

Resonanz bei konstanter Dämpfung

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der Mathematik

genehmigte

Promotionsarbeit

Vorgelegt von

Hans Ziegler

aus Winterthur

Referent: Herr Professor Dr. E. Meissner

Korreferent: Herr Professor Dr. H. Hopf



Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg

1938

Sonderdruck aus Ingenieur-Archiv 1938, Band IX, Heft 1

Meinen Eltern

A. Einleitung und Problemstellung.

Es ist bekannt, daß die Ausschläge eines ungedämpften harmonischen Schwingers vom Freiheitsgrade 1 unter dem Einfluß einer periodischen Störkraft sehr bzw. unendlich groß werden, wenn eine der Schwingungszahlen der nach einer Fourierreihe entwickelten Störkraft (d. h. also die Schwingungszahl der Störkraft selbst oder ein ganzzahliges Vielfaches von ihr) der Eigenschwingungszahl des Schwingers nahekommt bzw. mit ihr übereinstimmt.

Es ist ferner bekannt, daß die Ausschläge eines Schwingers, der einer der ersten Ableitung der Lagenkoordinate nach der Zeit proportionalen Dämpfung unterliegt, im Resonanzfalle wohl verhältnismäßig groß, aber niemals unendlich groß werden.

Weniger einfach beantwortet sich die Frage nach den Ausschlägen eines Schwingers mit konstanter Dämpfung, d. h. eines Schwingers, auf den ein konstanter, aber stets seinem Bewegungsinne entgegengerichteter Widerstand wirkt.

Der einfachste Vertreter dieser Klasse von Schwingern ist der an eine Gerade gebundene Massenpunkt, der außer der störenden folgenden Kräften unterliegt:

1. einer linearen Rückstellkraft, die etwa durch eine Feder verwirklicht werden kann;
2. einer trockenen Reibung (wobei der Einfachheit halber Haft- und Gleitreibungszahl gleich groß angenommen seien).

Das Verhalten eines solchen Schwingers im Resonanzfalle (genauer bei Resonanz der ersten Harmonischen der Störkraft) ist erstmals für ein bestimmtes Störungsgesetz (intermittierende konstante Kraft) von **E. Meißner**¹ untersucht worden. Er hat gezeigt, daß für die Frage der Aufschaukelung die Intensität² der Störkraft ausschlaggebend ist. Hält man in dem von ihm untersuchten Falle die Form des Störkraftgesetzes fest und variiert die Störintensität, dann ist das Ergebnis seiner Untersuchung:

1. Es existiert eine bestimmte Intensität der Störkraft, die zu periodischen, endlichen Schwingungen ohne zeitweiligen Stillstand führt. Die Amplitude der Schwingung hängt von den Anfangsbedingungen ab.
2. Für jede Störkraft mit größerer Intensität schaukelt sich die Schwingung bis zu unendlich großen Ausschlägen auf. Gleichzeitig nähert sich die Bewegung mehr und mehr einer sog. Restlösung, d. h. einer Bewegung, bei der zwar die Ausschläge dauernd zunehmen, die Umkehrzeiten aber genau im Takt der Eigenschwingung aufeinanderfolgen.
3. Für jede Störkraft mit kleinerer Intensität nehmen die Ausschläge ab und die Bewegung nähert sich einer periodischen Stillstandslösung, d. h. einer periodischen Bewegung, die die Eigenschaft hat, daß der Schwinger während eines Teiles der Periode stillsteht.

Im Anschluß an dieses Ergebnis stellen sich folgende Fragen:

1. Existiert im Resonanzfalle für ein gegebenes periodisches Störkraftgesetz eine solche kritische Intensität, oberhalb der sich die Schwingung aufschaukelt, unterhalb der sie zu einer Stillstandslösung abklingt?

¹ **E. Meißner**, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) S. 62.

² Faßt man die Störkraft als mit einer Konstanten multiplizierte Funktion der Zeit auf, so bestimmt die Funktion die Form des Störkraftgesetzes; die multiplikative Konstante soll „Intensität“ genannt werden.

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Form des Störkraftgesetzes und seiner kritischen Intensität? Ist es möglich, bei Kenntnis der Eigenschwingungszahl des Schwingers und des Koeffizienten der trockenen Reibung aus einem gegebenen Störungsgesetz unmittelbar auf den Charakter der entstehenden Bewegung zu schließen?

Diese beiden Fragen, gestellt für einige einfache Einzelfälle und im Anschluß daran für eine allgemeinere, noch näher zu beschreibende Klasse von Störungsfunktionen, bilden die Fragestellung der vorliegenden Untersuchung¹.

Es wird sich zeigen, daß eine solche kritische Intensität existiert, daß bei Unterschreiten derselben die Bewegung bei beliebigen Anfangsbedingungen abklingt, bei

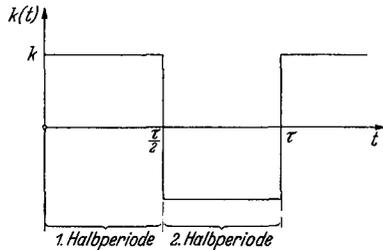


Abb. 1. Störkraft zu Abschnitt C.

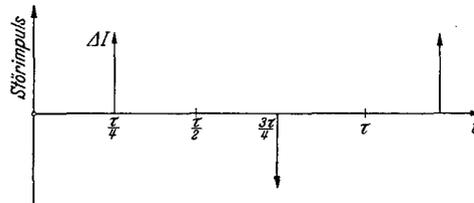
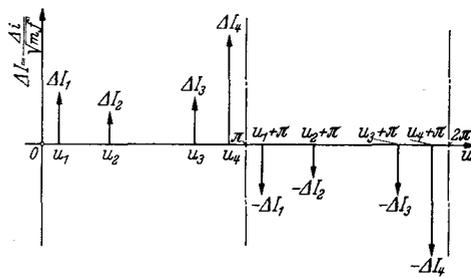


Abb. 2. Störimpulse zu Abschnitt D.

Überschreiten mindestens unter gewissen Anfangsbedingungen aufschaukelt, und daß sich die kritische Intensität in einfacher Weise aus dem ersten Fourierkoeffizienten der Störkraft berechnen läßt.

Im Abschnitt B wird die Meißnersche Methode der graphischen Integration, die für nichtanalytische Schwingungsprobleme (die Reibungskraft springt an den Umkehrstellen jedesmal um ihren doppelten Betrag) besondere Vorteile bietet und deshalb hier ausschließlich verwendet wird, kurz erläutert.

Im Abschnitt C wird die Resonanz (der Grundschwingung) eines einfachen Störungsgesetzes (Abb. 1) untersucht. Die Störkraft besitzt einen konstanten Betrag, wechselt aber nach jeder halben Periode ihre Richtung. Das Beispiel soll dazu dienen, die Methodik der Untersuchung zu erläutern und einige später notwendige Rechnungen vorwegzunehmen; außerdem können an seinem besonderen Ergebnis spätere allgemeine Schlußfolgerungen nachgeprüft werden.

Abb. 3. Störimpulse zu Abschnitt E, $n = 4$.

Sodann wird im Abschnitt D der Fall untersucht, daß das Kraftgesetz (Abb. 2) in eine Reihe gleichgroßer, einander abwechslungsweise entgegengerichteter, im zeitlichen Abstand einer halben Periode aufeinanderfolgender Impulse entartet sei. Wegen der Periodizität kann man sich zur Kennzeichnung dieses Störungsgesetzes auf eine Periode beschränken und daher von einem „Impulspar“ sprechen. Ferner kann der Zeitanfangspunkt so gewählt werden, daß die erste Halbperiode einen positiven, die zweite einen negativen Impuls enthält.

Im Abschnitt E wird eine Verallgemeinerung des letzten Störungsgesetzes betrachtet, die dann vorliegt, wenn statt eines eine endliche Anzahl n von Störimpuls-paaren verschiedener Stärke einwirkt, jedoch mit der Einschränkung, daß der Zeitnullpunkt so gewählt werden kann, daß die erste Halbperiode nur gleichgerichtete Impulse, die zweite Halbperiode mithin die entsprechenden, entgegengesetzt gerichteten Impulse enthält. Abb. 3 zeigt ein solches Störungsgesetz für den Fall $n = 4$.

¹ Ich danke Herrn Prof. Dr. E. Meißner für die Anregung und die Förderung dieser Arbeit.

Abschnitt F behandelt eine allgemeinere Störkraft, die folgenden Voraussetzungen genügt:

1. Sie soll beschränkt und integrierbar sein. Dieser Bedingung genügen schlechtweg alle in der Praxis vorkommenden Kraftgesetze.

2. Sie soll periodisch sein und insbesondere, da ja die Resonanz der ersten Harmonischen untersucht wird, die Periode τ der Eigenschwingung des Schwingers haben. Es muß also gelten

$$k(t + \tau) = k(t).$$

3. Die zweite Halbperiode der Störkraft soll in der graphischen Darstellung durch Gleitspiegelung aus der ersten hervorgehen, d. h. es soll

$$k\left(t + \frac{\tau}{2}\right) = -k(t)$$

sein.

4. Die Kraft soll während einer Halbperiode ihre Richtung nicht wechseln; bei geeigneter Wahl des Zeitnullpunktes soll also

$$k(t) \geq 0, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}\right)$$

sein. Mit der Voraussetzung 3 folgt dann

$$k(t) \leq 0, \quad \left(\frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau\right).$$

Die eigentlich einschränkenden Voraussetzungen sind die dritte und vierte. Immerhin werden wohl die meisten technisch wichtigen Störungsfunktionen (das einfachste Beispiel ist die Funktion $\sin 2\pi t/\tau$) sämtlichen Voraussetzungen genügen.

Man kann sich diese Störkraft durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus dem in Abschnitt E behandelten Störungsgesetz hervorgegangen denken und könnte dementsprechend die Ergebnisse durch Grenzübergang aus den dort erhaltenen ableiten. Im Abschnitt F ist jedoch der einfachere direkte Weg gewählt. Das Ergebnis läßt sich leicht mit den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte vergleichen und wird für den Fall der Störkraft $\sin 2\pi t/\tau$ mit einem Ergebnis von **den Hartog** im Einklang befunden.

B. Die Meißnersche Methode der graphischen Integration.

1. **Das Prinzip.** Die Methode der graphischen Integration mittels des Linienbildes einer Funktion ist von **E. Meißner** ausführlich beschrieben worden¹. Sie ist aber

allgemein so wenig bekannt, daß sie zunächst kurz soweit erläutert werden soll, als es für das Verständnis der folgenden Abschnitte nötig ist.

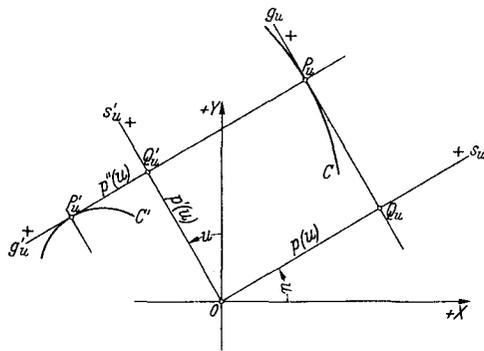


Abb. 4. Konstruktion des Linienbildes der Funktion $p(u)$.

Von einer Funktion $p(u)$ einer Veränderlichen u kann man auf folgende Weise eine graphische Darstellung gewinnen: Von einem cartesischen (X, Y) -Koordinatensystem ausgehend faßt man die unabhängige Veränderliche u als im Gegenzeigersinne positiv gerechneten Winkel auf, den die positive Seite einer gerichteten, durch den Koordinatenursprung O gehenden Geraden s_u mit der positiven X -Achse einschließt (Abb. 4). Die

Funktion $p(u)$ trägt man unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens auf der gerichteten Geraden s_u als Strecke ab und erhält damit den Punkt Q_u . Statt nun das von Q_u bei der Änderung von u beschriebene Polardiagramm als Schaubild der Funktion $p(u)$ aufzufassen, geht man etwas weiter und errichtet im Punkte Q_u

¹ **E. Meißner**, Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion (Sonderabdruck aus der Schweiz. Bauztg.) Zürich 1932.

die Normale g_u zur Geraden s_u , die man im Sinne des wachsenden Winkels u positiv rechnet. Die Umhüllende C der den verschiedenen Werten von u zugeordneten Stützgeraden g_u betrachtet man als die graphische Darstellung der Funktion $p(u)$ und nennt sie das Linienbild der Funktion.

Die Gleichung der Stützgeraden g_u lautet in cartesischen Koordinaten

$$X \cos u + Y \sin u - p(u) = 0. \quad (1)$$

Um die Gleichung des Linienbildes C zu erhalten, hat man die Gleichung (1) der Stützgeraden nach dem Parameter abzuleiten,

$$-X \sin u + Y \cos u - p'(u) = 0, \quad (2)$$

und hätte nun u aus (1) und (2) zu eliminieren. Nun stellt (2) offenbar eine Gerade g'_u dar, die zur Geraden g_u normal steht und von O den Abstand $p'(u)$ hat. Da sie, mit g_u geschnitten, einen Punkt von C liefern muß, geht sie durch den Punkt P_u , in dem die Stützgerade g_u das Linienbild C berührt. Folglich stellt die Strecke $Q_u P_u$ auf g_u die Ableitung $p'(u)$ der Funktion $p(u)$ nach u dar.

Betrachtet man die Funktion $p'(u)$, dann erkennt man an Hand der Abb. 4, daß die Gerade s'_u , die aus s_u durch Drehung um $+\pi/2$ hervorgeht, für die Funktion $p'(u)$ dieselbe Rolle spielt wie s_u für $p(u)$, wenn man beachtet, daß der Winkel zwischen der positiven Seite von s'_u und der positiven Y -Achse wiederum den Wert u hat. Die Gerade g'_u ist damit die Stützgerade der Funktion $p'(u)$, und die zu verschiedenen Werten von u gehörenden g'_u umhüllen eine Kurve C' . Bezeichnet man nun analog den Schnittpunkt von s'_u und g'_u mit Q'_u und den Berührungspunkt der neuen Stützgeraden g'_u mit der neuen Umhüllenden C' mit P'_u , dann stellt die Strecke $Q'_u P'_u$ die zweite Ableitung $p''(u)$ dar.

