

Berechnungen und Modellversuche über Druckwellen grosser Amplituden in Auspuff-Leitungen

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ERNST JENNY

DIPL. MASCH.-ING. E. T. H.
VON ENNENDA

Referent: Herr Prof. Dr. G. Eichelberg

Korreferent: Herr Prof. Dr. J. Ackeret

BASEL 1949 AMEBA-DRUCK

Leer - Vide - Empty

M e i n e n E l t e r n

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Bezeichnungen	6
Vorwort	8
Einleitung	9
<u>Abschnitt I : Die Versuchsanlage</u>	13
<u>Abschnitt II : Anschauliche Ableitung der instationären Grundgleichungen</u>	24
§ 1. Das graphische Verfahren der instationären Gasdynamik	24
§ 2. Randbedingungen	42
§ 3. Der Auspuffvorgang in eine Leitung mit offenem Ende	60
§ 4. Der Einfluss der durch Drosselung entstandenen Inhomogenität	70
<u>Abschnitt III: Die eindimensionale Strömung unter Berücksichtigung der Reibung, Wärmezufuhr und Querschnittsänderung</u>	71
§ 1. Die Grundgleichungen	71
§ 2. Einführung in die Charakteristiken-Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme nach Sauer	74
§ 3. Die Konstruktion der Charakteristiken zur Ermittlung der allgemeinen eindimensionalen instationären Strömung	80
§ 4. Der Einfluss der Reibung auf die instationäre Strömung	86
§ 5. Der Einfluss der Querschnittsänderung auf die instationäre Strömung	108
§ 6. Der Einfluss der Wärmezufuhr auf die instationäre Strömung	119
Zusammenfassung	127
Literaturverzeichnis	130
Lebenslauf	133

Bezeichnungen.

<u>Symbol</u>	<u>Dimension</u>	<u>Dimensionslos</u>	<u>Bedeutung</u>
p	kg/m ²	P = p/p ₀	Druck (p ₀ = Bezugsdruck)
T	°K		Temperatur absolut
a	m/s	A = a/a ₀	Schallgeschwindigkeit (a ₀ = Bezugs-Schallgeschwindigkeit)
ρ	kg s ³ /m ⁴		Dichte
γ = g/ρ	kg/m ³		Spezifisches Gewicht
v = 1/ρ	m ³ /kg		Spezifisches Volumen
s	mkg/°		Entropie
a _{0s}	m/s	A _s = a _{0s} /a ₀	Schallgeschwindigkeit bei s und p ₀
Û	mkg/kg		Enthalpie
u	mkg/kg		Innere Energie
R	m/°		Gaskonstante
c _p , c _v	mkg/kg°		Spezifische Wärmen bei p-konstant, resp. v-konstant
κ = c _p /c _v			Isentropenexponent
μ = 1/3 η	kg s/m ²		Zähigkeit
λ	kg/° s		Wärmeleitzahl
q _a	kg/m ² s	Q _a = $\frac{q_a \cdot L}{p_0 \cdot a_0}$	Zugeführte Wärme pro Volumen- und Zeiteinheit (L = Bezugs-länge)
q _v	m ² /s ³	Q _v = $\frac{q_v \cdot L}{a_0^3}$	Zugeführte Wärme pro Massen- und Zeiteinheit
G	kg		Gewicht
d	m		Rohrdurchmesser
x	m	X = x/L	Weg
f	m ²		Querschnitt
df	m ²	F _x = $\frac{d \ln f \cdot L}{dx}$	Querschnittänderung
φ			f _{effektiv} / f _{Rohr}

<u>Symbol</u>	<u>Dimension</u>	<u>Dimensionslos</u>	<u>Bedeutung</u>
v	m ³		Volumen
t	s	$Z = \frac{t \cdot a_0}{L}$	Zeit
n	s ⁻¹		Drehzahl
KW	°KW		Kurbelwinkel
u	m/s	$U = u/a_0$	Geschwindigkeit in x-Richtung
w	m/s		Gasgeschwindigkeit hinter Stoss
c	m/s		Stossfrontgeschwindigkeit
		$Re = \frac{u \cdot d \cdot \rho}{\eta}$	Reynoldscche Zahl
ξ		$\xi_0 = \xi L/2d$	Reibkoeffizient
$W = \frac{\xi u^2}{2d}$	m/s ²		Widerstandsfunktion
ξ			Aus- respektive Einströmzahl (Seite 54, 58)
$m = \int_{x_1}^x f y dx$	kgs ² /m	$M = \frac{m \cdot a_0^2}{L^3 \rho_0 \cdot p_0}$	Massenpunkt-Koordinate

Indices:

o	Bezugsgrösse
z	Zylinder
s	Bei der Entropie s
1,2,....	Bezieht sich auf Figur
ö	Öffnungsbeginn des Auslasses
n	nach
v	vor

V o r w o r t .

Die Abklärung der Druckwellenvorgänge in Auspuffleitungen von Verbrennungsmotoren bildet einen Bestandteil des Forschungsprogrammes der A.G. Brown Boveri in Baden. Durch besonderes Entgegenkommen konnte ich meine dort von Sommer 1946 bis Ende 1948 ausgeführten theoretischen und experimentellen Untersuchungen auf diesem Gebiete zur Ausarbeitung der vorliegenden Dissertation verwerten.

Allen, die mir die Durchführung der Arbeit ermöglichten und mich darin förderten, möchte ich meinen herzlichen Dank aussprechen, insbesondere der Leitung der A.G. Brown Boveri und Herrn Prof. Dr. G. Eichelberg.

Zürich, im Februar 1949.

Ernst Jenny

Einleitung.

Wirtschaftliche Ueberlegungen führen den Dieselkonstrukteur dazu, die Leistung der Motoren durch Aufladung und durch grössere Drehzahl zu steigern [1,2]*. In den Abgasen wird ca 40% der im Brennstoff enthaltenen Energie abgeführt. Etwa die Hälfte dieses Verlustes entsteht infolge der Entropiezunahme beim Verbrennungsvorgang. Ein Viertel, die Arbeitsmöglichkeit durch vollkommene Dehnung auf den Umgebungsdruck, kann den Leistungsbedarf der Aufladung decken. Die Verwertung des letzten Viertels, der Verlust infolge Verzicht auf umkehrbare Rückführung auf Ansaugzustand, ist in Abgaskesseln möglich.

Beim Viertaktmotor hat sich folgerichtig das bekannte Büchi-Verfahren (Fig.1) durchgesetzt [3]. In jahrelanger Entwicklung (speziell bei Brown Boveri, als Herstellerfirma von Abgasturbogruppen) wurde der Zusammenbau der drei Maschinen (Gebläse, Motor und Turbine) so gestaltet, dass die Turbogruppe und der Motor ohne zusätzliche Regelung, nur durch Gassäulen gekoppelt, einwandfrei zusammenarbeiten.

Für den Zweitakt-Motor [5, 6] hat sich noch keine solche Entwicklungsstufe ausgebildet. Beachtenswert ist das vorerst nur bei unaufgeladenen Motoren verwendete Kadenacy-System [4], bei dem die Spülung ausschliesslich durch die Trägheitswirkung der Gase im Auspuff erreicht wird.

Die infolge der stossweisen Entladung der Zylinder erregten Druckschwankungen und ihre Beeinflussung durch Aenderung der bestimmenden Faktoren, wie Zeitquerschnitt der Ventile, Leitungsdurchmesser und -länge, sind daher für die Aufladung von Dieselmotoren grundlegend. In Fig.1 sind diese Vorgänge schematisch dargestellt. Die eingekreisten Zahlen beziehen sich auf den Text zu Fig.1.

In beiden Verfahren müssen die Strömungskanäle für die Abgase folgende Forderungen erfüllen:

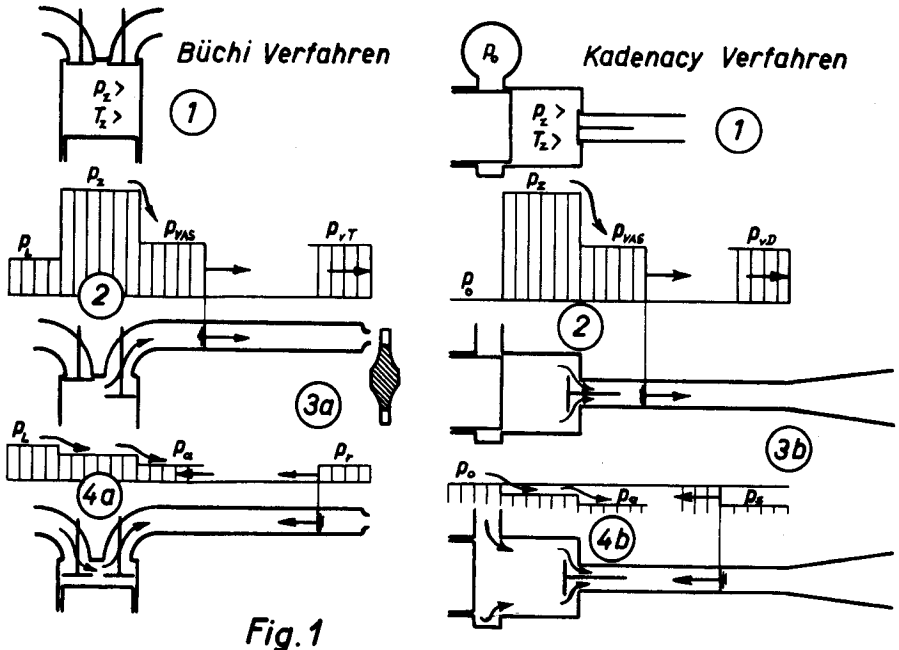
* Die Nummern in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss.

- a) Von der im Zylinder bei Auspuffbeginn zur Verfügung stehenden Energie muss ein möglichst grosser Teil erhalten bleiben und in günstig verarbeitbarer Form an die abgasverwertende Maschine geführt werden.
- b) Die Durchspülung des Motors muss durch den instationären Strömungsvorgang unterstützt, in gewissen Fällen sogar selbsttätig durchgeführt werden.

Durch empirische Betriebsversuche sind teilweise bemerkenswerte Verbesserungen gefunden worden (Motorradmotoren, Kadenacy-System).

Für kleine Druckschwankungen, auch in verzweigten Leitungen, besteht eine Berechnungsmethode [8,9].

Auspuffschwingungen grosser Amplitude sind aber noch nicht genügend geklärt, vor allem weil die übersichtlichen graphischen Rechenverfahren der instationären Gasdynamik erst in diesem Jahrzehnt entwickelt wurden [10,11,12,13,14,15].



- (1) Bei Auspuffbeginn sind der Druck und die Temperatur im Zylinder noch hoch. Der Druck ist besonders wertvoll, denn er kann direkt Arbeit leisten. (Temperaturausnutzung in Abgaskesseln möglich).
- (2) Der wegen relativ langsamer Oeffnung der Auslassventile nicht zu vermeidende Drosselverlust kann vermindert werden, indem durch günstige Strömungskanäle vom Arbeitsvermögen im Zylinder ein beträchtlicher Teil in Form eines Druckberges p_{VA5} (in der Figur schematisch mit senkrechter Front gezeichnet) erhalten bleibt und abtransportiert wird.
- (3a) Das Druckgefälle p_{pT} wird in der Turbine verwertet. Der Wirkungsgrad der Ausnutzung hängt von der Form des Druckberges ab. Die Stauwirkung der Turbinendüse erzeugt die rücklaufende Verdichtungswelle p_R .
- (3b) Die Ausnutzung des Druckberges ist gasdynamisch möglich, indem z.B. in einem Diffusor eine Saugwelle reflektiert wird.
- (4a) Ein von der Turbine getriebenes Gebläse erzeugt den Ladedruck p_L . Trotz der zurückkommenden Stauwelle muss ein genügendes Druckgefälle $p_L - p_A$ für die Spülung erhalten bleiben.
- (4b) Das Druckgefälle für die Spülung wird durch die Saugwelle erzeugt. Ein Spülgebläse (z.B. Kurbelkastenspülung), ist einzig beim Anfahren erforderlich.

In der vorliegenden Studie werden die erwähnten Vorgänge anhand dieser Methoden, verbunden mit Messungen an einer speziell konstruierten Versuchsanlage, untersucht.

Die Versuchsapparatur ist im Turbinenfabrik-Versuchslokal der Firma Brown Boveri in Baden aufgestellt und gestattet, den Auspuffvorgang von maximal 4 Zylindern in eine beliebig geformte Abgasleitung zu untersuchen, um eine den Forderungen a) und

b) gerechte Leitung zu finden. Der Modellversuch hat den Vorteil, dass der Schwingungsvorgang unabhängig vom Dieselerbrennungsprozess studiert werden kann. Natürlich beeinflusst die Gasschwingung beim Motor die Spülung, den Reinheitsgrad, die Wirbelbildung und damit den Verbrennungsablauf. Davon hängt die Temperatur und der Druck bei Auspuffbeginn ab. Diese Wechselwirkung muss am Motor selbst abgeklärt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird der Auspuff eines unter Ueberdruck stehenden Luftvolumens aus einem Zylinder in verschiedene unverzweigte Leitungen untersucht. Da dieser einfache Fall für den instationären Durchfluss alles Wesentliche enthält, ist er besonders geeignet, durch Vergleich von Rechnung und Messung das Verständnis für die Druckwellenvorgänge im Auspuff zu fördern, um die spätern Versuche für komplizierte Fälle auszuwerten.

- Abschnitt I gibt eine Beschreibung der Versuchsanlage.
- Abschnitt II stellt eine anschauliche Einführung in die eindimensionale instationäre Gasdynamik dar. Nach der Zusammenstellung der Randbedingungen wird ein erstes Beispiel gerechnet. Die Rechnung beschreibt den Charakter des Vorganges sehr gut. Im Absolutwert tritt aber infolge Reibung eine Abweichung vom Messergebnis auf.
- Abschnitt III enthält die Charakteristikentheorie für die eindimensionale instationäre Strömung in veränderlichem Querschnitt, unter Berücksichtigung der Reibung und Wärmezufuhr. In Beispielen wird die Wirkung dieser Einflüsse untersucht. Die Rechenmethoden verlangen einen grossen Zeitaufwand, der sich aber lohnte durch die gefundene gute Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

A b s c h n i t t I .

Die Versuchsanlage.

Die Fig.2 zeigt die Gesamtanlage in der Perspektive. In Fig.3 sind die wichtigsten Apparate ebenfalls perspektivisch im Schnitt dargestellt. Fig.4 stellt die Abwicklung der Steuerorgane dar.

Die Druckschwankungen in den Auspuffleitungen eines Verbrennungsmotors entstehen durch stossweise Entladung der mit ihr verbundenen Motorzylinder. Das Hauptorgan der Versuchsanlage ist folgerichtig der Steuerzylinder, welcher die Auspuffstösse künstlich erzeugt. Er muss so ausgebildet sein, dass er die Vorgänge im Versuchsauspuffrohr, dem Messrohr, so steuert, wie sie im Betrieb der verschiedenartigen Zwei- und Viertaktmotoren bei verschiedenen Arbeitsweisen, Drehzahlen und Druckverhältnissen vorkommen.

Bekanntlich dürfen bei Dieselmotoren (z.B. beim Büchi-Verfahren) nur solche Zylinder, die sich während der Spülperiode nicht stören, in eine gemeinsame Leitung ausstossen, und je nach Zündfolge haben diese Zylinder verschiedene Abstände. Vier Steuerzylinder genügen daher für die Versuchsaufgaben, wenn sie verschiebbar sind, um den richtigen Abstand einstellen zu können.

Die in Fig.2 dargestellte Anlage besteht diesen Anforderungen entsprechend aus folgenden Teilen:

- Dem Gestell mit dem Antrieb,
- den Luftzuführungen,
- dem Steuerzylinder,
- dem Hilfszylinder (nur bei einem Steuer-Zylinder),
- dem Messrohr,
- der Messapparatur,
- der Eichvorrichtung.

Das Gestell und der Antrieb.

Das einfache Traggestell besteht aus den beiden Böcken 1_r und 1_l und dem Tragrohr 2 mit den Gleitschienen 3_v und 3_h . Der Antrieb der Versuchsanlage erfolgt vom Einphasenwechselstrom-Motor 4 mit stufenloser Drehzahlregulierung 5 über den gespannten Riemen 6 zur Stufenscheibe 7 auf der Welle 8.

Die Luftzuführungen.

Die Pressluft von 6 atü wird aus dem Druckluftnetz der Fabrik entnommen und durch das Rohr 9 tangential in den Wasserabscheider 10 der Versuchsanlage eingeführt. Sie strömt durch Rohr 11, das Abschlussventil 12 und die Verteilventile 13_v und 13_h in die Receiver 14_v und 14_h . Die Zuführrohre 15 bringen die Druckluft zu den Steuerzylindern 18, wobei der Druck in den Ventilen 13_v und 13_h reguliert wird. Die Zuführrohre 15 sind schwenkbar in den Flanschen 16 und 17, damit die Steuerzylinder 18 entlang den Gleitschienen 3_v und 3_h auf dem Tragrohr 2 in die richtige Distanz zueinander gebracht werden können.

Der Aufbau des Steuerzylinders.

Bei den hier beschriebenen Versuchen wurde nur ein Zylinder 18 verwendet, dem noch ein Hilfszylinder 19 vorgeschaltet war. Die Aufgabe dieses Hilfszylinders kann erst im Anschluss an die Wirkungsweise des Steuerzylinders erklärt werden; von seinem Vorhandensein sei also vorerst abgesehen.

Der Steuerzylinder 18 in Fig.3 hat ein kompliziertes Gussgehäuse, bestehend aus Zylinderteil 34, dem Antriebs- und Gleitteil 35 mit den Verschiebeführungen 36_v und 36_h zu den Gleitschienen 3_v und 3_h , dem Pressluftzuführungsteil 37 mit den Zuleitungen 32_v und 32_h und dem Auslasskanal 46 mit Flansch 39 zum Befestigen der Messleitung mit deren Flansch 41.

Im Zylinderteil 34 ist der Stator 44 festgehalten, in welchem sich der Rotor 45 dreht, voneinander getrennt durch ein geringes Spiel. Nur die Dichtungsringe 42 berühren den Rotor

Fig.3.

Versuchsanlage

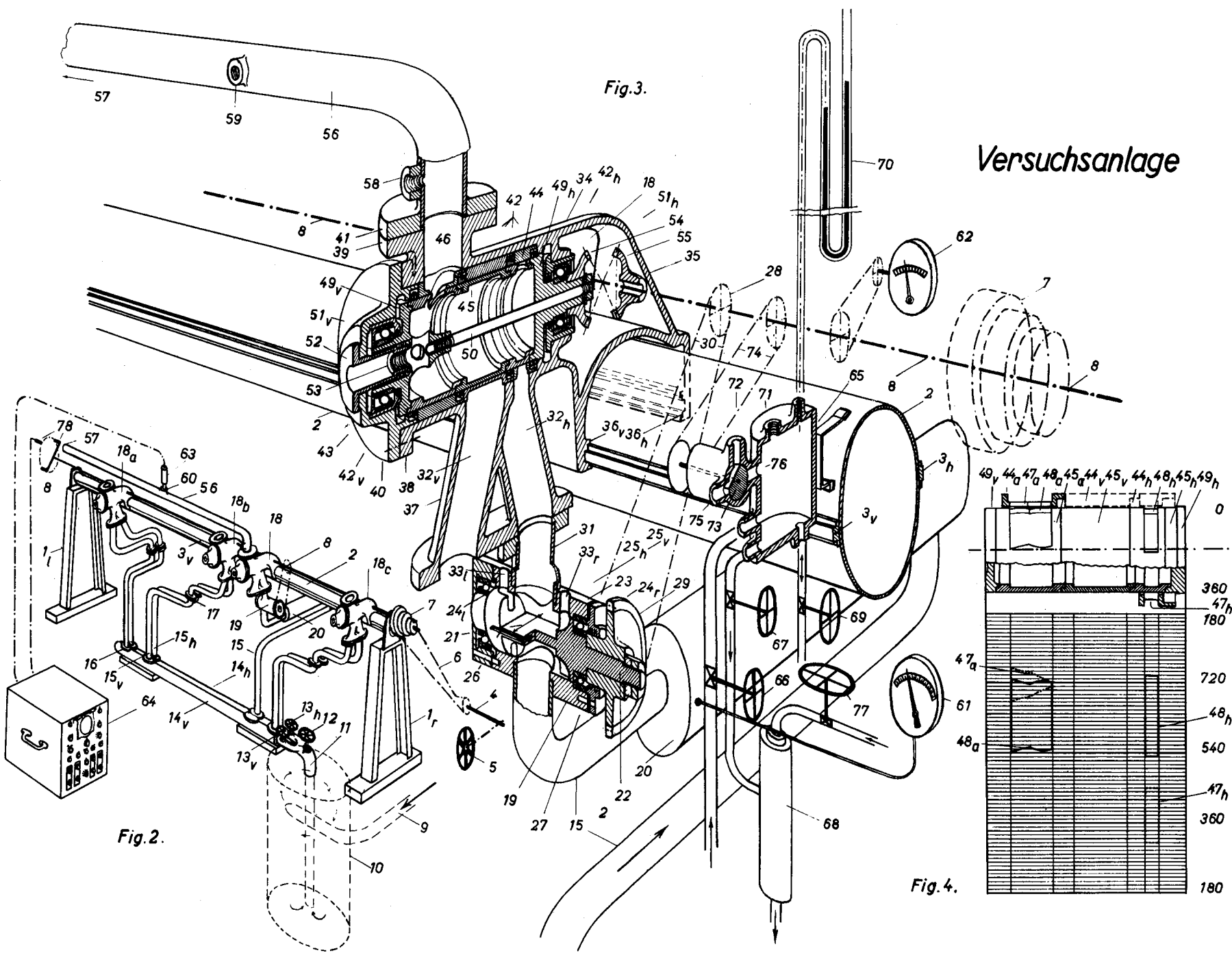
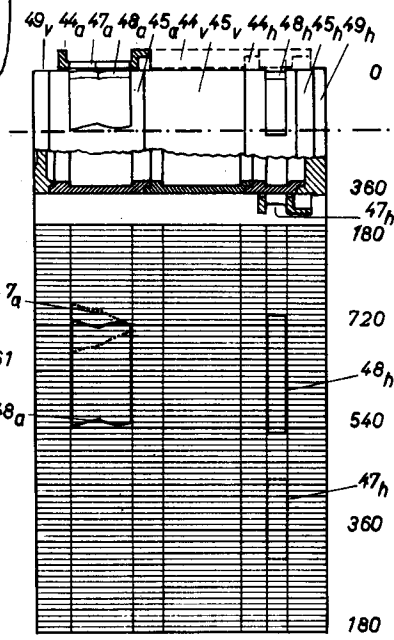


Fig.2.

Fig.4.



Leer - Vide - Empty

zwecks guter achsialer Abdichtung.

Der Stator 44 und der Rotor 45 sind dreiteilig, entsprechend den zwei Druckluftzuführungen 32_v und 32_h und dem Auspuff 46, damit jeder Teil auswechselbar ist und Steuerschlitze, die das Ein- und Ausströmen regulieren, nach Belieben eingefräst werden können.

Die Teile des Stators 44 werden in den Gehäusezylinderteil 34 eingepresst durch den Flansch 38. Vorne gegen den Flansch 38, zwischen den Segmenten und hinten gegen den Antriebsteil 35 sind vier federgedrückte Kohledichtungsringe 42 eingelegt. Die Rotorteile 45_h, 45_v und 45_a sind mit ihren Rändern übereinandergestülpt, gehalten von den Seitenteilen 49_h, 49_v, und mit der Rotorachse 50 zu einem steifen, freitragenden Hohlzylinder zusammengeschaubt. Die Seitenteile laufen in Kugellagern 42_h und 42_v mit eingebauten Dichtungen 42_h, 42_v gegen den Rotor hin. In den vordern Rotorseitenteil 49_v ragt eine Flanschbüchse 52 zum Einschrauben des Druckgebers in das Gewinde 53, gegen außen abgedichtet durch die Labyrinthdichtung 43.

Der hintere Rotorseitenteil 49_h trägt das Kegelrad 54, angetrieben durch das Gegenrad 55 auf der Antriebswelle 8, auf der es verschoben werden kann bei der Distanzierung der Zylinder 18. Bei den hier beschriebenen Versuchen betrug die Rotor- und Antriebswellendrehzahl immer 450 U/min.

Die Arbeitsweise des Steuerzylinders.

Der konstante Rauminhalt des Rotors 45 beträgt $V_z = 1,176 \text{ dm}^3$ und dient als Modellzylindervolumen. Während der Öffnungszeit der Auslass-Schlitze 47_a, 48_a muss bei der Modellanlage der Druck im Zylinder über dem Drehwinkel verlaufen wie bei der untersuchten Dieselmachine. Die Druckänderungen werden durch folgende 4 Erscheinungen bestimmt:

- 1) Durch die Verbrennung bleibt im Dieselmachine beim Auspuffbeginn ein Ueberdruck von einigen atü bestehen. Im Modellzylinder der Versuchsapparatur wird dieser Ueberdruck vor Auslassbeginn wie folgt erzeugt: Durch eine halbe Drehung

des Rotors 45 aus der in Fig.3 gezeichneten Lage kommen die Einlass-Schlitze 47_h im Stator und 48_h im Rotor übereinander zu liegen. Durch deren Oeffnung wird das Zylindervolumen mit Druckluft aufgefüllt, deren Druck am Ventil 13_h reguliert und mittels Druckgeber in der Mess-Stelle 53 kontrolliert wird. Die diesem Betriebszustande entsprechende Anzeige am Manometer 61 wird notiert und ermöglicht eine einfache Einstellung in allen weiteren Versuchen. Das Manometer 61 ist am Druckausgleichsrezipienten 20 angeschlossen und durch einen Filzdämpfer gegen Vibrationen geschützt.

Beim Beginn des Auffüllens enthält der Zylinder nach der Gasgleichung das Luftgewicht $G_1 = p_1 V_z / RT_1$ vom Zustande p_1 , T_1 , $u_1 = c_v T_1$. Durch das Einschleiben der Luft vom Zustande $p_{z\delta}$, T_0 , $J_0 = c_p T_0$ aus dem Pressluftkanal 32_h steigen der Druck und die Temperatur im Zylinder, so dass nach beendetem Ladevorgang das Luftgewicht $G_{z\delta} = p_{z\delta} V_z / RT_{z\delta}$ vom Zustand $p_{z\delta}$, $T_{z\delta}$, $u_{z\delta} = c_v T_{z\delta}$ im Zylinder enthalten ist. Die Differenz $G_{z\delta} - G_1$ stellt die eingeströmte Luftmenge dar.

Aus der Energiebilanz

$$G_1 \cdot u_1 + (G_{z\delta} - G_1) \cdot J_0 = G_{z\delta} \cdot u_{z\delta}$$

ergibt sich

$$T_{z\delta} = \frac{\kappa T_0}{1 + (\kappa T_0 / T_1 - 1) p_1 / p_{z\delta}} \quad (1)$$

Da in den vorliegenden Versuchen der Zylinder nicht gespült wird, geht G_1 aus $G_{z\delta}$ und somit auch T_1 aus $T_{z\delta}$ durch isentropische Entspannung vom Druck $p_{z\delta}$ auf p_1 hervor. Durch Einsetzen von $T_1 = T_{z\delta} (p_1 / p_{z\delta})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ nach der Isentropengleichung in (1) wird:

$$T_{z\delta} = \frac{\kappa [1 - (p_1 / p_{z\delta})^{\frac{1}{\kappa}}]}{1 - p_1 / p_{z\delta}} \cdot T_0 \quad (1a)$$

Bei den Versuchen war $p_{z\delta} / p_1 = 4,4$

$$T_0 = 293^\circ \text{K}$$

so dass $T_{z\delta} = 346^\circ \text{K} = 73^\circ \text{C}$,

$$a_{z\delta} = 374 \text{ m/s wird.}$$

Damit ist der Zustand zu Beginn des Auslasses berechnet.

- 2) Durch Öffnen des Auspuffes beginnt eine stossweise Entladung in das Auspuffrohr 46, der Vorauslass-Stoss. Damit der daraus resultierende Druckabfall bei Motor- und Modellzylinder identisch wird, müssen die Durchströmflächen der Auslass-Schlitze 47a im Stator und 48a im Rotor so berechnet werden, dass die Ausströmkennzahl $\phi_a = f_a \cdot a_{zB} / \sqrt{V_z} \cdot \sigma$ bei Motor und Modell identisch wird.

f_a = effektive Fläche des Ausströmschlitzes

V_z = Zylindervolumen

σ = Spielzahl/min, wobei σ Modell = Drehzahl Modell

σ 2 Takt = " 2 Takt

σ 4 Takt = $\frac{1}{2}$ " 4 Takt

a_{zB} = Schallgeschwindigkeit im Zylinder bei Öffnungsbeginn.

Die Schlitze 47a im Stator und 48a im Rotor sind in Fig.3 in Auspuffstellung gezeichnet und in Fig.4 übersichtlich dargestellt, oben der Stator 44 im Schnitt, der Rotor 45 in der Ansicht und im Schnitt, unten die Abwicklung des Rotormantels. Die Mittellinie der Auspufföffnung 47a im Stator, die Scheitellinie, ist mit Null bezeichnet. Der Mantelumfang ist in 720 Teile geteilt, entsprechend zwei Kurbelwellenumdrehungen zu 360° beim 4-Taktmotor, denn der Rotor 45 pufft bei jeder Umdrehung einmal, der 4-Takt-Motor aber nur jede zweite Umdrehung aus.

Fig.4 zeigt die Teile des Stators 44 und des Rotors 45, nämlich 44h mit dem Einströmschlitz 47h (punktiert in der Abwicklung), 45h mit dem Einlass-Schlitz 48h (ausgezogen in der Abwicklung), die mittleren Blindteile 44v, 45v und die Auslassteile 44a und 45a mit den Auspuffschlitzen 47a (punktiert in der Abwicklung) sowie 48a (ausgezogen in der Abwicklung).

Die jedem Drehwinkel entsprechenden effektiven Durchströmflächen wurden im stationären Durchfluss ausgemessen und ergeben den in Fig.25 links eingetragenen Auspuffzeitquerschnitt eines Viertaktmotors.

- 3) Da die Verdrängerwirkung des Motorkolbens beim Ausschubhub

des Viertaktmotors einen zusätzlichen Einfluss hat, könnte aus 32v durch Schlitze in den mittleren Segmenten 44v und 45v ein Luftvolumen eingeschoben werden, das die Verdrängerwirkung des Kolbens ersetzt.

- 4) Das Ausschieben der Abgase durch Spülluft ist beim Zweitaktmotor bestimmend. In diesem Falle werden in die mittleren Segmente 44v und 45v Einlass-Schlitze geschnitten, damit Niederdruckspülluft aus 32v den Modellzylinder durchspült. Die Ein- und Auslass-Schlitze haben dabei ungefähr gleiche Flächen und somit auch die dafür reservierten Segmente.

Um zusätzliche Einflüsse auf die Messungen zu vermeiden, wurde die Luftzuführung 32v nicht benützt und auf Spül- und Verdrängerschlitze verzichtet. Der durch den Vorauslass-Stoss angeregte Druckwellenvorgang erlaubt bereits, alles Wesentliche zu studieren.

Der Hilfszylinder 19.

Im Anschluss an den Auspuff sinkt der Druck im Zylinder, wobei durch Saugwirkung der Abgassäule teilweise starker Unterdruck entstehen kann. Wenn nun während dieser Periode in der Druckluftzuleitung 32h ein Ueberdruck von mehreren atü erhalten bleibt, so wird durch die unvermeidlichen Spiele am Steuerzylinder ein geringes Luftgewicht in das Rotorvolumen hineingedrückt. So würde ein Messfehler entstehen, der dadurch verhindert wird, dass der Hilfszylinder 19 den Raum 32h in diesem Zeitabschnitt entlastet.

Der Hilfszylinder 19 enthält eine Drehklappe 21, die mit halber Rotordrehzahl durch die Räder 28 und 29 über die Kette 30 von der Welle 8 aus angetrieben wird. Die Klappe 21 besteht aus einem Stück mit der Achse 22 und ist im Gehäuse 23 in den Kugellagern 24r und 24l gelagert.

In der bei Fig.3 gezeichneten Horizontallage der Klappe 21 dichtet sie die Druckluft in der Zuleitung 15 gegen den Raum 32h durch federbelastete Dichtungsschienen ab, die in ihre Flanken 25h und 25v eingelassen sind. Gleichzeitig kann in

dieser Stellung die Luft aus dem Raume 32h durch die Entweichkanäle 33r und 33l nach aussen entweichen.

Während der Auffüllperiode des Steuerzylinders 18 steht die Klappe 21 senkrecht und lässt der Druckluft freien Durchtritt zu den Einlass-Schlitzten 47h und 48h.

Das Messrohr.

Das Messrohr 56 wird mit den Flanschen 39 und 41 auf dem Steuerzylinder 18 aufgesetzt. Die Indikatoren werden in die Augen 58, 59, 60 etc. eingesetzt. Die Bohrungen in der Rohrwand haben 5 mm Durchmesser und sind innen sauber gefeilt (Fig.5).

Es wurden folgende Auspuffleitungen untersucht:

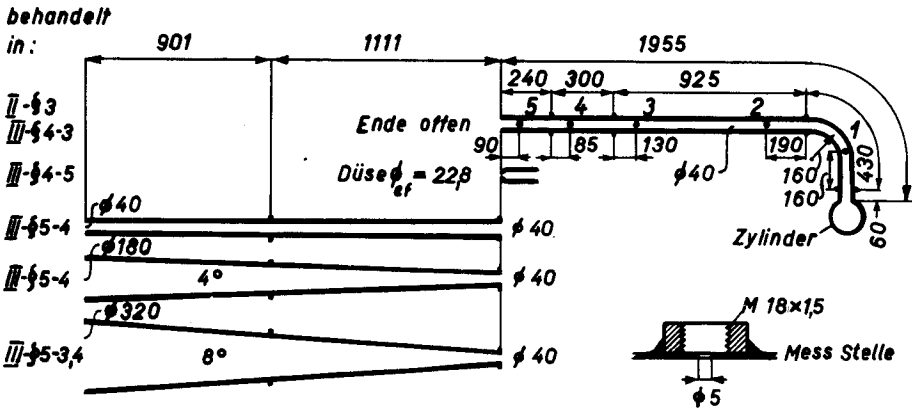


Fig. 5

Dabei wurden gezogene Stahlrohre mit 40 mm Innendurchmesser verwendet. Die Diffusoren wurden aus 1,5 mm-Stahlblech geschweisst.

Die Messapparatur.

Zur Messung der schnell variierenden Druckverhältnisse

wurde ein Philips-Kathodenstrahldruckindikator GM 3154, 64 in Fig.2, benutzt. (Vgl. Gebrauchsanweisung und Publikationen von Philips.)

Das Messverfahren sei hier kurz beschrieben. Im Geber 63 biegt sich eine dünne Stahlmembran unter dem zu messenden Druck durch und bildet mit einer von ihr isolierten Gegenplatte eine variable Kapazität, die mit drei weiteren Kapazitäten eine Brückenschaltung bildet und einen hochfrequenten Wechselstrom amplitudenmoduliert. Die so vom Druck abhängige Spannung wird verstärkt, gleichgerichtet und bewirkt die vertikale Ablenkung des Kathodenstrahles. Das eingebaute Kippgerät für die horizontale Zeitablenkung wird auf die Frequenz des Auspuffvorganges eingestellt, so dass am Schirm ein stehendes Bild entsteht, das photographiert wird. Das Verfahren arbeitet im gewünschten Frequenzbereich trägheitslos und hat den Vorteil, dass eine statische Eichung möglich ist.

Die Eichlinie ist nicht genau gerade, so dass die Diagramme umzuzeichnen sind. Ausser der Aenderung der Messkapazität werden Spannungen durch Temperatureinflüsse auf die Brückenkondensatoren, induktive und kapazitive Koppelungen in den Zuführleitungen usw., erzeugt. Diese werden vor Beginn der Messung durch eine spezielle Schaltung kompensiert. Nur zu oft variieren aber die Störspannungen im Verlaufe der Messung und sowohl Null-Linie wie Eich-Linie ändern. Solche Messungen wurden ausgeschlossen und solange wiederholt, bis die Kontrolle nach der Messung keine Verschiebung der Eich-Linie ergab. Um diese Störungen zu beschränken, muss die Aenderung der Messkapazität gross sein gegenüber den Fehlerquellen, d.h. für jeden Messbereich muss die Membran so dimensioniert werden, dass ihre maximale Durchbiegung ausgenützt wird.

Die Messungen in der Auspuffleitung 56 wurden mit einem Geber für ± 1 ata durchgeführt, wobei der Mittelwert aus einer Anzahl Aufnahmen genommen wurde. Der Fehler wird kleiner als $\pm \frac{1}{100}$ ata sein. Mittels einer Kontaktscheibe 78 auf der Welle 8

wird eine vertikale Ablenkplatte der Kathodenstrahlröhre pro Umdrehung zweimal rasch geerdet, so dass eine scharfe Zeitmarkierung entsteht (Fig. 5a).

Die Eichvorrichtung.

Für die Eichung des Druckindikators ist eine besondere Vorrichtung 65 ausgebildet worden. Sie ist am Tragrohr 2 (Fig.3) festgemacht und besteht im Wesentlichen aus einem Zylinder und einem Drehschieber. Der Zylinderinhalt kann durch ein Ventil 66 mit dem 6 atü-Druckluftnetz oder durch Ventil 67 mit einer Wasserstrahlpumpe 68 verbunden werden. Mit dem ins Freie mündenden Ventil 69 wird der Eichdruck im Zylinder 65 beliebig eingestellt zwischen 6 atü und dem tiefsten Unterdruck der Wasserstrahlpumpe 68. Der Druck wird am Quecksilber-U-Rohr 70 (oder Manometer für hohe Druckverhältnisse) abgelesen. Für die statische Eichung wird der Geber in den Stutzen 71 eingeschraubt. Für die dynamische Eichung wird 71 verschlossen und der Geber in den Stutzen 72 eingeschraubt. Der rotierende Zweiwegschieber 73 verbindet durch seine Umdrehung abwechslungsweise den Geber mit der Aussenluft in 75 oder mit dem Zylinderinhalt in 76 und dem darin eingestellten Eichdruck. Dieser Rotations-Schieber wird für die Eichung von der Welle 8 über ein Gummiband 74 angetrieben. Durch Ventil 77 fließt das Wasser in die Wasserstrahlpumpe 68.

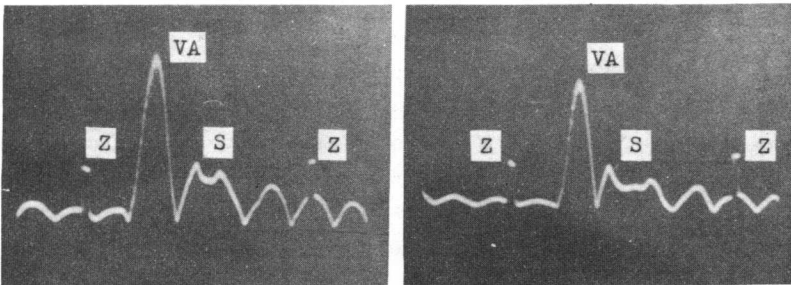


Fig. 5 a - Indikatordiagramme (entsprechend Fig.35c, Mess-Stelle 2 und 3)

VA Vorauslass-Stoss

Z Zeitmarkierung

S am offenen Ende reflektierte Saugwelle

Unterdruck erscheint um die 1 ata-Linie nach oben geklappt.

II. A b s c h n i t t .

Anschauliche Ableitung der instationären Grundgleichungen.

§ 1. Das Graphische Verfahren der instationären Gasdynamik.

Um die mathematischen Schwierigkeiten zu vermindern, werden folgende Annahmen gemacht:

- a) Beschränkung auf eindimensionale Vorgänge, d.h. auf solche Erscheinungen, die nur von der Zeit t und einer einzigen Ortskoordinate x abhängen. Dies ist erfüllt bei der Strömung in

Rohren mit konstantem Querschnitt,
Diffusoren mit kleinem Öffnungswinkel und bei
zylinder- und kugelsymmetrischen Vorgängen;

- b) Vernachlässigung der inneren Reibung und der Wärmeleitung;
c) Vernachlässigung der äusseren Kräfte wie Schwerkraft und Reibung;
d) Kein Wärmeaustausch mit der Umgebung.

