

LE PENDULE GRAVIMÉTRIQUE A LAME ÉLASTIQUE

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE, ZURICH,

POUR L'OBTENTION DU GRADE
DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

A. I. CORPACIU

DE LA COMMUNE DE CORBEANCA, DÉPARTEMENT ILFOV, ROUMANIE

Rapporteur: *M. le Prof. Dr. C. F. Baeschlin.*

Corapporteur: *M. le Prof. Dr. H. Fabre.*

BUCAREST

1940

IMPR. SOCEC & Co., S. A. R.

Leer - Vide - Empty

A son Excellence

M. le Professeur Dr. VICTOR SLAVESCU
Ministre de la Dotation de l'Armée Roumaine
Membre de l'Académie Roumaine

Leer - Vide - Empty

P R É F A C E

J'ai exécuté ce travail dans le cadre du Cours de géodésie donné par Monsieur de Professeur Dr. C. F. Baeschlin de l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich. A cette occasion se sont révélées à moi la bonté d'âme et la valeur scientifique de mon maître éminent auquel je garderai jusqu'à la fin de mes jours un souvenir impérissable.

Une part de ma reconnaissance va naturellement à tous ceux qui ont approuvé et encouragé l'idée de ma spécialisation dans le domaine de la géodésie.

Jamais je n'oublierai les conseils et le précieux appui reçus de Monsieur le Professeur Dr. Victor Slavescu, Ministre de la Dotation de l'Armée Roumaine, qui a contribué essentiellement au perfectionnement de mes études à l'étranger.

Mes remerciements les plus chaleureux vont aussi à Monsieur le Professeur Dr. Gh. Ionescu-Sisești, Ministre de l'Agriculture Roumaine pour l'intérêt avec lequel il a suivi mon activité et l'appui qu'il a bien voulu accorder à mes efforts.

Je remercie également Monsieur le Dr. Alex. Nasta qui, en sa qualité de Professeur de topographie, a apprécié et soutenu l'idée du perfectionnement de notre science technique par des études et des travaux pratiques dans le domaine de la géodésie.

Je tiens encore à exprimer mes sentiments de reconnaissance à mon maître de la Faculté d'Agronomie à Bucarest, Monsieur le Professeur Alex. Petrescu, qui a fait preuve d'une bienveillante compréhension en m'accordant le congé nécessaire à l'achèvement de mes études.

Pour terminer, je remercie aussi Monsieur le Prof. Dr. H. Favre, corapporteur du présent travail, pour l'intérêt avec lequel il a bien voulu l'étudier.

Heerbrugg, Suisse, 1939.

Leer - Vide - Empty

INTRODUCTION

La Géodésie s'est enrichie, ces dernières années, d'un nouvel instrument pour la détermination de l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre: le pendule gravimétrique à lame élastique. D'accord avec les auteurs qui ont traité ce sujet ¹⁾ nous croyons que le pendule élastique présente beaucoup d'avantages par rapport aux instruments classiques utilisés dans ce but. Nous n'insistons pas sur ces qualités. On verra par la suite que l'objet de notre travail est autre.

Si la suspension élastique existe dans l'horlogerie depuis Bessel (1843), la Géodésie ne commence à l'apprécier que beaucoup plus tard.

Gustaf Ising ²⁾ a été le premier à proposer le pendule élastique astatique comme instrument pour la détermination de l'intensité de la pesanteur. Il a même construit un pendule et a élaboré une méthode statique pour le calcul de g ; mais aussi bien l'instrument qui présente certaines difficultés, que sa méthode de calcul trop approximative ³⁾ tendent à être remplacés.

J. Haag ⁴⁾ a aussi élaboré quelques recherches d'un caractère plutôt théorique.

Indépendamment de G. Ising, en partant des vibrations d'un diapason en quartz dans le vide, F. Holweck et P. Lejay ont conçu un nouvel instrument basé sur le principe de l'oscillation élastique d'une lame. Ce pendule apparaît plus spécialisé, moins sensible aux innombrables sources d'erreurs, et la méthode dynamique adoptée dans les calculs, beaucoup plus certaine.

Malgré tous les perfectionnements apportés à de courts intervalles au pendule Holweck-Lejay par les auteurs eux-mêmes, d'après les expériences réalisées ⁵⁾, l'instrument et l'équation différentielle

Les astérisques sont des renvois à la liste de littérature.

du mouvement pendulaire ne sont pas encore dépourvus d'objections pour les géodésiens.

Le présent travail a pour objet de nouvelles recherches sur les mouvements élastiques d'un tel pendule, en partant des principes généraux de la dynamique et de la théorie de l'élasticité.

LITTÉRATURE

- 1) C. F. BAESCHLIN, *Das astasierte elastische Pendel als Schweremesser*. Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik 1938.
- GUSTAF ISING, *Relative Schweremessungen mit Hilfe astasierter Pendel*. Bulletin Géodésique Nr. 28, 1930.
- R. P. LEJAY, *Instrument transportable pour la mesure rapide de la gravité*. Bulletin Géodésique Nr. 28, 1930.
- 2) G. ISING, *Förslag till en tyngdkraftsmätare*, Skandinav. Geofysikermötet i Göteborg. Förhandlingar, 1918.
- 3) C. F. BAESCHLIN (loc. cit.).
- 4) J. HAAG, *Sur le pendule de gravité*. C. R. 193, 1931.
- 5) R. GOUDEY, *Mesures de gravité faites au moyen de l'appareil Holweck-Lejay Nr. 2*. C. R. 196, 1933.
- R. GOUDEY, *Mesures de l'intensité de la pesanteur faites en 1933, avec le gravimètre Holweck-Lejay Nr. 2*. C. R. 200, 1935.
- R. GOUDEY, *Mesures de l'intensité de la pesanteur en France pendant les années 1936 et 1937*. C. R. 204, 1937.
- F. HOLWECK, *Nouveau modèle de pendule Holweck-Lejay. Valeur de la gravité en quelques points de la France continentale et en Corse*. C. R. 193, 1931.
- F. HOLWECK, *Perfectionnement au pendule élastique. Liaison gravimétrique récente entre la station de référence du réseau français et celle des pays voisins*. C. R. 200, 1935.
- F. HOLWECK, *Description du nouveau gravimètre Holweck-Lejay. Résultats obtenus*. Bulletin Géodésique Nr. 46, 1935.
- F. HOLWECK et P. LEJAY, *Un instrument transportable pour la mesure rapide de la gravité*. C. R. 190, 1930.
- F. HOLWECK et P. LEJAY, *Perfectionnement à l'instrument transportable pour la mesure rapide de la gravité*. C. R. 192, 1931.
- F. HOLWECK, et P. LEJAY, *Contributions à la compensation du réseau gravimétrique européen*. C. R. 196, 1935.
- P. LEJAY, *Instrument transportable pour la mesure rapide de la gravité*. Bulletin Géodésique Nr. 28, 1930.
- P. LEJAY, *Etablissement de la carte gravimétrique du Nord de la France*. C. R. 196, 1935.
- P. LEJAY, *Observations de l'intensité de la pesanteur aux Philippines en Malaisie et aux Indes Néerlandaises*. C. R. 200, 1935.
- P. LEJAY, *Interprétations des observations de l'intensité de la pesanteur effectuées aux Philippines, en Malaisie et aux Indes Néerlandaises*. C. R. 200, 1935.

P. LEJAY, *Nouvelle liaison gravimétrique de stations de référence européennes ; établissement d'une base à l'observatoire du Pic du Midi*, C. R. 201, 1935.

P. LEJAY, *Nouvelles déterminations de la gravité au Tonkin, au Laos et en Annam* C. R. 202, 1936.

P. LEJAY, *Carte gravimétrique de l'Indochine*, C. R. 202, 1936.

P. LEJAY, *Nouvelles déterminations de l'intensité de la pesanteur en France*, C. R. 203, 1936.

P. LEJAY, *Nouvelles déterminations de la gravité en Europe et dans les Etats du Levant*, C. R. 205, 1937.

P. LEJAY, *Mesures de la gravité en Normandie et en Bretagne*, C. R. 205, 1937.

P. LEJAY, *Carte gravimétrique des Philippines*, C. R. 1938.

P. LEJAY, *Mesures de gravité aux Iles Philippines*, C. R. 207, 1938.

P. LEJAY et COSTES, *Sur l'emploi du gravimètre à grande distance de la station de référence ; application à l'établissement de bases de gravité en Indochine*, C. R. 196, 1935.

P. LEJAY et LOU JOU YU, *Caractères généraux de l'intensité de la pesanteur dans le Nord-Est de la Chine*, C. R. 198, 1934.

P. LEJAY et GOUDEY, *Mesure de la gravité faite au moyen de l'appareil Holmeck-Lejay*, C. R. 194, 1932.

P. LEJAY et LOU JOU YU, *Observations d'intensité de la pesanteur dans le Nord-Est de la Chine*, C. R. 198, 1934.

P. LEJAY et TSANG HUNG-CHI, *Observations de l'intensité de la pesanteur au centre de la Chine*, C. R. 200, 1935.

P. LEJAY et TSANG HUNG-CHI, *Interprétations de l'intensité de la pesanteur effectuées au centre de la Chine*, C. R. 200, 1935.

P. LEJAY et TSANG HUNG-CHI, *Carte gravimétrique du Sud-Ouest de la Chine*, C. R. 201, 1935.

LAGRULA, J. *Isostasie et le Pendule Holmeck-Lejay*. Journal de Physique et le Radium, 1934.

LAGRULA, J. *Sur l'intensité de la pesanteur en Algérie, dans le Midi de la France et dans l'île de Majorque*, C. R. 201, 1935.

LAGRULA, J. *Mesures de l'intensité de la pesanteur effectuées en Afrique du Nord, durant les années 1936 et 1937*, C. R. 204, 1937.

NÖRLUND, N. E. *Observations de l'intensité de la pesanteur avec le nouveau modèle de pendule Holmeck-Lejay*. Mémoires de l'institut Géodésique de Danemark.

NÖRLUND, N. E. *Untersuchungen über die Genauigkeit relativer Schwere-messungen mit dem Holmeck-Lejay Pendel*: (Verhandlungen der siebenten Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission).

Leer - Vide - Empty

LE PENDULE ELASTIQUE ASTATIQUE

Equation différentielle de l'oscillation et détermination de la durée de l'oscillation

L'instrument se compose d'une lame métallique mince encastrée à une extrémité (O), et portant fixé, à son autre extrémité un poids: le pendule (Fig. 1).¹⁾ A l'inverse du pendule physique, le corps pendulaire est situé en haut. Dévié de sa positions d'équilibre, le pendule oscille sous l'action de son poids propre, sous l'action élastique de la lame et celle des forces d'inertie. La lame exerce sur la masse du corps pendulaire en A (x_a, y_a) une certaine force dont le composante x sera désignée par X et la composante y par Y ; en outre, un moment \mathcal{M} .

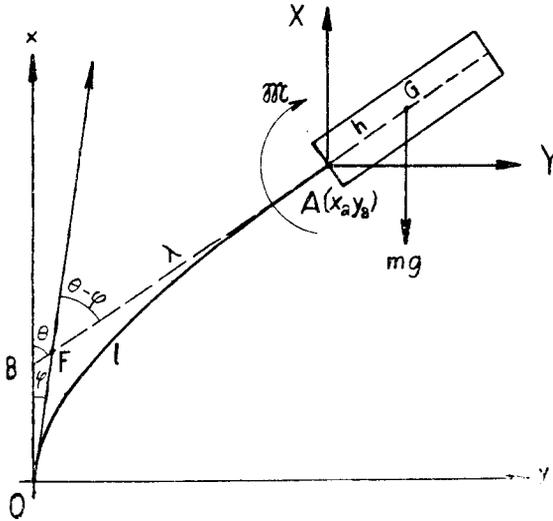


Fig. 1

¹⁾ Comme on ne peut pas pratiquement réaliser un encastrement idéal de façon à ce que, pour le cas du repos, l'axe de la lame coïncide avec l'axe Ox , nous introduisons l'angle φ qui représente l'inclinaison sur la verticale de l'encastrement de la lame en O.

Le mouvement du corps pendulaire peut être considéré comme résultant d'une translation et d'une rotation autour d'un point arbitraire du corps. Choisissons le centre de gravité G pour ce point.

Les forces extérieures sont X, Y et le moment \mathfrak{M} appliqués en A, et la pesanteur mg passant par G (x_g, y_g).

$$\text{Les forces d'inertie sont: } -m \frac{d^2 x_g}{dt^2} \quad \text{et} \quad -m \frac{d^2 y_g}{dt^2}$$

où m représente la masse du corps pendulaire.

Le moment des forces d'inertie relatif au point G, a pour valeur: $-I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ où I_G représente le moment d'inertie de la masse du corps pendulaire par rapport à l'axe passant par G et perpendiculaire au plan d'oscillation (x, y).

En appliquant le théorème du mouvement du centre de gravité, nous obtenons:

$$1) \quad X - mg - m \frac{d^2 x_g}{dt^2} = 0$$

$$2) \quad Y - m \frac{d^2 y_g}{dt^2} = 0$$

D'après le théorème des moments appliqué au centre de gravité (G), nous avons:

$$3) \quad -I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mathfrak{M} + Xh \sin \theta - Yh \cos \theta = 0$$

où h représente la longueur AG.

Par l'élimination de X et Y et tenant compte des équations 1) et 2), l'expression 3) se transforme comme suit.

Multiplions les équations 1) et 2) respectivement par $h \sin \theta$ et $-h \cos \theta$; nous obtenons:

$$1') \quad Xh \sin \theta - mgh \sin \theta - mh \sin \theta \frac{d^2 x_g}{dt^2} = 0$$

$$2') \quad - Yh\cos\theta + mh\cos\theta \frac{d^2 y_g}{dt^2} = 0$$

et en ajoutant membre à membre:

$$4) \quad Xh\sin\theta - Yh\cos\theta = mh \left(\sin\theta \frac{d^2 x_g}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2 y_g}{dt^2} \right) + mgh\sin\theta$$

A cause de l'équation 3), il vient:

$$3') \quad - I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathfrak{M} + mh \left(\sin\theta \frac{d^2 x_g}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2 y_g}{dt^2} \right) + mgh\sin\theta = 0$$

ou

$$3'') \quad I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} - \mathfrak{M} - mh \left(\sin\theta \frac{d^2 x_g}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2 y_g}{dt^2} \right) - mgh\sin\theta = 0$$

Tenant compte des formules:

$$5) \quad \begin{aligned} x_g &= x_a + h\cos\theta \\ y_g &= y_a + h\sin\theta \end{aligned}$$

qui résultent de la Fig. 1, nous avons:

$$5') \quad \begin{aligned} \frac{dx_g}{dt} &= \frac{dx_a}{dt} - h\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy_g}{dt} &= \frac{dy_a}{dt} + h\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

ou

$$5'') \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x_g}{dt^2} &= \frac{d^2 x_a}{dt^2} - h\cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - h\sin\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_g}{dt^2} &= \frac{d^2 y_a}{dt^2} - h\sin\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + h\cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

L'équation 3") devient compte tenu de 5"):

$$6) \quad I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} - \mathfrak{M} - mh \left[\sin\theta \frac{d^2x_a}{dt^2} - h\sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - h\sin^2\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \right. \\ \left. \cos\theta \frac{d^2y_a}{dt^2} + h \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - h\cos^2\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] - \\ mgh \sin\theta = 0$$

ou

$$6') \quad I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} - \mathfrak{M} - mh \left(\sin\theta \frac{d^2x_a}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2y_a}{dt^2} - h \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) - mgh \sin\theta = 0$$

ou encore:

$$6'') \quad (I_G + mh^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} - mh \left(\sin\theta \frac{d^2x_a}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2y_a}{dt^2} \right) - \\ mgh \sin\theta - \mathfrak{M} = 0$$

Mais:

$$6''') \quad I_G + mh^2 = I_A = \text{moment d'inertie par rapport à A.}$$

L'équation 6'') devient finalement:

$$7) \quad I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} - mh \left(\sin\theta \frac{d^2x_a}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2y_a}{dt^2} \right) - mgh \sin\theta - \mathfrak{M} = 0$$

La ligne élastique

Une condition essentielle que doit remplir un pendule est que ses oscillations soient planes. De plus, les dimensions de la lame et l'amplitude des oscillations doivent assurer une marge suffisante à la limite d'élasticité. La marge doit être telle que l'on puisse soumettre la lame à une infinité d'efforts alternés sans en provoquer la rupture.

