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0 .$$

Unter Berücksichtigung von (16) ergibt sich dafür

$$\varrho\,(\varrho_{12} - \varrho^2) - \varrho_1\, \varrho_2 = 0; \quad \varrho\,(\varrho_{12} + \varrho^2) - \varrho_1\, \varrho_2 = 0 ,$$

was nur für $\varrho = 0$ verträglich ist. Die Funktion Φ, welche die dritte Gewebeschar kennzeichnet, muß somit der Differentialgleichung

$$\partial_1\, \partial_2 ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = 0 \quad (17)$$ [23]

genügen. Daraus folgt aber die Abbildbarkeit auf 3 Parallelenscharen.

Umgekehrt sei das Gewebe parallelisierbar; da das D.V.-System zu 3 Parallelenscharen aus den Geraden der Ebene besteht, ist bereits gezeigt, daß es notwendigerweise projektiveuklidisch ist.

Damit ist aber Satz 8 bewiesen.

Aus der Tatsache, daß das D.V.-System zu 3 Parallelenscharen durch die Geraden der Ebene gebildet wird, schließt man sofort auf

Satz 9: *Ist das D.V.-System eines 3-Gewebes projektiveuklidisch, so geht bei jeder Abbildung dieses Systems auf die Geraden der Ebene das Gewebe in 3 Geradenbüschel über, deren Scheitel auf einer (eventuell unendlich fernen) Geraden liegen.*

Gemäß Satz 7 sind nämlich sämtliche *geraden Realisationen* des Gewebes, die zu einer Lösung λ gehören, *projektiv äquivalent.* Dies gilt speziell auch für die Lösung $\lambda = 0$, d. h. für das D.V.-System.

Für ein Gewebe aus mehr als 3 Kurvenscharen vereinfacht sich das Kriterium für die topologische Äquivalenz mit einem Geradengewebe bedeutend. Handelt es sich um ein 4-Gewebe, so ist das quasigeodätische System stets eindeutig bestimmt; zur Entscheidung, ob eine Abbildung auf ein Geraden-4-Gewebe möglich ist, bleiben bloß für H und L die Bedingungen (14) zu verifizieren. Bei mehr als 4 Kurvenscharen hat man zunächst zu prüfen, ob das Gewebe einem quasigeodätischen System angehört. Trifft dies zu, so ist dieses System jedenfalls eindeutig gegeben. Da es sich mit einem willkürlich herausgegriffenen 4-Gewebe bestimmen läßt, ist das weitere Vorgehen dasselbe wie im Falle eines 4-Gewebes.

[23]) Differentialgleichung von DE SAINT-ROBERT; vgl. etwa SCHWERDT, H., Lehrbuch der Nomographie, Berlin, 1924, S. 136.

§ 3.

Hyperflächengewebe im n-dimensionalen projektiven Raum P_n

In diesem Abschnitt sei stets $n > 2$ vorausgesetzt.

Zur Darstellung der Gewebe im *n-dimensionalen euklidischen Raum* verwenden wir auch im folgenden wieder *affine Koordinaten*. Da aber die *Gruppe der projektiven Abbildungen* des Raumes auf sich eine ähnliche Rolle spielen wird wie in der Ebene, ist es naheliegend, von vornherein den um die uneigentlichen Elemente erweiterten euklidischen Raum, d. h. den *n-dimensionalen projektiven Raum* P_n zugrunde zu legen. Diese Voraussetzung haben wir bereits schon in § 2 gemacht, jedoch ohne sie dort speziell zu formulieren.

In Verallgemeinerung der Definitionen des § 2 haben wir zu setzen:

Definition: *n einparametrige Hyperflächenscharen*

$$\Phi^\beta (x^1, \ldots\ldots, x^n) = const.$$
$$\beta = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

bilden innerhalb eines Gebietes G des P_n *ein Hyperflächennetz, wenn in jedem Punkte von G*

$$\frac{\partial (\Phi^1, \ldots\ldots, \Phi^n)}{\partial (x^1, \ldots\ldots, x^n)} \neq 0 \tag{1}$$

ist.

Dies bedeutet hier, daß im Kleinen n Hyperflächen aus verschiedenen Scharen höchstens einen Punkt gemeinsam haben.

Definition: *Ist $k > n$, so heißt ein System von k Hyperflächenscharen innerhalb eines Gebietes G ein Gewebe, wenn n beliebig herausgegriffene Scharen stets ein Hyperflächennetz erzeugen.*

Für k Hyperflächenscharen bestehen somit die Gewebebedingungen im Nichtverschwinden von $\binom{k}{n}$ Funktionaldeterminanten.

1. *Die Klasse projektiver Zusammenhänge, in denen ein gegebenes (n+1)-Gewebe aus geodätischen Hyperflächen besteht.*

Die Überführung eines Gewebenetzes in das Koordinatennetz wird uns das Aufsuchen dieser projektiven Zusammenhänge auch hier wieder wesentlich erleichtern. Eine derartige Abbildung ist wenigstens im Kleinen genau wie in § 2 als Folge der Gewebebedingungen immer möglich. Die $(n+1)$-te Hyperflächenschar gehe dabei über in

$$\Phi (x^1, \ldots\ldots\ldots, x^n) = \text{const.}$$

In diesem speziellen Koordinatensystem ist das Gewebe dann durch die $(n+1)$ Gradientenfelder

$$\begin{matrix} (1, & 0, & \ldots, & 0) \\ (0, & 1, & \ldots, & 0) \\ & & & \\ (0, & 0, & \ldots, & 1) \\ (\Phi_1, & \Phi_2, & \ldots, & \Phi_n) \end{matrix} \tag{2}$$

gegeben, und die Gewebebedingungen nehmen die Gestalt

$$\Phi_i \neq 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

an.

Die Forderung, daß die Gewebescharen geodätisch in einer A_n liegen sollen, zieht für jedes Feld in (2) ein Gleichungssystem von der Form (1, 15) nach sich. Die ersten n Felder haben zur Folge, daß zunächst für sämtliche in Betracht kommenden A_n

$$\Gamma^j_{ik} = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und } k \neq j\,. \tag{4}$$

ist. Schreibt man jetzt unter Berücksichtigung von (4) das Gleichungssystem (1, 15) für das letzte Gradientenfeld auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_i \Gamma^i_{ii} \qquad\qquad &= \Phi_{ii} - 2\, u_i\, \Phi_i \\ \Phi_i \Gamma^i_{ik} + \Phi_k \Gamma^k_{ik} &= \Phi_{ik} - (u_i \Phi_k + u_k \Phi_i) \end{aligned} \tag{5}$$

i und k durchlaufen dabei die Zahlen von 1 bis n.

Dieses *lineare Gleichungssystem* von $n + \binom{n}{2}$ Gleichungen ist infolge (3) nach den CHRISTOFFELschen Symbolen lösbar, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_{ii} = \frac{\Phi_{ii}}{\Phi_i} - 2\, u_i \\ &\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{\Phi_{ik}}{\Phi_i} - u_k + \overset{(ik)}{\lambda}\, \Phi_k \\ \Gamma^k_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{\Phi_{ik}}{\Phi_k} - u_i - \overset{(ik)}{\lambda}\, \Phi_i \end{aligned}\right\} \quad i < k \end{aligned} \tag{6}$$

Zu jedem Indexpaar (i, k) mit $i < k$ gehört jetzt eine Funktion

$$\overset{(ik)}{\lambda}(x^1, \ldots, x^n)\,,$$

was durch die beiden Indizes in der Klammer kenntlich gemacht ist. Diese $\binom{n}{2}$ Funktionen spielen in (6) die Rolle von *Lösungsparametern.* Daneben steckt noch der *willkürliche* Kovektor u_i in der Lösung. Man stellt leicht fest, daß durch Änderung desselben eine bahntreue Transformation gekennzeichnet ist, währenddem man bei Änderung der λ die Gesamtheit aller projektiven Zusammenhänge durchläuft, die unser Gewebe geodätisch enthalten. Daraus folgt

Satz 10: *Die Gesamtheit der quasigeodätischen Systeme, die ein gegebenes Hyperflächen $(n+1)$-Gewebe geodätisch enthalten, wird aufgespannt durch $\binom{n}{2}$ Funktionen in n Variabeln.*

Wir setzen im folgenden für ein gewisses System dieser Funktionen das Symbol $[\lambda]$.