Im Verlaufe dieser Untersuchung werden diese Annahmen eingehend diskutiert und teilweise verlassen.

Unter den Voraussetzungen a) bis d) wurden die instationären Grundgleichungen in vielen Abhandlungen abgeleitet [10,11,12,13,14,15,16] und sind im folgenden zusammengestellt.

1. Kleine Störung in einem Rohr von konstantem Querschnitt.

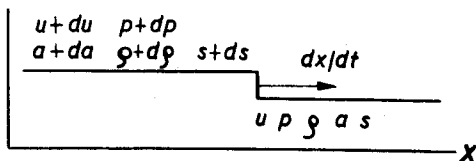


Fig. 6

Eine kleine Störung (= Partialwelle = Teilwelle) bewegt sich mit der Geschwindigkeit dx/dt durch ein Rohr mit konstanter Durchströmfläche. Vor der Welle strömt das Gas mit der Geschwindigkeit u und hat den Zustand g, p, a, s . Durch die Störung werden die Geschwindigkeit um du und der Zustand um d_g, dp, da, ds geändert.

Dabei ist allgemein

$$g = f(p, s) \quad (2)$$

Speziell für ideale Gase mit konstanten spezifischen Wärmen c_p und c_v gilt:

die Gasgleichung

$$p = g \cdot g \cdot R \cdot T = g \cdot g (c_p - c_v) T \quad (3)$$

die allgemeine Zustandsgleichung

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot e^{-\frac{s-s_0}{c_p}} \quad (4)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{g}{g_0}\right)^{\kappa} \cdot e^{+\frac{s-s_0}{c_v}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot e^{+\frac{s-s_0}{c_p}}$$

Unter den Voraussetzungen a) bis d) kann bei der kleinen Störung keine Entropieänderung auftreten:

$$ds = 0 \quad (5)$$

(5) in (4) eingesetzt ergibt die Gleichung der isentropischen Zustandsänderung:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{g}{g_0}\right)^{\kappa} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\kappa} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \quad (6)$$

oder differentiell geschrieben:

$$\frac{dp}{p} = +\kappa \frac{dg}{g} = -\kappa \frac{dv}{v} = \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{da}{a} \quad (6a)$$

Die dabei eingeführte Grösse a ist nach (5), (3), (4):

$$a^2 = \left(\frac{dp}{dg_{s-\text{konstant}}}\right) = \kappa g R T = \kappa g p v = \kappa \frac{p}{g} \quad (7)$$

a hat die Dimension einer Geschwindigkeit und kann, wie in Fig.6 eingetragen, als Zustandsvariable verwendet werden.

Betrachtet man den Vorgang von einem Bezugssystem aus, das sich mit der Störung bewegt, so verlangt der Impulssatz:

$$g \left(u - \frac{dx}{dt}\right)^2 + p = (g + dg) \left(u - \frac{dx}{dt} + du\right)^2 + (p + dp)$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$g \left(u - \frac{dx}{dt}\right) = (g + dg) \left(u - \frac{dx}{dt} + du\right)$$

Durch Ausmultiplizieren, Vernachlässigen der von zweiter Ordnung kleinen Glieder und unter Berücksichtigung von (7) wird du/dg eliminiert und es folgt die Richtungsgleichung:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a \quad (8)$$

Setzt man (8) in die Kontinuitätsgleichung, so ergibt sich die Zustandsgleichung:

$$du = \pm a \frac{dg}{g} = \pm \frac{1}{a} \frac{dp}{g} \quad (9)$$

Die obern Vorzeichen ergeben sich (aus der durchgeführten Ableitung) für die rechtslaufende, die untern für die linkslaufende Partialwelle. Da sich die kleinen Störungen nach (8) mit der Geschwindigkeit a relativ zum sich vor ihnen befindlichen Gas bewegen, heisst a Schallgeschwindigkeit. Nach (6a) kann die rechte Seite von (9) in a ausgedrückt werden, wobei eine besonders einfache lineare Beziehung entsteht:

$$du = \pm \frac{2}{\kappa-1} da \quad (10)$$

2. Wellen grosser Schwingungsweite.

Fig.7 zeigt anschaulich, über der Weg-Zeit-Ebene aufgetragen, wie sich eine Welle grosser Schwingungsweite aus unendlich vielen kleinen Störungen zusammensetzt, wobei jede über ihre Vorgängerin mit der dort herrschenden Schallgeschwindigkeit hinwegläuft. Somit hat jede Partialwelle ihre bestimmte Fortschreitgeschwindigkeit. Die Projektionen auf die x - t -Ebene, Fortschreitlinien oder Weg-Zeit-Charakteristiken genannt, sind damit nach Gleichung (8) keine Parallelen. Beim Uebererschreiten jeder Stufe gilt die Gleichung (10); ihre Integration liefert alle möglichen Zustände auf der rechts- bzw. linkslaufenden Einzelwelle

$$u - u_0 = \pm \frac{2}{\kappa-1} (a - a_0) \quad (11)$$

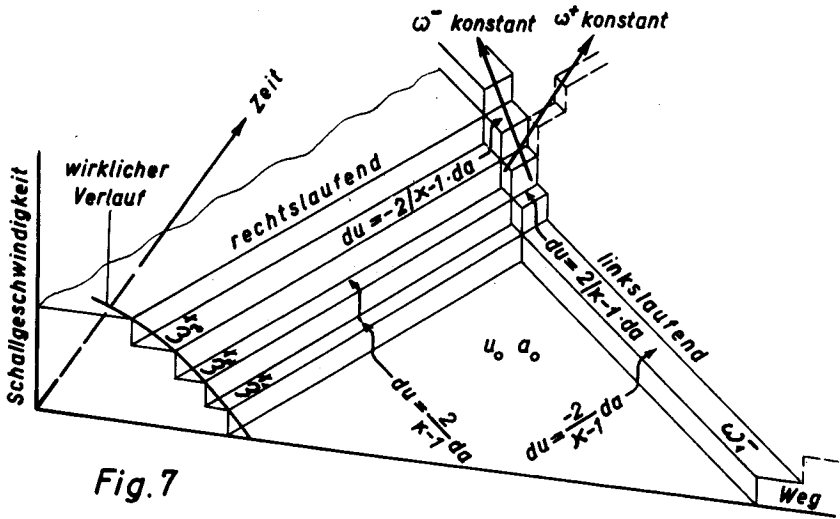


Fig.7

Für die graphische Rechnung müssen endliche Stufen angenommen werden, deren Grösse einerseits den Zeitaufwand, andererseits die Genauigkeit bestimmt. Die Stufenkanten liegen auf dem wirklichen Zustandsverlauf, damit den Kanten und ihren Schnittpunkten die wirklichen Zustandswerte zugeordnet werden können; die Interpolation dazwischen erfolgt linear.

Das Kreuzen von Wellen kann nach Fig.7 leicht erklärt werden. Die nach links laufende Partialwelle hat eine Geschwindigkeit nach Gleichung (8), unteres Vorzeichen. Sie klettert über die nach rechts laufende Welle, wobei (11), oberes Vorzeichen, gilt, was auch in folgender Form geschrieben werden kann:

Auf der linkslaufenden Partialwelle ist:

$$\omega^- = u - \frac{2}{k-1} a = \text{konstant}$$

Auf der rechtslaufenden Partialwelle gilt:

(12)

$$\omega^+ = u + \frac{2}{k-1} a = \text{konstant}$$

Sowohl die rechtslaufende wie die linkslaufende Partialwelle ist durch eine Grösse charakterisiert, die immer konstant bleibt. Sind für zwei Störungen aus den Randbedingungen die

Werte ω^+ und ω^- bestimmt, so kann der Zustand u und a beim Kreuzen der beiden Störwellen durch die beiden Gleichungen (12) berechnet werden. Die Lösung wird graphisch besonders einfach und übersichtlich.

3. Das graphische Verfahren (Charakteristikenverfahren) nach de Haller.

Zweckmässig werden folgende dimensionslose Grössen eingeführt [14]:

p_0 = Bezugsdruck
 a_0 = Bezugsschallgeschwindigkeit beim Drucke p_0
 L = Bezugslänge

$$P = \frac{p}{p_0} \quad A = \frac{a}{a_0} \quad U = \frac{u}{a_0} \quad X = \frac{x}{L} \quad Z = \frac{a_0}{L} \cdot t$$

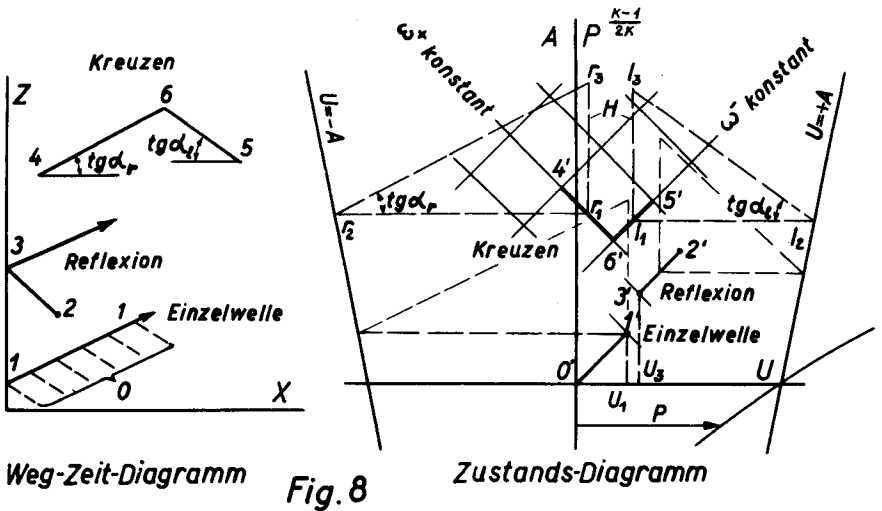
Die Gleichungen (8) und (12) lauten dimensionslos geschrieben:

$$\frac{dX}{dZ} = U \pm A \quad (13)$$

$$dU = \mp \frac{2}{\kappa-1} dA \quad (14)$$

In der Weg-Zeit-Ebene bilden die Fortschreitlinien der sich kreuzenden Wellen nach Gleichung (13) ein aus zwei Kurvenscharen bestehendes Netz. Werden in einer U-A-Ebene für jede dieser Kurven die entsprechenden Zustandswerte aufgetragen, so entsteht ein dem X-Z-Netz zugeordnetes U-A-Netz. Wie in Abschnitt III noch abgeleitet wird, entsprechen diese Kurvenscharen den Charakteristiken des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems. Nach (14) sind die Zustands-Charakteristiken besonders einfach. Wählt man den A-Masstab $\frac{2}{\kappa-1}$ mal den U-Masstab, so ergeben sich die ω^+ resp. ω^- = konstanten Linien als 45°-Geraden, die ein für allemal vorliegen. Zu A kann nach (6) auch P aufgetragen werden, d.h. die A-Achse kann als P-Achse aufgefasst werden mit

nichtlinearer $P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ - Teilung.



Weg-Zeit-Diagramm **Fig. 8**

Zustands-Diagramm

Bei der graphischen Lösung von instationären Problemen treten drei Grundkonstruktionen auf: Kreuzen von Wellen, Reflexion von Wellen, Einzelwellen.

Kreuzen von Wellen.

Eine rechtslaufende Teil-Welle mit dem Zustande 4' (U_4, A_4) an der Stelle 4 (X_4, Z_4) kreuzt eine linkslaufende Partial-Welle, die bei 5 (X_5, Z_5) den Zustand 5' (U_5, A_5) hat. Auf der ersten muss ω^+ , auf der zweiten ω^- konstant bleiben. Da diese beiden Bedingungen als 45°-Geraden durch 4' und 5' erfüllt sind, muss der Zustand beim Kreuzen den Werten U_6, A_6 des Schnittpunktes 6' dieser Geraden entsprechen.

Die Neigung der Strecken 4-6 und 5-6, d.h. der Fortschreitlinien der Wellen in der X-Z-Ebene, kann nach de Haller wie folgt konstruiert werden:

Ueber der Mitte von 4' 6' resp. 5' 6' wird die konstante Poldistanz H parallel zur A-Achse errichtet und anderseits werden die Geraden r_1, r_2 und l_1, l_2 parallel zur U-Achse bis zu den Hilfsgeraden $U = + A$ resp. $U = - A$ gezeichnet. Dann fügt man die Seiten r_2, r_3 resp. l_2, l_3 ein, die parallel zu den Weg-Zeit-Linien 4-6 resp. 5-6 sind, denn die Dreiecke

r_1, r_2, r_3 resp. l_1, l_2, l_3 haben Grundlinien der Grössen $U \pm A$, und die Neigungen $\text{tg}\alpha_r$ und $\text{tg}\alpha_l$ werden somit

$$\text{tg}\alpha_{r,l} = \frac{H}{U \pm A} = \left(\frac{dZ}{dX}\right)_{r,l}$$

vorausgesetzt, dass

$$H \text{ in cm} = \frac{\text{Einheit von } U \text{ in cm} \cdot \text{Einheit von } Z \text{ in cm}}{\text{Einheit von } X \text{ in cm}} \quad (15)$$

Die beiden weitem Grundaufgaben ergeben sich als Spezialfälle:

Reflexion:

Eine linkslaufende Partial-Welle, die in $2(X_2, Z_2)$ den Zustand $2' (A_2, U_2)$ hat, erreicht eine Rohrstelle (z.B. Ende), wo eine bestimmte Bedingung (Randbedingung) zu erfüllen ist; es sei z.B. U_3 vorgeschrieben. Der Zustand der Welle $2'$ kann nur auf der ω^- -Geraden durch $2'$ ändern und darauf gibt es nur einen Punkt mit der Geschwindigkeit U_3 , nämlich den Punkt $3' (U_3, A_3)$. Von selbst kann aber eine Welle nie ändern, sondern nur durch Kreuzen mit einer gegenlaufenden Welle. Damit sich der Zustand $3'$ einstellt, muss daher eine solche Welle gebildet werden - die reflektierte Welle.

Einzelwelle.

Der Vorgang in der rechtslaufenden Einzelwelle 1 folgt der unter 2 bereits abgeleiteten Gleichung (11), kann aber andererseits auf die erste Grundkonstruktion zurückgeführt werden, indem das Gebiet konstanter Schallgeschwindigkeit A_0 und stationärer Geschwindigkeit U_0 als unendlich viele entgegenkommende Störungslinien mit gleichem Zustande 0 aufgefasst wird. Das Kreuzen mit der Einzelwelle ergibt somit nur solche Werte A_1 und U_1 , die auf der ω^- -Charakteristik durch $0'$ liegen, was der Aussage (11) entspricht.

4. Beispiel zur graphischen Methode: Verdichtungs- und Verdünnungswellen.

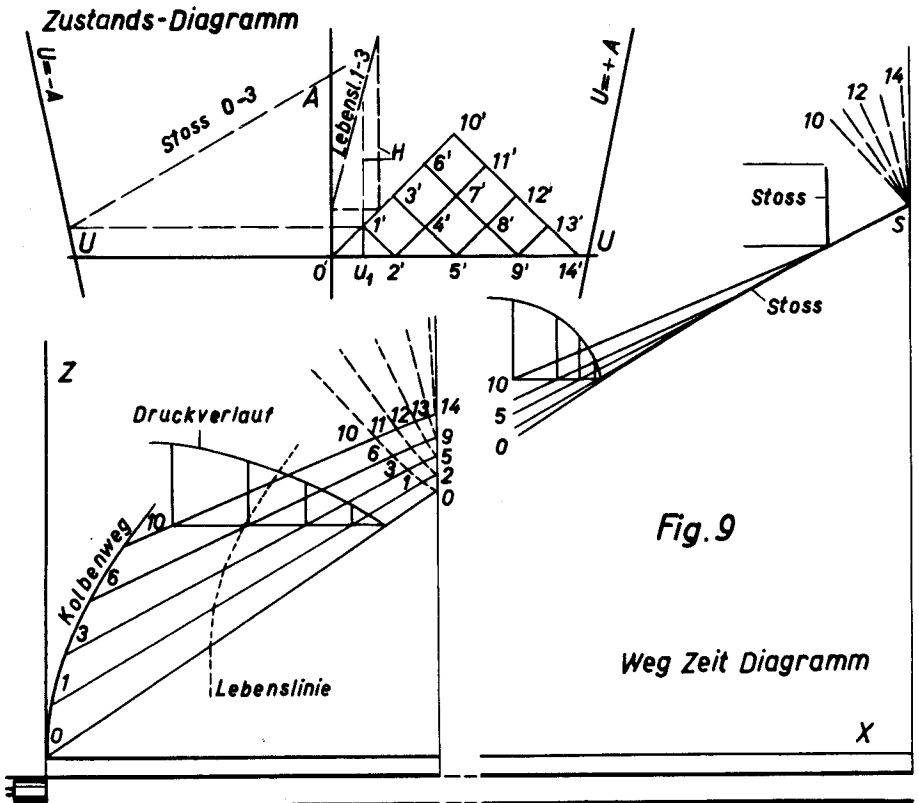
Ein Kolben mit vorgegebenem Fahrplan (Weg-Zeit-Gesetz) stösst in ein Rohr, das ruhende homogene Luft mit dem Drucke p_0 und

der Schallgeschwindigkeit a_0 enthält. Dieser Fall tritt in der Innenballistik mit dem Unterschied auf, dass die Geschossbewegung nicht vorgegeben ist, sondern durch die Gas- und Reibkräfte bestimmt wird.

Im Beispiel Fig.9 wird der Kolben aus der Ruhe stetig auf die Geschwindigkeit U_{10} beschleunigt. Da die anliegenden Luftteilchen ihn weder verlassen, noch in seinen Boden eindringen können, gilt die besonders einfache Randbedingung (daher sind solche Beispiele sehr beliebt):

$$U_{\text{Gas}} = U_{\text{Kolben}} \quad (16)$$

Die Punkte mit vorgeschriebener Geschwindigkeit $U_{1,3,6,10}$ sind auf



der ω^- -Geraden durch O' , auf der ja alle Zustände der rechtslaufenden Einzelwelle liegen, eindeutig bestimmt. Die Fortschreitgeschwindigkeit kann nach de Haller sofort in die Wegzeit-Ebene übertragen werden. Von 0 zu 1,3,6,10 nehmen der Druck und die Fortschreitgeschwindigkeit zu, woraus sich ergibt, dass Verdichtungswellen zusammenlaufen.

Erreichen die Teil-Wellen das offene Rohrende, wobei das kurze Rohr Fig.9 links zuerst betrachtet wird, so muss dort bei Unterschallströmung folgende Randbedingung für das offene Ende erfüllt werden:

$$P = P_{\text{Umgebung}} \quad (17)$$

d.h. der Druck muss dort mit dem Umgebungsdruck übereinstimmen. Nach Helmholtz [20] befindet sich dieser Druckknoten beim Rohr mit Flansch um

$$l_{\text{Helmholtz}} = \frac{\pi \cdot d}{8} \quad (18)$$

ausserhalb des Endes. Für die Rechnung ist das Rohr um diesen Betrag zu verlängern. Die Korrektur ist aber für lange Leitungen ohne wesentliche Bedeutung, da z.B. für $d = 40 \text{ mm}$ $l_{\text{Helmholtz}}$ nur 15,7 mm beträgt. Die Bedingung (17) gilt nicht mehr, wenn am Rohraustritt Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Der Zustand am Ende ergibt sich dann von selbst ohne weitere Vorschrift aus der graphischen Konstruktion.

In Fig.9 ändert z.B. die vorlaufende Partial-Welle 1' auf der ω^+ -Linie 1' 2', um den durch (17) geforderten Zustand anzunehmen, was nach der zweiten Grundaufgabe nur durch Reflexion der rücklaufenden Welle 2' möglich ist. Diese kreuzt die vorlaufenden Wellen in 4,7,11, wobei sich die Zustände 4',7',11' einstellen, und überträgt so den Einfluss der Randbedingung auf den Rohrinhalt. Die Schar der zurückgeworfenen Störlinien bildet einen auseinanderlaufenden Verdünnungsfächer, denn von 10 zu 11,12,13,14 nimmt sowohl der Druck wie die Rückschreitgeschwindigkeit ab.

In allen Figuren sind Verdichtungswellen ausgezogen, Verdünnungswellen gestrichelt und die Fortschreit- oder Lebenslinien einzelner Luftteilchen ebenfalls gestrichelt eingetragen. Für das Wegstück zwischen den vorlaufenden Wellen 1 und 3 ist in Fig.9 gezeigt, wie aus dem Zustandsdiagramm mit Hilfe der

Poldistanz H die Neigung der Lebenslinie ins X - Z -Diagramm übertragen wird. Durch Schnitte $Z = \text{konstant}$ oder $X = \text{konstant}$ kann der Druckverlauf längs dem Rohre zur bestimmten Zeit Z resp. der Druckverlauf über der Zeit an einer bestimmten Rohrstelle (Mess-Stelle) verfolgt werden. Hat das Rohr die Länge wie in Fig.9 rechts, so nähern sich die vorlaufenden Verdichtungslinien immer mehr und die Druckfront wird steiler, bis sie im Moment des Einholens senkrecht wird: Verdichtungsstoss. Nach der graphischen Methode würde der Kopf auch nachher noch rascher laufen als der Fuss und es entstünde eine physikalisch unmögliche überschlagene Wellenfront. Es ist nun zu untersuchen, welche Voraussetzung a) bis d) nicht mehr erfüllt ist und weswegen die Uebereinstimmung der Rechnung mit der Wirklichkeit bei Auftreten des Stosses verloren geht. Dass trotz stetigen Anfangsbedingungen Unstetigkeiten auftreten können, ist ein Merkmal des nichtlinearen Differentialgleichungssystems, das nach Abschnitt III der Charakteristikentheorie zugrunde liegt.

5. Der Verdichtungsstoss.

In der Stossfront ändern nach dem Vorhergehenden die Zustandsgrössen sprungweise. Damit wird der Temperatur- und Geschwindigkeitsgradient so gross, dass die Wärmeleitung und die innere Reibung nicht mehr vernachlässigbar sind (Voraussetzung b muss fallen gelassen werden). Tatsächlich verschwindet bei deren Berücksichtigung die Unstetigkeit. Die Breite der Stossfront bleibt aber in der Grössenordnung der freien Weglänge [17], d.h. für die praktische Rechnung darf sie als Sprung behandelt werden.

Einblick in die Einzelheiten des Vorganges in der Stossfront gibt nur die gaskinetische Betrachtung unter Berücksichtigung der Verteilung der Energie auf die Freiheitsgrade [18].

Dies interessiert hier nicht, denn sehr rasch hinter der Stossfront stellt sich der Gleichgewichtszustand ein, der aus den makroskopischen Strömungsgleichungen [15, 19] z.B. an folgendem Beispiel berechnet werden kann:

Statt der allmählichen Verdichtung in Fig.9 soll der Kolben

plötzlich mit der Geschwindigkeit w ins ruhende Gas hineingestossen werden, wobei er einen mit der Geschwindigkeit c laufenden Stoss erzeugt.

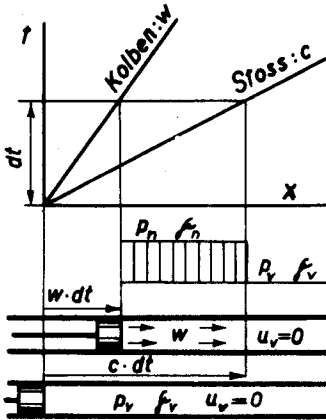


Fig. 10

Gewichtsbilanz:

$$\int_V f \cdot c \cdot dt = \int_n f \cdot (c-w) dt$$

$$1 - \frac{w}{c} = \frac{f_v}{f_n} = \frac{v_n}{v_v} \quad (19)$$

Energiebilanz: Sobald Wärmeleitung und innere Reibung auftreten, nimmt die Entropie zu und der Energiesatz vereinfacht sich nicht mehr zur Gleichung (6).

Arbeit = Zunahme der Energie

$$f \cdot p_n \cdot w \cdot dt = f \cdot c \cdot \left(c_p T_n - c_p T_v + \frac{w^2}{2g} \right) dt$$

$$p_n \cdot v_v \cdot \frac{w}{c} = \frac{1}{\kappa+1} (R v_n - R v_v) + \frac{w^2}{2g} \quad (20)$$

Impulsleichung:

$$f \cdot c \cdot \frac{d v_v}{g} \cdot w \cdot dt = f (p_n - p_v) dt$$

$$c \cdot w = g (p_n - p_v) v_v \quad (21)$$

Aus (21) folgt sofort

$$\frac{p_n}{p_v} = 1 + \kappa \frac{c}{a_v} \frac{w}{a_v} \quad (22)$$

(22) und (19) in die Gasgleichung (3) eingesetzt, liefert

$$\frac{T_n}{T_v} = \frac{p_n}{p_v} \frac{v_n}{v_v} = \left(1 + \kappa \frac{c}{a_v} \frac{w}{a_v} \right) \left(1 - \frac{w}{c} \right) \quad (23)$$

In (20) wird p_n aus (21), v_n nach (19), dann $\kappa p_v v_v = \frac{a_v^2}{g}$ nach (7) eingesetzt und es ergibt sich:

$$\frac{w}{a_v} = \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{c}{a_v} - \frac{a_v}{c} \right) \quad (24)$$

Zusammengehörige Werte können am raschesten so bestimmt werden, dass c/a_v angenommen wird und dann folgen sofort w/a_v aus (24), p_n/p_v aus (22), v_n/v_v aus (19) und T_n/T_v aus (23).

Läuft der Stoss statt durch ruhendes Medium über ein Gas mit der Geschwindigkeit u_v , so gelten die Gleichungen (19) bis (26) weiter, wobei w und c jetzt Relativgeschwindigkeiten, bezogen auf die Strömung vor dem Stoss, darstellen. Hat diese z.B. die gegen den Stoss gerichtete Geschwindigkeit c , so entsteht der stationäre senkrechte Verdichtungsstoss. Der errechnete Zusammenhang ist in Fig.11 über $(p_n/p_v)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ aufgetragen, um die Zustandsänderung im Stoss mit der als 45°-Geraden erscheinenden stetigen Kompression zu vergleichen.

Beim Druckverhältnis $p_n/p_v = 3$ beträgt die Abweichung in w/a_v erst 1,75%, so dass solche "schwache Stösse" ($p_n/p_v \ll 3$) als Unstetigkeiten mit derselben isentropischen Zustandsänderung wie die stetige Verdichtungswelle behandelt werden.

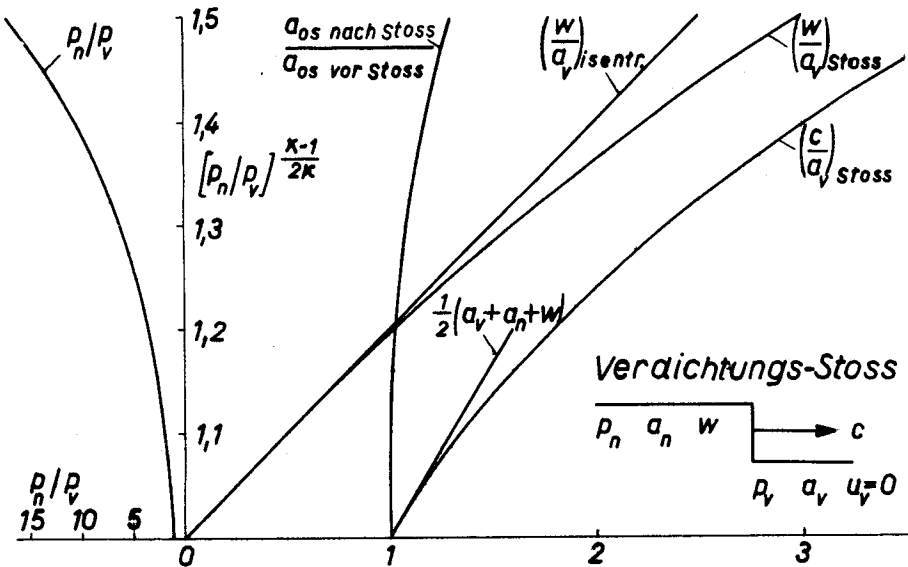


Fig.11

Der Stoss in Fig.9 wird gedanklich in rasch hintereinanderfolgende Verdichtungswellen aufgelöst, für welche die graphische Konstruktion keine Schwierigkeit bietet. Das Zustandsdiagramm

für die Reflexion am offenen Rohrende ist für die Verdichtungs-
welle und den schwachen Stoss identisch. Im X-Z-Diagramm
schrumpft im zweiten Falle der Vorgang auf einen Punkt S zusam-
men. Der Stoss wird am offenen Ende als Verdünnungsfächer, an
einer festen Wand als Stoss reflektiert.

Die Fortschreitgeschwindigkeit $|c| = c + u_v$ kann bei Stößen

$P_n/P_v \ll 1,4$ durch

$$|c| = \frac{u_v + u_n + a_v + a_n}{2} \quad (25)$$

angenähert werden. Diese Gleichung erlaubt die Richtungskon-
struktion durchzuführen, indem die Poldistanz H über der Mitte
der Verbindungsgeraden zwischen den Zuständen vor und nach dem
Stoss errichtet wird (in Fig.9 für den Stoss 0-3, also in 1).
Für stärkere Stöße (z.B. Stoss 0-10 in Fig.9) muss c der Fig.11
entnommen werden.

Wird (20) mit c/w multipliziert und dann c/w aus (19), $w:c$ aus
(21) eingesetzt, so ergibt sich für die Zustandsänderung im
Stoss folgendes Gesetz:

$$\begin{aligned} \frac{P_n - P_v}{\frac{P_n + P_v}{2}} &= -\kappa \frac{v_n - v_v}{\frac{v_n - v_v}{2}} \\ \text{oder} \quad \frac{\Delta P}{P_m} &= -\kappa \frac{\Delta v}{v_m} \end{aligned}$$

Im p-v-Bild verläuft diese Kompressionslinie steiler als die
Isentrope, da der Vorgang mit Entropiezunahme verbunden ist.
Eine stossartige Verdünnung ergäbe Entropieabnahme und ist da-
her nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ausgeschlos-
sen. Da die Verdünnungslinien divergieren (vergl. Fig.9), ent-
steht auch nie ein solcher Verdünnungsstoss, oder, falls er
erzwungen wird, z.B. durch ruckartiges Herausziehen des Kolbens
in Fig.10, so löst er sich sofort in eine stetige Verdünnung auf.

Eine kleine Störwelle kann als differentieller Stoss betrachtet
werden mit $\Delta p \rightarrow dp$, $\Delta v \rightarrow dv$, $P_m \rightarrow p$, $v_m \rightarrow v$, $w \rightarrow du$.
Dann folgt aus (26) das Isentropengesetz (6a), so dass bewiesen
ist, dass die Verdichtung in einer kleinen Störung isentropisch
erfolgt. Aus (24) folgt $c = a_v$, d.h. dass die Teilwelle mit
Schallgeschwindigkeit läuft. Aus (21) findet man wieder die

Gleichung (9) $du = \frac{c \cdot \Delta v}{a_g}$.

6. Einführung einer charakteristischen Grösse für die Entropie einer Gasschicht.

Durch die Entropieänderung im Stoss, durch Drosselung und Reibung verliert das Gas seine homogene Zusammensetzung. Sehr oft ist die Gassäule schon von Anfang an geschichtet. Dann genügt aber z.B. die Angabe von p nicht mehr, um die andern Grössen a , T , γ zu bestimmen, vielmehr muss die Entropie der betrachteten Schicht mitberücksichtigt werden. Als Mass für die Entropie wird die Grösse a_{os} eingeführt, die bei der graphischen Konstruktion direkt benötigt wird und in einfacher Form in die Formeln eintritt:

T_{os} , a_{os} = Temperatur und Schallgeschwindigkeit in einer Gasschicht mit der Entropie s beim Bezugsdruck p_0 (Fig.12).

$T_0 = T_{os}/T_0$; $A_0 = a_{os}/a_0$ ist die dimensionslose Form dieser neuen Zustandsgrösse. Die Zuordnung von T_{os} , a_{os} und s ist eindeutig und beide wachsen gleichzeitig:

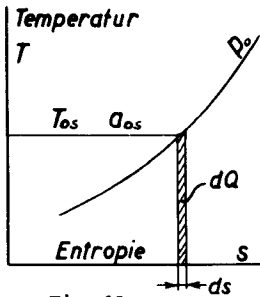


Fig. 12

$$ds = \frac{dQ}{T_{os}} = \frac{c_p dT_{os}}{T_{os}} ; \quad d \ln T_{os} = \frac{ds}{c_p}$$

Bei den meisten Untersuchungen darf K als konstant betrachtet werden, wofür

$$ds = \frac{dQ}{T_{os}} = \frac{c_p dT_{os}}{T_{os}} = c_p \frac{d(a_{os}^2)}{a_{os}^2} = 2c_p \frac{da_{os}}{a_{os}}$$

oder

$$\frac{da_{os}}{a_{os}} = d \ln a_{os} = \frac{1}{2c_p} ds \quad (27)$$

Durch Integration von (27) für irgend einen Prozess folgt:

$$a_{os \text{ nach}} / a_{os \text{ vor}} = A_0 \text{ nach} / A_0 \text{ vor} = e^{\frac{s \text{ nach} - s \text{ vor}}{2c_p}} \quad (27a)$$

Für den Verdichtungsstoss ist $a_{os \text{ nach Stoss}} / a_{os \text{ vor Stoss}}$ in Fig.11 eingetragen. Die Stautemperatur T_{stau} ($i_{stau} = c_p \cdot T_{stau} = \text{konstant}$) ändert bei Vorgängen ohne Wärmezufuhr von aussen und ohne Arbeitsleistung nicht; sie bleibt daher beim Verdichtungsstoss konstant. Der Staudruck nimmt dabei nach folgender Beziehung ab:

Aus (4) und (27a):

$$\frac{p_{stau \text{ nach Stoss}}}{p_{stau \text{ vor Stoss}}} = \left(\frac{a_{os \text{ vor Stoss}}}{a_{os \text{ nach Stoss}}} \right)^{\frac{2K}{K-1}}$$

7. Erweiterung des graphischen Verfahrens auf inhomogene Gase.

Die Anwendung des graphischen Verfahrens auf geschichtete Gase wird am Beispiel Fig.13 erklärt. Dem Kolben vorgelagert liegt homogenes heisses Gas, davor kältere Luft mit leicht veränderlicher Temperatur, die durch zwei Stufen angenähert wird. Dieses Beispiel wurde gewählt, weil der Einfluss eines grossen und eines kleinen Temperatursprungs untersucht werden kann und derartige Verteilung bei Motoren vorkommt, wo die heissen Abgase in die kalte Spülluft der letzten Periode hineinpuffen.

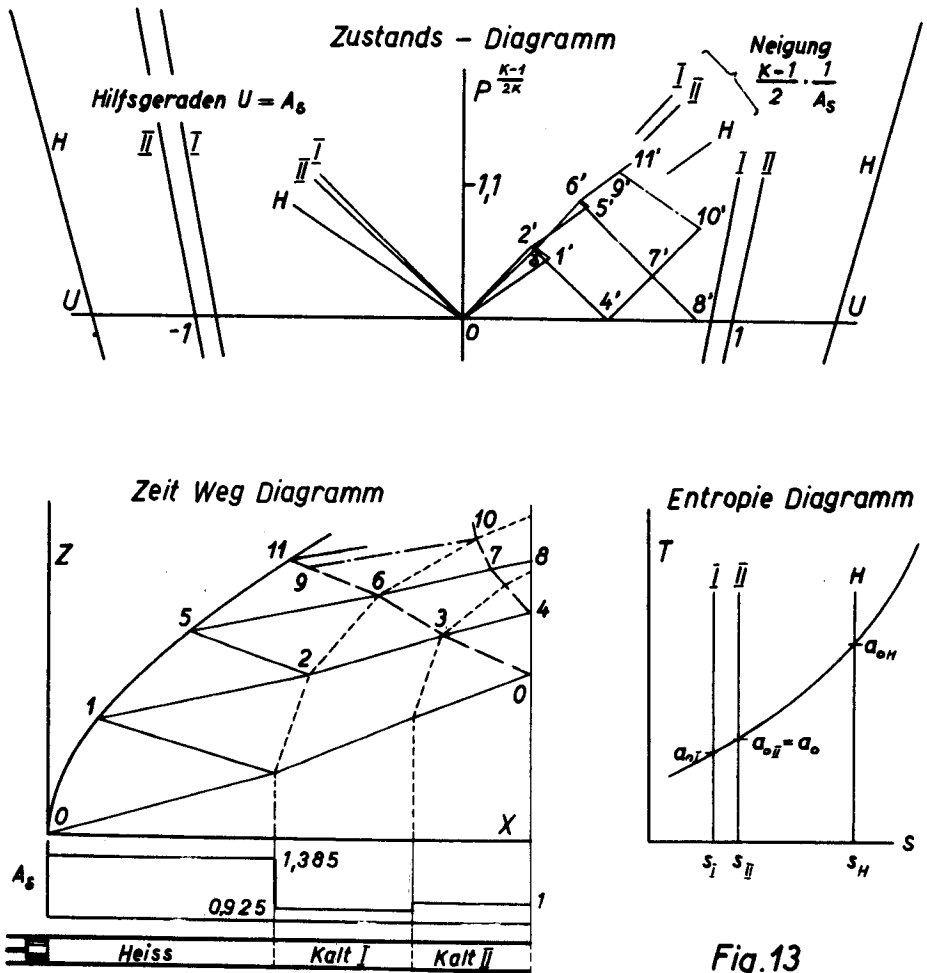


Fig.13

Solange keine Stösse auftreten, ist der Vorgang in jeder Schicht weiterhin isentropisch. Die den Schichten zugeordneten Isentropen sind im T-s-Diagramm (Fig.13) eingezeichnet, charakterisiert durch $a_{0s} = a_{0I}, a_{0II}, a_{0H}$. Das graphische Verfahren kann ungeändert durchgeführt werden, indem man für jede Schicht die ihr entsprechende Zustandsebene mit den Achsen u/a_{0s} und a/a_{0s} aufzeichnet. Für jede Schicht gilt (6):

$$\frac{a}{a_{0s}} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \quad (28)$$

Jede a/a_{0s} -Achse kann somit als $P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ -Achse betrachtet werden. Beim Uebergang von einer Schicht zur andern darf in p und u kein Sprung auftreten, d.h.

$$\begin{aligned} U_{links} &= U_{rechts} \\ P_{links} &= P_{rechts} \end{aligned} \quad (29)$$

Verzerrt man die u/a_{0s} -Achse aller Zustandsdiagramme mit dem Faktor a_{0s}/a_0 , so entsteht eine gemeinsame $U = u/a_0$ -Teilung, und da die $P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ -Teilungen auf den Ordinatenachsen identisch sind (für $\kappa =$ konstant), so können die Diagramme übereinander gelegt werden. Dann erfüllt jeder Punkt die Bedingung (29) automatisch [14].

Für die $U - P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ -Zustandsebene lautet die Charakteristiken-gleichung (10):

$$\begin{aligned} d\left(\frac{u}{a_0}\right) &= \mp \frac{2}{\kappa-1} d\left(\frac{a}{a_0}\right) = \mp \frac{2}{\kappa-1} \frac{a_{0s}}{a_0} d\left(\frac{a}{a_{0s}}\right) \\ dU &= \mp \frac{2}{\kappa-1} A_s d\left(P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

Die Zustands-Charakteristiken für jede Schicht sind Geraden. Ihre Neigung $\mp \frac{\kappa-1}{2} \cdot \frac{1}{A_s}$ ist in Fig.13 für die drei Schichten I, II, H mit den Werten $A_{sI} = 0,925$, $A_{sII} = 1,0$, $A_{sH} = 1,385$ eingezeichnet.

