

# **Die Berechnung von Spannungen und Verschiebungen in Erddämmen**

Von der  
Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte  
Promotionsarbeit

Vorgelegt von  
**Hermann Bendel**

dipl. Baulng. EPUL  
von Schaffhausen

Referent : Prof. G. Schnitter  
Korreferent : Prof. Dr. E. Stiefel

---

1962

Druck: Buchdruckerei Keller & Co., Luzern

## Vorwort

Im Jahre 1959 wurde von Herrn Prof. G. Schnitter, Direktor der Versuchsanstalt für Wasser- und Erdbau in Zürich, eine neuartige Kontrollrechnung für den Goeschenenalpdamm angeregt. Nach Ausarbeitung der grundlegenden Gleichungen und der Aufstellung der Grundlagen für die numerische Rechnung zeigte sich, dass eine solche Berechnung nur unter dem Einsatz einer elektronischen Rechenmaschine durchgeführt werden konnte. Diese Aufgabe wurde in Zusammenarbeit zwischen Herrn M. Engeli, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Mathematik in Zürich, und dem Verfasser gelöst. Dabei tauchten mehrere Probleme auf, die eine eingehende Behandlung wünschenswert erscheinen liessen. Die vorliegende Arbeit wurde von mir zur Zeit meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der VAWE ausgeführt.

Es ist mir ein aufrichtiges Bedürfnis, Herrn Prof. Schnitter für sein Entgegenkommen und seine Unterstützung zu danken. Mein bester Dank gilt auch dem Vorsteher des Institutes für Angewandte Mathematik, Herrn Prof. Dr. Stiefel, für die Durchsicht der Arbeit und für die Ueberlassung der ERMETH für die zahlreichen numerischen Auswertungen. Insbesondere möchte ich Herrn Engeli danken für seine wertvollen Anregungen betreffend Aufstellung der Operatoren und Verwendung des Wynn'schen Algorithmus, sowie für seine uneigennütige Hilfe bei der Programmierung für die IBM 704 in Paris. Meiner Gattin danke ich herzlich für die Reinschrift des Textes und der Formeln.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Nomenklatur	
I Einleitung	
<u>1. Kapitel:</u> Methoden zur Berechnung von Erddämmen	1
II Die Berechnung von Erddämmen nach der Elastizitätstheorie	
<u>2. Kapitel:</u> Allgemeine Theorie	
a) Elastische Grundgleichungen und Minimalprinzipien	4
b) Differenzenverfahren und Energiemethode	7
c) Angriffskräfte und Randbedingungen	10
d) Auflösung des Gleichungssystems	13
e) Programmierung	14
<u>3. Kapitel:</u> Dämme auf fester Unterlage	
a) Beschreibung eines Testbeispiels	17
b) Einfluss der Form des Dammes	22
c) Einfluss des Elastizitätsmoduls	22
d) Einfluss der Poissonziffer	26
e) Einfluss des Wasserdrucks	29
<u>4. Kapitel:</u> Dämme auf elastischer Unterlage	
a) Spannungen und Verschiebungen in einer elastischen Schicht auf starrer, rauher Unterlage	36
b) Beschreibung eines Testbeispiels	50
c) Einfluss der Unterlageschicht	54
d) Einfluss des Wasserdrucks	60
III Die Berechnung von Erddämmen nach der Plastizitätstheorie	
<u>5. Kapitel:</u> Allgemeine Theorie	
a) Grundgleichungen der Plastizitätstheorie	65
b) Ableitung der numerischen Operatoren	68
<u>6. Kapitel:</u> Beschreibung eines Testbeispiels	72
IV Beispiel eines ausgeführten Dammes: Die Goeschenenalp	
<u>7. Kapitel:</u> Allgemeine Beschreibung und Annahmen für die Berechnung	75
<u>8. Kapitel:</u> Berechnung und Messung	79

	Seite
V Schlussbemerkungen	88
Anhang A: Ableitung der Formel (4,24)	89
Anhang B: Programmierung der Einflusslinien	92
Beilagen: Lösungen der Rechnungsfälle	95
Bibliographie	103

## Nomenklatur

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Faktoren = $f(\mu)$
$\alpha_w$	Hauptspannungswinkel
$\gamma_e$	spez. Eigengewicht
$\gamma_e^*$	" Feuchtraumgewicht
$\gamma_e''$	" Gewicht bei Ueberflutung
$\gamma_s$	" Festraumgewicht
$\gamma_w$	" Wassergewicht
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Gleitungen
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Dehnungen in der x, y, z-Richtung
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	Hauptdehnungen
$\epsilon$	Dilatation
$\eta, \xi$	transformierte Koordinaten
$X', X$	dimensionslose "
$\xi$	Sättigungsgrad
$\lambda$	Variable
$\lambda_0$	Ruhedruckziffer
$\mu$	Poissonziffer
$\nu$	Faktor = $f(\mu)$
$\varphi$	Reibungswinkel
$\rho$	Koeffizient
$\psi$	Lastwinkel
$\omega, \omega_1$	Ueberrelaxationsfaktor im Damm
$\omega_2$	" " in der Unterlage
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen in der x, y, z-Richtung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_B$	Bruchspannung
$\sigma_F$	Flie遝grenze

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Schubspannungen
$\tau$	horizontale Streifenlast
$T, T'$	Gitter
$\Delta$	Determinante
$\Theta$	Dammneigung
$\Phi$	dimensionslose Variable
$\Psi$	Airy-Funktion
$2a$	Lastbreite
$a_{jk}, b_j$	Koeffizienten
$c$	Kohäsion
$f$	Fliessfunktion
$h$	Maschenweite
$h_0$	Anfangshöhe einer Bodenprobe
$h_g$	Ueberlagerungshöhe
$i, j, k$	Zähler
$l, m$	Basislängen
$n$	Porenziffer
$p$	vertikale Streifenlast
$s_i$	Glieder einer Reihe
$\dot{s}$	Spannungsgeschwindigkeit
$t_i^k$	Glieder eines Algorithmus
$u$	Horizontalverschiebung
$v$	Vertikalverschiebung
$u_k, v_k$	Verschiebungen der Krone
$v_z$	Setzung der Basismitte
$w$	Wasserdruck
$w_i$	Funktionswerte
$x, y, z$	Variablen

$x_j$	Verschiebungen
$A_1 - D_1$	Koeffizienten = $f(\lambda)$
$A_2 - D_2$	
$B_{ij}$	Matrix des Hooke'schen Gesetzes
$C, C_u, C_v$	Integrationskonstanten
$E, E_1$	Elastizitätsmodul des Dammes
$E_2$	" " der Unterlage
$E', E^*$	Abkürzungen = $f(E, \mu)$
$F$	Sicherheitsfaktor. Fläche.
$H, H_1$	Dammhöhe
$H_2$	Höhe der Unterlageschicht
$J, K, L$	Formänderungsenergie
$J_k$	Integral
$K_0, K_1$	Konstanten
$K_n, L_n$	Rekursionswerte
$M, N, O, P$	Abkürzungen = $f(z)$
$R_0, R_u, R_v$	Residuen
$S$	Summe einer Reihe
$V$	Volumen
$V_0$	Anfangsvolumen einer Bodenprobe
$X, Y$	Aeusserere Kräfte

## I Einleitung

### 1. Kapitel: Methoden zur Berechnung von Erddämmen.

Obwohl schon seit Hunderten von Jahren Erddämme z.B. in Indien mit Erfolg gebaut werden, sind die Probleme, die sich bei jedem Dammbau stellen, zahlreich geblieben. Mehrere Ursachen können zur Zerstörung eines Dammes führen. Einige davon (z.B. Ueberflutung oder innere Erosion) konnten durch verbesserte Kenntnisse allmählich eliminiert werden. Die grösste Gefahr stellen heute Scherbrüche dar in Form von Rutschungen der Böschung oder des Untergrundes. So waren in den letzten 40 Jahren mindestens 10 solche Damnbrüche zu verzeichnen. [14] Somit ist für den projektierenden Ingenieur die Frage der Stabilität des Dammes ein zentrales Problem geblieben.