Dans les calculs qui suivent, nous négligeons la masse de la lame par rapport à celle du corps pendulaire.

Nous considérons un point quelconque P de la lame (Fig. 2) de coordonnées x et y . On sait d'après la théorie des lignes élastiques, que

$$8) \quad EI_S \frac{1}{\rho} = M$$

où :

E = module d'élasticité de la matière constituant la lame.

I_S = moment d'inertie de la section transversale de la lame par rapport à l'axe neutre, que nous supposons être constant pour toute la longueur de la lame.

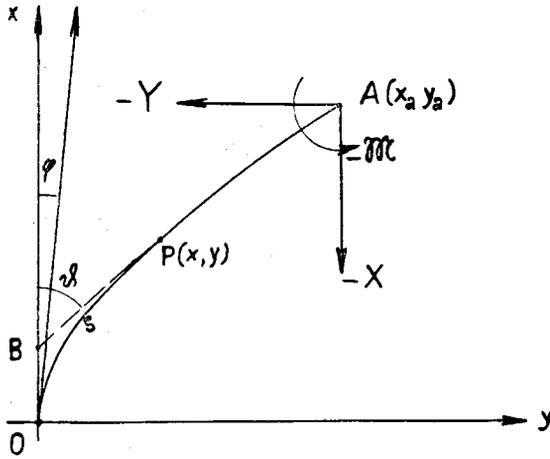


Fig. 2

ρ = rayon de courbure de la ligne élastique au point P (x, y).

M = somme des moments de toutes les forces extérieures agissant sur la partie PA de la lame.

Comme les forces agissant en A sont: $-X$, $-Y$ et le moment $-M$, l'équation 8) devient:

$$9) \quad \frac{EI_S}{\rho} = -M - Y(x - x_a) + X(y - y_a)$$

1°) A l'aide des équations 1), 2), 3), 5) et 9) et des conditions d'encastrement de la lame, nous pouvons éliminer les inconnues X , Y , M , x_a et y_a . Le résultat de cette élimination est une équation différentielle de la forme:

$$10) \quad \frac{d^4\theta}{dt^4} + V \frac{d^2\theta}{dt^2} + W\theta = 0$$

où V et W sont des constantes quand on néglige les puissances de θ supérieures à la première.

Nous renonçons à l'intégration de cette équation différentielle.

Cette intégration donne deux oscillations sinusoïdales superposées. Une de ces oscillations a une fréquence beaucoup plus élevée que l'autre. L'oscillation rapide s'amortit très vite, à cause des frottements intérieurs du métal, en sorte que le mouvement du pendule peut, après un certain temps, être considéré comme une seule oscillation lente.

L'étude du mouvement des corps élastiques se trouve encore actuellement, malgré les travaux des plus grands géomètres et notabilités scientifiques, dans un stade relativement peu avancé.

Très souvent le désir de conserver à un problème toute sa généralité, conduit hors du domaine connu des sciences mathématiques. On introduit alors des hypothèses restrictives préjudiciables au caractère de généralité des problèmes, et qui éloignent parfois du cadre réel.

Revenons, par exemple à notre cas et reprenons l'équation (7).

$$11) \quad I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} - mh \left(\sin\theta \frac{d^2x_a}{dt^2} - \cos\theta \frac{d^2y_a}{dt^2} \right) - mgh\sin\theta - \mathfrak{M} = 0$$

A la limite, quand la longueur de la lame tend vers zéro, cette équation devient celle employée par P. Lejay:

$$12) \quad I_A \frac{d^2\theta}{dt^2} - mgh\sin\theta - \mathfrak{M} = 0$$

Une analyse de l'équation 12) montre qu'elle est valable seulement dans le cas où le point A (Fig. 1) est fixe et confondu avec O, ce qui est incompatible avec l'existence d'une lame élastique dont la longueur est différente de zéro. C'est pour cela que l'approximation de P. Lejay nous paraît exagérée surtout pour la précision d'un milligal, qui doit caractériser le pendule.

A notre point de vue, confirmé par les résultats que fournit sur le terrain le pendule gravimétrique, il est évidemment nécessaire pour établir l'équation différentielle de l'oscillation lente (la seule qui nous intéresse), d'exprimer X, Y et M en fonction de θ et de

les introduire dans 5). Les seules équations qui entrent donc en ligne de compte sont 1), 2), et 9) insuffisantes en nombre.

Pour obtenir de nouvelles relations, nous admettrons l'existence d'un centre de flexion. Cette propriété caractérise en quelque sorte le mouvement du pendule élastique. Elle va nous donner des équations indépendantes de celles déjà écrites.

Lorsque l'oscillation rapide est amortie, l'intersection F (Fig. 1) des tangentes aux points d'encastrement est un point fixe, appelé centre de flexion.

Étant donné l'utilité de ce point dans la technique de l'horlogerie pour les pendules à suspension élastique, tous les auteurs lui ont consacré beaucoup d'attention¹⁾. L'existence de ce centre a été démontrée en toute rigueur, jusqu'aux infiniment petits du 2-ème ordre compris. Les calculs qui suivent se basent sur cette hypothèse. Les résultats atteints sont donc certainement exacts y compris les infiniment petits du 2-ème ordre. Ce sera le cas, en particulier, pour la formule finale (91^{bis}).

Comme nous l'avons dit ci-dessus, nous arriverons à exprimer X, Y et M en fonction de θ et à remplacer ces valeurs dans 5).

Calcul de X

Tenant compte de la Figure 1, nous avons:

$$13) \quad F A = \lambda = \text{constante pendant le mouvement.}$$

$$14) \quad O F = l - \lambda = \text{constante pendant le mouvement.}$$

(l = longueur de la lame de O à A)

¹⁾ Voir: *M. Fr. Keelhoff*, La suspension à ressort, Journal Suisse d'Horlogerie 1905, 1906.

Le Rolland, Thèse de Doctorat 1922.

Le Rolland, Sur les règles qui doivent conditionner le choix des dimensions de la lame de suspension d'un régulateur d'horloge. Annales Françaises de chronométrie 1955, page 155.

J. Haag, Suspension élastique des pendules, Journal de mathématiques pures et appliquées, Tome 14 fasc. 2, 1955.

on obtient facilement:

$$15) \quad \begin{aligned} x_g &= (l - \lambda) \cos \varphi + (h + \lambda) \cos \theta \\ y_g &= (l - \lambda) \sin \varphi + (h + \lambda) \sin \theta \end{aligned}$$

Le première équation 15) nous donne:

$$16) \quad \frac{dx_g}{dt} = - (h + \lambda) \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$17) \quad \frac{d^2x_g}{dt^2} = - (h + \lambda) \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + (h + \lambda) \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

ou tenant compte de 1):

$$18) \quad X = mg - m (h + \lambda) \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - m (h + \lambda) \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Calcul de Y

La deuxième équation 15) nous donne:

$$19) \quad \frac{dy_g}{dt} = + (h + \lambda) \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$20) \quad \frac{d^2y_g}{dt^2} = + (h + \lambda) \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - (h + \lambda) \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

ou tenant compte de 2):

$$21) \quad Y = + m (h + \lambda) \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - m (h + \lambda) \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Il est intéressant de constater que φ ne figure pas dans les équations 18) et 21).

Calcul du moment \mathfrak{M}

Pour déterminer le moment \mathfrak{M} , nous nous servons de l'équation 9), qui au point A (pour $x = x_a$ et $y = y_a$) devient:

$$22) \quad \frac{E I_s}{\rho_A} = - \mathfrak{M}$$

où ρ_A est le rayon de courbure de la ligne élastique au point A. Si nous réussissons à déterminer ρ_A le problème est résolu.

Dans ce but, nous introduisons un nouveau système de coordonnées rectangulaire x' , y' dont l'origine est en A (Fig. 3).

Il en résulte:

$$23) \quad x' = (x - x_a) \cos(\pi + \theta) + (y - y_a) \sin(\pi + \theta)$$

ou simplement

$$24) \quad x' = - (x - x_a) \cos\theta - (y - y_a) \sin\theta$$

x' et y' peuvent être exprimés comme fonctions de la longueur de l'arc $A P = \sigma$. Mais pour $\sigma = 0$ on a:

$$\left(x' \right)_{\sigma=0} = 0 ; \left(y' \right)_{\sigma=0} = 0$$

Nous pouvons dès lors développer x' et y' en une série de Mac-Laurin en fonction des puissances de σ ; nous obtenons:

$$25) \quad x' = \left(x' \right)_{\sigma=0} + \sigma \left(\frac{dx'}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} + \frac{\sigma^2}{2!} \left(\frac{d^2 x'}{d\sigma^2} \right) + \dots$$

La Figure 3 montre que:

$$\frac{dx'}{d\sigma} = \cos \delta$$

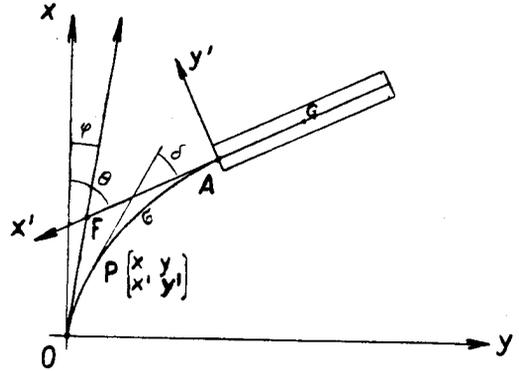


Fig. 3

où:

$$26) \quad \frac{d^2x'}{d\sigma^2} = \frac{d(\cos \delta)}{d\sigma} = -\sin \delta \frac{d\delta}{d\sigma}$$

où δ est l'angle de la tangente en P avec l'axe x' .

Cependant

$$27) \quad \frac{d\delta}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}$$

où ρ est le rayon de courbure en P.

De 26) il résulte:

$$28) \quad \left(\frac{d^2x'}{d\sigma^2}\right) = -\frac{\sin \delta}{\rho}$$

$$\frac{d^3x'}{d\sigma^3} = \frac{-\rho \cos \delta \frac{d\delta}{d\sigma} - \sin \delta \frac{d\rho}{d\sigma}}{\rho^2} = \frac{-\cos \delta - \sin \delta \frac{d\rho}{d\sigma}}{\rho^2}$$

Nous obtenons alors:

$$29) \quad \left(\frac{dx'}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = +1; \quad \left(\frac{d^2x'}{d\sigma^2}\right)_{\sigma=0} = 0; \quad \left(\frac{d^3x'}{d\sigma^3}\right)_{\sigma=0} = -\frac{1}{\rho^2_A}$$

d'où il résulte:

$$30) \quad x' = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho_A^2} + \dots$$

Appliquons cette formule, limitée aux termes du troisième ordre, au point O, qui est caractérisé par: $\sigma = 1$. Elle nous donne.

$$30') \quad x'_0 = l - \frac{l^3}{6\rho_A^2}$$

De la formule 24) pour O (0,0), on a:

$$31) \quad x'_0 = x_a \cos\theta + y_a \sin\theta$$

ou tenant compte de 5) et 15):

$$32) \quad \begin{aligned} x'_0 = & (l - \lambda) \cos \varphi \cos\theta + \lambda \cos^2\theta + \\ & (l - \lambda) \sin \varphi \sin\theta + \lambda \sin^2\theta \end{aligned}$$

$$32') \quad x'_0 = (l - \lambda) \cos (\theta - \varphi) + \lambda$$

Les expressions 30') et 32') nous donnent enfin:

$$33) \quad l - \frac{l^3}{6\rho_A^2} = (l - \lambda) \cos (\theta - \varphi) + \lambda$$

D'où il résulte:

$$34) \quad \frac{1}{\rho_A^2} = \frac{12 (l - \lambda)}{l^3} \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}$$

où:

$$34') \quad \frac{1}{\rho_A} = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{3 (l - \lambda)}{l}} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$$

Substituons dans (22), nous obtenons:

$$35) \quad - \mathfrak{M} = \frac{2 EI_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$$

Le but de nos recherches est atteint.

Des équations 18) et 21), nous tirons:

$$36) \quad \begin{cases} X h \sin \theta = - mh (h + \lambda) \sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \\ \quad mh (h + \lambda) \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgh \sin \theta \\ - Y h \cos \theta = - mh (h + \lambda) \cos^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \\ \quad mh (h + \lambda) \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

En faisant la somme:

$$37) \quad X h \sin \theta - Y h \cos \theta = mgh \sin \theta - mh (h + \lambda) \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Dans cette dernière relation, il est intéressant de remarquer que le terme en $\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ a disparu.

Introduisant les expressions 35) et 37) dans 3), nous obtenons:

$$38) \quad - I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} - 2 \frac{EI_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} + \\ mgh \sin \theta - mh (h + \lambda) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

ou:

$$39) \quad (I_G + mh^2 + mh \lambda) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2 EI_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} - mgh \sin \theta = 0$$

En tenant compte de:

$$40) \quad I_G + mh^2 = I_A$$

l'équation 39) devient:

$$41) \quad (I_A + mh \lambda) \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{EI_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}} \sin \frac{\theta - \varphi}{2} - mgh \sin \theta = 0$$

Intégration de l'équation du mouvement *)

Dans ce qui suit, nous nous occuperons de l'intégration de l'équation 41).

Pour la clarté des calculs posons premièrement:

$$42) \quad l = I_A + m h \lambda **)$$

$$43) \quad C = \frac{EI_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}}$$

$$44) \quad \gamma = mgh$$

*) Voir aussi C. F. Baeschlin et A. I. Corpaciu, Analyse mathématique des oscillations d'un pendule astatique élastique. Bulletin Géodésique No. 58, 1938.

***) On peut facilement observer que l représente le moment d'inertie de la masse du corps pendulaire par rapport à un axe normal au plan d'oscillation passant par un point qui est éloigné de G de:

$$\sqrt{h^2 + \lambda h} = \sqrt{h(h + \lambda)}$$

Ce point est situé entre A et F .