Für die Konstruktion nach de Haller hat jede Schicht ihre eigenen Hilfsgeraden $U = \mp A$, die alle im gemeinsamen Nullpunkt zusammenlaufen. Die Poldistanz H behält immer die nach (15) berechnete Länge. In dem so vorbereiteten Zustandsdiagramm berechnet sich der instationäre Vorgang wie folgt:

Grosser Temperatursprung: Vom Kolben läuft eine Einzelwelle nach rechts in das heisse Gas. Der Zustand 1' ist mit $U_1 = U_{1\text{Kolben}}$ auf der ω^- -Charakteristik 0'1' mit der "Neigung heiss" festgelegt. Dringt die rechtslaufende Einzelwelle in den kalten Bereich ein, so müssen die dort entstehenden Zustände auf der ω^- -Geraden 0'2' mit der "Neigung kalt I" liegen.

Da kein Sprung in u und p auftreten darf, werden durch eine reflektierte Welle der Druck und die Geschwindigkeit im heissen Gase an der Trennstelle auf die Werte p_2 , u_2 gebracht, wobei die Aenderung 1'2' auf einer ω^+ -Zustandslinie mit der "Neigung heiss" erfolgt.

Am grossen Temperatursprung findet somit eine Teilreflexion statt. Die rechtslaufende Verdichtungswelle wird beim Uebertritt vom heissen ins kalte Gas teilweise als Stauwelle zurückgeworfen.

Im allgemeinen Falle treffen gleichzeitig Wellen von beiden Seiten an der Trennschicht ein, z.B. bei 6. Der Zustand 6' ergibt sich sofort als Schnittpunkt der ω^+ -Charakteristik 5'6' mit "Neigung heiss" und der ω^- -Charakteristik 3'6' mit "Neigung kalt".

Da bei der graphischen Berechnung nur einzelne Störlinien verfolgt werden können, fehlt bei 10 die von 9 her in Wirklichkeit vorlaufende Welle 9 10. Sie muss durch Interpolation eingetragen werden.

Kleiner Temperatursprung: Die Teil-Reflexionen am kleinen Sprung sind vernachlässigbar für die graphische Konstruktion. Es muss einzig beachtet werden, in welchem Bereiche eine Welle läuft: z.B. hat die ω^+ -Charakteristik 2'3' die Neigung I, weil die Störlinie 2 3 im X-Z-Diagramm im Bereich I liegt. Für die Wellenlinie 4 7, die I und II durchquert, kann die Neigung 4'7' zwischen I und II interpoliert werden.

8. Anfahrvorgänge - Periodische Vorgänge - Resonanzen.

In den bisherigen Beispielen wurden Anfahrvorgänge behandelt, d.h. der betrachtete Prozess begann stets aus der Ruhe heraus.

In den Anwendungen treten aber viel häufiger periodisch wiederkehrende Erscheinungen auf. Nun ist bei Untersuchungsbeginn nichts über die Nachwirkung des letzten Arbeitsspieles bekannt. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als zuerst die Anfahrperiode durchzurechnen und dann die übrigbleibende Schwingung, falls diese nicht vernachlässigbar ist, als Anfangsbedingung für die Behandlung des folgenden Zyklus zu verwenden.

Für kleine Schwingungen (Δu und Δp klein) können viele periodische Probleme durch Sinusansätze gelöst werden [20], wobei aber komplizierte Randbedingungen wie Aus- und Einströmen nicht genügend erfasst werden.

In [22] zeigt Schultz-Grunow, dass in gewissen Fällen mit der graphischen Methode auch bei komplizierten Randbedingungen periodische Prozesse im Resonanzfalle untersucht werden können. Die Idee der Lösung zeigt das folgende Beispiel:

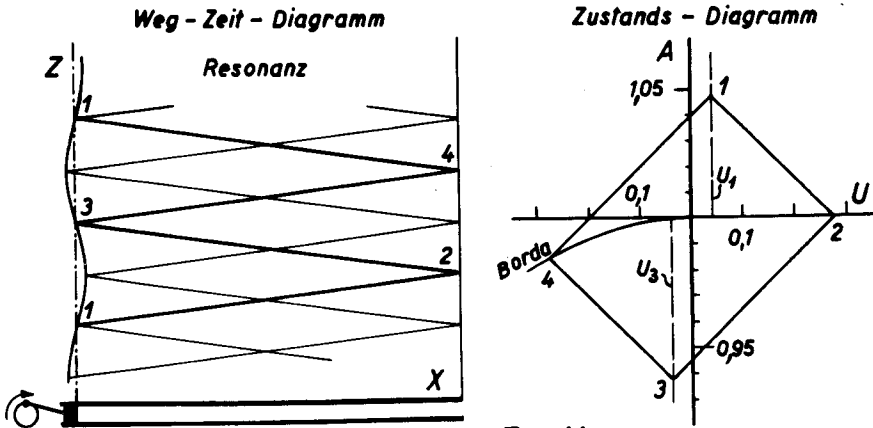


Fig.14

In einem offenen Rohre wird durch einen Kolben eine stehende Schwingung angeregt (Fig.14) [21]. Im X - Z -Diagramm werden die Störungslinien als 2 Scharen paralleler Geraden angenähert, was der Gleichung (13) zwar nicht entspricht, aber für kleine Druck- und Geschwindigkeitsamplituden durchaus zuläs-

sig ist. Man ordnet also allen Partialwellen dieselbe konstante Fortschreitgeschwindigkeit zu.

In Resonanz trifft jede Störwelle nach zweimaligem Hin- und Herlaufen durch das Rohr dieselbe Stellung des Kolbens wie am Anfang, z.B: 1 2 3 4 1 .

Die Bedingung, dass am Kolben die Geschwindigkeit vorgeschrieben ist, wird im U-A-Diagramm durch die Geraden $U = U_1$, resp. $U = U_2$ dargestellt. Für das Ausströmen am offenen Ende gilt nach (17) $P_2 = P_{\text{Umgebung}}$, und beim Rückströmen liegt der Zustand 4' auf einer mit "Borda" bezeichneten Kurve, die unter dem nächsten Paragraphen berechnet wird.

Der Charakteristikenzug 1' 2' 3' 4' 1' wird durch Probieren so eingezeichnet, dass er sich schliesst.

Es fällt nun auf, dass, trotz kleiner vorgegebener Geschwindigkeiten am Kolben, grosse Geschwindigkeitsschwankungen am Rohrende und grosse Druckamplituden am Rohranfange entstehen. In gewissen Näherungstheorien wird angenommen, dass auch beim Einströmen (17) gilt. Dann müsste 4' wie 2' auf P_{Umgebung} liegen, und es kann keine endliche Lösung mehr eingezeichnet werden. In Wirklichkeit wird die kinetische Energie der ausströmenden Gasteile verwirbelt, und die Geschwindigkeit muss beim Rückströmen neu gebildet werden. Der erforderliche, mit zunehmender Geschwindigkeit steigende Druckverlust ist durch die "Randbedingung Borda" erfasst. Dieser Dämpfung am offenen Ende ist es zu verdanken, dass die Schwingungsamplituden nicht unendlich gross werden.

§ 2. Randbedingungen.

Die Beispiele Fig.9, 10, 13, 14 zeigen, dass am bewegten Kolben und am offenen Ende bestimmte Vorschriften zu erfüllen sind - die Randbedingungen.

Für das graphische Verfahren soll die Randbedingung als Kurve vorliegen. Diese ist der geometrische Ort aller Zustände im P-U-Diagramm, die bei den vorgeschriebenen Grenzbedingungen möglich sind.

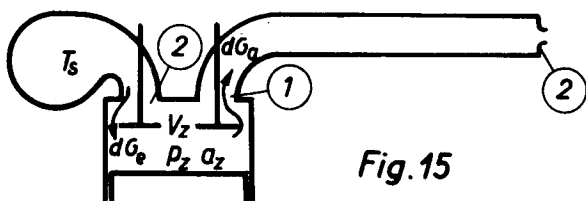


Fig.15

In Fig.15 sind die beiden Hauptfälle, wie sie im folgenden behandelt werden, dargestellt. Dabei muss p_z , a_z als bekannt angenommen werden. Die schrittweise Bestimmung dieser Werte kann dann anschliessend gezeigt werden.

Bei langsamer Aenderung der Bedingungen an den Ein- und Ausströmstellen wird durch raschlaufende Druckwellen in der Uebergangszone der stationäre Zustand hergestellt. Zur Berechnung der Randbedingungskurven wird vorausgesetzt, dass auch bei den wirklich vorkommenden Pulsationsfrequenzen dieser Strömungszustand in jedem Moment mit genügender Genauigkeit erreicht wird. Die Geschwindigkeit eines Gasteilchens ändert in der Uebergangsstrecke örtlich sehr stark. Die Zeit zum Durchlaufen dieses kurzen Weges ist aber so klein, dass das zeitliche Glied, z.B. in Gleichung (56), gegenüber dem örtlichen vernachlässigbar ist. Der Vergleich von Rechnung und Messung wird zeigen, dass diese Annahme berechtigt ist. Die Pulsationsfrequenz in den hier beschriebenen Versuchen war somit unter dem Bereiche, in dem durch Trägheitswirkung in der Uebergangszone grössere Abweichungen auftreten. Für die inkompressible Strömung sind diese Abweichungen in [20] diskutiert.

1. Einströmen ins Rohr durch die Drosselstelle.

In Fig.16 bis 20 sind verschiedene Anordnungen zusammengestellt. In Fig.16a strömt das Gas praktisch verlustlos (isentropisch) durch eine gute Einlaufdüse ins Rohr. Dieser günstige Fall ist immer anzustreben. Die Energiegleichung (keine Wärmezufuhr von aussen, keine Arbeitsabgabe) lautet:

$$u^2 - u_z^2 = 2g\Delta\tilde{U} = 2gc_p\Delta T = \frac{2c_p}{K(c_p - c_v)} (K_gRT_z^2 - K_gRT)$$

mit (7) und Einsetzen von $u_z = 0$:

$$u^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_z^2 - a^2) \quad (31a)$$

Unter Berücksichtigung von (6) folgt:

$$\left(\frac{u}{a_z}\right)^2 = \frac{2}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{a}{a_z}\right)^2\right] = \frac{2}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] \quad (31b)$$

Diese Randbedingung stellt eine Ellipse (Energieellipse) im $(p/p_z)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - (u/a_z)$ - Diagramm dar. (In Fig.21, 22 und 23: Kurve $\psi = 1$).

Bei den periodischen Vorgängen in Maschinen tritt aber wegen der relativ langsamen Oeffnung der Durchströmorgane immer eine Drosselung mit den damit verbundenen Verlusten auf.

1a. Das Diffusorventil (Fig.16b).

Mit einem Ventil nach Fig.16b kann ein grosser Teil der kinetischen Energie im engsten Querschnitt durch den folgenden Diffusor wieder in Druck zurückverwandelt werden. Nach [23] erlaubte dieses Ventil bei 3mm Hub bereits derselben Wassermenge den Durchtritt wie ein Tellerventil erst nach 14mm Hub. Der Einbau solcher Ventile in den Zylinderkopf von Dieselmotoren ist leider mit Schwierigkeiten verbunden.

1b. Düsen, Blenden - Ventile und Schlitze.

Schon die Durchströmung der geometrisch einfachen Düsen und Blenden (Fig.17) stellt einen physikalisch verwickelten Vorgang dar, was sich aus der Vielzahl von Arbeiten zur Aufstellung der Mengemessvorschriften ersehen lässt. ([25] enthält eine gute Zusammenstellung und ein grosses Literaturverzeichnis). Immerhin gelingt es dabei, noch Formeln aufzustellen, während bei den Steuerorganen der Maschinen (Ventile und Schlitze) mit komplizierten Durchströmkanälen immer ein experimentell bestimmter Durchflussbeiwert eingeführt werden muss [24].

In der Zusammenstellung Fig.16 - 20 sind verschiedene Drosselformen dargestellt und die darin stattfindenden Strömungsvorgänge im T-s-Diagramm erklärt. Die Anzahl n der unbekanntenen Grössen ist für jeden Fall aufgezählt. Um die Randbedingung $\frac{u}{a_z} = f\left(\frac{p}{p_z}\right)$ zu bestimmen, müssen (n-1) Gleichungen aufgestellt

Fig. 16a: Idealfall

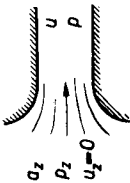


Fig. 16b: Diffusorventil

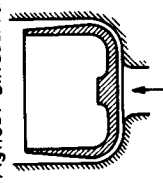
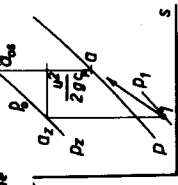
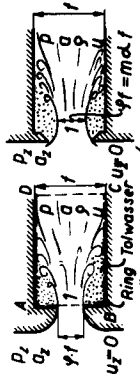


Fig. 17: Düse und Blende



$P_2 \ a_2 \ \varrho_2 = x P_1 / a_1^2 \ u_2 = 0$

8: $u_1 \ a_1 \ \rho_1 \ \varphi_1 \ u \ a \ p \ \varphi$

$$u/a_2 = f(\varphi, p/\rho_2)$$

$$u^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u_1^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u \ \varphi = \varphi \ u_1 \ \varphi_1$$

$$\varphi = x \ p / a^2$$

$$\rho_1 / \rho_2 = (\rho_1 / \rho_2)^x = (a_1 / a_2)^{2x}$$

$$u_1 = a_1$$

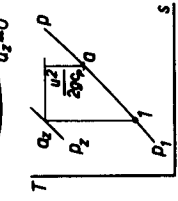
$$p - p_1 = \varphi \ \rho_1 \ u_1^2 - \rho \ u^2$$

(Impulsatz ABCD)

numerisch nach S. 49

Fig. 21

Fig. 18: Allg. Fall



$P_2 \ a_2 \ \varrho_2 \ u_2 = 0$

8: $u_1 \ a_1 \ \rho_1 \ \varphi_1 \ u \ a \ p \ \varphi$

$$u/a_2 = f(\varphi, p/\rho_2)$$

$$u^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u_1^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u \ \varphi = \varphi \ u_1 \ \varphi_1$$

$$\varphi = x \ p / a^2$$

$$\rho_1 / \rho_2 = (\rho_1 / \rho_2)^x = (a_1 / a_2)^{2x}$$

$$u_1 = a_1$$

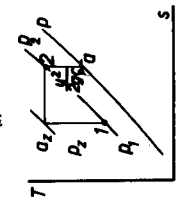
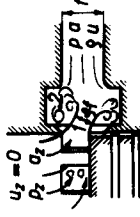
$$p - p_1 = \varphi \ \rho_1 \ u_1^2 - \rho \ u^2$$

(Impulsatz ABCD)

numerisch nach S. 49

Fig. 23

Fig. 19: Auslasskammer



$P_2 \ a_2 \ \varrho_2 \ u_2 = 0$

11: $u_1 \ a_1 \ \rho_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ a_2 \ P_2 \ u \ a \ p \ \varphi$

$$u/a_2 = f(\varphi, p/\rho_2)$$

$$u^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u_1^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u \ \varphi = \varphi \ u_1 \ \varphi_1$$

$$\varphi = x \ p / a^2$$

$$\rho_1 / \rho_2 = (\rho_1 / \rho_2)^x = (a_1 / a_2)^{2x}$$

$$u_1 = a_1$$

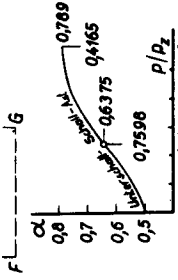
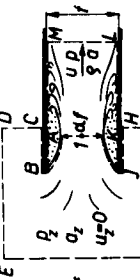
$$p - p_1 = \varphi \ \rho_1 \ u_1^2 - \rho \ u^2$$

(Impulsatz ABCD)

numerisch nach S. 49

Fig. 22

Fig. 20: Bordarmündung



$P_2 \ a_2 \ \varrho_2 \ u_2 = 0$

9: $\alpha \ u_1 \ a_1 \ \rho_1 \ \varphi_1 \ u \ a \ p \ \varphi$

$$u/a_2 = f(\alpha, p/\rho_2) \text{ und } \alpha = f(\alpha, p/\rho_2)$$

$$u^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u_1^2 = \frac{2}{\kappa-1} (a_2^2 - a^2)$$

$$u \ \varphi = \varphi \ u_1 \ \varphi_1$$

$$\varphi = x \ p / a^2$$

$$\rho_1 / \rho_2 = (\rho_1 / \rho_2)^x = (a_1 / a_2)^{2x}$$

$$u_1 = a_1$$

$$p - p_1 = \varphi \ \rho_1 \ u_1^2 - \rho \ u^2$$

(Impulsatz ABCD)

numerisch nach S. 49

Fig. 26

werden. Diese sind, mit Nummern 0 versehen, ebenfalls angeführt, wobei die Bedeutung der verwendeten Bezeichnungen aus den Figuren hervorgeht. Die Gleichungen ① - ⑤ erfordern keine Erklärung. ⑥ entspricht der Isentropengleichung (6), da die Expansion bis zum engsten Querschnitt mit guter Näherung verlustfrei gerechnet werden darf, denn die Verwirbelung in der Randzone bleibt gering. Diese ersten 6 Gleichungen gelten für alle Anordnungen.

Die Aussage (7) hängt nun davon ab, ob im engsten Querschnitt Unterschallgeschwindigkeit (Unterschall-Ast der Randbedingungskurve) herrscht, oder ob Schallgeschwindigkeit erreicht wird (Schall-Ast). Der zweite Fall ist besonders einfach, zudem allen Fällen gemeinsam, und wird zuerst behandelt.

lc. Schall - Ast.

Die Aussage, dass im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit auftritt

$$u_1 = a_1 \quad (33)$$

ergibt mit ②

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{p}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (33a)$$

und mit ⑥

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (33b,c)$$

aus der Gasgleichung folgt mit ①:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{p_2}{p} \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{u}{a_2}\right)^2 \right]$$

andererseits aus ③ und (33a,c):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{u}{y \cdot a_2} \left(\frac{p}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}}$$

Das Gleichsetzen der beiden letzten Beziehungen ergibt:

$$\frac{p}{p_2} = y \left(\frac{p}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}} \cdot \frac{a_2}{u} \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{u}{a_2}\right)^2 \right] \quad (34)$$

Falls das Querschnittsverhältnis y bekannt ist, kann der Schall-Ast (34) der Randbedingung gezeichnet werden. Auf den rechnerisch schwer erfassbaren Vorgang, der sich von der engsten Stelle

le bis zum gleichmässigen Fliessen im Rohr abspielt, muss dabei nicht näher eingegangen werden. Es tritt nämlich teilweise Ueberexpansion mit anschliessenden Verdichtungsstössen auf.

Der Uebergang vom Unterschall- in den Schall-Ast erfolgt je nach Anordnung bei höheren oder tieferen Drucken (Fig.22), was noch gezeigt wird.

Bei grossen Druckgefällen tritt nach der Uebergangsstrecke im Rohr Ueberschallgeschwindigkeit auf. Die Störung darf dann nicht mehr eindimensional behandelt werden, da infolge von schiefen Stössen und Verdünnungsfächern der Zustand über dem Querschnitt variiert. Die Randbedingungskurven sind daher in Fig.23 nur bis zum Erreichen von $u = a$, d.h. nach (1) bis $u/a_2 = (\frac{2}{\kappa+1})^{1/2}$ aufgetragen.

Das Querschnittsverhältnis $\varphi = f_{\text{effektiv}}/f_{\text{Rohr}}$ setzt sich zusammen aus $m = \frac{f_{\text{geometrisch}}}{f_{\text{Rohr}}}$ und der Strahlkontraktion $\alpha = \frac{f_{\text{effektiv}}}{f_{\text{geometrisch}}}$

$$\varphi = m \cdot \alpha \quad (35)$$

m ist aus den geometrischen Abmessungen gegeben. α beträgt für Düsen ungefähr 1 und kann für Blenden nach [27] bestimmt werden. In den am Motor verwendeten Auslassorganen muss die Strahlkontraktion empirisch bestimmt werden. Eine Ausnahme macht die Bordamündung.

1d. Bordamündung (Fig.20).

Sie ist geometrisch so beschaffen, dass durch Anwendung des Impulssatzes auf die Kontrollfläche B C D E F G H J L M B eine Gleichung (8) gefunden wird. α kann damit eliminiert werden (m ist sowieso = 1).

In (8) wird φ mittels (4) eliminiert und dann $(a/u)^2$ aus (1) mal $1/2$ ausgerechnet und eingesetzt.

$$\frac{p_z}{p} = \frac{\kappa}{\left(\frac{a}{u}\right)^2 - \frac{\kappa-1}{2}} + 1 \quad (36)$$

Die Aussage (7), dass im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit auftritt, ist weder für die Herleitung von (8) noch von (36) verwendet worden. Die Randbedingungskurve (36) der Borda-

mündung gilt demnach für den Schall- und Unterschallbereich. (In Fig.26 ist diese Kurve eingetragen. Dort ist $a_z = a_{\text{Umgebung}} = 340 \text{ m/s}$; die U-Teilung ist $\frac{u}{a_0} = \frac{u}{320}$, so dass die horizontale Verzerrung um $\frac{a_{\text{Umgebung}}}{a_0} = \frac{340}{320}$ beachtet werden muss.) Unter Benützung der weiteren Gleichungen können die in Fig.20 über P/p_2 aufgetragenen α -Werte errechnet werden. Die Bordamündung zeichnet sich durch maximale Kontraktion aus. Schon die Verwendung eines Rohres mit Flansch an der Einströmöffnung vermindert die Einschnürung.

In den spätern Beispielen darf beim Rückströmen aus der Umgebung in das Auspuffrohr diese Kontraktion nie vergessen werden.

1e. Unterschall-Ast.

Die Aussage (7a) muss hier ersetzt werden. Dies zwingt, den Vorgang nach dem engsten Querschnitt näher zu betrachten und eine Annahme darüber zu machen. Am übersichtlichsten erscheint der Verzögerungsprozess bei

Düsen und Blenden.

Wenn das Gas durch eine Düse in einen reibungsfreien Raum ausströmt, so kann die Strahlform berechnet werden [25].

Fig.17 zeigt aber, dass hier der Strahl in sein eigenes Medium hineinstösst. Ein Stück weit behält er, umgeben von "Totwasser", seine geschlossene Form. Durch die Unstetigkeit an der Oberfläche beginnt aber rasch eine turbulente Mischung mit der Umgebung. Solange der Strahl und die Mischzone von "Totwasser" umgeben sind, kann kein Druckanstieg erfolgen. Auf der Ringfläche der Düse Fig.17 herrscht daher derselbe Druck wie im engsten Querschnitt, was experimentell genau bestätigt wurde [26]. Diese Tatsache erlaubt eine Gleichung (7b) für diesen Fall aufzustellen. Erreicht dann der Strahl mit der ihn umgebenden Wirbelzone die Wand, so tritt, wie Messungen bestätigen [25], mit grosser Steilheit der Borda-Carnotsche Druckanstieg auf. Um den Druckrückgewinn zu berechnen, wird der Impulssatz auf die Kontrollfläche ABCD angewendet, Gleichung (7b) in der Zusammenstellung Seite 45. Da keine brauchbare Formel $u/a_z = f(P/p_2)$ aufgestellt werden konnte, wurde die Auswertung numerisch durchgeführt wie folgt:

③ mit ④ und ⑤:

$$\frac{p}{p_1} = \varphi \cdot \frac{u_1}{u} \cdot \frac{a^2}{a_1^2} \quad (37a)$$

mit ①:

$$\frac{p}{p_1} = \varphi \cdot \frac{u_1/a_z}{u/a_z} \cdot \frac{1 - \frac{\kappa-1}{2} (u/a_z)^2}{(a_1/a_z)^2} \quad (37b)$$

aus ⑦b mit ④ und ⑤:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1 + \kappa (u/a)^2}{1 + \varphi \cdot \kappa (u_1/a_1)^2} \quad (37c)$$

aus (37a) und (37c) wird unter Berücksichtigung von ① P/p_1 eliminiert:

$$\left(\frac{u}{a_z}\right)^2 - \frac{u}{a_z} \cdot \frac{2}{\kappa+1} \left\{ \frac{1}{\varphi} \left(\frac{a_z}{u_1}\right) \left(\frac{a_1}{a_z}\right)^2 + \kappa \left(\frac{u_1}{a_z}\right) \right\} + \frac{2}{\kappa+1} = 0 \quad (37d)$$

Aus ② werden zusammengehörige Werte u_1/a_z und a_1/a_z (somit nach ⑥ auch P_1/p_z) entnommen und in (37c) gesetzt und aus dieser quadratischen Gleichung u/a_z ausgerechnet. Aus (37b) folgt P/p_1 und $\frac{p}{p_z} = \frac{p}{p_1} \frac{p_1}{p_z}$. Die Auswertung ist in Fig. 21 eingetragen:

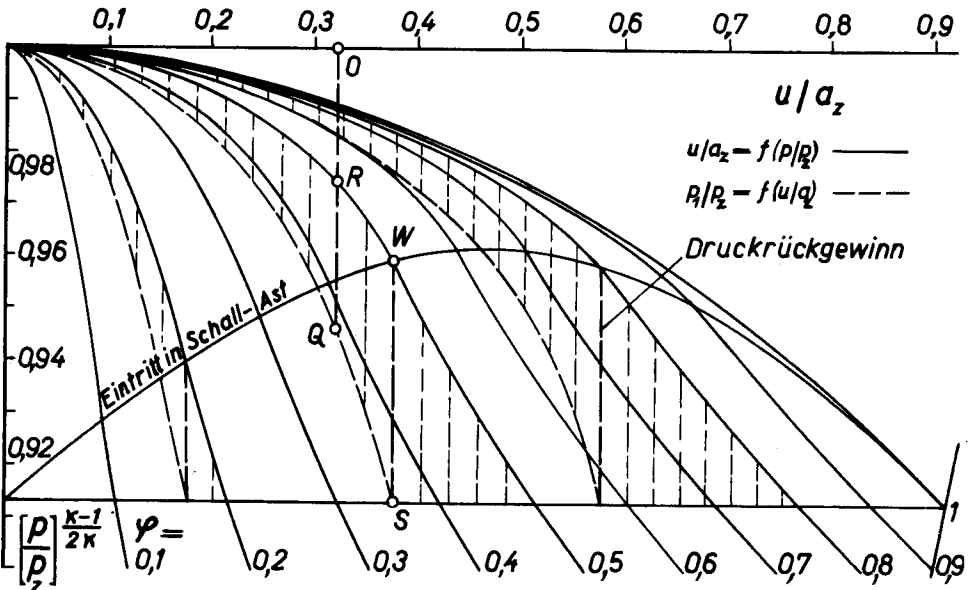


Fig. 21

Der Eintritt in den Schall-Ast erfolgt in Wendepunkten W, die durch eine Kurve verbunden sind.

Der Punkt Q senkrecht unter R zeigt den Druck im engsten Querschnitt an. OQ stellt das Gefälle in der Düse dar, wovon QR zurückgewonnen wird. Der Rückgewinn ist für $\varphi = 0,2; 0,5; 0,8$ schraffiert. Für kleine φ ist er gering ($\varphi = 0 \rightarrow$ ausströmen in freien Raum $\rightarrow 0$), für grosse φ aber ganz beträchtlich.

Auslasskammer (Fig.19).

Dieser Fall ist dadurch gekennzeichnet, dass die gesamte kinetische Energie nach dem engsten Querschnitt verwirbelt wird. Die Speicherwirkung dieser Kammer wird aber vernachlässigt. Die Auswertung der in der Zusammenstellung Seite 45 eingeschriebenen Gleichungen ergibt auf folgende Weise die Randbedingung:

Aus (3) kann durch Einsetzen von (4) und (5)

$\frac{u_1}{a_z} = f(\varphi, \frac{u}{a_z}, \frac{p}{p_z}, \frac{p_1}{p_z}, \frac{a_1}{a_z}, \frac{a}{a_z})$ berechnet und (2) gleichgesetzt werden, wodurch u^1/a_z verschwindet. Die hinteren drei unerwünschten Variablen eliminiert man wie folgt:

aus (8) mit (9) $p^1/p_z = f(p/p_z, a/a_z)$

aus (6) mal (8) mit (7) $a^1/a_z = f(p/p_z, a/a_z)$

und schliesslich überall $\frac{a}{a_z} = f(\frac{u}{a_z})$ nach (1)

Die entstehende quadratische Gleichung hat die physikalisch sinnvolle Lösung:

$$\left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{-\varphi^2 \left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(\frac{u}{a_z}\right)^2\right]^{\frac{\kappa-3}{\kappa-1}}}{\kappa-1} + \sqrt{\frac{\varphi^2 \left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(\frac{u}{a_z}\right)^2\right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa-1}}}{\kappa-1} + \frac{2\varphi^2 \left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(\frac{u}{a_z}\right)^2\right]^{\frac{\kappa-2}{\kappa-1}}}{\kappa-1}} \quad (38)$$

In Fig.21 sind für $\varphi = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ diese Randbedingungskurven eingezeichnet und der Vergleich mit den Resultaten der andern Anordnungen zeigt, dass sie am tiefsten liegen. Für eine bestimmte Durchströmung erfordert die Auslasskammer den grössten Druckabfall und ist daher zu vermeiden. Der Eintritt in den Schall-Ast erfolgt auf der Bernoulli-Ellipse mit dem Scheitelpunkt: $\frac{p}{p_z} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} =$ Schalldruckverhältnis nach (33b).

Allgemeiner Fall (Fig.18).

Die wirkliche Konstruktion der Steuerorgane an Maschinen liegt zwischen den beiden besprochenen Anordnungen. Angestrebt wird ein möglichst grosser Druckrückgewinn, der aber durch folgende Verluste verkleinert oder sogar mehr als aufgehoben werden kann: Ablösungen an Ventil und Schaft, grosse radiale Komponenten und scharfe Umlenkungen (damit die Wärmeübergangsflächen und die Bauhöhe verkleinert werden). Solche Prozesse sind nicht formelmässig erfassbar und die Einführung eines experimentell bestimmten Durchflussbeiwerts ist nicht zu umgehen.

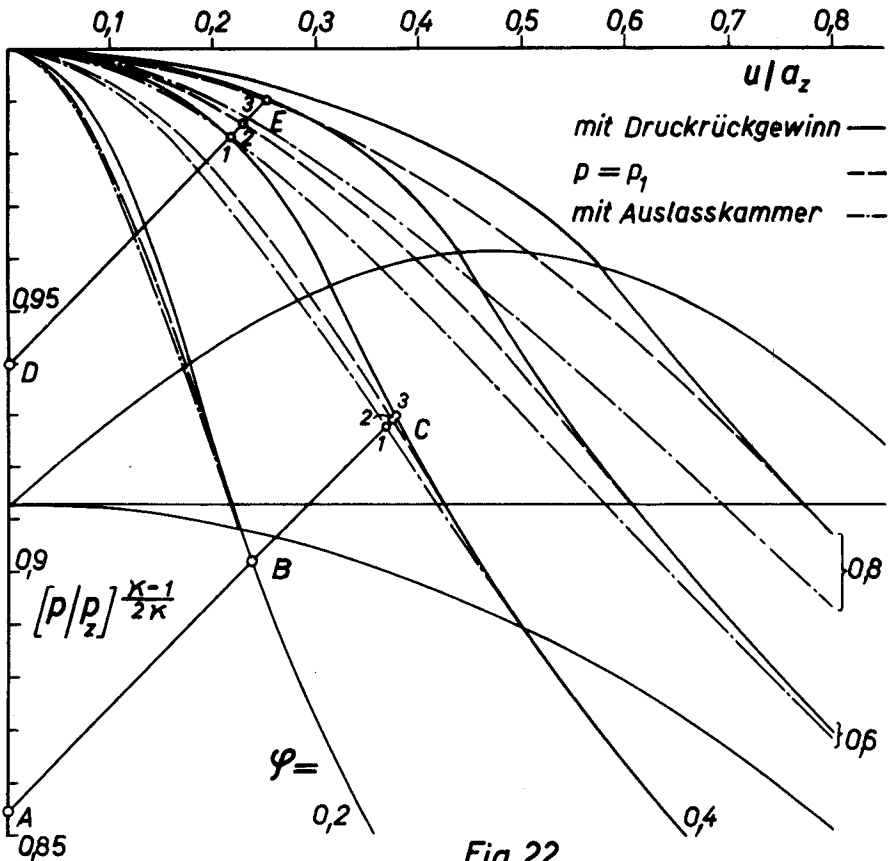


Fig.22

Dazu werden die Temperaturen und der Druckabfall gemessen und die daraus errechnete, theoretisch durch den Oeffnungsquerschnitt fließende Menge mit dem effektiven Durchströmgewicht der Messung verglichen. Eine Messung des Druckes p_1 im engsten Querschnitt ist nicht durchführbar. Eine brauchbare Ablesung von p erhält man erst dort, wo die Strömung wieder geordnet ist.

Die Auswertung macht dann die Annahme [7].

$$p_1 = p \quad (39)$$

Abweichungen sind im Durchflussbeiwert eingeschlossen, der damit seine rein geometrische Bedeutung verliert:

$$\alpha = \frac{G_{\text{eff.}}}{G_{\text{theor.}}} = \frac{G_{\text{effektiv}}}{G_{\text{durch } P_{\text{geom.}} \text{ bei } p/P_z \text{ - Druckgefälle}} \quad (40)$$

Der Parameter φ bleibt weiter $\varphi = m\alpha$. Für diesen praktisch besonders wichtigen Fall ist die Ableitung der Randbedingung einfach:

$$\text{Aus (3) folgt mit (4) (5) (7b): } u_1 = \frac{1}{\varphi} \cdot u \cdot \frac{a_1^2}{a^2}$$

Darin wird u_1 mit (2), a durch (1), a_1 mit Hilfe von (6) in p und u ausgedrückt:

$$\varphi \frac{1}{(p/p_z)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left\{ \frac{1}{(p/p_z)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}} - 1 \right\}} = \frac{u/a_z}{1 - \frac{\kappa-1}{2}(u/a_z)^2} \quad (41)$$

Da $(p/p_z)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = \frac{a}{a_{0s}}$ linear auf der P -Achse aufgetragen ist, können die Kurven (41) sehr rasch aufgezeichnet werden (Fig. 23). Das Diagramm ist ergänzt durch Mengen- und Entropiekurven, die auch für die früher besprochenen Fälle gelten.

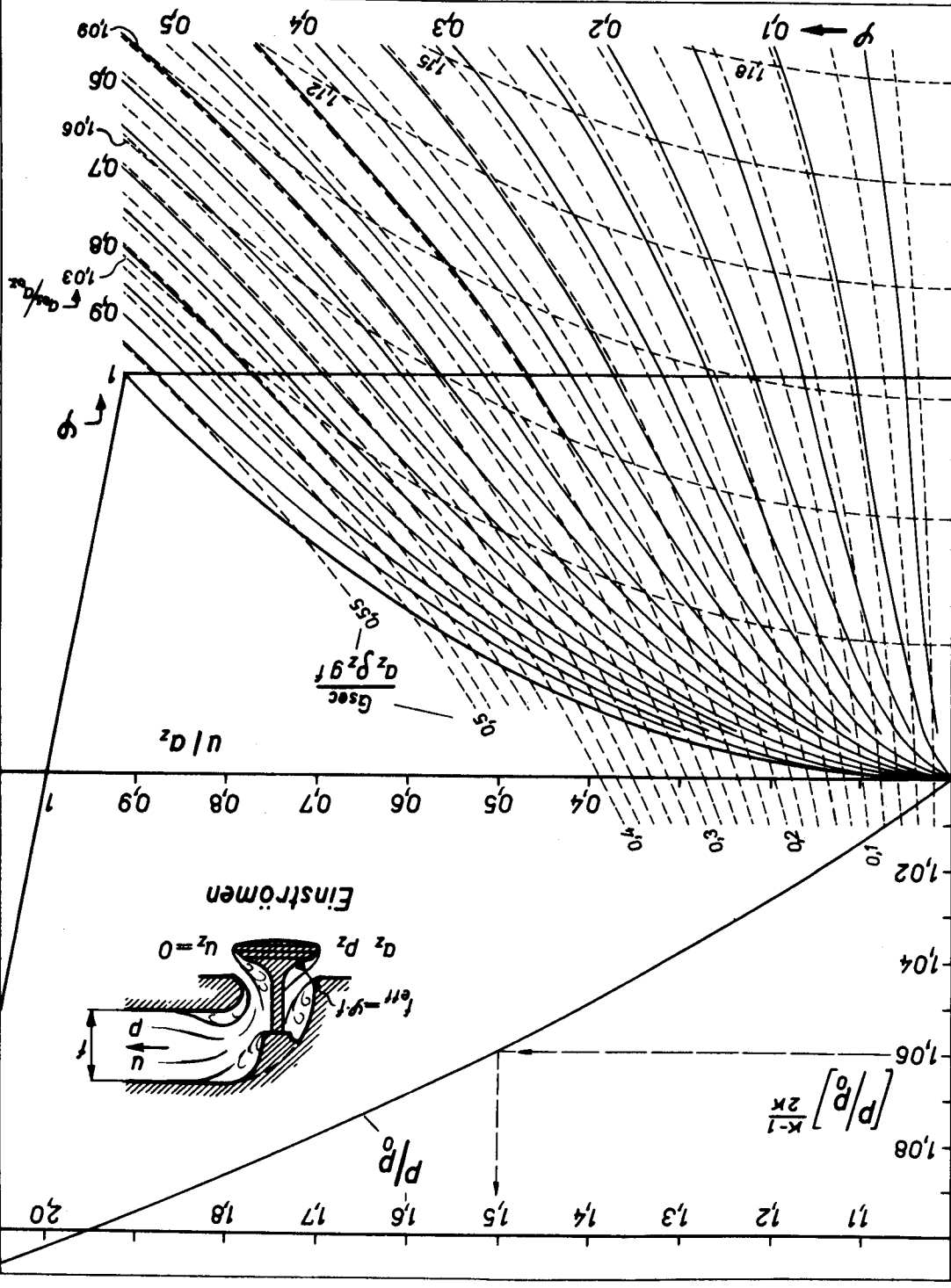
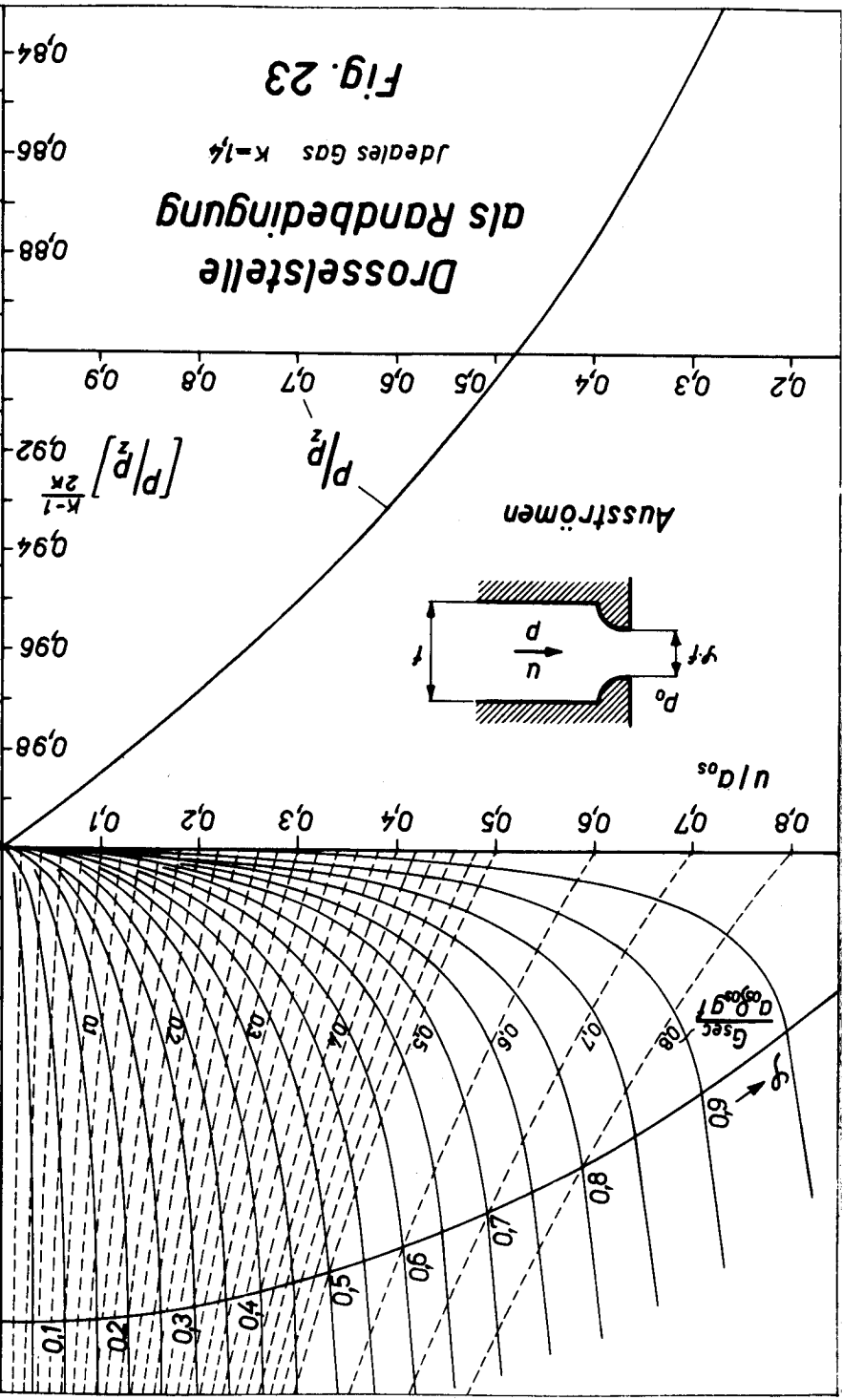
1f. Mengenkurven:

Die dimensionslose Zahl $\xi = \frac{G}{G_0} = \frac{f_9 u g}{f_{g_2} a_2 g}$ kann mit (4) und (1) umgeformt werden zu:

$$\xi = \frac{G}{F \cdot g_2 \cdot a_2 \cdot g} = \frac{P}{P_z} \frac{u/a_z}{1 - \frac{\kappa-1}{2}(u/a_z)^2} \quad (42)$$

(42) ist gleich gebaut wie (34) und (41) und auf dem Schallast (34) gilt:

Fig. 23
Drosselstelle als Randbedingung
 Ideales Gas $k=1.4$



Leer - Vide - Empty

$$\xi = \psi \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \quad (43)$$

Für $\kappa = 1,4$

$$\xi = \psi \cdot 0,5787$$

Dies ist verständlich, weil im Moment, da im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit erreicht wird, ein weiteres Absenken des Gegendruckes die Menge nicht mehr erhöhen kann.

lg. Entropiekurven.