Bei der Dimensionierung eines Bauwerkes sind stets zwei Aspekte zu berücksichtigen: die statischen Gegebenheiten einerseits und die Materialeigenschaften andererseits. Zwei hauptsächliche Dimensionierungsmethoden haben sich in der Praxis durchgesetzt: die Traglastverfahren und die Spannungsanalysen. Die ersteren bestehen darin, die kleinste Belastung zu suchen, bei der ein Material mit bestimmten Festigkeitseigenschaften gerade zum Bruch kommt. Der Vergleich der Bruchbelastung mit der effektiven Belastung in Form eines Sicherheitsfaktors stellt dann die Basis der Dimensionierung dar. Die Bestimmung der Bruchlast kann meistens ohne explizite Berechnung des Spannungszustandes im Bauwerk erfolgen, ist somit statisch gesehen einfach und erfordert nur die Untersuchung der Materialeigenschaften bei Bruch. Der Nachteil des Verfahrens liegt darin, dass ein Vergleich des erstellten Bauwerkes mit der Berechnung nur dann möglich ist, wenn es zum Bruch kommt, und dies stellt natürlich gerade in bezug auf den Fortschritt der Erkenntnisse ein grosses Hindernis dar.

Demgegenüber wird bei den Spannungsanalysen der unter den effektiven Lasten sich einstellende Spannungszustand berechnet unter Verwendung der statischen Gesetze und unter Annahme eines Stoffgesetzes,

das Spannungen und Verzerrungen miteinander verknüpft. Die Dimensionierung erfolgt dann aufgrund des Vergleiches der effektiven Spannungen mit den zulässigen Spannungen. Diese Berechnungen sind wesentlich komplizierter und erfordern die Definition eines Stoffgesetzes vom spannungslosen Zustand bis zum Bruch. Hingegen können dann durch Messungen am fertigen Objekt die Berechnungen überprüft und bis zu einem gewissen Grade die Sicherheitsspanne bis zum Erreichen des Bruches festgestellt werden.

In der Bodenmechanik haben beide Methoden Eingang gefunden. Die Spannungsanalysen werden vor allem zur Berechnung der Setzungen verwendet, während gerade die Stabilitätsuntersuchungen einer Böschung fast ausschliesslich mit einem Traglastverfahren durchgeführt werden.

Das letztere besteht darin, durch den Damm beliebig gewählte Gleitflächen zu legen, entlang welchen die sich aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen ergebenden Scherkräfte mit der Scherfestigkeit des Schüttmaterials bei Bruch verglichen werden. Seit Fellenius werden vorwiegend kreisförmige Gleitflächen betrachtet, z.T. auch logarithmische Spiralen. Neuerdings ist es nach der Methode von Janbu auch möglich, beliebig gekrümmte Gleitflächen auf einfache Art zu untersuchen. Das Verfahren führt bei einiger Übung schnell zur Bestimmung der ungünstigsten Gleitfläche und damit zu einem Sicherheitsfaktor gegen Scherbrüche.

Dieses Verfahren ist durch viele Dämme erhärtet. Trotzdem bleibt vor allem bei wichtigen Bauten der Wunsch offen, durch eingebaute Messgeräte Spannungen und Verschiebungen eines Dammes während des Baues und später unter Stau zu überprüfen. Diese Messresultate erhalten jedoch erst dann ihre volle Bedeutung, wenn sie mindestens grössenordnungsmässig mit einer Berechnung verglichen werden können. In diese Lücke kann nun eine Spannungsuntersuchung erfolgreich treten.

Spannungsverteilungen in Erddämmen und im Untergrund, die analytisch hergeleitet wurden, sind verschiedentlich vorgeschlagen worden (Lévy 1898 [15], Jürgenson 1934 [13], Brahtz 1936 [3]). Alle diese

Lösungen basieren jedoch auf unbefriedigend vereinfachenden Annahmen.

Parallel dazu wurden für die Staumauern numerische Methoden zur Berechnung der Spannungsverteilungen entwickelt. So gelang es Richardson 1908 [20] und Zienkiewicz 1947 [27] mit Hilfe von Differenzenverfahren, eine angenäherte Spannungsverteilung zu erhalten. Diese Methode wurde von Bishop [2] erstmals für einen Erddamm verwendet. Alle diese Arbeiten basieren auf der Annahme gleicher Materialeigenschaften von Damm und Untergrund sowie voller Kontinuität an der Schichtgrenze. Das Material wird als elastisch, isotrop und homogen vorausgesetzt. Diese Annahmen sind jedoch nur in vereinzelt Fällen gerechtfertigt. Immerhin ergab diese Methode eine Spannungsverteilung, die es zum mindesten erlaubte, qualitative Schlüsse zu ziehen. Ein grosses Hindernis für die Weiterentwicklung der Methode war der enorme Aufwand, den die praktische Durchführung einer Berechnung erfordert. Mit den elektronischen Rechenmaschinen hat sich diese Situation entscheidend geändert.

In der vorliegenden Arbeit wird zur Berechnung von Spannungen und Verschiebungen eines Erddammes eine numerische Methode entwickelt, mit welcher hierauf der Einfluss von variablen Randbedingungen, von variablen Angriffskräften und von variablen Materialeigenschaften untersucht wird.

## II Die Berechnung von Erddämmen nach der Elastizitätstheorie

---

### 2. Kapitel: Allgemeine Theorie.

---

#### a) Elastische Grundgleichungen und Minimalprinzipien.

Ein Erddamm ist ein elasto-plastischer Körper, der infolge der örtlichen Gegebenheiten sehr oft eine komplizierte geometrische Form hat. Da aber theoretische und praktische Schwierigkeiten bei der Berechnung eines so komplexen Gebildes ins Unermessliche wachsen, wird allgemein ein Dammkörper unendlicher Länge vorausgesetzt, aus dem ein Einheitsquerschnitt herausgeschnitten und untersucht wird. Für diesen sollen die Gesetze des ebenen Formänderungszustandes gelten, d.h. die Belastungskräfte pro Querschnitt bleiben konstant und es treten keine Verzerrungen in axialer Richtung auf.