In dieser Weise könnte man fortfahren und sukzessive die Linienbilder C'' , C''' , ... der zweiten, dritten und höheren Ableitungen der Funktion $p(u)$ herstellen. Für den vorliegenden Zweck ist dies nicht nötig; hingegen ist noch folgende Betrachtung von Wichtigkeit.

Die Kurve C' ist die Evolute der Kurve C , also ist der Krümmungsradius des Linienbildes C im Punkte P_u gleich $P_u P'_u$. Andererseits ist aber die Strecke $P_u P'_u$ gleich der Summe aus der Funktion $p(u)$ und ihrer zweiten Ableitung $p''(u)$. Folglich gilt, wenn man den Krümmungsradius des Linienbildes C mit $\varrho(u)$ bezeichnet,

$$\varrho(u) = p(u) + p''(u), \quad (3)$$

wobei $\varrho(u)$ im Sinne des wachsenden u positiv zu rechnen ist.

Der Vorteil des Linienbildes gegenüber anderen graphischen Darstellungen einer Funktion liegt darin, daß seine Krümmung mittels der einfachen Beziehung (3) mit der Funktion bzw. deren zweiter Ableitung zusammenhängt.

Ist etwa eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben, so kann man aus ihr bei Kenntnis der Anfangsbedingungen den zu $u=0$ gehörenden Krümmungsradius des Linienbildes aus (3) berechnen und das Linienbild für ein erstes kleines Zeitintervall durch einen Kreisbogen vom Radius $\varrho(0)$ ersetzen. Liest man die dem Intervallendpunkt entsprechenden Werte von p und p' in der Abbildung ab und berechnet daraus mit Hilfe der Differentialgleichung den neuen Wert $\varrho(u)$, dann kann mit diesem ein zweiter nähernder Kreisbogen für das Linienbild konstruiert werden usw.

Es wird sich zeigen, daß für unser Problem diese schrittweise verlaufende Konstruktion des Linienbildes nicht nötig sein wird.

2. Anwendung auf den Schwinger. Die Differentialgleichung des freien, ungedämpften Schwingers lautet

$$m \ddot{x} + f x = 0. \quad (4)$$

Im einfachsten Beispiel des Massenpunktes an der Feder ist m die Masse des Massenpunktes, f die Federkonstante. Die Lösung ist die harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}} \quad (5)$$

bzw. der Periode

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{f}}. \quad (6)$$

Ersetzt man die Funktion $x(t)$ durch $p(u)$, indem man mit

$$u = \sqrt{\frac{f}{m}} t \quad (7)$$

ein neues Zeitmaß einführt, dann wird aus der Differentialgleichung (4) für $x(t)$ die Differentialgleichung

$$p'' + p = 0, \quad (8)$$

wenn Striche Ableitungen nach u bedeuten. Gleichung (8) lehrt zusammen mit (3), daß das Linienbild der Schwingung den Krümmungsradius $\varrho = 0$ besitzt, mithin durch einen Punkt dargestellt wird.

In der Tat ist die Strecke, die eine um einen Punkt (X, Y) (das Linienbild) sich drehende Gerade (die Stützgerade) auf ihrer durch den Koordinatenursprung O gehenden Normalen abschneidet,

$$p(u) = X \cos u + Y \sin u,$$

die durch (8) bestimmte Bewegung also eine harmonische Schwingung mit der Periode

$$U = 2\pi, \quad (9)$$

wie man auch aus (6) und (7) gefolgert hätte.

Wirkt außer der Rückstellkraft $-fx$ noch der Widerstand der trockenen Reibung r , dann wird die Bewegung des Schwingers, da der Widerstand an den Umkehrstellen sprunghaft ändert, durch zwei Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} + fx &= -r, & (\dot{x} > 0), \\ m \ddot{x} + fx &= +r, & (\dot{x} < 0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

gegeben. Die entsprechenden Differentialgleichungen für $p(u)$ lauten

$$\left. \begin{aligned} p'' + p &= -R, & (p' > 0), \\ p'' + p &= +R, & (p' < 0), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wobei

$$R = \frac{r}{f} \quad (12)$$

gesetzt ist.

Nach (3) besteht also das Linienbild der gedämpften Schwingung aus Kreisbögen

vom Radius R ; da die Differentialgleichungen (11) einander in den Umkehrpunkten der Bewegung ablösen, setzen sich die verschiedenen Kreisbögen an jenen Stellen zum Linienbild zusammen, an denen $p' = 0$ ist, d. h. in jenen Punkten, in denen die Linienbildnormale durch den Koordinatenursprung O geht, wie man an Hand der Abb. 4 ohne weiteres erkennt.

Abb. 5 zeigt das Linienbild einer solchen gedämpften Schwingung. Mit den Anfangsbedingungen $p(0)$ und $p'(0)$ erhält man einen ersten Punkt P_0 des Linienbildes. Da $p'(0) > 0$ angenommen ist, gilt vorderhand die erste der Beziehungen (11): nach (3) ist $\varrho(0) = -R$, d. h. der Radius des Kreisbogens, der zunächst das Linienbild darstellt, ist im Sinne negativen $p''(0)$, also nach rechts aufzutragen. Man erhält so im Kreisbogen P_0P_1 mit dem Mittelpunkt M_1 ein erstes Teilstück des Linienbildes C . Im Punkte P_1 geht die Linienbildnormale durch den Koordinatenursprung O ; bezeichnet man den zugehörigen Wert von u mit u_1 , so ist $p'(u_1) = 0$: die erste der Beziehungen (11) tritt außer Kraft und wird durch die zweite abgelöst. Der Radius des Linienbildes wechselt also sein Vorzeichen; das Linienbild wird zum Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M_2 , bis im Punkte P_2 wiederum Umkehr eintritt und das Linienbild sich in einem neuen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M_3 fortsetzt usw.

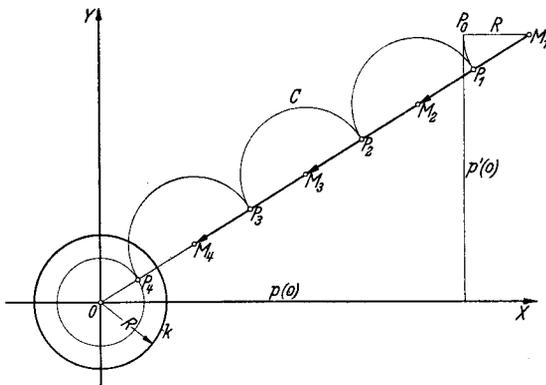


Abb. 5. Linienbild der gedämpften Schwingung.

Die Bewegung muß einmal zum Stillstand kommen. Wenn nämlich der Schwinger bei einer Auslenkung x eine Umkehrstelle besitzt, also momentan zum Stillstand kommt, die der Bedingung

$$|fx| \leq r \quad (13)$$

genügt, dann reicht der Widerstand der Haftreibung aus, um der Rückstellkraft $-fx$ das Gleichgewicht zu halten: (12) führt die Bedingung (13) für x in die Bedingung

$$|p| \leq R \quad (14)$$

für p über.

In den Umkehrpunkten des Linienbildes, d. h. in den Punkten, die den Umkehrstellen der Bewegung entsprechen, geht die Linienbildnormale durch O . In der graphischen Darstellung ist daher das zu einem Umkehrpunkt gehörende p unmittelbar gegeben durch seinen Abstand vom Koordinatenursprung. Zeichnet man also den Stillstandskreis k ein, d. h. den Kreis vom Radius R mit dem Mittelpunkt O , dann lautet (14) in Worten:

Die Voraussetzungen für zeitweiligen (in unserem einfachen Falle dauernden) Stillstand sind gegeben, wenn ein Umkehrpunkt des Linienbildes in den Stillstandskreis fällt.

Im betrachteten Beispiel (Abb. 5) ist P_4 der erste Umkehrpunkt des Linienbildes C , der in den Stillstandskreis k fällt. Das Linienbild für alle folgenden u ist damit der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OP_4 , denn auf diesem Kreise bleibt beständig $p' = 0$ und $p = p(u_4)$.

Damit ist das Linienbild für die ganze Bewegung bekannt. Das Linienbild der Ableitung $p'(u)$ ist die Evolute von C , besteht also, da C sich ausschließlich aus Kreisbögen zusammensetzt, aus den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4, O .

Man erkennt hier die für die folgenden Untersuchungen wesentliche Tatsache, daß die Anordnung der (in unserem Falle endlichen) Punktfolge, die mit dem Linienbild C' identisch ist, ein gewisses Bild der Bewegung gibt. Um beispielsweise die Frage zu entscheiden, ob sich eine Bewegung aufschaukelt, oder ob sie abklingt, genügt es, den Vektorzug $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, \dots$ zu betrachten. Bleibt dieser innerhalb eines Kreises mit endlichem Radius um O , dann schaukelt sich die zugehörige Bewegung nicht beliebig stark auf; geht der Vektorzug aber ins Unendliche, dann führt auch die zugehörige Bewegung zu unendlich großen Ausschlägen.

Die in den nächsten Abschnitten auftretenden Linienbilder werden, entsprechend der Tatsache, daß zu den bisher betrachteten Kräften noch ein störender Einfluß hinzutritt, weniger einfach sein, als dasjenige von Abb. 5.

Im folgenden Abschnitt wird der Einfluß einer stückweise konstanten Störkraft auf den Schwinger untersucht. Weil die Störkraft abschnittsweise konstant ist, wird sich das Linienbild immer noch aus Kreisbögen zusammensetzen, die allerdings nicht mehr alle denselben Radius haben.

An Stelle dieser störenden Kraft werden in den darauffolgenden Abschnitten eine Anzahl Impulse auf den Schwinger einwirken. Sind u_{k-1} und u_k zwei Werte von u , in denen die Impulse Δi_{k-1} und Δi_k , zwischen denen aber keine weiteren Impulse auftreten, dann verhält sich der Schwinger im Intervall $u_{k-1} < u < u_k$ wie ein ungestörter und genügt daher einer der Beziehungen (11). Das Linienbild (Abb. 6) besteht daher im erwähnten Intervall aus einem Kreisbogen $P_{k-1}P_k$. Im Moment, wo u den Wert u_k annimmt, erhöht der Impuls Δi_k die Geschwindigkeit des Schwingers um den Betrag

$$\dot{x}(t_k + 0) - \dot{x}(t_k - 0) = \frac{\Delta i_k}{m}. \quad (15)$$

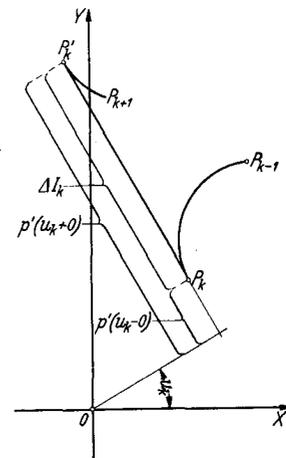


Abb. 6. Linienbildverlauf bei einem Störimpuls Δi_k .

Hieraus wird mit (7)

$$p'(u_k + 0) - p'(u_k - 0) = \Delta I_k, \quad (16)$$

wenn

$$\Delta I_k = \frac{\Delta i_k}{\sqrt{m f}} \quad (17)$$

gesetzt wird. Der Sprung von ΔI_k in p' hat zur Folge, daß der dem nächsten störungsfreien Intervall $u_k < u < u_{k+1}$ entsprechende Kreisbogen des Linienbildes nicht im Punkte P_k anschließt, sondern im Punkte P'_k , den man erhält, wenn man vom Punkte P_k aus auf der Linienbildtangente im positiven Sinne um den Betrag ΔI_k weitergeht. Das Linienbild besteht damit im Intervalle $u_{k-1} < u < u_{k+1}$ aus dem Kreisbogen $P_{k-1} P_k$, der Strecke $P_k P'_k$ und dem Kreisbogen $P'_k P_{k+1}$. Allgemein setzt es sich aus Kreisbögen und Strecken zusammen.

C. Ein erstes Beispiel.

1. Allgemeines. Die Störkraft, die auf den Schwinger einwirkt und mit ihm in Resonanz ist, mithin die Periode τ hat, habe den in Abb. 1 dargestellten Verlauf. Sie ist während einer ersten halben Periode gleich $+k$ und während der zweiten gleich $-k$. Es sind also für die Bewegung folgende vier Differentialgleichungen maßgebend:

$$m \ddot{x} + f x = \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} +k - r \text{ für } \dot{x} > 0 \\ +k + r \text{ für } \dot{x} < 0 \end{array} \right\} \text{ und } n\tau < t < \frac{2n+1}{2}\tau, \\ \left. \begin{array}{l} -k + r \text{ für } \dot{x} < 0 \\ -k - r \text{ für } \dot{x} > 0 \end{array} \right\} \text{ und } \frac{2n+1}{2}\tau < t < (n+1)\tau. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Mit (7) von Abschnitt B gehen sie über in

$$p'' + p = \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} +P - R \text{ für } p' > 0 \\ +P + R \text{ für } p' < 0 \end{array} \right\} \text{ und } 2n\pi < u < (2n+1)\pi, \\ \left. \begin{array}{l} -P + R \text{ für } p' < 0 \\ -P - R \text{ für } p' > 0 \end{array} \right\} \text{ und } (2n+1)\pi < u < 2(n+1)\pi, \end{array} \right\} \quad (2)$$

wobei R aus r mit Abschnitt B (12) folgt, während die Transformation Abschnitt B (7) entsprechend

$$P = \frac{k}{f} \quad (3)$$

liefert. Wegen Abschnitt B (9) entspricht die Eigenperiode und damit auch die Periode der Störung einem vollen Umlauf der Stützgeraden.