Die Entropiezunahme wird nach (27) in a_{0s} ausgedrückt. Als Bezugsdruck ist in Fig.17 der Druck $p_z = p_0$ gewählt. Die Isentrope, auf welcher der Zustand im Zylinder liegt, ist durch $a_z = a_{0z}$ charakterisiert. Der Zustand im Rohr liegt auf der durch a_{0s} bestimmten Isentrope. Aus der Energiegleichung (1) und (6) folgt:

$$\frac{a_{0s}}{a_{0z}} = \frac{a_{0s} \cdot a}{a \cdot a_{0z}} = \frac{1}{\left(\frac{p_z}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{u}{a_z} \right)^2} \quad (44)$$

lh. Der Einfluss der Gestaltung der Auslassorgane und des Auspuffquerschnittes auf die Energieausnutzung im Vorauslass-Stoss.

Nach dem graphischen Verfahren liegt der Zustand im Auspuffrohr nach dem Auslassorgan immer auf einer ω^- -Charakteristik. In Fig.22 sind 2 Zustandsgeraden herausgegriffen und zwar A B C aus der Vorauslass-Periode mit grossem und D E aus der Spül-Periode mit geringerem Druckverhältnis.

Vorauslass: Wird in einen grossen Raum - $\psi = 0$, Punkt A - ausgestossen, so geht sämtliche Druckenergie durch Verwirbelung verloren. Bei kleineren Leitungsquerschnitten staut sich die Strömung im engen Rohre auf, und die Druckenergie bleibt in einer vom Motor weglaufenden Welle teilweise erhalten, und zwar desto mehr, je grösser ψ ist, wie B bei $\psi = 0,2$ und C bei $\psi = 0,4$ zeigen. Grosse Querschnittsverhältnisse $\psi =$ effektive Auslassfläche durch Rohrfläche werden erreicht:

a) durch kleine Rohrfläche, d.h. enge Leitungen. Dabei erhöht man aber gleichzeitig den Widerstand gegen die Durchspülung. Dies kann durch Ausnutzung von reflektierten Saugwellen eventuell wieder ausgeglichen werden, was an den später fol-

genden Beispielen erklärt wird. Ausgeführte Motoren [4] zeigen, dass die Leitungsquerschnitte ungefähr der Ringfläche der Auspuffventile entsprechen, wobei man danach trachtet, möglichst grosse Auslassventile anzuordnen.

- b) durch rasches Öffnen der Auslassorgane wächst φ schnell. Mechanische Schwierigkeiten beschränken die Beschleunigung der Ventile, und sie öffnen schleichend. Durch einen Kragen am Ventilsitz kann dies verbessert werden.

Die Punkte $C_{1,2,3}$ liegen nahe beisammen. In der Vorauslassperiode ist also das schnelle Öffnen viel wichtiger als die konstruktive Gestaltung der Ventile, denn bei grossen Druckgefällen und kleinen φ entsteht in allen Fällen ein Verlust derselben Grössenordnung, sei es bei C_1 durch Verwirbelung in der Auslasskammer, oder bei C_3 durch Verdichtungsstösse.

Spülung: Die Geschwindigkeit in E_3 ist das 1,17fache derjenigen in E_1 . 17% sind aber für die Spülung ausschlaggebend, sodass alle Sorgfalt auf die strömungsgerechte Formgebung der Steuerorgane verwendet werden muss.

2. Ausströmen durch die Drosselstelle.

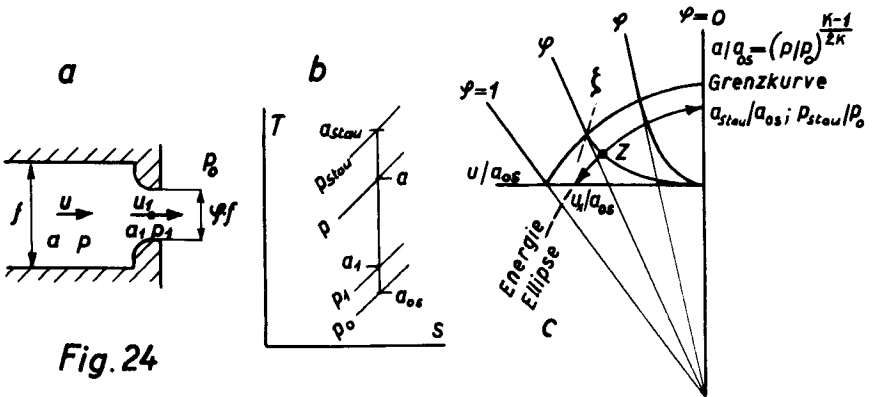


Fig. 24

Das Gas strömt durch die Düse (Fig. 24a) in einen Raum mit bekanntem Druck p_0 . Dann gilt für die Austrittsstelle (engster Querschnitt) folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} p/p_0 = 1 & \quad \text{für} & \quad u/a_{0s} \leq 1 \\ u_1/a_1 = 1 & \quad \text{für} & \quad u/a_{0s} \geq 1 \end{aligned} \quad (45)$$

Im Unterschallbereich berechnet sich die Randbedingung aus den dimensionslosen Strömungsgleichungen wie nachstehend:

$$\text{Energiegleichung} \quad \left(\frac{u_1}{a_{0s}}\right)^2 - \left(\frac{u}{a_{0s}}\right)^2 = \frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{a}{a_{0s}}\right)^2 - 1 \right] \quad (31c)$$

$$\text{Kontinuität} \quad \frac{u}{a_{0s}} \frac{\rho}{\rho_{0s}} = \varphi \frac{u_1}{a_{0s}} \quad (46)$$

Der Ausströmvorgang ist in Fig.24b im Entropiediagramm eingetragen; er erfolgt isentropisch:

$$\frac{\rho}{\rho_{0s}} = \left(\frac{a}{a_{0s}}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (6c)$$

ρ/ρ_{0s} wird aus (6c) in (46) eingesetzt, und mit der entstehenden Gleichung kann u_1/a_{0s} in (31c) eliminiert werden:

$$\left(\frac{u}{a_{0s}}\right)^2 = \frac{\frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{a}{a_{0s}}\right)^2 - 1 \right]}{\frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{a}{a_{0s}}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}} - 1} = \frac{\frac{2}{\kappa-1} \left\{ \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right]^2 - 1 \right\}}{\frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right]^{\frac{2}{\kappa-1}} - 1} \quad (47)$$

Zwei solche parabelförmige Kurven sind in Fig.24c schematisch dargestellt, in Fig.23 ist das vollständige Ausströmdiagramm eingezeichnet. Strömt durch die Düse ein inhomogenes Gas, so erfolgt die Expansion in jeder Schicht auf der ihr entsprechenden - durch a_{0s} charakterisierten - Isentrope. Wählt man, wie in obiger Ableitung, a_{0s} als Bezugsgrösse, so gilt (47) für alle Gasschichten. Auf die u/a_0 -Teilung der Geschwindigkeitsachse beim graphischen Verfahren bezogen erhält aber jede Schicht ihre eigene Kurve, wie in Fig.39a noch gezeigt wird. Für $\varphi = 0$ ergibt (47) $u = 0$, die Bedingung an der festen Wand. Die Kurven (47) können auch graphisch bestimmt werden [14]. Sucht man zu einem Wertepaar $Z(u/a_{0s}, a/a_{0s})$, Fig.24c, die zugehörige Geschwindigkeit u_1/a_{0s} im engsten Querschnitt, so folgt man der Energie-Ellipse durch Z bis auf die Bedingung (45) für den engsten Querschnitt. Die Ellipse durch den Schallpunkt $u = u_1 = a_{0s}$ begrenzt den Unterschallbereich. Ihre Gleichung ist nach (31c) mit $u_1/a_{0s} = 1$:

$$\frac{2}{\kappa-1} \left(\frac{a}{a_{0s}}\right)^2 + \left(\frac{u}{a_{0s}}\right)^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \quad (48)$$

Ist Schallgeschwindigkeit erreicht, so spielt der Gegendruck p_0 keine Rolle mehr und a/a_1 , sowie u/a_1 , erhalten nur von φ abhängige Festwerte. Für ein bestimmtes φ wachsen demnach a und u linear mit a_1 , und daher setzen sich die Randbedingungskurven (47) im Schallgebiet als Geraden fort, deren Verlängerungen durch den Nullpunkt gehen.

Zu jedem Punkt Z (Fig.24c) gehört eine ganz bestimmte Ausströmmenge:

$$\xi = \frac{G}{G_0} = \frac{f \cdot s \cdot u \cdot g}{F \cdot s_{0s} \cdot a_{0s} \cdot g} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{u}{a_{0s}} \quad (49)$$

Die Mengenkurven nach Gleichung (49) vervollständigen Diagramm Fig.23. Dabei fällt auf, dass die ξ -Kurven von entsprechenden u/a_{0s} -Werten auf der U-Achse ausgehen und die Grenzkurve (48) dort schneiden, wo $\varphi = \xi$ ist.

3. Experimentell ermittelte Randbedingung für den Auspuffmodellversuch.

Wie bereits betont, muss bei den Steuerorganen an den Maschinen ein Durchflussbeiwert bestimmt werden. Daher wurden für die in Fig.4 dargestellten Auslass-Schlitze die Randbedingungen im stationären Versuch experimentell ermittelt. Das Verdrehen des Einlass-Segmentes 45h des Rotors um 180° (Fig.3) ermöglicht ein gleichzeitiges Offenhalten von Ein- und Auslass. Die Luft strömt durch die Einlass-Schlitze in den Zylinder, wird durch ein quergestelltes Lochblech beruhigt und fließt durch den Auslass-Schlitz in die bei allen Versuchen (nach Fig.5) verwendete Auspuffleitung mit 40 mm Innendurchmesser. Die Druck-, Temperatur- und Mengenmessungen (Düsenmessung) erlauben P/p_2 und u/a_2 auszurechnen und in Fig.26c als Ausströmkurven aufzutragen. Bei umgekehrter Strömungsrichtung ergeben sich die in Fig.26c aufgezeichneten Rückströmkurven. Der Vergleich von Fig.26c mit Fig.23 zeigt, dass die theoretischen und gemessenen Rückströmkurven genau übereinstimmen, während bei den Ausströmkurven der Durchflussbeiwert α und somit $\varphi = m \cdot \alpha$ mit dem Druckgefälle um einige % variiert. Die Berechnungsbeispiele basieren durchwegs auf den gemessenen Randbedingungen.

4. Berechnung des Druckverlaufes im Zylinder.

Die Druckänderungen im Zylinder Fig.15 werden hervorgerufen durch:

- Wärme-Zufuhr oder -Abfuhr (Verbrennung, Kühlung; hier nicht berücksichtigt);
- das pro Zeiteinheit einströmende Gewicht dG_e , vom Zustand p_e, a_e ;
- das pro Zeiteinheit ausströmende Gewicht dG_a , vom Zustand p_a, a_a ;
- die Aenderung des Zylinderinhaltes dV_z pro Zeiteinheit.

Nach Eichelberg [1] können auf folgende Weise für die schrittweise Rechnung geeignete Gleichungen für p_z und T_z hergeleitet werden:

Nach der Gasgleichung (3) enthält der Zylinder das Gasgewicht G_z :

$$G_z = \frac{p_z \cdot V_z}{R \cdot T_z}$$

mit R = konstant ergibt sich durch Logarithmieren und Differenzieren:

$$\frac{dG_z}{G_z} = \frac{dp_z}{p_z} + \frac{dV_z}{V_z} - \frac{dT_z}{T_z} \quad (50)$$

$$\text{Gewichtsbilanz: } dG_z = dG_e - dG_a \quad (51)$$

Energiebilanz:

$$dG_e \cdot J_e - dG_a \cdot J_a - p_z \cdot dV_z = d(G_z U_z) = dG_z \cdot U_z + dU_z \cdot G_z \quad (52)$$

Für ideale Gase ist die Enthalpie:

$$J_e = c_{p_s} \cdot T_s \quad (T_s = \text{Stau-Temperatur der eintretenden Luft})$$

$$J_a = c_{v_z} \cdot T_z \quad (53)$$

und die innere Energie:

$$U_z = c_{v_z} \cdot T_z$$

Die Ausdrücke (53) werden in (52) eingesetzt und $\frac{dT_z}{T_z}$ aus (50) eliminiert.

$$d \ln p_z = -K_z \cdot d \ln V_z + \frac{dG_e}{G_z} K_z \frac{c_{p_s}}{c_{p_s}} \frac{T_s}{T_z} - \frac{dG_a}{G_z} \cdot K_z \quad (54)$$

Setzt man (50) = (51) und berücksichtigt (54)

$$d \ln T_z = 2 d \ln a_z = \frac{K_z - 1}{K_z} d \ln p_z + \frac{dG_e}{G_z} \left[\frac{c_{p_s}}{c_{p_z}} \frac{T_s}{T_z} - 1 \right] \quad (55)$$

Die Anwendung der Differenzgleichungen (54) und (55) wird am folgenden Beispiel gezeigt, wobei für die Luft beim Modellversuch $K = 1,4$ und $c_{p5}/c_{p2} = 1$ betragen.

§ 3. Der Auspuffvorgang in eine Leitung mit offenem Ende.

1. Der Berechnungsgang.

Im Weg-Zeit-Diagramm (Fig.25) ist unter der X-Achse das Auspuffrohr von 1955 mm Länge schematisch dargestellt. Links neben der Z-Achse, die sowohl eine Teilung für den dimensionslosen Zeitfaktor Z, als auch für den Kurbelwinkel des Modellrotors hat, ist der Oeffnungsquerschnitt des Auslass-Schlitzes aufgetragen.

Der Druck im Zylinder bei Auspuffbeginn beträgt $P_{z0}/p_0 = 4,4$, die Schallgeschwindigkeit $a_{z0} = 374$ m/s, so dass der Expansionsvorgang auf der durch $a_{z8} = 303$ m/s charakterisierten Isentropen erfolgt. Da die graphische Methode nach § 1-8 nur den Anfahrvorgang behandeln kann, wird folgende Annahme für den ruhend und homogen gedachten Rohrinhalt gemacht:

$$p = p_0 \quad u = 0 \quad a_{0s} = a_0 = 320 \text{ m/s}$$

Die Wahl von a_0 wird nach durchgeführter Rechnung diskutiert. Der Auspuff beginnt mit einer nach rechts laufenden Einzelwelle mit den Zuständen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, die im A-U-Diagramm Fig.26 auf der ω -Charakteristik durch 0 und der momentan gültigen Ausströmkurve festgelegt sind. Für die Punkte 21, 28, 36 sind diese momentanen Kurven eingezeichnet. Bei $574,5^\circ$ KW (Kurbelwinkel) beträgt der Druck im Zylinder $P_z/p_0 = 1,81$ und daher beginnt die Randbedingungskurve für 28 bei

$(p_z/p_0)^{\frac{K-1}{2K}} = 1,81^{\frac{K-1}{2K}} = 1,81^{\frac{1}{4}} = 1,08845$ auf der P-Achse. Es drängt sich aber sofort das viel einfachere Umzeichnen der geraden Zustandslinien ins Ausströmdiagramm Fig.26c auf. Die zu übertragende Gerade (hier 0-28) wird charakterisiert durch den Schnittpunkt $p_c/p_0 (= 1)$ mit der P-Achse, und durch ihre Neigung $\frac{K-1}{2} \frac{a_0}{a_{0s}} (= \frac{K-1}{2})$.

Im $u/a_z - (p/p_z)^{\frac{K-1}{2K}}$ -Ausströmdiagramm Fig.26c liegt der Schnitt-

punkt mit der P-Achse bei $(p_c/p_z)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = 0,55249^{\frac{1}{2}} = 0,918$,

$$\text{da } p_c/p_z = \frac{p_c \cdot p_o}{p_o \cdot p_z} = \frac{1}{1,81} = 0,55249$$

$$\text{Die Neigung beträgt } \frac{\kappa-1}{2} \frac{a_{oz}}{a_{os}} = \left(\frac{\kappa-1}{2} \frac{a_{oz}}{a_o} = \frac{\kappa-1}{2} \frac{303}{320} \right)$$

Die übertragene Charakteristik schneidet die interpolierte Randbedingung $574,5^\circ$ bei $(p/p_z)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = 0,9757$, $a_{os}/a_{oz} = 1,016$ und $\xi = 0,261$.

Mit $\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = \left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \left(\frac{p_z}{p_o}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} = 0,9757 \cdot 1,08845 = 1,062$ entsprechend $p/p_o = 1,523$, kann der Punkt 28 im Zustandsdiagramm eingezeichnet werden. Alle so bestimmten Punkte sind durch kleine Kreise hervorgehoben.

Aus $a_{os}/a_{oz} = 1,016$ ergibt sich $a_{os} = 1,016 \cdot 303 = 308\text{m/s}$ als Charakteristik der Entropie der gerade ausströmenden Schicht. Dieser Wert wird später bei der Diskussion über den Einfluss der Inhomogenität der Auspuffgase benötigt. In Figur 26b sind die Kurven a_{os}/a_{oz} nach Fig.22 ubersichtlichkeithalber weggelassen.

Die bei 28 ($574,5^\circ$ KW) ausströmende Menge beträgt $dG_a = \int \cdot f \cdot g \cdot j_z \cdot a_z \cdot dt$, und das im Zylinder enthaltene Gasgewicht $G_z = V_z \cdot g \cdot j$.

Diese Werte in (54) eingesetzt ergeben die Tangente an den Druckverlauf im Punkt 28:

$$\frac{dp_z}{dt} = - \left\{ \cdot \frac{\kappa \cdot f}{V_z} \cdot a_z \cdot p_z \right. \quad (54a)$$

Die Verlängerung dieser Tangente (Fig.26b) bis 587° KW stellt die erste Näherung des Druckverlaufes dar: $(p_z)_{36}$ erste Näherung

Das zugehörige $a_{z,36}$ ergibt sich am raschesten aus der Isentropengleichung (6). Mit diesen Werten findet sich nach obigem Verfahren die Aenderung $(dp_z/dt)_{36}$ in erster Näherung. Diese Tangente soll in der Mitte zwischen 28 und 36 angesetzt werden und ergibt einen verbesserten Punkt 36, usw. Um die Anzahl Verbesserungen zu beschränken, soll die Lage von 36 dem allgemeinen Verlauf entsprechend zum voraus günstig angenommen werden.

Die bei 21 und 36 auslaufenden Wellen 21 - 27 und 36 - 43 werden am offenen Rohrende reflektiert, wobei 27 und 43 nach (17) auf $p = p_0$ liegen. Die beiden Reflexionen 27 34 41 48 55v 62v 69v 76v und 43 50 57 64 71n 76n bilden nun Fuss und Kopf des entstehenden Verdichtungsstosses (schwacher Stoss nach § 1-5). Bei Ankunft der Fusswelle am Zylinder, 76v, strömt noch immer Luft aus dem Zylinder ins Auspuffrohr. Der Kopf 76n leitet aber sofort die Rückströmperiode ein. Die Bestimmung von 76v erfolgt, wie für 28 erklärt wurde. 76n wird in genau gleicher Weise durch Uebertragen in die Rückströmkurven gefunden. Ein Unterschied ergibt sich nur bei den in die Differenzgleichungen (54) und (55) einzusetzenden Grössen: Das rückströmende Gewicht beträgt unter Berücksichtigung von (3)

$$dG_e = \int_e f \cdot a_e \cdot g \cdot \rho_e \cdot dt = \int_e f \cdot \kappa \cdot g \cdot \frac{p_e}{a_e} \cdot dt$$

Der Zylinder enthält

$$G_z = V_z \cdot g \cdot \rho_z = V_z \cdot \frac{\kappa \cdot p_z \cdot \kappa}{a_z^2}$$

Das Rückströmen erfolgt mit Unterschallgeschwindigkeit, so dass

$$p_e = p_z \quad \text{und} \quad a_e/a_z = a_{0e}/a_{0z}$$

Danach ist

$$\frac{dG_e}{G_z} = \int_e \frac{f \cdot a_{0z} \cdot a_z}{V_z \cdot a_{0e}}$$

Die einströmende Luft hat kurz vorher den Zylinder mit geringer Drosselung verlassen; ihr a_{0e} ist nur wenig von a_{0z} verschieden, nämlich $a_{0e} = 305$ m/s. Es muss hier ausdrücklich betont werden, dass nicht etwa der Mittelwert $a_0 = 320$ m/s eingesetzt werden darf, der nur für die graphische Konstruktion verwendet wird.

Das in (54) und (56) auftretende Temperaturverhältnis ist:

$$\frac{T_0}{T_z} = \left(\frac{a_{stau}}{a_z} \right)^2 = \left(\frac{a_{stau}}{a_e} \right)^2 \left(\frac{a_e}{a_z} \right)^2 = \left(\frac{a_{stau}}{a_e} \right)^2 \left(\frac{a_{0e}}{a_{0z}} \right)^2$$

wobei a_{stau}/a_e nach Fig.23 direkt als Scheitelwert der Energie-Ellipse durch den betrachteten Punkt A abgelesen werden kann. Damit sind alle Grössen für die Differenzenrechnung (54), (55) zusammengetragen.

Die als Reflexion des Kopfes der Stosswelle entstandene Verdünnungslinie 76n 77 78 79 80 81 verstärkt das bei 59 begonnene Einströmen von Umgebungsluft ins Rohrrinnere. Dabei bildet das Leitungsende eine Bordamündung wie Fig.20, deren Randbedingung, auf der 81 liegt, nach Gleichung (36) berechnet wird, wobei für a_2 hier $a_2 = a_{\text{Umgebung}} = 340 \text{ m/s}$ eingesetzt ist.

In der beschriebenen Weise können alle Wellenlinien anhand der mit übereinstimmenden Ziffern bezeichneten Punkte im Wellenplan Fig.25 und im Zustandsdiagramm Fig.26 verfolgt werden.

2. Uebersicht über den Auspuffvorgang.

Da der Druck beim Oeffnen der Auslassorgane erheblich über dem kritischen Druck liegt, erfolgt der Ausströmvorgang zunächst im überkritischen Gebiet, und die austretende Gasmenge ist in erster Näherung proportional dem freien Auslassquerschnitt. Wegen der kleinen Querschnitte ist die Ausströmmenge bei Auspuffbeginn noch gering, um dann mit grösser werdender Auslassfläche rasch zu steigen. Der Zylinderdruckverlauf geht entsprechend allmählich in einen steilen Abfall über. Während des ersten Teils des Ausströmvorganges erfolgt ein Anstieg des Druckes in der Auspuffleitung, da für die Beschleunigung der in der Abgasleitung befindlichen Gase eine gewisse Zeit erforderlich ist und das Zuströmen der Auspuffgase aus dem Zylinder schneller erfolgt als das Abströmen in der Rohrleitung. Dieser Druckanstieg - der Vorauslass-Stoss - verläuft als Druckwelle I (Fig.25) gegen das Rohrende.

Im weiteren Verlauf des Ausströmens, das im unterkritischen Gebiet mit abnehmendem Gefälle erfolgt, sinkt der Druck im Zylinder gleichzeitig mit dem Druck im Auspuff: die Verdünnungswelle III baut den Ueberdruck im Auslassrohr wieder ab, und zwar würde bei unendlicher Leitungslänge im Rohr und im Zylinder der Ruhedruck p_0 erreicht. Ein durch Welle I und Welle III gebildeter Druckbuckel würde dann ins Unendliche laufen.

Beim endlichen Auspuffrohr wird der Druckberg am offenen Ende reflektiert, und zwar die Verdichtungswelle I als Verdünnungswelle II. Diese saugt das Rohr und den Zylinder aus, wobei sich nach der Rechnung ein maximaler Unterdruck $p_z/p_0 = 0,43$

ergibt. Dieser Unterdruck ist hier ein Mass für die zweckmässige Ausnützung der Abgase, deren Saugwirkung zur Spülung des Motorzylinders herangezogen werden kann. Hier tritt der Einfluss der Rohrgestaltung, speziell der Länge, in Erscheinung:

- a) Während des Vorauslasses strömt das grösste Abgasgewicht aus, und je kleiner die Druckdifferenz am Auslassorgan ist, desto weniger wertvolle Druckenergie geht nach §2-lh durch Drosselung verloren. Es wäre demnach falsch, den hohen Druck nach dem Auspuffschlitz durch eine Saugwelle abzubauen, besonders da ja das Entleeren in dieser Periode von selbst erfolgt.
- b) Die Saugwelle muss daher erst während der Spülperiode am Zylinder eintreffen, was durch richtige Wahl der Rohrlänge erreicht wird.

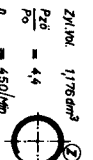
Durch die Reflexion der Verdünnungswelle III am offenen Ende entsteht die Verdichtungswelle IV. Ihre Front stellt sich zum Verdichtungsstoss auf, der, am Zylinder angelangt, das Rückströmen einleitet. Der Stoss sowie die folgende Verdichtungslinie stürzen durch den voll offenen Auspuffschlitz in den evakuierten Zylinder und werden daher, wie am offenen Ende, als Verdünnungswellen V reflektiert. Der hintere Teil der Verdichtungswelle IV trifft auf den wieder aufgefüllten Zylinder, wobei sich die Schlitzre bereits zu schliessen beginnen, und er wird ähnlich wie an der festen Wand als Verdichtung VI zurückgeworfen. VI lässt den Druck im Rohr wieder über p_0 ansteigen. Als Reflexion von VI entsteht die Saugwelle VII, die den Druck wieder abbaut, und so wechseln die Ueber- und Unterdruckperioden mit abnehmender Schwingungsamplitude fortlaufend ab.

3. Die Bewegung der Luft im Auspuff.

Die Weg-Zeit- oder Lebens-Linien der mit A B C D E bezeichneten Luftteilchen ergeben ein übersichtliches Bild der Gasschwingung im Auspuffrohr (Fig.25).

Die Wellen I und II beschleunigen die Luftsäule. Das Teilchen A hat als erstes den Zylinder verlassen; seine Geschwindigkeit nimmt zu bis ca 0,7 Schallgeschwindigkeit, und es strömt ins

$\frac{P_{20}}{P_0} = 4,4$
 $n = 450/\text{km}$



Zyl. Vol. $1,178 \text{ dm}^3$
 ② Mess-Stellen
 1985

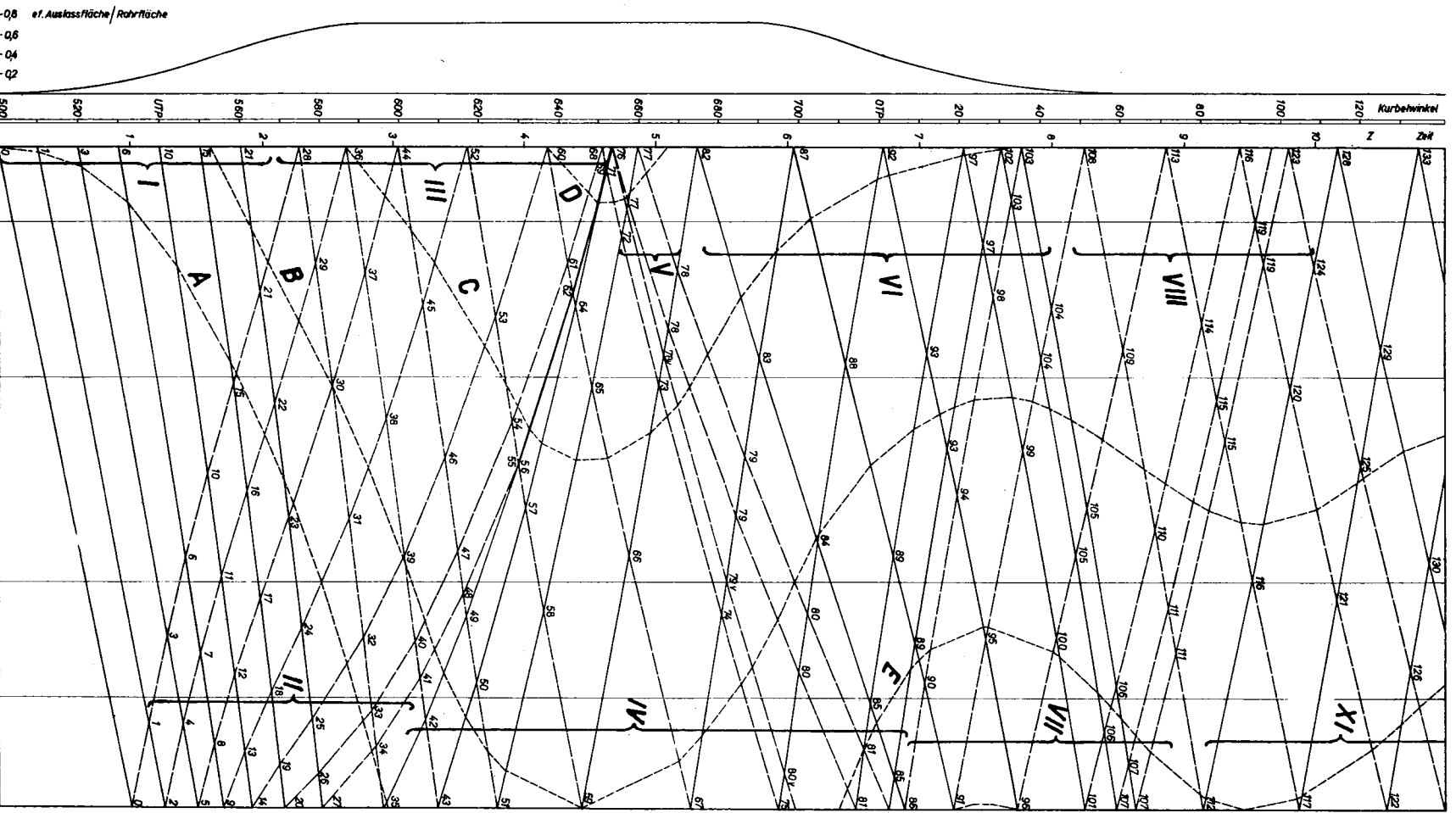


Fig. 25

Leer - Vide - Empty

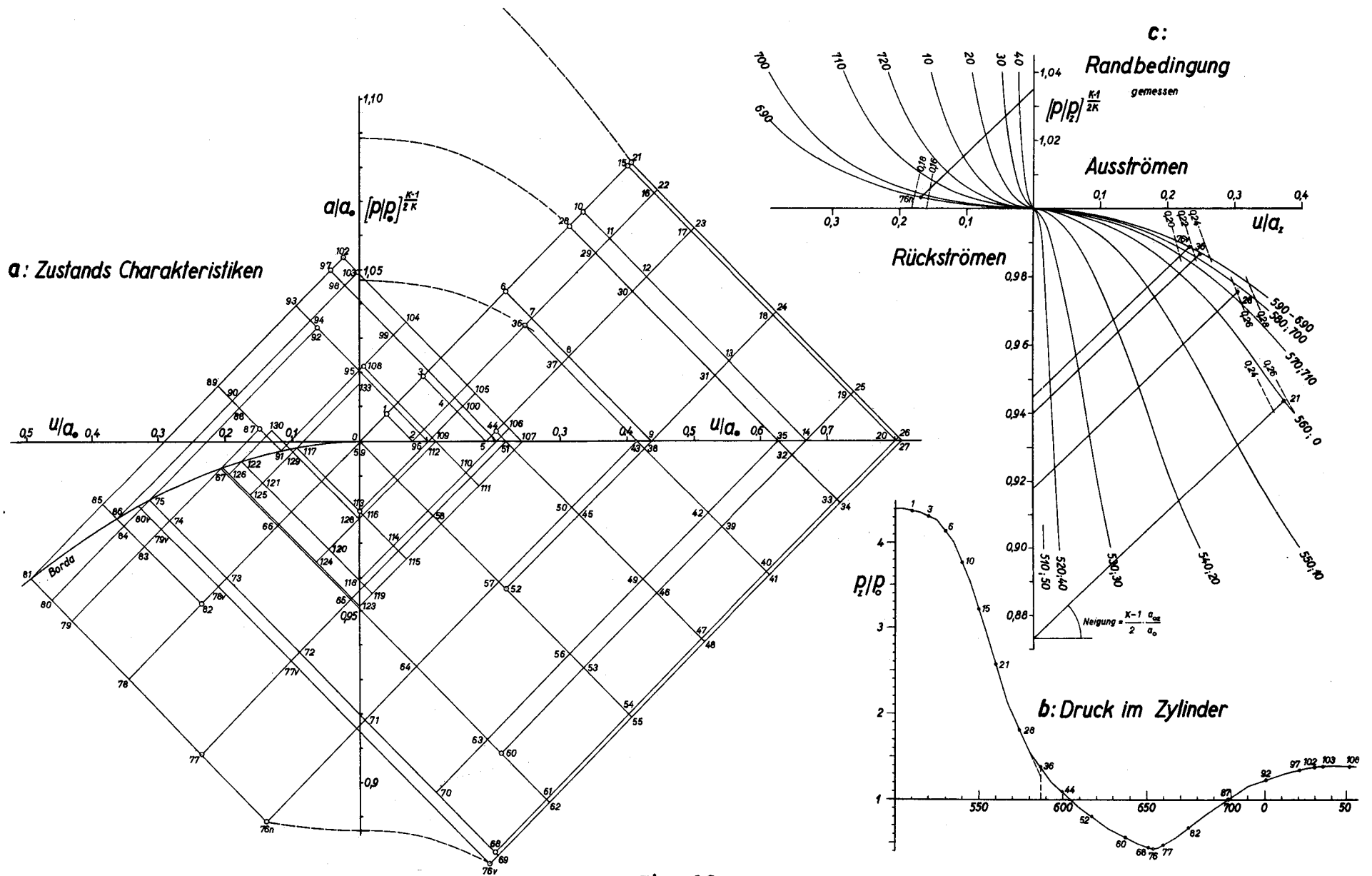


Fig. 26

Leer - Vide - Empty

Freie aus.

Welle III, IV und V verzögern die Strömung und bringen die Luftsäule zum Rückschwingen. Das Teilchen B erreicht gerade das Rohrende (Punkt 59) und pendelt bis zum ersten Drittel des Rohres zurück. Rechts der Lebenslinie von B befindet sich Luft, die von der Umgebung ins Rohr eingeströmt ist. Der Anteil rechts des Weges von E wird anschliessend wieder ausgestossen. Teilchen C stösst fast zur Rohrmitte vor und wird dann wieder bis in den Zylinder zurückgetrieben. Alle Luft links von C (z.B.:D) ist bereits vorher wieder in den Zylinder eingeflossen.

4. Vergleich der berechneten und gemessenen Drucke (Fig.35c).

Der erste Druckberg (Vorauslass-Stoss) wird für alle Mess-Stellen durch die Rechnung wirklichkeitsgetreu wiedergegeben. Daraus darf geschlossen werden, dass die Verwendung der quasi-stationären Randbedingungskurven richtige Resultate liefert, und es zulässig ist, jede Periode als Anfahrvorgang aufzufassen. Die Messkurven zeigen, dass die von der letzten Periode übriggebliebenen Druckschwankungen klein sind, z.B. 0,05 at für Mess-Stelle ①

Für den anschliessenden Abschnitt zeigen die Messungen gegenüber den Berechnungen ohne Reibung wohl denselben Verlauf, aber kleinere Amplituden. Nach der Rechnung werden Rohr und Zylinder durch Welle II äusserst stark ausgepumpt. Wohl ergibt auch die Messung Unterdruck, aber die theoretischen und experimentellen Druckkurven weichen dem Werte nach beträchtlich voneinander ab. Der prinzipielle Verlauf wird zwar sehr schön wiedergegeben, aber Drucktäler und -Berge erscheinen in Wirklichkeit gedämpft. So kann der berechnete Stoss nicht beobachtet werden, wohl aber ein ihm entsprechender Druckbuckel. Der im Zylinder erhaltene Minimaldruck beträgt nur 0,61 ata statt 0,43 ata der Berechnung.

Im Folgenden wird nun untersucht, ob die Vernachlässigung

der Entropie-Unterschiede

oder

der Reibung

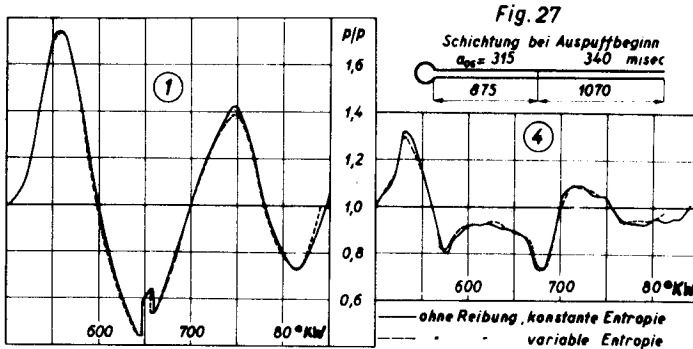
für die Abweichung verantwortlich ist.

§ 4. Der Einfluss der durch Drosselung entstandenen Inhomogenität.

Aus Fig.25 ist ersichtlich, dass die Luft im Auspuffrohr am Ende einer Periode geschichtet ist. Wie bereits erwähnt, liegt in der rechten Rohrhälfte Aussenluft mit $a_{os} = 340$ m/s. Für die Gasschichten im linken Leitungsteil kann rückwärts verfolgt werden, wann sie den Zylinder verlassen haben, und die Entropiezunahme a_{os}/a_{oz} in jenem Zeitpunkt ist bekannt, denn gleichzeitig mit der Bestimmung der Punkte 15 21 28 36 usw. im Randbedingungsdiagramm wird a_{os}/a_{oz} abgelesen (vergl. Seite 61).