In der Elastizitätstheorie verwendet man das Hooke'sche Stoffgesetz, das eine lineare Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung aufstellt. Der Proportionalitätsfaktor, der Elastizitätsmodul  $E$ , ist die erste elastische Konstante. Die zweite, die Poissonzahl  $\mu$ , gibt das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung wieder. Mit diesen beiden Grössen lautet das Stoffgesetz im ebenen Formänderungszustand in einem cartesischen System:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [(1-\mu^2)\sigma_x - \mu(1+\mu)\sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [(1-\mu^2)\sigma_y - \mu(1+\mu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \\ \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0\end{aligned}\tag{2,1}$$

Erzeugen die Angriffskräfte nur kleine Verformungen des elastischen Körpers - was im Rahmen dieser Arbeit vorausgesetzt wird - so stehen Verzerrungen und Verschiebungen miteinander in folgender Beziehung:

$$\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} \quad \epsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}\tag{2,2}$$

wobei  $u$  die Horizontalverschiebung,  $v$  die Vertikalverschiebung eines Punktes der elastischen Scheibe bedeutet. Durch zweimalige Differentiation erhält man die Verträglichkeitsbedingung:

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (2,3)$$

Zwei verschiedene Gesetze der Statik können zur Gewinnung einer Lösung herangezogen werden: die Kräftebedingungen oder das Minimalprinzip.

Die ersteren ergeben die 2 Differentialgleichungen des Gleichgewichts:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} &= 0 \\ \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \gamma_e &= 0 \end{aligned} \quad (2,4)$$

wenn als einzige Kraft das Eigengewicht  $\gamma_e$  betrachtet wird. Die Kombination von (2,1), (2,2) und (2,4) führt auf die elastischen Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\delta \varepsilon}{\delta x} &= 0 & \Delta^2 &= \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \\ \Delta^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\delta \varepsilon}{\delta y} + \frac{\gamma_e}{E} \cdot 2(1+\mu) &= 0 & \varepsilon &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \end{aligned} \quad (2,5)$$

Sind als Randbedingungen nur Spannungen gegeben, so verwendet man mit Vorteil die Airy-Spannungsfunktion  $\Psi$ , die mit den Spannungen in folgender Beziehung steht:

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 \Psi}{\delta y^2} \quad \sigma_y = \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} + \gamma_e y \quad \tau_{xy} = -\frac{\delta^2 \Psi}{\delta x \delta y} \quad (2,6)$$

Kombination von (2,1), (2,3) und (2,6) ergibt eine biharmonische Differentialgleichung:

$$\nabla^4 \Psi = \frac{\delta^4 \Psi}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \Psi}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \Psi}{\delta y^4} = 0 \quad (2,7)$$

Die Integration von (2,5) oder (2,7) unter Berücksichtigung der Randbedingungen liefert die Lösung eines Scheibenproblems.

Ein anderer Lösungsweg kann mit Hilfe der Formänderungsarbeit gewon-

nen werden. Wird ein elastischer Körper langsam belastet, so wird die zugeführte Energie ausschliesslich zur Erzeugung der Verformung verwendet und mit Formänderungsarbeit bezeichnet. Lässt man z.B. eine einfache Druckspannung von 0 auf ihren Endwert  $\sigma_x$  und entsprechend die Dehnung von 0 auf  $\epsilon_x$  anwachsen, so wird die Formänderungsarbeit bei Annahme linearer Elastizität:

$$l = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{E}{2} \epsilon_x^2 \quad (2,8)$$

Berücksichtigt man sämtliche Normal- und Schubspannungen einer elastischen Scheibe und löst man die Gleichungen (2,1) nach den Verzerrungen auf, so erhält man folgenden Ausdruck für die Formänderungsarbeit:

$$L = \frac{\nu}{2} \iint [\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \gamma \epsilon_x \epsilon_y + \delta \gamma^2 x y] df \quad (2,9)$$

wobei

$$\nu = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad \gamma = \frac{2\mu}{1-\mu} \quad \delta = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$$

Nebst den Spannungen leisten auch die äusseren (X, Y) und die innern ( $\gamma_e$ ) Kräfte, die die Scheibe angreifen, Arbeit, die wie folgt lautet:

$$K = - \iint \gamma_e \cdot v df - \oint (X_u + Y_v) d\sigma \quad (2,10)$$

Die Gesamtenergie einer elastischen Scheibe ist:

$$J = L + K \quad (2,11)$$

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie besagt, dass diejenigen Verschiebungen u, v ein stabiles Gleichgewicht einer elastischen Scheibe ergeben, die die Gesamtenergie minimisieren. Mit den Gleichungen (2,2) lautet das Energieintegral:

$$J = \frac{\nu}{2} \iint \left[ \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta v}{\delta y} \right)^2 + \gamma \frac{\delta u}{\delta x} \frac{\delta v}{\delta y} + \delta \left( \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right)^2 \right] df - \iint \gamma_e v df - \oint (X_u + Y_v) d\sigma = \text{Min} \quad (2,12)$$

Die Funktionen u(x, y) und v(x, y), die (2,12) erfüllen und den Randbedingungen genügen, sind ebenfalls die Lösung des gestellten Problems.

## b) Differenzenverfahren und Energiemethode.

Obwohl das Problem der Spannungsberechnung in Erddämmen gegenüber der Wirklichkeit bereits stark vereinfacht wurde, ist es bis jetzt nicht gelungen, eine analytische Lösung für die Differentialgleichungen oder die Minimierung des Energie-Integrals anzugeben. Eine angenäherte Lösung wird gewonnen mit Differenzenverfahren. Man beschränkt sich darauf, die Funktionswerte der gesuchten Funktionen  $u, v$  in den Schnittpunkten eines über den Dammquerschnitt gelegten beliebigen Netzgitters zu bestimmen. Man ersetzt die Differentiale in (2,5) resp. (2,12) durch Differenzen zwischen den gesuchten Funktionswerten und erhält schliesslich ein Gleichungssystem mit gleich vielen Unbekannten wie Funktionsgitterpunkten. Die mathematischen Probleme des Verfahrens in bezug auf Durchführbarkeit und Genauigkeit sind eingehend in [4] beschrieben.

Zur Gewinnung einer Lösung wurde in den bisherigen Arbeiten stets die biharmonische Differentialgleichung  $\nabla^4\psi = 0$  (2,7) approximiert. Dieses Vorgehen hat verschiedene Nachteile. Stiefel [23] hat gezeigt, dass die Approximation des Energie-Integrals (2,12) der Approximation der Differentialgleichung vorzuziehen ist. Einmal müssen die dynamischen Randbedingungen, wie sie z.B. bei einem Erddamm an der spannungsfreien Dammoberfläche auftreten, nicht explizit formuliert werden, sondern nur die kinematischen Randbedingungen (z.B. Auflagebedingungen, Wasserdruck). Ferner ist das aus der Approximation des Energie-Integrals resultierende Gleichungssystem stets symmetrisch.

Die Auflagebedingungen eines Erddammes eignen sich in der Regel nicht für eine Behandlung mit der Spannungsfunktion. Meistens befindet sich in einer gewissen Tiefe unterhalb des Erddammes der Fels oder ein Baugrund, dessen Elastizitätseigenschaften die Annahme der Unzusammendrückbarkeit erlauben. Nun hat zwar Rellich [18] gezeigt, wie man Verschiebungsbedingungen mit der Airy-Funktion  $\psi$  behandeln kann. Die Formeln ergeben aber komplizierte Ausdrücke mit dritten Ableitungen.

