

Mechanische Eigenschaften quasi-elastischer isotroper Körper

Experimentelle und theoretische Untersuchungen im Zusammenhang
mit einem neuen Verfahren der Fernsehgroßprojektion

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

FRIEDRICH POPERT

Dipl. El.-Ing.
aus Zürich

Referent: Herr Prof. Dr. F. Fischer
Korreferent: Herr Prof. E. Baumann



ZÜRICH 1945

Dissertationsdruckerei AG. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

•

**Erscheint in Verlagsausgabe bei
A.G. Gebr. Leemann & Co. Zürich**

DEM ANDENKEN MEINES GROSSVATERS
Prof. Dr. h. c. F. HENNINGS GEWIDMET

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	11
I. Überblick über die theoretischen Grundlagen des Problems	13
1. Abriß der Theorie elastischer, viskoser, plastischer und quasi-elastischer Deformationen	13
a) Der ideale elastische Körper	15
b) Die zähe Flüssigkeit	16
c) Der plastische Körper	18
d) Der quasi-elastische oder hochelastische Körper	21
e) Beziehungen zwischen der Theorie der Idealstoffe und den Ergebnissen der molekular-kinetischen Betrachtungsweise	25
2. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Idealstoffe im dreidimensionalen Fall	33
a) Der allgemeine dreidimensionale Spannungs- und Deformationszustand	34
b) Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik	36
c) Die speziellen Bewegungsgleichungen des Voigt'schen Idealstoffes	38
d) Die speziellen Bewegungsgleichungen des Maxwell'schen Idealstoffes	41
e) Die speziellen Bewegungsgleichungen des kombinierten Idealstoffes mit dynamischer Hysterisis und Relaxation	42
3. Der Voigt'sche Körper und seine Eignung als Steuermedium zur Bilderzeugung bei der A f i F-Teledoskop-Großprojektion	44
4. Formulierung des Problems	52
II. Die Versuchseinrichtung	53
5. Beschreibung und Wirkungsweise	53
6. Zusammenstellung der wichtigsten mechanischen und elektrischen Konstruktionsdaten	63
III. Theorie des angewandten Meßverfahrens und der Versuchseinrichtung	64
7. Die Bewegungsgleichungen eines inkompressiblen isotropen Voigt'schen Idealstoffes in Verbindung mit schweren Massen	64
a) Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Schichtmasse	66
b) Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung der Schichtmasse	69

	Seite
8. Die Ortskurve $\bar{x} = \bar{\xi}_1 / \bar{\xi}_0$ bei variabler Frequenz und die Berechnung von G und k aus den Meßwerten	72
9. Der lineare kapazitive Geber	76
a) Geber mit Kapazitätsänderung durch Änderung der resultierenden Kapazität zweier in Serie geschalteter Teilkapazitäten	77
b) Einfluß von Schrägstellungen	78
10. Die Modulationsschaltung	81
IV. Experimenteller Teil	86
11. Die Versuchsergebnisse	87
a) Gelatine	87
b) Oppanol	94
12. Rückblick und Schlußfolgerungen	100
Literaturverzeichnis	105

Bezeichnungen und Definitionen

x, y, z	=	Koordinaten des kartesischen Koordinatensystems.
ξ, η, ζ	=	Verrückung in $x y z$ -Richtung.
G	=	Schubmodul.
k	=	Dämpfungskonstante oder Konstante der inneren Reibung.
η_0	=	Viskosität.
κ^*	=	Kompressibilitätskoeffizient.
t	=	Zeit.
λ	=	Relaxationszeit.
λ^*	=	Verzögerungszeit.
T^*	=	Temperatur.
σ	=	Normalspannung.
τ	=	Schubspannung.
$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$	=	Hydrostat. Druck, mittlere Normalspannung.
ε	=	Dehnung.
u	=	Vektor der Verrückung.
v	=	Vektor der Verrückungsgeschwindigkeit.
\mathfrak{S}	=	Spannungstensor.
\mathfrak{D}	=	Deformationstensor.
\mathfrak{D}	=	Tensor der Deformationsgeschwindigkeit.
\mathfrak{E}	=	Einheitstensor.
E	=	Elastizitätsmodul.
E_0	=	Volumetrischer Elastizitätsmodul.
m	=	Poisson'sche Zahl.
μ_0	=	Masse pro Volumeneinheit.
Φ	=	Potential des Schwerfeldes.
X, Y, Z	=	Auf die Volumeneinheit des isotropen Kontinuums einwirkende Kraftkomponenten des Schwerfeldes.
$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$	=	Nur vom Ort abhängige Amplituden der Verrückungen.
ϑ	=	Deformationswinkel im Bogenmaß.
$\check{\vartheta}$	=	Örtliche Amplitude des Deformationswinkels.
$\hat{\vartheta}$	=	Zeitliche und örtliche Amplitude des Deformationswinkels.
β	=	Dielektrizitätskonstante.
β_1, β_2	=	Dielektrizitätskonstante im Innern bzw. im Außenraum des Eidophors.
$\delta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$	=	Bezogene Dielektrizitätskonstante.

a	= Kapillarkonstante (im allgem. bezogen auf Vacuum).
x	= Elektrische Leitfähigkeit.
T	= Bildhauer.
$\lambda = \frac{2\pi}{x}, \lambda_0 = \frac{2\pi}{x_0}$	= Örtliche Kreisfrequenz bzw. Kreisfrequenz des hochfrequenten Trägers.
$r = \frac{\lambda}{\lambda_0}$	= Relative örtliche Kreisfrequenz.
γ	= Maß für den Einfluß der Oberflächenspannung.
q_m	= Mechanische Kenngröße des Eidophors.
q_e	= Elektrische Kenngröße des Eidophors.
$q_c = \frac{q_e}{q_m}$	= Kenngrößenverhältnis.
$t^* = \frac{t}{T} q_m$	= Bezogene Zeit.
ϱ	= Exponent, der den zeitlichen Verlauf bestimmt.
w_1, w_2, w_3	= Wurzeln der charakteristischen Gleichung.
E_1^*, E_2^*	= Bezogene konstante elektrische Feldstärken im Innern, bzw. im Außenraum des Eidophors.
s	= Elektrische Ladungsdichte auf der Eidophoroberfläche.
\tilde{k}_T^*	= Örtliche Amplitude der bezogenen Tangentialkomponente der elektrostatischen Kraft.
k_N^*	= Örtliche Amplitude des bezogenen örtlich und zeitlich veränderlichen Anteils der Normalkomponente der elektrostatischen Kraft.
μ	= Nachleuchten.
r^{**}	= Zeitlicher Lichtausnutzungsfaktor.
f	= Zeitliche Frequenz.
ω	= Zeitliche Kreisfrequenz.
M_0	= Masse des Führungssystems oder Schütteltisches.
M_1	= Masse des Meßsystems.
M_e	= Totale Exzentermasse.
a_e	= Exzentrizität.
$Z = \beta$	= Absolutwert der Zentripedalkraft.
l_0	= Pendellänge des Schütteltisches.
$\nu_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$	= Eigenkreisfrequenz des Schütteltisches.
$\bar{\xi}_n$	= Zeitliche, nur von y abhängige Amplitude der n ten Harmonischen der Verrückung.
$\bar{\xi}_0$	= Amplitude der Grundwelle der Verrückung des Führungssystems.
$\bar{\xi}_1$	= Amplitude der Grundwelle der Verrückung des Meßsystems.
$\bar{\xi}_{01}$	= Deformationsamplitude der Versuchsschicht (Grundwelle).

- ξ = Komplexes Amplitudenverhältnis der Grundwellen der Verrückungen.
 $|\xi| = x^*$ = Absolutwert des komplexen Amplitudenverhältnisses.
 φ = Phasenwinkel zwischen den Vektoren $\bar{\xi}_1$ und $\bar{\xi}_0$.
 y_0 = Dicke der Versuchsschicht.
 F = Flächeninhalt der Versuchsschicht.
 λ_1 = Steife des Meßsystems.
 k_1 = Dämpfungskoeffizient des Meßsystems.
 $\nu_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{M_1}}$ = Eigenfrequenz des Meßsystems (ungedämpft).
 C_ν = Grundkapazität des ν ten kapazitiven Gebers.
 $\left(\frac{AC}{Al}\right)_\nu$ = Empfindlichkeit des ν ten kapazitiven Gebers.
 C_ν = Feste Kapazität im Spannungsteiler, gebildet aus C_ν und C_ν' .
 U_{h0} = Scheitelwert der am Spannungsteiler liegenden HF-Spannung.
 $A U_{hc_\nu} = U_\nu$ = Scheitelwert der HF-Spannungsänderung infolge der Modulation durch die Grundwelle $\bar{\xi}_\nu$ der Verrückung.
 m^* = Modulationsgrad.
 $u_{a\nu}$ = Effektivwert der am Ausgang des Tiefpasses gemessenen NF-Spannung (proportional zur Grundwelle $\bar{\xi}_\nu$ der Verrückung).

Leer - Vide - Empty

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Zusammenhang mit der Entwicklung eines neuen Verfahrens der Fernseh-Großprojektion am Institut für techn. Physik an der E. T. H. (Lit. 1—2).

Bei ihm wird der Fluoreszenzschirm der Kathodenstrahlröhre durch ein flächenhaft ausgebreitetes, deformierbares, elektrisch halbleitendes Medium ersetzt. Anstelle einer örtlich verschiedenen Leuchtdichte treten hier örtlich verschiedene Deformationen des oben erwähnten Mediums, die mit Hilfe einer optischen Dunkelfeldmethode auf dem Projektionsschirm abgebildet werden. Hinsichtlich des zeitlichen Verlaufes besteht die Forderung, daß diese Deformationen nach Ablauf der Bilddauer T , also nach $\frac{1}{25}$ sec., hinreichend abgeklungen sein sollen. Die mechanischen und elektrischen Daten des Steuermediums müssen deshalb entsprechend gewählt werden. Als Material kommen sowohl zähe Flüssigkeiten als auch gewisse feste Substanzen mit quasi-elastischen Eigenschaften in Betracht.

Obwohl die Anwendung eines festen Steuermediums nicht geringe Vorteile bieten würde, so muß vorläufig doch noch ausschließlich mit Flüssigkeiten, d. h. mit gewissen Ölen gearbeitet werden, die mit Hilfe eines besonderen Destillationsverfahrens gewonnen werden; denn die Erzeugung einer geeigneten festen Substanz mit bestimmten vorgeschriebenen Eigenschaften ist bisher an der ungenügenden Kenntnis ihres mechanischen Verhaltens gescheitert.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die hier fehlenden Grundlagen beschafft werden. Was die Gliederung des Stoffes anbelangt, so wird im ersten Abschnitt die Theorie elastischer, viskoser, plastischer und hochelastischer Deformationen besprochen und in Zusammenhang gebracht mit den speziellen Voraussetzungen und Anforderungen des AfiF-Großprojektionsverfahrens. Im zweiten und dritten Abschnitt wird sodann die zur An-

wendung gebrachte Versuchsmethode und ihre Theorie behandelt, während ein vierter Abschnitt den experimentellen Teil umfaßt.

Der Abschluß der vorliegenden Arbeit ist durch vielerlei Umstände verzögert worden, so durch die zeitraubende Anfertigung von zahlreichen Werkstattzeichnungen für den Schütteltisch, dann infolge der starken Inanspruchnahme der Werkstatt des Instituts durch den gleichzeitigen Bau des Großprojektors, sowie schließlich infolge der durch Aktivdienst verursachten Unterbrechungen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. F. Fischer, für vielfache und wertvolle Anregungen meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Ferner danke ich einer ganzen Reihe von Herren von der Abteilung für industrielle Forschung am Institut für technische Physik, so vor allem Herrn Dr. W. Amrein für Ratschläge bei Konstruktion und Ausführung der Versuchsapparatur, sowie Herrn Dr. H. Stäger und Herrn W. Schwarzenbach für ihre Hilfe bei der Herstellung der Versuchssubstanzen.

Zürich, im Herbst 1943.

I. Überblick über die theoretischen Grundlagen des Problems

Die in vorliegender Arbeit untersuchten Substanzen gehören im Sinne der Kontinuumsmechanik zu einer Kategorie von Körpern, deren Verhalten durch Zurückführung auf den einfachsten und bekanntesten „Idealstoff“, wie den isotropen elastischen Körper oder die zähe Flüssigkeit nicht erschöpfend beschrieben wird.

Es erweist sich hier vielmehr als notwendig, die klassischen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie bzw. der Hydrodynamik durch Hinzufügen weiterer Glieder und Einführung neuer Materialkonstanten zu erweitern, also gewissermaßen neue kompliziertere Idealstoffe zu schaffen.

Das Problem ist, nach der umfangreichen Literatur zu schließen, bereits von den verschiedensten Seiten und sowohl für amorphe wie für kristalline Substanzen in Angriff genommen worden, freilich nicht immer zum Vorteil der Klarheit und Übersichtlichkeit.

Erst in jüngster Zeit machten sich Bestrebungen bemerkbar mit dem Ziel, die Forschungsergebnisse nach einheitlichen Gesichtspunkten zu ordnen und gleichzeitig die Kontinuumsmechanik der natürlichen isotropen Stoffe auf eine theoretische Grundlage von größerer Allgemeingültigkeit zu stellen (Lit. 5—7).

1. Abriß der Theorie elastischer, viskoser, plastischer und quasi-elastischer Deformationen

Bezüglich des Deformations- und Spannungszustandes soll im Folgenden stets vom einfachsten Fall einer homogenen ein-dimensionalen Deformation, entsprechend dem Spannungszustand der reinen Scherung, die Rede sein. Wie nämlich später gezeigt

wird, ist auch ein allgemeinerer Spannungszustand vollständig bestimmt, wenn die Gesetze der reinen Scherung bekannt sind. Bei dieser erleidet bekanntlich jedes Element der Substanz eine Deformation von gleicher Art und Größe; doch ist die Formänderung von keiner Volumenänderung begleitet. Im übrigen sei vorausgesetzt, daß die Eigenschaft der Inkompressibilität auch bei den komplizierteren Spannungszuständen erhalten bleibe.

Der Zusammenhang zwischen der Spannung τ einerseits und dem Verdrehungswinkel ϑ andererseits ist unter diesen Umständen gekennzeichnet durch ein Integralgesetz von der Form

$$\vartheta = F_1(\tau, t, T^*) \quad (1a)$$

bzw.

$$\dot{\vartheta} = F_2(\tau, t, T^*). \quad (1b)$$

Demnach sind die Operationsbeziehungen F_1 und F_2 , als Hauptgegenstände aller theoretischen und experimentellen Untersuchungen, von einer ganzen Reihe von Variablen abhängig, so von der Zeit t , der Temperatur T^* , ja sogar der Größe von ϑ bzw. $\dot{\vartheta}$ selbst, sowie von der Vorgeschichte der betrachteten Deformation. Oft lassen sich jedoch gewisse charakteristische Formen der Operationsbeziehungen F_1 und F_2 feststellen, die dann als Grundlage einer systematischen Einteilung der Substanzen dienen können.

Im Hinblick auf die in vorliegender Arbeit behandelten Erscheinungen führe ich diese Klassifizierung unter Bezugnahme auf die Theorie der sogenannten Idealstoffe durch. Damit bleibt freilich von vorneherein die Frage nach dem Einfluß der Temperatur T^* offen, denn die Theorie der Idealstoffe sagt darüber nichts aus. Die Betrachtungen beziehen sich somit im folgenden stets auf Zusammenhänge von der operatorischen Form:

$$\vartheta = F_1'(\tau, t) \quad (2a)$$

$$\dot{\vartheta} = F_2'(\tau, t), \quad (2b)$$

wobei ferner die aus der Integration der entsprechenden Differentialgleichungen hervorgehenden Funktionen F_1' , F_2' in τ und t als linear vorausgesetzt werden. Damit bleibt die Theorie der Idealstoffe im allgemeinen auch auf kleine Deformationen beschränkt.

Was schließlich die Art der primär wirksamen Kräfte anbelangt, so interessieren hier im Hinblick auf den periodischen Bildwechsel bei der Fernsehgroßprojektion in erster Linie solche mit periodisch-stationärem zeitlichem Verlauf. Aber auch die Betrachtung nicht-stationärer Vorgänge kann zu beachtlichen Resultaten führen.

Zur Veranschaulichung der in diesem Fall eintretenden Formänderungen bedient man sich mit Vorteil mechanischer Analogien. Dabei handelt es sich um Schwingungsgebilde mit einem Freiheitsgrad, die aus ideal elastischen Federn und idealen Reibungswiderständen vom viskosen Typus zusammengesetzt sind (Lit. 6).

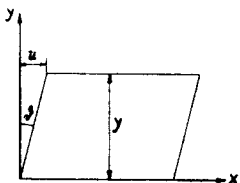


Abb. 1. Formänderung eines Flüssigkeitselementes bei reinem Schub.

a) Der ideale elastische Körper

Dieser ist charakterisiert durch den Umstand, daß ϑ eine Funktion von τ allein ist. Ferner besitzt er die Eigenschaft, bei Abwesenheit äußerer Kräfte eine definierte Gestalt anzunehmen, während er bei Belastung einen definierten Deformationszustand erreicht, der vollständig durch das System der äußeren Kräfte bestimmt ist. Nach dem Verschwinden der äußeren Kräfte gewinnt der Körper die ursprüngliche Gestalt augenblicklich und vollständig wieder zurück. Dabei wird die Formänderungsarbeit, die als potentielle Energie in ihm aufgespeichert war, vollständig zurückgewonnen. Dieses Verhalten kann beschrieben werden durch eine Gleichung

$$\vartheta = F(\tau) \quad (3)$$

mit der Nebenbedingung, daß für $\tau = 0$ auch $\vartheta = 0$ wird.

Für kristalline Substanzen besteht außerdem bis zu einem gewissen Wert τ^* , der sog. Fließgrenze, ein linearer Zusammenhang. Es gilt das Hooke'sche Gesetz

$$\vartheta = \frac{1}{G} \tau, \quad (4)$$

wobei G den Schubmodul bedeutet.

Ist nun etwa die Schubspannung τ eine periodische Funktion der Zeit:

$$\tau = \tau_0 e^{j\omega t}, \quad (5)$$

so muß entsprechend auch der Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{j\omega t}$$

sein, und es gilt im stationären Zustande

$$\vartheta_0 = \frac{1}{G} \tau_0, \quad (6)$$

wobei diesmal ϑ_0, τ_0 Maximal- oder Effektivwerte bedeuten.

b) Die zähe Flüssigkeit

Hier handelt es sich um eine Substanz, die im Ruhezustand kein anderes Kraftsystem als einen hydrostatischen Druck aufzunehmen vermag. In diesem Falle besteht zwischen der Volumenänderung dV und der Druckänderung

$$dP = F \Sigma dp$$

der Zusammenhang

$$dV = \kappa^* dP, \quad (7)$$

der gewissermaßen die Volumelastizität oder Kompressibilität beschreibt. Dabei bedeutet κ^* den Kompressibilitäts-Koeffizienten.

Andere Kraftsysteme, wie z. B. die reine Scherung, haben hingegen eine fortwährende Zunahme der Deformation, einen Fließvorgang zur Folge.

Die Betrachtung eines Flüssigkeitselementes (Abb. 1) liefert

$$\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (8)$$

wo u im vorliegenden eindimensionalen Falle eine Funktion von y und t ist. Wird die Geschwindigkeit der Verrückung oder Fließgeschwindigkeit

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9)$$

eingeführt, so läßt sich der Geschwindigkeitsgradient

$$D = \frac{\partial v}{\partial y} = \dot{\gamma} \quad (10)$$

definieren. An die Stelle der bei elastischen Körpern geltenden Beziehung (3) tritt bei Flüssigkeiten

$$D = \dot{\gamma} = F(\tau) \quad (11)$$

mit der Nebenbedingung, daß für $\tau = 0$ auch $D = 0$ wird.

Flüssigkeiten, bei denen obiger Zusammenhang außerdem linear ist, werden Newton'sche Flüssigkeiten genannt, und es gilt bei ihnen

$$D = \frac{1}{\eta_0} \tau, \quad (12)$$

worin η_0 die Viskosität bedeutet.

Auch im Falle eines nicht-linearen Zusammenhanges $D = F(\tau)$ kann in jedem Zeitpunkt ein Koeffizient

$$\eta_0^* = \frac{D}{\tau} \quad (13)$$

als sog. „scheinbare Viskosität“ definiert werden (Lit. 5). Eindeutiger ist jedoch folgende, von *Hohenemser* und *Prager* (Lit. 7) vorgeschlagene Definition:

„Ein Stoff wird eine Flüssigkeit genannt, wenn bei Einwirkung einer konstanten Spannung τ oder einer konstanten Scherungsgeschwindigkeit D , nach genügend langer Zeit sich ein endliches, von Null verschiedenes D , bzw. τ einstellt. Der Ausdruck

$$\eta_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau}{D} \quad (14)$$

ist dann ein Maß für die Zähigkeit oder Viskosität der Flüssigkeit.“

Unter Bezugnahme auf (12) liefert der Ansatz (5)

$$\vartheta_0 = \frac{1}{j \omega \eta_0} \tau_0. \quad (15)$$

Die Viskosität einer zähen Flüssigkeit kann demnach im stationären Zustande einer periodischen Bewegung auch als rein imaginärer Schubmodul der Größe $\omega \eta_0$ angesehen werden.

c) Der plastische Körper

Dieser Begriff kennzeichnet einen, im allgemeinen, festen Körper, der erst oberhalb einer gewissen Grenzspannung $\tau > \tau^*$, der sog. Fließgrenze, zu fließen beginnt und damit die Eigenschaften einer Flüssigkeit annimmt. Hiernach entspricht einer Spannung $\tau > \tau^*$ eine Deformation, die nach Aufhebung der Belastung nicht mehr vollständig verschwindet; der Körper hat eine bleibende oder plastische Deformation erlitten.

Plastische Erscheinungen spielen somit erst bei Deformationen eine Rolle, die verhältnismäßig wesentlich größer sind als diejenigen, denen elastische Körper normalerweise unterworfen werden.

Was die Existenz einer Fließgrenze anbetrifft, so ist eine solche eigentlich nur in wenigen Spezialfällen eindeutig feststellbar, namentlich aus dem Grunde, weil der zeitliche Verlauf eine ausschlaggebende Rolle spielt. Bei einer genügend langen Versuchsdauer können prinzipiell alle festen Körper unter der Einwirkung einer konstanten und hinreichend großen Spannung in den Zustand des plastischen Fließens überführt werden.

Die Erscheinung des plastischen Fließens wird physikalisch erklärt durch *Maxwells* Annahme, daß durch die Wärmebewegung der Moleküle ein Abbau der im Körper aufgespeicherten potentiellen Energie und damit auch der inneren Spannungen stattfindet. Ob durch diesen Vorgang zugleich auch eine Änderung des Deformationszustandes verursacht wird, hängt von der Beschaffenheit der Randbedingungen ab. So führt z. B. der Fall einer konstanten äußeren Spannung τ zu einer fortwährenden Vergrößerung der Deformation.

Der vorstehend geschilderte Prozeß, „Relaxation“ genannt, kann theoretisch beschrieben werden durch die Annahme, daß die Abnahme der Schubspannung $d\tau$ in der Zeiteinheit dt einem gewissen Bruchteil $\frac{\tau}{\Lambda}$ der jeweils wirksamen Schubspannung selbst proportional ist, daß also gilt:

$$d\tau = -\frac{\tau}{\Lambda} dt \quad (16)$$

Dieselbe Beziehung lautet bei Vorhandensein einer Fließgrenze:

$$\begin{aligned} d\tau &= -\frac{\tau - \tau^*}{\Lambda} dt && \text{für } \tau > \tau^* \\ d\tau &= 0 && \text{für } \tau < \tau^*. \end{aligned} \quad (17)$$

Im Falle der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes ist daher die totale Deformation ϑ_t zur Zeit t gegeben durch

$$\vartheta_t = \vartheta_{t=0} + \int_0^t \frac{\tau}{G\Lambda} dt = \frac{\tau}{G} + \int_0^t \frac{\tau}{G\Lambda} dt \quad (18a)$$

bzw. durch

$$\vartheta_t = \frac{\tau}{G} + \int_0^t \frac{\tau - \tau^*}{G\Lambda} dt. \quad (18b)$$

Diese von *J. C. Maxwell* (Lit. 8) erstmals aufgestellten Gleichungen können auch geschrieben werden:

$$D = \frac{1}{G} \dot{\vartheta} + \frac{1}{G\Lambda} \tau \quad (19a)$$

bzw.

$$D = \frac{1}{G} \dot{\vartheta} + \frac{1}{G\Lambda} (\tau - \tau^*). \quad (19b)$$

Sie werden kurz als die Grundgleichungen des „Maxwell'schen Körpers“ oder Idealstoffes bezeichnet.

Bei der Integration der Differentialgleichung (19a) sind folgende Spezialfälle von Bedeutung:

1. Die Deformation wird konstant gehalten, d. h. es ist $D = 0$. Dann resultiert eine fortwährende Abnahme der Schubspannung, eine „Relaxation“ gemäß

$$\tau = \tau_0 e^{-t/\Lambda} \quad (20)$$

τ_0 bedeutet dabei denjenigen Wert der Schubspannung, welcher vorhanden war im Augenblick, wo der Deformationsvorgang beendet und von wo an die Deformation konstant gehalten wurde.

2. Die auf den Maxwell'schen Körper einwirkende Beanspruchung wird konstant gehalten, d. h. es ist $\dot{\epsilon} = 0$. Dann folgt aus (19a) unmittelbar

$$\tau = G \Lambda D. \quad (21)$$

Es handelt sich demnach um den eingangs bereits erwähnten Fall des plastischen Fließens.

3. Die Deformation des anfänglich spannungsfreien Maxwell'schen Körpers erfolgt plötzlich mit einer von außen aufgezungenen konstanten Scherungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma} = D_0$. Dann liefert die Integration

$$\tau = G \Lambda D_0 (1 - e^{-t/\Lambda}). \quad (22)$$

Die Schubspannung nähert sich also in diesem Fall nur allmählich dem stationären Höchstwert der Gl. (21) und zwar umso langsamer, je größer die Relaxationszeit Λ ist.

Im Sinne der Definition (14) würde es sich bei dem durch Relaxation verursachten Fließvorgang des plastischen Körpers um das Fließen einer Flüssigkeit handeln mit der Viskosität

$$\eta = \lim_{t \rightarrow \infty} G \Lambda (1 - e^{-t/\Lambda}) = G \Lambda. \quad (23)$$

Unter der Einwirkung einer zeitlich periodischen Schubspannung entsprechend (5) liefert (19a):

$$\gamma_0 = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{j}{\omega \Lambda}\right) \tau_0. \quad (24)$$

Der plastische, mit Relaxation behaftete Maxwell'sche Körper kann demnach im stationären Zustand einer periodischen Bewe-

gung gewissermaßen als quasi-elastischer Körper mit komplexem Schubmodul aufgefaßt werden.