Vom Teilchen B mit $a_{os} = 324$ m/s an nimmt a_{os} stetig ab bis zum Teilchen C mit $a_{os} = 305$ m/s. Für die graphische Konstruktion wird dieser Verlauf durch einen schichtweisen konstanten mit Stufen zu $a_{os} = 305, 315, 340, 365$ m/s ersetzt. Mit dieser Abstufung ergibt sich die in Fig.27 dargestellte Verteilung der Luftschichten bei Auslassbeginn.

Die Konstruktion erfolgt dem Beispiele § 1-7 entsprechend, wobei der Wellenplan und das Zustandsdiagramm so wenig von Fig.25 und 26a abweichen, dass auf ihre Wiedergabe hier verzichtet werden darf. Einzig durch Vergleich der mit und ohne Berücksichtigung der veränderlichen Entropie berechneten Drucke an den Mess-Stellen ① und ④ soll bezeugt werden, dass die aus der Drosselung beim Auspuffvorgang resultierende Schichtung der Abgase ohne wesentlichen Einfluss auf den Schwingungsvorgang ist.



Daraus kann geschlossen werden, dass die Reibung für die Dämpfung der Druckwellen verantwortlich ist. Um Ihren Einfluss in die instationären Gleichungen einzuführen, ist eine Erweiterung der Theorie nötig.

Abschnitt III.

Die eindimensionale instationäre Strömung unter Berücksichtigung der Reibung, Wärmezufuhr und Querschnittsänderung.

§ 1. Die Grundgleichungen.

Bei der reibungsfreien Strömung in Rohren mit konstanter Durchflussfläche, sowie Diffusoren mit kleinem Öffnungswinkel, entspricht die eindimensionale Behandlung den Tatsachen. Tritt aber Wandreibung und Wärmezufuhr von aussen auf, so bildet sich ein bestimmtes Geschwindigkeits- und Temperaturprofil aus. Um trotzdem zu brauchbaren Lösungen zu gelangen, muss mit einer mittleren Geschwindigkeit und einem mittleren Zustand für den ganzen Querschnitt gerechnet werden.

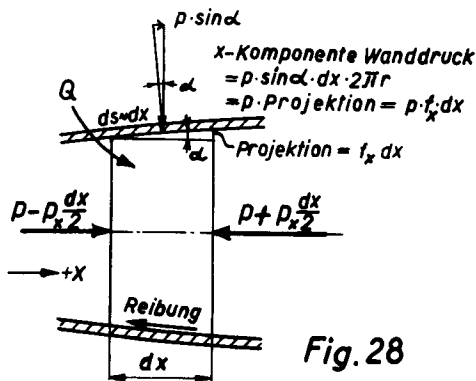


Fig. 28

Euler'sche Bewegungsgleichung.

Für die Wandreibung wird der bei stationärer Strömung übliche Ansatz gemacht:

$$|\Delta p_{\text{Reib}}| = \int \frac{f}{2d} u^2 g \, dx = |W| g \, dx$$

Die Reibkraft ändert ihre Richtung, wenn die Geschwindigkeit das Vorzeichen wechselt, was durch folgende Definition berücksichtigt wird:

$$W = \int \frac{f}{2d} \frac{u}{|u|} u^2$$

Masse \times Beschleunigung = Kraft auf Endquerschnitt + x -Komponente Wanddruck + innere Reibung + äussere Reibung.

$$f dx \frac{du}{dt} = -(fp)_x dx + pf_x dx + \mu (fu_x)_x dx - W_g f dx$$

$$fg(u_t + uu_x) = -fp_x - pf_x + pf_x + \mu f_x u_x + \mu f u_{xx} - W_g f$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{3} p_x - \frac{\mu}{3} \left(\frac{dlnf}{dx} u_x + u_{xx} \right) + W = 0 \quad (56)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$f dx g_t = -(fgu)_x dx = -(f_x g u + fg_x u + fg u_x) dx$$

$$g_t + g_x u + g u_x + g u \frac{dlnf}{dx} = 0 \quad (57)$$

Energiegleichung:

Alle Grössen sind in mechanischen Einheiten einzusetzen. Die äussere Reibung wandelt nur kinetische Geschwindigkeitsenergie in Wärme um und tritt nicht in die Gesamtbilanz.

Wärme kann durch die Kanalwände zu- resp. abgeführt werden, oder sie entsteht durch Verbrennung im Gase selbst.

Im ersten Falle ist die durch die Wand in das Volumenelement pro Zeiteinheit einflussende Wärmemenge q_a ($\text{mkg/m}^3 \text{s} = \text{kg/m}^2 \text{s}$) einzubeziehen.

Im zweiten Falle ist die pro Massen- und Zeiteinheit durch chemische Umsetzung freiwerdende Wärme q_v ($\text{mkg} \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \text{s} = \text{m}^2/\text{s}^3$) bekannt und in die Energiegleichung einzuführen.

Die folgende Ableitung behandelt den ersten Fall, wobei durch Einsetzen von $q_a = q_v \cdot g$ das Ergebnis sofort auf den anderen Fall angewendet werden kann.

Vollständigkeitshalber sei erwähnt, dass die Wärmezufuhr durch Pulververbrennung (Innenballistik) von Guderley [37] behandelt wurde. Dabei verschwindet fortwährend feste Substanz, sodass der zur Verfügung stehende Querschnitt zunimmt. Andererseits entstehen gasförmige Verbrennungsprodukte (Massenquellen), die aber meist eine andere Geschwindigkeit als die umgebenden Gase haben (Impulsquellen). In der Innenballistik treten so

hohe Drucke und Temperaturen auf, dass die dem Vorgange nicht mehr genügend entsprechende Gasgleichung durch die Abelsche Zustandsgleichung ersetzt werden muss. Diese Einflüsse brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden.

$$fdxg \frac{d}{dt} \left(g\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right) = -(pfu)_x dx + \mu(fuu_x)_x dx + \lambda(fT_x)_x dx + q_a f dx$$

Aenderung = Arbeit + Wärmeleitung + Wärmezufuhr
(Innere E.+Kin.E.) (Druck+Innere Rbg.)

$$g\bar{g} \frac{d}{dt} (c_v T) + u \frac{du}{dt} g + p_x u + p \frac{f_x}{f} u + p u_x - \mu \left(\frac{f_x}{f} u u_x + u_x^2 + u u_{xx} \right) - \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x - q_a = 0$$

$$g\bar{g} \frac{d}{dt} (c_v T) + u g (u_x + u_{xx}) + p_x + p u \frac{d \ln f}{dx} + p u_x \mu \left(\frac{d \ln f}{dx} u u_x + u_x^2 + u u_{xx} \right) - \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x - q_a = 0$$

$$g\bar{g} \frac{d}{dt} (c_v T) + u g \left[u_x + u_{xx} + \frac{1}{3} p_x \frac{d \ln f}{dx} - \frac{1}{3} u_x \frac{u}{x} + W \right] - g u W + \frac{p}{3} \left[g u_x + g u \frac{d \ln f}{dx} \right] - \mu u_x^2 - \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x - q_a = 0$$

Die erste eckige Klammer [] = 0 nach (56)

Die zweite eckige Klammer [] = - [g_t + g_x u] nach (57)

$$g\bar{g} \frac{d}{dt} (c_v T) = g\bar{g} \frac{d}{dt} \left[\frac{c_v p}{g g (c_p - c_v)} \right] = \frac{g}{\kappa - 1} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{g} \right) = \frac{g}{\kappa - 1} \frac{g dp - p dg}{g^2 dt} = \frac{1}{\kappa - 1} (p_t + u p_x) - \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{g} (g_t + u g_x)$$

$$\text{Eingesetzt: } \frac{1}{\kappa - 1} (p_t + u p_x) - \left(\frac{1}{\kappa - 1} + 1 \right) \frac{p}{g} (g_t + u g_x) - g u W - \mu u_x^2 - \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x - q_a = 0$$

$$p_t + u p_x - \frac{\kappa p}{g} (g_t + u g_x) - (\kappa - 1) \left[g u W + \mu u_x^2 + \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x + q_a \right] = 0 \quad (58)$$

Aus der allgemeinen Zustandsgleichung für ideale Gase (4)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{g}{g_0} \right)^\kappa \cdot e^{\frac{s - s_0}{c_v}}$$

folgt durch Logarithmieren, Differenzieren nach t und Multiplizieren mit p:

$$p \frac{1}{dt} \left[\frac{dp}{p} - \kappa \frac{dg}{g} \right] = p_t + u p_x - \frac{\kappa p}{g} (g_t + u g_x) = \frac{ds}{dt} \frac{p}{c_v}$$

Damit können in (58) die ersten vier Glieder in s ausgedrückt werden:

$$ds = \frac{c_v (\kappa - 1)}{p} \left[g u W + \mu u_x^2 + \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x + q_a \right] dt \quad (58a)$$

oder wenn wieder nach (27) die Schallgeschwindigkeit a_{os} resp. die Temperatur T_{os} verwendet wird:

$$d \ln a_{os} = \frac{1}{2} d \ln T_{os} = \frac{\kappa - 1}{2 \kappa} \frac{1}{p} \left[g u W + \mu u_x^2 + \frac{\lambda}{f} (f T_x)_x + q_a \right] dt \quad (58b)$$

Das System (56), (57), (58) hat normalerweise keine analytische Lösung, die zugleich die Randbedingungen erfüllt. Die Glieder "Wärmeleitung und innere Reibung" müssen vernachlässigbar sein, damit Charakteristiken existieren, denn in der nachfolgend beschriebenen Theorie können höhere Ableitungen und Ableitungen im Quadrat nicht berücksichtigt werden.

Die Behandlung der Verdichtungsstösse, bei denen diese Voraussetzung nicht gilt, wurde in II - § 1-5 beschrieben. Der Wärmefluss infolge Leitung zwischen zwei Schichten mit sehr grosser Temperaturdifferenz kann dadurch erfasst werden, dass der heissen Schicht q_{aL} (in Gleichung 58) entzogen und der kalten zugeführt wird.

Oft tritt durch Reibungseinfluss eine Verstärkung der Turbulenz auf. Das Hinzufügen der durch Verwirbelung entstehenden Reibwärme q_R zu q_a (in 58a) ermöglicht, den Einfluss der zusätzlichen Entropiezunahme abzuschätzen. Das Glied guW in (58,a,b) ist ja auch nichts anderes als die in Wärme umgesetzte Arbeitsleistung gegen die äussere Reibkraft.

§ 2. Einführung in die Charakteristiken-Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme nach Sauer.

Die Charakteristiken-Theorie kann auf verschiedene Arten behandelt werden. Die hier gewählte Ableitung wurde von Sauer [10] angegeben.

1. Gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (59)$$

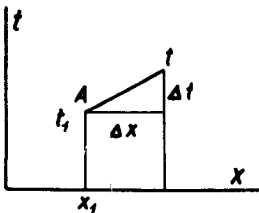


Fig. 29

Ersetzt man die Differentiale durch Differenzen, so kann man ausgehend von einem vorgegebenen oder schon berechneten Punkt A die Integralkurve schrittweise berechnen (Fig. 29).

$$t = t_1 + \Delta t = t_1 + f(x_1, t_1) \Delta x \quad (60)$$

2. Systeme von zwei quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$\begin{aligned} C_{11}u_x + C_{12}u_t + C_{13}p_x + C_{14}p_t &= F_1 \\ C_{21}u_x + C_{22}u_t + C_{23}p_x + C_{24}p_t &= F_2 \end{aligned} \quad (61)$$

x, t sind die unabhängigen Variablen.

$u(x,t), p(x,t)$ stellen die gesuchten abhängigen Größen dar. C und F sind im allgemeinen Funktionen der Variablen x, t, u, p , nicht aber der Ableitungen dieser Veränderlichen. Die Gleichungen sind in bezug auf die Ableitungen linear, nicht aber in u, p . Sie werden daher quasilinear genannt.

Längs AB (Fig. 30) sei u, p vorgegeben oder bereits bestimmt.

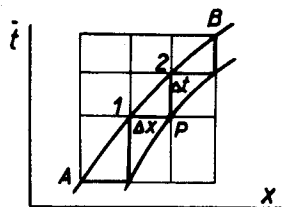


Fig. 30

Um diese Funktionen auf der Nachbarkurve zu berechnen, wird ein achsparalleler Treppenzug eingezeichnet:

Bekannt sind $1(x_1, t_1, u_1, p_1)$
 $2(x_2, t_2, u_2, p_2)$, sowie der Zuwachs von x und t :
 Δx und Δt .

Um u, p in P wie oben zu bestimmen, bilden wir die (61) entsprechende Differenzgleichung.

$$C_{11} \frac{u-u_1}{\Delta x} + C_{12} \frac{u_2-u_1}{\Delta t} + C_{13} \frac{p-p_1}{\Delta x} + C_{14} \frac{p_2-p_1}{\Delta t} = F_1(x_1, t_1, u_1, p_1)$$

$$C_{21} \frac{u-u_1}{\Delta x} + C_{22} \frac{u_2-u_1}{\Delta t} + C_{23} \frac{p-p_1}{\Delta x} + C_{24} \frac{p_2-p_1}{\Delta t} = F_2(x_2, t_2, u_2, p_2)$$

Die gesuchten Größen u, p werden ausgeklammert:

$$(C_{11}\Delta t - C_{12}\Delta x)u + (C_{13}\Delta t - C_{14}\Delta x)p = F_1\Delta x\Delta t + C_{11}\Delta t u_1 - C_{12}\Delta x u_2 + C_{13}\Delta t p_1 - C_{14}\Delta x p_2$$

$$(C_{21}\Delta t - C_{22}\Delta x)u + (C_{23}\Delta t - C_{24}\Delta x)p = F_2\Delta x\Delta t + C_{21}\Delta t u_1 - C_{22}\Delta x u_2 + C_{23}\Delta t p_1 - C_{24}\Delta x p_2$$

Die Lösung lautet: $u = Z_1/N$ $p = Z_2/N$ (62)

wobei $Z_{1,2}$ und N folgende Determinanten bedeuten:

$$N = \begin{vmatrix} C_{11}\Delta t - C_{12}\Delta x & C_{13}\Delta t - C_{14}\Delta x \\ C_{21}\Delta t - C_{22}\Delta x & C_{23}\Delta t - C_{24}\Delta x \end{vmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} F_1\Delta x\Delta t + C_{11}\Delta tu_1 - C_{12}\Delta xu_2 + C_{13}\Delta tp_1 - C_{14}\Delta xp_2 & C_{13}\Delta t - C_{14}\Delta x \\ F_2\Delta x\Delta t + C_{21}\Delta tu_1 - C_{22}\Delta xu_2 + C_{23}\Delta tp_1 - C_{24}\Delta xp_2 & C_{23}\Delta t - C_{24}\Delta x \end{vmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} C_{11}\Delta t - C_{12}\Delta x & F_1\Delta x\Delta t + C_{11}\Delta tu_1 - C_{12}\Delta xu_2 + C_{13}\Delta tp_1 - C_{14}\Delta xp_2 \\ C_{21}\Delta t - C_{22}\Delta x & F_2\Delta x\Delta t + C_{21}\Delta tu_1 - C_{22}\Delta xu_2 + C_{23}\Delta tp_1 - C_{24}\Delta xp_2 \end{vmatrix}$$

Durch (60) war immer eine eindeutige Lösung bestimmt. In (62) ergeben sich für die Fortsetzung der Lösung von AB auf die Nachbarkurve P folgende 3 Fälle:

- $N \neq 0$ Fortsetzung eindeutig: u, p in P eindeutig
- $N = 0, Z_1 \neq 0$ oder $Z_2 \neq 0$ Fortsetzung unmöglich: u oder p in $P \infty$
- $N = 0, Z_1 = Z_2 = 0$ Fortsetzung unbestimmt: u, p in P unbestimmt.

Der letzte Fall ist besonders wichtig: AB ist dann eine "Charakteristik".

Diese Kurven sollen nun untersucht werden. Lässt man P gegen AB rücken und schreibt man wieder Differentiale statt Differenzen, so ergibt:

$$N = 0 \quad \begin{vmatrix} C_{11}dt - C_{12}dx & C_{13}dt - C_{14}dx \\ C_{21}dt - C_{22}dx & C_{23}dt - C_{24}dx \end{vmatrix} = 0 \quad (63)$$

Dies stellt eine quadratische Gleichung für $\frac{dx}{dt}$ dar. Hat sie zwei reelle Lösungen, so nennt man das System (61) hyperbolisch. Die Charakteristiken haben dann die Richtung:

$$\frac{dx}{dt} = R_{1,2}(x, t, u, p) \quad (63a)$$

Sie spannen also ein durch 2 Kurvenscharen gebildetes Netz über die x-t-Ebene aus. Durch $Z_1 = 0$ ($Z_2 = 0$ gibt keine weitere Bedingung) findet sich unter Berücksichtigung von

$$u_2 = u_1 + du \quad \text{und} \quad p_2 = p_1 + dp$$

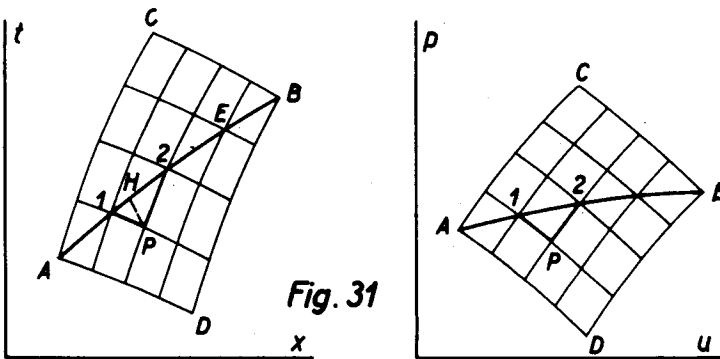
$$\begin{vmatrix} F_1 dx dt + u_1(C_{11} dt - C_{12} dx) + p_1(C_{13} dt - C_{14} dx) - C_{12} dx du - C_{14} dx dp & C_{13} dt - C_{14} dx \\ F_2 dx dt + u_1(C_{21} dt - C_{22} dx) + p_1(C_{23} dt - C_{24} dx) - C_{22} dx du - C_{24} dx dp & C_{23} dt - C_{24} dx \end{vmatrix} = 0$$

Durch Berücksichtigung von (63) und Subtraktion der letzten Kolonne mal p_1 von der ersten folgt:

$$\begin{vmatrix} F_1 dt - C_{12} du - C_{14} dp & C_{13} dt - C_{14} dx \\ F_2 dt - C_{22} du - C_{24} dp & C_{23} dt - C_{24} dx \end{vmatrix} = 0 \quad (64)$$

Durch Einsetzen von (63a) in (64) ergibt sich für jede Charakteristik eine Verträglichkeitsbedingung. Längs einer Charakteristik müssen sich u, p nach dieser Bedingung ändern und können nicht beliebig angenommen werden.

3. Konstruktion des Charakteristikengitters von (61).



AB (Fig.31) erfüllt nirgends die Richtungsbedingung (63a) und ist somit keine Charakteristik. Längs AB sei u, p vorgegeben.

Gerechnet wird mit dem eingetragenen Charakteristikengitter, d.h. einem Gitter, dessen Seiten die Richtungsbedingung (63a) erfüllen. Sind die Maschen des Gitters genügend klein, so dürfen ihre Seiten durch Geraden angenähert werden.

Mit den vorgegebenen Werten (x_1, t_1, u_1, p_1) und (x_2, t_2, u_2, p_2) wird in 1 und 2 die Richtung der Maschenseiten 1-P resp. 2-P eingetragen. Dadurch ergibt sich P. Die Koordinaten der Seitenmitten werden mit (x_{1P}, t_{1P}) resp. (x_{2P}, t_{2P}) bezeichnet. Mit den bekannten Werten $(x_{1P}, t_{1P}, u_1, p_1)$ resp. $(x_{2P}, t_{2P}, u_2, p_2)$ ergeben die Verträglichkeitsbedingungen zwei lineare Gleichungen zur Berechnung von u und p in P.

Mit den nun bekannten Seitenmittelwerten (u_{1p}, p_{1p}) resp. (u_{2p}, p_{2p}) kann die Lösung verbessert werden. Oft liegt die zweite Näherung schon in der Rechen- und Zeichengenauigkeit.

Wenn zu jedem Punkte P die gefundenen Werte u, p in ein u - p -Diagramm eingetragen werden, so entsteht das dem t - x -Charakteristikengitter zugeordnete u - p -Charakteristikennetz. In Fällen, wo die Verträglichkeitsbedingungen (64) x und t nicht enthalten, liegt das u - p -Gitter ein für alle Mal vor und die Konstruktion wird sehr einfach. Hieher gehört das graphische Verfahren nach de Haller (II - §1-3).

Nach der angegebenen Methode bestimmen die auf AB vorgesehenen Funktionswerte den ganzen Bereich ACBD \rightarrow Fortsetzungsgebiet. u, p in P hängen nur vom Bogenstück 1 2 ab \rightarrow Abhängigkeitsgebiet. Die auf dem Bogen EB vorgeschriebenen Werte beeinflussen nur das Gebiet, das durch die von E und B auslaufenden Charakteristiken begrenzt ist \rightarrow Einflussgebiet.

Die Charakteristiken erscheinen hiernach als Störlinien, d.h. Grenzlinien des Einflussgebietes einer Störung. Darin liegt ein grosser Vorteil dieses Verfahrens. Es ergibt die Lösung im physikalisch richtigen Bereiche. Aus diesem Grunde wurde nicht im Rechteckgitter Fig.30 gerechnet, da dieses, wenn es über ACBD hinausreicht, falsche Ergebnisse liefert.

4. System von drei quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1.Ordnung.

In diesem Falle treten 3 abhängige Variablen auf: u, p, g .

$$C_{11}u_x + C_{12}u_t + C_{13}p_x + C_{14}p_t + C_{15}g_x + C_{16}g_t = F_1$$

$$C_{21}u_x + C_{22}u_t + C_{23}p_x + C_{24}p_t + C_{25}g_x + C_{26}g_t = F_2$$

$$C_{31}u_x + C_{32}u_t + C_{33}p_x + C_{34}p_t + C_{35}g_x + C_{36}g_t = F_3$$

Daraus erhält man folgende Differenzengleichungen (Fig.30):

$$C_{11} \frac{u-u_1}{\Delta x} + C_{12} \frac{u_2-u}{\Delta t} + C_{13} \frac{p-p_1}{\Delta x} + C_{14} \frac{p_2-p}{\Delta t} + C_{15} \frac{g-g_1}{\Delta x} + C_{16} \frac{g_2-g}{\Delta t} = F_1$$

$$C_{21} \frac{u-u_1}{\Delta x} + C_{22} \frac{u_2-u}{\Delta t} + C_{23} \frac{p-p_1}{\Delta x} + C_{24} \frac{p_2-p}{\Delta t} + C_{25} \frac{g-g_1}{\Delta x} + C_{26} \frac{g_2-g}{\Delta t} = F_2$$

$$C_{31} \frac{u-u_1}{\Delta x} + C_{32} \frac{u_2-u}{\Delta t} + C_{33} \frac{p-p_1}{\Delta x} + C_{34} \frac{p_2-p}{\Delta t} + C_{35} \frac{g-g_1}{\Delta x} + C_{36} \frac{g_2-g}{\Delta t} = F_3$$

Klammert man die Unbekannten aus:

$$\begin{aligned} (C_{11}\Delta t - C_{12}\Delta x)u + (C_{13}\Delta t - C_{14}\Delta x)p + (C_{15}\Delta t - C_{16}\Delta x)g &= F_1\Delta x\Delta t + C_{11}\Delta tu_1 - C_{12}\Delta xu_2 + C_{13}\Delta tp_1 \\ &\quad - C_{14}\Delta xp_2 + C_{15}\Delta tg_1 - C_{16}\Delta xg_2 \\ (C_{21}\Delta t - C_{22}\Delta x)u + (C_{23}\Delta t - C_{24}\Delta x)p + (C_{25}\Delta t - C_{26}\Delta x)g &= F_2\Delta x\Delta t + C_{21}\Delta tu_1 - C_{22}\Delta xu_2 + C_{23}\Delta tp_1 \\ &\quad - C_{24}\Delta xp_2 + C_{25}\Delta tg_1 - C_{26}\Delta xg_2 \\ (C_{31}\Delta t - C_{32}\Delta x)u + (C_{33}\Delta t - C_{34}\Delta x)p + (C_{35}\Delta t - C_{36}\Delta x)g &= F_3\Delta x\Delta t + C_{31}\Delta tu_1 - C_{32}\Delta xu_2 + C_{33}\Delta tp_1 \\ &\quad - C_{34}\Delta xp_2 + C_{35}\Delta tg_1 - C_{36}\Delta xg_2 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $u = Z_1/N$, $p = Z_2/N$, $g = Z_3/N$.

Charakteristiken sind wieder solche Kurven, von denen aus die Fortsetzung der Lösung unbestimmt ist, d.h. sowohl die Nenner wie die Zählerdeterminante verschwinden.

Das Nullsetzen der Nennerdeterminante und Uebergehen zu Differenzen

$$\begin{vmatrix} C_{11}dt - C_{12}dx & C_{13}dt - C_{14}dx & C_{15}dt - C_{16}dx \\ C_{21}dt - C_{22}dx & C_{23}dt - C_{24}dx & C_{25}dt - C_{26}dx \\ C_{31}dt - C_{32}dx & C_{33}dt - C_{34}dx & C_{35}dt - C_{36}dx \end{vmatrix} = 0 \quad (66)$$

ergibt eine Gleichung dritten Grades für $\frac{dx}{dt}$. Ist das System hyperbolisch, so hat diese Gleichung drei reelle Wurzeln, und es gibt drei Charakteristikenscharen.

Durch Nullsetzen von Z_1 ($Z_2, Z_3 = 0$ ergibt keine weitere Beziehung) unter Berücksichtigung von

$$u_2 = u_1 + \Delta u, \quad p_2 = p_1 + \Delta p, \quad g_2 = g_1 + \Delta g$$

und Uebergehen zu Differenzen:

$$\begin{vmatrix} F_1\Delta t + u_1(C_{11}dt - C_{12}dx) + p_1(C_{13}dt - C_{14}dx) + g_1(C_{15}dt - C_{16}dx) - C_{12}du_1 - C_{14}dp_1 - C_{16}dg_1 & C_{13}dt - C_{14}dx & C_{15}dt - C_{16}dx \\ F_2\Delta t + u_1(C_{21}dt - C_{22}dx) + p_1(C_{23}dt - C_{24}dx) + g_1(C_{25}dt - C_{26}dx) - C_{22}du_1 - C_{24}dp_1 - C_{26}dg_1 & C_{23}dt - C_{24}dx & C_{25}dt - C_{26}dx \\ F_3\Delta t + u_1(C_{31}dt - C_{32}dx) + p_1(C_{33}dt - C_{34}dx) + g_1(C_{35}dt - C_{36}dx) - C_{32}du_1 - C_{34}dp_1 - C_{36}dg_1 & C_{33}dt - C_{34}dx & C_{35}dt - C_{36}dx \end{vmatrix} = 0$$

Zieht man von Kolonne I die Kolonne II mal p_1 und die Kolonne III mal g_1 ab, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Berücksichtigt man (66), so folgt

$$\begin{aligned} F_1\Delta t - C_{12}du - C_{14}dp - C_{16}dg & \quad C_{13}dt - C_{14}dx & \quad C_{15}dt - C_{16}dx \\ F_2\Delta t - C_{22}du - C_{24}dp - C_{26}dg & \quad C_{23}dt - C_{24}dx & \quad C_{25}dt - C_{26}dx = 0 \\ F_3\Delta t - C_{32}du - C_{34}dp - C_{36}dg & \quad C_{33}dt - C_{34}dx & \quad C_{35}dt - C_{36}dx \end{aligned} \quad (67)$$

Setzt man in diese Verträglichkeitsbedingung noch die aus (66) gefundenen Richtungsgleichungen ein, so ergibt sich, wie die Funktionen u, p, g längs den Charakteristiken ändern müssen.

Bei der Konstruktion der Charakteristiken erfolgt zuerst die Bestimmung von P mittels der ersten zwei Richtungsgleichungen (66) (Fig.31). Unter Zuhilfenahme der dritten Richtungsgleichung (66) findet man den Punkt H, von wo die dritte Charakteristik ausgeht. Lineare Interpolation zwischen 1 und 2 liefert auch die Werte u_H, p_H, g_H in H. Die Verträglichkeitsbedingungen ergeben nach Einsetzen der bekannten Werte $u_{1,2,H}, p_{1,2,H}$ drei lineare Gleichungen zur Berechnung von u, p, g in P. Durch Verbessern dieser ersten Näherung konvergiert das Verfahren rasch auf die wirklichen Werte.

Der Berechnungsgang wird sofort an den instationären Grundgleichungen gezeigt.

§ 3. Die Konstruktion der Charakteristiken zur Ermittlung der allgemeinen eindimensionalen instationären Strömung.

Das zu lösende Grundgleichungssystem lautet:

$$\left. \begin{aligned} (56) \quad uu_x + u_t + \frac{1}{g} p_x &= -W \\ (57) \quad gu_x + ug_x + g_t &= -gu \frac{d \ln f}{dx} \\ (58) \quad up_x + p_t - \frac{\kappa p}{g} u g_x - \frac{\kappa p}{g} g_t &= (\kappa - 1) [guW + qa] \end{aligned} \right\} (68)$$

Nach (66) ergibt das Nullsetzen der Nennerdeterminante dieses Systems die Richtungsgleichungen.

$$\begin{vmatrix} udt - dx & \frac{1}{g} dt & 0 \\ gdt & 0 & udt - dx \\ 0 & udt - dx & -\frac{\kappa p}{g} udt - \frac{\kappa p}{g} dx \end{vmatrix} = 0$$

$$-(udt - dx)^3 + \frac{1}{g} dt \cdot gdt \cdot \frac{\kappa p}{g} (udt - dx) = 0$$

Die drei reellen Wurzeln dieser Gleichung lauten:

$$udt - dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u \quad \text{Lebenslinie (69)}$$

$$(udt - dx)^2 = \frac{\kappa p}{g} dt^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = ut \pm \sqrt{\frac{\kappa p}{g}} = ut \pm a \quad \text{Stör-} \\ \text{linien (70)}$$

Der vorgegebene Anfangszustand der Gastteilchen wird die Lösung

überall dort beeinflussen, wo die Teilchen vorbeikommen, d.h. auf ihrer Lebenslinie. Diese sind daher auch Störlinien und ergeben sich nach (69) als dritte Charakteristikenschar des Gleichungssystems (68).

Die zwei anderen Scharen sind die rechts und links laufenden Partialwellen, da (70) mit (8) übereinstimmt.

Es ist zu bemerken, dass alle Glieder aus Reibung, Wärmezufuhr und Querschnittsänderung in (68) nicht in die Nennerdeterminante eintreten. Die Richtungsbedingungen werden durch diese Vorgänge nicht geändert. Eine Störwelle schreitet immer mit Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$ fort.

Wäre die Wärmeleitung nicht vernachlässigbar, oder würde der Durchgang der Welle in sich selbst Wärme erzeugen, so träten noch Glieder mit Ableitungen, also links in (68), auf. Für die Wellengeschwindigkeit gilt dann (70a) nicht mehr. Zum Beispiel verlaufen mit der Wärmeleitzahl $\lambda = \infty$ alle Prozesse isothermisch. Durch Einführen der Isothermen als dritte Gleichung in (68) ergibt sich $a_{is} = \sqrt{p/\rho}$.

Durch Nullsetzen der Zählerdeterminante (67) für System (68) folgt:

$$\begin{vmatrix} -Wdt - du & \frac{1}{\rho} dt & 0 \\ -\rho u \frac{dlnf}{dx} dt - d\rho & 0 & udt - dx \\ (\kappa-1)(\rho uW + q_a)dt + a^2 d\rho - d\rho & udt - dx & -a^2 (udt - dx) \end{vmatrix} = 0$$

$$+(Wdt+du)(udt-dx)^2 \frac{1}{\rho^2} dt (udt-dx) \left[\frac{1}{a^2} u \frac{dlnf}{dx} dt + a^2 d\rho - (\kappa-1)(\rho uW + q_a)dt - a^2 d\rho + d\rho \right] = 0$$

Mit $udt - dx = 0$ für die Lebenslinie (69) ergibt sich keine neue Verträglichkeitsbedingung. Dies war zu erwarten, da ein Gasteilchen seinen Zustand nach der Energiegleichung (58) ändern muss.

Um abzuleiten, wie u, p, ρ längs den Störlinien variieren, muss nach (70) $udt - dx = \mp a dt$ eingesetzt werden.

$$(Wdt+du)(\mp a)dt - \frac{1}{\rho} dt a^2 \rho \frac{dlnf}{dx} dt + \frac{1}{\rho} dt (\kappa-1)(\rho uW + q_a)dt - \frac{1}{\rho} dt d\rho = 0 \left/ \cdot \frac{1}{\mp a} \right.$$

$$du = \mp \frac{a d\rho}{\rho} \mp a u \frac{dlnf}{dx} dt - Wdt \left[1 \mp (\kappa-1) \frac{u}{a} \right] \pm (\kappa-1) \frac{q_a dt}{a\rho} \quad (71)$$

In diesen Gleichungen wird mit (7) $\frac{1}{g a} = \frac{a}{\kappa p}$ überall g eliminiert und W definitionsgemäss eingesetzt:

$$du = \mp \frac{a dp}{\kappa p} \mp a u \frac{d \ln f}{dx} dt - \frac{\int}{2d} \frac{u}{|u|} u^2 \left[1 \mp (\kappa - 1) \frac{u}{a} \right] dt \pm (\kappa - 1) \frac{a g_a}{\kappa p} dt$$

Dimensionslos geschrieben:

$$d\left(\frac{u}{a_0}\right) = \mp \frac{1}{\kappa} \frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0} \frac{d(p/p_0)}{p/p_0} \mp \frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0} \frac{u}{a_0} \frac{d \ln f}{dx} d\left(\frac{ta_0}{L}\right) - \frac{\int L}{2d} \frac{u}{|u|} \frac{u^2}{a_0^2} \left[1 \mp (\kappa - 1) \frac{u/ta_0}{a/a_{0s}/a_0} \right] d\left(\frac{ta_0}{L}\right) \pm (\kappa - 1) \frac{a/a_0}{\kappa p/p_0} \frac{g_a L}{p_0 a_0} d\left(\frac{ta_0}{L}\right)$$

Nun ist nach (28)

$$\frac{a}{a_{0s}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{a}{a_{0s}} \frac{d(p/p_0)}{p/p_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}-1} d\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{2\kappa}{\kappa-1} d\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right]$$

Ferner werden wieder dimensionslose Grössen definiert:

$$U = \frac{u}{a_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad A_s = \frac{a_{0s}}{a_0}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Z = \frac{ta_0}{L}, \quad F_x = \frac{d \ln f L}{dx}, \quad \int_0 = \frac{\int L}{2d},$$

$$Q_a = \frac{g_a L}{p_0 a_0},$$

sodass die Verträglichkeitsbedingungen folgende Form annehmen:

$$dU = \mp \frac{2}{\kappa-1} A_s d\left[P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}\right] \mp A_s P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} U F_x dZ - \int_0 U^2 \left[1 \mp (\kappa - 1) \frac{U}{P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} A_s} \right] dZ \pm \frac{\kappa-1}{\kappa} P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} A_s Q_a dZ \quad (72)$$

Unter Berücksichtigung von (7) und mit den definierten dimensionslosen Grössen wird die Energiegleichung (58b) als Verträglichkeitsbedingung für die Lebenslinien dazugeschrieben:

$$d \ln A_s = \frac{\kappa-1}{2} \int_0 \frac{|U|^2}{\left(P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} A_s\right)^2} dZ + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{Q_a}{P} dZ \quad (73)$$

Entsteht die Wärme durch Verbrennung, so muss nach III - §1 - 1 q_a durch q_v g ersetzt werden in (71) und (58b). Mit der neuen dimensionslosen Wärme $Q_v = \frac{q_v L}{a_0^3}$ lauten die Gleichungen der Zustandscharakteristiken:

$$dU = \frac{p}{\bar{\rho} \bar{K}^{-1} A_s} d \left[\frac{\bar{K}-1}{P^{\frac{\bar{K}-1}{\bar{K}}}} \right] + A_s P^{\frac{\bar{K}-1}{\bar{K}}} U F_x dZ - \int_0^Z \frac{U}{|U|} U^2 \left[1 + (\bar{K}-1) \frac{U}{P^{\frac{\bar{K}-1}{\bar{K}}}} \right] dZ + (\bar{K}-1) \frac{Q_v dZ}{P^{\frac{\bar{K}-1}{\bar{K}}}} \quad (74)$$

$$d \ln A_s = \frac{\bar{K}-1}{2} \frac{dZ}{\left(P^{\frac{\bar{K}-1}{\bar{K}}} A_s \right)^2} \left[\int_0^Z |U|^3 + Q_v \right] \quad (75)$$

Die Gleichungen (72) resp. (74) haben folgende Form:

$$dU = \bar{\rho} \frac{2}{\bar{K}-1} A_s d \left[P^{\frac{\bar{K}-1}{2\bar{K}}} \right] + \Delta_f + \Delta_R + \Delta_Q$$

Das erste Glied erfasst die aus Abschnitt II bekannte instationäre Zustandsänderung für isentropische Strömungen in konstantem Querschnitt. Im allgemeinen Falle erfolgt eine zusätzliche Änderung durch folgende Glieder, die in den nächsten Paragraphen einzeln eingehend diskutiert werden:

Δ_f berücksichtigt die Querschnittsänderung, Δ_R (vergl. [25]) entsteht infolge der Reibung (der erste Anteil überwindet die Widerstandskraft nach der Bewegungsgleichung, der zweite Anteil stellt die Wirkung der Entropiezunahme infolge Reibung dar) und Δ_Q berücksichtigt den Einfluss der Wärmezufuhr.

Die Grundaufgabe.

Die Lösung erfolgt graphisch, gleichzeitig in der X-Z-Ebene und in der P-U-(A_s)-Ebene (Fig.32).

X-Z-Ebene: Es wird als bekannt vorausgesetzt, während welcher Zeit und in welchem Leitungsteil Wärme zu- oder abgeführt wird, z.B. die Menge Q_{14} im Mittelpunkt der Masche 14.

Die Kurve F_x unterhalb der X-Achse erfasst den Einfluss der Querschnittsänderung.

Zustandsebene: Auch die P-U-Ebene muss ergänzt werden. Da nur zwei veränderliche (P und U) in einer Ebene darstellbar sind, muss die hier auftretende, dritte Zustandsgrösse A_s für jeden Punkt notiert werden, zweckmässig durch Markieren auf der Kurve $\ln A_s = f(A_s)$. Ausgehend von einem vorgegebenen oder bereits bestimmten Punkte 5 in Fig.32 mit bekanntem Wert $\ln A_{s5}$ kann durch Abtragen des aus (73) oder (75) berechneten $d \ln A_{s5-4}$ auf dieser Kurve der Wert $\ln A_{s4}$ für den Nachbarpunkt 4 sofort bestimmt werden (Fig.32, rechts unten).

Die Zustands- Charakteristik einer Welle, die eine inhomogene Gasschicht durchläuft, hat nach II - §1-7 die Neigung $\pm \frac{\kappa-1}{2} \frac{1}{A_s}$, wobei für A_s der Mittelwert A_s für diese Schicht einzusetzen ist. Das U-P-Diagramm enthält den Neigungsplan und die Hilfsgeraden $U=A$ nach de Haller mit A_s als Parameter. Die Kurve $\xi_0 U^2$ berücksichtigt den Einfluss der Reibung.

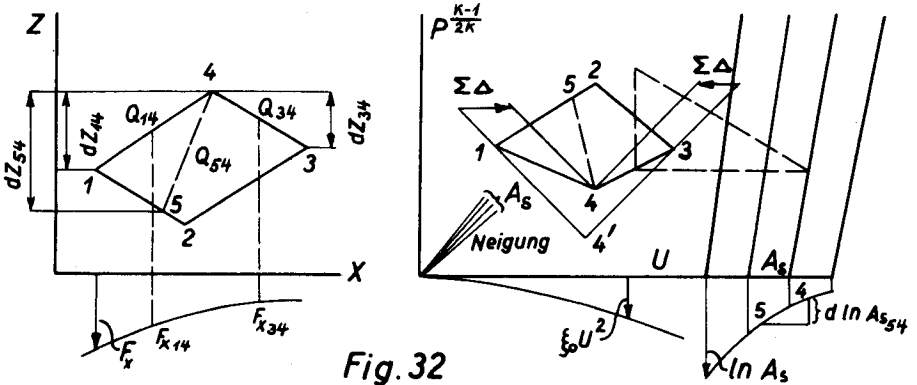


Fig. 32

Gegeben: Z, X, P, U, A_s in 1, 2, 3.