Ferner ist in bezug auf die Genauigkeit zu bemerken, dass, ausgehend



In der y-Richtung erhält man auf analoge Weise

$$\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)_H = \frac{1}{2h} (v_{12} - v_{22} + v_{13} - v_{23}) \quad (2,15)$$

Die Approximation von  $\frac{\delta v}{\delta x}$  resp.  $\frac{\delta u}{\delta y}$  erfolgt genau gleich. Die Fläche des Quadrates ist  $\Delta f = h^2$ ; somit lautet ihr Anteil an der Energiesumme:

$$\begin{aligned} \Delta J_L = \frac{1}{4} \cdot \frac{v}{2} [ & (u_{13} - u_{12} + u_{23} - u_{22})^2 + (v_{12} - v_{22} + v_{13} - v_{23})^2 + \\ & + \gamma (u_{13} - u_{12} + u_{23} - u_{22})(v_{12} - v_{22} + v_{13} - v_{23}) + \\ & + \delta (u_{12} - u_{22} + u_{13} - u_{23} + v_{12} - v_{22} + v_{23} - v_{22})^2 ] \end{aligned} \quad (2,16)$$

Für den Näherungsausdruck von  $\Delta J_K$  betrachten wir das Doppelgitter  $\Gamma^1$ . Ein Quadrat mit dem Mittelpunkt 13 ergibt als Energieanteil

$$\Delta J_K = -(\gamma_e \cdot v_{13}) h^2 \quad (2,17)$$

während die äusseren Kräfte (X,Y) keinen Anteil liefern. Die gesamte Energiesumme lautet:

$$J = \sum \Delta J_L + \sum \Delta J_K \quad (2,18)$$

und ergibt einen quadratischen Ausdruck in den Unbekannten  $x_j$  - d.h. in den Funktionswerten u,v in den Netzschnittpunkten - von der Form

$$J = \frac{v}{2} \sum_{j,k} a_{jk} x_j x_k - \sum_j b_j x_j \quad (2,19)$$

( $a_{jk}$  und  $b_j$  = Koeffizienten). Die Funktionswerte  $x_j$ , die den Energieausdruck (2,19) minimisieren, sind die Lösungen des linearen, symmetrischen Gleichungssystems:

$$\frac{\delta J}{\delta x_j} = v \sum a_{jk} x_k - b_j = 0 \quad (2,20)$$

Betrachten wir z.B. den Funktionswert  $v_{13}$ , so erkennen wir in bezug auf  $\sum \Delta J_L$ , dass von sämtlichen Flächenstücken nur diejenigen  $v_{13}$  enthalten, die eine Ecke im Punkt 13 haben. (SO, SW, NO, NW).

$$\frac{\delta J}{\delta v_{13}} = \frac{\delta \Delta L_{SO}}{\delta v_{13}} + \frac{\delta \Delta L_{SW}}{\delta v_{13}} + \frac{\delta \Delta L_{NO}}{\delta v_{13}} + \frac{\delta \Delta L_{NW}}{\delta v_{13}} \quad (2,21)$$

Die Zusammensetzung dieser 4 Ableitungen ergibt folgenden Ausdruck:

$$\frac{\delta L}{\delta v_{13}} = v \left[ -\frac{1}{4} (1+\delta) (v_2 + v_4 + v_{22} + v_{24}) + \frac{1}{2} (1-\delta) (v_{12} + v_{14} - v_3 - v_{23}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (\gamma + 2\delta) (u_2 - u_4 - u_{22} + u_{24}) + (1+\delta) v_{13} \right] \quad (2,22)$$

Für die Ableitung von K nach  $v_{13}$  kommt nur das Flächenstück in Betracht, das den Punkt  $13$  umschliesst:

$$\frac{\delta K}{\delta v_{13}} = -\gamma_e h^2 \quad (2,23)$$

(2,22) und (2,23) ergeben zusammen eine Gleichung des Systems (2,20), die man den Operator im Punkt  $v_{13}$  nennt. Ausser gewissen Punkten in der Nähe des Randes haben sämtliche Netzpunkte aus Symmetriegründen denselben Operator. Für  $u_{13}$  führt das Verfahren auf einen ähnlichen Operator. Wir schreiben diese Normalgleichungen in symbolischer Weise wie folgt:

u-Punkt

$$\frac{v}{8} \begin{bmatrix} -2(1+\delta) & 4(1-\delta) & -2(1+\delta) \\ -4(1-\delta) & 8(1+\delta) & -4(1-\delta) \\ -2(1+\delta) & 4(1-\delta) & -2(1+\delta) \end{bmatrix} u + \frac{v}{8} \begin{bmatrix} \gamma+2 & 0 & -(\gamma+2\delta) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\gamma+2\delta) & 0 & (\gamma+2\delta) \end{bmatrix} v = 0 \quad (2,24)$$

v-Punkt

$$\frac{v}{8} \begin{bmatrix} \gamma+2\delta & 0 & -(\gamma+2\delta) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\gamma+2\delta) & 0 & (\gamma+2\delta) \end{bmatrix} u + \frac{v}{8} \begin{bmatrix} -2(1+\delta) & -4(1-\delta) & -2(1+\delta) \\ 4(1-\delta) & 8(1+\delta) & 4(1-\delta) \\ -2(1+\delta) & -4(1-\delta) & -2(1+\delta) \end{bmatrix} v - \gamma_e h^2 = 0$$

mit den Abkürzungen

$$\gamma = \frac{2\mu}{1-\mu} \quad \delta = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \quad v = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

c) Angriffskräfte und Randbedingungen.

Sieht man von Zusatzkräften, die z.B. bei Erdbeben oder infolge Sickerströmungen auftreten, ab, so reduzieren sich die Kräfte in einem Erdamm auf das Eigengewicht (vertikale Massenkraft  $\gamma_e$ ) und den Wasserdruk (horizontale äussere Kraft  $w$ ). (Fig.2). Um den Wassereintritt nach der Luftseite zu verhindern, wird ein Kern aus undurch-

lässigem Material erstellt. Das Wasser dringt auf der Wasserseite ein und setzt den Kern unter hydrostatischen Druck:

$$w = \gamma_w (H_1 - y) \quad (2,25)$$

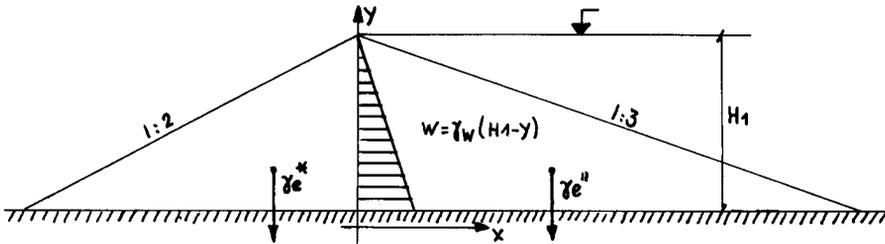


Fig.2 Kräfte in einem Erddamm.