Zur Charakterisierung des zu λ gehörenden quasigeodätischen Systems können wir uns auf eine spezielle Wahl von u_i beschränken. Wir wählen nun diejenige A_n, für welche in unserem speziellen Koordinatensystem Γ^i_{ii} ebenfalls verschwindet. Für diesen Repräsentanten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \frac{1}{2}\,\partial_k\, ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) + \overset{(ik)}{\lambda}\,\Phi_k \\ \Gamma^k_{ik} &= \frac{1}{2}\,\partial_i\, ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_i}\right) - \overset{(ik)}{\lambda}\,\Phi_i \\ \Gamma^j_{ik} &= 0\,, \text{ sonst.} \end{aligned} \tag{7}$$

In den folgenden Betrachtungen werden wir ein quasigeodätisches System über einem $(n+1)$-Gewebe immer durch diese spezielle A_n erzeugen.

2. *Hyperflächen-$(n+2)$-Gewebe.*

Satz 11: *Ein Hyperflächen-$(n+2)$-Gewebe bestimmt stets eindeutig einen projektiven Zusammenhang, in dem es geodätisch enthalten ist.*

Dieser Satz ist eine direkte Verallgemeinerung von Satz 2. Der Beweis des letzteren wurde bereits derart geführt, daß eine Übertragung auf höhere Dimensionen ohne weiteres möglich ist.

Das Gewebe sei durch die $(n+2)$ Hyperflächenscharen

$$\begin{aligned} dx^i &= 0; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \\ d\,\Phi &= 0; \quad d\,\Psi = 0 \end{aligned}$$

gegeben. Die Gewebebedingungen lauten dann

$$\Phi_i \neq 0; \; \Psi_i \neq 0; \quad \begin{vmatrix} \Phi_i & \Phi_k \\ \Psi_i & \Psi_k \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{für } i \neq k \tag{8}$$

Wir adjungieren nun zum Netz der ersten n Scharen einmal die Schar $d\Phi = 0$ und einmal die Schar $d\Psi = 0$. Es werden dadurch zwei $(n+1)$-Gewebe ausgezeichnet. Die Darstellung des *Durchschnittes* der beiden Klassen projektiver Zusammenhänge über je einem dieser $(n+1)$-Gewebe führt unter Berücksichtigung von (7) für jedes Indexpaar (i, k) auf ein Gleichungssystem von der Gestalt (2, 10). Diese Gleichungssysteme sind aber infolge (8) eindeutig lösbar, womit Satz 11 bewiesen ist.

Satz 12: *Jede topologische Abbildung des P_n auf sich, welche ein Hyperebenen-$(n+2)$-Gewebe wieder in ein solches überführt, ist geradentreu und damit eine Projektivität.*

Das durch ein Hyperebenen-$(n+2)$-Gewebe eindeutig festgelegte quasigeodätische System besteht nämlich aus den Geraden des P_n; eine Abbildung, die ein Hyperebenen-$(n+2)$-Gewebe wieder in ein solches überführt, ist daher geradentreu. In der reellen Geometrie sind aber die geradentreuen Abbildungen des P_n auf sich Projektivitäten[24]).

3. *Schnittgewebe.*

Es sei hier zunächst noch ein Hilfssatz über quasigeodätische Systeme vorangestellt:

Satz: *In einem projektiven Zusammenhang des P_n sei eine geodätische Hyperflächenschar gegeben. Dann erzeugen die Geodätischen des P_n, welche ganz in dieser Schar verlaufen, auf jeder ihrer Hyperflächen einen (n-1)-dimensionalen projektiven Zusammenhang.*

Beweis: Durch eine Koordinatentransformation werde die vorliegende Hyperflächenschar in die Schar

$$dx^n = 0$$

übergeführt. Die affinen Zusammenhänge A_n, welche diese Schar geodätisch enthalten, sind dann ausgezeichnet durch

$$\Gamma^n_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq n \quad \text{und} \quad k \neq n. \tag{9}$$

Unter diesen A_n gibt es genau eine, für welche sogar

$$\Gamma^n_{ik} = 0 \quad \text{für beliebige } i, k \text{ }^{25}). \tag{10}$$

Mit einem geeigneten Parameter t lauten die Differentialgleichungen der Geodätischen eines Zusammenhanges im P_n:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0; \quad i = 1, \ldots\ldots, n.$$

Infolge (10) vereinfachen sie sich im vorliegenden Falle zu:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0; \quad i = 1, \ldots\ldots, (n-1)$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \qquad = 0.$$

---

[24]) Diese Tatsache folgt direkt aus dem entsprechenden Satz für $n = 2$; vgl. etwa [8], § 14.

[25]) Es gibt nämlich eine bahntreue Transformation p_i, so daß $\Gamma^n_{ni} + \delta^n_n p_i + \delta^n_i p_n = 0$ für $i = 1, \ldots\ldots, n$.

Für die Geodätischen, die ganz in unserer Hyperflächenschar verlaufen, ist aber dauernd

$$\frac{dx^n}{dt} = 0,$$

d. h. diese genügen den Gleichungen

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0; \quad i = 1, \ldots\ldots, (n-1)$$

$$\frac{dx^n}{dt} = 0.$$

Dies sind aber die Gleichungen *$(n-1)$-dimensionaler quasigeodätischer Systeme* in den Hyperebenen $x^n = \text{const.}$ Unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wir betrachten nun wieder ein $(n+1)$-Gewebe im P_n. Das Schnittgebilde von $(n-m)$[26] Gewebehyperflächen, die verschiedenen Scharen angehören, ist eine *m-dimensionale Mannigfaltigkeit* R^m, und die übrigen $(m+1)$ Gewebescharen erzeugen in dieser R^m ein $(m+1)$-Gewebe. Wir bezeichnen dieses als das *Schnittgewebe.* Zum Beispiel nehme man etwa ein Flächen-4-Gewebe im P_3; auf jeder Gewebefläche erzeugen die übrigen 3 Flächenscharen ein Kurven-3-Gewebe.

Wie in § 1 gezeigt wurde, ist das Schnittgebilde geodätischer Hyperflächen selbst wieder geodätisch. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz über quasigeodätische Systeme schließt man daher auf den im folgenden Satz formulierten Sachverhalt:

Satz 13: *Ein quasigeodätisches System über einem $(n+1)$-Gewebe induziert im Schnittgebilde R^m von $(n-m)$ Gewebehyperflächen aus verschiedenen Scharen ein quasigeodätisches System von der Dimension m, welches das Schnittgewebe geodätisch enthält.*

4. *Das Doppelverhältnis-System.*

Wir untersuchen nun die projektiven Zusammenhänge über einem $(n+1)$-Gewebe etwas eingehender. Es wird sich zeigen, daß entsprechend dem Verschwinden von λ in der Ebene, im P_n dem Verschwinden sämtlicher Lösungsparameter in (6) eine geometrische Bedeutung zukommt. Wir wollen diesen projektiven Zusammenhang durch $[\lambda] = 0$ kennzeichnen.

Bei Voraussetzung eines geeigneten Parameters t lauten die Gleichungen der Geodätischen eines projektiven Zusammenhanges über dem $(n+1)$-Gewebe:

---

[26]) $n > m > 1$.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{11}$$

wobei für die CHRISTOFFELschen Symbole Γ^i_{jk} jetzt (7) maßgebend ist.

Fixieren wir nun für einen Moment zwei Indizes i und k. Das im Schnittgebilde R^2 von $(n-2)$ Gewebehyperflächen aus den Scharen

$$dx^j = 0; \; j \neq i \text{ und } j \neq k,$$

aber sonst alle Zahlen von 1 bis n

induzierte quasigeodätische System wird dann durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\,\Gamma^i_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2x^k}{dt^2} + 2\,\Gamma^k_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

dargestellt. Ist speziell $\overset{(ik)}{\lambda} = 0$, so wird

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \frac{1}{2}\, \partial_k \ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \quad \text{für} \quad i \neq k \\ \Gamma^j_{ik} &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \tag{13}$$

Das 2-dimensionale quasigeodätische System (12) ist aber dann ein D.V.-System gemäß § 2. Das Verschwinden von $\overset{(ik)}{\lambda}$ drückt somit ein bestimmtes geometrisches Verhalten des projektiven Zusammenhanges gegenüber dem Gewebe aus.