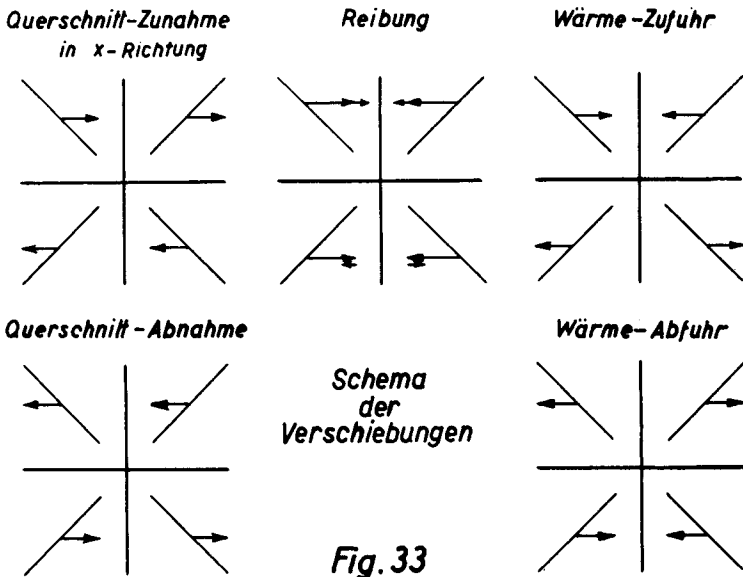
Gesucht: 4 (X_4, Z_4) mit den Zuständen P_4, U_4, A_4 .

Lösungsgang:

- 1) Im Zustandsdiagramm wird mit den Neigungen $-\frac{\kappa-1}{2} \frac{1}{A_{s1}}$ und $+\frac{\kappa-1}{2} \frac{1}{A_{s3}}$ als erste Näherung 4' bestimmt.
- 2) Mit der Poldistanz H in den Mittelpunkten 14' und 34', sowie den Hilfsgeraden A_{s1} und A_{s3} Konstruktion der Störli-
nien 1 4 und 3 4 in der X-Z-Ebene und Ablesen von dZ_{44}, dZ_{34} , sowie $F_{x14}, F_{x34}, Q_{14}, Q_{34}$ in den Seitenmittelpunkten.
- 3) Einzeichnen der Lebenslinie 5 4 durch 4, worauf sich dZ_{54}, Q_{54} ergibt.
- 4) Mit dZ_{54}, Q_{54} , sowie den Werten $P_{54}, U_{54}, A_{s5}, \xi_0 U^2_{54}$ aus

dem Zustandsdiagramm liefert (73) resp. (75) $\ln A_{s5-4}$. In der Hilfskurve für $\ln A_s$ kann damit A_{s4} abgelesen werden und es ergeben sich sofort die Mittelwerte A_{s14} und A_{s34} .

- 5) Zur Berechnung von $\Delta_f, \Delta_R, \Delta_Q$ sind jetzt alle Größen bekannt. dU ändert zufolge Querschnittsänderung, Reibung und Wärmezufuhr um $\sum \Delta$. Dies kann als horizontale Verschiebung der Geraden 1 4' resp. 3 4' aufgefasst werden, die die isentropische Zustandsänderung in konstantem Querschnitt berücksichtigen. Dies ist in Fig.32 dargestellt. Dabei wird 4 gefunden. Die Richtungen der Verschiebungen können aus Fig.33 entnommen werden.
- 6) Weicht 4 stark von 4' ab, so muss die Berechnung von 2) an verbessert werden. Um die Anzahl Verbesserungen klein zu halten, ist es zweckmässig, zum Voraus die Lage von 4' dem allgemeinen Verlaufe entsprechend durch Schätzung möglichst günstig zu wählen.



§ 4. Der Einfluss der Reibung auf die instationäre Strömung.

1. Die Reibung bei zeitlich beschleunigter und verzögerter Strömung.

Verschiedene Arbeiten behandelten die örtlich beschleunigte und verzögerte Strömung [28,29]. Ueber den zeitlich pulsierenden Durchfluss in Rohren liegt eine Untersuchung von Schultz-Grunow vor, die Einblick in die augenblicklichen Geschwindigkeitsprofile und den Reibwiderstand bei instationärer Strömung gibt [30].

Da zur Aufnahme von Geschwindigkeitsprofilen bei den sehr raschen und starken Schwankungen in der Auspuffleitung keine geeignete Messvorrichtung besteht, muss auf den im Folgenden beschriebenen Beobachtungen in der erwähnten Arbeit [30] basiert werden.

Ein Drehschieber erzeugte ein pulsierendes Fliesen von Wasser ($\rho = \text{konstant}$) in einem Rohr von 50 mm Durchmesser und 3,5 m Länge. Der Druckverlauf und die Geschwindigkeitsprofile wurden mittels Stroboskopbahn und Vielfachmanometer gemessen.

Die stationäre Messung (Pulsationsdauer ∞) ergab die Reibwiderstandszahl

$$\xi_{\text{stationär}} = - \frac{2d}{\rho} \frac{dp}{u^2 dx}$$

in Funktion der Reynolds'schen Zahl.

Bei den Versuchen mit Pulsation trat in der Verzögerungsperiode verhältnismässig plötzlich eine Instabilität auf: die Staudruckmessungen streuen und ergeben teilweise negative Werte, d. h. es tritt Rückströmen auf.

Beim stationären Fliesen durch Diffusoren wird bekanntlich von einem bestimmten Erweiterungswinkel an die Verzögerung so stark, dass die wandnahen Gasteilchen mit ihrer durch Reibung verminderten kinetischen Energie nicht mehr gegen den Druckanstieg anlaufen können, und es tritt Ablösung auf.

Bei der instationären Strömung erfolgt die Verzögerung zeitlich durch Druckwellen. Auch dabei werden die langsamen Gaspartikel an der Wand rascher gebremst und kehren zuerst ihre Bewegungsrichtung um (= Rückströmen). Aus den so entstandenen unregel-

mässigen Geschwindigkeitsprofilen resultiert eine beträchtliche Verstärkung der Turbulenz, die in der folgenden Beschleunigungsperiode nur allmählich abklingt.

Es wird dann gezeigt, dass, solange kein Rückströmen auftritt, zur Berechnung des Reibverlustes der stationär ermittelte Reibkoeffizient eingesetzt werden darf. In der Beschleunigungsperiode ist der Verlust ein wenig geringer als bei stationärem Durchfluss. Die Differenz wird während der Verzögerungsperiode durch eine Vergrösserung praktisch aufgehoben.

Dabei ist der Reibwiderstand mit der in jedem Moment wirklich auftretenden, zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit \bar{u} auszurechnen. Der Mittelwert der Reibleistung über eine Periode τ beträgt:

$$W' = \frac{1}{\tau} \frac{\rho}{2d} \int_0^{\tau} \xi_{\text{stat.}} \bar{u}^3 dt$$

Handelt es sich darum, ein bestimmtes Gewicht pro Zeit durch eine Leitung zu transportieren, so ist die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \bar{u} dt$$

bekannt. Es stellt sich die Frage, wie gross dabei der Verlust durch Reibung bei zeitlich verschieden verlaufenden Strömungen wird.

$$W' = \frac{\rho}{2d} \int \xi_{\text{Puls}} \bar{u}^3$$

Nun ist

$$\xi_{\text{Puls}} = \int_0^{\tau} \xi_{\text{stat.}} \bar{u}^3 dt / \tau \bar{u}^3 \quad (76)$$

für jede pulsierende Strömung grösser als $\xi_{\text{stat.}}$, da der Mittelwert der 3. Potenz von u grösser als die dritte Potenz des Mittelwertes von u ist. Der instationäre Durchfluss hat also grösseren Verlust als der stationäre, ohne dass sich der Reibvorgang physikalisch ändern muss.

Nach Einsetzen des Rückströmens nimmt der Reibverlust durch starke Wirbelung zu. Für konstante Reynolds'sche Zahl hängt der Rückströmbeginn vom prozentualen Geschwindigkeitszuwachs $d\bar{u}/\bar{u}$ eines Teilchens auf einer zum Rohrdurchmesser d proportionalen Strecke $\bar{u}dt/d$ ab:

$$\Omega' = \frac{d\bar{u} \cdot d}{dt \cdot \bar{u}^2}$$

Unter der Annahme, dass das Blasius'sche Widerstandsgesetz

$$\xi_{\text{stat.}} = \frac{0,316}{4\sqrt{Re}}$$

gilt, ergibt sich für das Auftreten des Rückströmens folgende Kennzahl:

$$\Gamma' = \frac{d\bar{u} \cdot d}{dt \bar{u}^2} \cdot Re^{\frac{1}{4}} > 1,1 \text{ bis } 1,6 \quad (77)$$

Mit $udt = dx$ findet man

$$\Gamma = \frac{d\bar{u} \cdot d}{dx \cdot \bar{u}} \cdot R^{\frac{1}{4}} > 2,2$$

als Kennzahl für das Ablösen bei stationärer Strömung. Dadurch ist allerdings nur der Beginn der Instabilität angegeben, während für die Vergrößerung des Reibverlustes in Abhängigkeit von Γ und Γ' noch kein Gesetz besteht.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass zeitliche und örtliche Verzögerung resp. Beschleunigung dieselbe Wirkung auf die Strömung ausüben, was an den Schubspannungsprofilen speziell gezeigt wird. Zeitliche Beschleunigung kann somit örtliche Verzögerung aufheben. Dies erklärt folgende, während den Versuchen gemachte Beobachtung: Um die Kontraktion beim Rückströmen ins offene Auspuffrohr zu verhindern, wurde probeweise eine Einlaufdüse nach Fig.16a angesetzt. Beim Ausströmen in der Vorauslassperiode wirkte diese Düse aber als Diffusor (vergl. III - §5), denn die zeitlich stark beschleunigte Strömung löste erst spät ab. Der Minimaldruck an Mess-Stelle ① (Fig.34) wurde daher 0,04 ata tiefer gemessen.

2. Messung des stationären Reibkoeffizienten $\xi_{\text{stat.}}$ für die

Auspuffleitung.

Im stationären Durchfluss wurden (nach einer Beruhigungsstrecke) Druckabfall, Temperatur und Menge gemessen und daraus der nach folgender Gleichung definierte Druckabfall-Koeffizient ξ^* für das gezogene Auspuffstahlrohr von 40 mm Innendurchmesser bestimmt.

$$\frac{dp}{dx} = - \xi^* \frac{1}{2d} \rho u^2 \quad (78)$$

Bei der zeitlich unveränderlichen Strömung setzt sich der Druckabfall dp nach (56) aus zwei Anteilen zusammen:

$$dp = -\rho W dx - \frac{\rho}{g} u du \quad (79)$$

Das erste Glied stellt den eigentlichen Reibwiderstand dar:

$$\rho W dx = \xi \frac{dx}{d} \frac{\rho}{2} u^2 \quad (80)$$

Bei kompressiblen Medien ändert, da die Reibarbeit als Wärme ins Gas eingeht, die Dichte und aus Stetigkeitsgründen die Geschwindigkeit. Um die Teilchen zu beschleunigen, braucht es den Beschleunigungsdruckanteil in (79). In die Grundgleichungen (56) und (58) muss nur die eigentliche Reibkraft eingesetzt werden, d.h. aus ξ^* ist ξ zu errechnen. ξ / ξ^* hängt nun in einfacher Form von der Mach'schen Zahl $M_s = u/a_s$ ab, wobei a_s die Stauschallgeschwindigkeit bedeutet. Durch Einsetzen von (78) und (80) in (79) folgt:

$$\frac{\xi}{\xi^*} = \rho u \frac{du}{dp} + 1 \quad (81)$$

Um du/dp in M_s auszudrücken, wird aus (7) $a^2 = \frac{\kappa}{\rho u} pu$ in die Energiegleichung (31) eingesetzt:

$$u^2 = \frac{2}{\kappa-1} [a_s^2 - a^2] = \frac{2}{\kappa-1} [a_s^2 - \frac{\kappa}{\rho u} pu]$$

Nach Division durch u wird diese Gleichung differenziert, wobei u nach der Kontinuitätsgleichung konstant ist:

$$du + \frac{2}{\kappa-1} \left(\frac{a_s}{u}\right)^2 du = -\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{dp}{\rho u}$$

oder

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2\kappa/(\kappa-1)\rho u}{1-2/(\kappa-1)M_s^2} = -\frac{\frac{2\kappa}{\rho u} \cdot M_s^2}{(\kappa-1)M_s^2 + 2} \quad (82)$$

(82) in (81)

$$\frac{\xi}{\xi^*} = \frac{2-(1-\kappa)M_s^2}{2-(1-\kappa)M_s^2} \quad (83)$$

In Fig. 34a ist ξ^*/ξ nach (83) über M_s aufgetragen, und Fig. 34b stellt die für das Messrohr gefundenen ξ -Werte über dem Bereich der Reynolds'schen Zahlen dar, bei denen sich der Auspuffvorgang hauptsächlich abspielt. Da sich der Einfluss der Wandrauigkeit bemerkbar macht, verlassen die Messpunkte die von Prandtl angegebene Kurve für das glatte Rohr und ge-

hen in einen konstanten Wert über (quadratisches Gebiet, da nach (80) W dann genau quadratisch mit u variiert.) Für die Berechnung des Auspuffvorganges wird ein konstanter Wert $\xi_{\text{Mittel}} = 0,018$ verwendet.

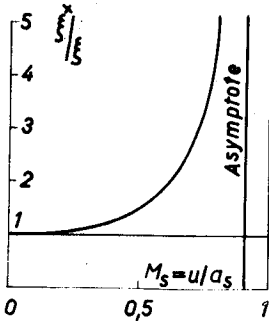


Fig. 34a

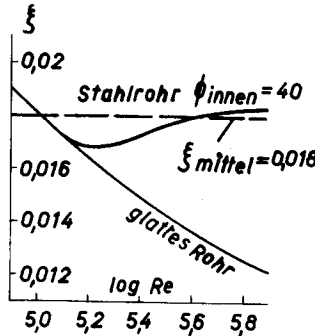


Fig. 34b

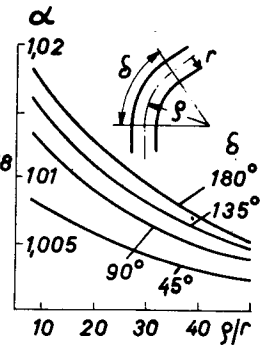


Fig. 34c

Der Krümmer (in Fig.5) mit dem Radienverhältnis $g/r = 8$ erhöht nach Fig.34c den Reibwiderstand beim stationären Durchfluss um den vernachlässigbaren Faktor $\alpha = 1,015$. Wie zu erwarten war, ergab daher auch beim periodischen Auspuffvorgang das Einbauen eines geraden Rohres an Stelle des Krümmers keinen messbaren Unterschied. Fig.34c gilt nach [32] für $Re \cdot 10^4$ bis $6 \cdot 10^4$.

3. Der Auspuffvorgang in ein Rohr mit offenem Ende unter Berücksichtigung der Reibung.

Die Entropiezunahme durch Reibung nach Gleichung (73) für das Teilchen B in Fig.25 ergibt $dA_s/A_s = 2,5\%$. Dies ist vernachlässigbar gegenüber den viel grösseren, durch Drosselung entstehenden Entropie-Unterschieden, die nach II - §4 ohne wesentlichen Einfluss auf den Auspuffvorgang blieben. Deshalb wird auch hier mit $A_s = 1$ und $a_0 = 320$ m/s gerechnet.

Im Klammerausdruck $\left[1 + (\kappa - 1) \frac{U}{P \frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right]$ in Gleichung (72) ist das

zweite Glied bedeutend kleiner als das erste, und $P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ darf ohne Bedenken gleich 1 gesetzt werden. Dann erhält die Verträglichkeitsbedingung (72) folgende Form:

$$dU = \mp \frac{2}{\kappa-1} d \left[P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right] - \int_0^{\frac{U}{|U|}} U^2 \left[1 \mp (\kappa-1) U \right] dZ \quad (84)$$

Die Konstruktion der Zustands-Charakteristiken ist in Fig.35a bei 25 32 und 31 32 erklärt. Ohne Reibung ergäbe sich 32' Mit 32' als erste Näherung kann 25 32 resp. 31 32 mit der Richtungskonstruktion in die Weg-Zeit-Ebene Fig.36 übertragen werden.

Für $dZ = 10^\circ \text{KW}$ ist in Fig.35a oben die Grösse des als Horizontal-Verschiebung aufzufassenden, letzten Gliedes in (84) über U aufgetragen. Durch Multiplikation mit den wirklichen aus Fig.36 entnommenen Zeiten dZ_{25-32} resp. dZ_{31-32} ergeben sich die horizontalen Schiebungen der Geraden 25 32' und 31 32', wodurch der wirkliche Zustandspunkt 32 im Schnitt gefunden wird. Die Richtung der Translationen ergibt sich aus der Hilfsfigur unter Fig.35a, worin angedeutet ist, ob die Glieder 1 und $(\kappa-1)U$ sich addieren oder subtrahieren. Der Auspuffvorgang kann im P-U- und X-Z-Diagramm im Detail verfolgt werden.

Der Vergleich von Fig.36 und 25 zeigt, dass der Schwingungsvorgang, im Grossen gesehen, derselbe bleibt. Die Bewegung der Luftpartikel erscheint aber abgeschwächt, durch die Reibung gedämpft, z.B. ersichtlich an dem Teilchen, das bei 67 (Rückströmbeginn) unmittelbar am Rohrende umkehrt und jetzt nur noch knapp bis zur Rohrmitte zurückfliesst.

Besonders augenfällig ist das Verschwinden des Verdichtungsstosses (vergl. dazu [33]).

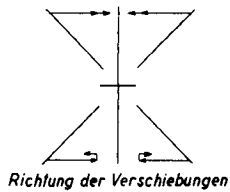
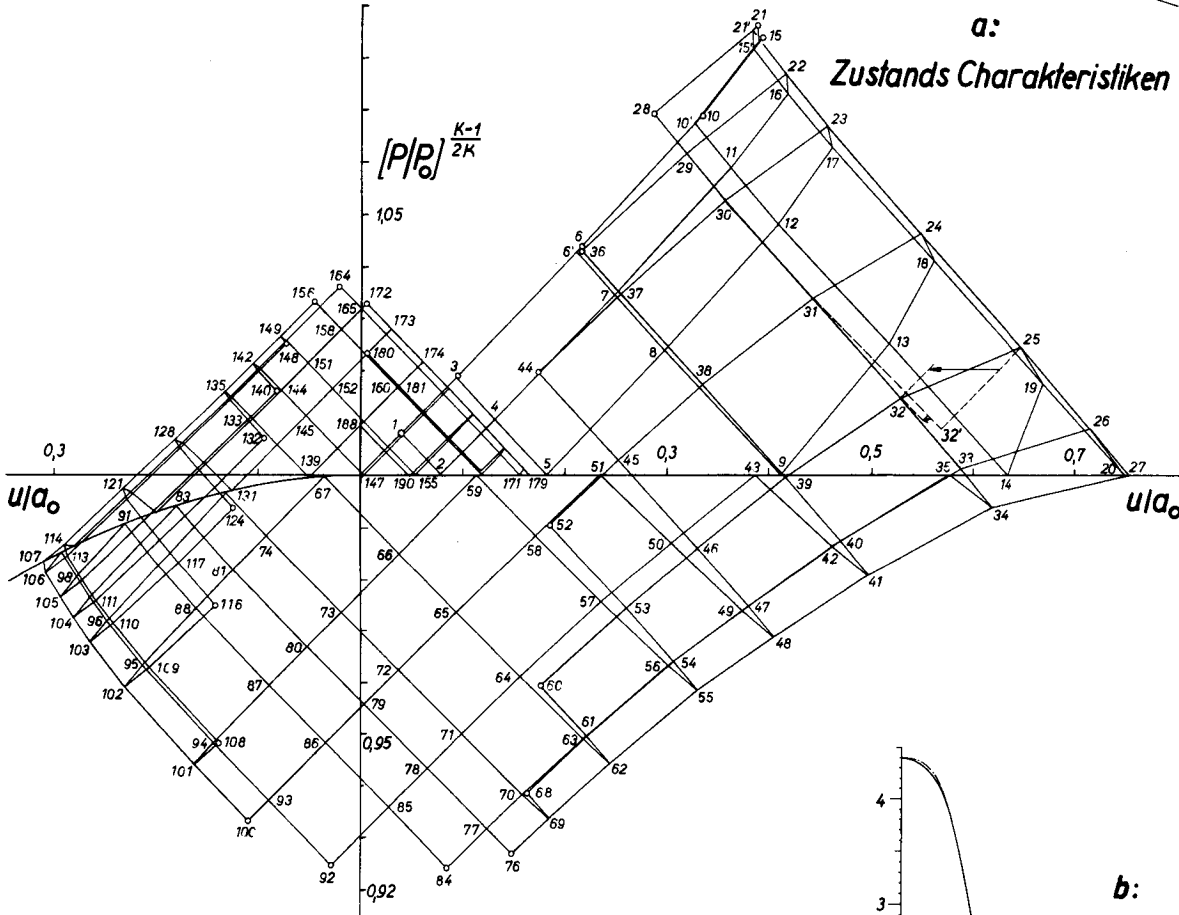
Die instationäre Strömung mit Reibung unterscheidet sich dadurch grundsätzlich von der isentropischen, dass keine Einzelwellen mehr möglich sind. Die Luftteilchen, durch die rechtslaufende Vorauslasswelle 0 1 3 6 10 ... in Bewegung gesetzt, melden mittels der eingezeichneten linkslaufenden Wellen sofort zurück, dass sie durch den Reibwiderstand leicht gestaut werden. Diese Wellen stellen das zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Druckgefälle her.

Fig.35a unterscheidet sich beträchtlich von Fig.26a, denn die 45°-Geraden sind in gebrochene Linienzüge übergegangen. Die Abweichung ist bei grossen Geschwindigkeiten besonders stark, so dass z.B. die Neigungen der Charakteristiken 25 19 und 26 27 gegenüber früher das Vorzeichen gewechselt haben. Die maximalen Ausströmgeschwindigkeiten am Rohrende während des Vorauslasses (20 27) sind zwar nur wenig kleiner, aber die Minimaldrücke des reflektierten Drucktales (76 84 92) liegen bedeutend höher, denn die zurückgeworfenen Saugwellen dringen nur langsam zylinderwärts vor und werden während ihrem relativ langen Verweilen im Gebiet mit grossen Geschwindigkeiten stark gedämpft. Die maximale Rückströmgeschwindigkeit aus der Umgebung in die Auspuffleitung ist auf $\frac{3}{8}$ des reibungsfreien Wertes gesunken, und die Höhe des zweiten Druckberges in Mess-Stelle ① ist von 1,415 ata auf 1,26 ata gefallen, wie aus Fig.35c ersichtlich ist.

Die Uebereinstimmung der gerechneten und gemessenen Druckverläufe ist gut, auch in den Absolutwerten der Amplituden. Während der Beschleunigungsperiode ist die Reibung ganz wenig geringer, als sich mit ξ stationär ergeben hat. So erhöhen die rücklaufenden Reibwellen nach der Rechnung den Vorauslassberg in ① etwas zu stark, und das erste Drucktal in ③ und ④ erscheint zu stark gedämpft. In der anschliessenden Verzögerungsperiode steigt der Reibverlust, und der mit ξ stationär gerechnete Druckverlauf weicht von der Messung auf die Seite der Rechnung ohne Reibung ab. Da bei so starken Luftschwingungen mit Strömungsumkehr die Kennzahl Γ nach (77) den kritischen Wert mehrmals überschreitet, tritt Rückströmen, verstärkte Turbulenz und Verlust durch Verwirbelung auf, und zwar auch bei kleinen Geschwindigkeiten. Das könnte nach III-§1 in einer Vergrösserung von q_a berücksichtigt werden, indem bei der Konstruktion Verschiebungen in "Richtung Wärmezufuhr" nach Fig.33 anzubringen wären.

Ueber den ganzen Vorgang betrachtet ist im behandelten Beispiel die Wirkung der Reibung ca 20% grösser, als die Konstruktion unter Verwendung von ξ stationär ergeben hat (vergl. auch S.99). Diese Zahl hat keine allgemeine Gültigkeit, da die Steigerung von der Stärke des Rückströmens abhängt.

Grösse der Verschiebungen für $dZ = 10^\circ KW$



a:
Zustands Charakteristiken

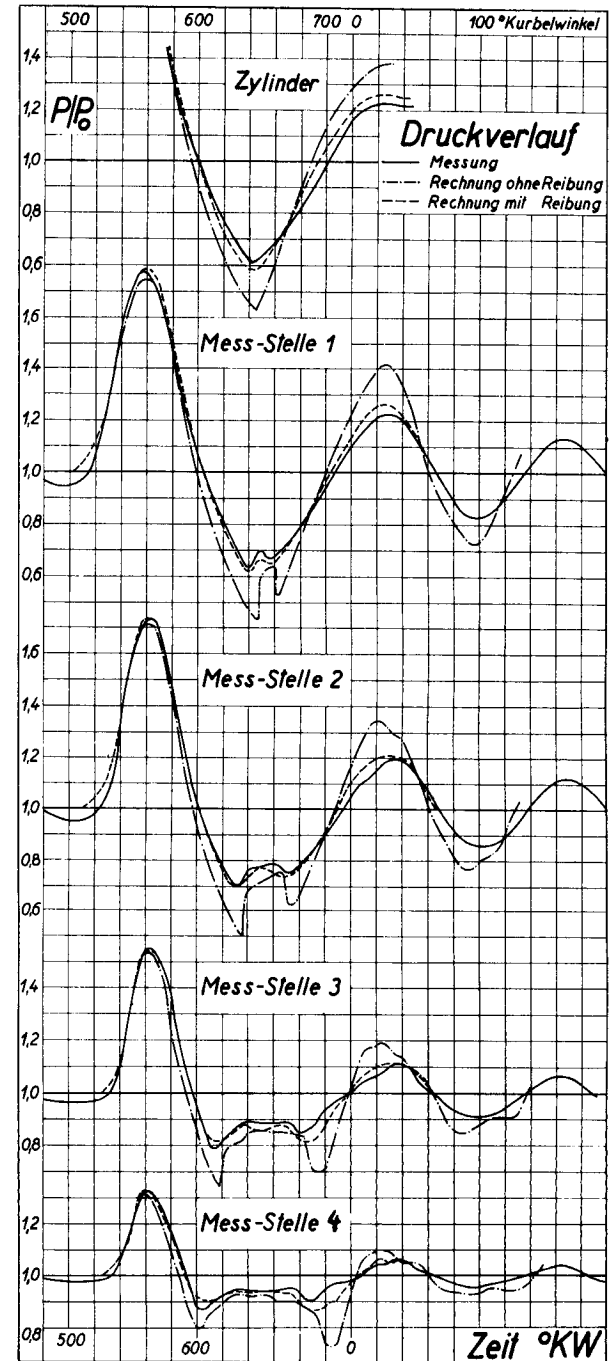
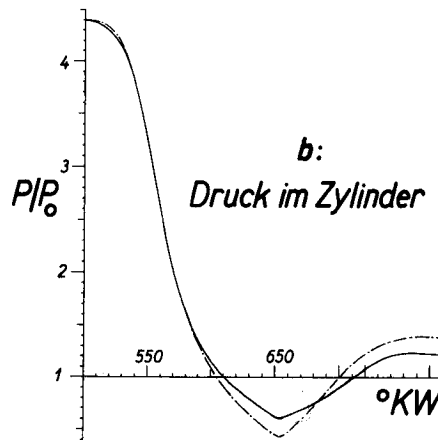


Fig. 35

Leer - Vide - Empty

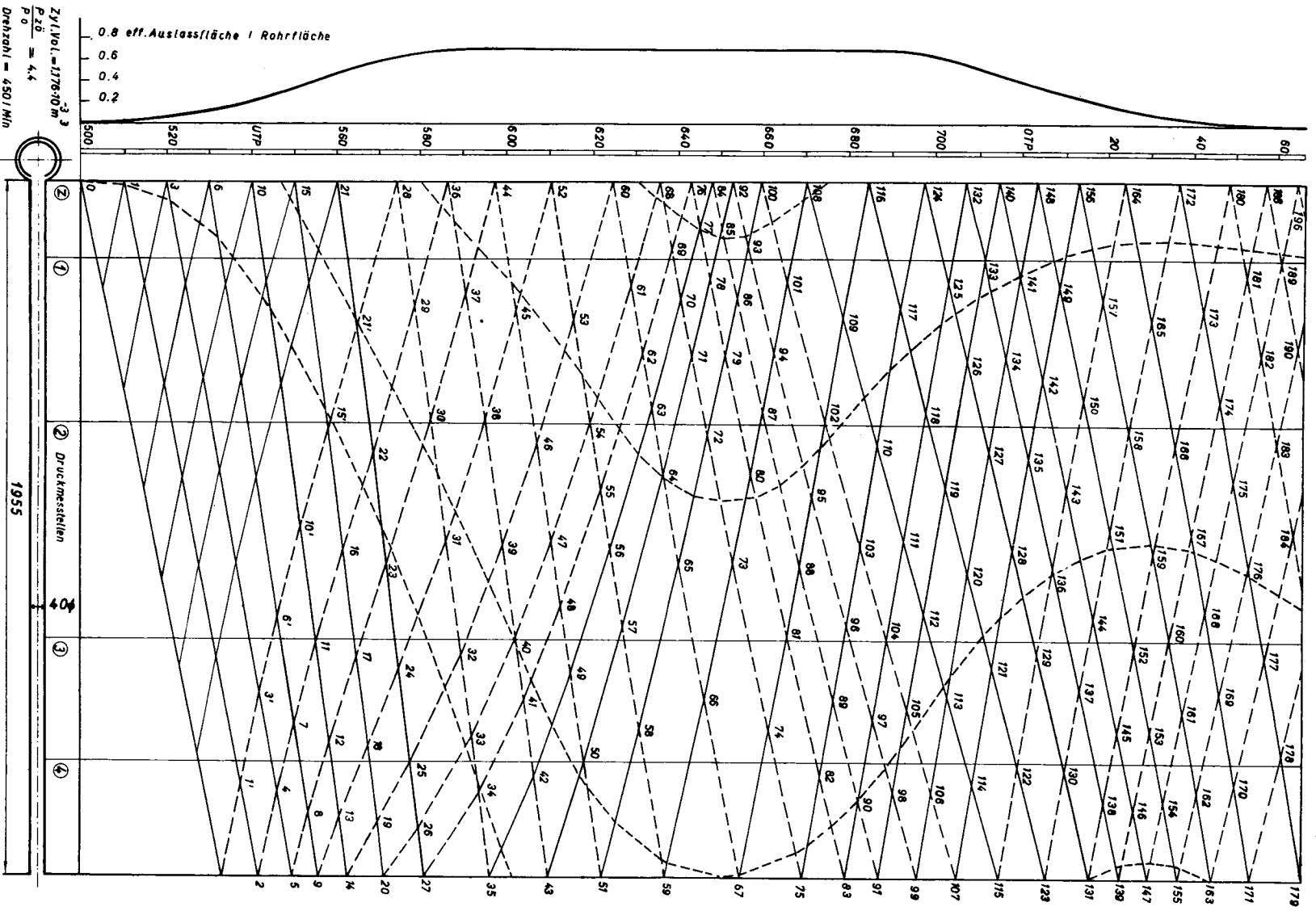


Fig. 36

Leer - Vide - Empty

4. Die Energieumsetzung beim Auspuffvorgang - Arbeitsmöglichkeit durch vollkommene Dehnung.

Theoretisch könnte die im Zylinder enthaltene Luftmenge $G_{z\delta}$ mit 4,4 ata und 346°K durch isentropische Expansion auf 1 ata, 227°K folgende, im p-V-Bild Fig.37a durch Fläche δ O 1- δ dargestellte Arbeit leisten:

$$A_{th} = G_{z\delta} (u_{z\delta} - u_o) - p_o (V_o - V_{z\delta}) = \frac{p_{z\delta} V_{z\delta}}{R \cdot T_{z\delta}} c_v T_{z\delta} \left[1 - \left(\frac{p_o}{p_{z\delta}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] - p_o V_{z\delta} \left[\left(\frac{p_{z\delta}}{p_o} \right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1 \right]$$

$$A_{th} = 22,43 \text{ mkg}$$

Energie im Vorauslass-Stoss.

Im Entropiediagramm für den Auspuffvorgang (Fig.37b) beziehen sich die Zahlen auf den mit Berücksichtigung der Reibung gerechneten Fall der Fig.35 und Fig.36.

Der Punkt 21 sei herausgegriffen: Beim Ausströmen aus dem Zylinder mit $p_{z\ 21} = 2,57$ ata in einen grossen Raum mit $p_o = 1$ ata würde sämtliche Energie verwirbelt: A. Da ein Rohr von 40 mm Innendurchmesser angeschlossen ist, entsteht ein Gegenruck von 1,783 ata (Gefälle CD) und eine Geschwindigkeit von 125 m/s (Gefälle BC). Das Teilchen liegt dann auf der durch $a_{o3} = 314$ m/s ($T_{o3} = 246^\circ\text{K}$) charakterisierten Isentropen.

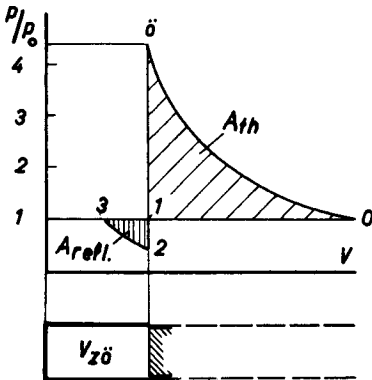


Fig. 37a

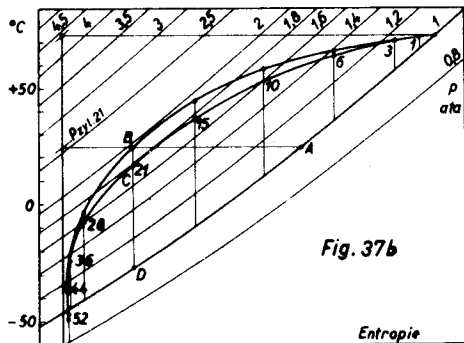
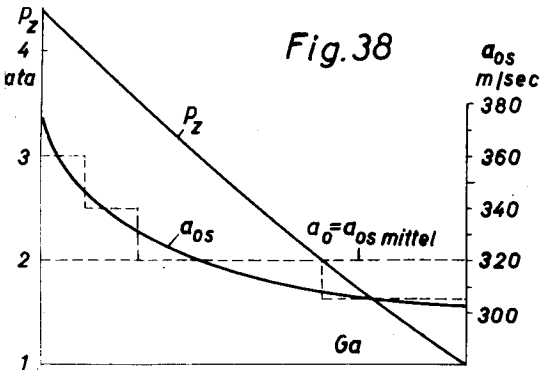


Fig. 37b

In Fig.38 sind die Temperaturgefälle BD und CD über der aus dem Zylinder ausströmenden Menge G_a aufgetragen. Auf die

beim Erreichen von $p_0 = 1$ ata ausgestossene Luftmenge bezogen ergeben sich folgende Mittelwerte:



a_{0s} Potentielles Gefälle:
m/sec

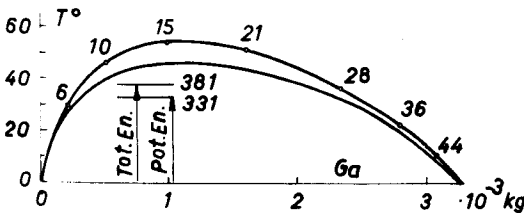
$$\Delta T_{Pot.} = 33,1^\circ$$

Kinetisches Gefälle:

$$\Delta T_{Kin.} = 5,0^\circ$$

Totales Gefälle:

$$\Delta T_{Tot.} = 38,1^\circ$$



Die diesem Gefälle entsprechende Arbeitsmöglichkeit beträgt:

$$E_{VA} = G_A \cdot c_p \cdot \Delta T_{Tot.} = 3,313 \cdot 10^{-3} \cdot 0,24 \cdot 427 \cdot 38,1 = 12,95 \text{ mkg}$$

Im Vorauslass-Stoss ist noch 57,7% der Arbeitsmöglichkeit A_{th} enthalten.

Ganz allgemein verfügt eine über den Ruhezustand a_0 , $u_0 = 0$ laufende isentropische Einzelwelle über folgende Energie:

$$E_{Tot.} = E_{Pot.} + E_{Kin.} = \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 + \frac{u^2}{2g}$$

Nach (11) ist:

$$u = \frac{2a_0}{\kappa-1} \left[\left(\frac{a}{a_0} \right) - 1 \right]$$

und nach (7):

$$\mathcal{U} = c_v T = \frac{1}{\kappa(\kappa-1)g} a^2$$

$$E_{Tot.} = \frac{a_0^2}{\kappa(\kappa-1)g} \left[\left(\frac{a}{a_0} \right)^2 - 1 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa-1} \right)^2 a_0^2 \left[\left(\frac{a}{a_0} \right) - 1 \right]^2 \quad (85)$$

und das Verhältnis der beiden Energiearten beträgt:

$$\frac{E_{Pot.}}{E_{Kin.}} = \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{a/a_0+1}{a/a_0-1}$$

z.B. für:

$$p/p_0 = 1,5 \quad a/a_0 = 1,06 \quad E_p/E_K = 4,905$$

Diese Verteilung ist günstig, da Druckenergie mit besserem Wirkungsgrad transportiert wird als die der Reibungsdämpfung unterworfenen Geschwindigkeitsenergie.

Die Schichtung der Gase im Auslassrohr.

In Fig.38 ist a_{0s} über der ausgeströmten Luftmenge aufgetragen. Als Mittelwert ergibt sich $a_0 = 320$ m/s, wie in den Berechnungen eingesetzt wurde. Im folgenden Beispiel wird die Schichtung genauer benötigt. Der a_{0s} -Verlauf ist dafür durch die 4 eingezeichneten Stufen ersetzt, woraus die in Fig.40 dargestellte Verteilung zu Auspuffbeginn resultiert.

Die "reflektierte" Arbeitsfähigkeit $A_{refl.}$ bei $p_{z\ min.}$.

Die im Zylinder verbleibende Menge $G_{z\ min.}$ mit dem Unterdruck $p_{z\ min.}$ könnte zur Arbeitsleistung, entsprechend der Fläche 1 2 3 1 in Fig.37b, herangezogen werden:

$$A_{refl.} = (V_1 - V_3) p_0 - G_{z\ min.} (u_3 - u_2) = p_0 V_{z3} \left[1 - \left(\frac{p_{z\ min.}}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right] - \frac{p_{z\ min.} V_{z3}}{RT_{z\ min.}} c_v T_{z\ min.} \left[\left(\frac{p_0}{p_{z\ min.}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$$

In der folgenden Tabelle ist $A_{refl.}$ für die verschiedenen Fälle zusammengestellt.

	$p_{z\ min.}$	$G_{z\ min.}$	$A_{refl.}$	$A_{refl.}$	Reibverlust
	ata	kg	mkg	% A_{th}	% $A_{refl.}$ ohne Reibung
Rechnung ohne Reibung	0,43	0,000965	1,86	8,295	0
Rechnung mit Reibung ($\xi_{stat.}$)	0,58	0,001193	0,934	4,16	49,8
Messung	0,61	0,001238	0,763	3,404	58,95

Nach der letzten Kolonne geht in Wirklichkeit (Messung) 58,95/49,8 = 1,184 mal mehr Arbeitsfähigkeit durch Reibung verloren, als die Rechnung, die auf $\xi_{stat.}$ basiert, ergeben hat.