Ainsi l'équation 41) devient:

$$45) \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 C \sin \frac{\theta - \varphi}{2} - \gamma \sin\theta = 0$$

Une première intégration donne:

$$46) \quad I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 8 C \left(\cos \frac{\theta - \varphi}{2} - \cos \frac{\theta_1 - \varphi}{2} \right) - 2 \gamma (\cos\theta - \cos\theta_1)$$

Cette dernière équation ne peut être intégrée sous forme finie. Etant donné le degré de petitesse des amplitudes des oscillations du pendule gravimétrique, nous continuerons les calculs en employant le développement en série et en nous arrêtant aux termes en θ^4 inclus. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la précision des calculs qui suivent n'est pas poussée trop loin, vu que les coefficients du 2-ème et du 3-ème terme de l'équation 41) sont de l'ordre de grandeur 10^6 C. G. S. Si nous néglignons dès le commencement les termes en θ^3 du développement en série de $\sin \frac{\theta - \varphi}{2}$ et $\sin\theta$ de l'équation 41) nous n'aurions pas la garantie que, après les longs calculs qui suivent, les termes du II-ème ordre apparaissent comme certains.

Pour une compréhension facile, nous présenterons les calculs sous une forme détaillée.

Développons donc en série les parenthèses du second membre. Il suit:

$$47) \quad \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{8} (\theta_1^2 - \theta^2) - \frac{1}{384} (\theta_1^4 - \theta^4)$$

$$48) \quad \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta_1}{2} = -\frac{1}{2} (\theta_1 - \theta) + \frac{1}{48} (\theta_1^3 - \theta^3)$$

$$49) \quad \cos\theta - \cos\theta_1 = \frac{1}{2} (\theta_1^2 - \theta^2) - \frac{1}{24} (\theta_1^4 - \theta^4)$$

L'équation 46) devient:

$$50) \quad I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C \cos \frac{\varphi}{2} (\theta_1^2 - \theta^2) - \frac{C}{48} \cos \frac{\varphi}{2} (\theta_1^4 - \theta^4) + \\ \frac{C}{6} \sin \frac{\varphi}{2} (\theta_1^3 - \theta^3) - 4 C \sin \frac{\varphi}{2} (\theta_1 - \theta) - \gamma (\theta_1^2 - \theta^2) + \\ \frac{1}{12} \gamma (\theta_1^4 - \theta^4)$$

Posons:

$$51) \quad U = C \cos \frac{\varphi}{2}$$

nous avons:

$$52) \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{I} \left(\frac{\gamma}{12} - \frac{1}{48} U \right) (\theta_1^4 - \theta^4) + \frac{1}{I} \frac{U}{6} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (\theta_1^3 - \theta^3) + \\ \frac{1}{I} (U - \gamma) (\theta_1^2 - \theta^2) - \frac{1}{I} 4 U \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (\theta_1 - \theta)$$

d'où, en désignant par T la période et par θ_1, θ_2 les valeurs extrêmes de θ :

$$53) \quad T = 2 \sqrt{\frac{I}{U - \gamma}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{R}}$$

où:

$$54) \quad R = \left[\frac{1}{12} N - \frac{1}{48} (N + 1) \right] (\theta_1^4 - \theta^4) +$$

$$\frac{1}{6} (N + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (\theta_1^3 - \theta^3) + (\theta_1^2 - \theta^2) - 4 (N + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (\theta_1 - \theta)$$

et

$$\frac{\gamma}{U - \gamma} = N = \text{constante astatique.}$$

Nous voulons maintenant mesurer l'élongation non par rapport à la verticale, mais à partir de la position de repos du pendule. Cette position d'équilibre est définie par:

$$55) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \theta = \theta_0$$

De l'équation 45) on tire:

$$56) \quad 2 C \sin \frac{\theta_0 - \varphi}{2} = \gamma \sin \theta_0$$

ou:

$$57) \quad U \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = U \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} - \gamma \sin \frac{\theta_0}{2}$$

En développant en série $\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}$ et $\sin \frac{\theta_0}{2}$ jusqu'aux termes du troisième ordre, et tenant compte de 51) nous avons:

$$58) \quad (N + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\theta_0}{2} \left[1 + (3N + 2) \frac{\theta_0^2}{24} \right]$$

qui introduite dans 53) nous conduit à la formule:

$$59) \quad T = 2 \sqrt{\frac{I}{U - \gamma}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{R'}}$$

où

$$59') \quad R' = (\theta_1^2 - \theta^2) - 2\theta_0 \left[1 + (3N + 2) \frac{\theta_0^2}{24} \right] (\theta_1 - \theta) + \frac{\theta_0}{12} (\theta_1^3 - \theta^3) + \frac{3N - 1}{48} (\theta_1^4 - \theta^4)$$

Effectuons la transformation:

$$60) \quad \theta = \theta_0 + x$$

où x est l'élongation mesurée à partir de la position d'équilibre.

Nous avons:

$$61) \quad \begin{array}{l} d\theta = dx \\ \text{pour: } \theta = \theta_1 \quad ; \quad x_1 = \theta_1 - \theta_0 \\ \quad \quad \theta = \theta_2 \quad ; \quad x_2 = \theta_2 - \theta_0 \end{array}$$

Nous garderons jusqu'à la fin cette nouvelle variable x . C'est ainsi que l'expression sous le radical de 59) devient:

$$62) \quad F(x) = \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3N\theta_0^2}{8}\right)(x_1^2 - x^2) + \frac{N\theta_0}{4}(x_1^3 - x^3) + \frac{3N-1}{48}(x_1^4 - x^4)$$

ou en divisant par $x_1 - x$.

$$63) \quad \frac{F(x)}{x_1 - x} = G(x) = \frac{3N-1}{48}x^3 + \left(\frac{3N-1}{48}x_1 + \frac{N\theta_0}{4}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3N\theta_0^2}{8} + \frac{N\theta_0 x_1}{4} + \frac{3N-1}{48}x_1^2\right)x + \frac{3N-1}{48}x_1^3 + \frac{N\theta_0 x_1^2}{4} + \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3N\theta_0^2}{8}\right)x_1$$

D'autre part x_2 , qui est la seule racine réelle *) du polynôme $G(x)$, peut s'écrire sous la forme:

$$64) \quad x_2 = -(x_1 + \Delta)$$

*) On peut facilement s'assurer que x_1 et x_2 sont racines du polynôme $F(x)$, comme suit:

Tenant compte de 52) et 61), l'expression 62) devient:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$$

où $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse angulaire du mouvement du pendule.

Comme pour $x = x_1$, et $x = x_2$ le pendule passe par ses positions extrêmes, sa vitesse angulaire devient zéro, c'est-à-dire:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=x_1} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=x_2} = 0$$

ou:

$$F(x_1) = F(x_2) = 0$$

où:

$$65) \quad \Delta = \text{„l'asymétrie“ de notre oscillation.}$$

On obtient pour Δ l'équation suivante, du troisième degré:

$$66) \quad \frac{3N-1}{48} \Delta^3 + \left(\frac{3N-1}{24} x_1 - \frac{N\theta_0}{4} \right) \Delta^2 + \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3N\theta_0^2}{8} + \frac{3N-1}{24} x_1^2 - \frac{N\theta_0 x_1}{4} \right) \Delta - \frac{N\theta_0 x_1^2}{4} = 0$$

d'où en négligeant les termes en Δ^2 et Δ^3 *)

$$67) \quad \Delta = \frac{N\theta_0 x_1^2}{4} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{3N\theta_0^2}{8} - \frac{3N-1}{24} x_1^2 + \frac{N\theta_0 x_1}{4} \right)$$

Ou en nous arrêtant, comme plus haut, seulement aux termes du quatrième ordre,

$$68) \quad \Delta = \frac{N\theta_0 x_1^2}{4}$$

Alors 64) devient :

$$69) \quad x_2 = -x_1 - \frac{N\theta_0 x_1^2}{4}$$

L'équation 63) peut être maintenant envisagée comme ayant la forme :

$$70) \quad G(x) = (x - x_2)(a'x^2 + 2b'x + c')$$

*) L'équation 66) nous montre qu'en considérant θ_0 et x_1 , comme infiniment petits du premier ordre, Δ est du troisième ordre.

Par identification, on obtient pour a' , $2b'$ et c' les valeurs suivantes:

$$70 \text{ a)} \quad a' = \frac{3N-1}{48}$$

$$70 \text{ b)} \quad 2b' = \frac{N\theta_0}{4} - \frac{N^2\theta_0 x_1^2}{64} + \frac{N\theta_0 x_1^2}{192}$$

$$70 \text{ c)} \quad c' = 1 + \frac{\theta_0}{8} + \frac{3N\theta_0^2}{8} + \frac{3N-1}{48} x_1^2 + \frac{N^2\theta_0 x_1^3}{64} \\ + \frac{N\theta_0 x_1^3}{192} - \frac{N^2\theta_0^2 x_1^2}{16}$$

L'intégrale de la formule 59) prend donc la forme:

$$71) \quad J = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(a'x^2+2b'x+c')}}$$

On peut la ramener à l'intégrale elliptique de Legendre:

$$72) \quad J = \frac{1}{\sqrt{a'\alpha\beta}} \int_{-\pi}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

par la transformation:

$$73) \quad -\frac{x_2-x}{x_1-x} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi}$$

où:

$$74) \quad x_2 \leq x \leq x_1$$

$$75) \quad a'\alpha^2 = a'x_1^2 + 2b'x_1 + c' \\ a'\beta^2 = a'x_2^2 + 2b'x_2 + c'$$

et:

$$76) \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a'[(\alpha^2 + \beta^2) - (x_2 - x_1)^2]}{2 a' \alpha \beta} \right]$$

Calculons les valeurs de $\frac{1}{\sqrt{a' \alpha \beta}}$ et ε^2 et remplaçons les dans 72).

En tenant compte de 69), 70 a), 70 b) et 70 c), les expressions 75) deviennent:

$$77) \quad \left\{ \begin{array}{l} a' \alpha^2 = 1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3 N \theta_0^2}{8} + \frac{3 N - 1}{24} x_1^2 - \frac{N \theta_0 x_1}{4} + \\ \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{16} - \frac{N \theta_0 x_1^3}{48} - \frac{N^2 \theta_0^2 x_1^2}{8} \end{array} \right.$$

$$a' \beta^2 = 1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3 N \theta_0^2}{8} + \frac{3 N - 1}{24} x_1^2 + \frac{N \theta_0 x_1}{4} - \frac{N^2 \theta_0^2 x_1^2}{16}$$

d'où:

$$78) \quad \left\{ \begin{array}{l} a' (\alpha^2 + \beta^2) = 2 + \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{3 N \theta_0^2}{4} + \frac{3 N - 1}{12} x_1^2 - \\ \frac{N \theta_0 x_1^3}{48} - \frac{N^2 \theta_0^2 x_1^2}{8} \end{array} \right.$$

D'autre part:

$$79) \quad a' (x_2 - x_1)^2 = \frac{3 N - 1}{48} \left(- 2 x_1 - \frac{N \theta_0 x_1^2}{4} \right)^2$$

ou:

$$80) \quad a' (x_2 - x_1)^2 = \frac{3 N - 1}{12} x_1^2 + \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{16} - \frac{N \theta_0 x_1^3}{48}$$

De 78) et 79) résulte:

$$81) \left\{ \begin{array}{l} a' \left[(\alpha^2 + \beta^2) - (x_2 - x_1)^2 \right] = 2 \left[1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3 N \theta_0^2}{8} - \right. \\ \left. \frac{3 N^2 \theta_0^2 x_1^2}{32} \right] \end{array} \right.$$

Multiplions membre à membre les relations 77), nous obtenons:

$$82) \quad a'^2 \alpha^2 \beta^2 = 1 + \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{3 N \theta_0^2}{4} + \frac{3 N - 1}{12} x_1^2 +$$

$$\frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{16} - \frac{N \theta_0 x_1^3}{48} - \frac{5 N^2 \theta_0^2 x_1^2}{32} - \frac{\theta_0^2 x_1^2}{96} + \frac{\theta_0^4}{64} +$$

$$\frac{3 N \theta_0^4}{32} + \frac{9 N^2 \theta_0^4}{64} + \frac{(3 N - 1)^2 x_1^4}{576}$$

et en extrayant la racine carrée:

$$83) \quad a' \alpha \beta = 1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3 N \theta_0^2}{8} + \frac{3 N - 1}{24} x_1^2 + \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{32} -$$

$$\frac{N \theta_0 x_1^3}{96} - \frac{N^2 \theta_0^2 x_1^2}{8}$$

d'où en élevant à la puissance $-\frac{1}{2}$,

$$84) \quad \frac{1}{\sqrt{a' \alpha \beta}} = 1 - \frac{\theta_0^2}{16} - \frac{3 N \theta_0^2}{16} - \frac{3 N - 1}{48} x_1^2 - \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{64} +$$

$$\frac{N \theta_0 x_1^3}{192} + \frac{3 \theta_0^4}{512} + \frac{27 N^2 \theta_0^4}{512} + \frac{(3 N - 1)^2 x_1^4}{1536} + \frac{9 N \theta_0^4}{256} +$$

$$\frac{25 N^2 \theta_0^2 x_1^2}{256} - \frac{\theta_0^2 x_1^2}{256}$$

Les formules 81) et 83) nous donnent:

$$85) \frac{a' [(\alpha^2 + \beta^2) - (x_2 - x_1)^2]}{2 a \alpha \beta} = \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} + \frac{3 N \theta_0^2}{8} - \frac{3 N^2 \theta_0^2 x_1^2}{32} \right) \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} - \frac{3 N \theta_0^2}{8} - \frac{3 N - 1}{24} x_1^2 - \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{32} + \frac{N \theta_0 x_1^3}{96} + \frac{N^2 \theta_0^2 x_1^2}{8} + \frac{\theta_0^4}{64} + \frac{9 N^2 \theta_0^4}{64} + \frac{(3 N - 1)^2}{576} x_1^4 + \frac{3 N \theta_0^4}{32} + \frac{3 N - 1}{96} \theta_0^2 x_1^2 + \frac{N(3 N - 1)}{52} \theta_0^2 x_1^2 \right)$$

ou:

$$86) \frac{a' [(\alpha^2 + \beta^2) - (x_2 - x_1)^2]}{2 a' \alpha \beta} = 1 - \frac{3 N - 1}{24} x_1^2 - \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{32} + \frac{N \theta_0 x_1^3}{96} + \frac{5 N^2 \theta_0^2 x_1^2}{64} - \frac{\theta_0^2 x_1^2}{192} + \frac{(3 N - 1)^2 x_1^4}{576}$$

Enfin l'équation 76) devient:

$$87) \varepsilon^2 = \frac{3 N - 1}{48} x_1^2 + \frac{N^2 \theta_0 x_1^3}{64} - \frac{N \theta_0 x_1^3}{192} - \frac{5 N^2 \theta_0^2 x_1^2}{128} + \frac{\theta_0^2 x_1^2}{584} - \frac{(3 N - 1)^2 x_1^4}{1152}$$

ou:

$$88) \varepsilon^4 = \frac{(3 N - 1)^2 x_1^4}{2034}$$

En tenant compte de 59), 70) et 71), nous avons:

$$89) T = 2 \sqrt{\frac{I}{U - \gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a' \alpha \beta}} \int_{-\pi}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

ou, avec Legendre:

$$90) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{U-\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a'\alpha\beta}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \varepsilon^4 + \dots \right]$$