2. Das Stillstandsgebiet. Ein voller Umlauf des Winkels u , wobei der zugehörige Fahrstrahl von der positiven X -Achse ausgeht und wieder zu ihr zurückkehrt, soll Zyklus genannt werden. Entsprechend wollen wir die zu einem solchen Umlauf gehörenden Teile des Linienbildes oder des seine Krümmungsmittelpunkte verbindenden Vektorzuges unter dem Namen Zyklus zusammenfassen. Weiter sei jeder Zyklus in zwei Halbzyklen unterteilt:

Erster Halbzyklus: $2n\pi \leq u \leq (2n+1)\pi$.

Zweiter Halbzyklus: $(2n+1)\pi \leq u \leq 2(n+1)\pi$.

Die Bedingungen dafür, daß der Schwinger wenigstens zeitweilig zum Stillstand kommt, lauten

$$\left. \begin{array}{l} n\tau < t < \frac{2n+1}{2}\tau: \quad \dot{x} = 0 \quad \text{und} \quad |k - fx| \leq r, \\ \frac{2n+1}{2}\tau < t < (n+1)\tau: \quad x = 0 \quad \text{und} \quad |k + fx| \leq r, \end{array} \right\} \quad (4)$$

oder in den neuen Veränderlichen

$$-R \leq P \mp p \leq R \quad \text{oder} \quad P + R \geq \pm p \geq P - R, \quad (5)$$

wobei sich das obere Zeichen auf den ersten, das untere auf den zweiten Halbzyklus bezieht.

Von jetzt ab sind drei Fälle zu unterscheiden:

- (a) $P > R$ (kleine Reibung),
- (b) $P < R$ (große Reibung),
- (c) $P = R$ (Grenzfall).

Ungleichung (5) lautet für die drei Fälle in Worten:

Wenigstens zeitweiliger Stillstand tritt ein, wenn

(a) in einem ersten Halbzyklus ein Umkehrpunkt mit positiver Auslenkung oder in einem zweiten Halbzyklus ein solcher mit negativer Auslenkung in den Kreisring (Abb. 7a) fällt, der mit den Radien $P + R$ und $P - R$ um den Koordinatenursprung konstruiert werden kann,

(b) in einem ersten Halbzyklus ein Umkehrpunkt mit positiver Auslenkung in den Kreis vom Radius $R + P$ (Abb. 7b) oder ein solcher mit negativer Auslenkung in den Kreis vom Radius $R - P$ um O fällt; oder wenn in einem zweiten Halbzyklus ein Umkehrpunkt mit positiver Auslenkung in den Kreis vom Radius $R - P$ oder ein solcher mit negativer Auslenkung in den Kreis vom Radius $R + P$ um O fällt,

(c) in einem ersten Halbzyklus ein Umkehrpunkt mit positiver oder in einem zweiten Halbzyklus ein solcher mit negativer Auslenkung in den Kreis vom Radius $2R$ um O fällt (Abb. 7c).

Beachtet man die Tatsache, daß auf Grund der hier vorliegenden Resonanz zum ersten Halbzyklus gehörende Umkehrpunkte mit posi-

tiver Auslenkung sowie zum zweiten Halbzyklus gehörende Umkehrpunkte mit negativer Auslenkung in der oberen, alle übrigen in der unteren Halbebene liegen, dann erkennt man, daß sich die Stillstandsgebiete der Abb. 7 noch vereinfachen lassen.

Im Fall (a) reduziert sich der Kreisring (Abb. 7a) auf seine über der Abszissenachse liegende Hälfte. Im Fall (b) reduziert sich das teilweise doppelt überdeckte Stillstandsgebiet auf den größeren Halbkreis vom Radius $R + P$ in der oberen und den kleineren vom Radius $R - P$ in der unteren Halbebene. Im Fall (c) endlich bleibt nur die über der X -Achse liegende Kreishälfte stehen.

Definiert man die Stillstandsgebiete auf diese Weise, dann prüft man an Hand der oben gegebenen Stillstandsbedingungen leicht nach, daß jeder ins Stillstandsgebiet fallende Umkehrpunkt wenigstens zu zeitweiligem Stillstand führt. In den Abb. 8, 10 und 11, die für die drei Fälle je einige Linienbilder mit den zugehörigen Vektorzügen zeigen, sind die Stillstandsgebiete schraffiert.

3. Linienbild und Bewegung im Fall (a): $P > R$. Abb. 8 zeigt einige Linienbilder für diesen Fall. C_1 ist konstruiert mit den Anfangsbedingungen $p(0) > 0$, $p'(0) > 0$, mit denen man einen ersten Punkt P_0 des Linienbildes erhält. Mit $u = 0$ beginnt ein erster Halbzyklus, so daß vorderhand die erste der Beziehungen (2) maßgebend ist; daher ist zunächst $\varrho(u) = P - R > 0$. Der Radius des ersten Linienbildteilstückes P_0P_1 ist demnach im Sinne des positiven p'' , also nach links abzutragen. P_1 ist ein erster Umkehrpunkt: p' wird negativ, die zweite der Differentialgleichungen (2) tritt in Kraft, weshalb der Linienbildradius von $P - R$ auf $P + R$ springt. Im Punkte P_2 ist der erste Halbzyklus beendet; der zweite beginnt, d. h. die zweite Gleichung (2) wird durch die dritte abgelöst: der Krümmungsradius wechselt Betrag und Vorzeichen; P_2P_3 ist der nächste Teilbogen, bis im Punkte P_3 , der wieder ein Umkehrpunkt ist, die vierte Gleichung (2) einen neuen Radius bestimmt. In P_4 endlich ist der erste Zyklus vollendet und es beginnt ein neuer.

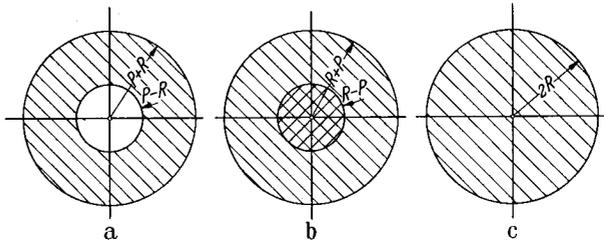


Abb. 7. Stillstandsgebiete.

Entsprechend läßt sich das Linienbild C_2 konstruieren, bei dem andere Anfangsbedingungen, nämlich $p(0) > 0$, $p'(0) < 0$ angenommen sind. C_1 und C_2 stellen die Typen von Linienbildern dar, die nicht in die Stillstandszone gelangen. Die ihnen zugeordneten Vektorzüge sind recht einfach aufgebaut.

Im Unterschied zum Vektor, der eine Strecke von gegebener Größe, Richtung und gegebenem Sinn darstellt, sei unter dem Begriffe einer Zentralen eine Strecke verstanden, die auf einer durch den Koordinatenursprung gehenden Geraden liegt, eine gegebene Größe hat und gegen O zu gerichtet ist.

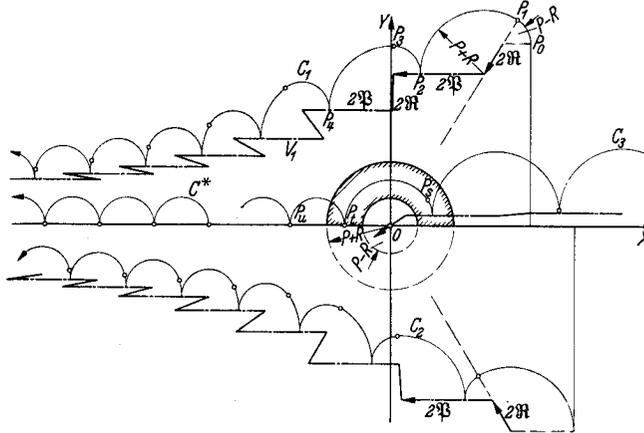


Abb. 8. Linienbilder im Fall (a): $P > R$.

Die Vektorzüge der nicht in die Stillstandszone gelangenden Linienbilder bestehen dann abwechselungsweise aus Vektoren $2P$ und Zentralen $2R$. Die Vektoren $2P$ haben Richtung und Sinn der negativen Abszissenachse; ihr Betrag ist $2P$. Die Zentralen $2R$ haben den Betrag $2R$.

Abb. 8 zeigt, daß sich die Vektorzüge, die nicht ins Stillstandsgebiet gelangen, der negativen Abszissenachse nähern.

Der Gedanke liegt nahe, durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen ein Linienbild herzustellen, dessen Vektorzug in der X -Achse selbst liegt. C^* stellt ein solches

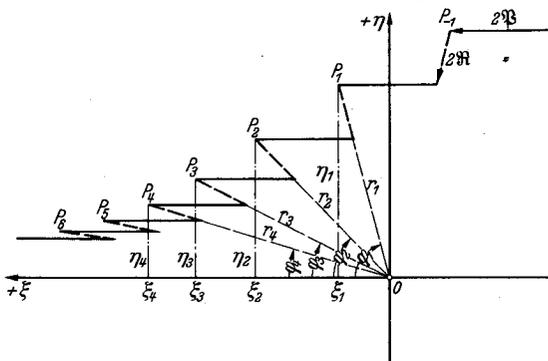


Abb. 9. Konvergenz des Vektorzuges im Fall (a): $P > R$.

Linienbild dar, das den Anfangsbedingungen $p(0) < 0$, $p'(0) = 0$ entspricht. Nach dem Vorgange von **Meißner** sei ein solches Linienbild Restlösung genannt; die dargestellte Bewegung ist nicht periodisch, denn die Ausschläge nehmen dauernd zu, aber sie unterscheidet sich dadurch von der durch die Linienbilder C_1 und C_2 dargestellten allgemeineren Bewegung, daß die Umkehrpunkte den Werten $u = n\pi$ entsprechen, also in gleichen Zeitintervallen aufeinanderfolgen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Linienbilder, die nicht in die Stillstandszone geraten, sich einer Restlösung unbeschränkt nähern (Abb. 9). Da der zur Restlösung gehörende Vektorzug in der X -Achse verläuft, muß bewiesen werden, daß der zu einer nicht in die Stillstandszone gelangenden Bewegung gehörende Vektorzug nach der negativen X -Achse hin konvergiert. Legt man ein (ξ, η) -Koordinatensystem so, daß die positive ξ -Achse mit der negativen X -Achse, die $+\eta$ -Achse mit der $+Y$ -Achse zusammenfällt, dann sind ξ_k, η_k die cartesischen Koordinaten der Anfangspunkte P_k der Zentralen, r_k, φ_k die entsprechenden Polarkoordinaten. Nach Voraussetzung ist

$$2P - 2R = A > 0. \tag{6}$$

Da

$$\xi_{k+1} - \xi_k = 2P - 2R \cos \varphi_k \geq A \tag{7}$$

ist, konvergiert die Folge der ξ_k monoton gegen $+\infty$. Es existiert daher ein erster Punkt P_1 mit positivem ξ_1 .

Die η_k bilden eine monoton fallende Folge positiver Größen; sie besitzen daher einen Grenzwert η , der größer oder gleich Null ist. Es gibt also zu einem beliebigen klein

vorgegebenen positiven ε einen Zeiger n so, daß

$$\eta_{n+r} - \eta < \varepsilon \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

ist. Da

$$\eta_k - \eta_{k+1} = 2R \sin \varphi_k \quad (9)$$

ist, folgt aus (8)

$$2R \sum_{n+r}^{\infty} \sin \varphi_k < \varepsilon, \quad (10)$$

d. h. die Reihe $\sum \sin \varphi_k$ konvergiert. Nun ist aber

$$\sin \varphi_k = \frac{\eta_k}{r_k} > \frac{\eta}{\xi_k + \eta_k} > \frac{\eta}{\xi_k + \eta_1} > \frac{\eta}{\xi_1 + \eta_1 + (k-1)2P} \quad (k > 1), \quad (11)$$

also konvergiert auch

$$2R\eta \sum \frac{1}{\xi_1 + \eta_1 + 2(k-1)P}. \quad (12)$$

Hieraus folgt, daß $\eta = 0$ sein muß; denn die Reihe (12) ist die harmonische, die ja bekanntlich nicht konvergiert.

Damit ist bewiesen, daß die Abszissen der P_k gegen $+\infty$, ihre Ordinaten gegen 0 konvergieren. Folglich konvergiert jedes nicht in die Stillstandszone gelangende Linienbild gegen die Restlösung, die ihrerseits ins Unendliche geht.

Es bleiben noch die Linienbilder zu untersuchen, die in die Stillstandszone gelangen. In Abb. 8, in der die Umkehrstellen durch kleine Kreise markiert sind, ist C_3 ein solches Linienbild. Die Umkehrstellen liegen bei den Linienbildern, deren Vektorzüge in der oberen Halbebene verlaufen, jeweils auf der rückwärtigen Verlängerung der zugehörigen Zentralen, und zwar im Abstand $P + R$ vom Endpunkt der Zentralen. Bei den Linienbildern, deren Vektorzüge in der unteren Halbebene verlaufen, liegen die Umkehrpunkte ebenfalls auf den Verlängerungen der Zentralen, aber im Abstand $P - R$ vor deren Endpunkt.

Man erkennt ohne weiteres, daß ein Umkehrpunkt dann und nur dann in die Stillstandszone fällt, wenn die zugehörige Zentrale den Koordinatenursprung enthält. Dauernder Stillstand ist ausgeschlossen, denn die Stillstandszone enthält keinen Vollkreis mit dem Mittelpunkt O .