Bei langsamen Bewegungen (kleines ω) wird dieser komplexe Schubmodul rein imaginär, bei schnellen rein reell, sodaß sich im ersten Falle ein flüssiges, im zweiten ein ideal-elastisches Verhalten ergibt.

d) Der quasi-elastische oder hochelastische Körper

Dieser Begriff umschreibt eine Gruppe von Substanzen, deren Haupteigenschaft es ist, eine außergewöhnlich große Formänderung bis zum Eintritt des Bruches zu ertragen, ohne daß dabei — im Gegensatz zum plastischen Körper — ein wesentlicher plastischer Fließvorgang stattfindet. (Beispiel: Kautschuk, Weichgummi, nichthärtende Kunstharze.)

Die Formänderung ist jedoch fast nie rein elastisch, sondern sie setzt sich zusammen aus einem umkehrbaren, d. h. rein elastischen Anteil und mehreren nicht umkehrbaren Anteilen. Letztere hängen einerseits von der zeitlichen Veränderlichkeit und dem Richtungssinn der Belastung ab (statische Hysterisis), andererseits explizit von der Zeit (elastische Nachwirkung).

Bei der elastischen Nachwirkung handelt es sich um eine Art „Rückfließprozeß“, der zwar an sich plastischer Natur, aber doch nur den hochelastischen Substanzen eigen ist. Demgegenüber kann die statische Hysterisis auch an den sogenannten elastischen Substanzen, wie z. B. den Metallen, beobachtet werden.

Nach dem oben Gesagten läßt sich also der Zusammenhang (2a) im Falle des hochelastischen Körpers wie folgt spezialisieren:

$$\vartheta = F[\tau(t), t] \quad (25)$$

und es sind hinsichtlich des Deformationsvorganges folgende Fälle zu unterscheiden (Lit. 9):

1. Ein elastisch umkehrbarer Vorgang ist ein solcher, bei dem bei Belastung und Entlastung stets die gleichen Kurvenzüge $\vartheta = F(\tau)$ durchlaufen werden (Abb. 2).

2. Ein elastisch nicht umkehrbarer Vorgang ist ein solcher, bei dem bei Belastung und Entlastung verschiedene Kurvenzüge durchlaufen werden (statische Hysterisis) (Abb. 3).

3. Ein nicht elastischer, nicht umkehrbarer Vorgang ist ein solcher, bei dem die durchlaufenen Kurvenzüge der Deformation nicht mehr allein vom Belastungsverlauf $\tau(t)$, sondern außerdem von der Zeit t abhängig sind. Den elastischen Vorgängen sind plastische überlagert (elastische Nachwirkung) und es treten sogenannte „Dehnungsreste“ in Erscheinung (Abb. 4).

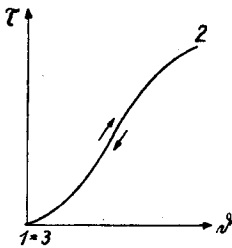


Abb. 2

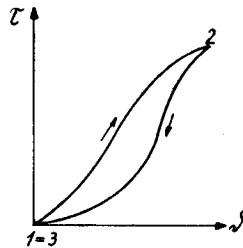


Abb. 3

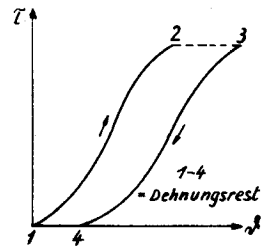


Abb. 4

Abb. 2. Elastische umkehrbare Verformung.

Abb. 3. Elastische nicht umkehrbare Verformung (statische Hysterisis).

Abb. 4. Nicht elastische, nicht umkehrbare Verformung.

Auch wenn die zahlreichen für den Zusammenhang (25) aufgestellten Formeln die wahren bei der Deformation sich abspielenden Vorgänge jeweils nur bruchstückweise wiederzugeben vermögen, so hat sich immerhin ein erstmals von *W. Voigt* (Lit. 10) vorgeschlagener Idealstoff als von grundlegender Bedeutung erwiesen.

Dieser seither als *Voigt'scher Körper* benannte Idealstoff ist gekennzeichnet durch das Vorhandensein einer inneren Reibung, welche bewirkt, daß die aufgewendete Formänderungsarbeit nicht ausschließlich als potentielle Energie der Formänderung in Erscheinung tritt, sondern daß ein Teil proportional zu $\dot{\nu}$ in Wärme umgesetzt wird. Unter der Einwirkung mechanischer Wechselbeanspruchungen bringt andererseits die innere Reibung das Phänomen der sogenannten „dynamischen Hysterisis“ hervor, eine

Erscheinung, auf der auch, wie noch zu zeigen sein wird, das im folgenden beschriebene Meßverfahren beruht.

Den vorstehend geschilderten Sachverhalten genügt die Gleichung

$$\tau = G \vartheta + k \dot{\vartheta}, \quad (26)$$

worin G der Schubmodul ist und k eine Konstante bedeutet, die als „Konstante der inneren Reibung“ bezeichnet werden soll.

Wird der Voigt'sche Körper aus dem Zustand der Ruhe zur Zeit $t = 0$ plötzlich belastet, so tritt eine Zeitverzögerung der Deformation in Erscheinung gemäß:

$$\vartheta = \frac{\tau}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{k} t} \right). \quad (27)$$

Umgekehrt gilt bei Entlastung $\tau = 0$:

$$\vartheta = \vartheta_1 e^{-\frac{G}{k} (t-t_1)}, \quad (28)$$

wenn ϑ_1 den Wert von ϑ zur Zeit $t = t_1$ bedeutet. In beiden Fällen wird der End- bzw. Anfangszustand asymptotisch erst nach längerer Zeit erreicht.

Dieses Verhalten wird, im Gegensatz zur statischen Hysterisis, als dynamische Hysterisis bezeichnet. In diesem Zusammenhang sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Voigt'sche Idealstoff das Phänomen der statischen Hysterisis, die sonst ebenfalls eine Folge der zyklischen Deformation der Stoffe ist, nicht wiederzugeben vermag.

Bildet man gemäß (14)

$$\eta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau}{D},$$

so wird

$$\eta = \lim_{t \rightarrow \infty} k e^{\frac{G}{k} t} = \infty. \quad (29)$$

Der Voigt'sche Körper kann demzufolge auch aufgefaßt werden als eine Flüssigkeit mit unendlich großer Zähigkeit, eine Ansicht, die jedoch lediglich formaler Natur ist, und die, wie bereits beim Fließvorgang von festen Körpern unter konstanter Beanspruchung

und langer Beobachtungszeit dargelegt wurde, niemals genau zutrifft.

Vielmehr wird sich unter geeigneten Versuchsbedingungen auch beim hochelastischen Körper Relaxation zeigen. Dieser Umstand läßt sich dadurch berücksichtigen, daß die Zustandsgleichungen des Maxwell'schen und des Voigt'schen Idealstoffes (20) bzw. (26) miteinander vereinigt werden. Auf diese Weise entsteht der allgemeinere Idealstoff

$$G \vartheta + k \dot{\vartheta} = \tau + \frac{1}{\Lambda G} \int_0^t \tau dt \quad (30)$$

oder

$$G \dot{\vartheta} + k \ddot{\vartheta} = \dot{\tau} + \frac{1}{\Lambda G} \tau. \quad (31)$$

Im Falle einer zeitlich periodischen Schubspannung liefert der reine Voigt'sche Idealstoff (26):

$$\vartheta_0 = \frac{1}{G} \left(\frac{1}{1 + j \omega \frac{k}{G}} \right) \tau_0. \quad (32)$$

Also auch hier hat man es im stationären Zustand mit einem quasi-elastischen Körper mit komplexem Schubmodul zu tun. Der Unterschied zwischen (24) und (32) besteht jedoch darin, daß der Voigt'sche Idealstoff umgekehrt für kleine Frequenzen ω ein ideal-elastisches, für große Frequenzen dagegen ein flüssiges Verhalten zeigt.

Der kombinierte Idealstoff (31) schließlich ergibt den Zusammenhang:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{G} \left(\frac{1 - \frac{j}{\omega \Lambda G}}{1 + \frac{j \omega k}{G}} \right) \tau_0. \quad (33)$$

Er verhält sich also sowohl für kleine als auch für große Frequenzen ω wie eine Flüssigkeit und weist nur in einem begrenzten Frequenzgebiet rein elastische Eigenschaften auf.

e) *Beziehungen zwischen der Theorie der Idealstoffe und den Ergebnissen der molekular-kinetischen Betrachtungsweise*

Wie in den vorangegangenen Betrachtungen gezeigt wurde, ist die Theorie der Idealstoffe auf einfache Zusammenhänge beschränkt, die als Sonderfälle der linearen Beziehung

$$\tau + c_1 \dot{\tau} + c_2 \dot{\vartheta} + c_3 \ddot{\vartheta} + c_4 = 0 \quad (34)$$

gedeutet werden können. Der besseren Übersicht wegen seien diese Sonderfälle hier nochmals in systematischer Anordnung aufgeführt:

I.	$\tau = G \vartheta$	elastischer Festkörper
II.	$\tau = \eta \dot{\vartheta}$	Flüssigkeit
III.	$\Delta \dot{\tau} + \tau = \Delta G \dot{\vartheta}$	plastischer Festkörper mit Relaxation
IV.	$\tau = G \vartheta + k \dot{\vartheta}$	elastischer Festkörper mit innerer Reibung und dynamischer Hysterisis
V.	$\Delta \dot{\tau} + \tau = \Delta G \dot{\vartheta} + \Delta k \ddot{\vartheta}$	plastischer Festkörper mit Relaxation und dynamischer Hysterisis

Versuche haben jedoch ergeben, daß von derartigen Beziehungen häufig nicht viel mehr als lediglich eine qualitative Übereinstimmung mit dem beobachteten mechanischen Verhalten quasi-elastischer Substanzen und insbesondere solcher von makromolekularer Struktur, erwartet werden darf. Dieser Mangel der Theorie der Idealstoffe ist nämlich grundsätzlicher Natur, rührt er doch davon her, daß hier die molekular-kinetischen Vorgänge bei der Deformation nur unvollkommen berücksichtigt sind.

Theorien, welche diesem Umstand Rechnung tragen, sind indessen ebenfalls aufgestellt worden und zwar einerseits auf der Basis mechanischer (Lit. 11, 12) und andererseits rein thermodynamisch-statistischer Überlegungen (Lit. 13). Freilich muß darauf hingewiesen werden, daß in allen diesen Veröffentlichungen fast ausschließlich von jenen Erscheinungen die Rede ist, welche sich bei zeitlich nichtperiodischen, nichtstationären und hinsicht-

lich der Belastungsrichtung einsinnigen Dehnungsvorgängen abspielen.

Mit anderen Worten: es werden im wesentlichen nur plastische Deformationen untersucht, bei denen die Wirkung der inneren Reibung, obwohl selbstverständlich auch vorhanden, in den Hintergrund tritt. Ein unmittelbarer Zusammenhang mit der Problemstellung der vorliegenden Arbeit — Untersuchung des Gültigkeitsbereiches des Voigt'schen Ansatzes bei amorphen isotropen Stoffen und stationärer Wechselbeanspruchung — besteht somit scheinbar nicht.

Allein bei näherem Zusehen werden sich doch einige Gesichtspunkte und Betrachtungen aus den Arbeiten der oben genannten Autoren von solchem Interesse erweisen, und zwar gerade im Hinblick auf die in Kap. 11 mitgeteilten eigenen Versuchsergebnisse, daß im folgenden kurz auf die wesentlichsten Punkte eingegangen werden soll. Dabei wird sich außerdem Gelegenheit bieten, auch die wichtige Frage nach der Wechselwirkung zwischen chemischer Struktur und mechanischem Verhalten kurz zu streifen.

W. Kuhn (Lit. 11) nimmt gewisse experimentelle Befunde (speziell an hochpolymeren Kunstharzen) zum Anlaß, eine Erweiterung der bereits in Kap. 1c besprochenen Maxwell'schen Relaxationstheorie vorzunehmen. Seine Betrachtungen beruhen auf der Vorstellung, daß die bei einer mit sehr großer Geschwindigkeit vorgenommenen Deformation, z. B. einer Scherung, in der betrachteten Substanz erzeugte Schubspannung aus einer Summe von Teilspannungsbeträgen bestehe, welche ihrerseits von einer ebenso großen Anzahl von verschiedenen „Zusammenhaltsmechanismen“ herrührten. Dieser Vorstellung entsprechend gäbe es auch nicht nur eine einzige Relaxationszeit, sondern deren gerade so viele und verschiedene als solche Zusammenhaltsmechanismen in der Substanz vorhanden sind.

Demzufolge wäre also

$$\tau = \sum_{i=0}^n \tau_i$$

zu setzen, wobei die Relaxation der i -ten Teilspannung in Anlehnung an Gl. (20) gemäß

$$\tau_i = \tau_{i0} e^{-t/\Lambda_i}$$

vor sich ginge. Mit $\tau_{i0} = \partial G_{i0}$ würde daraus weiter die wichtige Beziehung hervorgehen:

$$G = \Sigma G_{i0} e^{-t/\Lambda_i},$$

welche aussagt, daß der Schubmodul im Falle der erweiterten Maxwell'schen Relaxationstheorie nunmehr die Bedeutung einer zeitabhängigen Größe erhält. Sinngemäß wäre also dann $G_0 = \Sigma G_{i0}$ mit jenem Schubmodul identisch, der beobachtet würde, wenn sowohl die Deformation wie die anschließende Spannungsmessung in einer Zeit erfolgten, klein gegenüber der kürzesten vorkommenden Relaxationszeit Λ_i .

Für den Zustand des stationären Fließens geht aus der Kuhn'sche Theorie die zu (21) analoge Beziehung

$$\tau = D \Sigma G_i \Lambda_i$$

hervor, wobei jetzt die Viskosität als

$$\eta = \Sigma G_i \Lambda_i$$

definiert ist. Ergänzend sei noch erwähnt, daß durch die Annahme der Existenz von Bindungsmechanismen, welche einerseits eine Gruppe von extrem kurzen und andererseits eine solche von extrem langen Relaxationszeiten enthalten, sogar gewisse charakteristische Eigenschaften hochelastischer Stoffe (elast. Nachwirkung) wiedergegeben werden, während die gewöhnliche Maxwell'sche Relaxationstheorie diese Möglichkeit bekanntlich nicht zuließ.

Es ist nun bemerkenswert, wie sogar aus der chemischen Struktur ein solches Nebeneinanderbestehen verschiedenartigster Bindungsmechanismen abgeleitet werden kann und wie die Kuhn'sche Hypothese auch von dieser Seite her als durchaus gerechtfertigt erscheint. Die Erfahrung zeigt ferner, daß die erweiterte Maxwell'sche Relaxationstheorie sowohl für die niedermolekularen kristallisierten organischen und anorganischen Verbindungen wie für die hochmolekularen amorphen, aus sogenannten „Makromolekülen“ zusammengesetzten Stoffe gültig ist. Lediglich hinsichtlich des Spektrums der den einzelnen Bindungsmechanismen

zugeordneten Relaxationszeiten bestehen Unterschiede, die sich jedoch weitgehend als Funktion der Molekülgröße und der Struktur der molekularen Vernetzung erweisen.

Für das Vorkommen verschieden großer Relaxationszeiten in ein und derselben Substanz ist in erster Linie der Größenunterschied der innermolekularen Hauptvalenzkräfte und der den Zusammenhalt der Moleküle unter sich bewirkenden Kohäsions- oder Nebervalenzkräfte verantwortlich. Während der ersten Kräftegruppe infolge der Wirksamkeit der sogenannten „Mikro-Brownschen Bewegung“ extrem kurze Relaxationszeiten entsprechen, sind die zeitlichen Veränderungen der zwischenmolekularen Kohäsionskräfte durch sehr große Relaxationszeiten ausgezeichnet. Die hier maßgebende sogenannte „Makro-Brown'sche Bewegung“ hängt nämlich weitgehend von der gegenseitigen Beweglichkeit der Moleküle ab, und sie kann deshalb bei hochmolekularen Stoffen nur eine langsame sein. Daneben übt naturgemäß auch die Beschaffenheit der sogenannten „Sekundärstruktur“ (Fadenstruktur oder Netzstruktur) auf das entstehende Spektrum der Relaxationszeiten einen maßgebenden Einfluß aus (Lit. 14).

Eine weitere Veröffentlichung, auf die ich im folgenden eingehen werde, ist die eingangs zitierte Arbeit von *L. Prandtl*. Der Verfasser entwickelt darin ein etwas idealisiertes Abbild der Gitterstruktur eines kristallinen Körpers, weist jedoch darauf hin, daß dieses Modell auch für amorphe Körper im wesentlichen noch Gültigkeit besitze. Im weiteren betrachtet er die Kräfte, welche vor allem jene Moleküle aufeinander ausüben, die zu beiden Seiten eines beliebig durch das Kristallgitter geführten Schnittes gelegen sind. Auf dieser Grundlage werden dann die Bewegungsgleichungen dieser Moleküle abgeleitet und zwar für den Fall einer ebenen Deformation des Gitters und bei gleichzeitiger Berücksichtigung von statistischen „Temperatursprüngen“.

Leider sind die auf diese Weise erhaltenen Bewegungsgleichungen von so kompliziertem Aufbau, daß ihre Integration in geschlossener Form nur in den wenigsten Fällen gelingt. Der Vorteil der Einfachheit, welcher die Idealstofftheorie und auch noch die Kuhn'sche Relaxationstheorie auszeichnete, geht hier somit restlos verloren. Diesem Nachteil steht jedoch die wichtige

Tatsache gegenüber, daß die einfache Modellvorstellung eines regelmäßigen Molekülgitters bereits genügte, um fast alle bekannten plastischen und hochelastischen Phänomene in einwandfreier Weise zu reproduzieren und darüber hinaus sogar noch wertvolle qualitative und quantitative Aussagen über den zeitlichen Verlauf von Relaxation und elastischer Nachwirkung bei einsinnigem nichtstationärem Kraftangriff zu ermöglichen.

Versuche von *R. Braunbeck* (Lit. 15) haben denn auch für die von ihm beobachteten Vorwärts- und Rückfließprozesse an Chaterton-Compound Ergebnisse gezeitigt, welche mit den rechnerischen Schlußfolgerungen aus der Prandtl'schen Theorie weitgehend im Einklang waren.

Gerade dieser Umstand aber ist es, welcher im Hinblick auf die Deformationsvorgänge bei der Afif-Großprojektion größte Beachtung verdient; denn offenbar bedeutet er nichts anderes, als daß auch dort Abweichungen im zeitlichen Verlauf des Deformationswinkels gegenüber dem auf Grund der Idealstofftheorie für den festen Eidophor errechneten speziellen zeitlichen Verlauf erwartet werden müßten. Erschwerend fällt dabei noch ins Gewicht, daß solche Abweichungen sogar unabhängig von der Größe der Deformation sein müßten und also bei kleinen und bei großen Deformationswinkeln gleichermaßen vorhanden sein würden.

Um eine allfällige spätere Abklärung dieser Fragen zu erleichtern, seien nunmehr die Resultate der oben erwähnten Braunbeck'schen Rechnungen und Versuche kurz zusammengefaßt (A , B , ν bedeuten dabei Molekularkonstanten).

1. Erleidet ein Körper durch eine bestimmte äußere Kraft K eine Formänderung und wird dafür gesorgt, daß diese unverändert erhalten bleibt, d. h. ist $\xi = \text{konst.}$, so nimmt die Summe der inneren Spannungen K nach unbegrenzt langer Zeit den Wert 0 an. Das Zeitgesetz dieser Abnahme (Relaxation) ist sehr verwickelt und folgt erst für sehr große Zeiten t näherungsweise einem Exponentialgesetz der Form:

$$K = \frac{C}{2B} e^{-\frac{2t}{\nu}} e^A \quad (35)$$

Dabei kann der Ausdruck $\frac{\nu}{2} e^A$ als ein Analogon zur Maxwell'schen Relaxationszeit angesehen werden.

2. Umgekehrt erfolgt unter dem Einfluß einer konstanten Belastung $K = \text{konst.}$ ein Fließen mit der konstanten Endgeschwindigkeit c_∞ . Diese steht mit K in folgendem Zusammenhang:

$$K = \nu \frac{\pi}{4} C e^{-\frac{T^*}{A}} c_\infty. \quad (36)$$

Die stationäre Zähigkeit wird somit dargestellt durch den Ausdruck

$$\eta = \nu \frac{\pi}{4} C e^{-\frac{T^*}{A}}, \quad (37)$$

der mit steigender Temperatur stark abnimmt.

3. Wird während des Fließvorganges eine plötzliche Entlastung von $K = K$ auf $K = 0$ vorgenommen, so tritt eine plötzliche Deformationsänderung von der Größe

$$\xi_0 = \frac{K}{C} \quad (38)$$

ein. Die Konstante C hat somit die Bedeutung eines Schubmoduls.

4. Anschließend an die oben erwähnte quasi-elastische Formänderung vom Betrage ξ_0 findet ein Rückfließen (elastische Nachwirkung) statt mit einer anfänglichen Geschwindigkeit

$$c_0 = - \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) c_\infty = - 0.24 c_\infty. \quad (39)$$

c_0 ist also zur vorher wirksam gewesenen Vorwärtsfließgeschwindigkeit proportional. Der weitere zeitliche Verlauf der Rückfließgeschwindigkeit konnte allerdings wegen prinzipieller mathematischer Schwierigkeiten nicht im einzelnen ermittelt werden, doch ließ sich immerhin feststellen, daß der Vorgang nicht durch einfache Exponentialfunktionen mit konstanten Exponenten darstellbar ist. Was den totalen Deformationsrückgang durch elastische

Rückfederung und elastische Nachwirkung anbelangt, so wäre dieser:

$$-\xi_{\infty} = \xi_0 + \int_0^{\infty} c(t) dt.$$

5. Wird für den zeitlichen Verlauf der elastischen Nachwirkung trotzdem eine Exponentialfunktion

$$c(t) = c_0 e^{-\lambda t} \quad (40)$$

angesetzt, wobei freilich der Exponent λ keine Konstante mehr ist, so kann wenigstens dessen Wert für das Anfangsstadium der Bewegung λ_0 , sowie für das Endstadium λ_{∞} berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{4\nu} \frac{\frac{A}{T^*} - \frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{8} - 1} e^{-\frac{A}{T^*}} \quad (41)$$

und

$$\lambda_{\infty} = \frac{1}{\nu} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{A}{T^*}}. \quad (42)$$

Das Verhältnis

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_{\infty}} = \frac{\pi \left(\frac{A}{T^*} - \frac{\pi^2}{4} \right)}{\left(1 - \frac{\pi}{4} \right) (\pi^2 - 8)} \quad (43)$$

liefert für $A/T^* = 6$ einen Wert $\lambda_0/\lambda_{\infty} = 40$.

6. Wird das System nach vollständiger „Erholung“ erneut plötzlich mit der Kraft K belastet, so tritt wiederum eine plötzliche quasi-elastische Deformation von der Größe

$$\xi_1 = \frac{K}{C}$$

ein, gefolgt von einer weiteren Zunahme von ξ bei gleichzeitiger langsamer Abnahme von $\frac{d\xi}{dt}$ bis zum asymptotischen Wert c_{∞} gemäß:

$$\frac{d\xi}{dt} = c_{\infty} - c(t).$$

mehr eine in geschlossener Form nicht darstellbare Funktion, die im Sinne der Relaxationstheorie von *W. Kuhn* vielleicht am ehesten durch eine Summe von Exponentialfunktionen mit verschiedenen Exponenten angenähert werden kann.

Somit läßt sich aus den Darlegungen dieses Kapitels der Schluß ziehen, daß es sich bei den Ansätzen der Idealstofftheorie überhaupt ganz allgemein nur um eine erste Annäherung handelt. Bei der Anwendung von Beziehungen der Idealstofftheorie muß deshalb stets von Fall zu Fall untersucht werden, ob die dort vorgenommenen Vereinfachungen dem jeweils behandelten Problem angemessen sind oder nicht.

Im weiteren konnte auf Grund der Überlegungen von *W. Kuhn* die Zeitabhängigkeit einiger als universelle Konstanten vorausgesetzter Größen der Idealstofftheorie aufgezeigt werden, wodurch die vielfach beobachtete Frequenzabhängigkeit dieser Größen bei zeitlich stationärer periodischer Deformation eine Erklärung findet.

Die Ergebnisse der Prandtl'schen Theorie machen es ferner wahrscheinlich, daß alle als rein elastisch oder als quasi-elastisch und mit innerer Reibung behaftet vorausgesetzten Deformationen praktisch doch in mehr oder weniger großem Ausmaß von plastischen Erscheinungen begleitet sein werden und zwar selbst bei den kleinsten Deformationen. Die oben erwähnten Konstanten werden demnach stets auch eine gewisse Amplitudenabhängigkeit aufweisen.

2. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Idealstoffe im dreidimensionalen Fall

Gleich am Anfang von Kap. 1 ist die Behauptung aufgestellt worden, daß ein allgemeinerer Spannungs- und der dazugehörige Deformationszustand dann vollständig bestimmt sei, wenn die Gesetze der reinen Schiebung bekannt sind. Im vorliegenden Kapitel gilt es nun den Beweis für diese Behauptung anzutreten und darüber hinaus die für den allgemeinsten dreidimensionalen Fall geltenden Bewegungsgleichungen der wichtigsten Idealstoffe herzuleiten.

a) *Der allgemeine dreidimensionale Spannungs- und Deformationszustand*

Der allgemeinste Spannungszustand, dem ein Körper unterworfen werden kann, läßt sich bekanntlich darstellen durch einen Spannungstensor, dessen Matrix, bezogen auf ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem $x y z$, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\mathfrak{S} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (44)$$

Wie die Elastizitätstheorie zeigt, ist

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

d. h. es handelt sich bei \mathfrak{S} um einen symmetrischen Tensor. Dem Feld des Vektors der Verrückung u entspricht ein Deformationstensor mit der Matrix:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \mathfrak{D}_{xy} & \mathfrak{D}_{xz} \\ \mathfrak{D}_{yx} & \varepsilon_y & \mathfrak{D}_{yz} \\ \mathfrak{D}_{zx} & \mathfrak{D}_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (45)$$

In gleicher Weise läßt sich aus dem Feld des Vektors der Verrückungsgeschwindigkeit v der ebenfalls symmetrische Tensor der Deformationsgeschwindigkeit ableiten, dem folgende Matrix zugeordnet ist:

$$\dot{\mathfrak{D}} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\mathfrak{D}}_{xy} & \dot{\mathfrak{D}}_{xz} \\ \dot{\mathfrak{D}}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\mathfrak{D}}_{yz} \\ \dot{\mathfrak{D}}_{zx} & \dot{\mathfrak{D}}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{vmatrix}. \quad (46)$$

Die Glieder $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z$ etc. dieser Matrix sind dabei identisch mit den Dehnungs- und Scherungsgeschwindigkeiten.

Der durch die Tensoren \mathfrak{S} und \mathfrak{D} dargestellte allgemeine dreidimensionale Spannungs- und Deformationszustand kann nun in zwei von einander grundsätzlich verschiedene Spannungs- und Deformationszustände zerlegt werden (Lit. 14).