En tenant compte des relations 84), 87) et 88), l'équation 90) devient:

$$91) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{U-\gamma}} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{16} - \frac{3N\theta_0^2}{16} - \frac{3N-1}{48} x_1^2 - \frac{N^2\theta_0 x_1^3}{64} + \right. \\ \left. - \frac{N\theta_0 x_1^3}{192} + \frac{3\theta_0^4}{512} + \frac{27N^2\theta_0^4}{512} + \frac{(3N-1)^2 x_1^4}{1536} + \frac{9N\theta_0^4}{256} + \frac{25N^2\theta_0^2 x_1^2}{256} - \right. \\ \left. \frac{\theta_0^2 x_1^2}{256} \right] \cdot \left[1 + \frac{3N-1}{192} x_1^2 + \frac{N^2\theta_0 x_1^3}{256} - \frac{N\theta_0 x_1^3}{768} - \frac{5N^2\theta_0^2 x_1^2}{512} + \right. \\ \left. \frac{\theta_0^2 x_1^2}{1536} - \frac{(3N-1)^2 x_1^4}{4608} + \frac{9(3N-1)^2 x_1^4}{147456} \right]$$

Effectuons les multiplications, nous obtenons après simplifications le résultat suivant:

$$91 \text{ bis}) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{U-\gamma}} \cdot \left[1 - \frac{3N-1}{64} x_1^2 - \frac{3N+1}{16} \theta_0^2 + \right. \\ \left. \frac{19(3N-1)^2}{49152} x_1^4 + \frac{3(5N+1)^2}{512} \theta_0^4 - \frac{N(5N-1)}{256} \theta_0 x_1^3 + \right. \\ \left. \frac{3(29N^2-1)}{1024} \theta_0^2 x_1^2 \right]$$

Comme nous l'avons remarqué en faisant l'hypothèse du centre de flexion, nos résultats ne sont valables qu'aux infiniment petits d'ordre supérieur au second près. Nous obtenons donc en définitive, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second:

$$92) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{U-\gamma}} \left(1 - \frac{3N-1}{64} x_1^2 - \frac{3N+1}{16} \theta_0^2 \right)$$

Dans cette formule 92) se trouve la quantité U , qui est d'après 51)

$$U = C \cos \frac{\varphi}{2}$$

L'angle φ n'est pas une constante de l'instrument, mais une erreur de mise en place qui change d'un cas à l'autre; U n'est donc pas une constante de l'instrument, tandis que C qui ne dépend que de la lame est invariable. Remplaçons donc dans la formule 92) U par C . On a, en développant $\cos \frac{\varphi}{2}$ en série

$$U = C - C \frac{\varphi^2}{2}$$

d'où

$$\sqrt{\frac{I}{U - \gamma}} = \sqrt{\frac{I}{C - \gamma - C \frac{\varphi^2}{2}}} = \sqrt{\frac{I}{(C - \gamma) \left(1 - \frac{C}{C - \gamma} \frac{\varphi^2}{2}\right)}}$$

En développant $\left(1 - \frac{C}{C - \gamma} \frac{\varphi^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ en série on a

$$\sqrt{\frac{I}{U - \gamma}} = \sqrt{\frac{I}{C - \gamma}} \left(1 + \frac{C}{C - \gamma} \frac{\varphi^2}{4}\right)$$

Nous posons

$$93) \quad N' = \frac{C}{C - \gamma}$$

et nous avons

$$\sqrt{\frac{I}{U - \gamma}} = \sqrt{\frac{I}{C - \gamma}} \left(1 + N' \frac{\varphi^2}{4}\right)$$

Il existe une relation simple entre $N = \frac{\gamma}{C - \gamma}$ et $N' = \frac{C}{C - \gamma}$; c'est

$$94) \quad N = N' + 1 \quad ; \quad N' = N - 1$$

La constante N' a un avantage par rapport à N ; C est une constante de l'instrument tandis que γ ne l'est pas parce qu'elle change avec g . N' dépend en première ligne de C , N au contraire de γ . Remplaçons donc N par N' . On a

$$3N - 1 = 3N' + 2 \quad ; \quad 3N + 1 = 3N' + 4$$

Tenant compte de 58) et de 94) on a, en négligeant les termes de troisième ordre

$$\theta_0 = (N + 1) \varphi = N' \varphi$$

d'où

$$\varphi = \frac{\theta_0}{N'} \quad \text{et} \quad \frac{N' \varphi^2}{4} = \frac{\theta_0^2}{4N'}$$

Nous avons donc, en négligeant les termes de quatrième ordre

$$95) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C - \gamma}} \left[1 - \frac{3N' + 2}{64} x_1^2 - \left(\frac{3N' + 4}{16} - \frac{1}{4N'} \right) \theta_0^2 \right]$$

ou avec N

$$95') \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C - \gamma}} \left[1 - \frac{3N - 1}{64} x_1^2 - \left(\frac{3N + 1}{16} - \frac{1}{4(N - 1)} \right) \theta_0^2 \right]$$

On voit par cette dernière équation que la période observée T reste toujours plus petite que la valeur:

$$96) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C - \gamma}}$$

relative à une très petite amplitude et pour une position idéale au début du mouvement ($\varphi = 0$, $\theta_0 = 0$).

La correction de l'amplitude prend la forme:

$$96') \quad C_A = - T_0 \frac{3N - 1}{64} \cdot x_1^2$$

et la correction due à l'inclinaison de la lame en position de repos, est donnée par:

$$96'') \quad C_i = - T_0 \left(\frac{3N + 1}{16} - \frac{1}{4(N - 1)} \right) \theta_0^2$$

En conséquence, l'équation 91) combinée avec 92) nous donne, quand nous négligeons le terme $-\frac{1}{4(N - 1)}$

$$96''') \quad T_0 = T(x_1, \theta_0) \left[1 + \frac{3N - 1}{64} x_1^2 + \frac{3N + 1}{16} \theta_0^2 \right]$$

O b s e r v a t i o n s :

En vue de la détermination des constantes de l'appareil, demandons-nous quelles sont les oscillations dans le cas où le centre de gravité se trouve sous l'axe de rotation: (poids en bas).

On peut aisément s'assurer que, dans ce cas, les constantes g_0 et K , dont il s'agit, sont des fonctions de I et C ¹⁾ qui contiennent λ ²⁾. A cause des lignes élastiques, qui ne sont pas des courbes symétriques par rapport à l'axe des x , λ apparaît avec de légères variations entre la position normale et inverse du pendule, ce qui provoque des variations de I et C .

Nous recommandons donc l'étalonnage du pendule seulement en position normale, — „poids en haut“³⁾. D'ailleurs nous revien-

1) Voir C. F. Baeschlin (loc. cit.).

2) Voir les citations 42) et 43)

3) D'accord avec C. F. Baeschlin, l'étalonnage par la méthode „poids en bas“ reste valable pour le pendule de G. Ising, où l'équation 16) représente rigoureusement le mouvement.

drons sur ce point en présentant une nouvelle méthode offrant des avantages par rapport à celle en usage qui consiste à déterminer la période en deux stations où les valeurs de g sont connues.

Dans les publications relatives aux recherches expérimentales M. N. E. Nörlund signale pour la première fois des erreurs dans ces constantes pour le pendule à lame élastique „Holweck-Lejay“ quand celles ci sont déterminées par la méthode „poids en bas“. M. Nörlund¹⁾ attribue ces erreurs aux difficultés d'obtenir le temps d'oscillations avec une précision suffisante. Nous sommes d'accord avec ce dernier, mais même en améliorant la méthode d'enregistrement du temps d'oscillation, g_0 et K seraient encore incertains. Précisons: la formule 42) nous donne:

$$97) \quad dI = mh \, d\lambda$$

et 43) avec 51):

$$98) \quad U = \frac{E I_s}{l} \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}}$$

d'où:

$$99) \quad dU = - \frac{U}{2(l-\lambda)} \cdot d\lambda \text{ ou } dC = - \frac{C}{2(l-\lambda)} d\lambda.$$

On voit donc que la variation de I et U est d'autant plus grande que la longueur de la lame est plus petite, donc la tige pendulaire plus longue et plus lourde²⁾.

Sur le travail de déformation de la lame

Nous allons analyser maintenant l'effort dans la lame pour les amplitudes habituelles du pendule. Nous examinerons spécialement la variation de cet effort pour différentes longueurs de la lame.

¹⁾ Voir N. E. Nörlund: Observations de l'intensité de la pesanteur. Mémoires de l'Institut de Géodésie de Danemark, page 115 et 145, Kopenhague 1934.

²⁾ Voir A. Graf, Zur Theorie elastischer Pendel mit besonderer Berücksichtigung des Holweck-Lejay'schen Stabpendels. Zeitschrift für Geophysik, 1934.

Soit une fibre de la lame de section dS , à la distance ζ de la fibre neutre. La courbure de l'axe a la valeur $\frac{d\vartheta}{ds}$; la déformation spécifique est donc $\zeta \frac{d\vartheta}{ds}$ et la force élastique correspondante:

$$100) \quad E \zeta \frac{d\vartheta}{ds} dS$$

Comme il y a proportionnalité entre la force élastique et la déformation, qui croît, pour l'élément ds , depuis zéro jusqu'à $\zeta \frac{d\vartheta}{ds}$ le travail élémentaire correspondant est:

$$101) \quad \frac{1}{2} E \zeta^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right) dS ds$$

d'où en intégrant dans le profil:

$$102) \quad \Delta\tau = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 ds$$

où:

$$103) \quad \mu = E \cdot I_s$$

où I_s désigne le moment d'inertie du profil.

En intégrant le long de l'axe nous obtenons le travail total de déformation de la lame:

$$104) \quad \tau = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 ds$$

Calculons maintenant $\frac{d\vartheta}{ds}$

De 9), où on remplace $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{d\vartheta}{ds}$ nous obtenons:

$$105) \quad EI_s \frac{d\vartheta}{ds} = - \mathfrak{M} - Y (x_a - x) + X (y_a - y)$$

où $d\vartheta$ est la variation de l'angle ϑ , correspondant à un déplacement infiniment petit (ds) du point P (Fig. 2) sur la courbe.

En dérivant l'équation (105) par rapport à s , et tenant compte des expressions:

$$106) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \vartheta \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta$$

nous avons:

$$107) \quad EI_s \frac{d^2\vartheta}{ds^2} = Y \cos \vartheta - X \sin \vartheta$$

Pour l'approximation: $\sin \vartheta = \vartheta$ et $\cos \vartheta = 1$
l'intégrale générale de l'équation 107) est:

$$108) \quad \vartheta = \frac{Y}{X} + C_1 \cos (\omega s) + C_2 \sin (\omega s)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration qui se détermineraient facilement par les conditions d'encastrement, et

$$109) \quad \omega^2 = \frac{X}{EI_s}$$

Le rapport $\frac{d\vartheta}{ds}$ est donc:

$$110) \quad \frac{d\vartheta}{ds} = - C_1 \omega \sin (\omega s) + C_2 \omega \cos (\omega s)$$

où $s = \text{arc OP}$ (voir Fig. 2),
et tenant compte des conditions aux limites:

$$111) \quad \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_{s=l} = -\frac{\mathfrak{M}}{EI_s}; \quad (\vartheta)_{s=0} = 0$$

les constantes C_1 et C_2 prennent les valeurs (en supposant que l'angle d'encastrement φ est nul):

$$112) \quad C_1 = -\frac{Y}{X}$$

$$113) \quad C_2 = \frac{1}{\omega \cos(\omega l)} \left[-\frac{\mathfrak{M}}{EI_s} + \frac{Y}{X} \omega \sin(\omega l) \right]$$

D'autre part, tenant compte de 21), nous avons en première approximation:

$$114) \quad Y = m(\lambda + h) \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Tenant compte de 41) et mettant $\varphi = 0$:

$$114') \quad Y = m(\lambda + h) \left[\frac{mgh\theta - \frac{2EI_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}} \cdot \frac{\theta}{2}}{I_A + m\lambda h} \right]$$

ou:

$$114'') \quad Y = k\theta \quad \text{où } k = \text{une constante.}$$

D'autre part, l'équation 18) donne en première approximation pour X :

$$115) \quad X = k_1 \quad \text{où } k_1 = mg = \text{une constante.}$$

Pour déterminer la valeur du moment \mathfrak{M} , on tient compte de 35), où en faisant:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \text{ et } \lambda = \frac{2^*}{3} \text{ on a:}$$

$$116) \quad - \mathfrak{M} = \frac{EI_s}{l} \theta \text{ ou}$$

$$116') \quad \mathfrak{M} = k_2 \theta \quad k_2 = \text{une constante.}$$

C'est ainsi que 112) et 113) deviennent:

$$117) \quad C_1 = - k_3 \theta$$

$$118) \quad C_2 = \frac{\theta}{\omega l \cos(\omega l)} \left[\frac{1}{l} - k_3 \omega \sin(\omega l) \right]$$

ou:

$$118') \quad C_2 = k_4 \theta$$

En tenant compte des valeurs de C_1 et C_2 , l'équation 110) devient:

$$119) \quad \frac{d\vartheta}{ds} = k_3 \theta \omega \sin(\omega s) + k_4 \omega \theta \cos(\omega s)$$

ou:

$$119') \quad \frac{d\vartheta}{ds} = \theta \omega [k_3 \sin(\omega s) + k_4 \cos(\omega s)]$$

*) Cette valeur pour λ résulte de 34) où on remplace:

$$\varphi = 0, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \text{ et } \frac{1}{\rho_A} = \frac{\theta}{l}$$

ou:

$$120) \quad \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = \theta^2 \omega^2 [k_3^2 \sin^2(\omega s) + k_4^2 \cos^2(\omega s) + 2 k_3 k_4 \sin(\omega s) \cos(\omega s)]$$

Remplaçons dans 104); on aura:

$$121) \quad \tau = \frac{1}{2} \mu \theta^2 \omega^2 \left[k_3^2 \int_0^l \sin^2(\omega s) ds + k_4^2 \int_0^l \cos^2(\omega s) ds + k_3 k_4 \int_0^l \sin(2\omega s) ds \right]$$

Calculons les trois intégrales:

$$122) \quad \int_0^l \sin^2(\omega s) ds = \frac{1}{2} \left[l - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega l) \right]$$

$$123) \quad \int_0^l \cos^2(\omega s) ds = \frac{1}{2} \left[l + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega l) \right]$$

$$124) \quad \int_0^l \sin(2\omega s) ds = \frac{1}{\omega} \sin^2(\omega l)$$

Le travail total devient donc:

$$125) \quad \tau = \frac{1}{2} \mu \theta^2 \omega^2 \left\{ \frac{k_3^2}{2} \left[l - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega l) \right] + \frac{k_4^2}{2} \left[l + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega l) \right] + k_3 k_4 \frac{1}{\omega} \sin^2(\omega l) \right\}$$

On voit que le travail croît avec le carré de l'amplitude. Pour l'étude de la variation du travail en fonction de la longueur de la lame, la formule 125) présente des inconvénients, car la variation de cette longueur entraîne nécessairement une variation du poids du corps pendulaire, donc de ω .