Das Linienbild C_3 besitzt einen ersten Umkehrpunkt P_s in der Stillstandszone. Ist die zugehörige Auslenkung positiv, dann gehört der Umkehrpunkt zum ersten Halbzyklus. Die Bewegung kommt also zur Ruhe; das Linienbild setzt sich fort im Kreisbogen $P_s P_t$ mit dem Mittelpunkt O . In P_t setzt der zweite Halbzyklus ein; die Störkraft wird negativ und unterstützt die Rückstellkraft; p' wird negativ; die dritte Gleichung (2) tritt in Kraft und es wird $\varrho = -P + R < 0$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens, der die Weiterbewegung beschreibt, liegt, da u ein ungerades Vielfaches von π ist, links von P_t , also ist $P_t P_u$ ein weiterer Bogen des Linienbildes. Genau dasselbe Ergebnis hätte man auch unter der Annahme einer negativen Auslenkung in P_s erhalten, ebenso für ein Linienbild mit aus der unteren Halbebene kommendem Vektorzug. Bemerkenswert ist, daß kein weiterer Stillstand stattfinden kann, und ferner, daß das Linienbild die Stillstandszone als Restlösung verläßt.

Zusammenfassung. Im Fall (a) kleiner Reibung ($P > R$) schaukelt sich jede Bewegung unbegrenzt auf. Entweder tritt kein oder ein einziger zeitweiliger Stillstand auf. Ein möglicher vorübergehender Stillstand hat höchstens die Dauer einer halben Periode. Die nicht stillstehenden Bewegungen konvergieren nach einer Restlösung im oben umschriebenen Sinne, die stillstehenden treten nach dem Stillstand die Bewegung als Restlösung an. Die Restlösung schaukelt sich unbegrenzt auf; ihr zeitlicher Verlauf ist genau entgegengesetzt der Bewegung, die ein mittels der Reibungskraft $k - r$ gedämpfter Schwinger ausführt.

4. Linienbild und Bewegung im Fall (b): $P < R$. Abb. 10 zeigt für diesen Fall einige Linienbilder. Sie werden entsprechend denjenigen von Fall (a) mit Hilfe der Differentialgleichungen (2) konstruiert und bestehen aus Kreisbögen mit den Radien $R - P$ und $R + P$. Ebenso setzt sich jeder zugehörige Vektorzug abwechselungsweise aus Vektoren $2\mathfrak{P}$ und Zentralen $2\mathfrak{R}$ zusammen. Die Umkehrpunkte liegen auf den Zentralen, und zwar bei Vektorzügen in der oberen Halbebene im Abstand $R + P$, bei solchen unter der X -Achse im Abstand $R - P$ von der Spitze der zugehörigen Zentralen. Man erkennt wiederum, daß ein Umkehrpunkt dann und nur dann in die Stillstandszone fällt, wenn die zugehörige Zentrale den Koordinatenursprung O enthält.

Bezeichnet man (Linienbild C_2 von Abb. 10) die Anfangspunkte der Zentralen mit P_1, P_2, P_3, \dots , und nennt man den Abstand des Punktes P_k vom Ursprung r_k , dann gilt

$$r_k - r_{k+1} \geq 2R - 2P = B > 0; \quad (13)$$

die Folge der r_k konvergiert also nach $-\infty$; mithin trifft man bei jedem Vektorzug nach endlich vielen Zyklen auf eine Zentrale, die durch O geht. Liegt der zugehörige Umkehrpunkt im kleineren Kreis des Stillstandsgebietes, der den Radius $R - P$ hat, dann ist der Stillstand dauernd, denn der Linienbildkreis, der den Stillstand darstellt, führt nicht mehr aus der Stillstandszone heraus. Liegt er aber wohl im großen, nicht

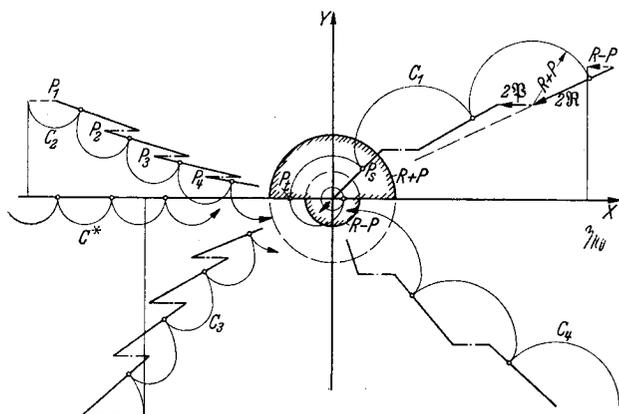


Abb. 10. Linienbilder im Fall (b): $P < R$.

aber im kleinen Kreis der Stillstandszone, wie beispielsweise der Punkt P_3 des Linienbildes C_1 , dann tritt wieder Bewegung ein, und zwar diejenige Bewegung, die der Restlösung C^* entspricht. Wie man leicht an Hand der Abb. 10 erkennt, führt diese Bewegung aber nach einer endlichen Anzahl von Zyklen zu einem Umkehrpunkt, der auch im kleineren der beiden Stillstandskreise liegt, und damit zu dauerndem Stillstand führt.

Zusammenfassung. Jede Bewegung kommt nach Ablauf einer endlichen Zeitspanne zur Ruhe. Sie bleibt entweder vom Augenblick des ersten Stillstandes an in Ruhe, oder dieser erste Stillstand hat höchstens die Dauer einer halben Periode; es tritt nochmals Bewegung ein, die der Restlösung entspricht, und der zweite Stillstand ist endgültig. Die Restlösung entspricht der Schwingung, die der Schwinger unter dem Einfluß der Reibungskraft $r - k$ ausführen würde.

5. Linienbild und Bewegung im Fall (c): $P = R$. Abb. 11 zeigt einige Linienbilder, die diesem Fall entsprechen. Er ist der Grenzfall zwischen (a) und (b). Das Linienbild besteht allein aus Kreisbögen vom Radius $2R$, da der in den beiden anderen Fällen auftretende kleinere Kreisbogen zu einem Punkte entartet ist.

Das Linienbild C_1 , das mit den Anfangsbedingungen $p > 0, p' > 0$ konstruiert ist, wird beispielsweise folgendermaßen erhalten. Wegen $u_0 = 0$ (erster Halbzyklus) und $p'(0) > 0$ gilt vorerst die erste der Gleichungen (2); der Linienbildradius ist gleich Null; das Linienbild besteht zunächst aus dem Punkte P_0 , um den sich die Stützgerade solange dreht, bis ihre Normale in P_0 durch O geht, also p' sein Zeichen wechselt. Nun tritt die zweite Gleichung (2) in Kraft; das Linienbild wird zum Kreisbogen $P_0 P_1$ vom Radius $2R$ usw. Der zugehörige Vektorzug besteht wieder abwechselungsweise aus Vektoren $2\mathfrak{P}$ und Zentralen $2\mathfrak{R}$, die alle denselben Betrag $2R$ besitzen.

C_2 und C_3 (Abb. 11) sind Linienbilder, die nicht in den Stillstandshalbkreis gelangen. Sie konvergieren gegen einen Punkt auf der negativen X -Achse. Der Konvergenzbeweis wird analog dem Beweis in Fall (a) folgendermaßen geführt.

Wir betrachten wiederum die Folge der Anfangspunkte P_k der Zentralen im (ξ, η) -Koordinatensystem. Es gilt

$$\xi_{k+1} - \xi_k > 2R \quad (\xi_k < 0). \tag{14}$$

Folglich besitzt jeder Vektorzug einen ersten Punkt P_1 (dem, nötigenfalls durch sinngemäße Umnummerierung der Punkte P_k , der Zeiger 1 gegeben werden soll) mit positivem ξ_1 . Ferner gilt für alle k

$$\xi_{k+1} - \xi_k \geq 0. \tag{15}$$

Die Folge der ξ_k konvergiert also monoton nach einem endlichen positiven Werte oder nach $+\infty$.

Der Beweis dafür, daß die Folge der η_k gegen Null konvergiert, kann von Fall (a) her wörtlich übernommen werden. Insbesondere gilt auch hier (10), d. h. die Reihe $\sum \sin \varphi_k$ konvergiert. Auf Grund der oben erwähnten Umnummerierung der P_k ist

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_k > \sin \left(\frac{\varphi_k}{2} \right) > \sin^2 \left(\frac{\varphi_k}{2} \right) \\ (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

Als Minorante der Reihe $\sum \sin \varphi_k$ konvergiert auch $\sum \sin^2(\varphi_k/2)$. Bei beliebig klein vorgegebenem positiven ε gibt es also einen Zeiger n so, daß

$$\sum_r^s \sin^2 \left(\frac{\varphi_k}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_r^s (1 - \cos \varphi_k) < \frac{\varepsilon}{4R} \quad (n < r < s) \tag{17}$$

ist. Nun ist aber

$$\xi_{k+1} - \xi_k = 2R (1 - \cos \varphi_k). \tag{18}$$

Dies, in (17) eingesetzt, liefert

$$\xi_s - \xi_r = 2R \sum_r^{s-1} (1 - \cos \varphi_k) < \varepsilon \quad (n < r < s); \tag{19}$$

also haben die ξ_k einen positiven, endlichen Grenzwert. Die Restlösung besteht daher aus einem Punkte auf der negativen X -Achse.

Es bleiben die Linienbilder zu untersuchen, die in die Stillstandszone geraten, wie beispielsweise C_1 in Abb. 11.

Die Umkehrpunkte liegen in den Endpunkten der Zentralen, und zwar bei oberhalb der X -Achse verlaufenden Vektorzügen im Anfangs-, bei unterhalb verlaufenden im Endpunkt. Damit ist auch hier die Bedingung für zeitweiligen Stillstand die, daß eine Zentrale den Koordinatenursprung enthält.

Sei etwa P_s der erste Umkehrpunkt im Stillstandsgebiet, dann wird das Linienbild zum Kreisbogen $P_s P_i$; im Punkte P_i tritt wieder Bewegung ein: das Linienbild besteht fortan aus dem Punkte P_i und ist somit zur Restlösung geworden.

Zusammenfassung. Jede Bewegung bleibt erhalten; die Ausschläge bleiben endlich. Entweder konvergiert die Bewegung nach einer Restlösung, oder sie wird nach einem vorübergehenden Stillstand, der höchstens die Dauer einer halben Periode hat, zu einer solchen. Die Restlösung ist die harmonische Schwingung. Die Bewegung stellt sich so ein, daß sich in jedem Augenblicke Störkraft und Reibungskraft aufheben.

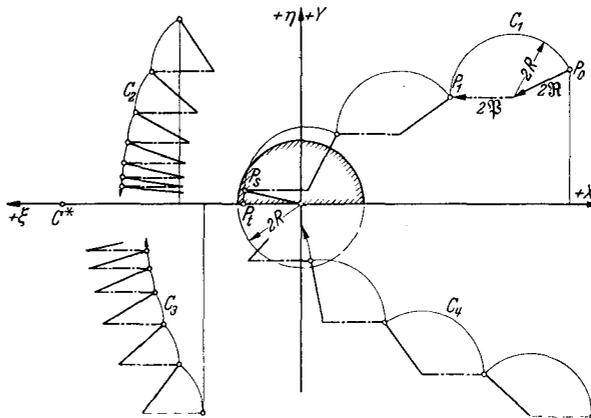


Abb. 11. Linienbilder im Fall (c): $P = R$.

(ξ, η) -Koordinatensystem

$$\xi = \Delta I \quad (1)$$

ist. Der Punkt P_2 liegt ebenfalls auf der Geraden g , und zwar im Abstand R über S_2 . Da wegen der Voraussetzung $\Delta I > 2R$ die Gerade g ganz außerhalb des Kreises k' liegt, liegt P_2 außerhalb k' , Q_2 fällt somit nicht mehr in den Stillstandskreis. Der Vektorzug setzt sich in gewohnter Weise fort; da die Beziehung Abschnitt C (7) auch hier gültig ist, wenn $2P$ durch ΔI ersetzt wird, liegen alle weiteren Zentralenanfangspunkte P_3, P_4, \dots links der Geraden g ; es fällt somit kein Umkehrpunkt mehr in die Stillstandszone.

Zusammenfassung. Sämtliche Bewegungen konvergieren, entweder ohne oder nach einem einzigen, die Dauer einer halben Periode nicht überschreitenden Stillstand nach einer Restlösung. Die Ausschläge der Restlösung schaukeln sich ins Unendliche auf, die Höchstausschläge folgen genau im Zeitabstand einer halben Periode aufeinander.

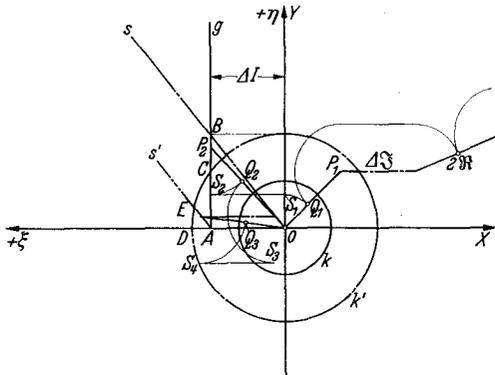


Abb. 14. Eintritt in die Stillstandszone im Fall (b): $\Delta I < 2R$.

3. Linienbild und Bewegung im Fall (b):

$\Delta I < 2R$. C_2 in Abb. 12 entspricht diesem Falle. Wie im letzten Abschnitte schließt man aus der Tatsache, daß der Betrag des Vektors $\Delta \mathfrak{S}$ kleiner ist als der Betrag der Zentralen $2\mathfrak{R}$, daß jede Lösung in die Stillstandszone gehen muß. Hier bildet allerdings der Vektor $\Delta \mathfrak{S}'$, der bei Übergang des Vektorzuges über die Y -Achse an Stelle des Vektors $\Delta \mathfrak{S}$ tritt, eine Ausnahme; der Schluß gilt trotzdem deshalb, weil der Vektorzug, wie in Ziffer I erwähnt, bis zum Eintritt in die Stillstandszone höchstens einen Vektor $\Delta \mathfrak{S}'$ enthält.