1. Einen allseitigen Druckzustand (hydrostatischer Zustand) mit der mittleren Normalspannung

$$p = - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \quad (47)$$

Diese hat eine Volumenänderung zur Folge, die einer mittleren Volumdehnung

$$\varepsilon = - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (48)$$

entspricht. Der bezüglich des Volumens unbeständige Anteil des Deformationszustandes läßt sich deshalb ausdrücken durch eine lineare Beziehung

$$p = E_0 \varepsilon, \quad (49)$$

welche erfahrungsgemäß für genügend kleine mittlere Volumdehnungen stets erfüllt ist. Dabei ist unter E_0 der sogenannte volumetrische Elastizitätsmodul zu verstehen, der mit dem gewöhnlichen Elastizitätsmodul E und der Poisson'schen Zahl m in folgender Weise zusammenhängt:

$$E_0 = E \frac{m}{3(m-2)}. \quad (50)$$

2. Einen volumtreuen, deviatorischen Spannungszustand, der einem reduzierten Spannungstensor \mathfrak{S}' entspricht. Bezeichnet \mathfrak{E} den sogenannten Einheitstensor

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

so wird der erwähnte reduzierte Spannungstensor \mathfrak{S}' erhalten, in dem von \mathfrak{S} ein Bestandteil $-p\mathfrak{E}$ abgezogen wird, gemäß:

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + p\mathfrak{E}. \quad (52)$$

Bei dieser Operation bleiben die Schubspannungen unverändert und zwischen den Normalspannungen der beiden Tensoren \mathfrak{S} und \mathfrak{S}' bestehen die Beziehungen:

$$\sigma'_x = \sigma_x + p, \quad \sigma'_y = \sigma_y + p, \quad \sigma'_z = \sigma_z + p. \quad (53)$$

Die Matrix des reduzierten Spannungstensors \mathfrak{S}' lautet also:

$$\mathfrak{S}' = \begin{vmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z + p \end{vmatrix}. \quad (54)$$

Dem volumtreuen Anteil des Deformationszustandes andererseits entspricht der reduzierte Deformationstensor \mathfrak{D}' mit der Matrix

$$\mathfrak{D}' = \begin{vmatrix} \varepsilon_x + \varepsilon & \mathfrak{D}_{xy} & \mathfrak{D}_{xz} \\ \mathfrak{D}_{xy} & \varepsilon_y + \varepsilon & \mathfrak{D}_{yz} \\ \mathfrak{D}_{zx} & \mathfrak{D}_{zy} & \varepsilon_z + \varepsilon \end{vmatrix}. \quad (55)$$

Es gilt jetzt, vermittelt der in Kap. 1 unter der Voraussetzung der einaxigen Scherung gewonnenen Beziehungen, die entsprechenden Zusammenhänge zwischen den Tensoren \mathfrak{S}' und \mathfrak{D}' aufzufinden. Diese Verknüpfungen, welche — dank der oben erwähnten Aufspaltung des Spannungszustandes — von der mittleren Normalspannung praktisch unabhängig sind, liefern dann auch sogleich die gesuchten allgemeinen Bewegungsgleichungen der Idealstoffe im dreidimensionalen Fall.

b) Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik

Es bezeichne u den Vektor der Verrückung mit den auf kartesische Koordinaten bezogenen Komponenten ξ, η, ζ , v den Vektor der Deformationsgeschwindigkeit mit den Komponenten $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ und μ_0 die Masse des Kontinuums pro Volumeneinheit. Das Potential der auf die Volumeneinheit einwirkenden äußeren Kräfte sei durch Φ gegeben, und die inneren Kräfte seien durch den Spannungstensor \mathfrak{S} dargestellt. Dann läßt sich die Bewegungsgleichung in der von *Euler* angegebenen vektoriellen Form folgendermaßen schreiben:

$$\mu_0 \frac{dv}{dt} = \nabla \mathfrak{S} + \nabla \Phi. \quad (56)$$

Sie gilt sowohl für den viskosen, wie für den festen Körper. Zu dieser Gleichung tritt noch die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{d\mu_0}{dt} + \mu_0 \operatorname{div} v = 0 \quad (57)$$

hinzu. Da indessen InkompRESSIBILITÄT vorausgesetzt wird, so muß die totale zeitliche Änderung

$$\frac{d\mu_0}{dt} = 0 \quad (58)$$

sein. Dies führt auf

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (59)$$

eine Bedingung, die im Falle des festen elastischen Körpers gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß die Volumdehnung e zu verschwinden hat (Lit. 15). Es gilt also ferner:

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (60)$$

Indem ich an (56) erinnere und Gebrauch mache von der Beziehung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v, \quad (61)$$

so geht daraus die allgemeinste Form der gesuchten Bewegungsgleichung hervor:

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{grad} (\mathfrak{S} - \mu_0 v, v) + \operatorname{grad} \Phi. \quad (62)$$

In Komponentenschreibweise lautet sie unter Beachtung von

$$X = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad Z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (63)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} \right) - X \quad (64)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} \right) - Y \quad (65)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) - Z. \quad (66)$$

Dazu kommt noch die Bedingung der InkompRESSIBILITÄT

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \quad (67)$$

c) Die speziellen Bewegungsgleichungen des Voigt'schen
Idealstoffes

Bezugnehmend auf den hier geltenden eindimensionalen Zusammenhang

$$\tau = G\vartheta + k \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad \text{IV}$$

erhalte ich zunächst folgende Beziehungen für die Schubspannungskomponenten:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G\xi + k \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ G\eta + k \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \quad (68)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G\xi + k \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ G\zeta + k \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\} \quad (69)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G\eta + k \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G\zeta + k \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\}. \quad (70)$$

Damit sind auch die Normalspannungskomponenten σ' gegeben, die dem volumtreuen Spannungszustand entsprechen:

$$\sigma'_x = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ G\xi + k \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\} \quad (71)$$

$$\sigma'_y = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G\eta + k \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \quad (72)$$

$$\sigma'_z = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G\zeta + k \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\}. \quad (73)$$

Die zum allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand gehörigen Normalspannungskomponenten σ folgen daraus auf Grund von (53). Wenn nun ein Vektor \mathfrak{s} definiert wird, mit den Komponenten

$$\mathfrak{s}_x = G\xi + k \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (74)$$

$$\mathfrak{s}_y = G\eta + k \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (75)$$

$$\mathfrak{s}_z = G\zeta + k \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (76)$$

so lassen sich die vorstehenden Gleichungen für die Schub- und Normalspannungskomponenten folgendermaßen schreiben:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial \bar{s}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial x} \quad (77)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\partial \bar{s}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial x} \quad (78)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial y} \quad (79)$$

$$\sigma_x = -p + 2 \frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} \quad (80)$$

$$\sigma_y = -p + 2 \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} \quad (81)$$

$$\sigma_z = -p + 2 \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} \quad (82)$$

Hierdurch, sowie mit (64) (65) (66) und der Annahme, daß die äußeren Kräfte X, Y, Z (Schwerkkräfte) vernachlässigt werden dürfen, ergeben sich schließlich die Bewegungsgleichungen des Voigt'schen Körpers in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = & \frac{\partial^2 \bar{s}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \\ & - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t} = & \frac{\partial^2 \bar{s}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - \\ & - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial t} = & \frac{\partial^2 \bar{s}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - \\ & - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (85)$$

Die Bedingung der Inkompressibilität (67) führt darauf, daß auch

$$\frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} = 0 \quad (86)$$

ist, womit die Bewegungsgleichungen folgende Form annehmen:

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{s}_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} \right) \quad (87)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{s}_y - \frac{\partial p}{\partial y} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} \right) \quad (88)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{s}_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right). \quad (89)$$

In vektorieller Schreibweise lauten sie:

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{\mathbf{s}} - \mu_0 \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p. \quad (90)$$

Durch Differentiation von (87) nach x , (88) nach y , (89) nach z entsteht, indem ich addiere:

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s}_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\quad \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\quad \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \mu_0 \left\{ \dot{\xi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\quad \right) + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\quad \right) \right\} \\ &\quad - \mu_0 \left\{ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} \left(\quad \right) + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \left(\quad \right) \right\} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (59), (60), (86) reduziert sich dies aber auf:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (91)$$

Für die mittlere Normalspannung p besteht also unter Voraussetzung der Inkompressibilität die Laplace'sche Differentialgleichung zu Recht. In vektorieller Schreibweise lautet diese:

$$\nabla^2 p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0. \quad (92)$$

d) Die speziellen Bewegungsgleichungen des Maxwell'schen Idealstoffes

Hier ist

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau}{\Lambda} = G \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad \text{III}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung in bezug auf τ liefert:

$$\tau = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \left(B + G \int \dot{\vartheta} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \right). \quad (93)$$

Dies kann auch geschrieben werden:

$$\tau = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \dot{\vartheta} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt. \quad (94)$$

Das Integral läßt sich auswerten, sobald die Funktion $\vartheta = f(t)$ bekannt ist. Seine untere Grenze t_0 hat dabei die Bedeutung einer Integrationskonstanten (wie B in (93)), die mit Hilfe der Anfangsbedingungen zu bestimmen ist. Mithin lassen sich die Spannungskomponenten in folgender Form schreiben:

$$\tau_{xy} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} \right) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (95)$$

$$\tau_{xz} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} \right) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (96)$$

$$\tau_{yz} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} \right) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (97)$$

$$\sigma_x = -p + 2G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (98)$$

$$\sigma_y = -p + 2G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (99)$$

$$\sigma_z = -p + 2G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (100)$$

Die Bewegungsgleichungen (64), (65), (66) lauten somit unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung (67):

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \nabla^2 \dot{\xi} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} \right) \quad (101)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \nabla^2 \dot{\eta} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \frac{\partial p}{\partial y} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} \right) \quad (102)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial t} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \nabla^2 \dot{\zeta} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \frac{\partial p}{\partial z} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) \quad (103)$$

oder in vektorieller Schreibweise:

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = G e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t \nabla^2 \mathbf{v} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \text{grad } p - \mu_0 \mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{v}. \quad (104)$$

Ferner gilt unverändert die Laplace'sche Differentialgleichung für den Druck

$$\nabla^2 p = \text{div grad } p = 0. \quad (105)$$

e) Die speziellen Bewegungsgleichungen des kombinierten Idealstoffes mit dynamischer Hysterisis und Relaxation

Nach V ist

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau}{\Lambda} = \frac{\partial}{\partial t} \left(G \mathcal{G} + k \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right).$$

Die Integration bezüglich τ ergibt:

$$\tau = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \left(B + \int (G \dot{\mathcal{G}} + k \ddot{\mathcal{G}}) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \right) \quad (106)$$

oder

$$\tau = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{t_0}^t (G \dot{\mathcal{G}} + k \ddot{\mathcal{G}}) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (107)$$

Mit (74), (75), (76) gilt also:

$$\tau_{xy} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \left(\frac{\partial \dot{\xi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\xi}_y}{\partial x} \right) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (108)$$

$$\tau_{xz} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \left(\frac{\partial \dot{\xi}_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\xi}_z}{\partial x} \right) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (109)$$

$$\tau_{yz} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \left(\frac{\partial \dot{\xi}_y}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\xi}_z}{\partial y} \right) e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (110)$$

$$\sigma_x = -p + 2e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \frac{\partial \dot{\xi}_x}{\partial x} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (111)$$

$$\sigma_y = -p + 2e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \frac{\partial \dot{\xi}_y}{\partial y} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (112)$$

$$\sigma_z = -p + 2e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \frac{\partial \dot{\xi}_z}{\partial z} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt \quad (113)$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \nabla^2 \dot{\xi}_x e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} \right) \quad (114)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial t} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \nabla^2 \dot{\xi}_y e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \frac{\partial p}{\partial y} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z} \right) \quad (115)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial t} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \nabla^2 \dot{\xi}_z e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \frac{\partial p}{\partial z} - \mu_0 \left(\dot{\xi} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right) \quad (116)$$

oder:

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e^{-\frac{t}{\Lambda}} \int_{i_0}^t \nabla^2 \dot{\xi} e^{\frac{t}{\Lambda}} dt - \mu_0 \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{grad} p \quad (117)$$

Wiederum gilt auch hier:

$$\nabla^2 p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0 \quad (105)$$

3. Der Voigt'sche Körper und seine Eignung als Steuermedium zur Bilderzeugung bei der AfiF-Großprojektion

Wie im Vorwort bereits erwähnt worden ist, enthält der Großprojektor als wichtigsten Bestandteil eine dünne, durchsichtige Schicht eines flüssigen oder festen Stoffes, die den Namen „Eidophor“ erhalten hat. Da sich aber die vorliegende Arbeit hauptsächlich mit dem Problem des festen Eidophors befaßt, so ist es naheliegend, zunächst die Gründe darzulegen, welche bei der AfiF-Großprojektion zur Verwendung des festen Eidophors anstelle des flüssigen führen. Sofern hierbei die theoretischen Grundlagen des neuen Verfahrens der Fernseh-Großprojektion zur Diskussion stehen, so verweise ich auf die in mehreren Mitteilungen erschienenen Abhandlungen von *F. Fischer* und *H. Thiemann* (Lit. 1—4).

Aus ihnen geht mit aller Deutlichkeit hervor, daß die Schwierigkeiten bei der Verwendung eines flüssigen Eidophors in zwei Hauptgruppen zerfallen. Die eine Gruppe umfaßt das Stabilitätsproblem beim Bilderzeugungsvorgang, während die andere die Eidophorflüssigkeit selbst betrifft, d. h. ihre chemische und physikalische Beschaffenheit.

Was nun zunächst die Maßnahmen anbelangt, die zur Aufrechterhaltung einer genügenden Stabilität ergriffen werden müssen, so bestehen diese in erster Linie in der Einhaltung ganz bestimmter Betriebszustände, die auf rechnerischem Wege für verschiedene Betriebsfeldstärken E_1 , E_2 und verschiedene mechanische und elektrische Flüssigkeitskonstanten ermittelt und in einem sogenannten „Flüssigkeitsatlas“ zusammengestellt worden sind (Lit. 2).

Damit ist es aber noch nicht getan; denn um die Entstehung extrem langperiodiger und deshalb für die Stabilität gefährlicher Störungen zu verhindern, muß noch eine ganze Reihe Vorkehrungen mechanischer und elektrischer Natur getroffen werden. Dazu gehört die Einführung einer gleichmäßig rotierenden Eidophorunterlage, wodurch der zur Bilderzeugung benützte Teil des Eidophors ständig erneuert wird, und ferner der Rakelprozeß zur Erzielung einer optisch ebenen Flüssigkeitsoberfläche. Was an-

dererseits die elektrischen Gegenmaßnahmen betrifft, so wird zu einer speziellen Aufzeichnungsart des Ladungsbildes vermittelt des Kathodenstrahls, der sogenannten „Pilgerschrittaufzeichnung“ gegriffen, und schließlich wird die unumgänglich notwendige homogene Verteilung der Vorstromelektronen vermittelt eines sogenannten elektronenoptischen Telesystems sichergestellt.

Der eingangs erwähnten zweiten Gruppe von Schwierigkeiten wird man sich am besten bewußt, wenn man die Anforderungen bedenkt, die an den flüssigen Eidophor allein schon hinsichtlich seiner elektrischen, optischen und mechanischen Daten gestellt werden, als da sind: elektrische Leitfähigkeit, Dielektrizitätskonstante, Brechungsindex, Lichtabsorptionsvermögen, Viskosität und Oberflächenspannung. Dazu kommen dann noch die keineswegs leicht zu nehmenden Komplikationen, welche unter der Einwirkung des Elektronenbombardements entstehen. Diese äußern sich in chemischen Erscheinungen in der Gestalt sogenannter „thixiotroper Koagulate“. Hierbei handelt es sich um momentane Molekülzusammenballungen, die zwar nur begrenzte Lebensdauer haben, aber doch zu außerordentlich störenden Aufhellungen des Dunkelfeldes Anlaß geben.

Nachdem so über den flüssigen Eidophor eigentlich nur Nachteiliges ausgesagt worden ist, möchte ich nun auch zwei nicht unwichtige Vorteile erwähnen. Diese bestehen einmal in der physikalischen Gegebenheit der stets selbsttätig vor sich gehenden Ausebnung der Flüssigkeitsoberfläche, und dann — wie theoretische Untersuchungen ergeben haben (Lit. 3, No. 1, 1942) — in der, gegenüber dem festen Eidophor, besseren Wiedergabe der Schwarz-Weiß-Kante des Fernsehbildes.

Wesentlich anders und zum Teil sogar ausgesprochen günstig liegen nun die Verhältnisse beim festen Eidophor. Vor allem die leichtere Realisierbarkeit einer ausreichenden Stabilität steht hier als ausschlaggebender Vorteil im Vordergrund. Nach den Ergebnissen der allgemeinen Theorie des Eidophors endlicher Schichtdicke (Lit. 3, No. 11, 12, 1941) liegt diese Eigenschaft des festen Eidophors darin begründet, daß bei ihm die Rückstellkräfte nicht mehr ausschließlich durch die Oberflächenspannung bewirkt werden, sondern in überwiegendem Maße durch die

elastischen Kräfte. Dadurch wird der zeitliche Ablauf von Oberflächendeformationen praktisch unabhängig von der relativen Kreisfrequenz r , sodaß die Empfindlichkeit gegenüber Störungen großer örtlicher Periode in gleichem Ausmaß sinkt.

Trotzdem können auch beim festen Eidophor noch Instabilitäten entstehen, doch sind diese jetzt ausschließlich vom gewählten Betriebszustand abhängig. Voraussetzung für die sichere Vermeidung von Instabilitäten ist somit auch hier die Auffindung des sog. „Stabilitätsbereiches“, und zwar auf rechnerischem Wege. Dies gelingt jedoch nur dann, wenn außer den Feldstärken E_1, E_2 auch die elektrischen durch q_e gekennzeichneten, und vor allem die mechanischen, durch q_m gekennzeichneten Daten des festen Eidophors bekannt sind.

Wenn aber eine geeignete Substanz gefunden wird, welche dem in der Theorie vorausgesetzten idealen festen Eidophor hinlänglich entspricht, und wenn es ferner gelingt, deren mechanische Daten zuverlässig zu bestimmen, so wäre die Voraussetzung erfüllt für einen wesentlich einfacheren konstruktiven Aufbau des Großprojektors. Es liegt ja auf der Hand, daß in diesem Fall das Rakel, mitsamt der rotierenden Eidophorunterlage, sowie alle Einrichtungen, die der Erneuerung und Entgasung des flüssigen Eidophors dienen, weggelassen werden könnten.

Freilich bleibt auch dann noch die Frage offen, ob der feste Eidophor sich den Einwirkungen des dauernden Elektronenbombardements besser gewachsen zeigen würde als das bisher verwendete Mineralöl, welches zudem durch den Erneuerungsprozeß nur eine kurze „Benutzungsdauer“ aufweist. Auch das Problem der Herstellbarkeit einer optisch ebenen Oberfläche bei festen quasi-elastischen Körpern erscheint noch recht wenig abgeklärt.

Wie dem auch sei, eines steht jedenfalls bereits fest, daß nämlich bei der AfiF-Fernseh-Großprojektion die Aussichten für die praktische Verwendbarkeit des festen Eidophors anstelle des flüssigen mindestens so günstig sind, daß eine genauere Untersuchung der fraglichen Probleme sich lohnt. Im Vordergrund steht hierbei natürlich die Untersuchung gewisser mechanischer Eigenschaften, die der feste Eidophor aufweisen muß, wenn die

Bilderzeugung und Bildspeicherung in ähnlicher Weise wie beim flüssigen Eidophor erfolgen soll.

So müssen z. B. die in Betracht kommenden Substanzen imstande sein, elastische Spannungen aufzunehmen und müssen außerdem eine große innere Reibung im Sinne einer Flüssigkeitsreibung besitzen. Neben der Inkompressibilität wird ferner vorausgesetzt, daß die Größenordnung dieser elastischen und Reibungskräfte derart sei, daß ihnen gegenüber die Massenkräfte und die Oberflächenspannung vernachlässigt werden dürfen; und schließlich fordert die ohnehin schon reichlich komplizierte Theorie der Bilderzeugung einen möglichst einfachen Ansatz zur analytischen Beschreibung der vorstehend erwähnten Eigenschaften.

Es ist nun ohne weiteres verständlich, daß gerade die letztgenannte Forderung nur durch Ausdrücke von der Art der Bewegungsgleichungen I—V der in Kap. 1 besprochenen fünf verschiedenen Idealstoffe befriedigt werden kann. Sinngemäß fällt dabei die Wahl auf den speziellen Idealstoff IV, und nicht auf den allgemeineren Idealstoff V; denn nicht nur ermöglicht der Voigt'sche Körper bereits die qualitativ richtige Darstellung des Vorgangs der Bilderzeugung, sondern er schließt auch in übersichtlicher Weise die beiden Sonderfälle des rein flüssigen und des rein elastischen Eidophors mit ein. Freilich werden damit die plastischen Erscheinungen (Relaxation, elastische Nachwirkung) von vorneherein vernachlässigt. Inwieweit dies durch die besonderen Verhältnisse gerechtfertigt erscheint, darüber wird eine Betrachtung des zeitlichen Verlaufs der beim Bilderzeugungsvorgang an der Eidophoroberfläche wirksamen veränderlichen elektrostatischen Kräfte und der durch sie hervorgebrachten Deformationen Aufschluß geben.

Im zweidimensionalen Fall lautet der Voigt'sche Ansatz gemäß

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \{G\xi + k\xi\} + \frac{\partial}{\partial x} \{G\eta + k\eta\}. \quad (68)$$

Dabei wird der zeitliche und örtliche Verlauf der Komponenten ξ und η der Deformation bei örtlich sinusförmiger Ladungsver-

teilung der Periode $x = \frac{2\pi}{\lambda}$ im nichtstationären Fall der Bilderzeugung beschrieben durch die weiteren Ansätze:

$$\begin{aligned}\xi &= -\bar{\xi} e^{-\varrho t + j\lambda x} \\ \eta &= \bar{\eta} e^{-\varrho t + j\lambda x}\end{aligned}$$

Somit läßt sich auch der mit der örtlichen Aufhellung in Zusammenhang stehende Deformationswinkel der Eidophoro-oberfläche ($y=0$) ausdrücken:

$$\check{\vartheta} = \eta'_{y=0} = j\lambda \bar{\eta}_{y=0} e^{-\varrho t + j\lambda x} = j\check{\vartheta} e^{-\varrho t + j\lambda x}.$$

In allen diesen Ansätzen bedeutet ϱ stets den charakteristischen Exponenten, der aus den drei Wurzeln w_1, w_2, w_3 der sogenannten „charakteristischen Gleichung“ ermittelt wird. Beim Problem der Bilderzeugung ist nun die Ladungsverteilung s , oder genauer die Größe \check{s}_0 , d. h. der zeitliche Anfangswert der örtlichen Amplitude des örtlich und zeitlich veränderlichen Anteils von s vorgegeben. Unter diesen Umständen liefert die Rechnung für den Zusammenhang zwischen der entstehenden örtlichen Amplitude des Deformationswinkels $\check{\vartheta}$, der bezogenen Ladungsverteilung \check{s}_0^* und den Wurzeln der charakteristischen Gleichung folgenden für $t^* = 0$ verschwindenden Ausdruck:

$$\check{\vartheta} = \frac{-w_1(w_2 - w_3)e^{-(w_1+1-\gamma)t^*} - w_2(w_3 - w_1)e^{-(w_2+1-\gamma)t^*} - \dots}{w_1^2(w_2 - w_3) + w_2^2(w_3 - w_1) + w_3^2(w_1 - w_2)} \Theta \check{s}_0^*. \quad (118)$$

Dem gegenüber ist der zeitliche Verlauf der örtlichen Amplitude der bezogenen Tangentialkomponente \check{k}_T^* bzw. der bezogenen Normalkomponente \check{k}_N^* durch folgende beiden Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}k_T^* &= -\frac{\delta E_1^*}{\delta + 1} \left\{ \frac{w_1^2(w_2 - w_3)e^{-(w_1+1-\gamma)t^*} + \dots}{w_1^2(w_2 - w_3) + w_2^2(w_3 - w_1) + w_3^2(w_1 - w_2)} \right\} \check{s}_0^* \\ &\quad - \delta E_1^{*2} \Theta \left\{ \frac{w_1(w_2 - w_3)e^{-(w_1+1-\gamma)t^*} + \dots}{w_1^2(w_2 - w_3) + w_2^2(w_3 - w_1) + w_3^2(w_1 - w_2)} \right\} \check{s}_0^* \quad (119)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_N^* &= \frac{\delta E_1^*}{\delta + 1} \left\{ \frac{w_1^2(w_2 - w_3)e^{-(w_1+1-\gamma)t^*} + \dots}{w_1^2(w_2 - w_3) + w_2^2(w_3 - w_1) + w_3^2(w_1 - w_2)} \right\} \check{s}_0^* \\ &\quad + \frac{\delta E_1^{*2}}{\delta + 1} \Theta \left\{ \frac{w_1(w_2 - w_3)e^{-(w_1+1-\gamma)t^*} + \dots}{w_1^2(w_2 - w_3) + w_2^2(w_3 - w_1) + w_3^2(w_1 - w_2)} \right\} \check{s}_0^*. \quad (120)\end{aligned}$$

Da nun insbesondere die Verhältnisse für kleine oder verschwindende Feldstärke E_2^* technisch interessant sind, so wurden die vorstehenden Gleichungen (118), (119), (120) auf Grund folgender Annahmen ausgewertet:

$$E_2^* = 0, \quad E_1^* = 0,1, \quad \delta = 3, \quad q_c = 0,985,$$

und die so erhaltenen Kurven in Abb. 6 a, b aufgezeichnet. Aus ihnen ist zunächst ersichtlich, daß die elektrostatischen Kräfte

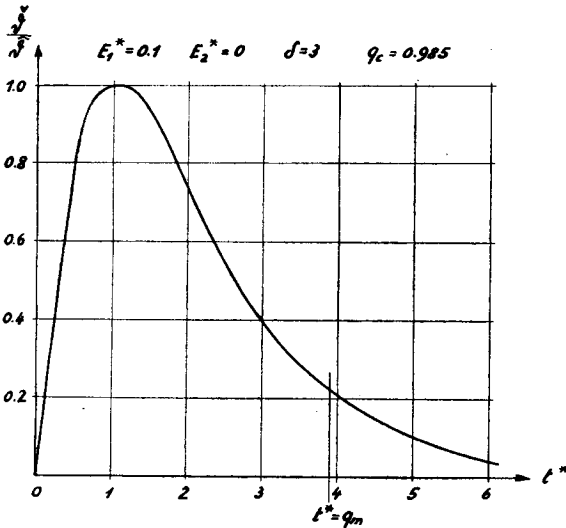


Abb. 6a. Zeitlicher Verlauf des Deformationswinkels $\check{\delta}$ für $w_1 = -0.1155$,
 $w_2 = -0.0149$, $w_3 = 0.1304$.

zur bezogenen Zeit $t^* = 1$, wo die Deformation $\check{\delta}$ ihr Maximum $\check{\delta}$ erreicht, bereits stark abgeklungen sind. Obschon zwar der zeitliche Verlauf der elektrostatischen Kräfte seinerseits vom Deformationsverlauf an der Eidophoroberfläche beeinflusst wird, jener aber schon unter der Voraussetzung bestimmter Hypothesen über die mechanische Beschaffenheit des festen Eidophors berechnet worden ist, so dürften dennoch besagte Kräfte in überwiegendem Maße von den elektrischen Daten abhängig sein.