$[\lambda] = 0$ heißt ausgeschrieben:

$$\overset{(ik)}{\lambda} = 0 \quad \text{für alle } i, k.$$

Der projektive Zusammenhang $[\lambda] = 0$ ist also zunächst einmal dadurch ausgezeichnet, daß er in sämtlichen Schnittgebilden R^2, bei deren Bildung die *Schar* $d\Phi = 0$ *nicht beteiligt* ist, das D.V.-System über dem Schnittgewebe induziert. Wir wollen nun zeigen, daß dies überhaupt für alle 2-dimensionalen Schnittgewebe gilt. Dazu haben wir jetzt noch diejenigen Schnittgebilde zu untersuchen, bei deren Bildung die *Gewebeschar* $d\Phi = 0$ *beteiligt* ist.

Betrachten wir etwa das Schnittgebilde R^2 aus je einer Hyperfläche der Scharen

$$dx^4 = 0,\, dx^5 = 0,\, \ldots\ldots\ldots\ldots,\, dx^n = 0,\, d\Phi = 0$$ [27].

Diese R^2 hat mit der Schar $dx^1 = 0$ eine Kurvenschar gemeinsam, deren Tangentenfeld sich als *Vektorprodukt* im P_n darstellen läßt. Man findet dafür

$$\overline{r}^i = (\;0\;,\, -\Phi_3,\; \Phi_2\;,\; 0\;, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\; 0\;).$$

[27]) Für die übrigen verläuft der Nachweis genau gleich.

Entsprechend erhält man für die Tangentenfelder der Schnittkurven mit den Scharen $dx^2 = 0$ und $dx^3 = 0$:

$$\bar{s}^i = (\ \Phi_3,\ 0,\ -\Phi_1,\ 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ 0\ )$$
$$\bar{t}^i = (-\Phi_1,\ \Phi_3,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ 0\ ).$$

Normiert man diese 3 Felder so, daß ihre Summe verschwindet, so wird etwa

$$\begin{aligned} r^i &= (\ 0,\ -\Phi_1\Phi_3,\ \Phi_1\Phi_2,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0\ ) \\ s^i &= (\ \Phi_2\Phi_3,\ 0,\ -\Phi_1\Phi_2,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0\ ) \\ t^i &= (-\Phi_2\Phi_3,\ \Phi_1\Phi_3,\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0\ ). \end{aligned} \tag{14}$$

Eine zu diesen 3 Scharen *harmonische* Schar ist dann gegeben durch das Tangentenfeld

$$h^i = r^i - s^i = (-\Phi_2\Phi_3,\ -\Phi_1\Phi_3,\ 2\,\Phi_1\Phi_2,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0\ ). \tag{15}$$

Die Integralkurven des Vektorfeldes h^i liegen natürlich ganz in unserer R^2. Falls wir nun zeigen können, daß sie gleichzeitig Geodätische im projektiven Zusammenhang $[\lambda] = 0$ sind, so ist unsere Behauptung bewiesen. Das in unserer R^2 induzierte 2-dimensionale quasigeodätische System enthält nämlich dann nebst dem Schnittgewebe (14) noch eine Kurvenschar, die mit den Gewebekurven ein konstantes Doppelverhältnis bildet; es handelt sich daher um das D.V.-System über dem Schnittgewebe.

Setzt man in (1, 2)

$$v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt},$$

so erhält man daraus die Bedingungen für ein *geodätisches Tangentenfeld.* Sie lauten

$$v^\mu\,\partial_\mu v^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,v^\mu v^\nu = a\,v^\lambda\ . \tag{16}$$

Diese Beziehungen haben wir nun für das Vektorfeld h^i zu verifizieren. Da h^i nur 3 wesentliche Komponenten aufweist, reduziert sich (16) in unserem Falle auf:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{3} h^s\partial_s h^1 + 2\,\Gamma^1_{12}h^1h^2 + 2\,\Gamma^1_{13}h^1h^3 &= a\,h^1 \\ \sum_{s=1}^{3} h^s\partial_s h^2 + 2\,\Gamma^2_{21}h^1h^2 + 2\,\Gamma^2_{23}h^2h^3 &= a\,h^2 \\ \sum_{s=1}^{3} h^s\partial_s h^3 + 2\,\Gamma^3_{31}h^1h^3 + 2\,\Gamma^3_{32}h^2h^3 &= a\,h^3. \end{aligned} \tag{17}$$

Die Rechnung zeigt, daß diese 3 Beziehungen miteinander verträglich sind. Man findet für den Faktor a den Wert

$$a = 2\Phi_1\Phi_2\partial_3 ln(\Phi_1\Phi_2) - \Phi_2\Phi_3\partial_1 ln(\Phi_2\Phi_3) - \Phi_3\Phi_1\partial_2 ln(\Phi_3\Phi_1) = \sum_{s=1}^{3} h^s\partial_s ln(h^s).$$

Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Wir formulieren dieses Resultat in

Satz 14: *Der projektive Zusammenhang $[\lambda] = 0$ über einem $(n+1)$-Gewebe ist geometrisch ausgezeichnet. Er induziert in sämtlichen 2-dimensionalen Schnittgebilden des Gewebes das D.V.-System über dem Schnittgewebe.*

Aus naheliegenden Gründen werden wir nun das quasigeodätische System $[\lambda] = 0$ auch in höheren Dimensionen das *D.V.-System zum gegebenen $(n+1)$-Gewebe* nennen. Diese Bezeichnungsweise ist gerechtfertigt, denn zu jedem $(n+1)$-Gewebe gehört, wie wir gleich noch zeigen werden, genau ein projektiver Zusammenhang mit den in Satz 14 ausgesprochenen geometrischen Eigenschaften. Zeigt nämlich ein projektiver Zusammenhang das in Satz 14 formulierte geometrische Verhalten, so schließt man sofort, daß nach Abbildung irgend eines Gewebenetzes auf das Koordinatennetz die CHRISTOFFELschen Symbole einer geeigneten, eindeutig bestimmten A_n über diesem quasigeodätischen System stets die Gestalt

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ik} &= \frac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right), \quad \text{für } i \neq k \\ \Gamma^j_{ik} &= 0, \quad \text{sonst} \end{aligned} \tag{18}$$

annehmen. Dabei ist Φ_i das Gradientenfeld der restlichen Gewebeschar. Die erste Zeile in (18) drückt nämlich gerade aus, daß in gewissen 2-dimensionalen Schnittgebilden des Gewebes D.V.-Systeme erzeugt werden. In jedem derartigen Koordinatensystem ist dieser projektive Zusammenhang daher durch $[\lambda] = 0$ ausgezeichnet. Wir formulieren diesen Sachverhalt entsprechend wie in der Ebene in

Satz 15: $[\lambda] = 0$ *besitzt gewissermaßen den Charakter einer Invarianten; in jedem Koordinatensystem, dessen Parameternetz mit einem Gewebenetz übereinstimmt, ist das D.V.-System durch $[\lambda] = 0$, d. h. durch das Verschwinden aller $\overset{(ik)}{\lambda}$ gekennzeichnet.*

Aus dem Beweise des Satzes 14 entnehmen wir noch ein Kriterium für das D.V.-System.

Satz 16: *Induziert ein quasigeodätisches System über einem $(n+1)$-Gewebe in sämtlichen $\binom{n}{2}$ Scharen von 2-dimensionalen Schnittgebilden, die durch n Gewebescharen erzeugt werden, D.V.-Systeme, so tut es dies auch in allen übrigen 2-dimensionalen Schnittgebilden, und es handelt sich um das D.V.-System zum vorgelegten $(n+1)$-Gewebe.*

Satz 16 gestattet die Aufstellung der Differentialgleichungen des D.V.-Systems, ohne daß dabei das Gewebe zuerst auf die spezielle Form (2) gebracht werden muß. Man hat einfach zu formulieren, daß neben den Gewebehyperflächen auch noch $\binom{n}{2}$ *geeignete* Kurvenscharen geodätisch sind. Beispielsweise kann man etwa in $\binom{n}{2}$ gemäß Satz 16 ausgewählten Scharen von 2-dimensionalen Schnittgebilden eine zum entsprechenden Schnittkurven-3-Gewebe *harmonische Schar* beiziehen. Der projektive Zusammenhang ist dadurch laut Satz 16 eindeutig bestimmt.

Innerhalb der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten des Satzes 16 läßt sich das D.V.-System sogar *konstruieren.* Es besteht dort aus denjenigen Kurven, die mit dem entsprechenden Schnittgewebe konstante Doppelverhältnisse bilden. Über *quer* durch den P_n laufende Geodätische läßt sich jedoch nichts aussagen.