In Abb. 14 sei Q_1 der kritische Umkehrpunkt, P_1 der Anfangspunkt der zugehörigen Zentralen. Wie im Fall (a) wird das Linienbild nacheinander zum Kreisbogen $Q_1 S_1$, dann zur Strecke $S_1 S_2$ und schließlich zum Kreisbogen $S_2 Q_2$. Q_2 ist der nächste Umkehrpunkt, P_2 der Anfangspunkt der zugehörigen Zentralen. Je nach der Lage des kritischen Umkehrpunktes Q_1 im Stillstandskreis liegt P_2 höher oder tiefer auf der Geraden g , welche die Gleichung (1) hat. Da der absolute Betrag der Ordinate des Punktes S_1 bzw. S_2 kleiner, höchstens gleich R ist, liegt P_2 auf der Teilstrecke AB der Geraden g , wobei A deren Schnittpunkt mit der ξ -Achse bezeichnet und B die Ordinate $2R$ hat.

Nach Voraussetzung ($\Delta I < 2R$) schneidet die Gerade g den Kreis k' ; der in der oberen Halbebene liegende Schnittpunkt C unterteilt die Strecke AB . Liegt P_2 auf der Strecke AC , dann führt der Umkehrpunkt Q_2 neuerdings zum Stillstand. Liegt aber P_2 auf CB , dann geht die Bewegung weiter. Abb. 14 zeigt die zweite Alternative; das Linienbild setzt sich normal fort als Kreisbogen $Q_2 S_3$, Strecke $S_3 S_4$, Kreisbogen $S_4 Q_3$. Für die weitere Untersuchung muß zwischen den beiden Fällen (P_2 auf AC und P_2 auf CB) unterschieden werden.

Erster Fall: P_2 liege auf AC . Man kann zeigen, daß alle weiteren Punkte P_3, P_4, \dots auch auf der Strecke AC liegen. Die Gerade g (Abb. 15) ist parallel zur η -Achse und liegt wegen (1) in der linken Halbebene. Daher ist

$$AD \leq AC. \quad (2)$$

Nun ist

$$AP_3 = R - AS_4 = R - OS_3 = R - OQ_2. \quad (3)$$

Der letzte Ausdruck stellt die Entfernung des Punktes Q_2 von der Peripherie des Kreises k oder, was dasselbe ist, die Entfernung des Punktes P_2 von der Peripherie des Kreises k' dar. Da diese kleiner, höchstens gleich AD ist, folgt mit (2)

$$AP_3 \leq AD \leq AC. \quad (4)$$

η_{i+1} geht aus r_i mit der Beziehung (5) hervor. Graphisch gewinnt man P_{i+1}^* , indem man durch P_i^* die Parallele zur η -Achse legt, diese mit der Geraden h

$$r = 2R - \eta \tag{7}$$

schneidet und die durch den Schnittpunkt gelegte Parallele zur r -Achse mit der Hyperbel zum Schnitt bringt. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Prozesses gewinnt man der Reihe nach die Punkte $P_{i+2}^*, P_{i+3}^*, \dots$

Da der betrachtete Hyperbelast im ersten Quadranten durchwegs konvex ist, sind die beiden Folgen $P_i^*, P_{i+2}^*, P_{i+4}^*, \dots$ und $P_{i+1}^*, P_{i+3}^*, P_{i+5}^*, \dots$ monoton, haben also je einen Häufungspunkt. Nun ist der Schnittpunkt der Hyperbel mit der Geraden h Häufungspunkt beider Folgen, wie man sofort einsieht, wenn man bedenkt, daß er der Gleichung (7) genügt, und wenn man (7) mit (5) vergleicht. Folglich ist dieser

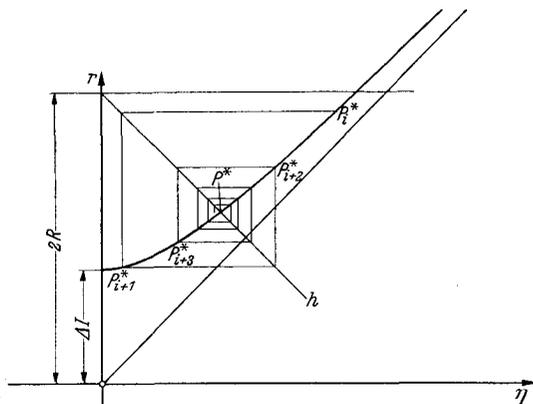


Abb. 16. Konvergenz der Restlösung im Fall (b): $\Delta I < 2R$.

Schnittpunkt P^* der einzige Häufungspunkt der beiden Folgen. Die Stillstands-lösung strebt also nach einer Restlösung, die periodisch ist und die man nun leicht

konstruieren kann.

Da der Anfangspunkt P der Zentralen der periodischen Lösung den Bedingungen (6) und (7) genügt, sind seine Koordinaten im (ξ, η) -System

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Delta I, \\ \eta &= R - \frac{(\Delta I)^2}{4R}. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Damit kann aus den gegebenen Größen ΔI und R sogleich die periodische Restlösung konstruiert werden. Die Konstruktion ist in Abb. 17 für

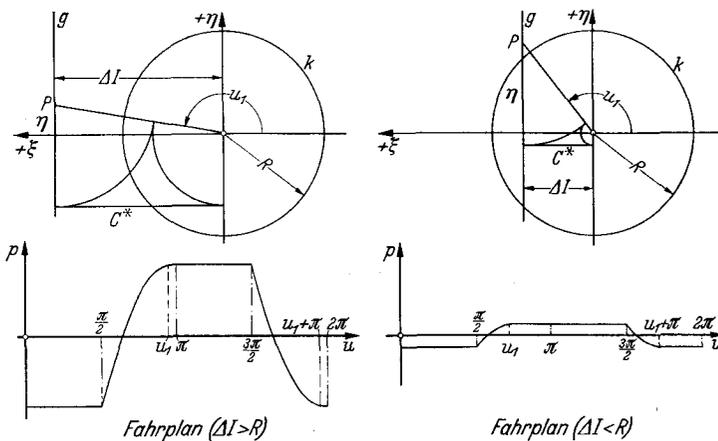


Abb. 17. Zwei Restlösungen im Fall (b): $\Delta I < 2R$.

zwei verschiedene Verhältnisse $\Delta I/R$ durchgeführt; zudem sind die beiden zugehörigen Fahrpläne beigelegt, die den Linienbildern punktweise entnommen werden können.

Man erkennt, daß jeder Zyklus $0 \leq u < 2\pi$ in vier Unterabschnitte zerfällt. Zwei Gebietsgrenzen, nämlich $\pi/2$ und $3\pi/2$ entsprechen den Impulsen und sind damit fest, die beiden anderen, u_1 und $u_1 + \pi$, hängen vom Verhältnis $\Delta I/R$ ab. In jedem der vier Teilabschnitte wird die Bewegung durch ein anderes Gesetz beschrieben.

Die beiden Werte von u , an denen die Bewegung zum Stillstand kommt, genügen der Bedingung

$$\text{tg } u_1 = \text{tg } u_2 = -\frac{\eta}{\Delta I}, \tag{9}$$

wie man ohne weiteres aus Abb. 17 abliest. Also ist

$$u_1 = \pi - \text{arc tg} \left(\frac{R}{\Delta I} - \frac{\Delta I}{4R} \right), \quad u_2 = u_1 + \pi. \tag{10}$$

Wie man wiederum aus Abb. 17 abliest, ist die periodische Schwingung durch folgende vier Gesetze gegeben:

$$\left. \begin{aligned}
 p &= - \left\{ R + \Delta I \cos u - \left[R - \frac{(\Delta I)^2}{4R} \right] \sin u \right\} & \left(\frac{\pi}{2} \leq u \leq u_1 \right), \\
 p &= \frac{(\Delta I)^2}{4R} & \left(u_1 \leq u \leq \frac{3\pi}{2} \right), \\
 p &= + \left\{ R + \Delta I \cos u - \left[R - \frac{(\Delta I)^2}{4R} \right] \sin u \right\} & \left(\frac{3\pi}{2} \leq u \leq u_2 \right), \\
 p &= - \frac{(\Delta I)^2}{4R} & \left(u_2 \leq u \leq \frac{5\pi}{2} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

4. Linienbild und Bewegung im Fall (c): $\Delta I = 2R$. Linienbild C_3 in Abb. 12 zeigt diesen Fall, und zwar eine Bewegung, die außerhalb der Stillstandszone verläuft. Wie im Abschnitt C, Ziffer 5, beweist man, daß die Folge der Anfangspunkte der Zentralen gegen einen Punkt auf der ξ -Achse konvergiert. Die nicht stillstehenden Bewegungen streben also einer Restlösung zu, die weiter unten betrachtet werden soll.

An Hand der Abb. 18 sollen die Bewegungen untersucht werden, die zunächst in die Stillstandszone geraten. Ist Q_1 der kritische Umkehrpunkt des Linienbildes C , dann liegt, wie in den vorhergehenden Fällen, der Anfangspunkt P_2 der nächsten Zentralen auf der Geraden g . Diese berührt den Kreis k' in ihrem Schnittpunkt mit der ξ -Achse. Da die Beziehung Abschnitt C (7) mit derschon erwähnten neuen Bezeichnungswiese immer noch gilt, mithin die Folge der ξ_k auch in diesem Fall monoton ansteigt, liegen mit P_2 auch alle weiteren Punkte P_k sicher nicht im Inneren des Kreises k' . Es tritt somit kein weiterer Stillstand ein und das Linienbild konvergiert in der gewohnten Weise nach einer Restlösung.

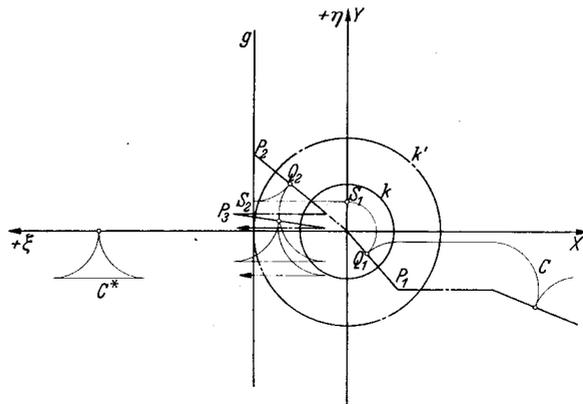


Abb. 18. Linienbild mit Stillstand im Fall (c): $\Delta I = 2R$.

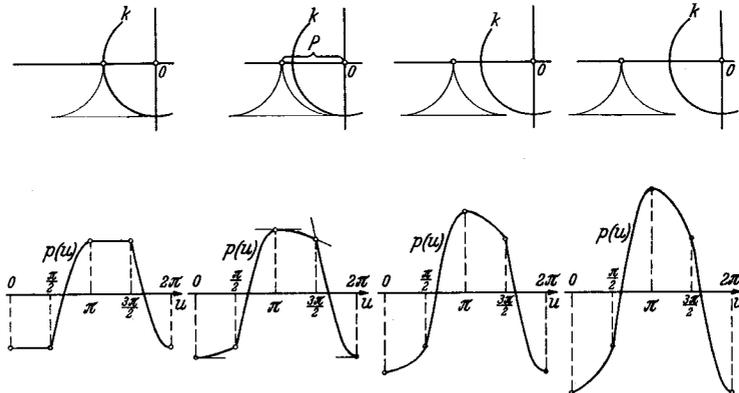


Abb. 19. Periodische Schwingungen im Fall (c): $\Delta I = 2R$.

Es kann hier der Ausnahmefall eintreten, daß P_2 mit dem Berührungspunkte der Geraden g und des Kreises k' zusammenfällt. In diesem Falle ist das Linienbild fortan mit der Restlösung identisch.

C^* (Abb. 18) zeigt eine mögliche Restlösung. Die Restlösung für den eben erwähnten Grenzfall erhält man, wenn man die Figur C^* so weit nach rechts verschiebt, daß sie die η -Achse eben berührt. Der rechte Kreisbogen von C^* fällt dann zusammen mit dem Kreise k , d. h. die Bewegung steht während der Dauer einer Viertelperiode still.

Zusammenfassung. Jede Bewegung konvergiert, entweder gleich von Anfang an, oder nach einem Stillstand, der höchstens eine halbe Periode dauert, nach einer periodischen Schwingung mit endlicher Amplitude. Bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen kann man erreichen, daß die Bewegung schon nach Ablauf einer endlichen Zeitspanne, nämlich schon vom ersten Stillstand an, stationär ist. Die Schwingung steht in diesem Falle während der Dauer einer Viertelperiode still.

Abb. 19 zeigt einige Restlösungen samt den zugehörigen Fahrplänen. Man beachte, daß der links außen skizzierte Ausnahmefall lediglich einen Grenzfall der allgemeineren Restlösung darstellt. Die Bewegung gehorcht in den vier Vierteln eines Zyklus vier verschiedenen Gesetzen. Es treten jedoch je Zyklus nur zwei Ecken im Fahrplan auf, nämlich bei $\pi/2$ und $3\pi/2$, also bei denjenigen Werten von u , die durch das Auftreten der Impulse gekennzeichnet sind. In den Werten von u , die den Umkehrpunkten entsprechen, also für $u = 0, \pi, 2\pi, \dots$ fügen sich die Bögen, aus denen der Fahrplan besteht, mit stetiger Tangente zusammen. Nimmt man den Höchstausschlag P , also die Distanz des Umkehrpunktes der Restlösung vom Koordinatenursprung O , der in nicht einfacher Weise von den Anfangsbedingungen abhängt, als Parameter, so läßt sich der stationäre Bewegungsverlauf durch folgende vier Gesetze beschreiben:

$$\left. \begin{aligned} p &= -[R + (P - R) \cos u] & \left(0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ p &= -[R + (P + R) \cos u] & \left(\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi \right), \\ p &= +[R + (P - R) \cos u] & \left(\pi \leq u \leq \frac{3\pi}{2} \right), \\ p &= +[R + (P + R) \cos u] & \left(\frac{3\pi}{2} \leq u \leq 2\pi \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wesentlich an diesem zweiten Beispiel ist wiederum die Tatsache, daß die Bewegungen bei vorgegebenem Störungsverlauf im allgemeinen entweder abklingen oder sich dauernd aufschaukeln. Eine stationäre Schwingung kommt nur für den Grenzfall $\Delta I = 2R$, d. h. $\Delta i = 2 \cdot r \sqrt{m/j}$ zustande.