Was nun den Einfluß allfälliger plastischer Erscheinungen auf den zeitlichen Verlauf des Deformationswinkels anbelangt, so kann darüber jetzt an Hand von Abb. 6 a, b folgendes ausgesagt werden:

Eine Relaxation der inneren Spannungen im Eidophor ist nur möglich während der relativ kurzen Zeitdauer des Deformationsanstiegs, also für $t^* \leq 1$. Da aber gerade in diesem Zeitintervall die äußeren mechanischen Kräfte stark abnehmen, so

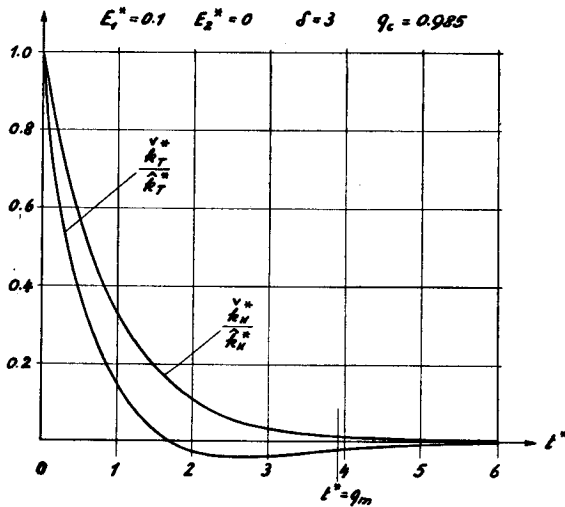


Abb. 6b. Zeitlicher Verlauf der bezogenen Tangentialkomponente $\frac{\gamma^*}{k_T^*}$, bzw. des bezogenen örtlich und zeitlich veränderlichen Anteils der Normalkomponente $\frac{\gamma^*}{k_N^*}$ der elektrostatischen Kraft.

wird eine solche Relaxation überhaupt nur dann voll zur Auswirkung kommen, wenn die Relaxationszeiten der hier maßgebenden Mikro-Brown'schen Bewegung $\Lambda_i \leq \frac{T}{q_m}$ sind ($\frac{T}{q_m}$ entspricht dabei $t^* = 1$). Aber selbst in diesem Fall würde sich ihr Einfluß lediglich auf den erreichten zeitlichen und örtlichen Ma-

ximalwert ϑ des Deformationswinkels erstrecken, würde also an und für sich belanglos sein.

Andererseits steht zu erwarten, daß der zur Zeit $t^* \geq 1$ beginnende Abfall des Deformationswinkels von elastischen Nachwirkungserscheinungen überlagert sein wird, sofern umgekehrt die vorkommenden Relaxationszeiten $A_i \geq \frac{T}{q_m}$ sind. Dies wiederum würde aber voraussetzen, daß der zeitliche und örtliche Maximalwert des Deformationswinkels vorher die Fließgrenze überschritten haben würde, sodaß für die zugehörige Gruppe von Relaxationszeiten im wesentlichen die Makro-Brown'sche Bewegung in Frage käme.

Praktisch allerdings dürfte dieser Fall kaum eintreten, denn im normalen Betriebszustand des Eidophors bleiben die Deformationen stets so klein, daß irgendwelche Nachwirkungsvorgänge, die eine merkliche Verzögerung des Abklingens von $\check{\vartheta}/\hat{\vartheta}$ für $t^* > 1$ und damit eine Verlängerung des sogenannten „Nachleuchtens“ μ zur Folge haben könnten, überhaupt ausgeschlossen sein sollten. Auf die Anwendung der Gleichung V (Kap. 1e) kann also füglich verzichtet werden, sodaß die Wahl des Voigt'schen Idealstoffes IV auch von dieser Seite her als gerechtfertigt erscheint.

Was schließlich den zeitlichen Verlauf von $\check{\vartheta}/\hat{\vartheta}$ selbst anbetrifft, so ist dieser bestimmten Anforderungen hinsichtlich des soeben erwähnten Nachleuchtens μ und des „Lichtwirkungsgrades“ ν^{**} unterworfen, welche ihrerseits im Zusammenhang stehen mit der Vorführungszeit T des Fernsehbildes. Die genannten drei Faktoren zusammen mit dem zulässigen Strahlstrom bestimmen dann zunächst die mechanische Kenngröße q_m und weiter die mechanischen Konstanten G und k des festen Eidophors.

Wenn beispielsweise ein Höchstwert des Nachleuchtens von $\mu = 0.1$ als zulässig erachtet wird, so ergibt sich ein Lichtausnutzungsfaktor von $\nu^{**} = 0.63$ und mit $T = 0.04$ ein $q_m = 3.9$. Daraus folgt weiter bei einem durch den Strahlstrom vorgegebenen Schubmodul von $G = 0.06 \text{ kg cm}^{-2}$ der Koeffizient der inneren Reibung zu $k = 6.7 \cdot 10^{-4} \text{ kg cm}^{-2} \text{ s}$.

4. Formulierung des Problems

Nach den Ausführungen des vorhergehenden Kapitels läßt sich nun das Problem, welches in der vorliegenden Arbeit gelöst werden soll, folgendermaßen umschreiben:

1. Die Konstanten G und k des festen Eidophors sind, ausgehend von der Theorie des Voigt'schen Idealstoffes, durch ein geeignetes Meßverfahren im Frequenzbereich der Bildwechselzahl (25 Hz) zu bestimmen. Die Versuchsbedingungen sind dabei so zu wählen, daß sowohl der zeitliche Verlauf als auch die Amplitude der Deformation denjenigen Anforderungen angepaßt sind, denen die Substanz im normalen Betrieb als Eidophor unterworfen ist.

2. Die Temperaturabhängigkeit der Konstanten G und k ist zu untersuchen.

3. Anhand der gemessenen allfälligen Frequenz- und Amplitudenabhängigkeiten von G und k ist zu prüfen, inwieweit das wirkliche Verhalten der in Frage stehenden Substanz den Erwartungen entspricht, welche an die Theorie des Voigt'schen Idealstoffes geknüpft sind.

II. Die Versuchseinrichtung

5. Beschreibung und Wirkungsweise

Die Versuchsanordnung, welche von mir auf Grund eines Vorschlages von Herrn Prof. Dr. *F. Fischer* konstruiert wurde, erinnert in ihren Grundzügen an die seinerzeit von *E. Madelung* und *S. Flügge* verwendete (Lit. 16). Sie erfüllt die in Kap. 4 aufgestellten Forderungen in folgender Weise:

1. Die zu untersuchenden Substanzen werden einer stationären sinusförmigen Deformation unterworfen. Dabei ist die Art der Deformation so gewählt worden, daß im Versuchsobjekt ein einachsiger Spannungszustand entsteht, und zwar derjenige der einachsigen Scherung mit einer reinen Schubspannung.

2. Die Frequenz der erzwungenen Bewegung ist im Bereich von ca. 10—55 Hz, die Amplitude ξ_0 im Bereich von ca. $5 \cdot 10^{-4}$ bis 10^{-2} cm kontinuierlich regelbar (prakt. verwertbarer Regelbereich).

3. Mit Hilfe eines Thermostaten läßt sich die Temperatur des Versuchsobjektes in den Grenzen 10—100° C beliebig einstellen.

4. Schließlich ist zur Bestimmung des Schubmoduls G und des Koeffizienten der inneren Reibung k der zu untersuchenden Substanz aus den mechanischen Daten der periodischen Bewegung ein besonderes Meßverfahren auf rein elektrischer Grundlage entwickelt worden.

Die grundsätzliche Funktionsweise der Apparatur geht aus Abb. 7 hervor. Zwei schwingungsfähige Systeme werden vermittelt einer dünnen Schicht S , bestehend aus der zu untersuchenden Materialprobe, miteinander mechanisch gekoppelt. Das erste System, genannt „Führungssystem“, wird auf mechanischem Wege zu stationärer sinusförmiger Bewegung erregt. Es besitzt die Masse M_0 und ist zur Erzielung einer tiefliegenden Eigenfrequenz

an drei Drähten der Länge l_0 in einer Ebene E aufgehängt. Die Amplitude seiner Auslenkung sei mit ξ_0 bezeichnet. Das zweite System, genannt „Meßsystem“, enthält die Versuchssubstanz mit der zu messenden unbekanntem Federkonstanten λ_1 und der Dämpfungskonstanten k_1 in Form einer dünnen, flächenhaft ausgebrei-

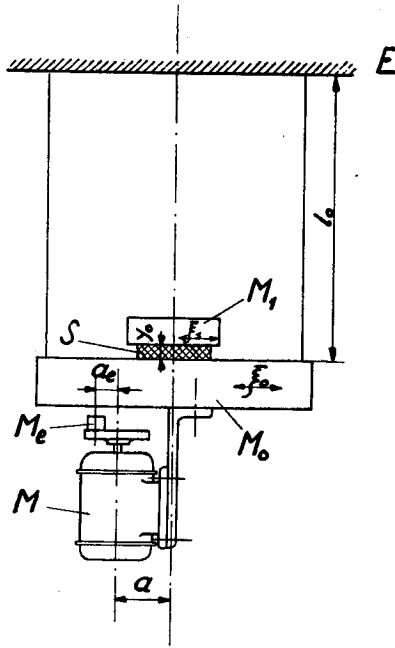


Abb. 7. Grundsätzlicher Aufbau des Führungs- und Meßsystems.

teten Schicht der Dicke y_0 und der Fläche F . Diese Schicht trägt auf ihrer Oberfläche eine zweite Masse M_1 , die im Betrieb eine Auslenkung von der Amplitude ξ_1 erfährt. Zur Erzeugung sinusförmiger Bewegungen erfolgt die Anregung des Führungssystems in einem Getriebe vermittelt einer besonderen Anordnung von rotierenden Scheiben und Exzentermassen. Es gelingt so, einerseits die entstehende Schwingung auf nur eine einzige Koordinatenrichtung zu beschränken, und andererseits eine bequeme Regelbarkeit der resultierenden Amplitude zu erreichen. Das Prinzip des Antriebssystems zeigt Abb. 8.

Je ein Synchronmotor SM_I und SM_{II} mit je zwei durch Zahnräder miteinander gekoppelten Exzentermassen M_e und der Exzentrizität a_e , bilden jeweils eine Antriebseinheit. Die gegenseitige Phasenlage der beiden Exzentermassen jeder der beiden Antriebseinheiten I und II ist dabei so gewählt, daß alle Kompo-

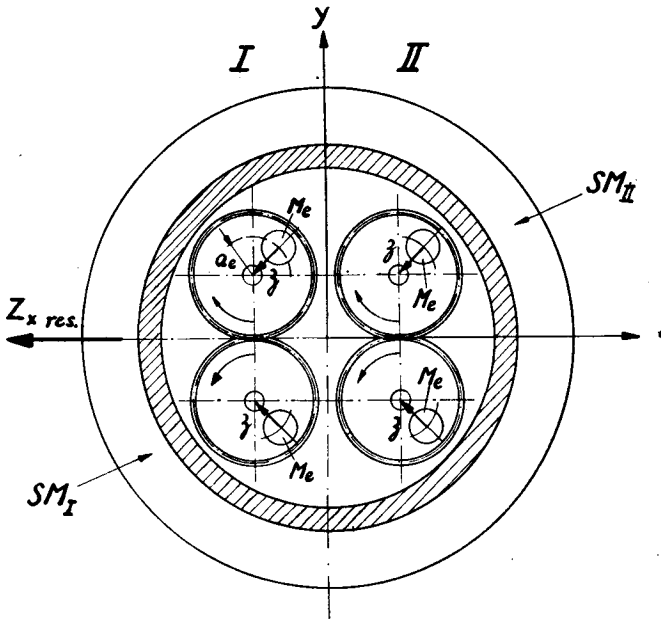


Abb. 8. Grundsätzlicher Aufbau des Antriebssystems. (Die gezeichnete Lage der vier Exzentermassen M_e der beiden Systeme I und II entspricht einer Phasenverschiebung Null zwischen SM_I und SM_{II} .)

nenten Z_y der Zentripedalkräfte in der Koordinatenrichtung y sich in jedem Zeitpunkt aufheben, sodaß nur die vier Komponenten Z_x in Richtung der Koordinate x übrig bleiben. Die Änderung der gegenseitigen Phasenlage der zu I bzw. II gehörenden Exzentermassen hat deshalb zur Folge, daß die Komponenten Z_{xI} und Z_{xII} der Zentripedalkräfte sich entweder addieren oder subtrahieren. Damit ist aber gleichzeitig eine Amplitudenänderung der Pendelschwingung des Führungssystems verbunden.

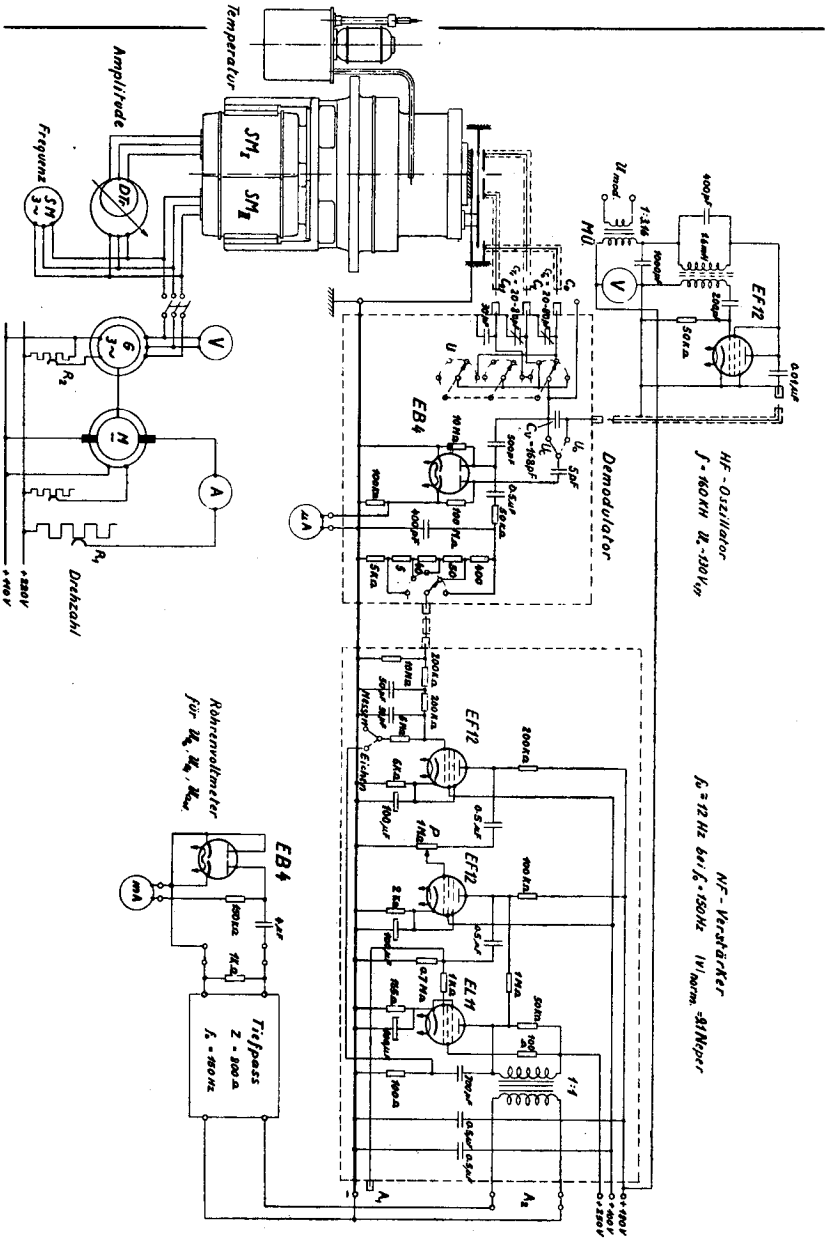


Abb. 9. Vollständiges Schaltschema des elektrischen Teils der Versuchseinrichtung.

Die Phasenverschiebung selbst wird zweckmäßig auf elektrischem Wege vorgenommen, und zwar durch Verdrehen der gegenseitigen Phasenlage der Klemmenspannungen der beiden Synchronmotoren mit Hilfe des Drehtransformators *DTr.* Auf diese Weise wird eine kontinuierliche Amplitudenänderung erzielt.

In der Abb. 9 links ist die Schaltung der zum Betriebe der Synchronmotoren mit variabler Frequenz benützten Maschinen-
gruppe dargestellt. Bei der mit *SM* bezeichneten Maschine handelt es sich um einen dritten leerlaufenden Synchronmotor, dessen Drehzahl zur tachometrischen Bestimmung der Frequenz dient.

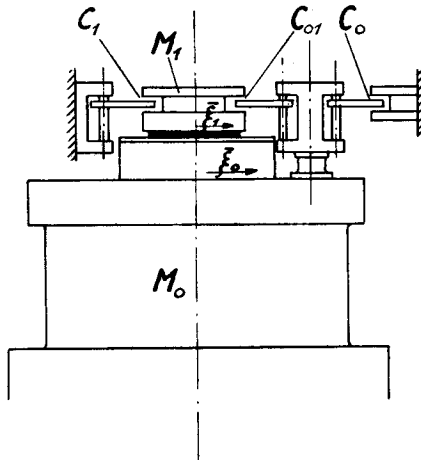


Abb. 10. Zur Erklärung der Wirkungsweise eines Systems von linearen kapazitiven Gebern.

Was die Messung der Amplituden ξ_0 und ξ_1 des Führungs- und Meßsystems anbelangt, so geschieht diese auf folgende Weise:

Die Kondensatoren C_0, C_1, C_{01} (Abb. 10) bilden ein System von linearen kapazitiven Gebern mit der Eigenschaft, daß in Parallelschaltung die Summe der Kapazitätsänderungen stets verschwindet. Es gilt also:

$$\Delta c_0 + \Delta c_1 + \Delta c_{01} = 0$$

oder

$$\sum \Delta c_v = 0 \quad (1)$$

In Momentanwerten ausgedrückt, bestehen ferner zwischen den Kapazitätsänderungen Δc_v , den Verschiebungsamplituden $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_1$, den Empfindlichkeiten $\left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_v$ und dem Phasenwinkel φ folgende Beziehungen:

$$\Delta c_0 = \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_0 \bar{\xi}_0 e^{j\omega t} \quad (2)$$

$$\Delta c_1 = - \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_1 \bar{\xi}_1 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (3)$$

$$\Delta c_{01} = \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_{01} (\bar{\xi}_1 e^{j(\omega t - \varphi)} - \bar{\xi}_0 e^{j\omega t}) . \quad (4)$$

(Die Vorzeichen gelten für die in Abb. 10 gezeichnete momentane Richtung von $\bar{\xi}_0$ und $\bar{\xi}_1$.)

Wenn also die $\Delta \mathcal{C}_v$ die jeweiligen Vektoren der Kapazitätsänderungen bezeichnen, so sind deren Amplituden durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$|\Delta \mathcal{C}_0| = \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_0 \bar{\xi}_0 \quad (5)$$

$$|\Delta \mathcal{C}_1| = \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_1 \bar{\xi}_1 \quad (6)$$

$$|\Delta \mathcal{C}_{01}| = \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_{01} \sqrt{\bar{\xi}_0^2 + \bar{\xi}_1^2 - 2\bar{\xi}_0\bar{\xi}_1 \cos \varphi} . \quad (7)$$

Werden nun diese Kapazitätsänderungen in entsprechende Spannungsvektoren vom Effektivwert u_v überführt, so läßt sich unter gewissen Voraussetzungen (vergl. Kap. 10) erreichen, daß auch stets

$$\Sigma u_v = 0 \quad (8)$$

und daß ferner für $\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_0} = 1$

$$\frac{|u_1|}{|u_0|} = 1 \quad (9)$$

wird. Gemäß Abb. 11 ergibt sich dann ohne vorherige Eichung, d. h. nur aus der Messung der drei Spannungen u_0 , u_1 , u_{01} der

Phasenwinkel φ zwischen den Vektoren ξ_0, ξ_1 , bzw. zwischen u_0, u_1 aus

$$\cos \varphi = \frac{u_0^2 + u_1^2 - u_{01}^2}{2 u_0 u_1}, \quad (10)$$

während das Amplitudenverhältnis

$$x^* = \frac{\sigma_1^c}{\sigma_0^c}$$

durch

$$x^* = \frac{u_1}{u_0} \quad (11)$$

bestimmt ist.

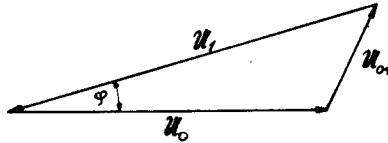


Abb. 11. Vektordiagramm zur Bestimmung des Phasenwinkels φ .

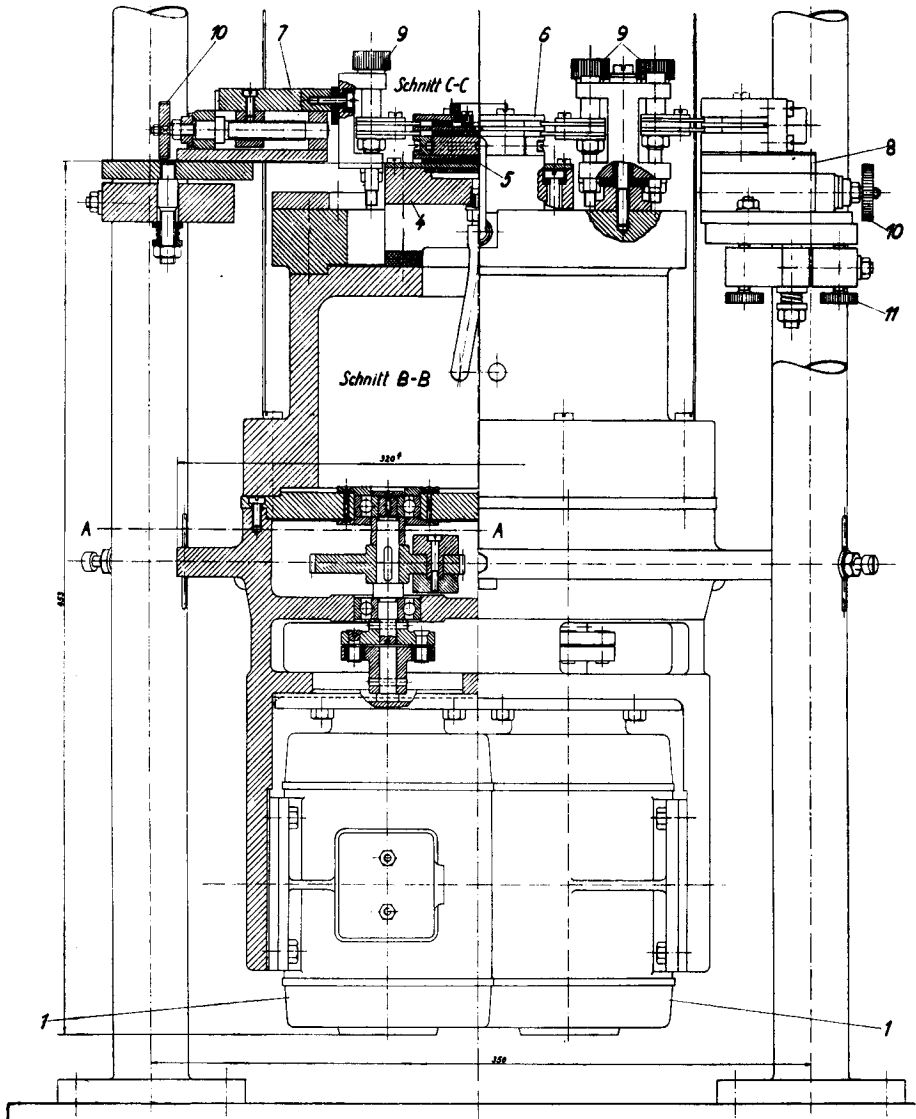
Als Modulationsschaltung zur Überführung der Kapazitätsänderungen Δc_v in proportionale Wechselspannungen wird die *HF*-Schaltung nach *R. v. Radinger* (Lit. 18) benutzt. (Vergl. Abb. 22.) Wie aus dem Schaltbild weiter hervorgeht, erfolgt die Demodulation der so gewonnenen Amplituden-modulierten *HF* in der Diode *EB 4*, worauf die demodulierte *NF*-Spannung vom Effektivwert u_v nach Aussiebung der *HF*-Komponente in einem zweistufigen *NF*-Verstärker verstärkt und schließlich mit Hilfe eines Diodenvoltmeters gemessen wird. Zwischen *NF*-Verstärker und Diodenvoltmeter ist noch ein Tiefpaßfilter mit der Grenzfrequenz $f_0 = 150$ Hz eingeschaltet, das wegen seines kleinen Wellenwiderstandes (800Ω) mittelst einer besonderen Anpassungsstufe (*EL 11* mit Ausgangsübertrager) an die Vorstufen angekoppelt werden muß. Der Zweck des soeben erwähnten Filters besteht in der Beseitigung des frequenzvariablen Gehaltes an höheren Harmonischen der *NF*-Spannungen u_0, u_1, u_{01} , die als Folge der mechanischen Unvollkommenheiten des Schütteltischgetriebes entstehen und eine genaue Messung der allein maßgebenden Grundharmonischen überhaupt ausschließen würde.

Alle weiteren, insbesondere konstruktiven Einzelheiten des eigentlichen Führungssystems oder „Schütteltisches“ sind aus der Konstruktionszeichnung (Abb. 12) und den Photographien der Versuchseinrichtung (Abb. 13, 14) ersichtlich. Es sei lediglich noch auf die Vorkehrungen hingewiesen, die zur Temperaturregulierung getroffen worden sind. Damit in der Versuchsschicht eine möglichst gleichmäßige Temperaturverteilung gewährleistet ist, wird nämlich nicht nur der mit dem Schütteltisch fest verbundene, wärmeisoliert aufgestellte Schichtträger ST , sondern auch die auf der Versuchsschicht selbst befindliche Masse M_1 mit Hilfe eines Thermostaten auf der jeweils eingestellten Temperatur gehalten.