Aus dem Vorhergehenden entnehmen wir weiter noch

Satz 17: *Das D.V.-System über einem Hyperflächen-$(n+1)$-Gewebe induziert in jedem m-dimensionalen Schnittgebilde R^m von $(n-m)$ Gewebehyperflächen, welche verschiedenen Scharen angehören, das D.V.-System über dem zugehörigen Schnittgewebe.*

Dieses Verhalten folgt direkt aus dem Verschwinden aller $\overset{(ik)}{\lambda}$ beim D.V.-System.

Wie wir gezeigt haben, ist ein quasigeodätisches System erst durch ein $(n+2)$-Gewebe *eindeutig* festgelegt. Das D.V.-System gestattet aber, bereits einem $(n+1)$-Gewebe *invariant* ein quasigeodätisches System zuzuordnen.

5. *Ebenheitsfragen.*

Das Kriterium für die Existenz einer topologischen Abbildung, die ein vorgegebenes Gewebe in ein Hyperebenengewebe überführt, ist im folgenden Satz enthalten:

Satz 18: *Ein Hyperflächengewebe läßt sich dann und nur dann eben machen, wenn es aus geodätischen Flächen eines projektiveuklidischen quasigeodätischen Systems besteht.*

Die Richtigkeit ist leicht einzusehen. Da ein Hyperebenengewebe im quasigeodätischen System der Geraden des P_n enthalten ist, ist die Bedingung notwendig; sie ist auch hinreichend, weil jedes projektiveuklidische quasigeodätische System mit den Geraden des P_n *topologisch äquivalent* ist.

Wir wollen nun aus Satz 18 die Ebenheitsbedingungen für ein $(n+1)$-Gewebe herleiten. Die Gesamtheit der quasigeodätischen Systeme über einem derartigen Gewebe ist gemäß Satz 10 durch die Systeme $[\lambda]$ von $\binom{n}{2}$ Funktionen in n Variabeln gegeben. Das Gewebe kann dann und nur dann eben gemacht werden, wenn es ein $[\lambda]$ gibt, so daß der Projektivkrümmungstensor des zugehörigen quasigeodätischen Systems verschwindet. Es genügt natürlich, zu fordern, daß dessen wesentliche Komponenten verschwinden. Ihre Anzahl beträgt im allgemeinen, wie in § 1 gezeigt wurde,

$$d_p = \frac{n^2}{3}\,(n^2-4)\,.$$

Aus der speziellen Gestalt der CHRISTOFFELschen Symbole in (7) entnimmt man aber, daß noch eine Anzahl dieser Komponenten des Projektivkrümmungstensors zum vornherein verschwindet.

Infolge (1, 5) und (1, 7) ergibt sich nämlich, daß die Komponenten vom Typus

$$P_{jii}{}^{h} \quad \text{und} \quad P_{iji}{}^{h}$$

mit voneinander verschiedenen h, i, j gleich Null sind. Da aber $P_{jii}{}^{h}$ und $P_{iji}{}^{h}$ durch eine der Identitäten (1, 11) miteinander verbunden sind, ist die Anzahl der zum voraus verschwindenden wesentlichen Komponenten $n\,(n-1)\,(n-2)$. Ihre Anzahl reduziert sich daher in unserem Falle auf

$$w_n = \frac{n^2}{3}\,(n^2-4) - n\,(n-1)\,(n-2)\,.$$

Da nur erste Ableitungen der Γ^{j}_{ik} im Projektivkrümmungstensor stecken, hat man in Analogie zu Satz 6:

Satz 19: *Ein $(n+1)$-Gewebe läßt sich dann und nur dann eben machen, wenn das durch Nullsetzen der wesentlichen Komponenten des Projektivkrümmungstensors entstehende Differentialgleichungssystem von w_n Gleichungen erster Ordnung in den $\binom{n}{2}$ Funktionen von $[\lambda]$ eine Lösung besitzt.*

Wir wollen uns damit begnügen, *Anzahl* und *Ordnung* der Gleichungen dieses Systems anzugeben, ohne sie explizit aufzuschreiben. Sie könnten durch Berechnung der wesentlichen Komponenten des Projektivkrümmungstensors ohne weiteres gefunden werden.

Im Falle eines Flächen-4-Gewebes im P_3 ist nach Satz 19 ein Differentialgleichungssystem von 9 Gleichungen in 3 Funktionen für die Ebenheit maßgebend.

Die Entscheidung, ob sich ein vorgelegtes $(n+1)$-Gewebe eben machen läßt, ist genau gleich wie in der Ebene mit der Aufgabe äquivalent, die Existenz von Lösungen eines gewissen partiellen Differentialgleichungssystems nachzuweisen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß dieses für $n>2$ nur noch von *erster* Ordnung ist.

Entsprechend zu Satz 7 gilt für $n>2$

Satz 20: *Zu einer Lösung* $[\lambda]$ *des erwähnten partiellen Differentialgleichungssystems gehört genau eine Klasse projektiv äquivalenter ebener Realisationen des* $(n+1)$*-Gewebes.*

Der Beweis funktioniert gleich wie in der Ebene. Es sei daher auf die Beweisführung von Satz 7 verwiesen, sowie auf die Bemerkung im Anhang zu Satz 12 über die geradentreuen Abbildungen des P_n auf sich.

Für ein $(n+2)$-Gewebe ist die Entscheidung, ob es sich eben machen läßt, analytisch bedeutend einfacher. Da das quasigeodätische System eindeutig bestimmt ist, hat man nur nachzuprüfen, ob die w_n wesentlichen Komponenten des Projektivkrümmungstensors verschwinden. Dasselbe gilt natürlich auch für alle Gewebe mit mehr als $(n+2)$ Hyperflächenscharen. Hier hat man sich jedoch zusätzlich zuerst zu überzeugen, ob seine Hyperflächen überhaupt einem quasigeodätischen System angehören.

§ 4.
Anwendungen des D.V.-Systems

In diesem Paragraphen werden unter Verwendung des D.V.-Systems einige Sätze aus der Geometrie der Hyperflächengewebe hergeleitet.

1. (n+1)-Gewebe, deren D.V.-System projektiveuklidisch ist.

Durch diese Eigenschaft sind in der Ebene gemäß Satz 8 die parallelisierbaren Gewebe ausgezeichnet. Es wird sich gleich zeigen, daß in höheren Dimensionen diese Bedingung allein für die Kennzeichnung der parallelisierbaren Gewebe nicht mehr genügt.

Betrachten wir zunächst die Flächen-4-Gewebe im P_3.

Satz 21: *Ist das D.V.-System eines Flächen-4-Gewebes im P_3 projektiveuklidisch, so sind die zugehörigen ebenen Realisationen Ebenenbüschel-4-Gewebe, und die 4 Trägergeraden haben den Rang 3*[28]*.*

Beweis: Eine Abbildung des D.V.-Systems auf die Geraden des P_3[29]) führt das vorliegende Gewebe in ein Ebenen-4-Gewebe über. Die 2-dimensionalen Schnittgewebe auf den Gewebeebenen bestehen dann infolge Satz 9 je aus 3 Geradenbüscheln, deren Scheitel auf einer Geraden liegen. Daraus schließt man zunächst, daß das Ebenen-4-Gewebe 4 Ebenenbüschel umfaßt. Für die Lage der 4 Trägergeraden g_1, g_2, g_3, g_4 sind folgende 3 Fälle zu unterscheiden:

a) Die g_i sind windschief. Dann gehören diese notwendigerweise *einer* Erzeugendenschar einer *Regelfläche 2. Grades* an.

b) Zwei Träger, etwa g_1 und g_2, schneiden sich. Von g_4 wird nur verlangt, daß sie g_1 und g_2 nicht treffen. In diesem Falle sind auch g_3 und g_4 miteinander *inzident,* und es liegen die Schnittpunkte von g_1, g_2 und g_3, g_4 auf der Schnittgeraden der durch die beiden Geradenpaare aufgespannten Ebenen.

c) 3 Träger liegen in einer Ebene α. Dann liegt auch der restliche Träger in α und es bilden die 4 Träger somit ein Vierseit. Die

---

[28]) Als Rang einer Anzahl Geraden bezeichnet man den Rang der Matrix ihrer Plückerschen Koordinaten.

[29]) Mit dem Gewebe ist natürlich auch das quasigeodätische System nur in einem Gebiete G des P_3 definiert, so daß man streng genommen höchstens von einer Abbildung auf die Geraden eines Teilgebietes G^* des P_3 sprechen kann. Durch Hinzunahme der restlichen Geraden des P_3 läßt sich jedoch das quasigeodätische System über G^* hinaus fortsetzen.