E. Aufstieg zu n Impulspaaren.

1. Problemstellung. Es handelt sich nun darum, das Störungsgesetz, das im letzten Abschnitt aus einem Impulspaar (je Zyklus) bestand, zu einem aus endlich vielen Impulspaaren aufgebauten Störungsgesetze zu erweitern. Konstruiert man ein Störungsgesetz auf die Weise, daß man n Impulspaare der im letzten Abschnitt behandelten Art derart überlagert, daß bei geeigneter Wahl des u -Nullpunktes alle Impulse desselben Vorzeichens in einen und denselben Halbzyklus fallen, dann erhält man ein Gesetz, das den in Abschnitt A formulierten Voraussetzungen 2, 3 und 4 genügt. Ein den Voraussetzungen 1 bis 4 genügendes, stückweise stetiges Kraftgesetz ließe sich daher durch ein solches, aus n Impulspaaren zusammengesetztes Störungsgesetz approximieren. Wie schon erwähnt, wird jedoch in Abschnitt F die direkte Untersuchung durchgeführt werden.

Als Unterlage für das Folgende soll das in Abb. 3 dargestellte Gesetz mit $n = 4$ dienen. Der Verlauf des Linienbildes ist nicht mehr so einfach wie in den letzten Abschnitten. Wohl ist es möglich, die Restlösung anzugeben; hingegen wird die Frage der Konvergenz nach dieser Restlösung sehr verwickelt. Es wird auch nicht möglich sein, aus den Anfangsbedingungen einen zwingenden Schluß auf den Bewegungsverlauf zu ziehen. Die Untersuchung soll sich deshalb auf die Entscheidung beschränken, ob ein gegebenes Störungsgesetz bei geeigneten Anfangsbedingungen zu aufschaukelnden Schwingungen führen kann, oder ob es bei beliebigen Anfangsbedingungen stets abklingende Bewegungen liefert. Für die Praxis ist ja diese Frage in erster Linie von Wichtigkeit; der Charakter der nicht aufschaukelnden Bewegungen interessiert erst in zweiter Linie, ebenso die Frage, ob ein Störungsgesetz, das bei gewissen Anfangsbedingungen zu dauernd aufschaukelnden Bewegungen führen kann, bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen nicht auch eine im Endlichen bleibende Schwingung liefern kann.

2. Einfache Zyklen im Vektorzug. Abb. 20 zeigt Teilstücke aus Linienbildern, die mit dem Störungsgesetz der Abb. 3 konstruiert sind. Es gelten wie immer die Differentialgleichungen Abschnitt B (11), wobei sich R aus Abschnitt B (12) berechnet.

Dementsprechend besteht das Linienbild teilweise aus Kreisbögen vom Radius R (C_1 beispielsweise aus den Kreisbögen $P_0 P_1, P_2 P_3, P_4 P_5, \dots$). In den Werten u_1, u_2, \dots, u_n wirken die Störimpulse $\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n$. Demgemäß enthält das Linienbild die Strecken $\Delta I_1, \Delta I_2, \dots, \Delta I_n$, wobei ΔI_k aus Δi_k mit Abschnitt **B** (17) folgt. Der zugehörige Vektorzug besteht also aus den Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n$ und aus den Zentralen $2\mathfrak{R}$, die den Umkehrpunkten des Linienbildes entsprechen. Stillstandszone ist der Kreis vom Radius R um O .

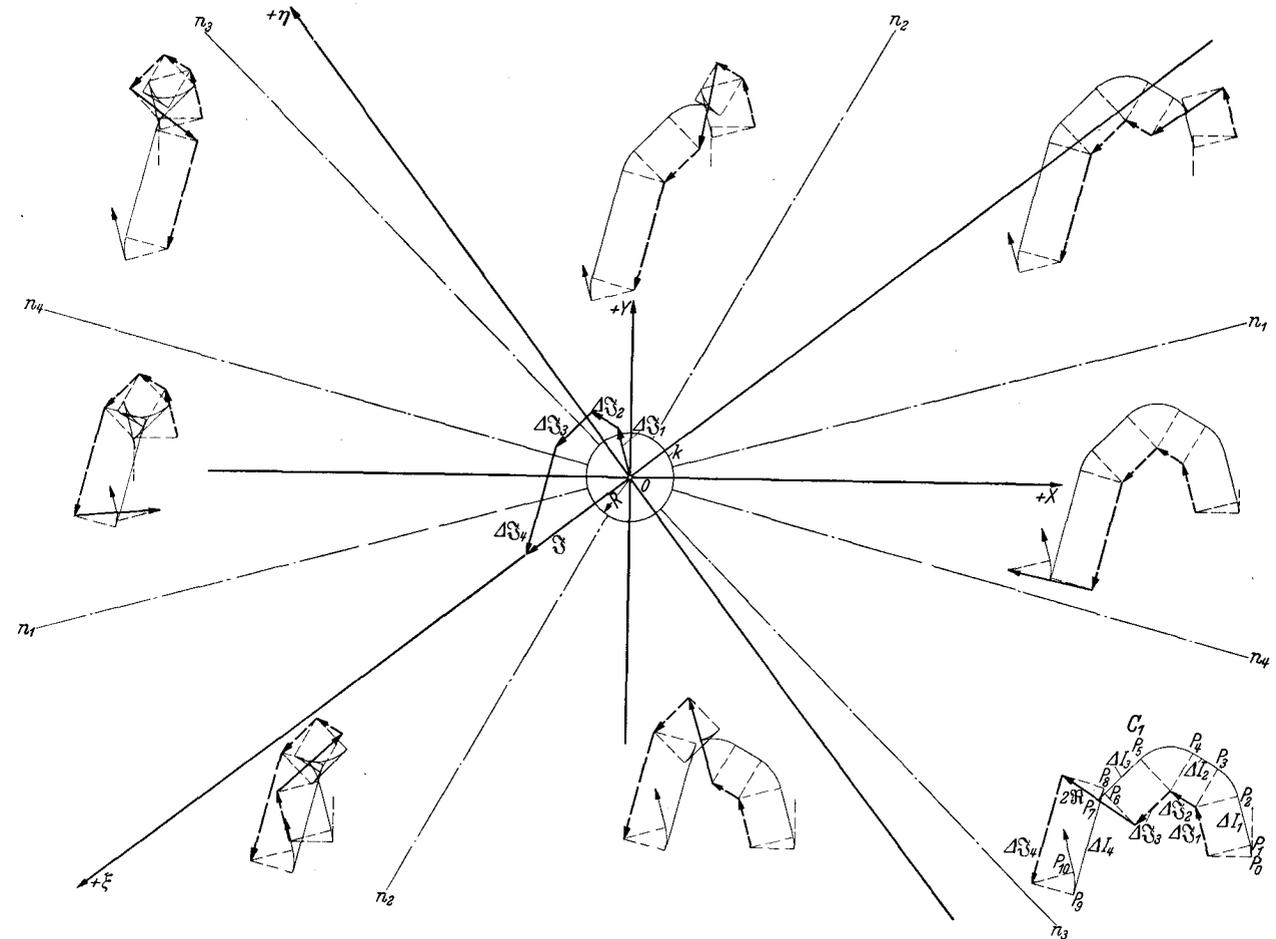


Abb. 20. Linienbildverlauf bei $n = 4$ Impulspaaren.

Trägt man von O aus der Reihe nach die Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n$ aneinander an, dann bilden diese, da ihre X -Komponenten wegen Voraussetzung 4 durchwegs negativ sind, zusammen mit ihrer Resultierenden \mathfrak{S} , deren X -Komponente daher auch negativ ist, ein konvexes Polygon, welches Grundpolygon genannt werden soll.

Es werde nun ein Linkskoordinatensystem (ξ, η) so eingeführt, daß die ξ -Achse nach Richtung und Sinn mit dem Vektor \mathfrak{S} übereinstimmt. Die positive ξ -Achse liegt dann in der linken Halbebene. Ferner sollen durch O die Normalen n_k zu den Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k$ gelegt werden. Sie zerlegen die Ebene in $2n$ Sektoren.

Solange ein Vektorzug innerhalb eines solchen Sektors bleibt, ist sein Verlauf recht regelmäßig, weshalb solche Zyklen einfache Zyklen genannt werden sollen. Abb. 20 zeigt je einen einfachen Halbzylinder in jedem der acht Sektoren. Man überzeugt sich leicht davon, daß sich der zwischen den Normalen n_k, n_{k+1} liegende Halbzylinder folgendermaßen zusammensetzt:

$$\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_k, 2\mathfrak{R}, \Delta \mathfrak{S}_{k+1}, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n.$$

Die Zentrale trennt also immer die beiden Vektoren, deren Normalen den betrachteten Sektor begrenzen. Diese Regelmäßigkeit ändert sich sofort, sobald ein Zyklus von einem Sektor in einen anderen übertritt.

Wir betrachten einen mit $\Delta \mathfrak{S}_{k+1}$ beginnenden Halbzyklus eines Linienbildes, der ganz in einem Sektor (n_k, n_{k+1}) liege. Der (mit anderem Anfangspunkt genommene) Halbzyklus des Vektorzuges setzt sich dann folgendermaßen zusammen:

$$\Delta \mathfrak{S}_{k+1}, \Delta \mathfrak{S}_{k+2}, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n, \Delta \mathfrak{S}_1, \dots, \Delta \mathfrak{S}_k, 2\mathfrak{R}.$$

Faßt man die Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_1$ bis $\Delta \mathfrak{S}_n$ zur Resultierenden \mathfrak{S} zusammen, dann besteht der Halbzyklus noch aus dem zur ξ -Achse parallelen Vektor \mathfrak{S} und der Zentralen $2\mathfrak{R}$.

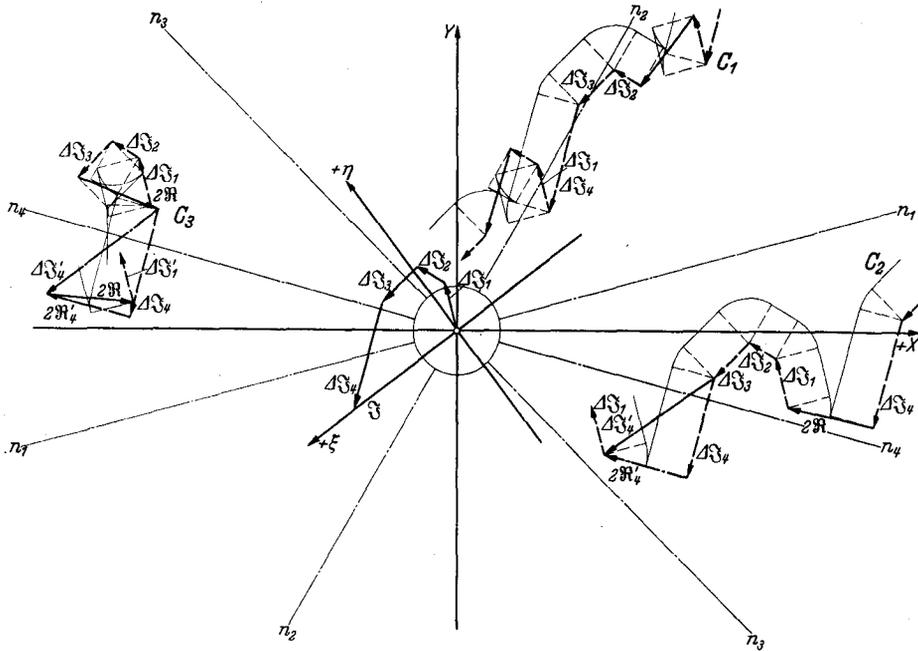


Abb. 21. Linienbilder mit Übertritten.

Liegt nun die $+\xi$ -Achse auch im Sektor (n_k, n_{k+1}) , dann bleibt im Falle $|\mathfrak{S}| > 2|\mathfrak{R}|$ der Vektorzug ständig in diesem Sektor. Denn er konvergiert nach dem Ergebnis des letzten Abschnittes nach einer Restlösung, die längs der $+\xi$ -Achse ins Unendliche geht.

Man hat also das Ergebnis, daß ein Vektorzug, dessen erster Halbzyklus ganz im selben Sektor wie die $+\xi$ -Achse liegt (was stets durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen erreicht werden kann, wenn nicht zufällig die ξ -Achse mit einer Normalen zusammenfällt), gegen eine Restlösung konvergiert und ins Unendliche geht, wenn $|\mathfrak{S}| > 2R$ ist.

Damit ist für $|\mathfrak{S}|$ eine untere Schranke gefunden, über der die Resonanz zu einer ständig aufschaukelnden Schwingung führen kann. Um zu zeigen, daß im Falle $|\mathfrak{S}| < 2R$ keine Aufschaukelung möglich ist, muß das Verhalten des Vektorzuges beim Übertritt aus einem Sektor in einen anderen untersucht werden.

3. Übertritte. Abb. 21 zeigt drei Beispiele von Vektorzügen, die Normalen überschreiten. Beispielsweise überschreitet der Vektorzug C_1 die Normale n_2 , und zwar gleich mehrfach, nämlich mit den Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_3$, $\Delta \mathfrak{S}_4$ und $\Delta \mathfrak{S}_1$. Ein solcher Übertritt ist jedoch harmlos, wenn, wie es hier zutrifft, kein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$ seine Normale n_k überschreitet. Er hat lediglich zur Folge, daß entsprechend der Tatsache, daß das Linienbild in einen neuen Sektor eintritt, die Zentrale $2\mathfrak{R}$ ihren Platz in der Reihenfolge der Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n$ wechselt.