Ainsi, une lame suffisamment longue oscillera lentement si l'on supprime complètement la masse pendulaire. Nous devons donc tout d'abord exprimer le poids du pendule en fonction de la longueur de la lame, tout en considérant connue l'amplitude des oscillations. Nous savons d'après 13') que:

$$126) \quad \omega^2 = \frac{m g}{E l_s}$$

D'autre part, la condition d'équilibre, du pendule pour un θ donné, résulte de l'équation 41) où nous écrivons:

$$127) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \varphi = 0$$

Nous avons alors:

$$128) \quad \frac{2 E I_s}{l} \sqrt{\frac{3(l-\lambda)}{l}} \sin \frac{\theta}{2} = m g h \sin \theta$$

et pour:

$$129) \quad \lambda \simeq \frac{2}{3} l \quad ; \quad \sin \frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2} \quad ; \quad \cos \frac{\theta}{2} \simeq 1$$

l'équation 128) devient:

$$130) \quad \frac{E I_s}{l} = m g h$$

D'où:

$$131) \quad \omega^2 = \frac{m g}{E I_s} = \frac{1}{l h}$$

c'est à dire

$$132) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{l h}}$$

ou encore:

$$133) \quad \omega l = \sqrt{\frac{l}{h}}$$

En remplaçant dans 125) on obtient:

$$134) \quad \tau = \frac{1}{2} \mu \theta^2 \frac{1}{l h} \left[\frac{k_3^2}{2} \left(l - \frac{\sqrt{l h}}{2} \sin 2 \sqrt{\frac{l}{h}} \right) + \frac{k_4^2}{2} \left(l + \frac{\sqrt{l h}}{2} \sin 2 \sqrt{\frac{l}{h}} \right) + k_3 k_4 \sqrt{l h} \sin^2 \sqrt{\frac{l}{h}} \right]$$

Tenant compte que l'expression de k_4 contient la longueur l de la lame au dénominateur, (voir form. 116 et 117) on voit facilement que pour une très courte longueur de la lame, on a un travail τ très grand.

On conclut que dans les lames trop courtes, nous avons de grands efforts et frottements intérieurs, et à cause de cela le danger

¹⁾ Pour une amplitude donnée, le poids du pendule croît en rapport inverse avec la longueur de la lame. Ou en considérant h variable, nous pouvons facilement nous orienter sur le rôle que joue la forme du pendule par égard à son poids.

de dépasser la limite d'élasticité. Une grande partie de l'énergie cinétique et potentielle passe donc en énergie calorifique. Celle-ci n'est pas réversible et sa présence change les propriétés physiques de la lame.

Note 1.

La formule 134) n'est valable que pour les lames courtes. Il faut se garder de l'employer en général. En répétant un raisonnement qu'on a déjà fait, les lames longues imposent un poids pendulaire petit. Par conséquent, le poids de la lame n'est plus négligeable vis-à-vis de celui du pendule et l'équation 108) de la ligne élastique, qui a conduit à 134), subit des transformations radicales.

Note 2.

La question de la perte d'énergie plaide en faveur des lames longues. Elle apparaît comme un point d'interrogation pour certains auteurs. Insistons là-dessus :

On a montré dans ce travail que les manifestations élastiques de la lame se réduisent à deux sortes d'oscillations superposées, dont les rapides disparaissent d'autant plus vite que les frottements intérieurs sont plus grands, le mouvement étant harmonique après cette disparition. Si les frottements intérieurs sont insignifiants, il en résulte que les oscillations rapides persistent, fait qui complique l'interprétation des expériences. Dans le cas limite où l'on a donné à la lame une longueur telle que le poids pendulaire devient superflu, ou dans le cas où le corps pendulaire est lourd, mais d'une forme spéciale *), les frottements sont si petits que les oscillations rapides ne disparaissent que très difficilement et réapparaissent par suite de la sensibilité exagérée, dès que se produisent de petites excitations extérieures, pratiquement inévitables. Par conséquent, dans les lames trop longues, les oscillations lentes sont dérangées par la présence continue des autres oscillations. Nous croyons donc que pour des pendules gravimétriques, les frottements intérieurs de la lame sont même utiles quand ils ne

*) Nous reviendrons sur ce point dans la partie expérimentale du présent travail.

dépassent pas une certaine limite. Comme pour chaque expérience on n'a besoin que d'un nombre restreint d'oscillations, le problème de l'amortissement ne nous préoccupe pas au même degré que dans l'horlogerie.

Après avoir ainsi comparé les pendules à lame longue à ceux à lame courte, nous allons donner des indications sur le danger de déformations permanentes. A ce point de vue, nous devons craindre les lames trop courtes, à cause de l'élévation de température que produit un trop grand frottement intérieur et du danger d'atteindre ou même de dépasser la limite d'élasticité de la matière.

En écartant le pendule de sa position de repos, des forces intérieures naissent dans la lame, qui s'opposent au changement de sa forme. Pour autant que les forces extérieures n'ont pas dépassé une certaine limite, la lame reprend sa forme primitive, même après une infinité de charges. C'est ce qu'on appelle la propriété élastique de la lame. La limite supérieure des forces intérieures, s'appelle la résistance de la lame.

Quand les forces extérieures produisent dans la lame des déformations permanentes, la limite d'élasticité est dépassée. A partir de ce moment la lame ne se comporte plus comme auparavant. Le changement persistant produit dans la configuration mutuelle des molécules, nous a livré un autre pendule, qui doit être à nouveau étalonné et réglé. Pour un pendule lourd à lame très courte, le danger exposé plus haut est évident. Il est très grand pour des efforts alternés et moindre dans les cas statiques de simple pression et traction. Pour une plus grande sûreté, on devrait déterminer ses constantes et le régler après chaque expérience.

II

CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

Pour vérifier notre théorie et pour répondre à certaines questions de caractère pratique, nous complétons le travail par quelques recherches expérimentales. Dans ce but, nous avons construit un pendule gravimétrique élastique (fig. 4), selon description ci-dessous.

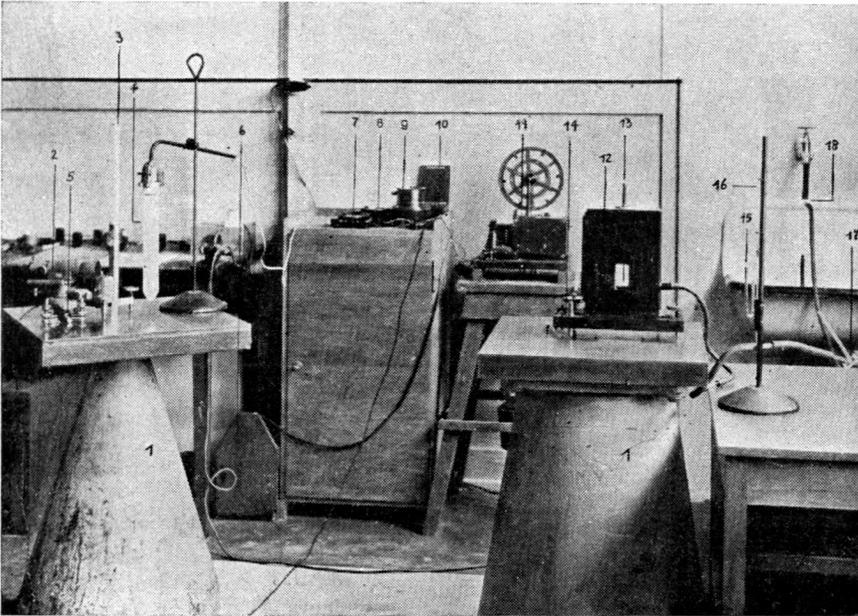


Fig. 4

Ensemble de l'installation

- | | |
|---|---|
| 1. Piliers | 10. Chronomètre |
| 2. Niveau à lunette pour lire les amplitudes | 11. Chronographe |
| 3. Echelle des amplitudes | 12. Boite à vacuum |
| 4. Lampe d'éclairage pour l'échelle | 13. Levier pour le lancement du pendule |
| 5. Contact à bouton | 14. Embase du pendule |
| 6. Batterie électrique pour actionner le chronographe et le chronomètre | 15. Manomètre |
| 7. Voltmètre | 16. Thermomètre |
| 8. Ampèremètre | 17. Robinet à trois voies |
| 9. Relais | 18. Pompe à vacuum |

Description de l'instrument

Le pendule se compose d'une embase métallique lourde (fig. 5) dont l'horizontalité est réglée au moyen de vis micrométriques 3).

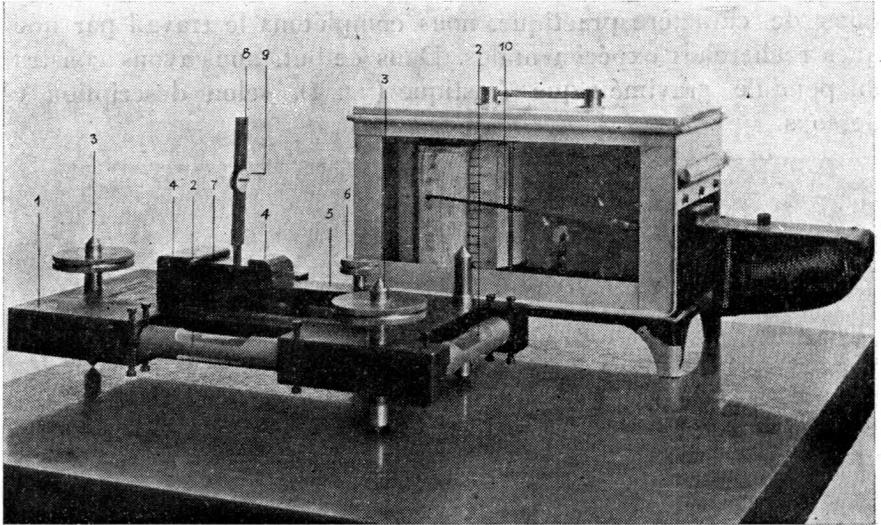


Fig. 5

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. Embase du pendule | 6. Vis du levier |
| 2. Niveaux | 7. Mandrin d'encastrement de la lame |
| 3. Vis micrométriques | 8. Pendule |
| 4. Corps pour l'installation du mandrin d'encastrement de la lame | 9. Miroirs |
| 5. Levier pour la fixation du mandrin d'encastrement de la lame | 10. Thermographe |

Deux niveaux de grande sensibilité 2) assurent cette horizontalité. Un corps solide métallique 4), situé au milieu de l'embase, sert à installer dans celle-ci le mandrin d'encastrement de la lame 7). La fixation du mandrin, facilement démontable, est assurée au moyen d'un levier 5) par l'intermédiaire de la vis 6). Le pendule est enfermé dans une boîte construite spécialement pour faire les expériences dans un vide de 14 à 25 mm.

Le mandrin d'encastrement de la lame 7) est composé de deux blocs métalliques lourds, rigoureusement égaux, traversés au milieu par une forte vis centrale. Les surfaces de ces blocs sont rigoureusement planes afin d'assurer un contact aussi intime que possible avec les surfaces de l'encastrement de la lame. La lame utilisée pour nos expériences est en acier de 10 mm de largeur et de 0,1 mm d'épaisseur. Celle-ci traverse le mandrin d'encastrement et le corps pendulaire dans toute la hauteur.

Le corps pendulaire est formé de deux tiges métalliques rigoureusement égales. Pour des raisons de symétrie, nous avons choisi pour ces tiges la forme prismatique droite. La partie supérieure de la lame fait corps avec le pendule par rivetage.

Deux miroirs ¹⁾ (9, fig. 5) collés sur les faces latérales du corps pendulaire servent à mesurer les amplitudes par la méthode ²⁾ appliquée aussi au pendule Sterneck.

Le temps d'oscillation est enregistré par une aiguille sur la bande d'un chronographe R. Fuess (11, fig. 4). Cette aiguille est actionnée par le contact électrique que nous établissons au moment où l'échelle des amplitudes (2, fig. 6) atteint les points culminants. Une deuxième aiguille, placée à côté de la première, perce la même bande à chaque seconde marquée par un chronomètre à contact Nardin.

La boîte contenant le pendule avec toute son installation est munie de trois fenêtres. Une de celles-ci permet la projection des rayons lumineux sur le miroir pour la mensuration des amplitudes, et les deux autres fenêtres, placées sur les faces perpendiculaires, servent à regarder le pendule.

Dans sa partie supérieure, la boîte présente un dispositif (13, fig. 4) pour lancer le pendule.

La lunette (1, fig. 6) employée pour la lecture des amplitudes est celle d'un niveau à lunette Wild No. 6850, grossissement 24 x.

¹⁾ On n'utilise en réalité qu'un miroir, l'autre sert de contrepoids.

²⁾ Description de la méthode:

Une échelle millimétrique est placée approximativement à 1,245 m du pendule et à peu près dans le plan d'oscillation de celui-ci. L'échelle est reflétée dans le miroir et, par éclairage adéquat au moyen d'une source lumineuse, observée par une lunette placée convenablement. Quand le pendule oscille, l'échelle paraît monter et descendre verticalement dans le champ de la lunette. Les divisions maxima et minima, lues sur l'échelle avec le fil réticulaire horizontal de l'oculaire de la lunette, nous donnent les amplitudes des oscillations.

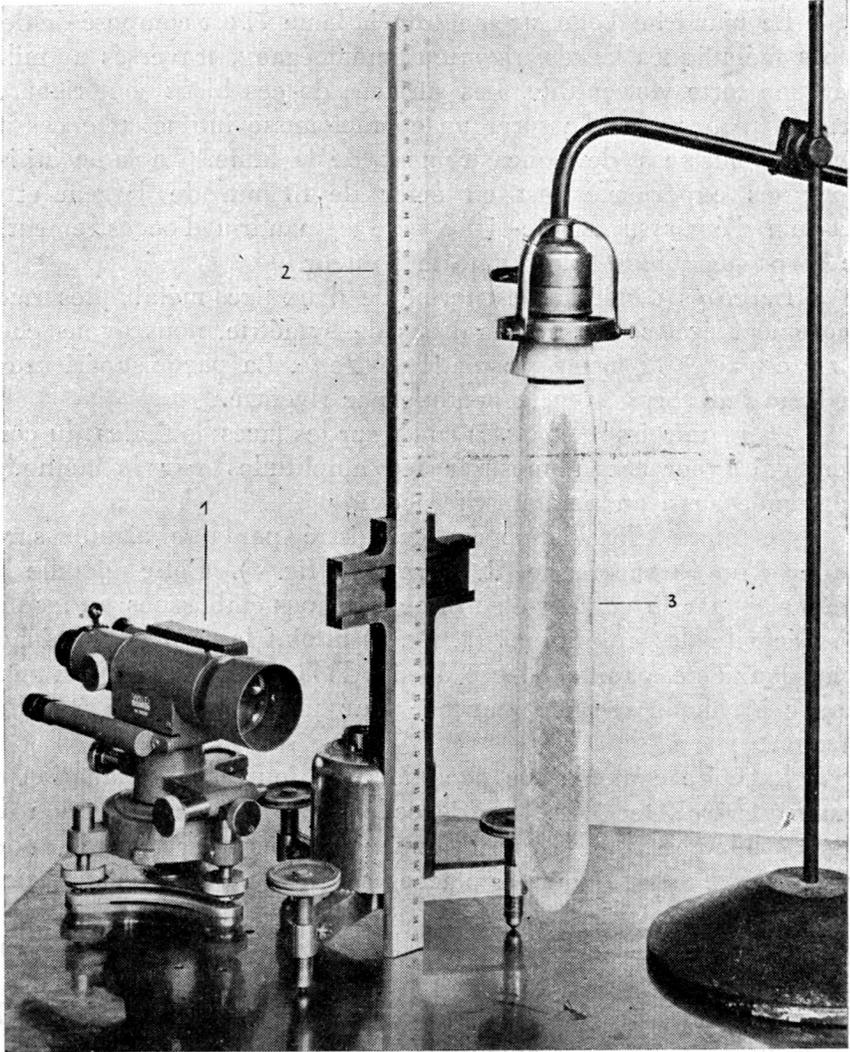


Fig. 6

Installation pour la lecture des amplitudes

1. Niveau à lunette
2. Echelle des amplitudes
3. Lampe pour éclairer l'échelle

Toute l'installation a été fixée sur deux piliers de grande stabilité (1, fig. 4) dans la chambre de l'autographe de la fabrique

des instruments de géodésie H. Wild. Heerbrugg (Suisse), où nous avons effectué les recherches expérimentales.