Auf der Luftseite ist das Feuchtraumgewicht  $\gamma_e^*$  wirksam, das sich wie folgt berechnet:

$$\gamma_e^* = \gamma_s (1-n) + \xi \cdot n \cdot \gamma_w \quad (2,26)$$

Für die Berechnung wählen wir folgende als Mittelwerte aufzufassende Zahlen:

Spez. Gewicht  $\gamma_s = 2,65 \text{ t/m}^3$ ; Porosität  $n = 0,27$ ; Sättigungsgrad  $\xi = 0,6$ .

Dies ergibt ein Feuchtraumgewicht  $\gamma_e^* = 2,1 \text{ t/m}^3$ .

Auf der Wasserseite wird infolge des Auftriebes das wirksame Eigen- gewicht auf  $\gamma_e''$  reduziert und berechnet sich nach der Formel:

$$\gamma_e'' = (\gamma_s - \gamma_w)(1-n) = 1,2 \text{ t/m}^3 \quad (2,27)$$

Die Damtoberfläche ist spannungsfrei. Im Energieintegral (2,12) müs- sen keine speziellen Randbedingungen eingeführt werden. Hingegen dürfen nur die effektiven Flächenanteile berücksichtigt werden und die Differenzen-Approximationen sind im Schwerpunkt G des Flächen- stückes neu zu formulieren (Fig.3). Hat die Oberfläche einen kompli- zierten Verlauf, so entstehen viele verschiedene Flächenstücke, und die Formulierung der Operatoren erfordert einen grossen Aufwand. Es erweist sich als vorteilhaft, mit einer abgetreppten Oberfläche zu rechnen. Zwar führt diese Abtreppung zu gewissen Störungen am Rande der Lösung (siehe z.B. Beilage 1). Diese können jedoch weitgehend

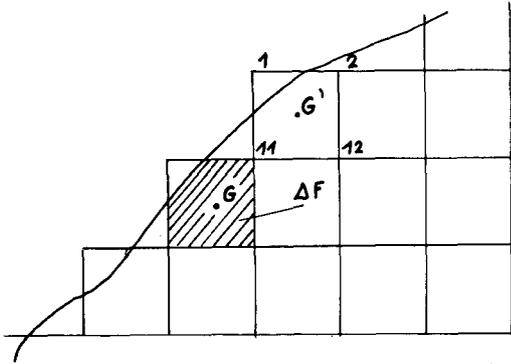


Fig.3 Approximation des Randes.

eliminiert werden, wenn nicht die Funktionswerte in den Netzschnittpunkten 1,2,11,12, sondern deren Mittelwerte in  $G'$  betrachtet werden. Ueber die maschinelle Berechnung der Randoperatoren, die allein diese Fehler auszuschliessen vermag, werden gegenwärtig Untersuchungen am Institut für Angewandte Mathematik der ETH Zürich durchgeführt.

Die Unterlage eines Erddammes kann vom Berechnungsstandpunkt aus in zwei Klassen eingeteilt werden. In der ersten figurieren alle jene Fälle, in denen der Untergrund analytisch berücksichtigt werden kann. Dies ist möglich, wenn für den Untergrund die Gesetze der Elastizitätstheorie gelten, und wenn die Felsoberfläche horizontal verläuft. Den Extremfall, Felsoberfläche direkt unter dem Erddamm, werden wir als Dämme auf fester Unterlage bezeichnen. Liegt hingegen zwischen Felsoberfläche und Damm eine elastische Schicht, so kann diese in Analogie zur Berechnung statisch unbestimmter Bauwerke wie folgt berücksichtigt werden:

Man trennt das hyperstatische System Damm - Untergrund entlang der Grenzschrift. Numerisch berechnet man mit dem Gleichungssystem (2,20) die Verschiebungen des Erddammes. Parallel dazu ermittelt man analytisch die Verschiebungen des elastischen Untergrundes. Als überzählige Grössen treten die Horizontal- resp. Vertikalverschiebungen an der Grenzschrift auf. Diese sind so zu bestimmen, dass in der Grenzschrift kein Klaffen entsteht. Diese Angleichung geschieht mit einem im 4. Kapitel beschriebenen Schritt-für-Schritt-Verfahren.

In die zweite Klasse gehören jene Fälle, in denen der Untergrund inhomogen ist, oder die Felsoberfläche einen unregelmässigen Verlauf aufweist. In diesem Falle wird das Netzgitter über den Untergrund

bis an die Felsoberfläche ausgedehnt, wobei die Anzahl Gitterpunkte dann sehr rasch zunimmt. Im Abschnitt IV wird ein solches Beispiel berechnet.

d) Auflösung des Gleichungssystems.

Das Gleichungssystem (2,20) hat, auch bei relativ grosser Maschenweite, mehrere Hundert Unbekannte und kann deshalb nicht mit herkömmlichen Methoden aufgelöst werden. Für jeden Funktionspunkt des Netzes existiert eine Gleichung, z.B. (2,24). Werden den Punkten beliebige Funktionswerte zugeteilt, so sind diese Gleichungen im allgemeinen nicht erfüllt, sondern die entstehende Gleichung lautet:

$$v \left[ -\frac{1}{4} (1+\delta) (u_2 + u_4 + u_{22} + u_{24}) + \frac{1}{2} (1-\delta) (u_3 + u_{23} - u_{12} - u_{14}) + \frac{1}{8} (\gamma + 2\delta) (v_2 - v_4 - v_{22} + v_{24}) + (1+\delta) u_{13} \right] = R_0 \quad (2,28)$$

Man nennt  $R_0$  ein Residuum. Verändert man den Funktionswert  $u_{13}$  um  $\frac{-R_0}{v(1+\delta)}$ , so wird  $R_0 = 0$ , und die Operatorgleichung ist im Punkt  $u_{13}$  erfüllt. Berechnet man systematisch alle Gleichungen in den Schnittpunkten und tilgt die Residuen, so entsteht ein konvergentes Verfahren, bis schliesslich alle Residuen gleichzeitig verschwinden, womit das Gleichungssystem gelöst ist. Man nennt es Relaxationsverfahren. Southwell [22] hat gezeigt, wie man dieses Verfahren bei der Berechnung von Hand anwenden kann.

Für das Rechnen mit Rechenmaschinen wurden verschiedene Verfahren entwickelt, von denen sich die Ueberrelaxation für das vorliegende Problem besonders zu eignen scheint. Man verbessert bei jedem Durchlauf den Funktionswert um  $\omega \cdot \frac{-R_0}{v(1+\delta)}$ , wobei der Ueberrelaxationsfaktor  $\omega$  im Falle eines symmetrischen, positiv definiten Gleichungssystems der Ungleichung genügen muss:

$$0 < \omega < 2 \quad (2,29)$$

$\omega$  besitzt ein Optimum, bei dem die Konvergenz am raschesten ist. Dieses Optimum kann aus der Theorie [23] abgeschätzt und im Verlauf der numerischen Rechnung durch Bildung des Quotienten der Fehlersumme  $\sum \left( \frac{\omega R_0}{v(1+\delta)} \right)^2$ , wobei die Summe sich über sämtliche Funktions-

werte des Gitters bei einem Durchlauf erstreckt, verbessert werden. Für einen Erddamm auf fester Unterlage mit 10 Maschen in der Dammmitte hat sich  $\omega=1,7$  als ein guter Ueberrelaxationsfaktor erwiesen. Werden weniger Maschen verwendet, oder ist der Damm auf elastischer Unterlage, so ist  $\omega$  kleiner zu wählen.