Gewebe von diesem Typus sind parallelisierbar; befördert man nämlich die Ebene dieses Vierseits durch eine Projektivität ins Unendlichferne, so gehen die 4 Ebenenbüschel in 4 Parallelebenenscharen über[30]).

Weitere Möglichkeiten für die gegenseitige Lage der 4 Träger bestehen nicht. Da die 3 aufgezählten Fälle nun gerade den Geradenquadrupeln vom Rang 3 entsprechen, für welche die Gewebebedingungen erfüllt sind, ist unser Satz bewiesen[31]).

Daß die Gewebe vom Typus a) und b) nicht parallelisierbar sind, folgt unmittelbar aus Satz 20; sie müßten sich darnach bereits durch eine Projektivität parallel machen lassen.

Führt man den Begriff der *Diagonalflächenscharen*[32]) ein, so lassen sich die 3 aufgezählten Gewebetypen auch noch auf andere Weise charakterisieren. Es zeigt sich nämlich, daß die Gewebe vom Typus a) keine Diagonalflächen aufspannen, während die Gewebe vom Typus b) durch eine und diejenigen vom Typus c) durch drei Diagonalflächenscharen gekennzeichnet sind.

Es ist zu erwarten, daß die Klasse von Geweben, deren D.V.-System projektiveuklidisch ist, auch in höheren Dimensionen nicht nur die parallelisierbaren Gewebe enthält. Die parallelisierbaren Gewebe lassen sich aber durch eine Zusatzbedingung herausgreifen.

Satz 22: *Ist das D.V.-System zu einem $(n+1)$-Gewebe projektiveuklidisch und läßt es gleichzeitig eine Abbildung auf die Geraden des P_n zu, welche ein Netz aus dem Gewebe zu einem Parallel-Netz macht, so ist das Gewebe parallelisierbar.*

Die Zusatzforderung bedeutet differentialgeometrisch, daß über dem D.V.-System eine euklidisch-affine Übertragung E_n existiert, in welcher die n Hyperflächenscharen eines Gewebenetzes *parallel* sind.

Beweis: Gemäß der Zusatzforderung gibt es eine Abbildung des D.V.-Systems auf die Geraden des P_n, welche gleichzeitig ein Gewebenetz parallel macht. Wir wollen nun zeigen, daß dann die verbleibende Hyperebenenschar notwendigerweise ebenfalls parallel wird. Dazu betrachten wir die 2-dimensionalen Schnittgebilde, die durch $(n-2)$ Hyperebenen aus verschiedenen Scharen des ausgezeichneten Netzes auf-

[30]) Blaschke bezeichnet diesen Typus auf Grund von Schließungseigenschaften als *Achtflachgewebe*.

[31]) Vgl. Blaschke, W., Projektive Geometrie, S. 97/98, Wolfenbüttel-Hannover, 1947.

[32]) Vgl. [1], S. 177–186.

gespannt werden. Infolge Satz 9 schneiden die restlichen 3 Gewebescharen in diesen Schnittgebilden je ein Geradenbüschel-3-Gewebe vom dort genannten Typus heraus. Aus der Parallelität unseres Netzes ergibt sich, daß alle diese Geraden-3-Gewebe 2 Parallelenscharen enthalten; es sind daher auch alle durch die letzte Gewebeschar erzeugten Geradenscharen parallel. Dies ist aber nur möglich, wenn diese letzte Hyperebenenschar ebenfalls parallel ist.

2. *Eine Verallgemeinerung des Satzes von* Dubourdieu.

Der Satz von Dubourdieu lautet:

Sind in einem Flächen-4-Gewebe im P_3 die Schnittgewebe auf den Flächen dreier Scharen Sechseckgewebe, so gilt dies auch für die Schnittgewebe auf den Flächen der vierten Schar[33]*).*

Das D.V.-System über einem Flächen-4-Gewebe im P_3 hat die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\sum_{s=1}^{3} \Gamma^i_{is}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^s}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$\text{mit } \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}\,\partial_k \, ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right).$$

Dieses induziert auf jeder Gewebefläche das D.V.-System über dem entsprechenden Schnittgewebe, und der Satz von Dubourdieu läßt sich daher in folgender Form aussprechen:

Wenn die 2-dimensionalen D.V.-Systeme auf 3 Gewebeflächenscharen projektiveuklidisch sind, so sind es auch diejenigen auf den Flächen der vierten Schar[34]*).*

In Formeln heißt dies:

wenn die 3 durch (1) induzierten D.V.-Systeme

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\Gamma^i_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} &= 0 \qquad (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2) \\ \frac{d^2x^k}{dt^2} + 2\Gamma^k_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} &= 0 \\ dx^j &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

projektiveuklidisch sind, so ist es auch das D.V.-System

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\sum_{s=1}^{3} \Gamma^i_{is}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^s}{dt} &= 0 \\ d\Phi = \Phi_1\, dx^1 + \Phi_2\, dx^2 + \Phi_3\, dx^3 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

in der vierten Schar $d\Phi = 0$.

---

33) Vgl. [1], S. 185.

34) Das räumliche D.V.-System ist dann nicht unbedingt projektiveuklidisch.

Nun betrachten wir ein Hyperflächen-$(n+1)$-Gewebe im P_n und sein eindeutig bestimmtes D.V.-System. Es ist gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2\sum_{s=1}^{n}\Gamma^i_{is}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^s}{dt}=0,\quad i=1,\ldots\ldots,n$$
$$\Gamma^i_{ik}=\frac{1}{2}\,\partial_k\, ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \tag{4}$$

(2) stellt für beliebige $i \neq k$ das D.V.-System in einem solchen 2-dimensionalen Schnittgebilde unseres $(n+1)$-Gewebes dar, bei dessen Bildung die Schar $d\Phi = 0$ nicht beteiligt ist. Setzt man nun voraus, daß sämtliche $\binom{n}{2}$ derartigen D.V.-Systeme projektiveuklidisch sind, so ist gemäß (3) auch jedes 2-dimensionale D.V.-System

$$\frac{d^2x^h}{dt^2}+2\sum_{s}\Gamma^h_{hs}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^s}{dt}=0$$
$$\Phi_i\,dx^i+\Phi_j\,dx^j+\Phi_k\,dx^k=0$$

h und s durchlaufen die drei voneinander verschiedenen Indizes i, j, k.

projektiveuklidisch. Da die Anzahl derartiger Scharen von D.V.-Systemen $\binom{n}{2}$ ist, sind dies genau die noch verbleibenden. Wir formulieren dieses Resultat in

Satz 23: *Sind die $\binom{n}{2}$ Schnittkurvengewebe in den durch n Gewebescharen aufgespannten 2-dimensionalen Schnittgebilden Sechseckgewebe, so sind auch die restlichen $\binom{n}{3}$ derartigen Schnittkurvengewebe Sechseckgewebe*[35]).

Wir sprechen in diesem Falle von einem *Hyperflächen-Sechseckgewebe.*

3. *Ein Satz über die parallelisierbaren $(n+1)$-Gewebe.*

Ein Kovektorfeld p_λ ist integrabel, d. h. Vielfaches eines Gradientenfeldes, wenn

$$p_{[\lambda}\,\nabla_\mu\, p_{\nu]}=0 \;^{36)}. \tag{5}$$

Ein $(n+1)$-Gewebe sei nun statt durch $(n+1)$ Gradientenfelder durch die entsprechende Anzahl *integrabler Kovektorfelder* $\overset{(a)}{p}_\lambda$ gegeben. Der Index (a) bezeichne dabei die Nummer des betreffenden Feldes. Diese Kovektorfelder seien so *normiert*, daß

$$\sum_{a=1}^{n+1}\overset{(a)}{p}_\lambda=0, \tag{6}$$

[35]) Dieser Satz steht bereits bei H. Aue: $(n+1)$ Hyperflächenscharen im R^n. Mitt. Math. Ges. Hamburg 7, 1938. Er wird dort allerdings mit ganz anderen Methoden bewiesen.

[36]) Vgl. [2], S. 120.

was infolge der Gewebebedingungen im wesentlichen nur auf *eine Art* möglich ist.

Wir greifen nun durch die normierten Kovektorfelder

$$\overset{(a_1)}{p_\lambda}, \overset{(a_2)}{p_\lambda}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \overset{(a_n)}{p_\lambda}; \quad a_i \neq a_k$$

ein beliebiges Netz aus dem Gewebe heraus.