6. Zusammenstellung der wichtigsten mechanischen und elektrischen Konstruktionsdaten

Gewicht des Schütteltisches ohne M_1	$G_0 = 61,2 \text{ kg}$
Masse des Schütteltisches ohne M_1	$M_0 = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^2$
Gewicht von M_1	$G_1 = 0,5297 \text{ bzw. } 1,045 \text{ kg}$
Masse von M_1	$M_1 = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ bzw. } 1,065 \cdot 10^{-3} \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^2$
Pendellänge des Führungssystems	$l_0 = 166 \text{ cm}$
Eigenfrequenz des Führungssystems	$f_0 = \frac{v_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_0}{M_0}} = 0,388 \text{ s}^{-1}$
Exzentergewicht total	$G_e = 4 \cdot 0,077 = 0,308 \text{ kg}$
Exzentermasse total	$M_e = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^2$
Exzentrizität	$a_e = 2,5 \text{ cm}$
Maximal zulässige Tourenzahl	$n_{max} = 3600 \text{ min}^{-1}$
Maximale Frequenz	$f_{max} = 60 \text{ s}^{-1}$
Maximale Amplitude des Schütteltisches	$\bar{\xi}_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\xi}_0 = \frac{G_e}{G_0} a_e = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
Empfindlichkeit der kapazitiven Geber (gemessen)	$\left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_v \approx 20 \text{ pF} \cdot \text{cm}^{-1}$
Grundkapazität der kapazitiven Geber (gemessen)	$C_v = \approx 42 \text{ pF}$
HF-Amplitude bei $U_A = 180 \text{ V}$	$U_{h0} = 190 \text{ V}_{SW}$

Aufriß



Grundriß

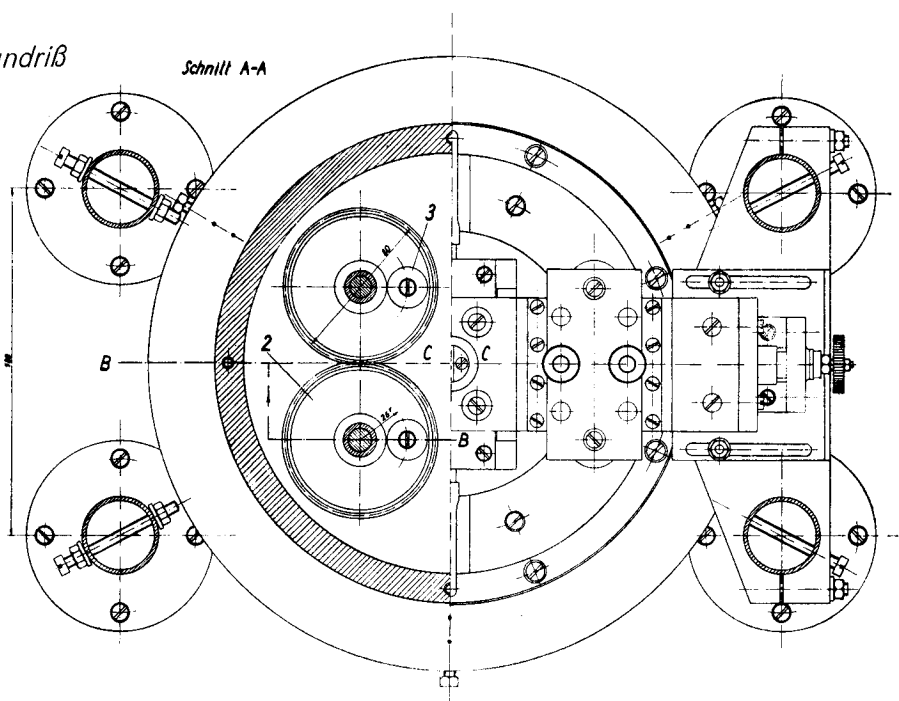


Abb. 12. Schütteltisch und kapazitive Geber in Betriebsstellung.

- | | | |
|------------------------|---|-----------------------------|
| 1 Synchronmotoren. | 5 Schicht S | 8 Support für C_0 |
| 2 Zahnräder. | 6 Masse M_1 | 9 Senkrecht-Stellschrauben |
| 3 Exzentermassen M_e | 7 Support für den festen
Plattensatz von C_1 | 10 Waagrecht-Stellschrauben |
| 4 Schichtträger S_T | | 11 Schräg-Stellschrauben |

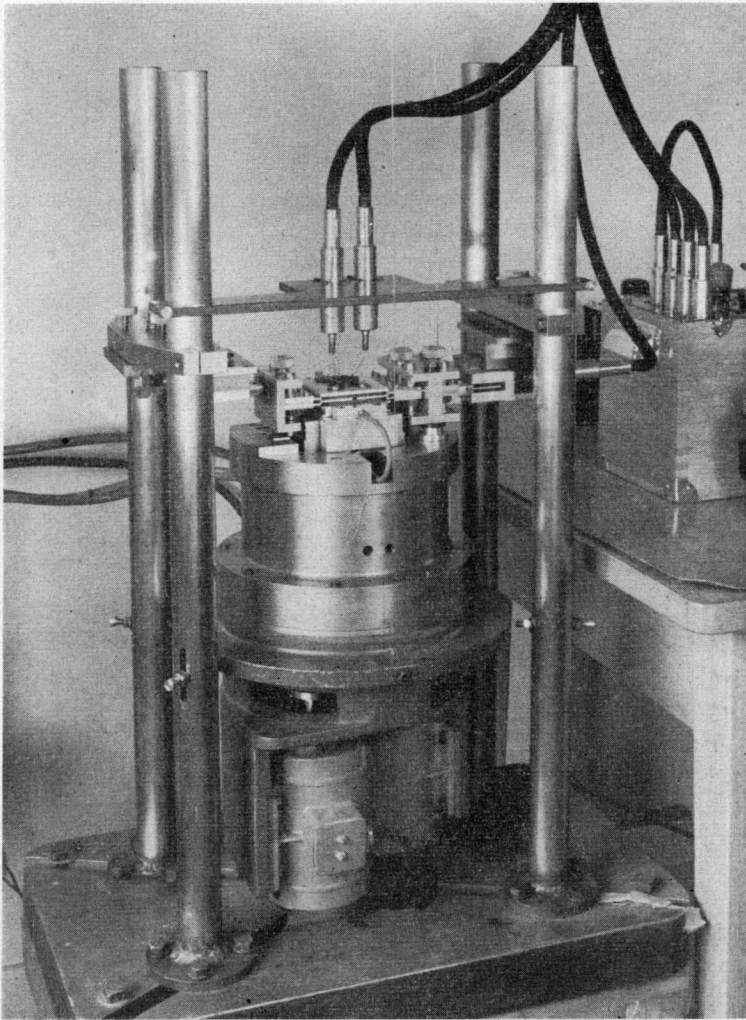


Abb. 13. Ansicht des Schütteltisches. (Man erkennt die beweglichen Zuleitungen zu den Gebern C_1 und C_{01}).

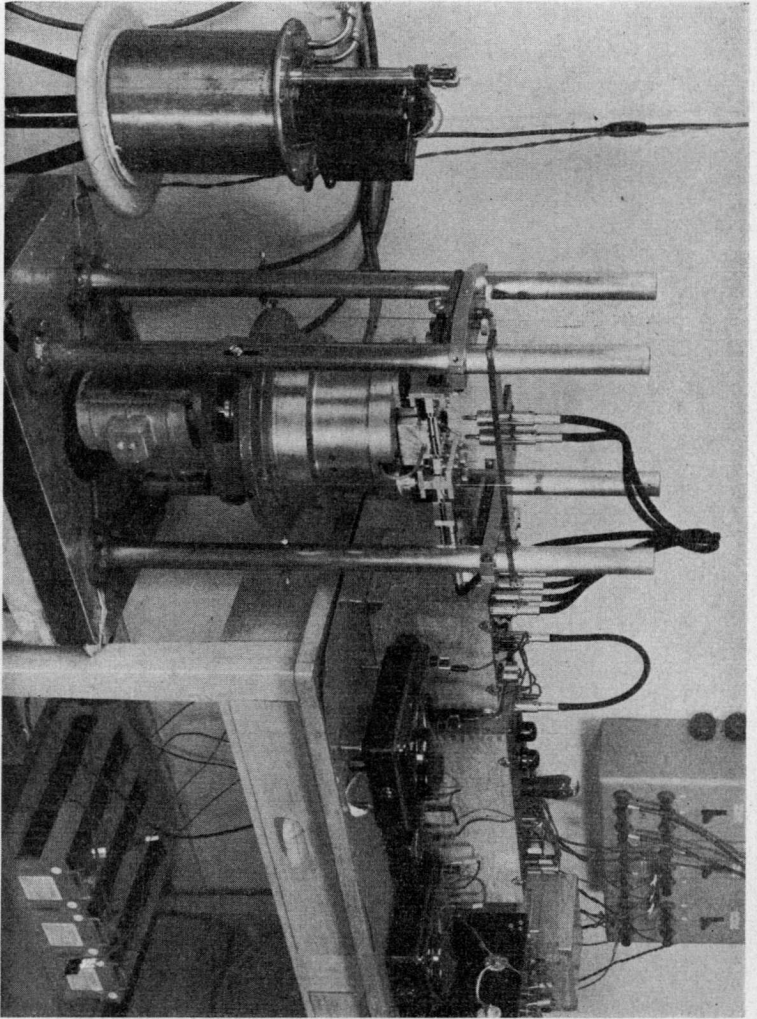


Abb. 14. Gesamtansicht der Versuchseinrichtung. (Links neben dem Schütteltisch der Thermostat, rechts auf dem Tisch: Modulator und Demodulator mit S. u. H.-Lichtzeiger-Galvanometer, daneben NF-Verstärker und Tiefpaß mit dem Anzeigegerät des Röhrenvoltmeters. Unter dem Tisch: Netzgerät, Akkumulatoren, sowie ein Teil des Drehtransformators. Der HF-Oszillator und das eigentliche Röhrenvoltmeter sind verdeckt.)

Verstärkungsfaktor des *NF*-Verstärkers im Eichpunkt $\nu_{50\text{ Hz}} = 9,11$ Neper

Untere Grenzfrequenz $f_u = 11,8\text{ s}^{-1}$

Grenzfrequenz des Tiefpasses $f_0 = 150\text{ s}^{-1}$

Maximale unverzerrte Ausgangsspannung nach dem Tiefpaß $u_{a_{max}} = 12\text{ V}_{eff}$

III. Theorie des angewandten Meßverfahrens und der Versuchseinrichtung

7. Die Bewegungsgleichungen eines inkompressiblen, isotropen Voigt'schen Idealstoffes in Verbindung mit schweren Massen

Ich greife zurück auf die Darlegungen des Kap. 1, Teil I, wo ich als Grundlage der durchzuführenden Versuche den homogenen einachsigen Deformationszustand der reinen Scherung vorausgesetzt hatte. In Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z , dessen Lage aus Abb. 15 ersichtlich ist, führen nun die Annahmen des einachsigen Spannungs- und Deformationszustandes beim Voigt'schen Idealstoff auf nachstehende Schlußfolgerungen:

1. $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und damit auch $s_y = 0$, $s_z = 0$
2. ξ bzw. s_x hängen nur von x ab.
3. $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

Mithin reduzieren sich die in Kap. 2 c) entwickelten allgemeinen Bewegungsgleichungen (87), (88), (89) auf:

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1)$$

und
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Die Laplace'sche Differentialgleichung für den Druck p (91) liefert:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

was mit (2) auf

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

führt. Da aber nach Voraussetzung zugleich $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ist, so folgt daraus, daß im Fall des einachsigen Spannungszustandes

$$p = p_0 = \text{const.} \quad (4)$$

sein muß.

Die Bewegungsgleichung des isotropen Kontinuums im Falle der einachsigen Scherung wird somit dargestellt durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (G\xi + k\dot{\xi}) = \mu_0 \ddot{\xi}. \quad (5)$$

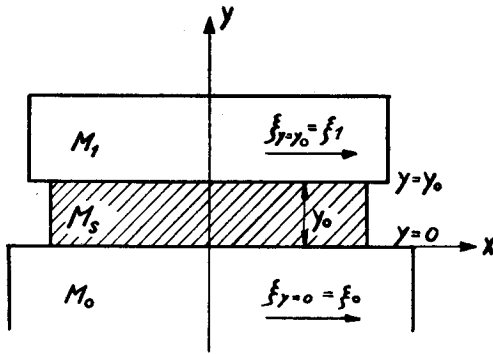


Abb. 15. Zur Ableitung der Bewegungsgleichung und der Randbedingungen.

Dieses Kontinuum besitzt im vorliegenden Falle die Gestalt einer dünnen Schicht der Dicke y_0 , der Fläche F und der Masse $M_s = \mu_0 y_0 \cdot F$ (Abb. 15). Es wird begrenzt bei $y=0$ durch die Masse M_0 und bei $y=y_0$ durch die Masse M_1 . Diese Tatsache läßt sich ausdrücken durch folgende Randbedingungen:

$$y = 0 \quad M_0 \ddot{\xi}_{y=0} = -\lambda_0 \xi_{y=0} + \tau_{xy_{y=0}} \cdot F + Z e^{j\omega t} \quad (6)$$

$$y = y_0 \quad M_1 \ddot{\xi}_{y=y_0} = -\tau_{xy_{y=y_0}} \cdot F. \quad (7)$$

Wie bereits erwähnt, bildet M_0 zusammen mit seiner Aufhängung der Steife λ_0 ein schwingungsfähiges System, welches infolge der zeitlich periodischen Zentripedalkraft Z erzwungene Schwingungen ausführt und auf diese Weise das durch M_1 und

M_s gebildete zweite Schwingungssystem erregt. Es handelt sich also, sofern vorläufig von der Tatsache, daß

$$\begin{aligned} M_1 &\ll M_0 \\ M_s &\ll M_1 \end{aligned}$$

ist, abgesehen wird, im Sinne der Dynamik um ein Kopplungs- und Eigenwertproblem.

Diesem Umstande Rechnung tragend, habe ich sowohl den Einfluß der Kopplung als auch jenen der Schichtmasse M_s auf die Lösung des Problems untersucht. Dabei hat es sich gezeigt, daß der Kopplungseinfluß, oder besser die Rückwirkung der Bewegung des Meßsystems auf die Bewegung des Führungssystems, in allen praktisch vorkommenden Fällen vernachlässigt werden darf. Dagegen erschien mir die Wirkung der Schichtmasse, obzwar auch vernachlässigbar, doch vor allem im Hinblick auf nicht-sinusförmige Bewegungen des Schütteltisches von größerer und grundsätzlicherer Bedeutung zu sein. Aus diesem Grunde werde ich sie im folgenden zunächst ebenfalls in den Kreis der Betrachtungen einbeziehen.

a) Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Schichtmasse.

Der Fourier-Ansatz

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_n(y) e^{jn\omega t}. \quad (8)$$

der von vorneherein eine nicht sinusförmige Bewegung in Rechnung stellt, führt unter der Voraussetzung gleichmäßiger Konvergenz in Verbindung mit (5) auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \bar{\xi}_n}{dy^2} + v_n^2 \bar{\xi}_n = 0 \quad (9)$$

zur Bestimmung der zeitlichen und örtlichen Amplitude der n -ten Harmonischen. Dabei ist

$$v_n^2 = \frac{n^2 \omega^2 \mu_0}{G^2 + n^2 \omega^2 k^2} (G - jn\omega k). \quad (10)$$

Die allgemeine Lösung von (9) lautet:

$$\bar{\xi}_n = \mathfrak{A}_{1n} \sin \nu_n y + \mathfrak{A}_{2n} \cos \nu_n y, \quad (11)$$

worin \mathfrak{A}_{1n} , \mathfrak{A}_{2n} komplexe Konstanten bedeuten.

Nach Einführung folgender Bezeichnungen:

$$\text{Reell } \bar{\xi}_{ny=0} = \bar{\xi}_{0n} \quad (12)$$

$$\bar{\xi}_{ny=y_0} = \bar{\xi}_{1n} \quad (13)$$

lassen sich diese Konstanten ausdrücken:

$$\mathfrak{A}_{1n} = \frac{\bar{\xi}_{1n} - \bar{\xi}_{0n} \cos \nu_n y_0}{\sin \nu_n y_0} \quad (14)$$

$$\mathfrak{A}_{2n} \equiv A_{2n} = \bar{\xi}_{0n}. \quad (15)$$

Damit wird die allgemeine Lösung von (5):

$$\bar{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}_{1n} \sin \nu_n y + \bar{\xi}_{0n} \sin \nu_n (y_0 - y)}{\sin \nu_n y_0} e^{jn\omega t}. \quad (16)$$

Die komplexe Zahl ν_n läßt sich dabei in bekannter Weise darstellen als

$$\nu_n = a + jb$$

mit

$$a = n\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{2(G^2 + n^2 \omega^2 k^2)}} (G + \sqrt{G^2 + n^2 \omega^2 k^2}) \quad (17)$$

$$b = n\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{2(G^2 + n^2 \omega^2 k^2)}} (\sqrt{G^2 + n^2 \omega^2 k^2} - G). \quad (18)$$

Unter Vernachlässigung des Kopplungseinflusses nehmen die Randbedingungen (6) und (7) folgende Gestalt an:

$$y = 0 \quad M_0 \ddot{\xi}_{y=0} = -\lambda_0 \xi_{y=0} + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n e^{jn\omega t} \quad (19)$$

$$y = y_0 \quad M_1 \ddot{\xi}_{y=y_0} = -r_{xy=y_0} \cdot F = -F \frac{\partial}{\partial y} (G\xi + k\dot{\xi})_{y=y_0}. \quad (20)$$

Mit (16) folgt aus (19) unmittelbar:

$$\bar{\xi}_{0n} \equiv A_{2n} = \frac{Z_n}{\lambda_0 - n^2 \omega^2 M_0}, \quad (21)$$

während vermitteltst

$$\frac{\partial}{\partial y} (G\xi + k\xi)_{y=y_0} = (G + jn\omega k) \frac{v_n(\xi_{1n} \cos v_n y_0 - \xi_{0n})}{\sin v_n y_0} e^{jn\omega t}$$

$$\xi_{1n} = -\xi_{0n} \frac{F(G + jn\omega k) v_n}{n^2 \omega^2 M_1 \sin v_n y_0 - F(G + jn\omega k) v_n \cos v_n y_0} \quad (22)$$

wird. Damit ist die Amplitudenfunktion der n -ten Harmonischen der Bewegung von M_1 in Abhängigkeit von der erregenden Kreisfrequenz ω gefunden.

Der Ausdruck (22) zeigt, daß gewisse „Eigenwerte“ existieren, für welche die einzelnen Glieder der Fourier'schen Reihe (16) extremal werden. Im Falle $k=0$, d. h. im Falle sehr kleiner Dämpfung, lassen sich diese Eigenwerte leicht ermitteln. Sie bestimmen sich dann aus der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg} n\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{G}} y_0 = \frac{1}{n\omega} \frac{FG \sqrt{\frac{\mu_0}{G}}}{M_1}. \quad (23)$$

Darin kann n , als die Ordnungszahl der höheren Harmonischen, die Werte $n=1, 2, 3, \dots$ annehmen. Die Eigenwerte ω_{1k} der Amplitude ξ_{11} von M_1 mit der Grundfrequenz ω sind somit Lösungen von

$$\operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{\mu_0}{G}} y_0 = \frac{1}{\omega} \frac{FG \sqrt{\frac{\mu_0}{G}}}{M_1}.$$

Für die höheren Eigenwerte darf jedoch, wegen

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{n\omega} \frac{FG \sqrt{\frac{\mu_0}{G}}}{M_1} = 0$$

die Gleichung

$$\operatorname{tg} n\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{G}} y_0 = 0 \quad (24)$$

benutzt werden. Sie liefert

$$\omega_{nk} = \frac{k}{n} \frac{\pi}{y_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{G}}} \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad (25)$$

b) Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung der Schichtmasse.

Mit Rücksicht auf (5) ist jetzt:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (G\xi + k\dot{\xi}) = 0, \quad (26)$$

woraus

$$G\xi + k\dot{\xi} = Ay + B. \quad (27)$$

Die Konstanten lassen sich, ähnlich wie früher, durch Einführung von

$$\left. \begin{aligned} \xi_{y=0} &= \xi_0 \\ \xi_{y=y_0} &= \xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ausdrücken, und zwar wird

$$B = G\xi_0 + k\dot{\xi}_0 \quad (29)$$

$$A = \frac{G}{y_0} (\xi_1 - \xi_0) + \frac{k}{y_0} (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_0). \quad (30)$$

Demzufolge lautet (27):

$$G\xi + k\dot{\xi} = \left[\frac{G}{y_0} (\xi_1 - \xi_0) + \frac{k}{y_0} (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_0) \right] y + G\xi_0 + k\dot{\xi}_0. \quad (31)$$

Daraus folgt weiter:

$$F \cdot \tau_{xy_{y=0}} = F \tau_{xy_{y=y_0}} = F \frac{\partial}{\partial y} (G\xi + k\dot{\xi}) = \frac{GF}{y_0} (\xi_1 - \xi_0) + \frac{kF}{y_0} (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_0).$$

Ich definiere nun

$$\frac{G \cdot F}{y_0} = \lambda_1 = \text{Steife des Meßsystems}, \quad (32)$$

$$\frac{k \cdot F}{y_0} = k_1 = \text{Dämpfungskoeffizient des Meßsystems}, \quad (33)$$

und erhalte:

$$F \tau_{xy} = \lambda_1 (\xi_1 - \xi_0) + k_1 (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_0). \quad (34)$$

Bezugnehmend auf die unverändert bestehenden Randbedingungen (19) und (20) lassen sich nunmehr die Bewegungsgleichungen folgendermaßen anschreiben:

$$M_0 \ddot{\xi}_0 + \lambda_0 \xi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n e^{jn\omega t} = 0 \quad (35)$$

$$M_1 \ddot{\xi}_1 - k_1 (\xi_1 - \xi_0) + \lambda_1 (\xi_1 - \xi_0) = 0. \quad (36)$$

Der Fourier-Ansatz (8)

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\xi}_n e^{jn\omega t}$$

führt wiederum auf folgende Ausdrücke für die n -ten Harmonischen der Amplituden $\bar{\xi}_0$ und $\bar{\xi}_1$:

$$\bar{\xi}_{1n} = \bar{\xi}_{0n} \frac{\lambda_1 + jn\omega k_1}{\lambda_1 - n^2 \omega^2 M_1 + jn\omega k_1} \quad (37)$$

$$\bar{\xi}_{0n} = \frac{Z_n}{\lambda_0 - n^2 \omega^2 M_0}. \quad (38)$$

Unter Einführung von $\nu_1^2 = \frac{\lambda_1}{M_1}$ ist demnach der Momentanwert ξ_1 der Bewegung der Masse M_1 dargestellt durch eine Fourierreihe, deren erste Glieder folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \bar{\xi}_{01} \frac{1 + j\omega \frac{k_1}{\lambda_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\nu_1^2} + j\omega \frac{k_1}{\lambda_1}} e^{j\omega t} \\ & + \bar{\xi}_{02} \frac{1 + j2\omega \frac{k_1}{\lambda_1}}{1 - 4 \frac{\omega^2}{\nu_1^2} + j2\omega \frac{k_1}{\lambda_1}} e^{2j\omega t} + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Auch hier, wie seinerzeit im Falle (22), durchlaufen die einzelnen Glieder mit wachsender Kreisfrequenz ω Resonanzkurven. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß diesmal jedem Glied $\bar{\xi}_{1n}$ nicht unendlich viele, sondern jeweils nur ein einziger Eigenwert vom ungedämpften Betrag

$$f_n = \frac{\nu_1}{2\pi n} \quad (40)$$

zugeordnet ist. Die Resonanzen treten demzufolge bei umso tieferer Frequenz ein, je höherer Ordnung die zugehörigen Harmonischen sind.

Das Verhältnis der Grundwelle der Amplitude ξ_1 der Masse M_1 und der entsprechenden Amplitude ξ_0 der Masse M_0 soll nun mit x bezeichnet werden. Mit (37) ergibt sich also

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\lambda_1 + j \omega k_1}{\lambda_1 - \omega^2 M_1 + j \omega k_1}, \quad (41)$$

wobei die Phase durch

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\omega^3 k_1 M_1}{\lambda_1^2 + \omega^2 (k_1^2 - \lambda_1 M_1)} \quad (42)$$

bestimmt ist. Das komplexe Amplitudenverhältnis enthält demnach lediglich Bestimmungsstücke des Meßsystems und ist daher vom Kopplungseinfluß unabhängig. Dieser Umstand ist sehr wichtig und ist in der Tat von entscheidender Bedeutung für die praktische Brauchbarkeit der ganzen Meßmethode überhaupt.

Da der Ausdruck (39)

$$\frac{1 + j n \omega \frac{k_1}{\lambda_1}}{1 - n^2 \frac{\omega^2}{\nu_1^2} + j n \omega \frac{k_1}{\lambda_1}}$$

oberhalb der Resonanzfrequenz ungefähr wie $\frac{1}{n \omega}$ abnimmt, so wäre für zunehmende Werte ω eine Abnahme des „Klirrfaktors“ bezüglich ξ_1 zu erwarten, wenn nicht gleichzeitig die Amplituden der höheren Harmonischen von ξ_0 mit steigender Drehzahl der Zahnräder des Schütteltisches unverhältnismäßig stark zunehmen würden.

Die soeben geschilderten Umstände wirken sich meßtechnisch derart aus, daß die den Größen ξ_0 und ξ_1 entsprechenden Wechselspannungen vom Momentanwert u_0 und u_1 ebenfalls einen starken und mit der Frequenz veränderlichen Anteil an Oberwellen aufweisen, wodurch die Meßgenauigkeit beeinträchtigt wird. In besonderem Maße trifft dieser Übelstand für die meist wesentlich kleinere Spannung u_{01} zu. Weil aber zur Auswertung der Messungen nur das Verhältnis x^* der Amplituden der Grundwelle in Betracht kommt, so wird man danach streben, die Harmonischen auf irgend eine Weise überhaupt unschädlich zu machen. Dies wird am ein-

fachsten auf elektrischem Wege, beispielsweise mit Hilfe des in Kap. 5 erwähnten Tiefpaßfilters bewerkstelligt.

Zur Veranschaulichung des frequenzabhängigen Verlaufs der Ausdrücke (37), (38) und (41), (42) ist ein Zahlenbeispiel durchgerechnet worden. Die zugehörigen Kurven sind in Abb. 16 und 17 dargestellt.

8. Die Ortskurve von $\underline{x} = \bar{\xi}_1/\bar{\xi}_0$ bei variabler Frequenz und die Berechnung von G und k aus den Meßwerten

Neben der Berechnung des Frequenzgangs der Größen $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_1$, $|\underline{x}|$, $\text{tg } \varphi$ ist noch eine weitere Frage zu beantworten, nämlich die Frage nach dem Gebiet, das durch den Vektor \underline{x} bei einer Frequenzänderung $0 \leq \omega \leq \infty$ überstrichen wird. Darüber läßt sich anhand von Gl. (42) bereits folgendes aussagen:

Wenn $k_1^2 > \lambda_1 M_1$ ist, so wird $\text{tg } \varphi = \infty$ nur für $\omega = \infty$. Dabei bleibt der Phasenwinkel φ für alle Werte $0 < \omega < \infty$ negativ, weil der Nenner von (42) stets positiv ist. Mit andern Worten: Wenn der Vektor $\bar{\xi}_0$ in die positive reelle Achse gelegt wird, so ist der Vektor $\bar{\xi}_1$ ersterem gegenüber um einen negativen Winkel $-\varphi$ verschoben, eilt ihm also stets nach, und zwar maximal um 90° .

Wenn andererseits $k_1^2 < \lambda_1 M_1$ ist, so existieren zwei Werte ω , für die $\text{tg } \varphi = \infty$ wird, nämlich:

$$\begin{aligned} 1. \quad \omega_1 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 M_1 - k_1^2}} \\ 2. \quad \omega_2 &= \infty \end{aligned}$$

Für Werte $0 < \omega < \omega_1$ ist zunächst wiederum $\text{tg } \varphi$ negativ, für Werte $\omega_1 < \omega < \omega_2$ dagegen positiv, sodaß jetzt der Vektor $\bar{\xi}_1$ dem Vektor $\bar{\xi}_0$ um den Winkel $-(90^\circ + \varphi)$ nacheilt, und zwar maximal um 180° .