Diese Zahl hat aber keine allgemeine Bedeutung, da der Mehrverlust durch die bei verschiedenen Auspuffleitungsanordnungen ganz unterschiedlichen Rückströmeffekte hervorgerufen wird. So wird im nächsten Beispiel (Fig.39) unter Verwendung von $\int_{\text{stat.}}$ fast vollkommene Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung erreicht. Zudem ist die Auswertung auf $\frac{4}{100}$ ata eines kleinen Ausschnittes aus dem Druckbereich einer Messkurve mit 4 ata Maximalausschlag stets mit einem gewissen Fehler behaftet.

5. Der Auspuffvorgang in einem Rohr mit Düse am Ende.

Nachdem gezeigt wurde, wie in einer engen, genügend langen Leitung als Druckwelle ein beträchtlicher Anteil der Arbeitsfähigkeit A_{th} erhalten bleibt, wird anschliessend besprochen, wie durch eine Turbine der Ausfluss aus der Auspuffleitung so gestaut werden kann, dass genügend grosse Gefälle H_i zur Energieausnutzung entstehen. Diese Methode ist auch für kurze Leitungen geeignet.

Im Leitrad der Turbine wird entsprechend der Reaktion ein Teil des Gefälles H_i zur Beschleunigung der Gase auf die Geschwindigkeit c_1 (spez.Gew. ρ_D) im Austrittsquerschnitt f_D verwertet. Der Eintritt ins Laufrad erfolgt mit der Relativgeschwindigkeit w_1 . Das Restgefälle beschleunigt die Strömung auf die Geschwindigkeit w_2 im engsten Laufradquerschnitt f_L (spez.Gew. ρ_L). Die Schlucklinie (Druck-Volumen-Charakteristik) einer Turbine verläuft wie für eine Düse. Die Rückwirkung auf die Wellenvorgänge kann daher nachgeahmt werden, indem die Turbine durch eine Düse mit dem Ersatzquerschnitt

$$f_{\text{res}} = \frac{f_D \cdot f_L}{\sqrt{f_D^2 + f_L^2 \left(\frac{\rho_L}{\rho_D}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{w_1^2}{H_{i5}}} \quad (86)$$

substituiert wird. Der Einfluss der mit dem Gefälle variierenden Werte $\frac{w_1^2}{H_{i5}}$ und $\frac{\rho_L}{\rho_D}$ ist nicht gross, und es werden Mittelwerte eingesetzt.

Die Düse für den vorliegenden Versuch wurde im stationären Durchfluss ausgemessen. Das Verhältnis

$$\psi = f_{\text{Düse}} \text{ off.} / f_{\text{Modell-Leitung}} \quad \text{ergab sich zu } 0,3249.$$

Dies entspricht dem Werte $f_{res.Turbine} / f_{Auspuff.Leitung}$ an einem existierenden Viertaktmotor.

Die Randbedingungskurve $u/a_{0s} = f(p/p_0)$ für $\gamma = 0,3249$ wird der Fig.23 entnommen. Im $u/a_0 - (p/p_0)^{k-1}$ -Diagramm (Fig. 39a) ergibt sich für jede Schicht, mit a_{0s} als Parameter, eine parabelförmige Kurve, die aus derjenigen für $a_{0s} = a_0 = 320\text{m/s}$ durch Horizontalschiebung um den Faktor $a_{0s}/320$ hervorgeht.

Vorerst wird der Wellenplan Fig.40 diskutiert. Die Reibung ist dabei berücksichtigt, aber die kleinen rücklaufenden Reibwellen im Vorauslass-Stoss (vgl. Fig.36) sind weggelassen. Die ersten beiden schwachen rechtslaufenden Partialwellen 1 und 2 werden noch als Verdünnung reflektiert, aber die nachfolgenden hohen Stufen erzeugen grössere Luftgeschwindigkeiten als die mögliche Durchflussmenge durch die Düse zulässt, d.h. es wird eine Stauwelle zurückgeworfen. Diese drückt zwischen 72 und 98 Luft in den Zylinder zurück. Damit setzt das Nachströmen neuer Luft aus, so dass der Druck an der Turbine absinkt, und die Gassäule von neuem Richtung Rohrende beschleunigt wird. Diese Bewegung wird zwar nochmals durch eine bei 97 113 121 entstandene Stauwelle etwas abgebremst. Die Druckwellen haben aber in dieser Periode bereits so stark abgenommen (daher sind einzelne Störlinien bei 89 105 123 nicht weiter geführt), dass die Luftschwingung rasch abklingt. Wie die eingezeichneten Lebenslinien einzelner Teilchen zeigen, ist bei 720° KW praktisch Ruhe erreicht, wobei die entstandene Schichtung mit der als Anfangsbedingung angenommenen übereinstimmt.

Ein Auspumpen des Zylinders tritt nicht mehr auf; dafür leisten die Abgase an der Turbine Arbeit.

Die Aufgabe des Konstrukteurs besteht nun darin, die Auspuffleitung so zu gestalten, dass die Gase an der Turbine die zum Antrieb des Ladegebläses nötige Leistung abgeben, ohne dass der Stau an der Turbine die Durchspülung des Dieselmotors verhindert.

Bei sehr langen Leitungen treffen die Reflexionen so spät am Zylinder ein, dass der Gaswechselfvorgang bereits abgeschlossen ist (Voraussetzung ist dabei, dass von einem frühern Auspuffstoss in dieselbe Leitung herrührende Druckwellen abgeklun-

gen sind). Die Spülung erfolgt dann vollständig ungestört. Der ins Rohr eintretende Energiebruchteil E/A_{th} hängt dabei nur vom Auslassrohr-Querschnitt ab, während bei kurzen Rohren dieser Ausnützungsgrad in weiten Grenzen durch die Wahl der geeigneten Düsenfläche reguliert werden kann. In diesem Falle ist darauf zu achten, dass die durch die Reflexion des Vorauslass-Stosses unvermeidlich erzeugte zurückkommende Stauwelle nicht in die Spülperiode fällt.*

Beim Viertaktmotor ist durch die zeitliche Trennung des Vorauslasses und des Ausschlebens einerseits (mit grossen ausströmenden Gasmengen, starkem Stau und Arbeitsleistung an der Turbine) und der Spülperiode andererseits (mit relativ kleinen Mengen und geringem Widerstand), das Auffinden einer guten Lösung erleichtert. So sinkt im behandelten Beispiel (allerdings ohne Kolbenausschubwirkung) der Druck nach Fig.39 c,d so rasch, dass eine genügende Durchspülung des Zylinderkopfes durch Offenhalten von Ein- und Auslassventil im oberen Totpunkt ohne Schwierigkeit erreicht würde.

Beim Zweitaktmotor ist die Aufgabe verwickelter, da in derselben Periode ausser dem Spülluftüberschuss das im Zylinder enthaltene Restgas in die Auslassleitung befördert werden muss. Zweitakt-Auspuffdruck-Diagramme zeigen denn auch neben dem hohen Vorauslass-Stoss einen zweiten, etwas niedrigeren, breiten Druckberg. Dieser Fall wird in späteren Versuchen noch untersucht.

Bei der oben erwähnten langen Leitung ohne zurückkommende Wellen während der Gaswechselperiode würden alle Zustandspunkte des Gases nach dem Auslassorgan auf dem ω^- -Charakteristikenzug (reibungsfrei ω^+ -Geraden) durch 0 liegen. Je kürzer die Leitung, desto näher rücken nun die Punkte an die parabelförmige Widerstandslinie der Düse, und da diese rasch steil ansteigt und damit das Auftreten hoher Geschwindigkeit verhindert, er-

*In der vorliegenden Arbeit wird ein Beispiel eingehend behandelt. Auf Grund der hier beschriebenen Methode wurden für eine grössere Zahl Fälle die Energieausnutzung und Spülmöglichkeit teils rechnerisch, teils durch Messungen untersucht. Darüber wird demnächst in den Brown-Boveri-Mitteilungen berichtet (November 1949).

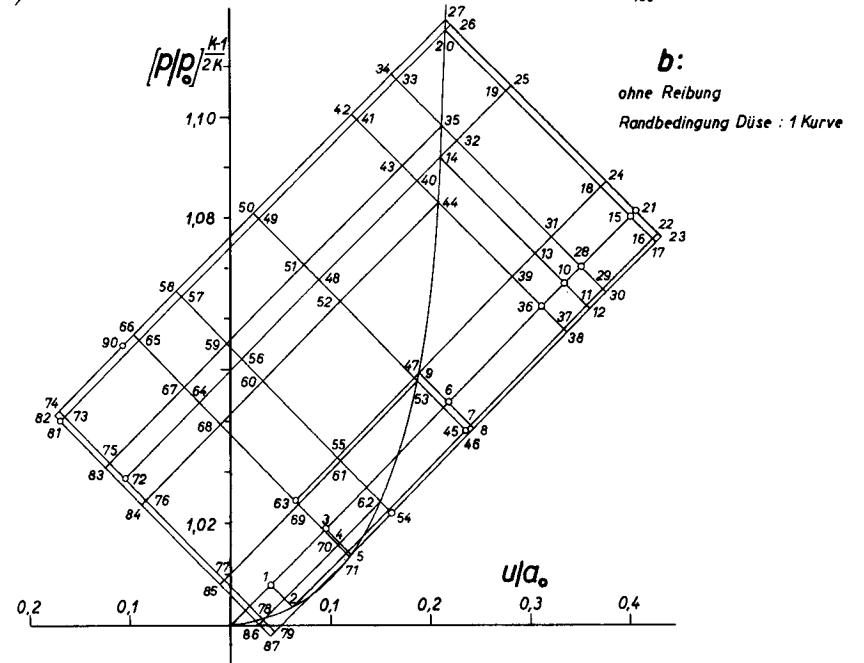
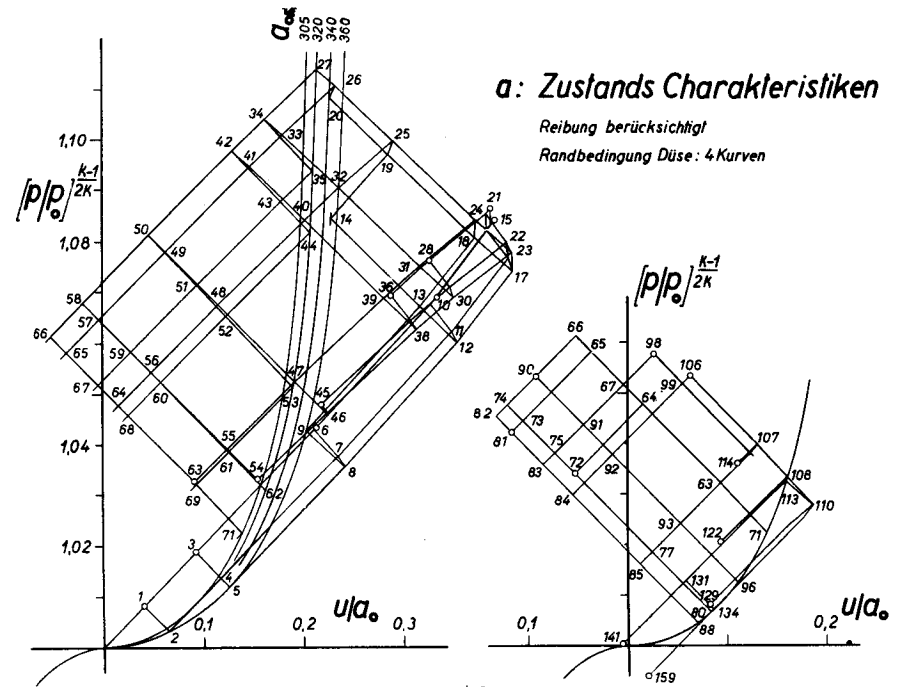
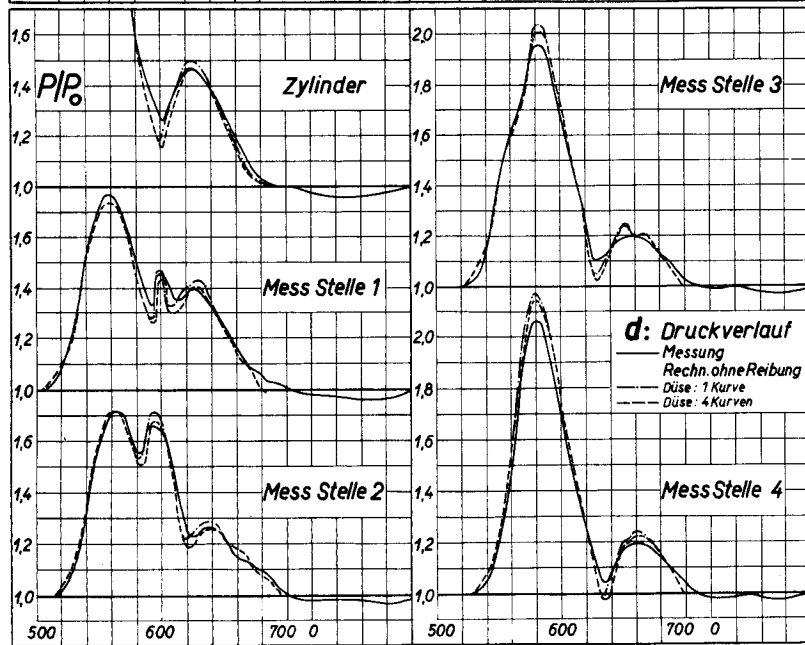
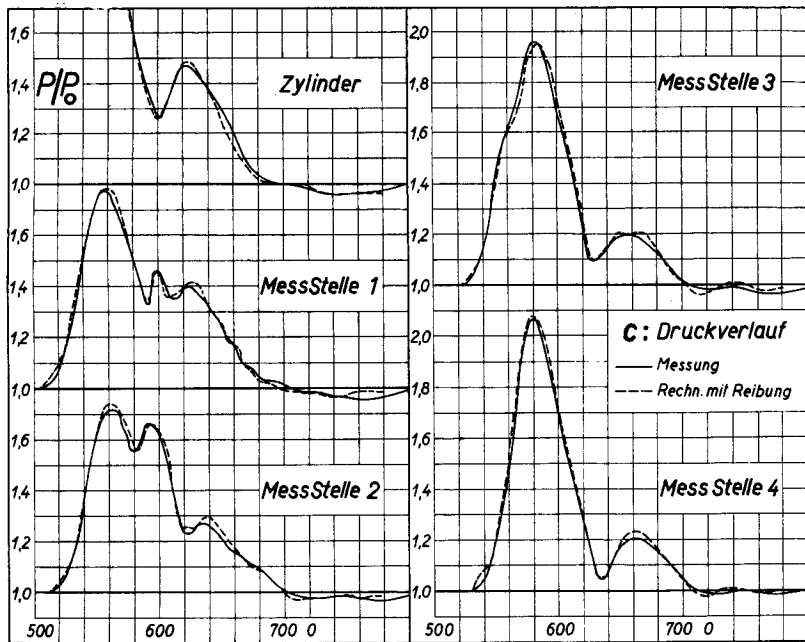


Fig. 39

Leer - Vide - Empty

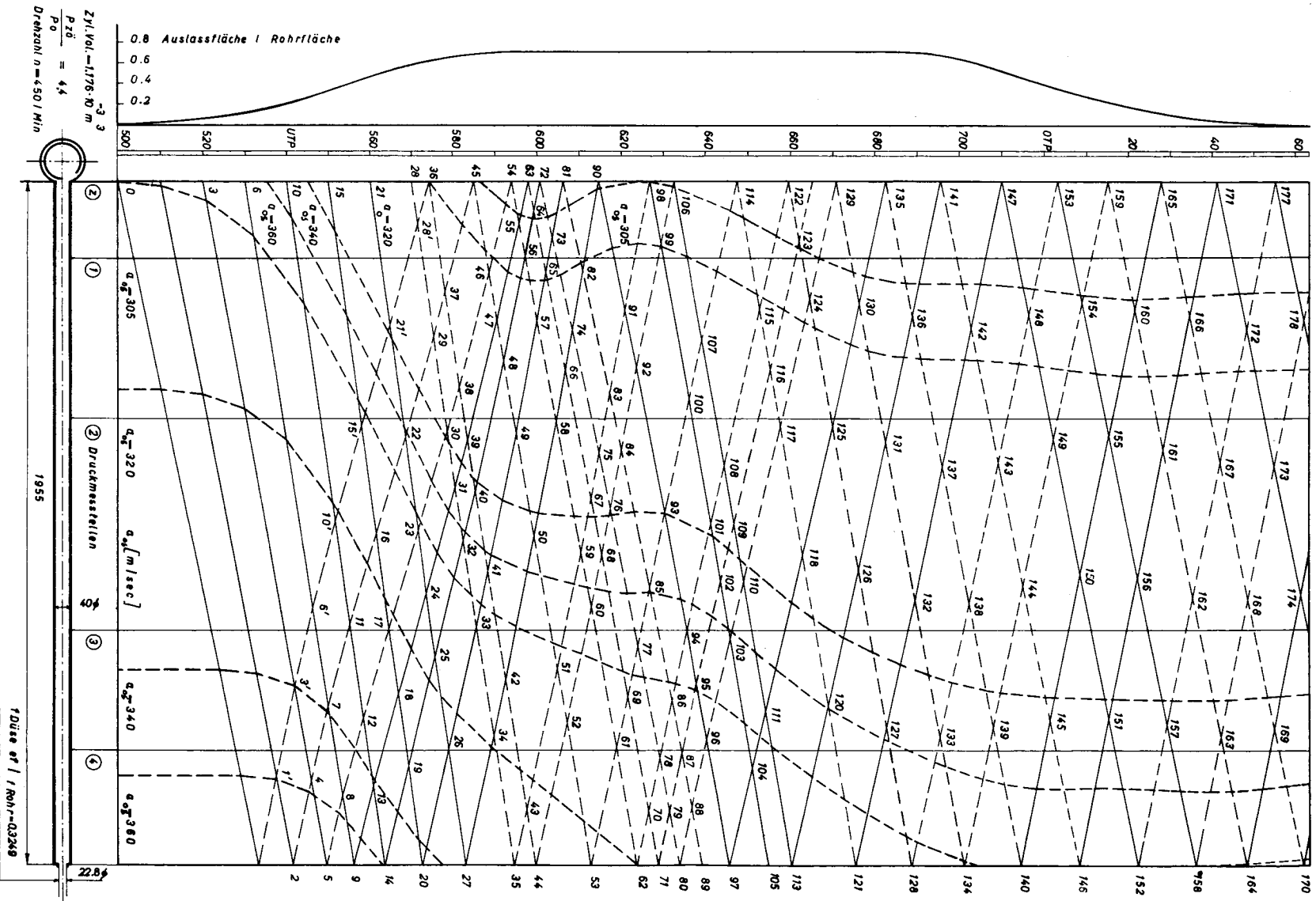


Fig. 40

Leer - Vide - Empty

klärt sich die Stauwirkung für grössere durchströmende Gas-
mengen.

Die Wellenlaufzeit wird bei ganz kurzen Leitungen so klein,
dass der Schwingungsvorgang bedeutungslos ist, und der Aus-
puffvorgang besteht dann in einem Füllen und Entleeren des
Leitungsvolumens, was auch nach den Differenzgleichungen
(54), (55) berechnet wird. Im behandelten Beispiel gruppie-
ren sich die Zustandscharakteristiken in Fig.39a um die Wi-
derstandslinien der Düse. Sie weichen wenig von 45°-Geraden
ab, da das Auftreten grosser Geschwindigkeiten und der damit
verknüpfte Reibungsverlust durch die Düse verhindert werden.
Obwohl das Diagramm in zwei Figuren auseinander gezogen ist,
konnten im Bild rechts nur einzelne der sich häufenden Zu-
standspunkte eingetragen werden.

Der Druckverlauf in Fig.39c erweist die ausgezeichnete Ueber-
einstimmung von Rechnung und Messung. Im Zylinder steigt der
Druck infolge des Rückströmens bei 600°KW nochmals an, um dann
auf 1 ata abzuklingen. An Mess-Stelle ① beginnt der Voraus-
lassberg genau wie in Fig.35c, da noch keine Reflexionen vom
Rohrende eintreffen. Dann folgt aber die erwähnte gegenlaufen-
de Stauwelle. Da in ② die Vorauslasswelle etwas später, die
Stauwelle früher vorbeikommt, liegen die entsprechenden Druck-
anstiege näher beisammen, um bei ③ nicht mehr getrennt zu er-
scheinen. Bei ④ fällt der sehr hohe Druckberg auf. Glück-
licherweise verarbeitet eine geeignet konstruierte Turbine auch
derart stark veränderliche Gefälle mit gutem Wirkungsgrad.

Der zweite, kleinere Buckel ist die in der zweiten Beschleuni-
gungsperiode entstandene, schwächere Gegenstauwelle. Es sei
hier daran erinnert, dass keine Spülluft und keine Kolbenver-
drängwirkung berücksichtigt ist.

Dieselbe Berechnung wurde ohne Berücksichtigung der Reibung
wiederholt und zwar einmal mit 4 "Randbedingungen-Düse", dann
nur mit einer Kurve (für den Mittelwert $a_{03} = a_0 = 320$ m/s),
wie in Fig.39b dargestellt.

In den Druckkurven Fig.39d zeigt sich, dass die Ergebnisse der
Rechnungen mit 1 und 4 Kurven wenig voneinander abweichen. Die

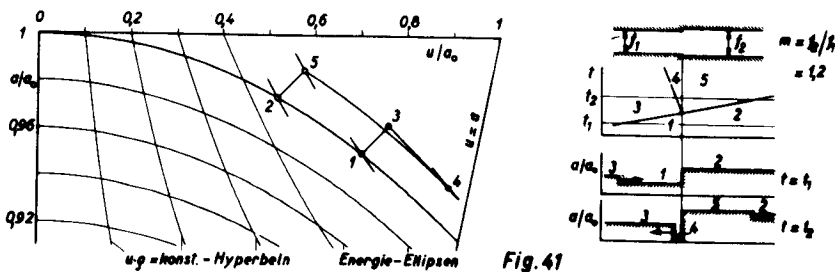
Vernachlässigung der Reibung ergibt teilweise Fehler in den Amplituden von ca 0,1 ata (z.B. Mess-Stelle 4 3 Zylinder), wirkt sich aber im ganzen gesehen wenig aus, da der Reibverlust bei den auftretenden kleinen Geschwindigkeiten gering bleibt. Es empfiehlt sich daher, in solchen Fällen die rasche reibungsfreie Berechnung zu wählen.

§ 5. Der Einfluss der Querschnittsänderung auf die instationäre Strömung.

1. Die Wellenbrechung an einem Querschnitts-Sprung.

Die eindimensionale Behandlung erfasst nur Strömungen in Diffusoren mit kleinem Öffnungswinkel. Die Wirkung eines Diffusors veranschaulicht ein von Schultz-Grunow [7] angegebenes Verfahren, bei welchem die stetige Erweiterung durch eine Folge plötzlicher Querschnitts-Sprünge mit dazwischenliegenden geraden Rohrstücken ersetzt wird.

In Fig.41 ist die Wellenbrechung an einer Querschnittserweiterung untersucht.



Für die Zustände 1 in f_1 und 2 in f_2 gilt im Unterschallbereiche $w_2 < w_1$, $p_2 > p_1$. Die von links kommende Verdichtungswelle 3 läuft nach dem Querschnitts-Sprung gebrochen als Welle 5 weiter. Die Aenderung erfolgt unter Reflexion der Welle 4. Bei der Konstruktion dieser Zustandspunkte sind folgende Be-

dingungen zu erfüllen:

- a) Da die Strömung im Diffusor, und somit auch in der stufenweisen Annäherung, als isentropisch vorausgesetzt wird, liegen 5 und 4 (sowie 2 und 1) nach der Energiegleichung auf Energie-Ellipsen (Gleichung 31).
- b) Nach der Stetigkeitsgleichung muss $\frac{u_4 \rho_4}{u_5 \rho_5} = \frac{u_4 \rho_4}{u_2 \rho_2} = \frac{f_2}{f_1} = m$ sein. Die $u \cdot \rho = \text{konstant}$ -Kurven sind Hyperbeln (Fig.41), die die Ellipsen im Schallpunkte (d.h. auf der Geraden $u = a$) tangieren.
- c) In den geraden Rohrstücken gelten die Charakteristiken-Bedingungen, so dass 1-3, 2-5 auf ω^- -Geraden und 3-4 auf einer ω^+ -Zustandscharakteristik liegen.

Durch Probieren ergibt sich der diesen Bedingungen entsprechende Zustandspunkt. Fig.41 liefert z.B. folgendes Resultat: Läuft eine Verdichtungswelle in eine Querschnittserweiterung, so wird eine Verdünnungswelle reflektiert. Analog wird an einer Verengung eine rücklaufende Verdichtung erzeugt, und für Verdünnungswellen findet sich das Umgekehrte.

Läuft nun (vgl. Fig.44) der Vorauslass-Stoss in einen Diffusor hinein, der eine Folge kleiner Querschnittserweiterungen darstellt, so werden fortlaufend Saugwellen zurückgesandt, die den Modellzylinder evakuieren. Eine analoge Wirkung hatte schon das offene Ende. Der Diffusor hat aber den Vorteil, dass die nicht in Form einer Verdünnungswelle zurückgesandte Energie, statt zu verwirbeln wie am offenen Ende, hier als Druckwelle weiter läuft und von neuem Saugwellen erzeugt. Durch die reflektierten Wellen sucht der Diffusor den im stationären Durchfluss bei Unterschallströmung auftretenden Druckanstieg (in Richtung grösserer Querschnitte) herzustellen. Wenn der Druck am Austritt als Umgebungsdruck vorgeschrieben ist, so entsteht am Eintritt Unterdruck.

2. Die Entstehung eines Verdichtungsstosses.

In Fig.41 liegt der Punkt 4 schon nahe der Schallgeraden. In Fig.42 ist der Fall betrachtet, wo im engen Rohrstück Schallgeschwindigkeit erreicht ist: Punkt 1.

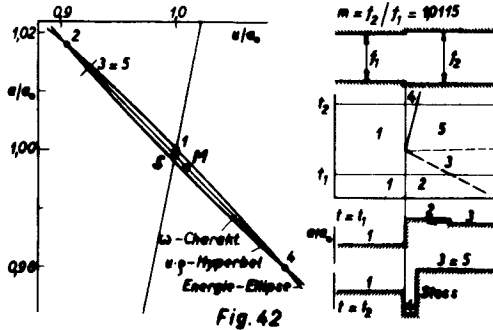


Fig. 42

Die Erweiterung beträgt nur 1,15 %. Von rechts her läuft eine kleine Saugwelle gegen den Querschnittsprung. Nach dem unter 1) beschriebenen Verfahren findet sich keine Lösung, denn gegen den Schallzustand in 1 kann keine stetige Welle anlaufen. In f_1 wird sich somit der Zustand nicht ändern und eine linkslaufende Welle bleibt ausgeschlossen. Daher fällt von den Punkten 2 und 4, die beide die Bedingungen a) und b) erfüllen, der erste (Punkt 2) weg. 2-3 und 4-5 liegen auf einer ω^+ -Charakteristik, während die auf einer ω^- -Zustandsgeraden liegenden Punkte 3-5 hier zusammenfallen. Aus der sehr kleinen Saugwelle 2-3 entsteht ein viel grösserer Drucksprung - ein Verdichtungsstoss. Da die Erweiterung des Querschnittes klein gewählt wurde, hält sich seine Grösse in der Grenze, innerhalb welcher die Richtungskonstruktion (nach Fig.9) mit Hilfe der Poldistanz H im Mittelpunkt M zwischen 4 und 5 erlaubt ist. Es lässt sich beweisen, dass in der Nähe der Schallgeraden $u = a$ Punkt 2 und 4 auf einer ω^+ -Charakteristik gleich weit vom Schallpunkt S entfernt liegen, und damit befindet sich M sicher rechts von S. Der Stoss wird daher durch die entstandene Ueberschallströmung im weiteren Rohrstück weggespült.

Damit ist die Entstehung des Verdichtungsstosses bei Punkt 47 in Fig.44 erklärt.

In Fig.43 beträgt die Querschnittszunahme 10%. Der Stoss 4-3 wäre dann so gross, dass er nach Fig.11 rascher läuft als die

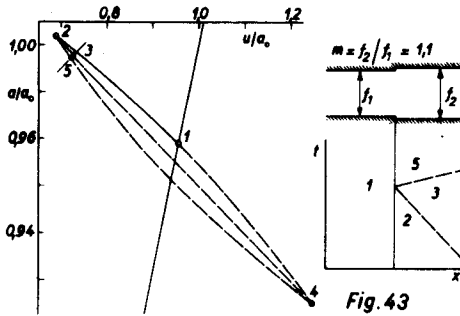


Fig. 43

Uberschallströmung in 4. Im Querschnittsprung tritt Ueberexpansion mit sofort anschliessendem Stoss auf, so dass sich im erweiterten Rohre nach Bedingung b) und c) der Unterschallzustand 5 einstellt. Der Vorgang ist nicht mehr verlustfrei, und 1 und 5 liegen deshalb nicht mehr auf einer Energie-Ellipse.

3. Der Auspuffvorgang in ein Rohr mit anschliessendem Diffusor.

In Fig.44 ist der Auspuffvorgang in das bereits verwendete Rohr mit 40 mm Innendurchmesser, 1955 mm Länge, anschliessendem geradem Diffusor von 1110 mm Länge und 8° totalem Oeffnungswinkel dargestellt.

Wie in den früheren Beispielen wird $a_0 = 320$ m/s und $A_s = 1$ gesetzt.

Da hier vor allem der Einfluss der Querschnittsänderung interessiert, wird der Reibungseinfluss nicht berücksichtigt und nach (72) liegt daher der Konstruktion folgende Charakteristikkgleichung zugrunde:

$$dU = \mp \frac{2}{\kappa-1} d \left[P \frac{\kappa-1}{\kappa} \right] \mp P \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot U \cdot F_x \cdot dZ \quad (87)$$

Für den geraden Diffusor mit dem Oeffnungswinkel α gilt [14]:

$$F_x = \frac{df \cdot L}{dx \cdot f} = \frac{d \left[(x_D \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2 \pi \right] L}{\left[(x_D \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2 \pi \right] dx} = \frac{2L}{x_D} \quad (88)$$

wenn x_D vom Scheitelpunkt des Diffusors an gerechnet wird.

Die Unstetigkeit in F_x beim Uebergang vom geraden Rohr mit $F_x = 0$ in den Diffusor mit endlichen F_x tritt in Wirklich-

keit nicht auf, da die Gasteilchen die Winkeländerung nicht sprunghaft, sondern in stetiger Umlenkung mitmachen. Der Schallpunkt liegt in der Beschleunigungsperiode etwas links vom Diffusoreintritt (vgl. Punkt 86), in der Verzögerungsperiode ganz wenig rechts davon. Um diese Stelle genau zu bestimmen, müsste der Sprung in F_x durch einen stetigen Uebergang ersetzt werden; sonst stört er die Berechnung nicht.

Die im Vorauslass entstehenden Druckwellen und ihre Reflexion im Diffusor bis zur Bildung eines Stosses bei 47 erfordert keine weitere Erklärung mehr.

Der Stoss wird vorerst Richtung Rohrende weggespült, wächst dabei rasch und die Fortschreitgeschwindigkeit seiner Front steigt nach Fig.11 so stark, dass sie bei 89 und 96 ungefähr gleich der Ueberschallgeschwindigkeit am Fusse des Stosses wird. Er bleibt daher an dieser Stelle einen Moment stehen. In der Zwischenzeit hat sich der Zylinder teilweise entleert, und auf die Verdichtungswellen 0 1 10 21 34 55 80 folgen Verdünnungswellen 102 125 usw. Die Schallgeschwindigkeit am Diffusoreintritt (vgl. Fig.45a: 87 109 132) nimmt ab. Der Stoss erhält die Möglichkeit, Diffusor-einwärts vorzurücken. Er löscht die Ueberschallströmung aus, läuft mit zunehmender Geschwindigkeit ins gerade Rohr und leitet am Zylinder die Rückströmperiode ein.

Der Ueberschallbereich ist rechts vergrössert herausgezeichnet. Der Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit äussert sich bei der instationären Strömung nur dadurch, dass nachher alle Störlinien nach rechts laufen.

Die eingetragenen Lebenslinien geben ein übersichtliches Bild der Luftbewegung im Auspuff. Es fällt der starke Knick am Stoss sowie die rasche Abnahme der Geschwindigkeiten im Diffusor auf. Ein Luftteilchen gelangt erst nach mehreren Arbeitsspielen ins Freie.

Bei den Versuchen mit Diffusoren war der Auspufflärm besonders laut und dumpf.

Die Zustandscharakteristiken (Fig.45a) sind in 2 Diagrammen dargestellt. Oben sind die 45°-Geraden für das gerade Rohrstück und der Ueberschallbereich mit den angrenzenden Stössen

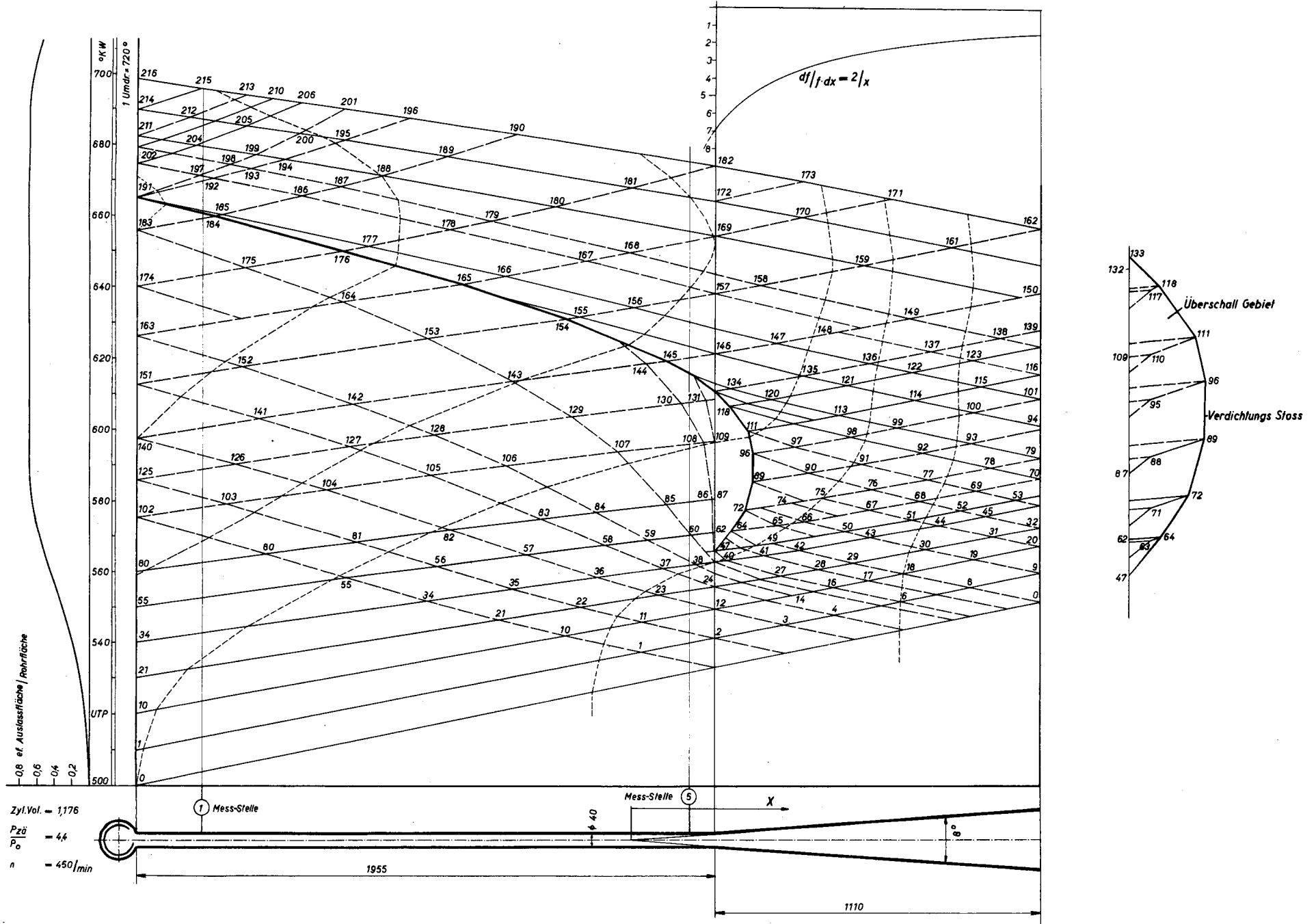


Fig. 44

Leer - Vide - Empty

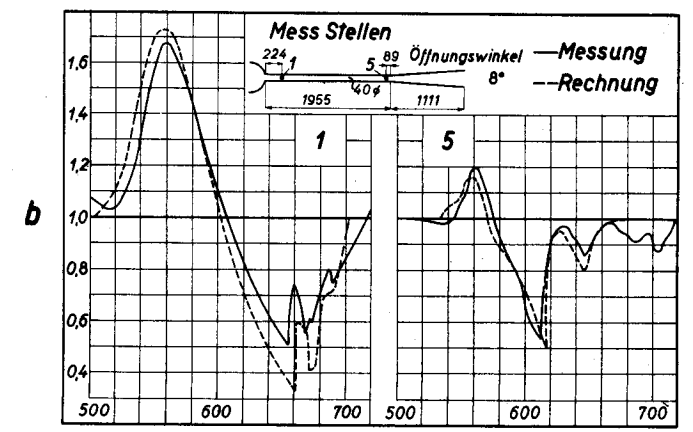
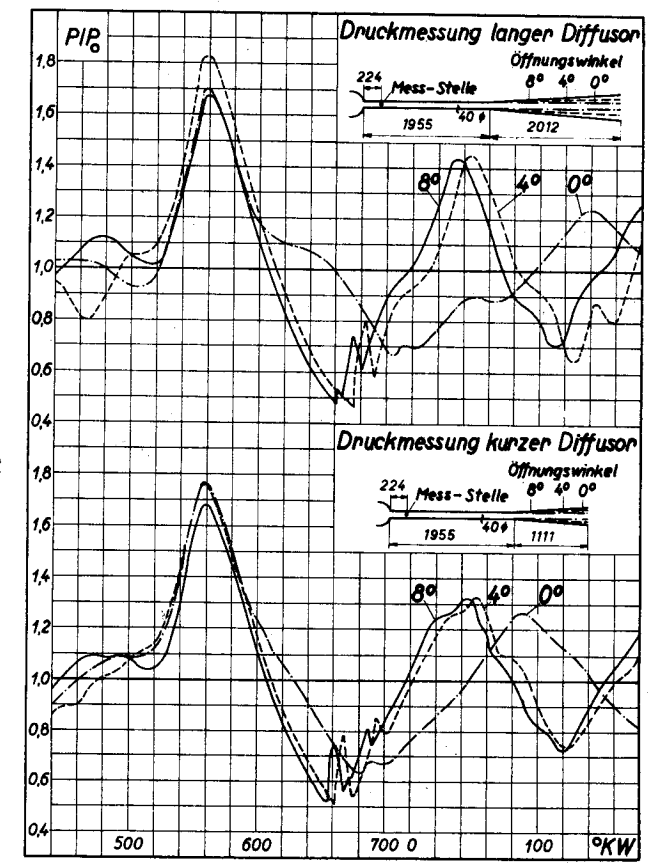
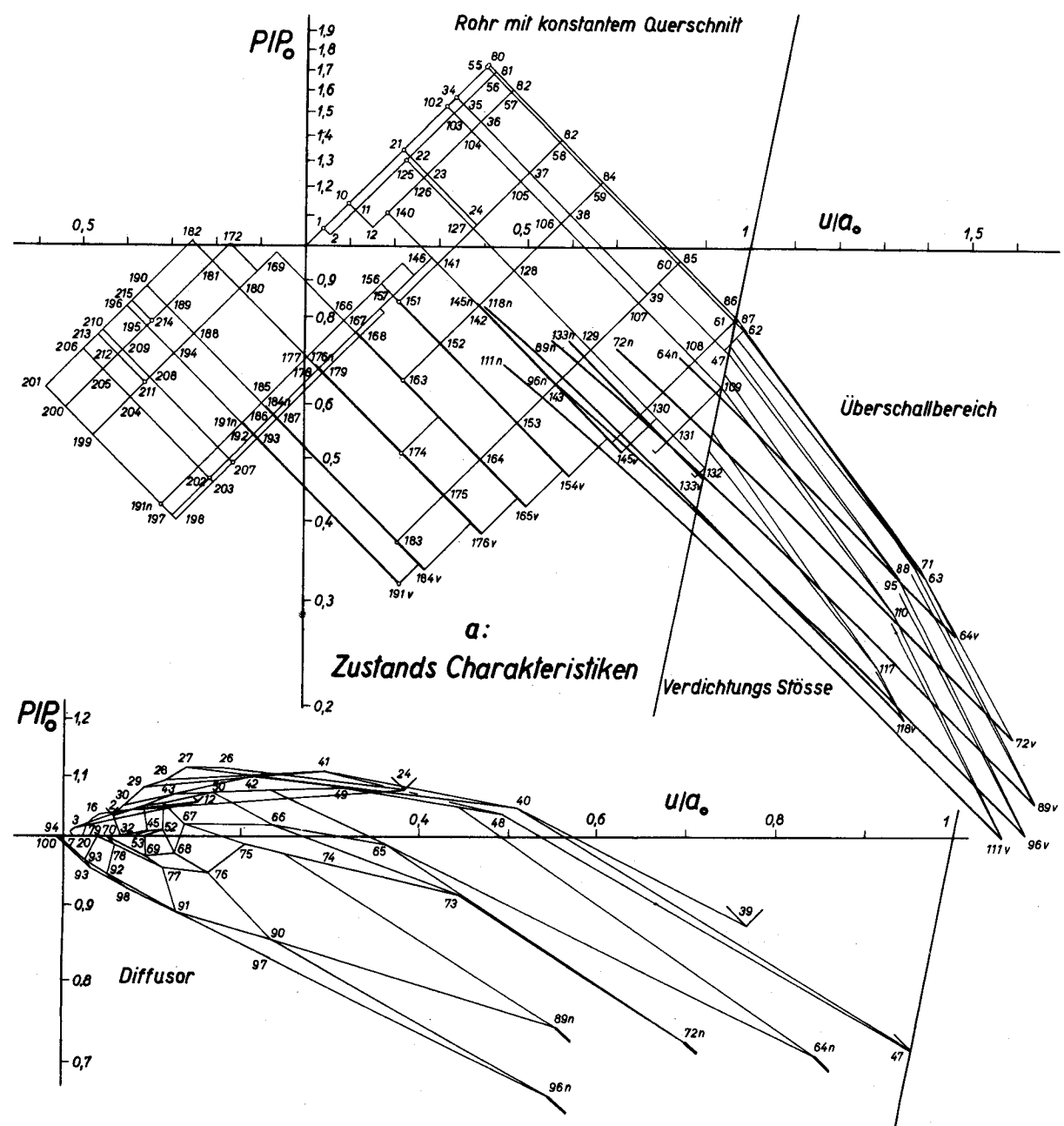


Fig. 45

Leer - Vide - Empty

konstruiert. Das wirre Charakteristiken-Netz für die Unterschallströmung im Diffusor ist herausgezogen und unten in doppeitem Masstabe aufgezeichnet. Um das Bild nicht zu überlasten, sind die Zustandslinien nur für den ersten Zeitabschnitt aufgetragen.