Definition: *Die n invariant mit dem Gewebe verknüpften Kovektorfelder* $\overset{(a_k)}{q_\lambda}$, *welche durch*

$$\overset{(a_k)}{q_\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \overset{(a_i)}{p_\lambda} - (n-2)\overset{(a_k)}{p_\lambda}; \quad k = 1, \ldots, n \tag{7}$$

bestimmt sind, heißen ein Querfelder-System des Gewebes.

Da jedes Gewebenetz Anlaß zu einem Querfelder-System gibt, sind durch ein $(n+1)$-Gewebe im ganzen deren $(n+1)$ festgelegt. Aus (7) entnimmt man, daß diese für $n = 3$ zusammenfallen. *Ein Flächen-4-Gewebe bestimmt somit nur ein Querfelder-System.*

Die Querfelder eines Systems sind infolge der Netzbedingungen im Gewebe *linear unabhängig,* denn die Determinante der Substitution (7) ist von Null verschieden.

Falls einzelne Querfelder *integrabel* sind, so bezeichnen wir die zugehörigen Integralhyperflächenscharen als *Quer-Hyperflächenscharen.*

Für unser Gewebe (3, 2) hat das Querfelder-System zum Koordinatennetz die Gestalt:

$$\begin{array}{lllll}
(-(n-3)\,\Phi_1, & \Phi_2 & , & , & \Phi_n \quad) \\
(\quad \Phi_1 & , -(n-3)\,\Phi_2, & & , & \Phi_n \quad) \\
 & & & & \\
(\quad \Phi_1 & , \quad \Phi_2 & , & , & -(n-3)\,\Phi_n).
\end{array} \tag{8}$$

Für die *Integrabilitätsbedingungen* des i-ten Feldes dieses Systems findet man durch eine einfache Rechnung

$$\partial_i \ln\left(\frac{\Phi_j}{\Phi_k}\right) = 0 \quad \textit{für} \quad j \neq i \quad \textit{und} \quad k \neq i. \tag{9}$$

Satz 24: *Sind $(n-1)$ Felder eines Querfelder-Systems integrabel, so ist es auch das letzte.*

Beweis: Sind $(n-1)$ Querfelder integrabel, so heißt dies bei geeigneter Numerierung etwa

$$\partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \qquad \textit{für} \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, (n-1) \quad \textit{und} \quad i, k \neq j. \tag{10}$$

Wie man leicht bestätigen kann, besteht für drei voneinander verschiedenen Indizes i, j, k die Identität

$$\Phi_i \Phi_k \partial_j ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) + \Phi_k \Phi_j \partial_i ln \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_j}\right) + \Phi_j \Phi_i \partial_k ln \left(\frac{\Phi_j}{\Phi_i}\right) = 0. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) schließt man nun sofort, daß auch

$$\partial_n ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \quad \textit{für} \quad i, k \neq n,$$

d. h. es ist laut (9) auch das noch verbleibende n-te Querfeld integrabel.

Satz 24 ist für Flächen-4-Gewebe bereits bekannt. Die Querflächen sind nämlich für $n = 3$ *identisch* mit den *Diagonalflächen des Gewebes*[37]).

Satz 25: *Existiert in einem $(n+1)$-Gewebe ein System von integrablen Querfeldern, so ist es parallelisierbar.*

Für $n = 3$ ist dieser Satz ebenfalls bekannt, denn durch die Existenz sämtlicher Diagonalflächen sind gerade die parallelisierbaren Gewebe gekennzeichnet.

Der Beweis kann auf folgende Weise gewonnen werden. Durch eine Koordinatentransformation kann man stets erreichen, daß das System von integrablen Querfeldern durch (8) gegeben ist, und es gilt dann

$$\partial_j ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0 \textit{ für sämtliche Tripel verschiedener Indizes } (i, j, k). \quad (12)$$

Infolgedessen ist

$$\partial_j ln\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_j}\right) = \partial_j ln \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_j}\right) + \partial_j ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = \partial_j ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_j}\right).$$

Für das D.V.-System über dem Gewebe bedeutet dies

$\Gamma^j_{jk} = \Gamma^i_{ik}$ *für i, j, k voneinander verschieden*, oder was dasselbe ist

$$\Gamma^j_{jk} = T_k \quad \textit{für jedes } j \neq k. \quad (13)$$

Zunächst folgt sofort, daß das D.V.-System unter diesen Umständen projektiveuklidisch ist. Aus

$$T_k = \frac{1}{2}\, \partial_k ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) \quad \textit{für} \quad i \neq k$$

ergibt sich mit (12) für $j \neq k$

$$\partial_j T_k = \frac{1}{2}\, \partial_j \partial_k ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = \frac{1}{2}\, \partial_k \left(\partial_j ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right)\right) = 0,$$

da ja i beliebig, also von j und k verschieden gewählt werden kann. Es ist daher T_k nur eine Funktion von x^k allein. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache findet man infolge (3, 18):

---

[37]) Vgl. [1], S. 177—186.

$$R_{ijk}{}^{h} = \delta_j^h\, T_i\, T_k - \delta_i^h\, T_j\, T_k = 2\,\delta_{[j}^{h} T_{i]}\, T_k$$

und daraus

$$R_{jk} = \sum_{s=1}^{n} R_{sjk}{}^{s} = -(n-1)\, T_j\, T_k; \quad P_{jk} = T_j\, T_k.$$

Schließlich folgt für den Projektivkrümmungstensor

$$P_{ijk}{}^{h} = 0.$$

Wenn wir noch zeigen können, daß über dem D.V.-System eine E_n existiert, für welche das Koordinatennetz ein Parallelnetz darstellt, so sind die Voraussetzungen des Satzes 23 erfüllt, und das Gewebe ist daher parallelisierbar.

Eine solche E_n läßt sich nun sofort angeben. Gehen wir von der A_n (3, 18) durch eine bahntreue Transformation über zu

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \delta^i_j\, T_k - \delta^i_k\, T_j \quad , \tag{14}$$

so wird

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^i_{ii} &= -2\, T_i \\ \overline{\Gamma}^i_{jk} &= 0, \text{ sonst.} \end{aligned} \tag{15}$$

Diese A_n ist eine E_n, denn durch Rechnung findet man, daß

$$\overline{R}_{ijk}{}^{h} = 0$$

ist. Im Sinne dieser Übertragung ist aber das Koordinatennetz mit den Gradientenfeldern

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{w}_i &= (1, 0, \quad \ldots\ldots \quad, 0) \\ \overset{(2)}{w}_i &= (0, 1, \quad \ldots\ldots \quad, 0) \\ & \\ \overset{(n)}{w}_i &= (0, 0, \quad \ldots\ldots \quad, 1) \end{aligned}$$

ein *Parallel-Netz.* Es lassen sich nämlich diese n Kovektorfelder mit je einem Faktor $\overset{(k)}{f}$ so umnormieren, daß

$$\overline{\nabla}_i\, (\overset{(k)}{f}\, \overset{(k)}{w}_j) = 0 \;\; ^{38)} \tag{16}$$

ist, denn die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \overset{(k)}{f}}{\partial x^i} - \delta^k_i\, T_k\, \overset{(k)}{f} = 0; \quad i, k = 1, \ldots, n \tag{17}$$

für die *Umnormierungsfunktionen* sind *gesamthaft integrierbar.*

Für die Bedingungen (12) läßt sich noch eine andere geometrische Interpretation geben. Betrachtet man nämlich die Schnitt-Flächengewebe in den-

[38]) Parallelität in einer E_n bedeutet, daß die zugehörigen Kovektorfelder *kovariant konstant* sind. Vgl. etwa [2], S. 115.

jenigen 3-dimensionalen Schnittgebilden von $(n-3)$ Gewebehyperflächen, bei deren Bildung die Schar $d\Phi = 0$ nicht beteiligt ist, so zeigt sich, daß alle diese Flächen-4-Gewebe einzeln parallelisierbar sind. (12) kennzeichnet nämlich die Existenz der Diagonalflächen in allen derartigen Flächen-4-Geweben. Satz 25 läßt sich daher auch folgendermaßen aussprechen:

Satz 26: *Sind die Schnitt-Flächengewebe in den durch n Gewebescharen aufgespannten $\binom{n}{3}$ Scharen von 3-dimensionalen Schnittgebilden einzeln parallelisierbar (d. h. Achtflachgewebe), so ist das Gewebe selbst parallelisierbar, und es sind damit auch die restlichen derartigen Schnittflächengewebe Achtflachgewebe.*

Im Gegensatz zu den *Hyperflächen-Sechseckgeweben* sind die *Hyperflächen-Achtflachgewebe* notwendigerweise parallelisierbar. Es hat also die Existenz von Diagonalflächenscharen umfassendere Konsequenzen, als die Sechseckkonfiguration in den Schnitt-Kurvengeweben.