Zu wesentlichen Abweichungen im normalen Verlauf des Vektorzuges führt dagegen der Übergang eines Vektors $\Delta \mathfrak{S}_k$ über seine eigene Normale. In Abb. 21 schneiden beispielsweise je ein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_4$ der Linienbilder C_2 und C_3 die Normale n_4 . Dieser Fall entspricht dem in Abschnitt D, Ziffer 1, behandelten Übertritt eines Vektorzuges über die Y-Achse, die ja dort für den einzigen Vektor $\Delta \mathfrak{S}$ Normale ist. Es gilt folgende Regel:

Ein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$, der gegen seine Normale hinweist bzw. sie überschreitet, liegt, in Richtung seines Pfeiles gesehen, links der entsprechenden Strecke ΔI_k des Linienbildes.

Zum Beweis betrachte man irgendeinen Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$ der Abb. 20 (beispielsweise $\Delta \mathfrak{S}_3$ in C_1), der gegen seine Normale hinweist oder sie überschreitet. Stellt man sich in Gedanken in den Anfangspunkt des Vektors und sieht gegen seinen Endpunkt hin, dann hat man die Normale n_k vor sich. Gehört $\Delta \mathfrak{S}_k$ zum ersten Halbzyklus, dann ist in seinem Anfangspunkte $p' < 0$, es galt also für den vorausgegangenen Kreisbogen die zweite Gleichung Abschnitt B (II), dessen Mittelpunkt liegt damit links der Strecke ΔI_k , diese also rechts des Vektors. Gehört $\Delta \mathfrak{S}_k$ zum zweiten Halbzyklus, dann ist in seinem Anfangspunkt $p' > 0$; für den vorausgegangenen Kreisbogen galt die erste der Gleichungen Abschnitt B (II), ΔI_k liegt auch in diesem Falle rechts des Vektors. Ebenso würde man beweisen, daß ein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$, der von seiner Normale wegweist, rechts seiner Linienbildstrecke ΔI_k liegen muß.

Gemäß dieser Regel liegt ein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$, der den Vektorzug über seine Normale n_k führt, links der ihm im Linienbild entsprechenden Strecke ΔI_k . Da der durch ihn dargestellte Störimpuls das Vorzeichen der Geschwindigkeit des Schwingers wechselt, liegt der Mittelpunkt des anschließenden Kreisbogens nach Abschnitt B (II) auf seiner rechten Seite. An Stelle des Vektors $\Delta \mathfrak{S}_k$ tritt demnach ein Vektor $\Delta \mathfrak{S}'_k$, der sich zusammensetzt aus $\Delta \mathfrak{S}_k$ und einem von ihm aus unter einem rechten Winkel nach rechts weisenden Vektor $2\mathfrak{R}_k$ mit dem Betrag $2R$. In den Vektorzügen C_2 und C_3 der Abb. 21 wird beispielsweise $\Delta \mathfrak{S}_4$ ersetzt durch $\Delta \mathfrak{S}'_4 = \Delta \mathfrak{S}_4 + 2\mathfrak{R}_4$.

4. Das verbotene Gebiet. Im folgenden ist es nötig, Vektorzüge zu betrachten, die anomale Übertritte (darunter sollen Übertritte der eben behandelten Art verstanden sein) enthalten. Hingegen genügt es, sich auf Vektorzüge zu beschränken, die erstens außerhalb der Stillstandszone verlaufen und zweitens soweit vom Koordinatenursprung entfernt sind, daß keiner ihrer Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k$ bzw. $\Delta \mathfrak{S}'_k$ mehr als eine Normale überschreiten kann.

Man kann leicht ein verbotenes Gebiet herstellen mit der Eigenschaft, daß Vektorzüge, die außerhalb desselben bleiben, beiden Forderungen genügen. Es besteht zunächst aus dem Punkte O , denn eine durch O gehende Zentrale führt zum Stillstand. Ferner überzeugt man sich mit Hilfe der Abb. 22 davon, daß beispielsweise ein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_1$, der gleichzeitig die Normalen n_3 und n_4 überschreitet, wenigstens teilweise im Dreieck OAB liegt, das man erhält, wenn man den Vektor $\Delta \mathfrak{S}_1$ so zwischen die Normalen n_3 und n_4 legt, daß sein Anfangspunkt auf der einen, sein Endpunkt auf der anderen Normale liegt. Dieses Dreieck ist somit ein erster Teilbereich des gesuchten verbotenen Bereiches. Wiederholt man die Konstruktion für alle Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k$ im erwähnten Sektor und anschließend in allen übrigen Sektoren, dann erhält man ein Polygon, das die Eigenschaft hat, daß kein Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$ eines außerhalb desselben bleibenden Vektorzuges gleichzeitig zwei Normale überschreiten

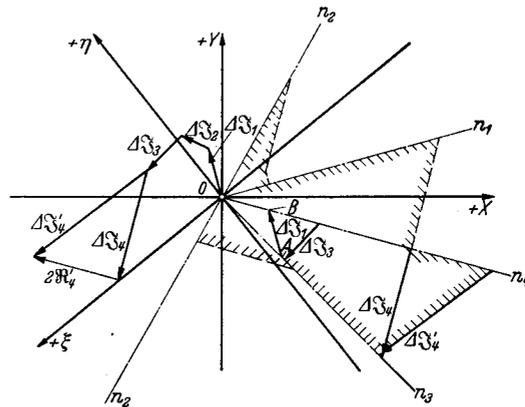


Abb. 22. Der verbotene Bereich.

kann. Führt man nun die gleiche Konstruktion mit den Vektoren $\Delta \mathfrak{S}'_k$ durch ($\Delta \mathfrak{S}'_4$ in Abb. 22), wobei man zu beachten hat, daß $\Delta \mathfrak{S}'_k$ zuerst die Normale n_k überschreitet und daher nur von n_k aus abgetragen werden muß, dann erhält man ein zweites Polygon, das mit dem ersten zusammen den gesuchten verbotenen Bereich bildet.

5. Der Vektorzug. Ein Vektorzug, der außerhalb des verbotenen Bereiches verläuft, enthält je Halbzyklus sämtliche Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k$, und zwar jeden nur einmal.

Zweitens kann zwischen zwei Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k, \Delta \mathfrak{S}_{k+1}$ eine einzelne Zentrale $2\mathfrak{R}$ auftreten.

Drittens können (Abb. 23) bei anomalen Übergängen unter der X -Achse Vektoren $2\mathfrak{R}'_i$ auftreten, die den Vektorzug dem Koordinatenursprung annähern.

Viertens können bei Übergängen über der X -Achse Vektoren $2\mathfrak{R}''_k$ auftreten, die nach außen weisen. Da der entsprechende Vektor $\Delta \mathfrak{S}'_k$ in diesem Falle nur die Normale n_k überschreitet, liegt der Endpunkt von $\Delta \mathfrak{S}_{k-1}$ zwischen den Normalen n_{k-1}, n_k und der Endpunkt von $\Delta \mathfrak{S}'_k$ zwischen n_k und n_{k+1} . Folglich liegt $\Delta \mathfrak{S}'_k$ zwischen zwei Zentralen $2\mathfrak{R}$.

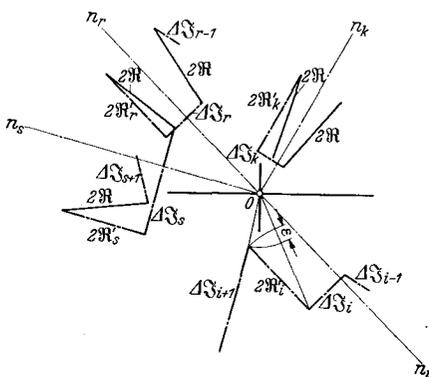


Abb. 23. Übertritte.

Jeder der Fälle 2 bis 4 entspricht dem Durchgang der Linienbildnormale durch den Koordinatenursprung. Wir verschieben nun für das Folgende die Anfangspunkte der Halbzyklen, die bisher in den Vielfachen von π lagen, in die Werte

$$u = u^* + s\pi \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei u^* der Winkel zwischen der $+X$ -Achse und der $-\xi$ -Achse ist. Es werden also diejenigen Teilstücke des Linienbildes zu Halbzyklen zusammengefaßt, die durchlaufen werden, während sich die Linienbildnormale aus einer zur ξ -Achse parallelen Lage in die nächste dreht. Betrachten wir den zugehörigen Halbzyklus im Vektorzug, so besteht dieser aus einer Anzahl Vektoren bzw. Zentralen. Wir bezeichnen den Abstand des Anfangspunktes des ersten Vektors im Halbzyklus vom Koordinatenursprung O mit r_1 , entsprechend den Abstand des Endpunktes des letzten Vektors mit r_2 und setzen für die Differenz

$$\Delta r = r_2 - r_1. \quad (1)$$

Nun gilt

Satz 1: Bewegt man eine gerichtete Gerade in einer Ebene auf beliebige Weise so, daß ihre Anfangs- und Endlage zusammenfallen, die entsprechenden Richtungs-sinne aber einander entgegengesetzt sind, dann enthält die Ebene keinen Punkt, der während der Bewegung nie auf der Geraden gelegen hätte.

Für die Punkte, die auf der Geraden in ihrer Anfangslage liegen, ist der Satz trivial. Liegt hingegen ein beliebiger Punkt anfänglich links der Geraden, dann liegt er am Schluß rechts von ihr, muß also von ihr bestrichen worden sein.

Hieraus folgt, daß pro Halbzyklus die Linienbildnormale mindestens einmal durch O gehen muß. Denn andernfalls würde der Halbzyklus des Vektorzuges nur aus den Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n$ bestehen; die Linienbildnormale würde sich um den Winkel π drehen, während ihre Anfangs- und Endlagen zusammenfallen würden; sie müßte also während des Halbzyklus doch einmal durch O gegangen sein.

Wir setzen jetzt $|\mathfrak{S}| < 2R$ voraus und betrachten einen Halbzyklus des Vektorzuges. Er enthält sämtliche Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k$. Ihr Beitrag zu Δr ist

$$\Delta_1 r \leq |\mathfrak{S}|. \quad (2)$$

Er kann ferner eine Anzahl einzelner Zentralen enthalten. Ihr Beitrag zu Δr ist

$$\Delta_2 r = -2R. \quad (3)$$

Weiterhin kann er eine Anzahl nicht normaler Übertritte in der oberen Halbebene besitzen. Ein solcher enthält, wie in Ziffer 5 gezeigt wurde, außer dem Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$, dessen Beitrag schon in $\Delta_1 r$ berücksichtigt ist, zwei Zentrale $2 \mathfrak{R}$ und einen parallel zur Normalen n_k nach außen weisenden Vektor $2 \mathfrak{R}'_k$. Der Beitrag zu Δr ist somit

$$\Delta_3 r \leq -2R. \quad (4)$$

Das gilt auch für den Fall, daß mehrere solcher Übertritte aneinander schließen, denn es tritt immer eine Zentrale $2 \mathfrak{R}$ mehr auf als Vektoren $2 \mathfrak{R}'_k$. Schließlich bleiben noch die nicht normalen Übergänge unter der X -Achse. Führt einer von diesen über die Normale n_i (Abb. 23), dann ist der Beitrag aller zusammen

$$\Delta_4 r \leq -2R + \varepsilon, \quad (5)$$

wenn mit ε die Differenz zwischen dem Betrag des Fahrstrahles der Spitze von $2 \mathfrak{R}'_i$ und demjenigen des Endpunktes der an Stelle von $2 \mathfrak{R}'_i$ abgetragenen Zentralen $2 \mathfrak{R}$ bezeichnet wird.

Da nach Satz 1 die Linienbildnormale mindestens einmal durch O geht, setzt sich in jedem Halbzyklus Δr zusammen aus $\Delta_1 r$ und mindestens einem der Beträge $\Delta_2 r$, $\Delta_3 r$, $\Delta_4 r$. Es ist also

$$\Delta r \leq \Delta_1 r + \Delta_4 r \leq |\mathfrak{S}| - 2R + \varepsilon. \quad (6)$$

Nun läßt sich aber ein das verbotene Gebiet enthaltender Kreis von so großem Radius um O konstruieren, daß ε für jeden außerhalb bleibenden Halbzyklus so klein ist, daß die rechte Seite der Ungleichung (6) negativ wird. Folglich nähert sich jeder, außerhalb dieses Kreises beginnende Vektorzug dem Ursprung O : für $|\mathfrak{S}| < 2R$ kann keine Aufschaukelung stattfinden.

6. Zusammenhang zwischen Störung und Bewegungsverlauf. Es steht nun fest, daß der Vektor \mathfrak{S} für die Frage der Aufschaukelung allein von Bedeutung ist. Ist sein Betrag kleiner als $2R$, dann bleibt die Schwingung bei beliebigen Anfangsbedingungen im Endlichen; ist er dagegen größer als $2R$, dann kann, mindestens für gewisse Anfangsbedingungen, Aufschaukelung stattfinden.

Da \mathfrak{S} die Resultierende der Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_k$ ist und (Abb. 20) der Vektor $\Delta \mathfrak{S}_k$ im (X, Y) -Koordinatensystem die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{S}_{kx} &= \Delta I_k \cos \left(\frac{\pi}{2} + u_k \right) = -\Delta I_k \sin u_k, \\ \Delta \mathfrak{S}_{ky} &= \Delta I_k \sin \left(\frac{\pi}{2} + u_k \right) = \Delta I_k \cos u_k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

hat, ist

$$\mathfrak{S}^2 = \left(\sum_1^n \Delta I_k \cos u_k \right)^2 + \left(\sum_1^n \Delta I_k \sin u_k \right)^2, \quad (8)$$

und Aufschaukelung kann eintreten oder wird nicht eintreten, je nachdem die rechte Seite von (8), die mit Abschnitt B (7) und (17) die Form

$$\mathfrak{S}^2 = \frac{1}{m^2} \left[\left(\sum_1^n \Delta i_k \cos \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t_k \right) \right)^2 + \left(\sum_1^n \Delta i_k \sin \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t_k \right) \right)^2 \right] \quad (9)$$

annimmt, größer oder kleiner als $4R^2 = 4(r/f)^2$ ist.