Daraus geht hervor, daß unter gewissen Umständen der Phasenwinkel den Höchstwert $\varphi = -180^\circ$ erreichen kann, wobei das vom Vektor \underline{x} überstrichene Gebiet stets auf die untere Halbebene beschränkt bleibt. Besonders anschaulich lassen sich diese

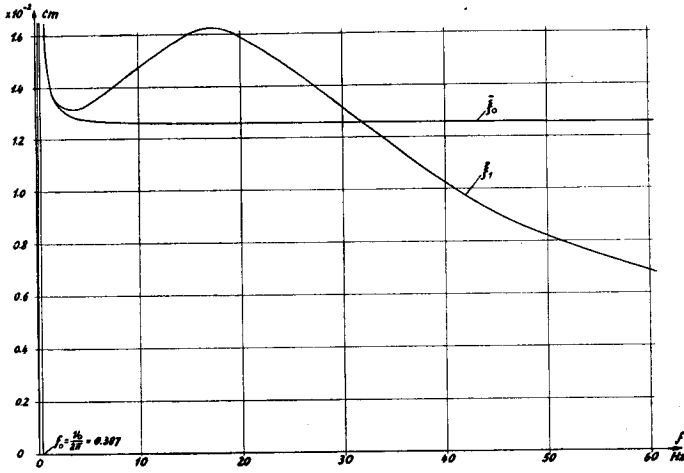


Abb. 16. Amplitude ξ_0 und ξ_1 in Funktion der Frequenz für einen Voigt'schen Idealstoff.

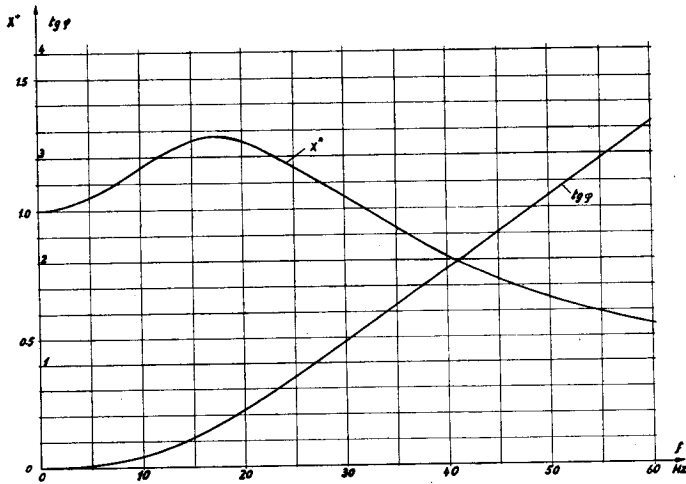


Abb. 17. Amplitudenverhältnis $x^* = \frac{\xi_1}{\xi_0}$ und Phasenwinkel $\text{tg } \varphi$ in Funktion der Frequenz für einen Voigt'schen Idealstoff.

Verhältnisse durch die Konstruktion des geometrischen Ortes für ξ , der sog. „Ortskurve“ darstellen. Eine solche Ortskurve kann in rechtwinkligen oder Polarkoordinaten geschrieben werden, je

nachdem die Elimination des Parameters ω in der einen oder andern Form leichter gelingt.

Im vorliegenden Falle ist nun gerade die Anwendung von Polarkoordinaten vorteilhaft. Ich setze also:

$$\underline{x} = x^* e^{j\varphi} = x^* (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (43)$$

und erhalte unter Beachtung von (41) die folgenden beiden Gleichungen:

$$x^* \{ (\lambda_1 - \omega^2 M_1) \cos \varphi + \omega k_1 \sin \varphi \} = \lambda_1 \quad (44)$$

$$x^* \{ (\lambda_1 - \omega^2 M_1) \sin \varphi + \omega k_1 \cos \varphi \} = \omega k_1 \quad (45)$$

und weiter:

$$\omega k_1 = \frac{\lambda_1 (x^* - \cos \varphi) - x^* \omega^2 M_1}{\sin \varphi} \quad (46)$$

$$\lambda_1 = - \frac{\omega k_1 (x^* - \cos \varphi)}{\sin \varphi}, \quad (47)$$

woraus nach Elimination von ω :

$$x^{*3} - 3x^{*2} \cos \varphi + x^* \left(2 \cos^2 \varphi - M_1 \frac{\lambda_1}{k_1^2} \sin^2 \varphi + 1 \right) - \cos \varphi = 0. \quad (48)$$

Für die Konstruktion eignet sich die vorstehende Darstellungsweise der Ortskurve allerdings nicht. Sobald nämlich der ursprüngliche Zusammenhang $\underline{x} = \underline{\mathfrak{F}}(\omega)$ hinsichtlich ω höheren als 1. Grades ist, erweist es sich als vorteilhafter und bequemer, die Ortskurve aus absolutem Betrag und Phase des Vektors \underline{x} punktweise zu berechnen. Dieses Vorgehen dürfte auch hier angezeigt sein; denn, wird der Nenner von (41) reell gemacht, so entsteht nach Potenzen von ω geordnet:

$$\underline{x} = \frac{\lambda_1^2 + (k_1^2 - \lambda_1 M_1) \omega^2 - j k_1 M_1 \omega^3}{\lambda_1^2 + (k_1^2 - 2 \lambda_1 M_1) \omega^2 + M_1^2 \omega^4}, \quad (49)$$

also ein Ausdruck, dessen Nenner 4. Grades in ω ist, und der daher, bezogen auf rechtwinklige Koordinaten, eine sog. „bizirkulare“ Kurve 4. Ordnung darstellt.

Ausgehend vom Zahlenbeispiel des vorhergehenden Kapitels (7b), also für den Fall $k_1^2 > \lambda_1 M_1$, ist nun die zugehörige Ortskurve mit Hilfe der dort bereits berechneten Werte für x^* und

tg φ mit ω als Parameter konstruiert und in Abb. 18 aufgezichnet worden.

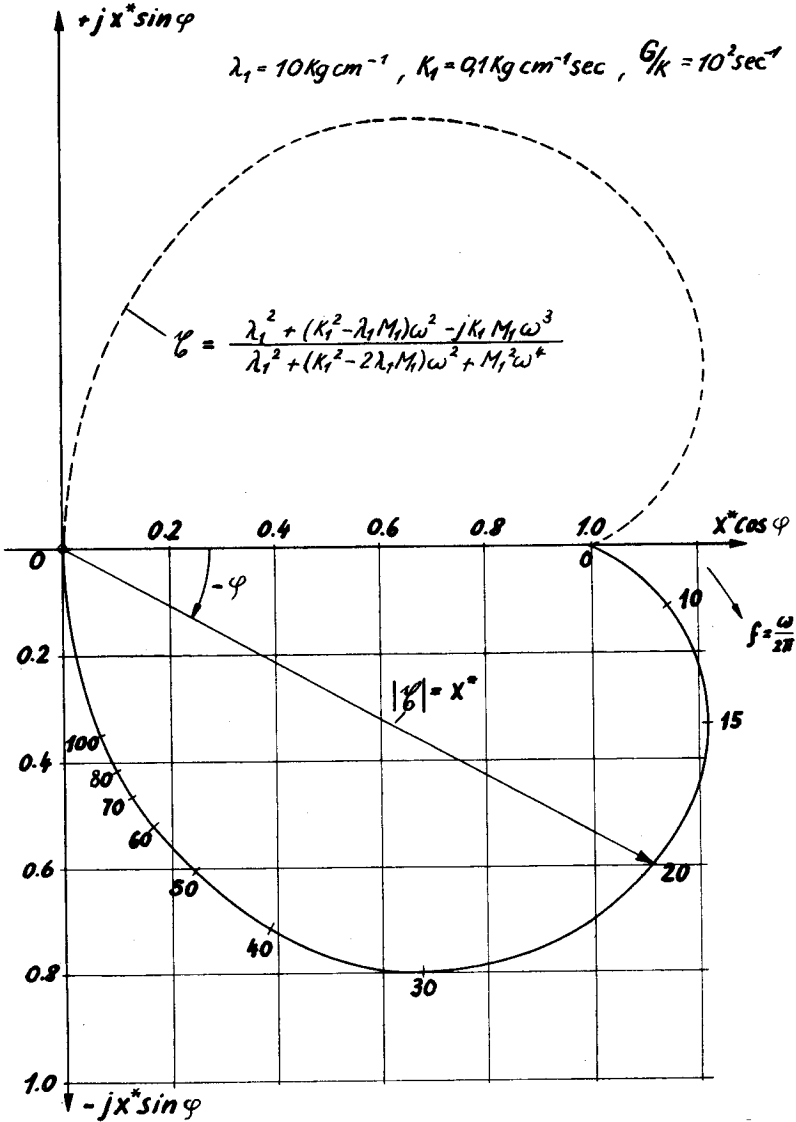


Abb. 18. Ortskurve für das komplexe Amplitudenverhältnis $g = \frac{\sigma_{r1}}{\sigma_{r0}}$ bei variabler Frequenz im Falle $k_1^2 > \lambda_1 M_1$.

Was schließlich die eigentliche Auswertung der Messungen, d. h. die Berechnung des Schubmoduls G und der Konstanten der inneren Reibung k anbelangt, so folgt aus (46) und (47) unmittelbar:

$$G = \frac{\omega^2 M_1 y_0}{F} \frac{x^* (x^* - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi + (x^* - \cos \varphi)^2} \quad (50)$$

$$k = \frac{\omega M_1 y_0}{F} \frac{-x^* \sin \varphi}{\sin^2 \varphi + (x^* - \cos \varphi)^2} \quad (51)$$

Damit sind G und k vollständig bestimmt, denn bei M_1, y_0, F handelt es sich ja um vorgegebene Werte und bei x^* und $\cos \varphi$ um Größen, die mittelbar aus den Messungen hervorgehen.

9. Der lineare kapazitive Geber

Die Kapazität eines Kondensators mit planparallelen Platten ist bekanntlich:

$$C = \frac{F \cdot \beta}{3,6 \pi} \frac{1}{a} p F. \quad (52)$$

Demzufolge ist eine Kapazitätsänderung grundsätzlich auf drei verschiedene Arten möglich:

1. Änderung des Plattenabstandes a ,
2. Änderung der Fläche F ,
3. Änderung der Dielektrizitätskonstanten β .

Die erstgenannte Möglichkeit ergibt, streng genommen, keinen linearen Zusammenhang zwischen ΔC und Δa . Immerhin kann die Linearität in genügendem Maße als gewährleistet angesehen werden, solange $\Delta a \ll a$ ist. Der Forderung nach Linearität steht aber eine andere Forderung, nämlich diejenige nach großer „Empfindlichkeit“

$$\frac{\Delta C}{\Delta a} = \frac{F \beta}{3,6 \pi} \frac{1}{a^2} p F \text{ cm}^{-1} \quad (53)$$

entgegen. Es erscheint kaum möglich, die erste Bedingung für einen großen Bereich von Änderungen Δa zu erfüllen, ohne zugleich beträchtlich an Empfindlichkeit zu verlieren.

Diese Mängel können nun durch die beiden weiteren, unter Punkt 2 und 3 aufgeführten Möglichkeiten, behoben werden, von denen jedoch die dritte — Kapazitätsänderung durch Änderung der Dielektrizitätskonstante — offensichtlich die idealste Lösung des Problems darstellt (Lit. 19). Hier sind die beiden Kondensatorplatten (oder Gruppen von Platten) fest, und nur das Dielektrikum in Form einer Platte (oder Gruppen von Platten) aus keramischem Material mit hoher Dielektrizitätskonstante (Condensa N) ist beweglich angeordnet.

Leider konnte diese Konstruktion im vorliegenden Fall infolge kriegsbedingter Schwierigkeiten (Beschaffung der Platten aus Condensa N) nicht zur Ausführung gelangen. Vielmehr mußte das keramische Dielektrikum durch einen aus Metall bestehenden beweglichen Plattensatz ersetzt werden. Damit ist aber eine prinzipielle Änderung der Wirkungsweise verbunden. Auch hier ist zwar die Kapazitätsänderung in einen größeren Bereich linear (sofern die Randstreufelder vernachlässigt werden), doch beruht sie jetzt auf der Änderung der resultierenden Kapazität zweier in Serie geschalteter Teilkapazitäten.

Der Nachteil, der mit dieser Anordnung in Kauf genommen werden muß, liegt auf der Hand: die „Empfindlichkeit“ des Gebers ist nämlich jetzt nicht mehr unabhängig von der Lage des beweglichen Plattensatzes im Luftspalt. Zwar verursachen auch hier Verschiebungen der Metallplatten im Luftspalt keine Empfindlichkeitsänderung, solange sie nur in vertikaler Richtung und stets genau parallel zum feststehenden Plattensatz erfolgen. Vertikale Verschiebungen bei gleichzeitiger Schrägstellung haben dagegen, wie noch gezeigt werden soll, erhebliche Empfindlichkeitsänderungen zur Folge.

a) Geber mit Kapazitätsänderung durch Änderung der resultierenden Kapazität zweier in Serie geschalteter Teilkapazitäten.

Wenn auf die genaue potentialtheoretische Berechnung der im vorliegenden Fall sehr stark ausgeprägten Randstreufelder verzichtet wird, so gilt unter Beachtung von Abb. 19:

$$C = \frac{b \cdot n}{3,6 \pi} \left\{ \frac{l_1 \beta_1}{a_1} + \frac{l_2 \beta_1}{d} + \frac{l_3 \beta_3}{d} \right\} = C_1^* + C_2^* + C_3^* \quad (54)$$

und

$$\frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{b \cdot n \beta_1}{3,6 \pi} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{d} \right). \quad (55)$$

Mit den Konstruktionsdaten:

$n = 2$	$d = 0,30 \text{ cm}$	$\beta_1 = 1$	$l_1 = 0,4 \text{ cm}$
$b = 7 \text{ cm}$	$a_p = d - a_1 = 0,2 \text{ cm}$	$\beta_3 = 3$	$l_2 = 0,4 \text{ cm}$
$a_1 = 0,1 \text{ cm}$			$l_3 = 2,3 \text{ cm}$

folgt aus diesen Formeln:

$$C = 35,0 \text{ pF}, \quad \frac{\Delta C}{\Delta l} = 8,25 \text{ pF} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

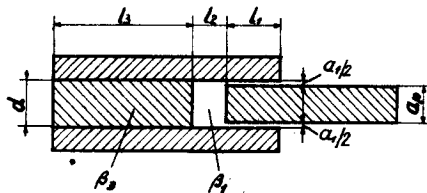


Abb. 19. Schema des kapazitiven Gebers mit Kapazitätsänderung durch Änderung der resultierenden Kapazität zweier in Serie geschalteter Teilkapazitäten.

In Wirklichkeit werden jedoch, infolge der eingangs erwähnten Randeffekte, sowohl die Empfindlichkeit als auch die Grundkapazität wesentlich größer. Messungen ergaben:

$$C = 42,0 \text{ pF}, \quad \frac{\Delta C}{\Delta l} \approx 20,0 \text{ pF} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

b) Einfluß von Schrägstellungen.

Es sei vorausgeschickt, daß alle folgenden Ableitungen sich lediglich auf die Teilkapazität C_1^* beziehen, da die übrigen Teilkapazitäten von C durch die Schrägstellung nicht beeinflußt werden.

Der Abb. 20 sind folgende Relationen zu entnehmen: Teilkapazität unterhalb der schräggestellten Platte P :

$$dC_1^{*'} = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6\pi} \frac{dx}{a}, \quad (56)$$

Teilkapazität oberhalb der Platte P :

$$dC_1^{*''} = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6\pi} \frac{dx}{a_1 - a}, \quad (57)$$

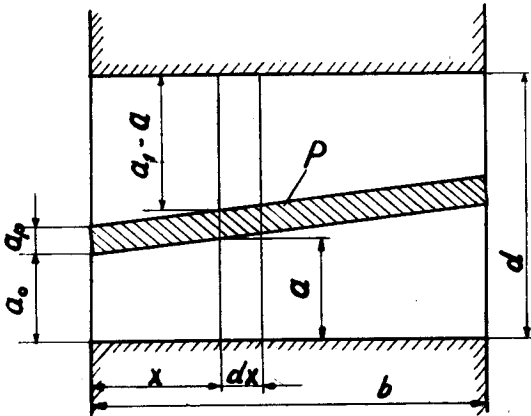


Abb. 20. Zur Betrachtung über den Einfluß von Schrägstellungen.

worin a_1 den totalen Luftspalt bedeutet. In diesen Gleichungen soll nun der Teilluftspalt a gemäß

$$a = a_0 + \varepsilon x \quad (58)$$

mit x variieren. Dabei bedeutet ε ein Maß für die Schrägstellung, a_0 eine beliebige Konstante. Beide Größen unterliegen aber aus geometrischen Gründen folgenden einschränkenden Bedingungen:

$$\varepsilon \leq \frac{a_1 - a_0}{b} \quad (59)$$

$$a_0 \leq a_1.$$

Durch Einführung von (58) in (56) und (57) folgt:

$$dC_1^{*'} = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi} \frac{dx}{a_0 + \varepsilon x} \quad (60)$$

$$dC_1^{*''} = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi} \frac{dx}{a_1 - a_0 + \varepsilon x}. \quad (61)$$

Die Integration liefert:

$$C_1^{*'} = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi \varepsilon} \lg(a_0 + \varepsilon x) + C_{01}' \quad (62)$$

$$C_1^{*''} = - \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi \varepsilon} \lg(a_1 - a_0 - \varepsilon x) + C_{01}'' \quad (63)$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_{01}' , C_{01}'' dient:

$$x = 0: C_1^{*'} = 0, \quad C_1^{*''} = 0, \quad (64)$$

woraus:

$$C_{01}' = - \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi \varepsilon} \lg a_0 \quad (65)$$

$$C_{01}'' = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi \varepsilon} \lg(a_1 - a_0). \quad (66)$$

Dadurch sind auch die Teilkapazitäten für $x = b$ bestimmt:

$$C_1^{*'} = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi \varepsilon} \lg \left(1 + \frac{b \varepsilon}{a_0} \right) \quad (67)$$

$$C_1^{*''} = - \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi \varepsilon} \lg \left(1 - \frac{b \varepsilon}{a_1 - a_0} \right). \quad (68)$$

Demzufolge beträgt die totale Kapazität:

$$C_{1\varepsilon}^* = \frac{l_1 n \beta_1}{3,6 \pi} \frac{1}{\varepsilon F(\varepsilon)} \quad (69)$$

und die „Empfindlichkeit“:

$$\left(\frac{\Delta C}{\Delta l} \right)_{\varepsilon} = \frac{n \beta_1}{3,6 \pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon F(\varepsilon)} - \frac{b}{d} \right\}. \quad (70)$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\lg \left(1 + \frac{b \varepsilon}{a_0} \right)} - \frac{1}{\lg \left(1 - \frac{b \varepsilon}{a_1 - a_0} \right)} \quad (71)$$

gesetzt worden.

Die Ausdrücke (69), (70) gehen, wie es sein muß, für den Fall $\varepsilon=0$, also für verschwindende Schrägstellung, in diejenigen der Gleichungen (55), (56) über, die von ε und a_0 unabhängig sind. Die Abweichungen der Werte $C_{1\epsilon}^*$ und $\frac{\Delta C}{\Delta l}$ im Falle $\varepsilon \neq 0$ sind in Abb. 21 in Abhängigkeit von ε berechnet worden, und zwar unter Zugrundelegung von:

$$a_{0 \min} = 0,01 \text{ cm}, \quad a_1 = 0,10 \text{ cm}, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{0,1 - 0,010}{7} \cong 0,0129$$

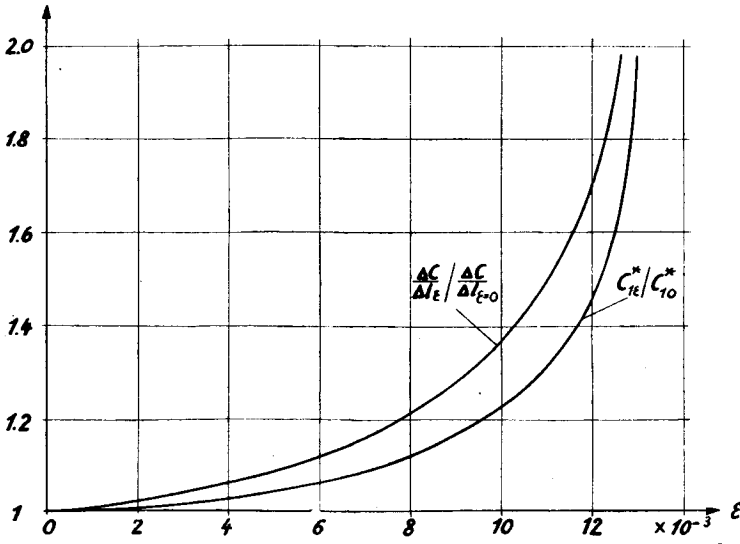


Abb. 21. Bezogene Empfindlichkeit $\left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_{\varepsilon} / \left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_{\varepsilon=0}$ und bezogene Kapazität $C_{1\epsilon}^* / C_{10}^*$ in Funktion der Schrägstellung ε mit $a_0 = 0.01 \text{ cm}$.

10. Die Modulationsschaltung

Wie bereits erwähnt, wird die *HF*-Schaltung in der von *R. v. Radinger* vorgeschlagenen Form benützt (Lit. 20), deren Prinzip aus Abb. 22 hervorgeht.

Die vom *HF*-Generator erzeugte *HF*-Spannung vom Scheitelwert U_{h_0} ($U_{h_0} \cong 190 \text{ V}$ bei $f = 160 \text{ KHz}$) wird durch den aus der

festen Kapazität C_v und der Kapazität C_v , des jeweils eingeschalteten Gebers gebildeten Spannungsteiler unterteilt, und zwar ist die Teilspannung an C_v' :

$$U_{hc_v} = U_{h_0} \frac{C_v}{C_v + C_v'}, \quad (72)$$

wobei

$$C_v' = C_v + C_p$$

und C_p die Streukapazität bedeutet.

Kapazitätsänderungen ΔC_v von C_v verursachen Änderungen ΔU_{hc_v} von U_{hc_v} :

$$\Delta U_{hc_v} = U_{h_0} C_v \frac{-\Delta C_v}{(C_v + C_v')^2 + (C_v + C_v') \Delta C_v}. \quad (73)$$

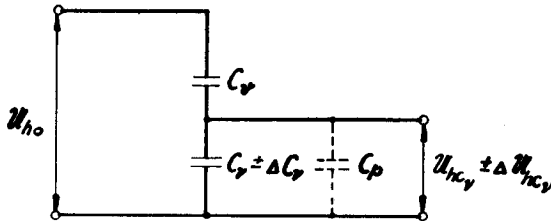


Abb. 22. Entstehung der Amplitudenmodulation in der HF-Schaltung nach R. v. Radinger.

Hierbei ist zwischen den Kapazitätsänderungen zu unterscheiden, die zu Eichzwecken vorgenommen werden und die von gleicher Größenordnung wie C_v' oder C_v selbst sind, und den sehr kleinen periodischen Kapazitätsänderungen von der Amplitude ΔC_v^* , wie sie bei der Messung normalerweise auftreten. Im letzteren Fall darf wegen

$$\Delta C_v^* \ll (C_v + C_v')$$

gesetzt werden:

$$\Delta U_{hc_v}^* = - U_{h_0} \frac{C_v \Delta C_v^*}{(C_v + C_v')^2}. \quad (74)$$

Dabei ist $\frac{\Delta U_{hc_v}}{\sqrt{2}}$ identisch mit der am Ausgang des Gleichrichters entstehenden NF-Spannung vom Effektivwert U_v .

Wird ferner die Substitution

$$\frac{C_v}{C_v + C_v'} = \frac{1}{n}$$

eingeführt, so geht (73) über in:

$$\Delta U_{hc_v} = - U_{h_0} \frac{(n-1) \Delta C_v}{n(n C_v' + \Delta C_v)}, \quad (75)$$

während (74) die Form

$$\Delta U_{hc_v}^* = U_v = - U_{h_0} \frac{(n-1) \Delta C_v^*}{C_v' n^2} \quad (76)$$

annimmt.

Der Modulationsgrad m^* der an C_v liegenden HF-Spannung läßt sich schließlich noch ausdrücken durch:

$$m^* = \frac{\Delta U_{hc_v}^*}{U_{hc_v}} = - \frac{(n-1) \Delta C_v^*}{C_v' n}. \quad (77)$$

Damit die Voraussetzungen für die Messung des Phasenwinkels φ zwischen den Spannungsvektoren u_0 , u_1 und des Amplitudenverhältnisses x^* nach der in Kap. 5 geschilderten Methode erfüllt sind, muß sein:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=01} u_\nu = 0$$

$$\frac{|u_1|}{|u_0|} = 1 \quad \text{für} \quad \xi_0 = \xi_1.$$

Unter Beachtung von (76) erhalte ich:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=01} u_\nu = - \frac{U_{h_0}}{\sum_{\nu=0}^{\nu=01} C_\nu'} \frac{n-1}{n^2 \sqrt{2}} \sum_{\nu=0}^{\nu=01} \Delta C_\nu^* = 0, \quad \text{also}$$

$$\left\{ \left(\frac{\Delta C}{\Delta l} \right)_0 \xi_0 - \left(\frac{\Delta C}{\Delta l} \right)_1 \xi_1 e^{-j\varphi} + \left(\frac{\Delta C}{\Delta l} \right)_{01} (\xi_1 e^{-j\varphi} - \xi_0) \right\} = 0 \quad (78)$$

und

$$\frac{|u_1|}{|u_0|} = \frac{(C_v + C_0')^2}{(C_v + C_1')^2} \frac{|\Delta C_1^*|}{|\Delta C_0^*|} = 1. \quad (79)$$

Diesen beiden Bedingungen wird nur genügt, wenn

$$\left(\frac{\Delta C}{\Delta I}\right)_0 = \left(\frac{\Delta C}{\Delta I}\right)_1 = \left(\frac{\Delta C}{\Delta I}\right)_{01} \quad (80)$$

und zugleich

$$C_0' = C_1' \quad (81)$$

ist. Es müssen also sowohl die Empfindlichkeiten aller drei Geber als auch die Grundkapazitäten der Geber C_0 und C_1 gleich groß gemacht werden.

Die erste Bedingung erfordert im wesentlichen die Herstellung genau gleicher Luftspalte für alle drei Geber, was werkstatttechnisch nicht ganz einfach ist. Kleinere Abweichungen können indessen durch Schrägstellung (vergl. Kap. 9 b) kompensiert werden. Zu diesem Zweck werden alle Geber parallel geschaltet und der Abgleich vermittelt der verstellbaren Supporte von C_0 und C_1 auf Spannungsminimum durchgeführt.

Die zweite Bedingung läßt sich in einfacher Weise befriedigen, indem die durch das Diodenvoltmeter gemessenen Teil-*HF*-Spannungen U_{hc_0} bzw. U_{hc_1} mit Hilfe der zu C_0 bzw. C_1 parallel geschalteten Trimmer C_{T0} und C_{T1} gleich groß gemacht werden (Abb. 9).