Im Uberschallbereiche treten sofort tiefe Drucke auf (86_v , 96_v , 111_v), ersichtlich auf der diesmal in p/p_0 angeschriebenen Abszissenachse. Entsprechend entstehen unerwartet grosse Druckverhältnisse in den Stössen, z.B. für Stoss 96

$$(p_n/p_v)_{96} = 0,661/0,1189 = 5,57.$$

Die Kompressionslinien so starker Stösse dürfen nicht mehr als 45° -Geraden angenähert werden. Sie biegen nach Fig.11 leicht nach unten ab.

Die graphische Konstruktion erfordert einen beträchtlichen Zeitaufwand, da aus folgenden Gründen erst nach mehreren Verbesserungen ein genauer Charakteristikenverlauf gefunden wurde: In der Nähe der $U+A$ -Geraden ergibt eine geringe Verschiebung der Zustandspunkte starke Richtungsänderungen der ω^- -Störlinien im Wellenplan, und die Bewegung der Stossfront muss als Differenz zweier grosser Werte, nämlich der Stossgeschwindigkeit und der Uberschallgeschwindigkeit am Fuss, berechnet werden.

Im stationären Durchfluss müssen alle Zustandspunkte auf einer Energie-Ellipse liegen. Wie unter 1) erwähnt, trachten die Reflexionen diesen Verlauf herzustellen, so dass sich die Charakteristiken für den Diffusor, im Grossen gesehen, um eine Ellipse gruppieren.

Fig.45b vergleicht den gerechneten und den gemessenen Druckverlauf an den Mess-Stellen ① und ⑤ (nach Fig.44). Die Uebereinstimmung beweist, dass die Strömungsvorgänge, wie Uberschallgebiet, Stösse, starke Saugwirkung, durch die graphische Konstruktion sehr gut erfasst werden. Bei den hohen auftretenden Geschwindigkeiten war eine Abweichung der Absolutwerte infolge Reibungseinfluss zu erwarten. Bemerkenswert ist aber, dass der Stoss diesmal auch bei der Messung beobachtet werden kann.

4. Diskussion der Wirkung von Diffusoren.

Die starke Saugwirkung von Diffusoren hat zu ihrer erfolgreichen Verwendung an selbstgespülten Zweitakt-Dieselmotoren geführt [21].

Die dabei auftretenden Erscheinungen sind in Fig.44 erklärt worden. Nun stellt sich die Frage nach der zweckmässigsten Leitungsanordnung. Das gerade Rohrstück ist so lang zu wählen, dass kein unerwünschtes Abbauen des Vorauslass-Druckberges erfolgt (vgl. S.64). Die Saugwirkung soll erst gerade bei Spülbeginn einsetzen.

Die Angabe des totalen Oeffnungswinkels eines Diffusors ist noch kein genügendes Kriterium für die instationäre Strömung in der Erweiterung, da nach Gleichung (87) der Ausdruck

$$P_{Kx}^{\frac{1}{2}} \cdot U \cdot F_x \cdot dZ$$

für die Wellenbrechung massgebend ist. Nun ist ersichtlich, dass der Wert $F_x = 2 L/x_D$ am Anfang eines Konus mit $\alpha = 8^\circ$ vom Eintrittsdurchmesser abhängt. Bei Verdoppelung des Innendurchmessers des geraden Rohres in Fig.44 wandert der Scheitelpunkt des Diffusors nach links, was die beeinflussende Hyperbel $2/x_D$ ebenfalls nach links schiebt, so dass nur noch ihre niedrigen Werte F_x im Bereich der Erweiterung liegen. Dieselbe Verschiebung entsteht bei festgehaltenem Eintrittsdurchmesser durch Verkleinerung des Winkels α . Um gleiche Reflexion zu erfahren, muss bei abnehmenden Werten F_x die Laufzeit dZ einer Welle entsprechend steigen. Bei schlanken Diffusoren mit grosser Eintrittsfläche setzt danach die Saugwirkung gemächlicher ein, was eine leichte Verlängerung der Schwingungsperiode mit sich bringt.

Andererseits würde in einem schlanken Diffusor der Stoss langsamer wachsen und weiter stromabwärts gespült. Da der Rückweg damit länger wird, erreicht er den Zylinder später, und die Saugperiode wird leicht verlängert.

Da infolge der komplizierten Zusammenhänge nicht ohne weiteres ersichtlich ist, in welchem Falle der maximale Unterdruck auftritt, wurde folgende Versuchsreihe durchgeführt:

Der Auspuffvorgang erfolgte bei denselben Betriebsbedingungen wie Fig.44. An das gerade Rohr von 40 mm Innendurchmesser

und 1955 mm Länge wurden Diffusoren mit 0° , 4° , 8° Öffnungswinkel angeschlossen, einmal 1111 mm, dann 2012 mm lang.

Fig.45c zeigt den gemessenen Druckverlauf an Mess-Stelle ① für diese Versuche.

Die sehr intensiven Schwingungen klingen im Verlaufe der Periode nicht genügend ab und daher entstehen die beobachteten Unterschiede in den Vorauslassbergen.

Die Diffusoren mit $\alpha = 4^\circ$ und $\alpha = 8^\circ$ bringen eine erhebliche Steigerung der Saugwirkung gegenüber einem geraden Rohre ($\alpha = 0^\circ$), sind aber untereinander gleichwertig. Dies erscheint aus folgender Tatsache verständlich: Der Konusscheitel liegt beim geraden Rohr im Unendlichen. Die Einflusshyperbel F_x legt beim Uebergang von $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 4^\circ$ den weiten Weg vom Unendlichen ins Endliche zurück, während ihre Verschiebung beim Uebergang von 4° auf 8° damit verglichen sehr klein ist.

Das Verlängern der Diffusoren von 1111 mm auf 2012 mm bringt nur eine schwache Verbesserung, da der hintere Teil wenig wirksam ist, da dort sowohl F_x als U kleine Werte annehmen. Dies ist auch der Grund dafür, dass sich die Länge des Konus auf die Schwingungszahl pro Sekunde kaum auswirkt. Beim Rohr mit $\alpha = 0^\circ$ wird dagegen die Lage des ersten Drucktales nach Fig.35c und Fig.45c durch die Länge stark verschoben, wobei der Minimaldruck erst beim längsten Rohre 0,03 at ungünstiger wird. Bei Verwendung eines Diffusors wird das richtige Einsetzen der Saugwirkung durch Anpassen der Länge des vorgeschalteten geraden Rohres erreicht.

Eine Verschlechterung bei grösserem α infolge Ablösung trat nicht auf. Die wirksamen Verdünnungswellen werden in der Beschleunigungsperiode erzeugt, und dann verhindert die zeitliche Beschleunigung auch bei relativ grossem α ein Ablösen wegen örtlicher Verzögerung (vgl. III-§4-1).

§ 6. Der Einfluss der Wärmezufuhr auf die instationäre Strömung.

Wärmezufuhr durch chemische Reaktion erzeugt entweder eine Deto-

tonationswelle oder erfolgt in Form der langsamen Verbrennung. Bei der Detonation läuft die Umsetzung mit starkem Druckerhöhung in Form eines Verdichtungsstosses ab. Die Gase hinter der Front bewegen sich auf diese zu. Das feste Gebundensein der Reaktion an den Stoss erlaubt, einfache gasdynamische Beziehungen aufzustellen [41].

Bei der langsam ablaufenden Verbrennung ist die Berechnung viel komplizierter. Obwohl die Ueberprüfung am Versuch hier nicht möglich war, soll die Anwendung der Charakteristiken-Theorie auf Strömungen mit Wärmezufuhr durch Verbrennung gezeigt werden. Dabei wird auch diskutiert, inwiefern die Änderung in K von 1,4 bis ca 1,3 bei dem grossen auftretenden Temperaturbereiche von 300° bis 2000 K° berücksichtigt werden muss.

Bei der in III-§3 beschriebenen Grundaufgabe (Fig.32) ist die Rückwärtsbestimmung des Punktes 5 unangenehm. Durch eine einfache Transformation lässt sich dies vereinfachen.

1. Transformation auf Massenpunktkoordinaten.

Als neue Variable m wird eingeführt:

$$m = \int_{x_1}^x \rho g dx \quad (89)$$

m = Masse, die zu einem bestimmten Zeitpunkt, etwa $t = 0$, zwischen einem Bezugsquerschnitt x_1 und dem veränderlichen Querschnitt x eingeschlossen ist. Jedem Massen-Teilchen ist damit ein zeitlich unveränderter Wert m zugeordnet (daher Massenpunktkoordinaten).

Mit dieser neuen Koordinate werden die Grundgleichungen formal einfacher. Statt aber die Charakteristikengleichungen neu abzuleiten, werden diese direkt transformiert.

Zustandscharakteristiken.

Da die Verträglichkeitsgleichungen (72) und (73) resp. (74) und (75) x nicht enthalten, bleibt das Zustandsdiagramm ungeändert. Die Zustandsgleichungen für konstanten Querschnitt ohne Berücksichtigung der Reibung lauten:

$$dU = \mp \frac{2}{\kappa-1} A_0 d \left[P \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right] \pm (\kappa-1) \frac{Q_v dZ}{P \frac{\kappa-1}{2\kappa} A_s} \quad (90)$$

$$d \ln A_s = \frac{\kappa-1}{2} \frac{Q_v dZ}{\left(P \frac{\kappa-1}{2\kappa} A_s \right)^2} \quad (91)$$

Die Zustandscharakteristiken (90), (91) werden im

$$u/a_0 - (p/p_0)^{\frac{\kappa_0-1}{2\kappa_0}} \text{ -Diagramm}$$

konstruiert. κ_0 ist der Mittelwert von κ im betrachteten Temperaturbereiche. Eine einfache Fehlerabschätzung zeigt, dass die Veränderlichkeit von κ nur im Faktor $(\kappa-1)$ berücksichtigt werden muss.

Die Bestimmung von A_s nach Gleichung (91) erfolgt nach Fig.32 graphisch auf einer $\ln A_s$ -Kurve.

Weg-Zeit-Charakteristiken.

$$\text{Aus (89) folgt: } m_x = f_g \quad m_t = \int_{x_1}^x (f_g)_t dx$$

$$\text{Nach (57) ist: } (f_g)_t = -(f_g)_x \quad m_t = -f_g u$$

$$\text{Somit} \quad dm = m_x dx + m_t dt = f_g dx - f_g u dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f_g} \frac{dm}{dt} + u \quad (92)$$

Das Einsetzen von $\frac{dx}{dt}$ aus (69) und (70) in (92) ergibt neue Richtungsgleichungen:

$$\text{Lebenslinien} \quad m = \text{konstant} \quad (93)$$

$$\text{Störlinien} \quad \frac{dm}{dt} = \pm a f_g = \pm \frac{f \kappa p}{a} \quad (94)$$

(94) kann unter Berücksichtigung von $\frac{a}{a_0} = \frac{a}{a_{0s}} \frac{a_{0s}}{a_0} = P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} A_s$ dimensionslos geschrieben werden:

$$\frac{dm}{dZ} = \frac{d\left(\frac{m}{L^2 \frac{a_0}{a_s}}\right)}{d\left(\frac{t a_0}{L}\right)} = \frac{d\left(\frac{m a_0^{\frac{1}{2\kappa}}}{L^2 \kappa_0 P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}}\right)}{d\left(\frac{t a_0}{L}\right)} = \pm \frac{f \kappa P}{L^2 \kappa_0 P^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} A_s} = \pm \left(\frac{f}{L}\right) \frac{P^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}}}{(\kappa_0/\kappa) A_s} \quad (94a)$$

Neigungsplan.

Hier wird der Fall $f = \text{konstant}$ diskutiert, für den die Konstruk-

tion in Massenpunkt-Koordinaten besonders vorteilhaft ist.

Für die Neigung
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dZ}{dX} = \frac{(\kappa_0/\kappa) A_s}{P \frac{\kappa_0}{\kappa}}$$

nach (94a) kann der einfache Richtungsplan Fig.46b aufgezeichnet werden:

Der senkrechte Schenkel trägt eine $\frac{\kappa_0}{\kappa} A_s$ -Teilung, die in A_s beschriftet ist (unter Annahme $\kappa = f(A_s)$). Der wagrechte Arm ist in $P \frac{\kappa_0}{\kappa}$ geteilt, aber mit den zugehörigen $P \frac{\kappa_0}{\kappa}$ -Werten bezeichnet, da letztere direkt im Zustandsdiagramm abgelesen werden können. Im Mittelpunkt der Masche 18-22 beträgt $A_s = 0,82$, $P \frac{\kappa_0}{\kappa} = 1,0215$ und die Verbindungsgerade dieser Werte im Neigungsplan liefert die Richtung der Störlinie 18-22 in Fig.46c.

Randbedingungen.

Die Konstruktion der Randpunkte im ungeänderten Zustandsdiagramm erfolgt wie früher.

Im Massenpunkt-Zeit-Diagramm ergibt sich eine gewisse Komplikation:

Da Ein- und Ausströmen mit zeitlicher Zu- resp. Abnahme der Masse im Rohr, und somit der Massenpunkt-Koordinate, verbunden ist, bewegen sich die Ein- und Ausströmstellen (vgl. Fig.46c) im M-Z-Bild um:

$$\frac{dm}{dt} = f(\varrho u) \text{ Ein- resp. Ausströmen} \quad (95)$$

Nach (42) gilt für Einströmen ins Rohr:

$$f \varrho u = \int a_z \varrho_z f = \int f \frac{\kappa_z P_z}{a_z}$$

und nach (49) für Ausströmen aus dem Rohr:

$$f \varrho u = \int a_{os} \varrho_{os} f = \int f \frac{\kappa P_o}{a_{os}}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in (95) folgt für die Bewegung der Randbedingungen im M-Z-Diagramm:

$$\text{Einströmstellen} \quad \frac{dM}{dz} = \int \frac{f}{L^2} \frac{\kappa_z}{\kappa_0} \frac{p_z/p_0}{a_z/a_0} \quad (95a)$$

$$\text{Ausströmstellen} \quad \frac{dM}{dz} = - \int \frac{f}{L^2} \frac{\kappa}{\kappa_0} \frac{1}{A_s} \quad (95b)$$

§ wird dem Randbedingungsdiagramm Fig.23 entnommen.

2. Berechnungsbeispiel.

Im untersuchten Beispiele erfolgt die Wärmezufuhr durch Verbrennung. Der Prozess sei analog zum Vorgange im Paul-Schmidt-Verpuffungsstrahlrohr, das als Antrieb der V1-Bombe bekannt wurde.

Für das vorliegende Rechenbeispiel sei angenommen, dass das Strahlrohr mit der Mach'schen Zahl 0,37 in Luft vom Zustande 300°K, $\kappa = 1,4$, $a = 348$ m/s fliegt.

Die Verengung an den offenen Rückschlagventilen beträgt $\varphi = 0,4$ [39], so dass sich die in Fig.46a eingetragene Randbedingung ergibt. Am offenen Rohrende herrscht der Umgebungsdruck p_0 .

Zu Beginn der Untersuchung sei der Druck im Rohr zu p_0 angenommen und der Inhalt ströme mit konstanter Geschwindigkeit u_0 , die sich im Schnittpunkt der "Randbedingung Rückschlagventil" mit p_0 ergibt.

In das vorderste, 0,5m lange Rohrstück ist Frischluft eingeströmt. Nach Brennstoffeinspritzung entsteht ein brennbares Gemisch. Im Rohr-Hinterteil befindet sich das im letzten Arbeitspiel verbrannte Gas mit $T = 1000^\circ\text{K}$, $\kappa = 1,35$, $a = 623$ m/s (Fig. 46d). Diese Gasschichtung ergibt die in Fig.46c dargestellte Verteilung in Massenpunktkoordinaten. Dort nimmt die kalte, dichte Luft relativ zum heissen Gas (mit kleinem φ) viel Platz ein.

An der Trennfront erfolgt im betrachteten Anfangszeitpunkt die Zündung. Ueber den Ablauf der Verbrennung wird folgende Annahme gemacht:

Die Flammfront (die als 4.Charakteristik aufgefasst werden kann) bewege sich nach Fig.46c mit konstanter Geschwindigkeit ventiltwärts [38]. Die Wärmezufuhr durch Verbrennung sei konstant, $q_v = 12 \cdot 10^7$ m²/s³, und soll für jedes Teilchen 0,0065 s dauern, so dass im Mittel die Endtemperatur 1000°K erreicht wird. Damit ergibt sich der in Fig.46c,d punktierte Bereich mit Verbrennung.

Die Rechnung verwendet:

$$K_0 = 1,375$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$a_0 = 623 \text{ m/s}$$

$$Q_v = \frac{q_v \cdot L}{a_0^3} = \frac{12 \cdot 10^7 \cdot 3}{241,8 \cdot 10^6} = 1,489$$

Die Konstruktion erfolgte im M-Z-Diagramm Fig.46c. Gleichzeitig wurde noch das X-Z-Diagramm aufgezeichnet, in dem der Vorgang klarer erkennbar ist. Zudem erleichtert der Vergleich der beiden Darstellungen das Verständnis für die Transformation in Massenpunktkoordinaten. Das M-Z-Bild geht danach aus dem X-Z-Plan durch horizontale Verzerrung hervor, so dass die Lebenslinien zu Senkrechten werden und ihr Abstand ein Mass für die dazwischenliegende Gasmasse ist.

Bei Strömungen in veränderlichem Querschnitt ist man gezwungen, das X-Z-Diagramm mitzukonstruieren, da dann in (72) resp. (74) $F_x = f(x)$ benötigt wird.

Der Ablauf des Prozesses.

Im Unterschied zur Detonation bewegen sich die Gasteilchen nach Durchgang der Flammfront von dieser weg nach rechts, und der Druck sinkt hinter ihr leicht ab.

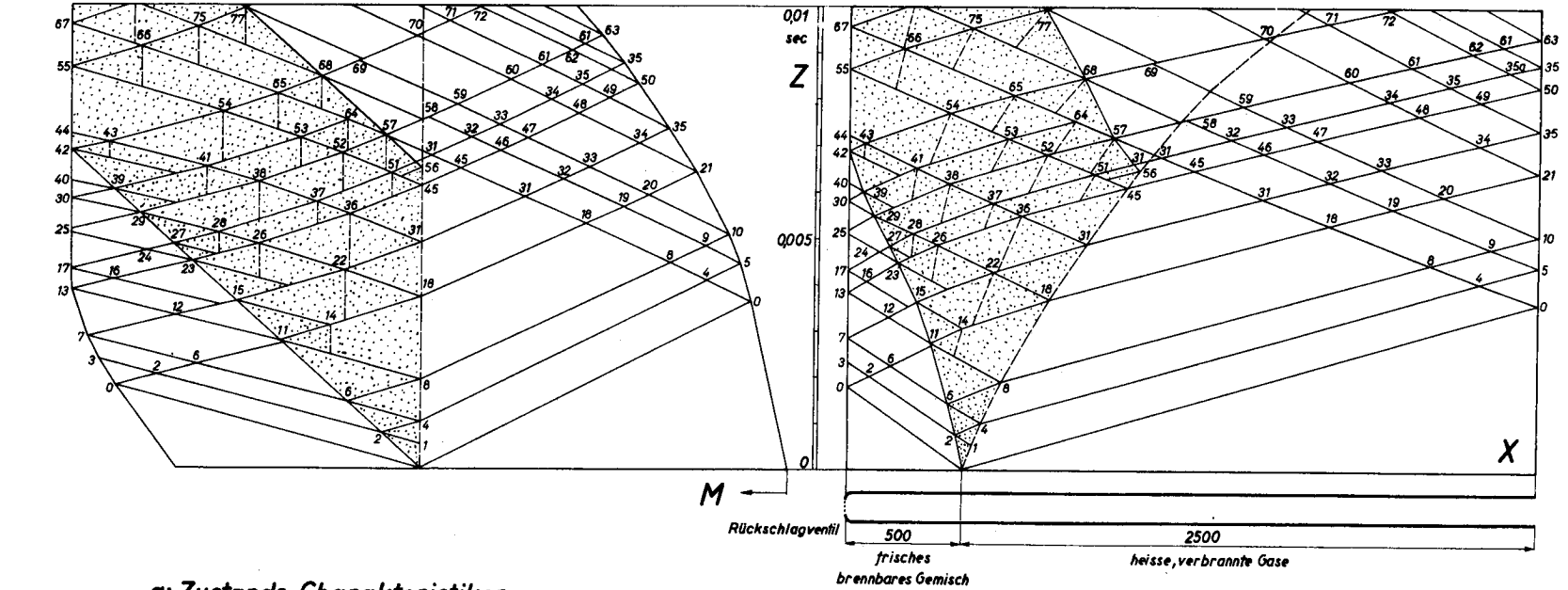
Vom Gebiet mit Verbrennung laufen nach beiden Seiten Verdichtungswellen. Die rechtslaufenden erhöhen die Ausströmgeschwindigkeit am offenen Rohrende (Fig.46f). Die linkslaufenden verlangsamen das Einströmen durch die Rückschlagventile, bis diese bei Punkt 17 schliessen. Erst von diesem Moment an beginnt der Druck im Brennraum stark zu steigen (Fig.46e).

Es entsteht ein beträchtlicher Unterschied zwischen dem Druck an den Ventilen und an der Trennschicht. Die Annahme konstanten Druckes in der Verbrennungszone muss also falsche Resultate liefern.

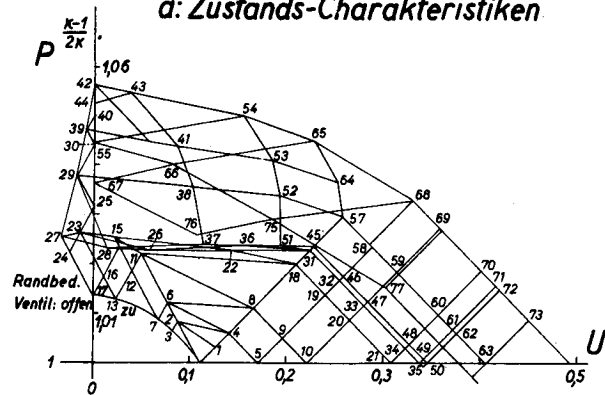
Der Maximaldruck am Rohranfang wird erreicht, wenn die Flammfront dort anlangt. Nachher sinkt der Druck wieder, da mit wachsendem A_s und $P \frac{\kappa-1}{2\kappa}$ nach (90) der Einfluss der Verbrennung

c: Wellen-Plan in Massenpunkt-Koordinaten

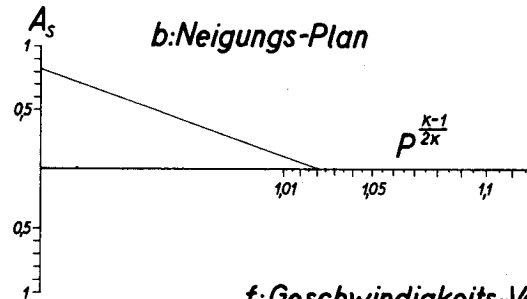
d: Weg-Zeit-Wellen-Plan



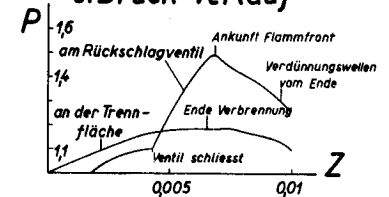
a: Zustands-Charakteristiken



b: Neigungs-Plan



e: Druck-Verlauf



f: Geschwindigkeits-Verlauf

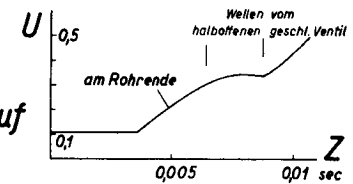


Fig. 46

Leer - Vide - Empty

kleiner wird.

Später erfolgt dann ein Abbauen des Druckes durch die am Ende reflektierte Verdünnungswelle (Punkt 67).

Die Ausströmgeschwindigkeit (Fig.46f) steigt erst stark, wenn die nach Ventilschluss (Punkt 17) entstandene Verdichtungswelle am Rohrende anlangt (Punkt 35).

Diese Resultate entsprechen den Ergebnissen in [38], wo ein ähnlicher Fall durch Reihenentwicklung berechnet wurde.

Im Schmidt-Rohr wurden höhere Drucke, maximal 1,5 atü, erreicht. Die hier angenommene Verbrennungsgeschwindigkeit war demnach zu klein.

Die weitere Schwingung und die Rückwirkung auf die nächste Periode wird nicht verfolgt (vgl. dazu [39]).

Z u s a m m e n f a s s u n g .

=====

Die vorliegende Arbeit trägt zur Abklärung von zwei Problemkreisen bei: Der Theorie der instationären Strömung im allgemeinen und ihre Anwendung auf den Motorauspuff im speziellen.

Zuerst sind die bekannten Gesetze der eindimensionalen, reibungsfreien instationären Strömung kurz dargestellt und gezeigt, wie die Berechnung graphisch durch gleichzeitige Konstruktion in der Weg-Zeit- und Zustands-Ebene sehr einfach und übersichtlich ist. Die Randbedingungen werden eingehend diskutiert und als Kurven im Zustandsdiagramm dargestellt.

Anhand einer speziell konstruierten Versuchsanlage konnte die Wirklichkeitstreue der so ermittelten Strömungen untersucht werden. Es zeigt sich, dass die auftretenden Druckschwingungen dem theoretisch vorausbestimmten Verlaufe sehr gut entsprechen, dass aber beim Auftreten grosser Geschwindigkeiten infolge Reibung eine nicht zu vernachlässigende Dämpfung entsteht.

Im Anschluss an die Darstellung der Charakteristikentheorie für partielle hyperbolische Differentialgleichungen wird das graphische Verfahren erweitert und erfasst dann auch Reibung, Quer-

schnittsänderung und Wärmezufuhr.

Es erweist sich, dass bei Strömungen mit geringen Verzögerungen die Verwendung des stationär ermittelten Reibkoeffizienten Uebereinstimmung von Versuch und Rechnung ergibt. Treten starke Verzögerungen mit Strömungsumkehr auf, so entstehen sehr unregelmässige Geschwindigkeitsprofile, und die daraus resultierende Verwirbelung erhöht den Reibverlust um einen von der Stärke des Rückströmens abhängigen Faktor, der sich für einen bestimmten Fall zu 1,2 ergab.

Ein Beispiel zeigt, dass auch die instationäre Strömung mit Wärmezufuhr durch Verbrennung graphisch übersichtlich behandelt werden kann.

Zum Problem des Motorauspuffes zeigt die Diskussion der Randbedingung für das Auslassorgan, dass von der Arbeitsfähigkeit der Zylinderladung bei Ausstossbeginn infolge Drosselung ein beträchtlicher Anteil verloren geht.

Dieser Verlust wird verkleinert, wenn der engste Durchströmquerschnitt rasch gleich dem Rohrquerschnitt wird.. Die Öffnungsgeschwindigkeit der Ventile und Schlitze ist aber mechanisch begrenzt. Die Verwirbelung an der Drosselstelle nimmt anderseits ab, wenn durch Gegenstau die Druckdifferenz vermindert wird. Bei Verwendung von engen Auspuffleitungen entsteht dieser Stau als Druckwelle, dem sogenannten Vorauslass-Stoss. Die Energie dieser Welle kann in einer Turbine oder gasdynamisch durch Reflexion als Saugwelle verwertet werden.

Da die resultierende Durchflussfläche einer Turbine bedeutend kleiner als der Rohrquerschnitt ist, wird der Vorauslass-Stoss teilweise als Verdichtung zurückgeworfen. Bei kurzen Leitungen treffen diese Reflexionen schon im Vorauslass beim Zylinder ein und erhöhen den Gegenstau. Mit der Turbinendüsenfläche kann damit die ausgenützte Energie in weiten Grenzen reguliert werden, während für lange Leitungen der Rohrquerschnitt allein entscheidend ist. Der Gegendruck im Auspuff muss anschliessend trotz der engen Turbinendüse rasch absinken und darf die Spülung des Motorzylinders nicht stören. Die kurze Leitung mit kleiner Entleerzeit ist darin überlegen. Ein Auspuffrohr, bei dem die Reflexion des Vorauslass-Stosses in die Spülperiode fällt, muss

ausgeschlossen werden.

Die gasdynamische Verwertung der Druckwellen erfolgt zweckmässig in einem Diffusor, der die Energie mit besserem Wirkungsgrad in eine Saugwirkung umsetzt als das offene Ende. Die reflektierte Verdünnungswelle besorgt die Spülung des Motors ohne Mithilfe eines Gebläses, vorausgesetzt, dass durch ein Rohrstück mit konstantem Querschnitt zwischen Zylinder und Diffusor die Saugwirkung in die Spülperiode gelegt wird. Ein vorzeitiges Eintreffen der Verdünnungswelle würde den Vorauslass-Stoss abbauen und die Energieauswertung verschlechtern. Da grosse Strömungsgeschwindigkeiten auftreten (Überschallbereich im Diffusor), so ist der Reibverlust zu berücksichtigen.

20.1.49

Ernst Jenny

Literaturverzeichnis.

=====

- a) Dieselmotoren: Allgemeines, Leistungssteigerung, Spülung, Gas-
schwingungen im Auspuff.
- 1 G.Eichelberg Verbrennungsmotoren. Vorlesung E.T.H. Zürich
AMIV-Verlag 1945
 - 2 F.A.F.Schmidt Verbrennungsmotoren. Springer, Berlin 1939
 - 3 W.Pflaum Zusammenwirken von Motor und Gebläse bei Auflade-Dieselmotoren. VDI-Sonderheft: Dieselmotoren VII 1938 S.119-126
 - W.van Rijswijk Dr Samenwerking van een Diesel-Motor met een door een Gasturbine gedreven Druckvulpomp.
 - 4 Kadenacy-System The Oil Engine, Nov.1939
Engineering, Oct.1945
The Oil Engine, Sept.1945
 - 5 O.Lutz und W.Noeggerath Spülvorgang bei Zweitakt-Maschinen. Deutsche Kraftfahrt-Forschung Heft 23 1939
 - 6 O.Lutz Grundsätzliche Betrachtungen über den Spülvorgang bei Zweitaktmaschinen. Forschg.Ing.-Wes. Band 4 (1934) S.275-289
 - 7 G.Eichelberg Instationäre Strömungsvorgänge in Motoren. Forschg.Ing.-Wes. Band 14 (1943) S.41-47
 - 8 A.Pischinger Bewegungsvorgänge in Gassäulen, insbesondere beim Auspuff- und Spülvorgang von Zweitaktmaschinen. Forschg.Ing.-Wes. Band 6 (1935) S.245 und 273
 - 9 G.Reyl Strömungsvorgänge in beliebig verzweigten Rohrleitungen von Kolbenmaschinen. Diss.1942
- b) Nichtstationäre Gasdynamik: Zusammenfassende Darstellungen.
- 10 R.Sauer Nichtstationäre Probleme der Gasdynamik 1946
(nicht publiziert)
 - 11 R.Sauer Charakteristikenverfahren für die eindimensionale instationäre Gasströmung. Ing.Arch. Band 13
(1942) S.79
 - 12 R.Sauer Zur Einführung in die Strömungslehre zusammendrückbarer Flüssigkeiten. Z.VDI. Bd.88 (1944)S.301-307
 - 13 F.Schultz-Grunow Nicht stationäre eindimensionale Gasbewegung. Forschg.Ing.-Wes. Band 13 (1942) S.125
 - 14 P. de Haller Ueber eine graphische Methode in der Gasdynamik. Techn.Rundschau Sulzer Nr.1 1945 S. 6-24
 - 15 Carrière Vorlesungen. Centre d'Etudes Supérieures de Mécanique Paris 1947/48 225 Seiten
 - 16 Riemann-Weber Die partiellen Diff.-Gl.der math.Physik, Band 2
(1912) S.503-562

c) Verdichtungsstoss.

- 17 K.Beichert Ebene Wellen in idealen Gasen mit Reibung und Wärmeleitung. Annalen der Physik 1941
- 18 Kohler Structure des ondes de choc dans des gas polyatomiques excités. Conférence St.Louis 2 août 1947
- 19 R.Sauer Zur Theorie des nichtstationären ebenen Verdichtungsstosses. Ing.Arch. Band 14 (1943) S.14-20

d) Resonanzen.

- 20 W.Maier u.O.Lutz Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen der Verbrennungs-Kraftmaschinen. Ber.a.d.Lab.f. Verbrennungskraftmasch.d. T.H.Stuttgart, Heft 3 (1934).
- 21 E.Lettau Messungen an Gasschwingungen grosser Amplitude in Rohrleitungen. Deutsche Kraftfahrtforschung Heft 39 (1939)
- 22 F.Schultz-Grunow Theoretisch und experimentell ermittelter Durchfluss einer nichtstationären Gasströmung. ZAMM. 25/27 (1947) S.155

e) Strömung durch Drosseln und Ventile.

- 23 E.Schrenk Ueber Strömungsarten und Ventilwiderstand. Z. VDI. Band 69 (1925) S.1619
- 24 K.Tanaka Air Flow through Suction and Exhaust Valve of Conical Seat. Rep. of the Aeronautical Research Institute, Tokyo; No.42 (Sept.1928), No.67 (Jan. 1931)
- 25 F.Kretzschmer Strömungsform und Durchflusszahl der Messdrosseln. VDI-F.H. 381 (1936)
- 26 W.Nusselt Der Druck im Ringquerschnitt von Rohren mit plötzlicher Erweiterung beim Durchfluss von Luft mit hoher Geschwindigkeit. Forschg.Ing.-Wes. Band 11 (1940) Heft 5
- 27 W.Nusselt Die Strömung von Gasen durch Blenden. Forschg.Ing.-Wes. Band 3 (1932) S.11-20

f) Reibung.

- 28 J.Nikuradse Untersuchung über die Strömung des Wassers in konvergerten und divergerten Kanälen. VDI-F.H.289 (1929)
- 29 A.Burri Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung. Diss. E.T.H.

- 30 F.Schultz-Grunow Pulsierender Durchfluss durch Rohre. Deutsche Kraftfahrtforschung Heft 48 und Forschg.Ing.-Wes. Band 11 (1940) S.170-187
- 31 J.Nikuradse Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI F.H.361 (1933)
- 32 O.Fritzsche und H.Richter Beitrag zur Kenntnis des Strömungswiderstandes gekrümmter rauher Rohrleitungen. Forschg.Ing.-Wes. Band 4 (1933) S.307-314
- 33 F.Hildebrand Ueber unstationäre Luftbewegung in langen Rohrleitungen und ihre Beziehungen zu den Steuervorgängen der indirekten Luftbremsen. Diss. T.H.Berlin 1927

g) Instationäre Strömung in veränderlichem Querschnitt.

- 34 F.Schultz-Grunow Nichtstationäre, kugelsymmetrische Gasströmung in Düsen und Diffusoren. Ing.Arch. Band 14 (1943) S.21-29
- 35 R.Sauer Charakteristikenverfahren für Kugel- und Zylinderwellen reibungsloser Gase. ZaMM. Band 23 (1943) S.29
- 36 J.Aschenbrenner Nichtstationäre Gasströmung in Leitungen mit veränderlichem Querschnitt. Forschg.Ing.-Wes. Bd.8 (1937) S.118-130

h) Instationäre Strömung mit Wärmezufuhr.

- 37 G.Guderley Charakteristikentheorie bei Innenballistischen Problemen. Bericht aus der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig
- 38 Mac Donald A Gas Dynamical Formulation for Waves and Combustion in Pulse-Jets. A.M.G.-N.Y.U. No.151, June 1946
- 39 F.Schultz-Grunow Die Wirkungsweise des Paul Schmidt-Verpuffungsstrahlrohres. Flugwehr und Technik 1948, S.141-143
- 40 A.Kahane and Lester Lees Unsteady One-Dimensional Flow with Heat Addition or Entropy Gradients. Journal of the Aeronautical Sciences Vol.15 (Nov.1948) Nr.11
- 41 H.Pfriem Die stationäre Detonationswelle in Gasen. Forschg.Ing.-Wes. Band 12 (1941) S.143-158
-

Lebenslauf

Am 16.2.1923 wurde ich in Zürich geboren, wuchs im Elternhaus in Emmen-Gerliswil auf, besuchte die Primarschule in Gerliswil, anschliessend die technische Abteilung der Kantonsschule in Luzern und begann nach bestandener Maturität im Herbst 1941 das Studium an der Abteilung für Maschinen-Ingenieure der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

Soweit dies neben militärischen Schulen und Aktivdienst möglich war, benutzte ich die Semesterferien zur Ausbildung als Praktikant in Büro und Betrieb der Maschinenfabrik Bell & Cie.A.-G. in Kriens, sowie in der Eisengiesserei Reinle Sigg & Cie.A.-G. in Emmenbrücke.

Im Frühling 1946 bestand ich das Diplom-Examen als Maschinen-Ingenieur.

Am 1.7.1946 trat ich in die Maschinenfabrik der A.-G. Brown Boveri & Cie. als Ingenieur der Versuchsabteilung der Turbinenfabrik ein.