4. *Parallelisierbare m-Gewebe ($m > n+1$).*

Wir untersuchen zunächst ein $(n+2)$-Gewebe im P_n mit der Eigenschaft, daß die sämtlichen $(n+2)$ $(n+1)$-Gewebe, die durch Weglassen einer Hyperflächenschar entstehen, einzeln parallelisierbar sind. Durch eine geeignete Koordinatentransformation können die Differentialgleichungen eines derartigen Gewebes immer auf die Gestalt

$$\begin{aligned} dx^i &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \\ \sum_{s=1}^{n} dx^s &= 0 \\ d\Phi &= 0 \end{aligned}$$

gebracht werden. Die Gewebebedingungen lauten dann

$$\Phi_i \neq 0 \textit{ für alle } i, \quad \Phi_i \neq \Phi_k \textit{ für } i \neq k.$$

Die Parallelisierbarkeit der einzelnen $(n+1)$-Gewebe drücken wir durch die Integrabilitätsbedingungen geeigneter Querfelder-Systeme aus.

Für das Gewebe, bestehend aus dem Koordinatennetz und der Schar $d\Phi = 0$, lauten die Parallelisierbarkeitsbedingungen

$$\partial_j \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = 0, \textit{ wenn } i, j, k \textit{ voneinander verschieden.} \tag{18}$$

Zur Herleitung der entsprechenden Bedingungen für die restlichen $(n+1)$-Gewebe betrachten wir als Repräsentanten etwa das Gewebe mit den Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{n} dx^s = 0$$
$$dx^i = 0, \quad i = 2, 3, \ldots\ldots, n \tag{19}$$
$$d\Phi = 0.$$

Durch die Abbildung

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 + \ldots\ldots + x^n \\ y^i &= x^i \text{ für } i \neq 1 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x^1 &= y^1 - (y^2 + \ldots\ldots + y^n) \\ x^i &= y^i \text{ für } i \neq 1 \end{aligned} \tag{20}$$

gehen die Gleichungen (19) über in

$$dy^i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$
$$d\Phi = 0$$

und die Parallelisierbarkeitsbedingungen lauten daher

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \, ln \left(\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y^i}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y^k}} \right) = 0 \qquad \textit{mit } i, j, k \textit{ voneinander verschieden.}$$

Wir setzen nun speziell $k = 1$. Infolge (20) ergibt sich dann

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \, ln \left(\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y^i}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y^1}} \right) = -\partial_1 \, ln \left(\frac{\Phi_i - \Phi_1}{\Phi_1} \right) + \partial_j \, ln \left(\frac{\Phi_i - \Phi_1}{\Phi_1} \right) = 0 \text{ [39]}.$$

Durch Umformung folgt daraus weiter

$$\frac{\Phi_{11}}{\Phi_i} - \frac{\Phi_{1j}}{\Phi_1} - \frac{\Phi_{i1} - \Phi_{11}}{\Phi_i - \Phi_1} + \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{1j}}{\Phi_i - \Phi_1} = 0,$$

und man erhält nach einigen Zwischenrechnungen

$$\left(\frac{\Phi_{ij}}{\Phi_i} - \frac{\Phi_{1j}}{\Phi_1} \right) + \left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_1} - \frac{\Phi_{1i}}{\Phi_i} \right) \qquad = 0$$

oder

$$\partial_j \, ln \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_1} \right) + \partial_1 \, ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right) \qquad = 0.$$

Mit (18) zusammen führt dies auf

$$\partial_1 \, ln \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right) = 0.$$

Betrachten wir jetzt alle andern derartigen $(n+1)$-Gewebe, so schließt man aus den Parallelisierbarkeitsbedingungen auf die Beziehungen

$$\partial_k \, ln \left(\frac{\Phi_k}{\Phi_i} \right) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \tag{21}$$

Dies bedeutet aber, daß das D.V.-System des $(n+1)$-Gewebes

---

[39]) ∂_j bedeutet Ableitung nach x^j; $\Phi_j = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^j}$.

$$dx^i = 0, \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$
$$d\Phi = 0$$

durch das Verschwinden sämtlicher CHRISTOFFELscher Symbole charakterisiert ist; es ist daher identisch mit den Geraden des P_n, und die verbleibende Hyperebenenschar

$$\sum_{s=1}^{n} dx^s = 0$$

ist darin geodätisch. Da in unserem $(n+2)$-Gewebe keine Hyperflächenschar irgendwie ausgezeichnet ist, folgt:

Jede Hyperflächenschar unseres $(n+2)$-Gewebes liegt geodätisch im D.V.-System des verbleibenden $(n+1)$-Gewebes.

Satz 27: *Ein $(n+2)$-Gewebe, in dem jedes $(n+1)$-Tupel seiner Hyperflächenscharen einzeln parallelisierbar ist, ist gesamthaft parallelisierbar.*

Beweis: Nach der obigen Bemerkung ist das eindeutig bestimmte quasigeodätische System zugleich D.V.-System zu allen $(n+1)$-Geweben; infolge der Parallelisierbarkeit dieser $(n+1)$-Gewebe ist es projektiv-euklidisch. Wir betrachten nun eine Abbildung, die ein $(n+1)$-Gewebe G_1 parallel macht, und dazu eine andere, die ein von G_1 verschiedenes $(n+1)$-Gewebe G_2 parallel macht. Die beiden dabei entstehenden geraden Realisationen des quasigeodätischen Systems sind nun aber projektiv äquivalent. Es existiert somit eine projektive Abbildung des P_n auf sich, welche die eine in die andere überführt. Da sie die n Parallel-Hyberebenenscharen, welche G_1 und G_2 gemeinsam sind, wieder in solche überführt, ist sie notwendigerweise eine *Affinität.* Es machen daher die beiden genannten Abbildungen das ganze $(n+2)$-Gewebe parallel.

Aus dem Beweis entnimmt man noch, daß jede Abbildung, die irgendeines der $(n+1)$-Gewebe parallel macht, zugleich auch die noch verbleibende Schar parallelisiert.

Satz 28: *Ein m-Gewebe, in dem jedes $(n+1)$-Tupel von Hyperflächenscharen einzeln parallelisierbar ist, ist gesamthaft parallelisierbar.*

Beweis: Aus den Vorbereitungen zu Satz 27 folgt, daß das D.V.-System jedes $(n+1)$-Gewebes sämtliche restlichen Gewebe-Hyperflächenscharen geodätisch enthält. Jede Abbildung, die irgendeines der $(n+1)$-Gewebe parallelisiert, macht damit zugleich das ganze m-Gewebe parallel.

Die Sätze 27 und 28 sind nur für $n \gtrless 3$ richtig. In der Ebene tritt beispielsweise an Stelle des ersteren der Satz von MAYRHOFER-REIDEMEISTER[40].

5. *Doppelverhältnisgewebe.*

Für ein Kurven-4-Gewebe in der Ebene gilt

Satz 29: *Ist das quasigeodätische System über einem Kurven-4-Gewebe identisch mit den D.V.-Systemen zweier seiner 3-Gewebe, so besteht das Gewebe notwendigerweise aus 4 Kurvenscharen, die sich unter einem konstanten Doppelverhältnis schneiden, und das quasigeodätische System ist auch identisch mit den 2 restlichen D.V.-Systemen.*

Zum Beweise bringen wir die Gewebegleichungen auf die Form

$$dx^1 = 0, \quad dx^2 = 0, \quad d\Phi = 0, \quad d\Psi = 0.$$

Das zugehörige quasigeodätische System sei etwa identisch mit den D.V.-Systemen zum (123)- und (124)-Gewebe, d. h.