Im Durchschnitt genügen für einen Damm auf fester Unterlage etwa 50 bis 80 Relaxationsschritte, bei elastischer Unterlage etwas mehr, um die 4. Stelle der Lösung exakt zu berechnen. Die Rechenzeit hängt stark von der Maschine ab; auf einer IBM 704 betrug sie z.B. nur 10 Minuten pro Damm.

#### e) Programmierung.

Die im folgenden besprochenen Beispiele wurden auf verschiedenen Maschinen gerechnet, nämlich auf der ERMETH (elektronische Rechenmaschine der ETH), auf einer IBM 704 in Paris und auf einer Siemens 2002 in Tübingen. Da Aufbau und Rechencode der verschiedenen Maschinen stark variieren, beschränken wir uns darauf, im Blockdiagramm 1 einen schematischen Ueberblick über den Aufbau des Hauptprogramms zu geben. Die verwendeten Symbole haben folgende Bedeutung:

: = wird ersetzt durch

K = Kolonnenzähler; im Testbeispiel variierend zwischen 0-50.

i = Zähler innerhalb einer Kolonne.

$u(K,i)$ ;  $v(K,i)$  = Verschiebungen in den Gitterpunkten.

$R_u$ ;  $R_v$  = Residuen.

$\sigma_y(K,i)$ ;  $\sigma_x(K,i)$ ;  $\tau_{xy}(K,i)$  = Spannungen in den Mittelpunkten des Netzgitters.

$\sigma_y(K,0)$ ;  $\tau_{xy}(K,0)$  = Spannungen an der Kontaktgrenze.

$\Sigma$  = Summe der Verbesserungen im Quadrat.

$\Sigma^*$  = Vergleichswert für  $\Sigma$ .

$\omega_1$ ;  $\omega_2$  = Ueberrelaxationsfaktoren.

$I(K)$  = Fester Vektor, enthält die Anzahl Gitterpunkte pro Kolonne.

Nebst dem Hauptprogramm sind eine Liste der zu jedem Netzpunkt gehö-

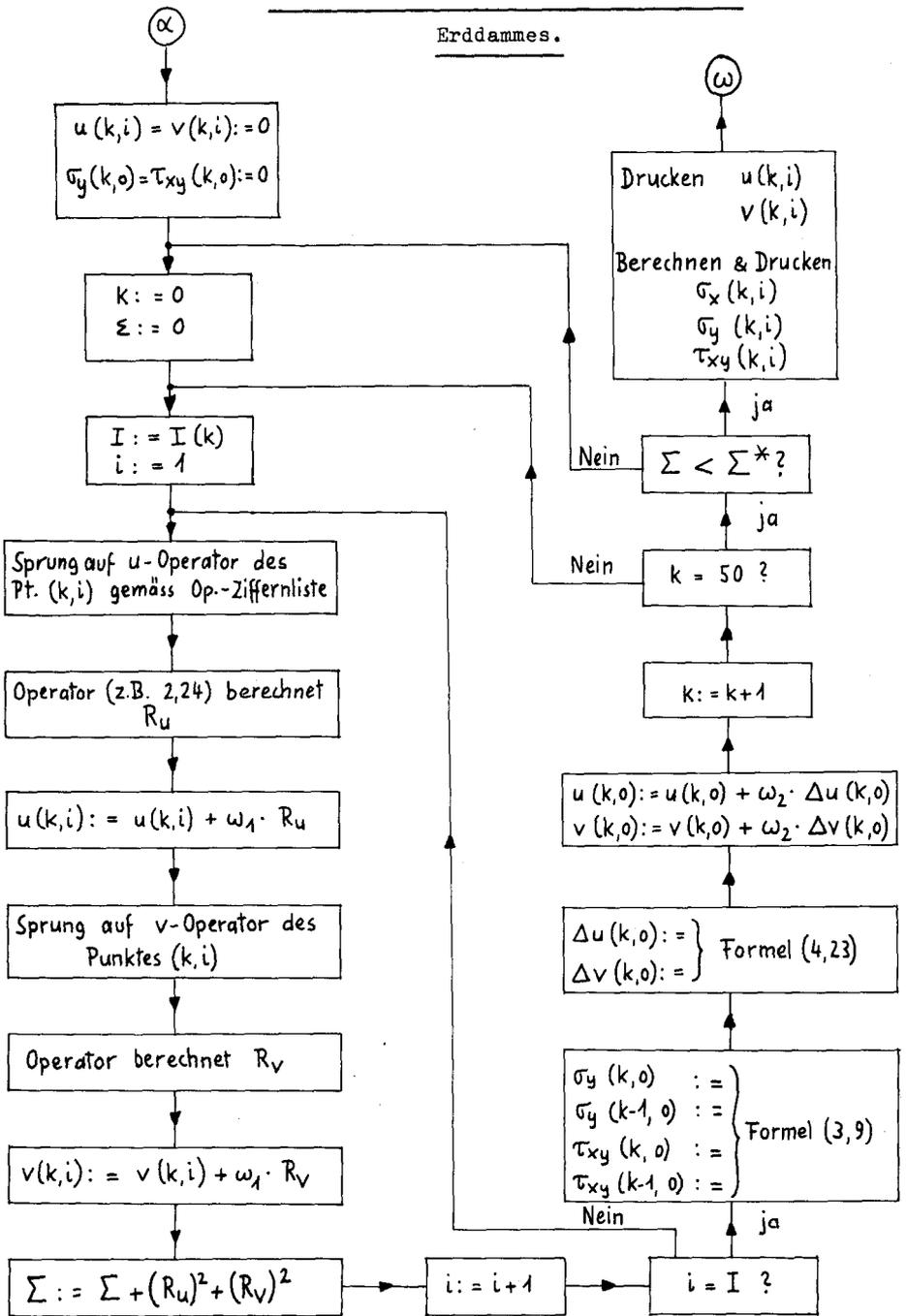
renden Operatorziffern, die Unterprogramme der Operatoren und die Werte der Einflusslinien einzugeben.

Die aufgewendete Rechenzeit ist stark von der Konvergenz des Verfahrens abhängig. Diese kann auf folgende Art beschleunigt werden:

- Relaxation rückwärts, d.h. die Kolonnen werden in der Reihenfolge 50, 49, 48 usw. berechnet. Nach je 10 bis 20 Relaxationsschritten ist der Sinn der Reihenfolge umzukehren.
- Veränderung der  $\omega$ -Werte. In [23] ist dargelegt, in welchem Sinne  $\omega$  zu verändern ist, wenn die Konvergenz ungenügend ist.
- Gebietsweise Relaxation. Da in der Dammitte am meisten Punkte pro Kolonne vorhanden sind, ist die Konvergenz in diesem Bereich stets am langsamsten. Dies kann verbessert werden durch vermehrte Relaxation in diesem Gebiet.

Blockschema 1: Ueberrelaxation eines

Erddammes.