Les expériences ont été faites pendant la nuit et les jours fériés lorsque la fabrique entière était au repos.

Observations:

Le matériel expérimental se compose de dix pendules, selon tableau ci-dessous:

Le matériel expérimental.

No.	Les dimensions du pendule mm.	La longueur de la lame. mm.	Le poids du pendule gr.
1	14,94 × 10 × 33,10	19,5	42,420
2	60,78 × 10 × 8,10	10,6	42,218
3	119,96 × 10 × 4,10	5,2	42,233
4	235,10 × 10 × 2,10	3,2	42,118
5	119,86 × 10 × 4,10	5,7	42,233
6	109,74 × 10 × 4,10	6,7	38,741
7	100,12 × 10 × 4,10	7,9	35,601
8	59,78 × 10 × 4,10	19,0	21,673
9	84,99 × 10 × 4,10	10,9	30,375
10	29,92 × 10 × 4,10	40,5	11,459

Les quatre premiers pendules, exécutés avec des dimensions différentes, ont approximativement le même poids et permettent ainsi de se rendre compte de l'influence du couple dans la flexion de la lame. La fig. 7 fait ressortir la liaison entre la longueur du pendule et celle de la lame. Du reste, cette liaison peut aussi facilement être déduite des formules 35) et 128), d'où il résulte:

135)

$$C = m g h \sin\theta$$

ou tenant compte de 130):

$$136) \quad C = \frac{E I_s}{l} \sin\theta$$

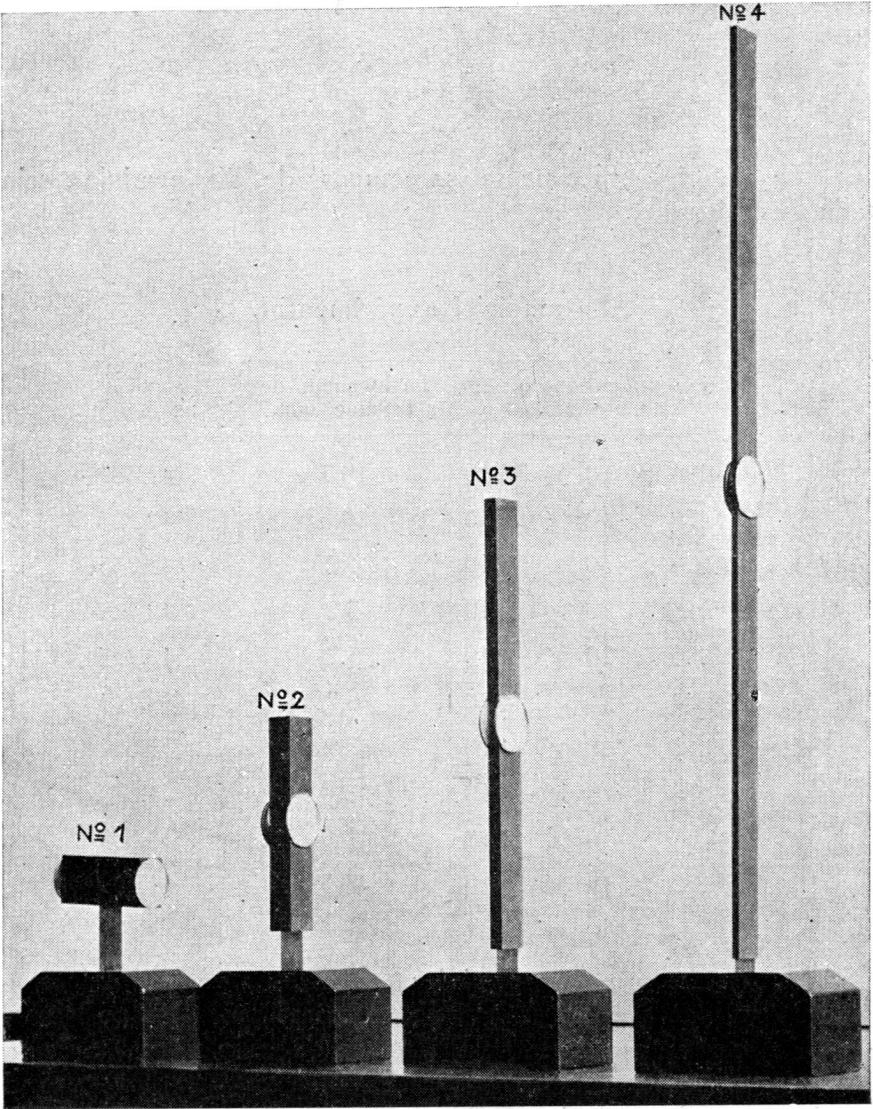


Fig. 7

c'est-à-dire que la grandeur du couple dans la position d'équilibre est directement proportionnelle à la longueur du pendule et inver-

sement proportionnelle à celle de la lame, pour les valeurs constantes de θ_1 ou θ_2 .

Les oscillations de ces quatre pendules présentent des caractéristiques différentes :

Le pendule No. 1, par exemple, est continuellement gêné dans ses mouvements par deux oscillations parasites (rapides), l'une longitudinale le long de la lame, l'autre transversale, cherchant à arracher le corps pendulaire de son plan d'oscillation. Ces deux oscillations parasites prédominent même sur l'oscillation proprement dite, c'est-à-dire que le pendule cesse d'osciller tout en gardant une sorte de tremblement qui empêche souvent complètement la lecture sur l'échelle des amplitudes. Dans la mesure où il a fallu raccourcir la lame par suite de l'augmentation du couple (cas des pendules No. 2, No. 3 et No. 4), les oscillations parasites tendent à disparaître. C'est ainsi que, par exemple, les pendules No. 3 et No. 4 sont complètement dépourvus d'oscillations secondaires, même à partir de leur lancement.

La persistance des oscillations parasites qui se manifeste aussi énergiquement au pendule No. 10 est donc explicable.

Le pendule No. 8 a une lame de grandeur à peu près égale à celle du No. 1. Contrairement à ce dernier, l'oscillation parasite du No. 8 est presque imperceptible et disparaît après les premières deux ou trois oscillations. Il en résulte que les oscillations parasites sont certainement *favorisées* par une grande masse concentrée dans un petit corps pendulaire, tandis qu'un pendule en quelque sorte léger, mais de forme plutôt allongée, empêche les tremblements de la lame.

Rôle de l'asymétrie du corps pendulaire.

Nous appelons asymétrie le mode irrégulier de répartition de la masse pendulaire par rapport au plan vertical de la lame et à celui de profil ¹⁾. Du point de vue de l'exécution technique, il est impossible de réaliser un pendule parfaitement dimensionné sur tous ses côtés, ce qui explique de légers déplacements du centre de gravité matériel par rapport à son centre géométrique.

¹⁾ Dans notre cas, on comprend par plan de profil celui qui contient la ligne élastique. Il se confond d'ailleurs avec le plan d'oscillation du pendule.

Nous avons examiné la question de l'asymétrie avec le pendule No. 5 de la façon suivante:

Après avoir observé son temps d'oscillation, son amortissement et sa stabilité, nous avons fait subir au corps pendulaire quelques déformations tout en conservant son poids et en ayant soin de ne pas altérer l'encastrement et la lame. Puis, le pendule a été remis dans les mêmes conditions d'oscillation. Seule sa position de repos paraît déplacée. Lorsque la correction de rigueur a été effectuée par les vis micrométriques, de sorte que son centre de gravité tombe de nouveau sur l'intersection du plan vertical de la lame avec celui d'oscillation, le pendule est de nouveau comme avant. Par conséquent, les asymétries ne donneront pas lieu à de grandes préoccupations tant qu'elles ne dépasseront pas les limites restreintes d'une exécution très soignée.

Sensibilité du pendule

L'instrument est destiné à mesurer la variation de la gravitation en partant d'un point où l'intensité de la pesanteur est connue. Comme cette variation est très limitée, même entre des points de l'équateur et les pôles, l'instrument destiné à la saisir doit être caractérisé par une grande sensibilité.

Revenant à notre pendule, il peut être amené à répondre à cette condition. Suivant que la lame est trop longue ou trop courte, le même corps pendulaire peut devenir trop lourd ou trop léger. Dans le premier cas, le pendule oscille et reste soit d'un côté, soit de l'autre de la position moyenne. Dans le second cas, les forces intérieures trop grandes de la lame prédominent, imposant au pendule une forte tendance de revenir dans sa position verticale d'équilibre. Un cas comme l'autre est inadéquat. Le premier, étant donné que les petites variations de l'intensité de la pesanteur n'entrent pas en ligne de compte quand la différence entre les forces intérieures et extérieures est trop grande. Le second, car le pendule n'oscille pas; cependant, il existe une longueur intermédiaire où la réaction de la lame fait équilibre aux forces extérieures. Dans ce cas le pendule n'oscille plus et conserve un équilibre indifférent au voisinage de la position verticale. Un très petit raccourcissement de la lame au-dessus de cette limite et le pendule devient gravimétrique. Il commence à osciller très lentement et ne résiste plus à aucune tendance extérieure qui chercherait à

faire continuer ou arrêter son mouvement. Malheureusement, sa grande sensibilité est aussi la cause d'innombrables sources d'erreurs. Les mouvements continus de l'air, les légères variations de la température, l'instabilité du pilier sur lequel il est placé, toutes sortes de trépidations du sol provoquées par des véhicules même éloignés, sont autant de facteurs qui le gênent visiblement. Quand on sait que le pendule ne trouve pas la tranquillité suffisante de l'air, pour gagner sa position d'équilibre, dans un vide de 70 à 80 mm, on se rend compte de son degré de sensibilité.

Une nouvelle méthode d'étalonnage du pendule gravimétrique élastique.

D'accord avec l'équation 92), les expériences montrent que le pendule lancé avec un grand angle oscille en agrandissant progressivement sa période à mesure que les amplitudes diminuent. Les oscillations finissent par devenir isochrones. Cette idée nous permettra de développer une nouvelle méthode de la détermination des constantes de l'instrument.

Dans ce but, nous avons exécuté dix séries d'expériences présentées dans les tableaux ci-dessous. Ils contiennent l'enregistrement du temps et les élongations maxima pour chaque oscillation. En raison de l'amortissement relativement grand de notre pendule, dû au mécanisme d'encastrement impropre pour un instrument définitif destiné aux expériences sur le terrain, chaque série a consisté en 5, 6 ou 7 oscillations seulement. Ceci n'empêche pas notre méthode de rester valable lorsque le nombre d'oscillations est plus élevé ou les amplitudes plus grandes. Il faut seulement faire attention que la grandeur des amplitudes n'engage pas les termes d'ordre plus élevé que ceux de l'équation 92).

La période T_0 pour les petites oscillations a été calculée avec la formule suivante, déduite de 96^m):

$$137) \quad T_0 = T \left(1 + \frac{3N - 1}{64} x_1^2 \right)$$

où x_1 est exprimé en radians. Nous avons obtenu cette grandeur sachant que la distance entre le pendule et l'échelle des amplitudes était de 1245 mm.

Nous avons exécuté les expériences avec le pendule No. 9 dans un vide de 14 mm à la température de 20° C environ.

No.	T sec me- suré	To sec calculé	Lecture sup.	Lecture inf.	Ampli- tude 2x	x mm	log. x	$\frac{x}{\log. 1245}$	x grades	x radians	x ²
1	3,65	3,864	92,0	-19,0	103,0	51,5	1.711807	8.616638	2 63 19	0,0413	0,00171
2	3,80	3,907	76,0	- 1,0	71,0	35,5	1.550228	8.455059	1 81 48	0,0285	0,00081
3	3,74	3,792	64,0	10,0	49,5	24,75	1.393575	8.298406	1 26 54	0,0199	0,00040
4	3,84	3,864	55,0	18,0	53,5	16,75	1.224015	8.128846	85 64	0,0155	0,00018
5	3,80	3,810	48,0	24,0	22,0	11,0	1.041393	7.946224	56 25	0,0088	0,00008
6			44,0	27,5							
1	3,54	3,809	100,0	-26,0	117,0	58,5	1.767156	8.671987	2 98 92	0,0470	0,00221
2	3,79	3,935	82,0	- 8,0	83,0	41,5	1.618048	8.522879	2 12 13	0,0333	0,00111
3	3,82	3,889	68,0	6,0	56,5	28,25	1.451018	8.355849	1 44 43	0,0227	0,00052
4	3,80	3,831	57,0	15,5	38,0	19,0	1.278754	8.183585	97 16	0,0153	0,00023
5	3,74	3,754	50,0	22,0	25,5	12,75	1.105510	8.010341	65 19	0,0102	0,00010
6	3,83	3,835	45,0	27,0	16,25	8,12	0.909556	7.814387	41 52	0,0065	0,00004
7			41,5	29,5							