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = \frac{1}{2}\,\partial_k \ln\left(\frac{\Psi_i}{\Psi_k}\right) \tag{22}$$

woraus sofort

$$\partial_k \ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) - \partial_k \ln\left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2}\right) = 0; \quad k = 1, 2 \tag{23}$$

folgt. Durch Integration ergibt sich schließlich mit konstantem c

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = c\,\frac{\Psi_1}{\Psi_2} \tag{24}$$

Infolge der Gewebebedingung muß c von 1 verschieden sein. Da c das Doppelverhältnis der 4 Gewebekurven in einem Punkte ist, ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Definition: *Ein Kurven-4-Gewebe, dessen Kurven sich unter einem konstanten Doppelverhältnis treffen, heißt ein D.V.-4-Gewebe.*

Für beliebige Dimensionen muß Satz 29 wie folgt erweitert werden:

Satz 30: *Ist das quasigeodätische System über einem Hyperflächen-$(n+2)$-Gewebe identisch mit den D.V.-Systemen zweier seiner $(n+1)$-Gewebe, so sind sämtliche Schnitt-Kurven-4-Gewebe in den $\binom{n+2}{4}$ Scharen von 2-dimensionalen Schnittgebilden D.V.-4-Gewebe, und jede Gewebehyperflächenschar liegt geodätisch im D.V.-System des verbleibenden $(n+1)$-Gewebes.*

Ein $(n+2)$-Gewebe dieser Art heiße ein *D.V.-$(n+2)$-Gewebe.* Entsprechend wie in der Ebene bringen wir zum Beweise das Gewebe auf die spezielle Form

---

[40]) Vgl. [1], § 10 und § 16.

$$dx^i = 0, \qquad i = 1, \ldots\ldots, n$$
$$d\Phi = 0,$$
$$d\Psi = 0.$$

Das Zusammenfallen zweier D.V.-Systeme mit dem eindeutig bestimmten quasigeodätischen System drückt sich dann bei geeigneter Wahl derselben durch

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}\, \partial_k\, ln\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_k}\right) = \frac{1}{2}\, \partial_k\, ln\left(\frac{\Psi_i}{\Psi_k}\right), \qquad i \neq k \tag{25}$$

aus, woraus man sofort entnimmt, daß

$$\frac{\Phi_i}{\Psi_i}\,\frac{\Psi_k}{\Phi_k} = c_{ik} \tag{26}$$

nur eine Funktion der $(n-2)$ Variabeln x^j mit $j \neq i, k$ ist. Für diese Doppelverhältnisse c_{ik} gilt aber infolge der linken Seite von (26)

$$c_{ik} = c_{ij} \cdot c_{jk} \qquad \textit{mit } j \textit{ beliebig, aber von } i \textit{ und } k \textit{ verschieden.} \tag{27}$$

In (27) ist nun die rechte Seite nur eine Funktion der x^h mit $h \neq i, j, k$; da j beliebig (von i und k verschieden) gewählt werden kann, schließt man, daß c_{ik} konstant ist. Geometrisch bedeutet dies, daß die sämtlichen Schnitt-Kurven-4-Gewebe in denjenigen $\binom{n}{2}$ Scharen von 2-dimensionalen Schnittgebilden, die durch die n ersten Gewebescharen allein erzeugt werden, D.V.-4-Gewebe sind.

Es läßt sich nun sehr leicht zeigen, daß alle übrigen Schnitt-Kurven-4-Gewebe ebenfalls D.V.-4-Gewebe sind. Wir betrachten etwa dasjenige im Schnittgebilde aus je einer Hyperfläche der $(n-2)$ Scharen.

$$dx^i = 0, \qquad i = 5, 6, \ldots\ldots, n$$
$$d\Phi = 0,$$
$$d\Psi = 0.$$

Die restlichen Scharen $dx^1 = 0$, $dx^2 = 0$, $dx^3 = 0$, $dx^4 = 0$ erzeugen darin ein Kurven-4-Gewebe. Die Tangentenfelder dieser 4 Kurvenscharen berechnen sich als Vektorprodukte aus n Gradientenfeldern. Man findet dafür:

$$\begin{array}{l} (\,0\,,\; a_{34},\; a_{42},\; a_{23},\; 0, \ldots\ldots\ldots, 0) \\ (a_{43},\; 0\,,\; a_{14},\; a_{31},\; 0, \ldots\ldots\ldots, 0) \\ (a_{24},\; a_{41},\; 0\,,\; a_{12},\; 0, \ldots\ldots\ldots, 0) \\ (a_{32},\; a_{13},\; a_{21},\; 0\,,\; 0, \ldots\ldots\ldots, 0) \end{array} \tag{28}$$

wobei $\begin{vmatrix} \Phi_i & \Phi_k \\ \Psi_i & \Psi_k \end{vmatrix} = a_{ik}$ gesetzt ist.

Das D.V. dieser 4 Tangentenfelder berechnen wir in der *Projektion in die* x^1x^2*-Ebene*. Diese ist gegeben durch die 4 *zweikomponentigen* Tangentenfelder:

$$(\,0\,,\,1\,),\; (\,1\,,\,0\,),\; (a_{24}, a_{41}),\; (a_{32}, a_{13}).$$

Für deren D.V. findet sich

$$d = \frac{a_{41} \cdot a_{32}}{a_{24} \cdot a_{13}} = \frac{a_{14} \cdot a_{23}}{a_{24} \cdot a_{13}} = \frac{(1-c_{14})\,(1-c_{23})}{(1-c_{24})\,(1-c_{13})} = \text{const.},$$

da $c_{ik} = \text{const}$. Das betrachtete Schnitt-Kurven-4-Gewebe ist somit ebenfalls ein D.V.-4-Gewebe.

Da nun alle Schnitt-4-Gewebe unseres $(n+2)$-Gewebes D.V.-4-Gewebe sind, ergibt sich umgekehrt nach Abbildung eines Netzes aus dem Gewebe auf das Koordinatennetz, daß die Gradientenfelder der beiden übrigen Scharen stets die Beziehung (25) befriedigen. Daraus folgt aber sofort, daß jede Gewebe-Hyperflächenschar im D.V.-System des verbleibenden $(n+1)$-Gewebes liegt.

Zu den D.V.-Geweben gehören natürlich die parallelisierbaren $(n+2)$-Gewebe. Ein nichttriviales Beispiel im P_3 ist das Gewebe, bestehend aus 5 Ebenenbüscheln, deren Träger *Erzeugende derselben Schar einer Regelfläche 2. Grades* sind.

Literaturverzeichnis

[1] Blaschke-Bol: Geometrie der Gewebe. Berlin, 1938.

[2] Schouten, J. A.: Der Ricci-Kalkül. Berlin 1924.

[3] Schouten-Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Groningen-Batavia, 1935/38.

[4] Berwald, L.: On the projective geometry of paths. Ann. of Math. 37, 1936, S. 879—898.

[5] van Dantzig, D.: Theorie des projektiven Zusammenhanges n-dimensionaler Räume. Math. Ann. Bd. 106, 1932, S. 400—454.

[6] Haantjes, J.: On the projective geometry of paths. Proc. Edinburgh Math. Soc. 5, 1937, S. 103—115.

[7] Thomsen, G.: Doppelverhältnis-Systeme. Abh. Hamburg 8, 1930, S. 115—122.

[8] Schreier-Sperner: Einführung in die analytische Geometrie II. Berlin und Leipzig, 1935.

Lebenslauf

Ich wurde am 23. Mai 1923 in Olten geboren und besuchte dort die Primar- und Bezirksschule. Im Frühjahr 1940 trat ich in die Realabteilung der Aargauischen Kantonsschule in Aarau ein, welche ich im Herbst 1942 mit der Maturität Typus C abschloß. Auf Beginn des Wintersemesters 1942/43 immatrikulierte ich mich an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule und erwarb im Herbst 1946 das Diplom als Mathematiker.

In den darauffolgenden Semestern wurde mir als Assistent für Geometrie bei Herrn Prof. Dr. E. Stiefel Gelegenheit geboten, meine Studien weiter zu vertiefen. Während dieser Zeit entstand die vorliegende Promotionsarbeit.

Seit Frühling 1947 bin ich gleichzeitig als Hilfslehrer für Mathematik und darstellende Geometrie an der Oberrealabteilung der Kantonsschule Zürich tätig. Im Wintersemester 1948/49 wurde mir vom Schweizerischen Schulrat in Vertretung des im Ausland weilenden Herrn Prof. Dr. E. Stiefel die propädeutische Vorlesung „Geometrie I" an der E.T.H. übertragen.

Ich möchte an dieser Stelle allen meinen verehrten Lehrern an der E.T.H. herzlich danken für die Förderung, die sie meinen Studien zuteil werden ließen. Ganz besonderen Dank aber schulde ich Herrn Prof. Dr. E. Stiefel für seine wertvollen Anregungen und sein stetes Interesse bei der Abfassung meiner Promotionsarbeit.

Zürich, im Mai 1949.

M. Jeger