F. Eine allgemeine Störkraft.

1. Allgemeines. Die Untersuchung soll nun ausgedehnt werden auf ein Störkraftgesetz $k(t)$, das die im Abschnitt A formulierten vier Voraussetzungen erfüllt, im übrigen aber beliebig ist.

Da es nach Voraussetzung 1 integrierbar ist, kann es durch eine Folge von n Impuls-paaren approximiert werden, indem man eine Halbperiode in n Teilintervalle zerlegt und den Kraftverlauf in jedem Teilintervall durch einen Impuls Δi_k ersetzt, der gegeben ist durch das über das betreffende Intervall erstreckte Integral

$$\int k(t) dt. \quad (1)$$

Demgemäß kann man sich das Kraftgesetz $k(t)$ aus einer Impulsfolge, wie sie im letzten Abschnitt behandelt wurde, dadurch entstanden denken, daß die Anzahl n der Impulse über alle Grenzen vermehrt wird, während gleichzeitig die Beträge $|\Delta i_k|$ der Impulse unter jede beliebige kleine Größe fallen.

Aus dem von den Vektoren $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_n$ gebildeten konvexen Grundpolygon entsteht beim Grenzübergang eine stetige konvexe Kurve G (Abb. 24), die wir die Grundkurve des Kraftgesetzes nennen wollen. Ihr Bogenelement entsteht aus ΔI_k und ist mit Abschnitt **B** (7) und (17)

$$dI = \frac{1}{\sqrt{mf}} di = \frac{1}{\sqrt{mf}} k dt = \frac{k}{f} du \quad (2)$$

oder, wenn man auch hier Abschnitt **C** (3) benützt,

$$dI = P(u) du. \quad (3)$$

Da du den zugehörigen Elementarwinkel darstellt, um den sich die Linienbildnormale dreht, folgt aus (3), daß $P(u)$ der Krümmungsradius der Grundkurve ist. Beim Fehlen

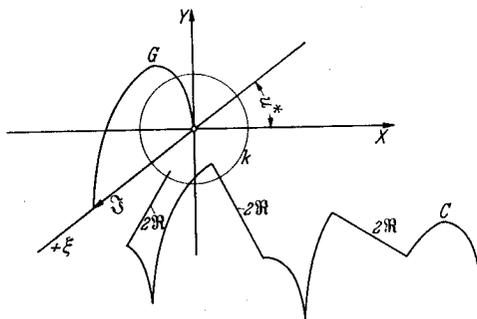


Abb. 24. Grundkurve und Kurvenzug.

der Dämpfung würde sich daher das Linienbild aus lauter Grundkurven zusammensetzen. Da k und damit auch P beschränkt ist, besitzt die Grundkurve in jedem Punkte einen endlichen Krümmungsradius.

Der Vektor, der vom Anfangspunkt der Grundkurve zu ihrem Endpunkt hinführt, sei wie früher mit \mathfrak{S} bezeichnet.

Dem Vektorzug, der sich im letzten Abschnitte, abgesehen von den besprochenen Anomalien, aus Stücken des Grundpolygons und Zentralen zusammensetzte, entspricht

hier der Kurvenzug, der sich aus Stücken der Grundkurve und Zentralen aufbaut, derart, daß jedesmal, wenn die Grundkurve eine durch O gehende Normale besitzt, eine Zentrale $2R$ eingeschoben ist. Wie man (Abb. 23) leicht feststellt, reduzieren sich die Anomalien beim Grenzübergang auf gewöhnliche Zentrale. Abb. 24 zeigt ein Stück C eines Kurvenzuges.

2. Hilfssätze. Für die nachfolgenden Überlegungen müssen zunächst zwei Hilfssätze bewiesen werden.

Satz 2. Bewegt man eine gerichtete Gerade in einer Ebene so, daß sie in ihrer Endlage der Anfangslage parallel und dieser gegenüber um den Winkel π verdreht ist, dann wird bei der Bewegung jeder Punkt, der nicht in dem durch Anfangs- und Endlage gebildeten Parallelstreifen liegt, eine ungerade Anzahl mal überstrichen.

Der Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz I und wird genau wie jener bewiesen: ein außerhalb des Parallelstreifens liegender Punkt wechselt nämlich während der Bewegung die Seite bezüglich der Geraden.

Satz 3. Bewegt man eine Gerade g so, daß der momentane Drehpunkt stets auf ihr liegt, die zugehörige Drehung monoton und insgesamt π ist, und läßt sich eine Gerade h angeben, die von der zugehörigen Polbahn nicht geschnitten wird, dann wird ein beliebiger, auf h liegender Punkt O während der Bewegung von der Geraden g höchstens zweimal überstrichen.

Da nämlich der momentane Drehpunkt der Geraden g stets auf ihr selbst und auf der einen Seite von h liegt, ist die Bewegung des Schnittpunktes von g und h auf h monoton, solange er existiert. Zerlegt man nun die Bewegung in zwei Teile, derart, daß am Schluß des ersten und damit am Anfang des zweiten Teiles die Geraden g und h parallel sind, dann wird ein fester Punkt O auf h während jedes Teiles höchstens einmal, im ganzen also höchstens zweimal überstrichen. Im Grenzfall der Parallelität von g und h in Anfangs- und Endlage wird O nur einmal überstrichen.

3. Kurvenzug und Bewegung. Betrachtet man Halbzyklen, deren Anfangspunkte in den Werten $u = u^* + s\pi$ liegen (s ganze Zahl), dann folgt genau wie im letzten Abschnitt, daß jeder nicht in die Stillstandszone geratende Halbzyklus mindestens eine Zentrale enthält. Folglich liegt im Falle $|\mathfrak{S}| < 2R$ der Endpunkt jedes Halbzyklus näher am Ursprung als sein Anfangspunkt: die Bewegung klingt ab.

Der Kurvenzug besteht aus Teilstücken der Grundkurve und Zentralen. Da die Grundkurve aus dem Grundpolygon der Vektoren $\Delta\mathfrak{S}_1, \Delta\mathfrak{S}_2, \dots, \Delta\mathfrak{S}_n$, deren X -Komponenten sämtlich negativ sind, hervorgeht, sind die X -Komponenten der gerichteten Bogenelemente $d\mathfrak{S}$ negativ. Folglich geht jeder in der rechten Halbebene beginnende Kurvenzug in die linke Halbebene über. Wir betrachten nun den Halbzyklus, der mit dem ersten in der linken Halbebene liegenden Punkte des Kurvenzuges beginnt, in dem die Linienbildnormale parallel zur Y -Achse ist. Im Endpunkt dieses Halbzyklus ist die Linienbildnormale wieder parallel zur Y -Achse, und zwar liegt sie auch in der linken Halbebene. Der Halbzyklus enthält also nach Satz 2 eine ungerade Anzahl von Zentralen. Liegt er nicht zu nahe am Ursprung, dann liegt die Polbahn der Linienbildnormalen (nämlich das Linienbild C' der Ableitung) wegen der Beschränktheit des Krümmungsradius $P(u)$ sicher auf der einen Seite einer geeignet gewählten Geraden durch O . Dann kann Satz 3 angewandt werden: der Halbzyklus enthält höchstens zwei Zentralen. Da er aber, wie eben bemerkt, eine ungerade Anzahl von Zentralen enthalten muß, enthält er nur eine. Durch Fortsetzung dieses Schlusses erhält man das Resultat:

Jeder Kurvenzug, der in der rechten Halbebene beginnt, geht in die linke über. Bleibt er in genügendem Abstand vom Ursprung (was sich durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen stets erreichen läßt), dann enthält jeder weitere Halbzyklus genau eine Zentrale. Damit ist die Verschiebung des Kurvenzuges je Halbzyklus in Richtung der $+\xi$ -Achse größer, mindestens gleich $|\mathfrak{S}| - 2R$. Im Falle $|\mathfrak{S}| > 2R$ kann der Kurvenzug also ins Unendliche gehen.

4. Zusammenhang zwischen Kraftgesetz und Bewegung. Das Ergebnis ist dasselbe wie im letzten Abschnitt: die Bewegung klingt ab im Falle $|\mathfrak{S}| < 2R$, kann aber im Falle $|\mathfrak{S}| > 2R$ zu unendlichen Ausschlägen führen. Mit (3) wird aus Abschnitt E (8)

$$\mathfrak{S}^2 = \left[\int_0^\pi P(u) \cos u \, du \right]^2 + \left[\int_0^\pi P(u) \sin u \, du \right]^2, \quad (4)$$

also aus Abschnitt E (9)

$$\mathfrak{S}^2 = \frac{1}{m^2 f} \left\{ \left[\int_0^\pi k(t) \cos \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t \right) dt \right]^2 + \left[\int_0^\pi k(t) \sin \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t \right) dt \right]^2 \right\}. \quad (5)$$

5. Harmonische Analyse des Störkraftgesetzes. Entwickelt man die Funktion $P(u)$ in eine Fourierreihe

$$P(u) = A_1 \cos u + B_1 \sin u + A_2 \cos 2u + B_2 \sin 2u + \dots, \quad (6)$$

wobei wegen Voraussetzung 3 das konstante Glied Null ist, dann sind die beiden ersten Entwicklungskoeffizienten

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(u) \cos u \, du, \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(u) \sin u \, du. \quad (7)$$

Sie lassen sich wegen Voraussetzung 3 in der Form

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P(u) \cos u \, du, \quad B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P(u) \sin u \, du \quad (8)$$

schreiben. Ein Vergleich mit (4) zeigt, daß für die Frage der Aufschaukelung nur diese beiden ersten Entwicklungskoeffizienten maßgebend sind. Mit (8) und (4) wird

$$|\mathfrak{S}| = \frac{\pi}{2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \frac{\pi}{2} C_1, \quad (9)$$

wobei C_1 der erste Koeffizient der etwas umgeschriebenen Entwicklung

$$P(u) = C_1 \cos(u - \gamma_1) + C_2 \cos 2(u - \gamma_2) + \dots \quad (10)$$

ist. Man hat also das Ergebnis:

Die Schwingung klingt ab oder kann sich dauernd aufschaukeln, je nachdem

$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \leq \frac{4}{\pi} R \quad (11)$$

ist.

Entwickelt man statt $P(u)$ die gegebene Funktion $k(t)$ in eine Fourierreihe

$$k(t) = \sum_1^{\infty} a_i \cos \frac{2i\pi t}{\tau} + \sum_1^{\infty} b_i \sin \frac{2i\pi t}{\tau}, \quad (12)$$

dann lautet das Kriterium (11) unter Berücksichtigung von Abschnitt **B** (12) und Abschnitt **C** (3)

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \frac{4}{\pi} r. \quad (13)$$

6. Beispiele. Im Abschnitt **C** wurde die stückweise konstante Störkraft der Abb. 1 untersucht. Die harmonische Analyse liefert

$$A_1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\pi} \cos u \, du = 0, \quad B_1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\pi} \sin u \, du = \frac{4}{\pi} P. \quad (14)$$

Das Kriterium (11) lautet daher in diesem Falle

$$P \leq R \quad (15)$$

in Übereinstimmung mit dem im Abschnitt **C** unmittelbar hergeleiteten Ergebnis.

Denkt man sich den in Abschnitt **D** behandelten Einzelimpuls ΔI hervorgegangen aus einem Kraftgesetz, bei dem $P(u)$ nur in unmittelbarer Nähe von $u = \pi/2$ von Null verschieden und das über dieses kurze Zeitintervall genommene

$$\int_{\frac{\pi}{2} - \epsilon}^{\frac{\pi}{2} + \epsilon} P(u) \, du$$

gleich ΔI ist, dann hat man im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \cdot 0 \cdot \Delta I = 0, \quad B_1 = \frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \Delta I = \frac{2}{\pi} \Delta I, \quad (16)$$

und (11) lautet

$$\Delta I \leq 2R, \quad (17)$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit dem direkt erhaltenen Ergebnis.

Im Falle einer rein harmonischen Störung

$$P(u) = P_0 \sin u \quad (18)$$

erhält man

$$A_1 = \frac{2}{\pi} P_0 \int_0^{\pi} \sin u \cos u \, du = 0, \quad B_1 = \frac{2}{\pi} P_0 \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du = P_0 \quad (19)$$

und mit (11)

$$P_0 \leq \frac{4}{\pi} R. \quad (20)$$

Dieses letzte Ergebnis stimmt mit den von **den Hartog**¹ und von **Eckolt**² angegebenen Werten überein.

¹ J. P. den Hartog, Forced vibrations with combined viscous and Coulomb damping, Verh. 3. Internat. Kongr. Techn. Mechanik Stockholm 1930, Bd. 3, S. 181.

² W. Eckolt, Z. techn. Phys. 7 (1926) S. 226.

Lebenslauf.

Am 5. September 1910 in Winterthur geboren, besuchte ich die Volksschule und die Gymnasialabteilung der Kantonschule Winterthur, an der ich im Herbst 1929 die Maturitätsprüfung ablegte. Mit zwei Unterbrechungen von je einem Jahr zwecks praktischer Ausbildung in einer Maschinenfabrik bzw. Militärdienst absolvierte ich anschließend die vier ersten Semester der Abteilung für Maschineningenieurwesen und Elektrotechnik an der E. T. H. Im Herbst 1933 trat ich an die Abteilung für Mathematik und Physik über, an der ich im Frühjahr 1936 die Diplomprüfung als Physiker ablegte. Das folgende Jahr arbeitete ich als Assistent für Mechanik an der E. T. H. und befinde mich seit Frühling 1937 zur weiteren Ausbildung an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. **E. Meissner** für Anregung und Förderung dieser Arbeit aufrichtig zu danken.

Stuttgart, im September 1937.

Hans Ziegler.