No.	T sec me- suré	To sec calculé	Lecture sup.	Lecture inf.	Ampli- tude 2x	x mm	log. x	$\log. \frac{x}{1245}$	x grates	x radians	x ²
1	3,65	3,848	93,0	-19,0	103,5	51,75	1.715910	8.618741	2 64 47	0,0415	0,00175
2	3,85	3,961	76,0	- 2,0	71,5	55,75	1.555276	8.458107	1 82 75	0,0287	0,00082
3	3,81	3,858	65,0	10,0	48,5	24,25	1.584712	8.289543	1 23 99	0,0195	0,00038
4	3,91	3,934	54,0	18,0	52,75	16,57	1.214049	8.118880	83 70	0,0151	0,00017
5	3,76	3,770	47,5	24,0	21,25	10,62	1.026125	7.950956	54 50	0,0085	0,00007
6			45,0	28,0							
1	3,42	3,745	108,0	-32,0	150,5	65,25	1.814581	8.719412	3 53 55	0,0524	0,00275
2	3,62	3,800	89,0	-14,0	94,5	47,25	1.674402	8.579253	2 41 49	0,0379	0,00144
3	3,95	4,023	72,0	1,0	65,5	32,75	1.515211	8.420042	1 67 45	0,0265	0,00069
4	3,82	3,861	61,0	12,0	44,75	22,57	1.349666	8.254497	1 14 57	0,0180	0,00032
5	3,82	3,837	52,5	20,0	29,75	14,87	1.172311	8.077142	76 03	0,0119	0,00014
6	3,80	3,807	47,0	25,0	20,0	10,0	1.000000	7.904831	51 13	0,0080	0,00006
7			45,0	27,5	14,0	7,0	0.845098	7.749929	55 80	0,0056	0,00003
8	3,76	3,765	40,0	30,5							

No.	T sec me- suré	To sec calculé	Lecture sup.	Lecture inf.	Ampli- tude 2x	x mm	log. x	log. $\frac{x}{1245}$	x grades	x radians	x ²
1	3,65	3,875	94,0	-21,0	105,5	52,75	1.722222	8.627053	2 69 57	0,0423	0,00179
2	3,82	3,934	75,0	- 3,0	73,0	36,5	1.562293	8.467124	1 86 59	0,0293	0,00086
3	3,84	3,895	65,0	9,0	51,0	25,5	1.406540	8.311371	1 50 37	0,0205	0,00042
4	3,81	3,834	55,0	17,0	34,5	17,25	1.236789	8.141620	88 20	0,0139	0,00019
5	3,71	3,720	48,0	23,0	23,0	11,5	1.060698	7.965529	58 80	0,0092	0,00008
6	3,79	3,795	44,0	27,0	15,5	7,75	0.889302	7.794133	39 63	0,0062	0,00004
7			41,0	30,0							
1	3,75	3,909	84,0	-10,0	87,0	43,5	1.638489	8.545320	2 22 34	0,0349	0,00122
2	3,85	3,929	70,0	4,0	60,5	30,25	1.480725	8.385556	1 54 65	0,0243	0,00059
3	3,89	3,928	59,0	14,0	41,0	20,5	1.311754	8.216585	1 04 82	0,0165	0,00027
4	3,83	3,847	51,0	21,0	27,25	13,62	1.134177	8.039008	69 64	0,0109	0,00012
5	3,75	3,757	45,5	26,0	17,75	8,87	0.947924	7.852755	45 36	0,0071	0,00005
6	3,77	3,774	42,0	29,0	12,0	6,0	0.778151	7.682982	30 68	0,0048	0,00002
7			40,0	31,0							

No.	T sec me- suré	To sec calculé	Lecture sup.	Lecture inf.	Ampli- tude $\frac{x}{2x}$	x mm	log. x	log. $\frac{x}{1245}$	x grades	x radians	x ²
1	3,61	3,852	96,0	-22,0	109,5	54,75	1.738584	8.643215	2 79 78	0,0439	0,00193
2	3,76	3,884	79,0	- 5,0	77,5	38,75	1.588272	8.495103	1 98 08	0,0311	0,00097
3	3,87	3,932	66,0	7,2	53,8	26,9	1.429752	8.334583	1 37 53	0,0216	0,00047
4	3,85	3,878	56,0	16,2	36,55	18,27	1.261739	8.166570	93 42	0,0147	0,00022
5	3,76	3,774	49,5	22,5	24,75	12,37	1.092370	7.997201	63 25	0,0099	0,00010
6			45,0	27,0							
1	3,46	3,761	103,0	-30,0	124,5	62,25	1.794139	8.698970	3 18 05	0,0500	0,00250
2	3,70	3,869	86,0	-12,0	90,5	45,25	1.655619	8.560450	2 31 28	0,0363	0,00132
3	3,80	3,883	71,0	3,0	62,5	31,25	1.494850	8.399681	1 59 76	0,0251	0,00063
4	3,84	3,881	60,0	13,0	43,5	21,75	1.337459	8.242290	1 11 21	0,0175	0,00031
5	3,82	3,837	53,0	20,5	28,5	14,25	1.153815	8.058646	72 86	0,0114	0,00013
6	3,81	3,817	45,0	25,0	19,25	9,62	0.983175	7.888006	49 19	0,0077	0,00006
7			43,5	28,5	13,25	6,62	0.820858	7.725689	33 85	0,0053	0,00003
8	3,80	3,804	40,0	30,8							

No.	I sec me- suré	To sec calculé	Lecture sup.	Lecture inf.	Ampli- tude $\frac{x}{2x}$	x mm	log. x	$\frac{x}{\log. 1245}$	x grades	x radians	x ²
1	3,52	3,772	98,0	-24,0	113,5	56,75	1.753966	8.658797	2 89 99	0,0456	0,00208
2	3,85	3,988	81,0	— 7,0	80,5	40,25	1.604766	8.509597	2 05 74	0,0523	0,00104
3	3,93	3,999	66,0	6,0	55,5	27,75	1.445263	8.348094	1 41 87	0,0223	0,00050
4	3,83	3,861	57,0	15,5	38,25	19,12	1.281488	8.186319	97 76	0,0154	0,00024
5	3,77	3,784	50,5	22,0	26,0	13,0	1.113943	8.018774	66 47	0,0104	0,00011
6	3,86	3,867	45,5	27,0	17,25	8,62	0.935507	7.840338	44 08	0,0069	0,00005
7	3,77	3,774	43,0	30,2	11,25	5,62	0.749736	7.654567	28 74	0,0045	0,00002
8	3,72	3,720	39,9	31,2	7,85	3,92	0.593286	7.498117	20 04	0,0031	0,00001
1	3,55	3,823	100,0	-26,0	117,5	58,75	1.769008	8.673839	3 00 19	0,0471	0,00222
2	3,79	3,939	83,0	— 8,0	84,0	42,0	1.623249	8.528090	2 14 68	0,0337	0,00114
3	3,88	3,953	69,0	5,0	58,5	29,25	1.466126	8.370957	1 49 54	0,0235	0,00055
4	3,82	3,855	58,0	15,0	39,5	19,75	1.295567	8.200398	1 00 98	0,0159	0,00025
5	3,90	3,914	51,0	21,5	26,75	13,37	1.126151	8.030962	68 36	0,0107	0,00011
6	3,71	3,717	45,5	26,0	17,75	8,87	0.947924	7.852755	45 36	0,0071	0,00005
7	3,83	3,834	42,0	29,0	11,9	5,95	0.774517	7.679327	50 42	0,0048	0,00002
8			39,8	31,0							

Vu la compensation des erreurs, soit l'équation:

$$138) \quad v = T_0 - T_i - (T_i x_i^2) d$$

où:

$$139) \quad d = \frac{3N - 1}{64}$$

ou tenant compte des relations:

$$140) \quad \begin{aligned} T_0 &= x_0 + \xi \\ d &= d_0 + \eta \end{aligned}$$

L'équation des erreurs 138) devient

$$141) \quad v_i = (x_0 - T_i x_i^2 d_0 - T_i) + \xi - (T_i x_i^2) \eta$$

où x_0 et d_0 ont les valeurs approximatives suivantes:

$$142) \quad \begin{aligned} x_0 &= 3,849 \\ d_0 &= 35,350 \end{aligned}$$

De 141), faisant les remplacements numériques, nous obtenons les 62 équations suivantes:

Les Equations des Erreurs.

$$143) \quad \begin{aligned} v_1 &= - 0,021655 + \xi - 0,006242 \eta \\ v_2 &= - 0,059807 + \xi - 0,003078 \eta \\ v_3 &= + 0,056116 + \xi - 0,001496 \eta \\ v_4 &= - 0,015427 + \xi - 0,000691 \eta \\ v_5 &= + 0,038254 + \xi - 0,000504 \eta \\ v_6 &= + 0,032457 + \xi - 0,007823 \eta \\ v_7 &= - 0,089717 + \xi - 0,004207 \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_8 &= - 0,041205 + \xi - 0,001986 \eta \\
v_9 &= + 0,018104 + \xi - 0,000874 \eta \\
v_{10} &= + 0,095779 + \xi - 0,000374 \eta \\
v_{11} &= + 0,013591 + \xi - 0,000153 \eta \\
v_{12} &= - 0,002468 + \xi - 0,006265 \eta \\
v_{13} &= - 0,113130 + \xi - 0,003172 \eta \\
v_{14} &= - 0,012045 + \xi - 0,001444 \eta \\
v_{15} &= - 0,084897 + \xi - 0,000676 \eta \\
v_{16} &= + 0,079314 + \xi - 0,000274 \eta \\
v_{17} &= + 0,096532 + \xi - 0,009405 \eta \\
v_{18} &= + 0,044720 + \xi - 0,005213 \eta \\
v_{19} &= - 0,176869 + \xi - 0,002712 \eta \\
v_{20} &= - 0,014198 + \xi - 0,001222 \eta \\
v_{21} &= + 0,010088 + \xi - 0,000535 \eta \\
v_{22} &= + 0,040940 + \xi - 0,000228 \eta \\
v_{23} &= + 0,085005 + \xi - 0,000113 \eta \\
v_{24} &= - 0,051977 + \xi - 0,006534 \eta \\
v_{25} &= - 0,087125 + \xi - 0,003285 \eta \\
v_{26} &= - 0,048020 + \xi - 0,001613 \eta \\
v_{27} &= + 0,013407 + \xi - 0,000724 \eta \\
v_{28} &= + 0,127865 + \xi - 0,000315 \eta \\
v_{29} &= + 0,053627 + \xi - 0,000152 \eta \\
v_{30} &= - 0,062726 + \xi - 0,004575 \eta \\
v_{31} &= - 0,081315 + \xi - 0,002272 \eta \\
v_{32} &= - 0,078118 + \xi - 0,001050 \eta \\
v_{33} &= + 0,002739 + \xi - 0,000460 \eta \\
v_{34} &= + 0,092354 + \xi - 0,000188 \eta \\
v_{35} &= + 0,076349 + \xi - 0,000075 \eta \\
v_{36} &= - 0,007283 + \xi - 0,006967 \eta \\
v_{37} &= - 0,039921 + \xi - 0,003647 \eta
\end{aligned}$$

143)

$$\begin{aligned}
v_{38} &= - 0,085302 + \xi - 0,001819 \eta \\
v_{39} &= - 0,030941 + \xi - 0,000847 \eta \\
v_{40} &= + 0,075708 + \xi - 0,000376 \eta \\
v_{41} &= + 0,083222 + \xi - 0,008650 \eta \\
v_{42} &= - 0,023649 + \xi - 0,004884 \eta \\
v_{43} &= - 0,035628 + \xi - 0,002394 \eta \\
v_{44} &= - 0,033067 + \xi - 0,001190 \eta \\
v_{45} &= + 0,011431 + \xi - 0,000497 \eta \\
v_{46} &= + 0,030905 + \xi - 0,000229 \eta \\
v_{47} &= + 0,044970 + \xi - 0,000114 \eta \\
v_{48} &= + 0,020407 + \xi - 0,007881 \eta \\
v_{49} &= - 0,093747 + \xi - 0,004321 \eta \\
143) \quad v_{50} &= - 0,106437 + \xi - 0,002134 \eta \\
v_{51} &= - 0,004759 + \xi - 0,000955 \eta \\
v_{52} &= - 0,066165 + \xi - 0,000429 \eta \\
v_{53} &= + 0,132460 + \xi - 0,000185 \eta \\
v_{54} &= + 0,016278 + \xi - 0,000077 \eta \\
v_{55} &= + 0,070167 + \xi - 0,007322 \eta \\
v_{56} &= - 0,142541 + \xi - 0,004004 \eta \\
v_{57} &= - 0,150463 + \xi - 0,001965 \eta \\
v_{58} &= - 0,013487 + \xi - 0,000919 \eta \\
v_{59} &= + 0,064330 + \xi - 0,000415 \eta \\
v_{60} &= - 0,017823 + \xi - 0,000193 \eta \\
v_{61} &= + 0,076349 + \xi - 0,000075 \eta \\
v_{62} &= + 0,127692 + \xi - 0,000037 \eta
\end{aligned}$$

Nous avons les équations normales:

$$\begin{aligned}
144) \quad &+ 62,000000 \xi - 0,142356 \eta - 0,140752 = 0 \\
&- 0,142356 \xi + 0,000729 \eta + 0,001847 = 0
\end{aligned}$$

L'algorithme de Gauss:

	+ 62,000000	- 0,142356	- 0,140752
	- 1,000000	+ 0,002296	+ 0,002267
	$\xi = - 0,0064$	- 0,008701	+ 0,002267
145)			
	$\xi = - 0,0064$	+ 0,000729	+ 0,001847
		- 0,0003269	- 0,0003232
	$\eta = - 3,7896$	+ 0,0004021	+ 0,0015238
		- 1,000000	- 3,7896
	$\eta = - 3,7896$		

Les expressions 140) deviennent ainsi:

$$146) \quad \begin{aligned} T_o &= 3,8426 \\ d &= 31,5604 \end{aligned}$$

Contrôles

I. Nous avons:

$$147) \quad [pvv] = [pff] + [paf] \xi + [pbf] \eta$$

où en faisant les remplacements numériques, il résulte:

$$148) \quad [pvv] = + 0,31486 + 0,00090 - 0,00700 = 0,30876$$

II. Nous avons:

$$149) \quad [pvv] = [pff] - \frac{[paf]^2}{[paa]} - \frac{[pbf \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]}$$

En faisant aussi les remplacements numériques, nous obtenons:

$$150) \quad [pvv] = + 0,31486 - 0,00032 - 0,00577 = 0,30877$$

III. Le troisième contrôle consiste à calculer les v_i des équations des erreurs 143) où ξ et η seront remplacés par leurs valeurs de 145); puis on reconstitue la valeur de $[ppv]$.