Was schließlich die Bestimmung der jeweils wirksamen mechanischen Amplituden ξ_v aus den Werten der ihnen proportionalen *NF*-Spannungen U_{a_v} anbelangt, so führt hier folgende Eichmethode zum Ziel:

Vermittelt des Modulationsübertragers $M\ddot{U}$ (Abb. 9) wird der *HF*-Oscillator mit variablem Modulationsgrad m^* moduliert und die jeweils am Ausgang des *NF*-Verstärkers auftretenden *NF*-Spannungen U_{a_v} gemessen. Es wird also mit andern Worten die Eichkurve $m^* = F(U_{a_v})$ aufgenommen. Ist aber der zu einer bestimmten Ausgangsspannung U_{a_v} gehörende Modulationsgrad, sowie die Empfindlichkeit $\left(\frac{\Delta C}{\Delta I}\right)_v$ bekannt, so liefert (77):

$$\xi_v = \frac{m^*}{\left(\frac{\Delta C}{\Delta I}\right)_v} \frac{C_v' \cdot n}{n - 1} = \frac{F(U_{a_v})}{\left(\frac{\Delta C}{\Delta I}\right)_v} \frac{C_v' \cdot n}{n - 1} \quad (82)$$

Zum Schluß noch kurz einige Worte über die Dimensionierung der Modulationsschaltung. Wie aus (76) hervorgeht, wird das Optimum von ΔU_{hc_v} erreicht, für $n = 2$, d. h. es ist zu wählen $C_v = C'_v$. Ausgeführt und gemessen wurde $C_v = 168,4 \text{ pF}$, weil der Wert von C'_v (einschließlich Streu- und Kabelkapazität) ca. 165 pF betrug. Wenn nun beispielsweise ein $\xi_v = 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ zugrunde gelegt wird, so ergibt sich bei einer mittleren Empfindlichkeit der kapaz. Geber $\left(\frac{\Delta C}{\Delta l}\right)_v = 20 \text{ pF cm}^{-1}$ eine Kapazitätsänderung $\Delta C_v^* = 10^{-2} \text{ pF}$, und mit $U_{h0} = 190 \text{ V}$ eine demodulierte NF -Spannung vom Effektivwert

$$u_v = \frac{u_{hc_v}}{\sqrt{2}} = \frac{190}{\sqrt{2}} \frac{10^{-2}}{4 \cdot 168 \cdot 4} = 2 \text{ mV}.$$

Dabei beträgt der Modulationsgrad: $m^* = 2,97 \cdot 10^{-5}$.

IV. Experimenteller Teil

Es werden hier einige Versuche beschrieben, die mit Hilfe der Apparatur im Sinne der Problemstellung in Kap. 4 an quasi-elastischen Stoffen durchgeführt worden sind. Indessen möchte ich ausdrücklich betonen, daß es sich bei diesen Versuchen erst um Anfänge einer Entwicklungsarbeit handelt, deren volles Ausmaß bis anhin noch gar nicht überblickt werden kann.

Das Versuchsprogramm umfaßt die Untersuchung der Abhängigkeit des Schubmoduls G und des Koeffizienten der inneren Reibung k :

1. von der Amplitude bei einer bestimmten Frequenz und Temperatur,
2. von der Temperatur bei einer bestimmten Amplitude und Frequenz,
3. von der Frequenz bei einer bestimmten Temperatur und Amplitude.

Unter „Amplitude“ wird dabei sinngemäß die Größe

$$\xi_{01} = \sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 - 2\xi_0\xi_1\cos\varphi}$$

verstanden; denn durch sie ist ja die gegenseitige periodische Verschiebung der Ebene $y=0$ gegenüber der Ebene $y=y_0$ der Versuchsschicht, also deren tatsächliche Deformation gekennzeichnet. Am einfachsten gestaltet sich die Aufnahme der unter 1. und 2. erwähnten Kurvenscharen, während der Versuch 3. insofern gewisse Schwierigkeiten bietet, als ξ_{01} selbst mit der Frequenz stark ändert. Um nun die gewünschte Konstanz von ξ_{01} bzw. u_{01} zu erzielen, wird die Amplitude ξ_0 mit Hilfe des Drehtransformators so reguliert, daß auch stets dem Frequenzgang bezüglich u_{01} Genüge geleistet ist.

Die Herstellung der Versuchsschichten bietet je nach der verwendeten Substanz unterschiedliche Schwierigkeiten. In jedem Fall aber müssen folgende Anforderungen erfüllt sein: Die Schicht

soll eben, von gleichmäßiger Dicke und möglichst homogen sein, d. h. sie darf keine Luftblasen enthalten, und schließlich soll ihre Verbindung mit der Unterlage einerseits und mit der Masse M_1 andererseits, so beschaffen sein, daß ein Rutschen ausgeschlossen ist. Wenn die Substanz plastisch oder sehr dünnflüssig ist, so muß außerdem dafür gesorgt werden, daß sie unter dem Gewicht von M_1 nicht zusammensinkt. Eine Änderung der Schichtdicke y_0 während der Messung hätte nämlich unabschätzbare Meßfehler zur Folge, weil der genaue elektrische Abgleich des Kondensatorsystems durch die dann auftretenden Schrägstellungen zerstört würde.

Zur Messung von y_0 und zur ständigen bequemen Nachkontrolle dieses Wertes wurden drei Konus-Fühllehren angefertigt, die bei je 10 mm Konuslänge den Durchmesserbereich von 1.0—2.5 mm umfaßten. Mit Hilfe dieser Lehren war es möglich, den Mittelwert der Schichtdicke mit einer durchschnittlichen Genauigkeit von ca. ± 0.1 mm festzustellen.

Als Material für die erste Versuchsreihe wurde Gelatine gewählt. Es handelt sich dabei um ein sog. Hydrogel, das infolge seines hohen Dampfdruckes für die Zwecke der Großprojektion zwar nicht in Frage kommt, aber dennoch wegen seiner geringen plastischen Eigenschaften bei mittleren Temperaturen den Voraussetzungen des Voigt'schen Idealstoffes am ehesten zu entsprechen schien. Erst in zweiter Linie wurde dann eine Substanz untersucht, die bereits bei den Vorversuchen zur AfiF-Großprojektion mit Erfolg verwendet worden war. Es betrifft dies ein Präparat, das aus dem Kunstgummi Oppanol (I. G. Farbenindustrie) unter Mineralölzusatz gewonnen wird, und das allen Ansprüchen hinsichtlich des im Vacuum erforderlichen geringen Dampfdruckes von höchstens 10^{-5} mm Hg leicht angepaßt werden kann.

11. Die Versuchsergebnisse

a) Gelatine

Gelatine wurde in warmem, destilliertem Wasser gelöst. Darauf wurde das Wasser zum größten Teil zum Verdampfen gebracht, pro cm^3 Gelatine ca. 0.1 cm^3 Glycerin zugesetzt und die

so entstandene Mischung zur Entfernung der Luftblasen längere Zeit bei ca. 70 ° C stehen gelassen. Unterdessen wurde die „Masse“ M_1 nach leichter Anwärmung von der als Schichtträger dienenden, ebenfalls angewärmten Grundplatte durch Distanz-

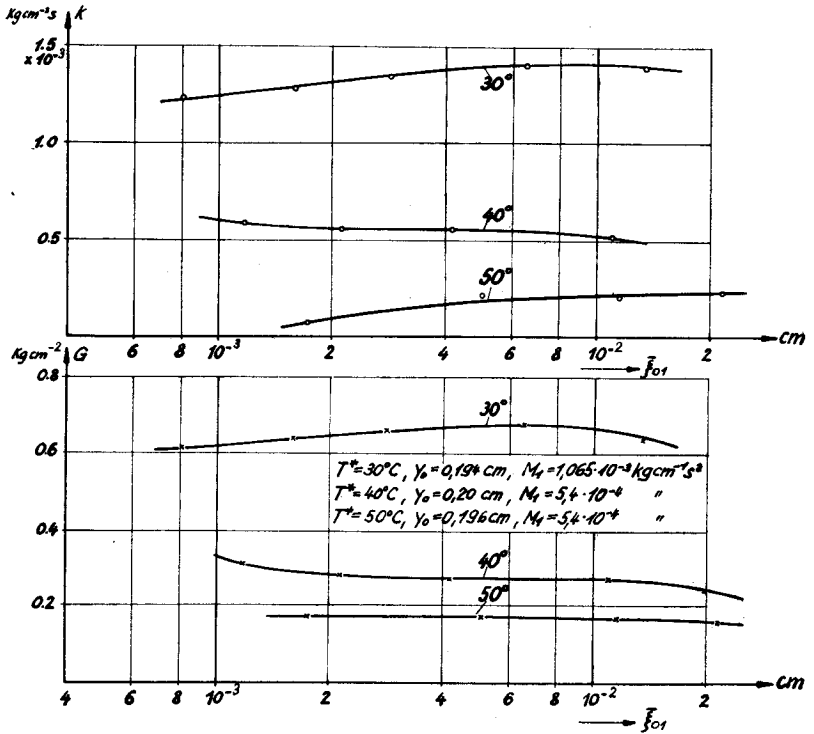


Abb. 23. Verlauf von G und k bei Gelatine in Funktion der Deformationsamplitude ξ_{01} mit $f = 50 \text{ Hz}$, $T^* = 30, 40, 50^\circ \text{C}$.

stücke distanziert, und zwar in der Weise, daß unterhalb von „ M_1 “ gerade die gewünschte Fläche F (ca. 30—40 cm^2) entstand. Hernach wurde die Gelatinemischung in flüssigem Zustand in den so gebildeten Hohlraum hineingegossen — wobei die Kapillarität die gleichmäßige Ausbreitung unterstützte — und das Ganze bis zum Erkalten sich selbst überlassen. Durch dieses Vorgehen wurde, abgesehen von der gleichmäßigen Schichtdicke, auch ein absolut sicheres Haften der Schicht an den beiden Grenzflächen erreicht.

Die Versuchsergebnisse, welche mit dieser Schicht auf Grund von Gl. (50), (51), Teil III, erhalten wurden, sind in Abb. 23, 24, 25 dargestellt. Abb. 26 zeigt speziell noch den Verlauf von x^* und $\operatorname{tg} \varphi$ in Funktion der Frequenz. Es ist bemerkenswert,

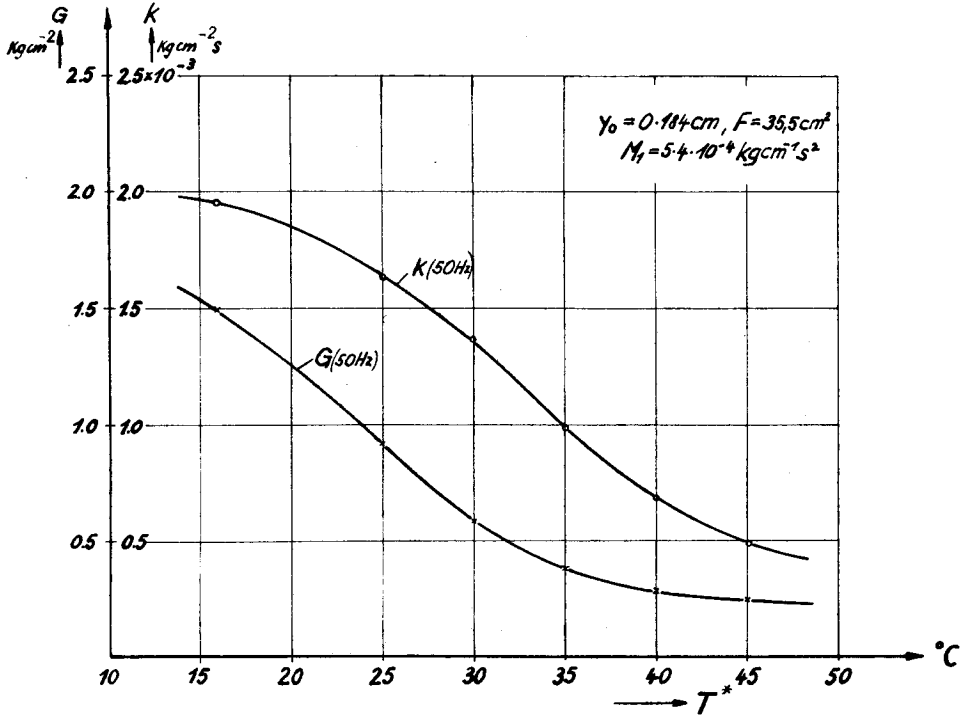


Abb. 24. Verlauf von G und k bei Gelatine in Funktion der Temperatur T^* mit $f = 50 \text{ Hz}$, $\xi_{01} = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

gerade bei diesen letzteren Kurven in allen wesentlichen Zügen Übereinstimmung mit jenen der Abb. 17 feststellen zu können, die bekanntlich für einen idealen Voigt'schen Körper gelten. Die in Kap. 7 b) entwickelte Theorie wird dadurch im wesentlichen bestätigt. Um vom Gang der Versuchsauswertung eine Vorstellung zu vermitteln, ist ein Teil des zu Abb. 25 und 26 gehörenden Zahlenmaterials ($T^* = 40^\circ \text{ C}$) in Tabelle 1 zusammengestellt worden.

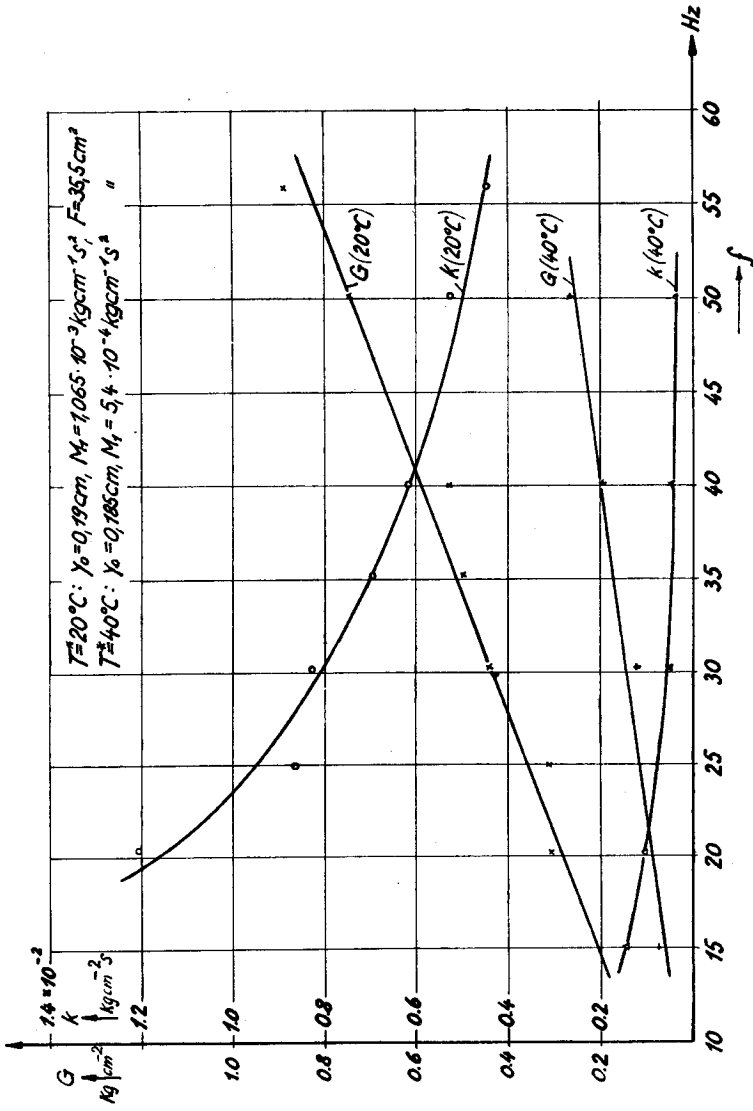


Abb. 25. Verlauf von G und k bei Gelatine in Funktion der Frequenz f mit $T^* = 20, 40^{\circ}\text{C}$, $\xi_{01} = 4.5 \cdot 10^{-4}$, bzw. $2.1 \cdot 10^{-3}\text{ cm}$.

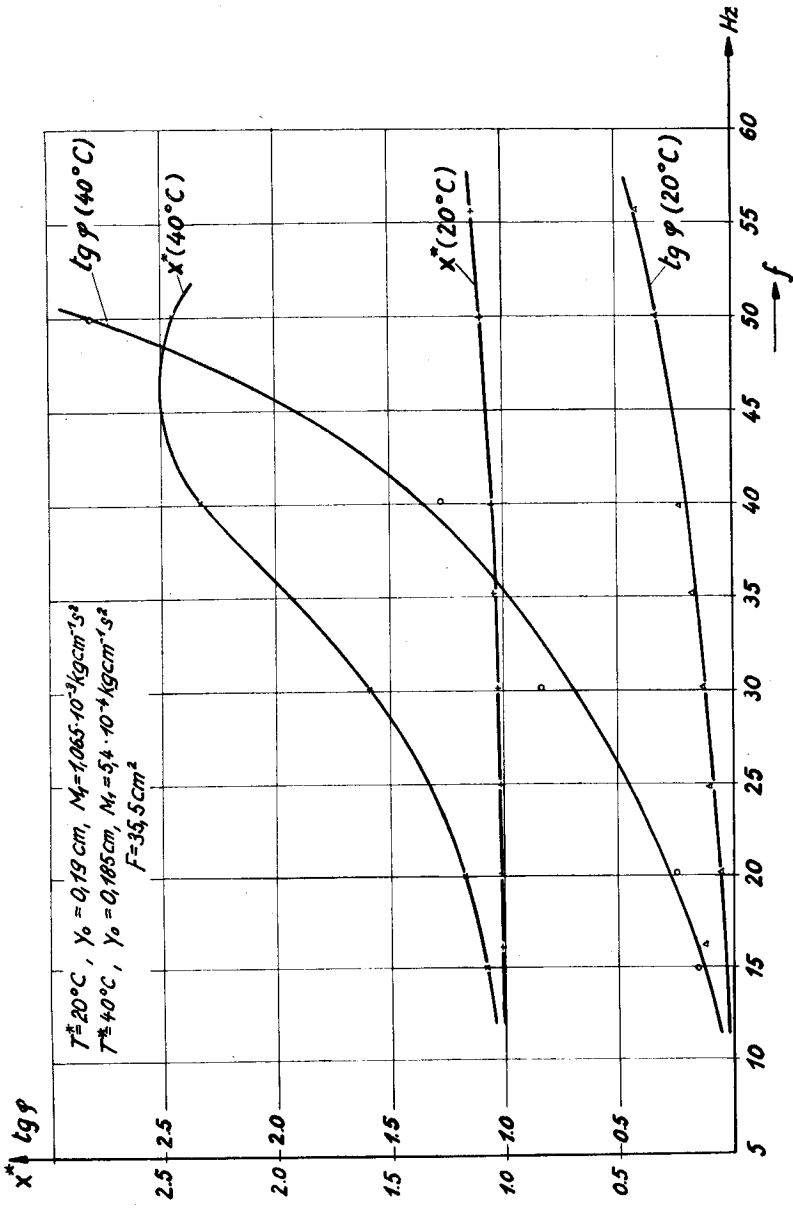


Abb. 26. Verlauf von x^* und $\text{tg } \varphi$ bei Gelatine in Funktion der Frequenz f mit $T^* = 20, 40^\circ\text{C}$, $\xi_{01} = 4,5 \cdot 10^{-4}$, bzw. $2,1 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

Zu beachten ist hierin der Frequenzgang der Werte u_{01} . Derselbe rührt nämlich von der Berücksichtigung des Frequenzganges des NF -Teils der Apparatur her, was bekanntlich notwendig ist, um unabhängig von der Frequenz eine konstante Deformationsamplitude ξ_{01} einzuhalten.

Was schließlich die verschiedenen Meßresultate bezüglich G und k selbst anbelangt, so fällt zunächst die sehr geringe Amplitudenabhängigkeit auf. In dieser Hinsicht würde also die Gelatine den Voraussetzungen der Theorie entsprechen. Demgegenüber weisen jedoch dieselben Größen eine ganz erhebliche Abhängigkeit von der Temperatur und der Frequenz auf. Die Temperaturabhängigkeit ist dabei derart, daß sowohl G als auch k mit steigender Temperatur stetig abnehmen, und zwar scheint sich G dem Wert Null und k einem endlichen Wert asymptotisch zu nähern. Es handelt sich hier um ein Verhalten, das ganz plausibel erscheint angesichts der Tatsache, daß Gelatine bereits bei einer Temperatur von ca. 50°C zu schmelzen beginnt und damit die Eigenschaften einer zähen Flüssigkeit annimmt. Der Koeffizient der inneren Reibung würde dann sinngemäß die Bedeutung einer Zähigkeit oder Viskosität erhalten.

Eine ganz erhebliche Abweichung gegenüber der Theorie zeigt auf der andern Seite die Frequenzabhängigkeit; denn hier nimmt G mit der Frequenz ungefähr linear zu, k dagegen ab, während beide Werte bei einem idealen Voigt'schen Körper konstant bleiben sollten.

Um über die Genauigkeit der Meßresultate Aufschluß zu gewinnen, ist eine Fehlerrechnung durchgeführt worden, die zu folgenden Ergebnissen geführt hat: Die totalen mittleren prozentualen Fehler $\left(\frac{\Delta G}{G}\right)_m$ und $\left(\frac{\Delta k}{k}\right)_m$ sind in überwiegendem Maße von der Genauigkeit der Messung der Spannungen u_{a_v} abhängig. Sie werden am kleinsten bei einer mittleren Frequenz ($\cos \varphi = 0,8-0,6$) und betragen in diesem Fall bei einem prozentualen Fehler $\left(\frac{\Delta u_{a_v}}{u_{a_v}}\right) = 1\%$ hinsichtlich G ca. 3% und hinsichtlich k ca. 2% . Bei einer kleinen Frequenz ($\cos \varphi \cong 0,98$) werden die

Tabelle 1. (Zu Versuch a) Frequenzabhängigkeit von G und k bei einer Schicht aus Gelatine mit $\xi_{0,1} = 2,10 \cdot 10^{-3}$ cm, $T^* = 40^\circ \text{C}$ und $M_1 = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^2$, $y_0 = 0,185$ cm, $F = 35,5 \text{ cm}^2$.

Tour./ min. n	Hz f	s^{-1} ω	s^{-2} ω^2 $\times 10^4$	Volt U_0^*	Volt U_1	Volt $U_{0,1}$	x^*	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\frac{x^* (x^* - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi + (x^* - \cos \varphi)^2}$	$\frac{x^* \sin \varphi}{\sin^2 \varphi + (x^* - \cos \varphi)^2}$	kg cm^{-2} G	$\text{kg cm}^{-2} \text{ s}$ k $\times 10^{-3}$
903	15,0	94,5	0,89	4,54	4,85	0,79	1,07	0,9880	0,155	2,87	5,41	0,07	1,44
1202	20,1	126,0	1,59	3,04	3,56	0,97	1,17	0,9708	0,240	3,39	2,88	0,11	1,02
1814	30,2	190,0	3,61	1,46	2,33	1,22	1,59	0,7635	0,640	1,19	0,93	0,12	0,50
2403	40,1	251,8	6,34	0,70	1,48	1,19	2,13	0,6185	0,785	1,11	0,58	0,20	0,41
3002	50,1	314,8	9,89	0,44	1,07	1,04	2,44	0,3349	0,942	0,97	0,43	0,27	0,38

*) Diese Werte wurden aus der Eichkurve des Diodenvoltmeters ermittelt und sind dann auf jeweils gleiche Stellung des Eingangs-Spannungsteilers S_{IV} am NF-Verstärker umgerechnet worden.

Tabelle 2. (Zu Versuch b) Frequenzabhängigkeit von G und k bei einer Schicht aus Oppanol mit Paraffin-Ölzusatz mit $\xi_{0,1} = 5,7 \cdot 10^{-3}$ cm, $T^* = 20^\circ \text{C}$ und $M_1 = 1,065 \cdot 10^{-3} \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^2$, $y_0 = 0,202$ cm, $F = 36,5 \text{ cm}^2$.

Tour./ min. n	Hz f	s^{-1} ω	s^{-2} ω^2 $\times 10^4$	Volt U_0	Volt U_1	Volt $U_{0,1}$	x^*	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\frac{x^* (x^* - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi + (x^* - \cos \varphi)^2}$	$\frac{x^* \sin \varphi}{\sin^2 \varphi + (x^* - \cos \varphi)^2}$	kg cm^{-2} G	$\text{kg cm}^{-2} \text{ s}$ k $\times 10^{-4}$
835	13,9	87,4	0,764	3,66	5,75	1,99	1,57	1,000	—	2,754	—	0,124	—
995	16,6	104,0	1,08	2,36	4,59	2,48	1,94	0,958	0,287	1,819	0,529	0,116	3,24
1207	20,1	126,1	1,54	1,07	3,82	3,02	3,57	0,857	0,515	1,270	0,241	0,119	1,79
1406	23,4	147,0	2,16	0,46	3,14	3,36	4,92	0,071	0,997	0,974	0,200	0,124	1,73
1625	27,1	170,0	2,89	1,12	2,42	3,52	2,16	-0,856	0,516	0,695	0,118	0,118	1,18
1815	30,2	190,0	3,61	1,48	2,00	3,56	1,35	-0,994	0,105	0,575	0,026	0,122	0,29
2106	35,1	220,0	4,84	1,90	1,465	3,44	0,77	-0,999	0,051	0,437	0,012	0,124	0,16
2412	40,2	252,0	6,35	2,20	1,10	3,27	0,50	-0,845	0,534	0,320	0,127	0,120	1,88
2700	45,0	282,5	7,98	2,26	0,86	3,08	0,38	-0,761	0,649	0,250	0,143	0,117	2,37
3003	50,0	314,0	9,86	2,38	0,665	2,88	0,28	-0,636	0,772	0,180	0,151	0,104	2,80
3302	55,0	346,0	12,0	2,38	0,545	2,72	0,23	-0,448	0,894	0,124	0,163	0,088	3,32

Fehler jedoch wesentlich größer und erreichen dann Beträge bis zu 10 %, resp. 14 %. Angesichts dieser Tatsache erscheint somit eine weitere Vergrößerung der Fehler durch ungenaue Auswertung, infolge vielfach unzureichender Rechenschiebergengenauigkeit untragbar. Sämtliche Zahlenrechnungen wurden deshalb mit einer Rechenmaschine durchgeführt.

b) Oppanol

Oppanol B 200, ein Kunstgummiprodukt von makromolekularer Kettenstruktur, wurde in Trichloräthylen gelöst. Dann wurde der Lösung auf je 1 Teil Oppanol 8 Teile Paraffinöl zugesetzt, und darauf die so entstandene zähflüssige Masse in einen Rahmen gegossen, der auf die als Schichtträger dienende Grundplatte aufgesetzt werden konnte und dessen Ränder zur späteren leichteren Lösbarkeit mit Gelatine bestrichen worden waren.

Da nun das Lösungsmittel fortlaufend verdunstete, mußte dieser Aufgußprozeß mehrmals wiederholt werden, bis die gewünschte Schichtdicke erreicht war. Nach Entfernung des Rahmens, der zu diesem Zweck leicht erhitzt wurde und ferner demontabel ausgeführt war, mußten nur noch die infolge des Meniskus entstandenen Ränder der Schicht mit der Schere abgeschnitten werden. Dann wurde die „Masse“ M_1 vorsichtig aufgesetzt, um den Einschluß von Luftblasen zu verhüten. So wurde also auch hier eine absolut ebene Schicht sichergestellt, wobei deren Haften an den beiden Grenzflächen jetzt allein durch die Klebrigkeit des im Öl gequollenen Oppanols gewährleistet war.