Soit alors les v_i :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= - 0,0217 - 0,0064 + 0,0237 = - 0,0044 \\
 v_1 &= - 0,0598 - 0,0064 + 0,0117 = - 0,0545 \\
 v_3 &= + 0,0561 - 0,0064 + 0,0057 = + 0,0554 \\
 v_4 &= - 0,0154 - 0,0064 + 0,0026 = - 0,0192 \\
 v_5 &= + 0,0383 - 0,0064 + 0,0012 = + 0,0331 \\
 v_6 &= + 0,0325 - 0,0064 + 0,0296 = + 0,0557 \\
 v_7 &= - 0,0897 - 0,0064 + 0,0159 = - 0,0802 \\
 v_8 &= - 0,0412 - 0,0064 + 0,0075 = - 0,0401 \\
 v_9 &= + 0,0181 - 0,0064 + 0,0033 = + 0,0150 \\
 v_{10} &= + 0,0958 - 0,0064 + 0,0014 = + 0,0908 \\
 151) \quad v_{11} &= + 0,0136 - 0,0064 + 0,0006 = + 0,0078 \\
 v_{12} &= - 0,0025 - 0,0064 + 0,0237 = + 0,0148 \\
 v_{13} &= - 0,1131 - 0,0064 + 0,0120 = - 0,1075 \\
 v_{14} &= - 0,0121 - 0,0064 + 0,0055 = - 0,0130 \\
 v_{15} &= - 0,0849 - 0,0064 + 0,0026 = - 0,0887 \\
 v_{16} &= + 0,0793 - 0,0064 + 0,0010 = + 0,0739 \\
 v_{17} &= + 0,0965 - 0,0064 + 0,0356 = + 0,1257 \\
 v_{18} &= + 0,0447 - 0,0064 + 0,0198 = + 0,0581 \\
 v_{19} &= - 0,1769 - 0,0064 + 0,0103 = - 0,1730 \\
 v_{20} &= - 0,0142 - 0,0064 + 0,0046 = - 0,0160 \\
 v_{21} &= + 0,0101 - 0,0064 + 0,0020 = + 0,0057 \\
 v_{22} &= + 0,0409 - 0,0064 + 0,0009 = + 0,0354
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{23} &= + 0,0850 - 0,0064 + 0,0004 = + 0,0790 \\
v_{24} &= - 0,0320 - 0,0064 + 0,0248 = - 0,0136 \\
v_{25} &= - 0,0871 - 0,0064 + 0,0124 = - 0,0811 \\
v_{26} &= - 0,0480 - 0,0064 + 0,0061 = - 0,0483 \\
v_{27} &= + 0,0134 - 0,0064 + 0,0027 = + 0,0097 \\
v_{28} &= + 0,1279 - 0,0064 + 0,0012 = + 0,1227 \\
v_{29} &= + 0,0536 - 0,0064 + 0,0006 = + 0,0478 \\
v_{30} &= - 0,0627 - 0,0064 + 0,0175 = - 0,0518 \\
v_{31} &= - 0,0813 - 0,0064 + 0,0086 = - 0,0791 \\
v_{32} &= - 0,0781 - 0,0064 + 0,0040 = - 0,0805 \\
v_{33} &= + 0,0027 - 0,0064 + 0,0017 = - 0,0020 \\
v_{34} &= + 0,0924 - 0,0064 + 0,0007 = + 0,0867 \\
v_{35} &= + 0,0764 - 0,0064 + 0,0003 = + 0,0703 \\
v_{36} &= - 0,0073 - 0,0064 + 0,0264 = + 0,0127 \\
v_{37} &= - 0,0399 - 0,0064 + 0,0138 = - 0,0325 \\
v_{38} &= - 0,0853 - 0,0064 + 0,0069 = - 0,0848 \\
v_{39} &= - 0,0309 - 0,0064 + 0,0032 = - 0,0341 \\
v_{40} &= + 0,0757 - 0,0064 + 0,0014 = + 0,0707 \\
v_{41} &= + 0,0832 - 0,0064 + 0,0328 = + 0,1096 \\
v_{42} &= - 0,0237 - 0,0064 + 0,0185 = - 0,0116 \\
v_{43} &= - 0,0356 - 0,0064 + 0,0091 = - 0,0329 \\
v_{44} &= - 0,0331 - 0,0064 + 0,0045 = - 0,0350 \\
v_{45} &= + 0,0114 - 0,0064 + 0,0019 = + 0,0069 \\
v_{46} &= + 0,0309 - 0,0064 + 0,0009 = + 0,0254 \\
v_{47} &= + 0,0450 - 0,0064 + 0,0004 = + 0,0390 \\
v_{48} &= + 0,0204 - 0,0064 + 0,0299 = + 0,0439 \\
v_{49} &= - 0,0938 - 0,0064 + 0,0164 = - 0,0838 \\
v_{50} &= - 0,1064 - 0,0064 + 0,0081 = - 0,1047 \\
v_{51} &= - 0,0048 - 0,0064 + 0,0036 = - 0,0076 \\
v_{52} &= - 0,0662 - 0,0064 + 0,0016 = - 0,0710
\end{aligned}$$

151)

$$\begin{aligned}
 v_{53} &= + 0,1325 - 0,0064 + 0,0007 = + 0,1268 \\
 v_{54} &= + 0,0163 - 0,0064 + 0,0003 = + 0,0102 \\
 v_{55} &= + 0,0702 - 0,0064 + 0,0277 = + 0,0915 \\
 v_{56} &= + 0,1425 - 0,0064 + 0,0152 = - 0,1337 \\
 151) \quad v_{57} &= - 0,1505 - 0,0064 + 0,0075 = - 0,1494 \\
 v_{58} &= - 0,0135 - 0,0064 + 0,0035 = - 0,0164 \\
 v_{59} &= + 0,0643 - 0,0064 + 0,0016 = + 0,0595 \\
 v_{60} &= - 0,0178 - 0,0064 + 0,0007 = - 0,0235 \\
 v_{61} &= + 0,0764 - 0,0064 + 0,0003 = + 0,0703 \\
 v_{62} &= + 0,1277 - 0,0064 + 0,0001 = + 0,1214
 \end{aligned}$$

Il résulte:

$$152) \quad [pvv] = 0,312562$$

IV. Le contrôle final se réduit à calculer les v_i par l'équation 138) où T_0 et d auront les valeurs définitives 146). Celles-ci doivent correspondre avec les v_i de 151):

Nous donnons ci-joint les résultats de nos calculs:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= - 0,004 & v_{14} &= - 0,013 \\
 v_2 &= - 0,054 & v_{15} &= - 0,088 \\
 v_3 &= + 0,056 & v_{16} &= + 0,074 \\
 v_4 &= - 0,019 & v_{17} &= + 0,126 \\
 v_5 &= + 0,033 & v_{18} &= + 0,058 \\
 v_6 &= + 0,056 & v_{19} &= - 0,173 \\
 153) \quad v_7 &= - 0,080 & v_{20} &= - 0,016 \\
 v_8 &= - 0,040 & v_{21} &= + 0,006 \\
 v_9 &= + 0,015 & v_{22} &= + 0,036 \\
 v_{10} &= + 0,091 & v_{23} &= + 0,079 \\
 v_{11} &= + 0,008 & v_{24} &= - 0,013 \\
 v_{12} &= + 0,015 & v_{25} &= - 0,081 \\
 v_{13} &= - 0,107 & v_{26} &= - 0,048
 \end{aligned}$$

	$v_{27} = + 0,010$	$v_{45} = + 0,007$
	$v_{28} = + 0,123$	$v_{46} = + 0,026$
	$v_{29} = + 0,048$	$v_{47} = + 0,039$
	$v_{30} = - 0,051$	$v_{48} = + 0,044$
	$v_{31} = - 0,079$	$v_{49} = - 0,083$
	$v_{32} = - 0,080$	$v_{50} = - 0,104$
	$v_{33} = - 0,002$	$v_{51} = - 0,007$
	$v_{34} = + 0,087$	$v_{52} = - 0,071$
	$v_{35} = + 0,071$	$v_{53} = + 0,127$
153)	$v_{36} = + 0,013$	$v_{54} = + 0,011$
	$v_{37} = - 0,032$	$v_{55} = + 0,092$
	$v_{38} = - 0,084$	$v_{56} = - 0,133$
	$v_{39} = - 0,034$	$v_{57} = - 0,149$
	$v_{40} = + 0,071$	$v_{58} = - 0,016$
	$v_{41} = + 0,110$	$v_{59} = + 0,060$
	$v_{42} = - 0,011$	$v_{60} = - 0,023$
	$v_{43} = - 0,033$	$v_{61} = + 0,071$
	$v_{44} = - 0,035$	$v_{62} = + 0,122$

Il résulte:

	$m = \pm 0,0717$
154)	$m\xi = \pm 0,0122$
	$m\eta = \pm 3,5767$

Nous arrivons à calculer les constantes du pendule: K et g_0 avec les formules :*)

$$155) \quad K = \frac{g T_0^2}{N}$$

et

$$156) \quad g_0 = g + \frac{K}{T_0^2}$$

*) Voir; C. F. Baeschlin (loc. cit.) Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik 1938.

où :

$$\begin{aligned}
 g &= 980,658 \text{ gal. (pour Heerbrugg)} \\
 157) \quad N &= 673,622 \\
 T_0 &= 3,843
 \end{aligned}$$

Il résulte :

$$\begin{aligned}
 158) \quad K &= 21,496 \\
 g_0 &= 982,114
 \end{aligned}$$

RÉSUMÉ ET CONSIDÉRATIONS FINALES.

Il y a 10 ans que F. Holweck et P. Lejay ont préconisé l'idée de l'application des vibrations d'un diapason de quartz, en gravimétrie¹⁾.

Étant donné la lacune que le manque d'un instrument commode et précis pour la détermination de l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre, présente pour les géodésiens, le pendule Holweck-Lejay a été accueilli avec intérêt.

Le présent travail a pour but de compléter ce sujet par une théorie qui tient compte des possibilités techniques et des exigences de la pratique sur le terrain.

Je suis arrivé à une nouvelle équation différentielle 41) à laquelle satisfait le mouvement du pendule. Elle est sensiblement différente de celle indiquée par P. Lejay 12), qui, comme je l'ai déjà démontré, présente des incertitudes.

Par une méthode nouvelle, j'ai trouvé la forme du couple \mathfrak{M} 35) sans utiliser la solution approximative de l'équation différentielle de la ligne élastique. Le couple n'est même pas en première approximation, proportionnel à l'angle θ , comme l'affirment P. Lejay et d'autres auteurs.

J'ai réussi ensuite à trouver l'intégrale générale de l'équation 41) en la ramenant à la forme de l'intégrale elliptique de Legendre, seule admissible dans pareils cas. En vérité, la forme de Legendre a l'avantage de nous conduire à une série connue, facile à étudier et dont la convergence est démontrée. Le procédé élémentaire adopté par P. Lejay ne tient pas compte de la théorie des inte-

¹⁾ F. Holweck et P. Lejay, Etude préliminaire d'un diapason de quartz dans un vide élevé. C. R. 188, 1929.

grales elliptiques ¹⁾, et l'intégration effectuée n'est pas légitimée. En la comparant avec 92), on constate la correspondance du premier terme seulement. Les corrections d'amplitude 96') et celles de l'inclinaison de la lame 96'') sont dans le cas de P. Lejay, à part une différence de signe, plus grandes. Les termes négligés suivants, sont par conséquent assez importants pour influencer la valeur des précédents. Sans doute, en réalisant un pendule qui annule la correction de l'inclinaison et ayant soin dans les expériences de faire tomber la correction de l'amplitude, les différences signalées plus haut ne jouent pratiquement aucun rôle. Mais dès que les corrections deviennent nécessaires, on n'aura plus le même résultat. Deuxièmement quoique le coefficient du premier terme de l'équation 41), est du point de vue théorique, fondamentalement différent de celui de l'équation respective admise par P. Lejay, pratiquement, étant donné la méthode de l'étalonnage de l'instrument dans des points où on connaît g , il aura la même valeur.

Cependant cette différence théorique n'est pas sans intérêt. Elle nous a servi à démontrer que la méthode „poids en bas“ pour l'étalonnage de l'instrument ne donne pas de résultats satisfaisants.

Puis, j'ai insisté sur le travail de déformation de la lame en le trouvant en fonction de la longueur de cette dernière. Ce fait apparaît en désaccord avec certains auteurs pour lesquels le travail est indépendant de la longueur.

Dans la deuxième partie du présent travail, j'ai analysé quelques points pratiques et tout à la fin j'ai présenté une nouvelle méthode d'étalonnage de l'instrument.

* * *

¹⁾ Voir: Bulletin Géodésique Nr. 28, 1930, page 580 et 581.

CURRICULUM VITAE.

Je suis né le 25 décembre 1907, dans la Commune de Corbeanca, département Ilfov, Roumanie.

En été 1928, je me suis inscrit comme étudiant à la Faculté des Sciences, Section des Mathématiques à Bucarest.

Licencié en 1932, j'ai dès lors travaillé en qualité d'assistant à la chaire de mathématiques générales et mécaniques de la Faculté d'Agronomie de l'Ecole Polytechnique à Bucarest, poste que j'occupe encore aujourd'hui.

En dehors de mon activité à cette chaire, je me suis livré à l'étude de la géodésie.

J'ai pris part, en 1934, en qualité de calculateur, à la conduite des travaux de planimétrie et de nivellement dans la région inondable par le Danube du département Jalomița, Roumanie. Ces travaux ont été exécutés dans le cadre d'activité de la chaire de Topographie et des Améliorations Foncières de la Faculté d'Agronomie de Bucarest et appartiennent à la Direction des Pêcheries de l'Etat Roumain.

En été 1935, j'ai collaboré à l'exécution sur le terrain des travaux de géodésie pour la triangulation du IV-e ordre de la région Dudești-Cioplea près de Bucarest. Ce travail est la propriété de la Direction du Cadastre Roumain.

Au cours de l'été 1936, j'ai exécuté le réseau de triangulation du IV-e ordre autour de la ville Huniedoara, Roumanie. Ce travail appartient aussi à la Direction du Cadastre.

En 1937/38, je suis parti à l'étranger pour achever mes études par un travail de doctorat en géodésie à l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich.

Pendant l'été 1938, j'ai pris part aux travaux sur le terrain de la région d'Aeschi près de Spiez (Suisse), travaux dirigés par le Professeur Dr. C. F. Baeschlin, exécutés par les candidats au

diplôme d'ingénieur de la Section de Topographie et de Génie rural de l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich. Dans le même été, j'ai collaboré à un travail de photogrammétrie terrestre dans la région du Loetschental (Alpes suisses) en vue de construire un relief du sommet du Bietschhorn. La restitution a été dirigée par M. le Dr. M. Zeller, Professeur de Photogrammétrie à l'Ecole Polytechnique Fédérale à Zurich et le relief a été exposé à l'Exposition Nationale Suisse de 1939 à Zurich.

En automne 1938, j'ai passé avec succès les examens complémentaires pour être admis à présenter une thèse de doctorat.

Dès le mois de juillet 1939, j'ai commencé à travailler dans les usines des instruments de géodésie H. Wild, Heerbrugg (Suisse) Ici, en plus de la construction d'un pendule élastique gravimétrique, destiné aux recherches expérimentales du présent travail, j'ai étudié la fabrication des instruments de géodésie, de photogrammétrie et des instruments optiques destinés à la modernisation de l'armement.

Heerbrugg (Suisse), décembre 1939.

TABLE DES MATIÈRES

	<u>Page</u>
1. Introduction;	7
2. Littérature;	8
3. Le pendule élastique astatique. Equation différentielle de l'oscillation et détermination de la durée de l'oscillation;	11
4. La ligne élastique;	14
5. Calcul de X;	17
6. Calcul de Y;	18
7. Calcul du moment \mathfrak{M} ;	19
8. Intégration de l'équation du mouvement;	23
9. Observations;	36
10. Sur le travail de déformation de la lame;	37
11. Considérations pratiques;	47
12. Description de l'instrument;	48
13. Le matériel expérimental;	51
14. Rôle de l'asymétrie du corps pendulaire;	53
15. Sensibilité du pendule;	54
16. Une nouvelle méthode d'étalonnage du pendule gravi- métrique élastique;	55
17. Les équations des erreurs;	61
18. Contrôles;	64
19. Résumé et considérations finales;	69
20. Curriculum vitae;	71