Die Versuchsergebnisse, die sich mit dieser Schicht ergaben, sind aus Abb. 27, 28, 29 ersichtlich. Auch hier wurde wiederum der Verlauf von x^* und $\operatorname{tg} \varphi$ in Funktion der Frequenz zur Darstellung gebracht (Abb. 30) und zwar aus dem Grunde, weil es sich diesmal um den in Kap. 8 erwähnten zweiten typischen Fall handelt, bei dem $k_1^2 < \lambda_1 M_1$ ist. (Im Gegensatz zur Gelatine, bei der $k_1^2 > \lambda_1 M_1$ war.) Wie auf Grund der Theorie zu erwarten war, sind denn die beiden Unendlichkeitsstellen des $\operatorname{tg} \varphi$ auch tatsächlich vorhanden. Das zu Abb. 29 und 30 gehörende Zahlenmaterial findet sich in Tabelle 2.

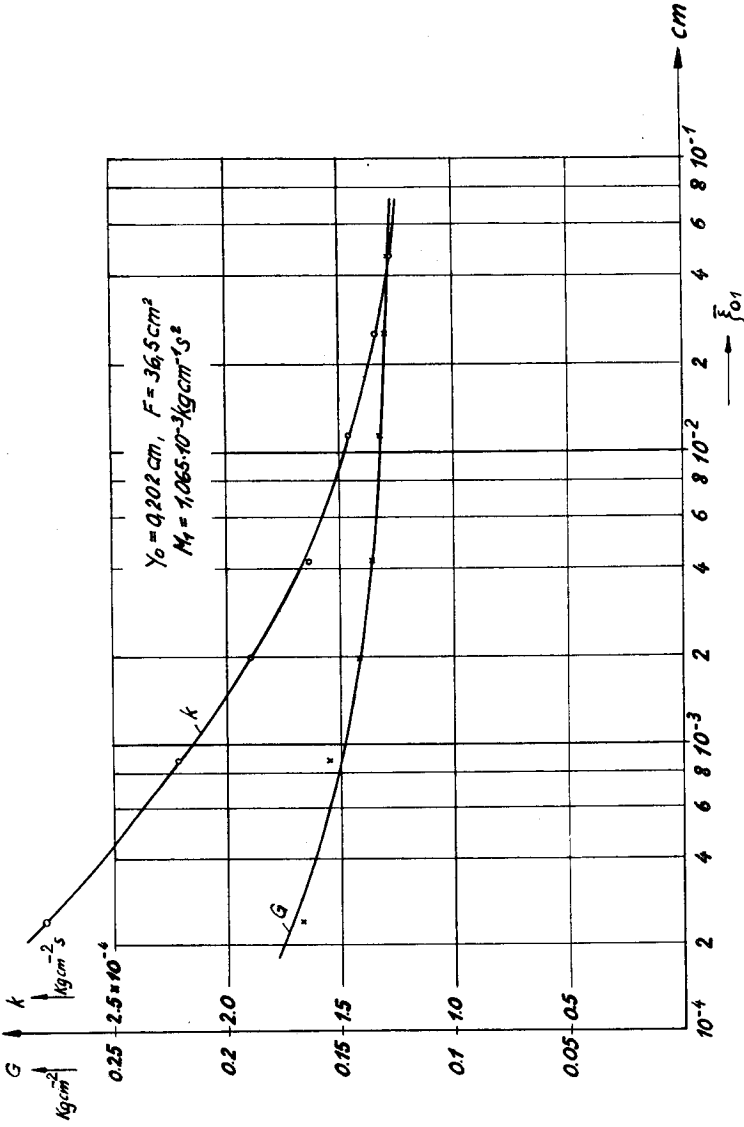


Abb. 27. Verlauf von G und k bei Oppanol in Funktion der Deformationsamplitude ξ_{01} mit $f = 25 \text{ Hz}, T^* = 20^\circ \text{ C}$.

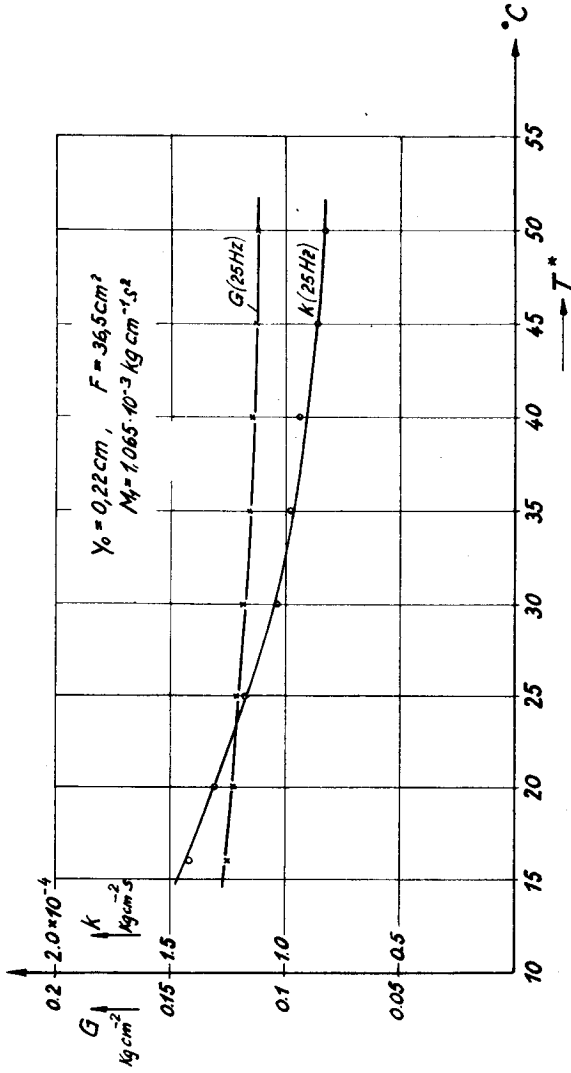


Abb. 28. Verlauf von G und k bei Oppanol in Funktion der Temperatur T^* mit $f = 25\text{ Hz}$, $\xi_{01} = 1.28 \cdot 10^{-2}\text{ cm}$.

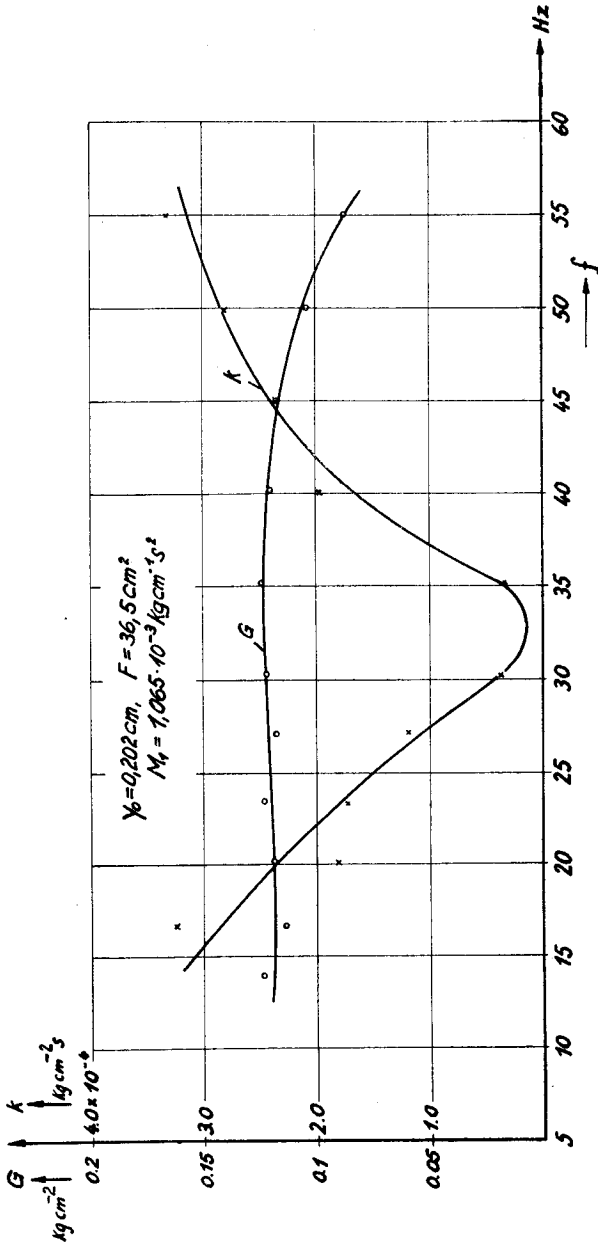


Abb. 29. Verlauf von G und k bei Oppanol in Funktion der Frequenz f mit $T^* = 20^\circ \text{ C}$,
 $\xi_{01} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

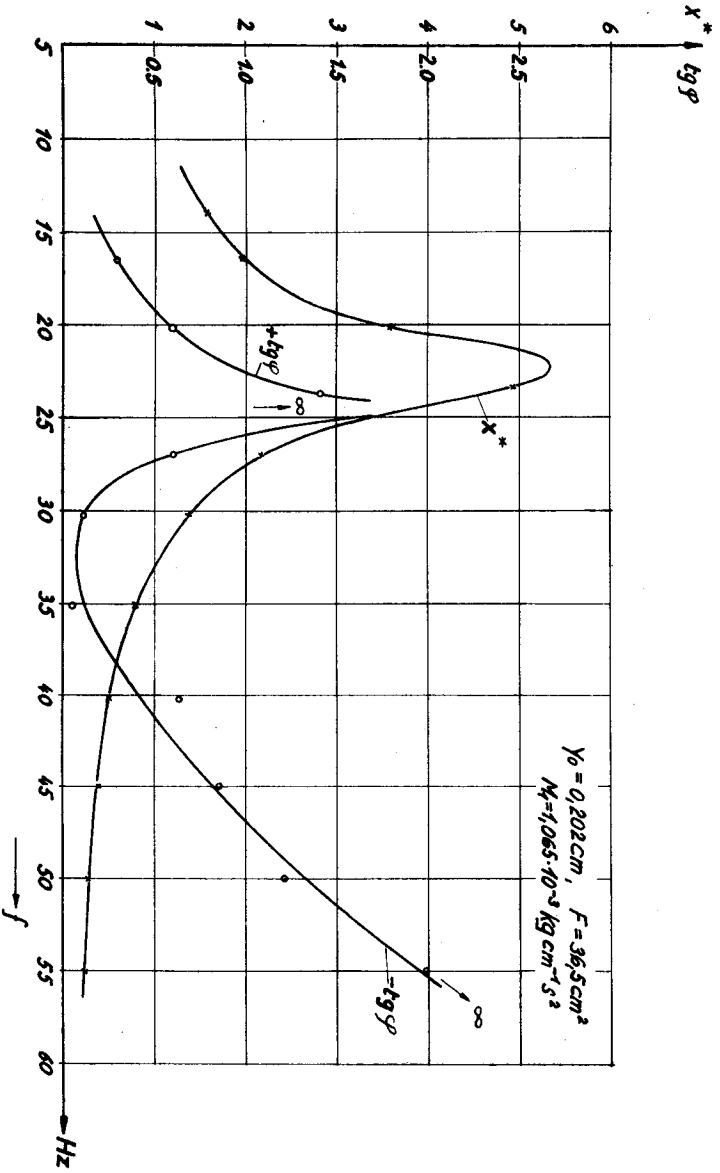


Abb. 30. Verlauf von x^* und $\text{tg } \varphi$ bei Oppanol in Funktion der Frequenz f mit $T^* = 20^\circ \text{ C}$,
 $\xi_{01} = 5.7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

An den Meßresultaten fällt zunächst die geringe Temperaturabhängigkeit von k und die noch geringere von G auf, gegenüber den entsprechenden Werten bei der Gelatine. Aber auch die Amplituden- und Frequenzabhängigkeit von G hält sich in relativ engen Grenzen und entspricht somit einigermaßen der Voigt'schen Theorie. Anders jedoch k , das merkwürdigerweise, und übrigens ebenso wie G , mit sinkender Amplitude ξ_{01} ziemlich stark ansteigt, und außerdem bezüglich der Frequenz noch weit größere Schwankungen aufweist. So erreicht z. B. der Koeffizient der inneren Reibung bei ca. 32 Hz ein Minimum, dessen Wert um mehr als eine Zehnerpotenz kleiner ist als derjenige bei 15 bzw. 50 Hz. Daraus geht hervor, daß hinsichtlich der viskosen Komponente des Voigt'schen Körpers die Voraussetzung der Theorie als nicht mehr hinreichend erfüllt anzusehen ist.

12. Rückblick und Schlußfolgerungen

Die vorliegende Arbeit bezweckte die Abklärung eines Teils der physikalisch-mechanischen Probleme, welche bei der Einführung eines festen Eidophors bei der AfiF-Großprojektion auftreten. Dazu war es notwendig, zunächst die mechanischen Ansätze der allgemeinen Theorie des Eidophors endlicher Schichtdicke einer Prüfung zu unterziehen. Ausgehend von der Theorie der Idealstoffe konnte zunächst gezeigt werden, daß der Voigt'sche Ansatz, welcher zur Beschreibung des Bilderzeugungsvorganges in erster Annäherung gewählt worden war, so lange gerechtfertigt ist, als plastische Erscheinungen außer Betracht fallen.

Des weiteren wurde ein Verfahren ausgearbeitet und besprochen, das gestattete, die charakteristischen mechanischen Konstanten eines solchen Voigt'schen Idealstoffes, nämlich den Schubmodul G und den Koeffizienten der inneren Reibung k zu messen. Über den Weg, der zur Erreichung dieses Zieles eingeschlagen werden sollte, bestand jedoch nicht von Anfang an Klarheit, weil auf entsprechende Literatur und experimentelle Vorarbeiten nur in sehr spärlichem Ausmaß Bezug genommen werden konnte.

Schließlich wurde beschlossen, eine dynamische Meßmethode zur Anwendung zu bringen, die mit erzwungenen sinusförmigen Schwingungen von veränderlicher Amplitude und Frequenz arbeitet. Dabei sollte durch Erzeugung eines eindeutigen eindimensionalen Spannungszustandes im Meßobjekt auf die Inkompressibilität der zu untersuchenden Substanzen Rücksicht genommen, und so alle Gewähr für einwandfreie Meßresultate geboten werden.

Die vorerwähnten Gesichtspunkte, sowie die in Kap. 2 dargelegten Gründe führten dazu, den einfachsten eindimensionalen Spannungszustand, nämlich den der reinen Scherung mit einer reinen Schubspannung zu wählen. Es kann jetzt festgestellt werden, daß die auf Grund dieser Erwägungen ausgeführte Konstruktion des Schütteltisches, sowie das benützte spezielle Verfahren zur elektrischen Messung des Phasenunterschiedes zweier mechanischer Schwingungen sich durchaus bewährt hat. Jedenfalls konnten die Messungen zur Untersuchung von Punkt 1 und 2 der in Kap. 4 umrissenen Problemstellung mit Erfolg durchgeführt werden und zwar sowohl an sehr steifen als auch an fast flüssigen Versuchssubstanzen.

Aber auch Punkt 3 der vorerwähnten Problemstellung konnte abgeklärt werden. Als Kriterium diente hierzu der Umstand, daß auf Grund der in Abschnitt III dargestellten Theorie des verwendeten Meßverfahrens die gemessenen Werte von G und k sowohl von der Frequenz als auch von der Amplitude unabhängig sein mußten, wenn die Voigt'sche Theorie zu Recht bestand. Anhand der Versuchsergebnisse konnte jedoch nachgewiesen werden, daß diese Theorie meist nicht erfüllt war und zwar umso weniger, je größere Frequenz- und Amplitudenänderungen ins Auge gefaßt wurden.

In ganz besonderem Maße betrafen dabei diese Abweichungen das Verhalten der viskosen Komponente des Voigt'schen Idealstoffes; denn die vorausgesetzte lineare Abhängigkeit der inneren Reibung von der Deformationsgeschwindigkeit konnte wegen der starken Frequenzabhängigkeit des Koeffizienten k weder bei der Gelatine noch beim Oppanol bestätigt werden. Beim Oppanol erwies sich außerdem die Amplitudenabhängigkeit von k als erheblich.

Natürlich vermochten die wenigen mit dem neuen Meßverfahren bis anhin durchgeführten Versuche noch kein abschließendes Bild zu vermitteln über die Richtigkeit oder den Gültigkeitsbereich der Voigt'schen Hypothese bei quasi-elastischen bzw. visko-elastischen isotropen Substanzen im allgemeinen. Immerhin sei in diesem Zusammenhang auch auf die Ergebnisse von Untersuchungen hingewiesen, welche von verschiedenen Autoren zur Erforschung der inneren Reibung kristalliner Substanzen durchgeführt worden sind.

So hat z. B. schon *W. Voigt* in seiner bereits früher erwähnten Arbeit (Lit. 10) die Richtigkeit der von ihm selbst aufgestellten Hypothese einer experimentellen Prüfung unterzogen und zwar mit Hilfe von Ausschwingversuchen an einseitig eingespannten Metallstäben. Die gleiche Methode, nur in wesentlich verfeinerter Form, wurde dann später auch von *K. Sezawa* und *K. Kubo* (Lit. 21) zur Anwendung gebracht. Sie kamen dabei zum interessanten Resultat, daß der Koeffizient der inneren Reibung von Metallen „bei einer relativ großen Amplitude nahezu zweimal so groß war wie bei der Amplitude Null“.

Wie sind nun aber die konstatierten Abweichungen von der Idealstofftheorie zu erklären?

Hier muß man sich im Klaren sein, daß die Beantwortung dieser Frage im einzelnen wohl kaum möglich sein wird, doch können den Ausführungen des Kap. 1 e) qualitative Hinweise entnommen werden. So findet z. B. die Frequenzabhängigkeit des Schubmoduls G in der dort besprochenen Kuhn'schen Relaxationstheorie ihre einleuchtende Erklärung. Besonders auffallend ist denn auch die Übereinstimmung hinsichtlich der beobachteten Frequenzcharakteristik des Schubmoduls bei der Gelatine.

Hingegen muß die Kuhn'sche Relaxationstheorie naturgemäß bei der Erklärung des Frequenzganges des Koeffizienten der inneren Reibung versagen; denn bei der aus Fließversuchen zu bestimmenden Zähigkeit oder Viskosität η und bei der aus periodischen Wechselbeanspruchungen gewonnenen inneren Reibung k handelt es sich um grundverschiedene Begriffe, die trotz ihrer scheinbaren Verwandtschaft nicht das Geringste miteinander zu tun haben.

Man kann sich zwar vorstellen, daß den verschiedenen „Zusammenhaltsmechanismen“ eines Stoffes sinngemäß auch verschiedene Reibungskoeffizienten k_i entsprechen müßten, doch vermöchte dieser Umstand am Gesamtergebnis nur dann etwas zu ändern, wenn diesen Bindungsmechanismen auch ganz verschiedene Deformationsgeschwindigkeiten zugeordnet wären. Eine solche Hypothese hätte aber wenig Wahrscheinlichkeit für sich, ganz abgesehen von der meßtechnischen Unmöglichkeit, die so definierten Werte k_i überhaupt einzeln bestimmen zu können.

Daß beim Oppanol ein der Gelatine ähnlicher Frequenzgang, zumindest im untersuchten Frequenzbereich, nicht festzustellen ist, hängt wahrscheinlich zusammen mit einer gewissen Entartung des Spektrums der Relaxationszeiten, welche hier durch das große Molekulargewicht bedingt sein mag. Gerade beim Oppanol B 200 *) handelt es sich ja um einen jener hochmolekularen Stoffe mit Fadenstruktur, deren hochelastisches Verhalten nach *W. Kuhn* durch das gleichzeitige Vorhandensein einer einzigen sehr großen Relaxationszeit und einer Gruppe extrem kleiner Relaxationszeiten charakterisiert werden kann.

Für die dadurch hervorgebrachten plastischen Eigenschaften und nicht-elastischen Effekte im Sinne etwa des Prandtl'schen Gedankenmodells (Lit. 12) spricht denn auch die eigenartige Amplitudenabhängigkeit der untersuchten Oppanolprobe.

Trotz dieses negativen Befundes büßt aber der Voigt'sche Ansatz seine Bedeutung für die Theorie der Bilderzeugung bei der AfiF-Teleidoskop-Großprojektion keineswegs ein. Denn glücklicherweise haben die Deformationen hier eine konstante Frequenz, sodaß der Frequenzgang von G und k belanglos erscheint. Nicht so freilich eine allfällige Amplitudenabhängigkeit.

*) Für Naturkautschuk gilt vergleichsweise:

Polymerisationsgrad	1 000	
Molekulargewicht	68 000	(Oppanol B 200 200 000)
Anzahl der Atome im Molekül	13 000	
Kettenlänge in Å^0	4 500	
Verhältnis von Moleküllänge zu Moleküldurchmesser	1 640	

Gelänge es jedoch, eine Substanz zu finden, die sich insbesondere auch im Gebiet der sehr kleinen Amplituden der Eidophor-deformationen in genügendem Maße linear verhielte, so wäre gleichwohl das Problem des festen Eidophors als gelöst zu betrachten.

Was also die weitere Entwicklungsarbeit anbelangt, so wird gerade der vorstehend erwähnte Gesichtspunkt in vermehrtem Maße Berücksichtigung finden müssen, und es wird deshalb auf Grund der bisher vorliegenden Ergebnisse und Erfahrungen (geringe Amplitudenabhängigkeit bei der Gelatine) empfehlenswert sein, systematische Untersuchungen, vornehmlich an niedermolekularen Substanzen (Hemi- oder Mesokolloide) durchzuführen. Daneben bestünde aber die Aufgabe nach wie vor darin, die mechanischen Eigenschaften dieser Substanzen den in Kap. 4 berechneten „idealen“ Daten des festen Eidophors so weit als möglich anzugleichen.

Zusammenfassend darf somit gesagt werden, daß die Ziele, die mit der vorliegenden Arbeit angestrebt wurden, zum größten Teil erreicht, und daß das physikalisch-mechanische Problem des festen Eidophors einer weitgehenden Abklärung entgegengeführt worden ist.

Literaturverzeichnis

1. *F. Fischer*, Ein neues Verfahren der Fernsehgroßprojektion. Schweiz. Archiv. f. angewandte Wissenschaft und Technik, 6. Jahrg., No. 2 (1940).
2. *F. Fischer* und *H. Thiemann*, Theoretische Betrachtungen über ein neues Verfahren der Fernsehgroßprojektion. 1. Mitteilung. Schweiz. Arch. f. a. W. u. T., 7. Jahrg., No. 1 und 2 (1941).
3. — Theoretische Betrachtungen über ein neues Verfahren der Fernsehgroßprojektion. 2. Mitteilung. Schweiz. Arch. f. a. W. u. T., 7. Jahrg., No. 11 und 12 (1941).
4. — Theoretische Betrachtungen über ein neues Verfahren der Fernsehgroßprojektion. 3. Mitteilung. Schweiz. Arch. f. a. W. u. T., 8. Jahrg., No. 5 und 6 (1942).
5. *R. Houwink*, Elastizität, Plastizität und Struktur der Materie (1933).
6. First Report on Viscosity and Plasticity. Kon. Akad. Wetens. Amsterdam 1935.
7. *K. Hohememser* und *W. Prager*, Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. Ztschr. f. angew. Mathematik und Mechanik, Bd. 12, 4 (1932).
8. *J. C. Maxwell*, Phil. Trans. Roy. Soc. 157, 49 (1868).
9. *Everts* und *W. Curt*, Der Einfluß der Zeit bei der Dehnung von Weichgummi unter konstanter Belastung. Diss. T. H. Darmstadt.
10. *W. Voigt*, Über innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. Annalen der Physik und Chemie 47, 1892.
11. *W. Kuhn*, Beziehungen zwischen Viskosität und elastischen Eigenschaften amorpher Stoffe. Ztschr. f. physikal. Chemie, Abt. B, 42 (1939).
12. *L. Prandtl*, Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. Ztschr. f. angew. Mathematik und Mechanik, Bd. 8, 1928.
13. *R. Becker*, Über die Plastizität amorpher und kristalliner fester Körper. Physikal. Ztschr. 26, 1925.
14. *K. Frey*, Der Einfluß der Temperatur auf das Verhalten mechanisch beanspruchter organischer Werkstoffe. Schweiz. Arch. f. a. W. u. T., 10. Jahrg., No. 2 (1944).

15. *W. Braunbeck*, Fließen und Nachwirkungserscheinungen bei zähen Stoffen. Ztschr. f. Physik 57, 1929.
16. *O. Föppl*, Theoretische Betrachtungen über die elastischen Eigenschaften der Werkstoffe, insbesondere des Gummi. Mitteilungen des Wöhler-Inst. Braunschweig, Heft 31 (1937).
17. *A. Föppl*, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 3.
18. *E. Madelung* und *S. Flügge*, Über Viskoelastizität. Ann. der Physik, 5. Folge, Bd. 22 (1935).
19. *K. Löffler*, Kapazitive Geber mit geradlinigem Kapazitätsverlauf über großen Meßbereich. Die Meßtechnik, Heft 4, 1937.
20. *R. v. Radinger*, Meßeinrichtung zur Bestimmung akustischer und mechanischer Widerstände aus ihrer Rückwirkung auf ein elektrodynamisches Antriebssystem. Diss. T. H. Berlin.
21. *H. Sezawa* und *K. Kubo*, Measurements of the solid viscosities of metals through the flexural vibrations of a bar. Reports of the Aeron. Res. Inst. Tokyo, VII, 1932.

Lebenslauf

Ich wurde am 30. Juli 1911 in Kobe (Japan) geboren, wo mein Vater, Franz Popert, als kaufmännischer Leiter einer größeren europäischen Exportfirma vorstand.

Mein Bildungsgang ist folgender:

Die Primarschuljahre verbrachte ich in Zürich. Später besuchte ich, infolge Umzuges nach Deutschland, das Realgymnasium in Wiesbaden-Biebrich, das ich am 13. März 1931 mit der Matura verließ.

Nach Absolvierung der Sap.- und Mi. R. S. in Brugg immatrikulierte ich mich im Herbst 1931 an der Abt. für Elektrotechnik an der T. H. Darmstadt für vier Semester, unterbrochen durch Praxis in verschiedenen Gießereien, sowie in der Hauptwerkstatt der Rät. Bahn in Landquart.

Im W. S. 1933 setzte ich das Studium an der Abt. für Elektrotechnik an der E. T. H. fort und schloß es Ende 1936 mit dem Diplom als Elektroingenieur E. T. H. ab.

Seit 1937 war ich bei Herrn Prof. Dr. F. Fischer am Institut für techn. Physik mit theoretischen und experimentellen Untersuchungen über den „Son raucque“ an Lautsprecher-Kegelmembranen beschäftigt und hatte daneben von 1937 bis 1939 die Stelle eines Halbassistenten am Institut für techn. Akustik an der E. T. H. bei Herrn Priv.-Doz. F. M. Osswald inne.

Die vorliegende Arbeit wurde im Herbst 1940 am Inst. für techn. Physik an der E. T. H. begonnen und im Herbst 1943 zu Ende geführt.

Seit Juni 1944 bin ich als Ingenieur der Fa. AG. Brown Boveri & Cie. in Baden in einem Versuchslokal tätig.

Friedrich Popert.