Fällt weg bei Dämmen auf fester Unterlage

### 3. Kapitel: Dämme auf fester Unterlage.

#### a) Beschreibung eines Testbeispiels.

Mit der im vorigen Kapitel beschriebenen Methode wurden für verschiedene Materialeigenschaften und Auflagebedingungen eine Anzahl Beispiele gerechnet, deren Lösungen in den Beilagen 1-8 angegeben sind. Bei der Besprechung dieser Resultate werden wir so vorgehen, dass vorerst ein Testbeispiel ausführlich dargestellt und hierauf Schritt für Schritt der Einfluss der einzelnen Parameter untersucht wird.

Die Annahmen für das Testbeispiel sind (Fig.2):

Form des Dammes:	Dreieck mit den Neigungen Luftseite 2:1, Wasserseite 3:1, Höhe $H_1 = 100$ m.
Materialkonstanten:	$\mu = 0,3$ $E = 10'000$ t/m <sup>2</sup>
Angriffskräfte:	Eigengewicht $\gamma_e^* = 2,1$ t/m <sup>3</sup> Wasserdruck $w = 0$
Unterlage:	Horizontaler, inkompressibler Fels.
Randbedingungen an der Unterlage:	Volle Haftung des Materials am Fels. $u = 0$ ; $v = 0$ .

Die Lösung (Beilage 1) gibt die Verschiebungen in mm. Daraus geht hervor, dass die Horizontalverschiebungen klein sind. Die Maxima treten unter der Mitte der Böschungen auf und betragen -9 resp. +7 cm. Die Dammkrone setzt sich um 72 cm. Diese Setzung kann mit einer Näherungsformel geschätzt werden: Nimmt man an, dass die Horizontalverzerrung  $\epsilon_x$  in der Dammitte gleich 0 ist, so erhält man aus Formel (2,1a)

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \quad (3,1)$$

Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Vertikalspannung in einem Punkt gleich dem überlagerten Bodengewicht ist ( $\sigma_y = \gamma_e^* \cdot h_g$ ), erhält man durch Einsetzen von (3,1) in (2,1b) und anschließende Integration

$$v_k = \frac{\gamma_e^*}{2E} \cdot H_1^2 \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)} \quad (3,2)$$

d.h. mit den Annahmen des Testbeispiels  $v_k = 78$  cm. Die Differenz, bezogen auf den analytischen Wert, beträgt 7,6%.

Diese Differenz ist hauptsächlich dadurch begründet, dass die Vertikalspannungen  $\sigma_y$  nur annähernd gleich dem Ueberlagerungsgewicht sind. Die Spannungen können mit den Formeln (3,9) aus den Verschiebungen berechnet werden. In der Fig.4a sind die Vertikalspannungen in kg/cm<sup>2</sup> eingezeichnet und zeigen, dass in der Mitte eine Entlastung stattfindet, wogegen die Flanken stärker belastet werden. In der Fig.4b sind die Kurven  $\frac{\sigma_y - \gamma e^* h g}{\gamma e^* h g}$  eingetragen und ergeben ein Maximum in der Dammitte von -14%. An der flachen Böschung auf der Wasserseite sind die Abweichungen etwas grösser als auf der Luftseite.

Die Horizontalspannungen  $\sigma_x$  (Fig.5a) können entlang der Felsoberfläche aus den Vertikalspannungen berechnet werden. Da nach Voraussetzung  $\epsilon_x = 0$  ist, gilt Formel (3,1). Hingegen entsprechen die Horizontalspannungen mit zunehmender Dammhöhe immer weniger der Gleichung (3,1), sondern sie haben einen ausgeprägten abgeflachten Verlauf.

Die horizontalen Schubspannungen  $\tau_{xy}$  haben ihre Maximalwerte an der Kontaktfläche mit dem Fels. In der Fig.5b sind diese Kontaktspannungen dargestellt. Vergleichshalber sind die Spannungen eingetragen, die man unter Betrachtung eines plastischen Gleichgewichtes gemäss Rendulic [19] erhält. Die Uebereinstimmung ist in Anbetracht der verschiedenen Voraussetzungen sehr gut. Allerdings sind die Kontaktspannungen nach Rendulic von der Unterlage unabhängig, während nach der Elastizitätstheorie die Unterlage einen grossen Einfluss hat (Fig.37). Die maximalen Schubspannungen weisen einen ähnlichen Verlauf wie die Vertikalspannungen auf (Fig.6a). An der Kontaktfläche Material-Fels können sie bei Vernachlässigung der horizontalen Schubspannungen grob geschätzt werden:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{+\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \sim \frac{\gamma e^*}{2} \cdot h g \frac{1-2\mu}{1-\mu} \quad (3,3)$$

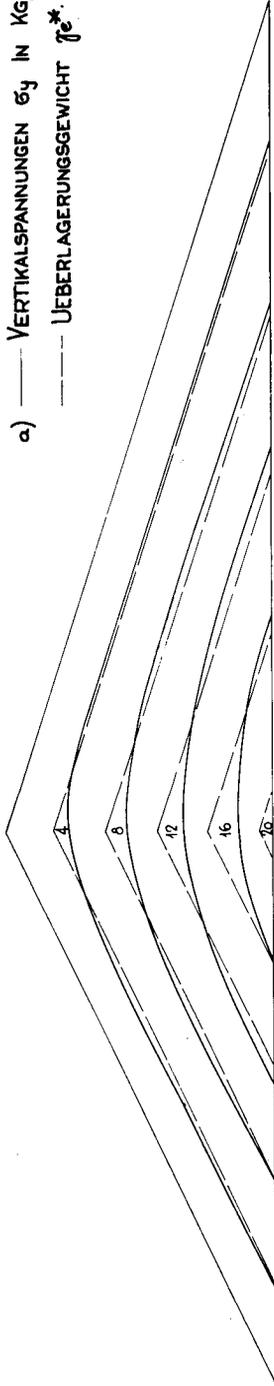
Die Abweichungen betragen max. 18%.

Interessant sind die Richtungslinien maximaler Schubspannungen, die Gleitlinien. In der Fig.6b sind sie für die Luftseite eingezeichnet.

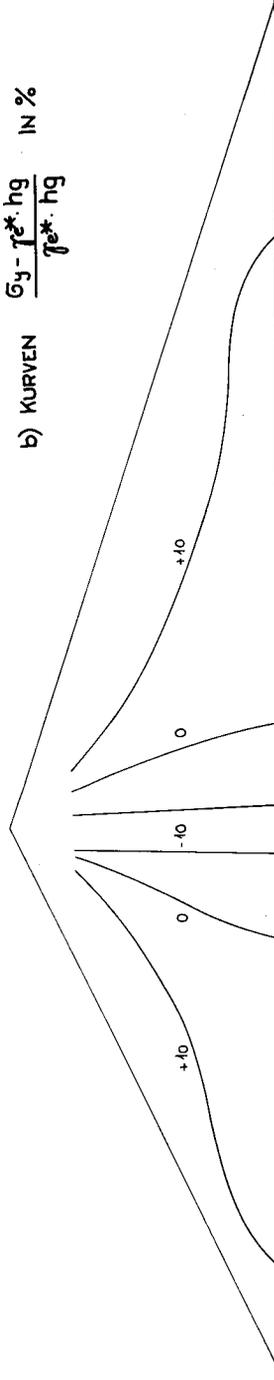
FIGUR 4:

$\rho_e^* = 2.10 \text{ t/m}^3$      $E = 1000 \text{ Kg/cm}^2$      $\mu = 0.3$   
 $W = 0$                      $H = 100 \text{ m}$

a) ——— VERTIKALSPANNUNGEN  $\sigma_y$  IN  $\text{Kg/cm}^2$   
       - - - - - UEBERLAGERUNGSGEWICHT  $\rho_e^* \cdot h_g$



b) KURVEN  $\frac{\sigma_y - \rho_e^* \cdot h_g}{\rho_e^* \cdot h_g}$  IN %

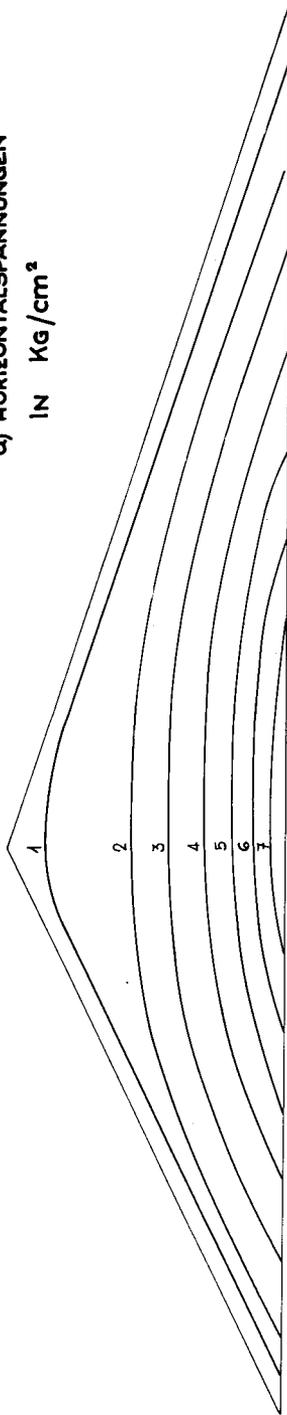


**FIGUR 5:**  $\gamma_e^* = 2.10 \text{ To/m}^3$   
 $W = 0$

$E = 1000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $H = 100 \text{ m}$

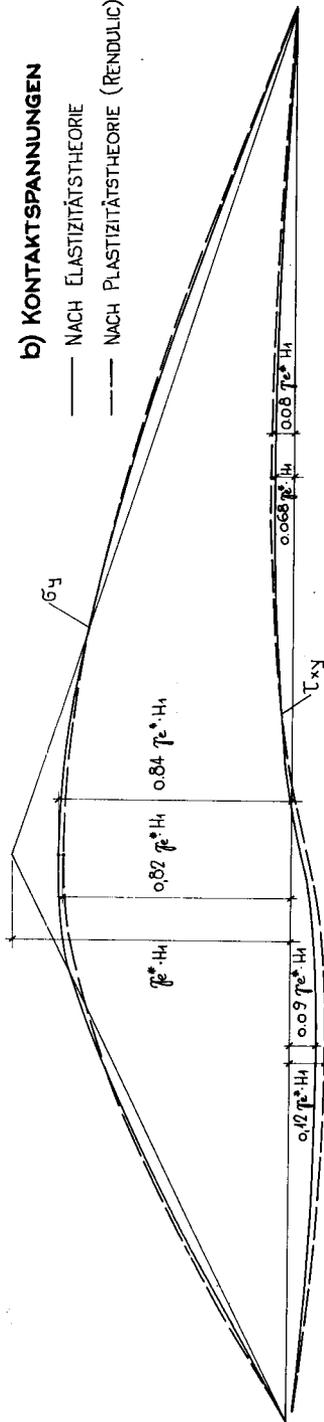
$\mu = 0.3$

**a) HORIZONTALSPANNUNGEN**  
 IN  $\text{Kg/cm}^2$



**b) KONTAKTSPANNUNGEN**

— NACH ELASTIZITÄTSTHEORIE  
 - - - NACH PLASTIZITÄTSTHEORIE (RENDULIC)

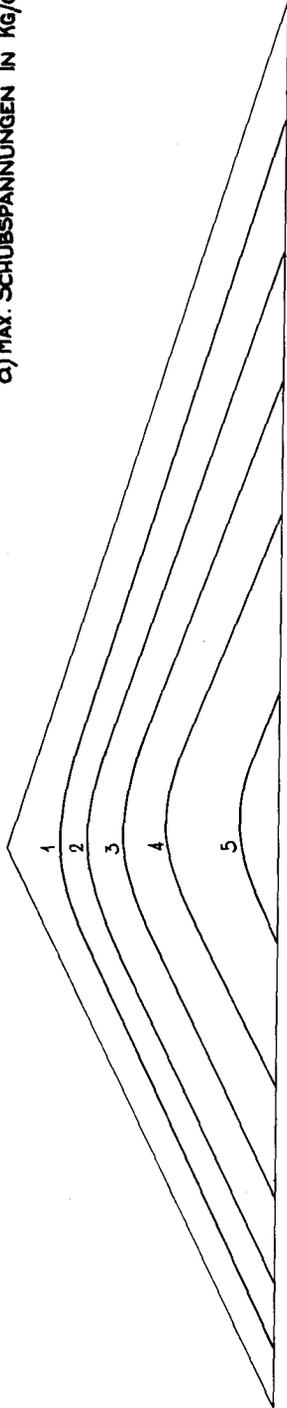


**FIGUR 6 :**  $\gamma_e^H = 2.10 \text{ To/m}^3$   
 $W = 0$

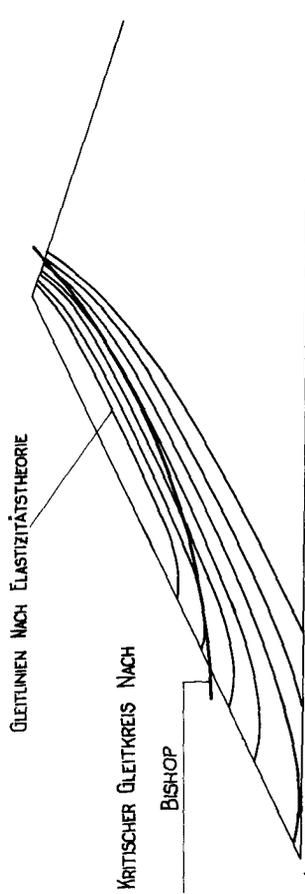
$E = 4000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $H = 100 \text{ m}$

$\mu = 0.3$

a) MAX. SCHUBSPANNUNGEN IN  $\text{Kg/cm}^2$



b) GLEITLINIEN = RICHTUNGSLINIEN  
 MAX. SCHUBSPANNUNGEN



Sie geben die aus vielen Rutschungen bekannte Form der Gleitflächen wieder. Vergleichshalber ist der kritische Gleitkreis dieser Böschung dargestellt, der unter Annahme eines kohäsionslosen Materials mit  $\varphi = 34^\circ$  ermittelt wurde. Die elastischen Gleitlinien verlaufen weitgehend parallel zur Böschung, eine aus dem Gleitkreisverfahren bestens bekannte Tatsache; denn der theoretisch ungünstigste Gleitkreis ist die Böschung selbst (bei kohäsionslosem Material).

b) Der Einfluss der Form des Dammes.

Aus den Resultaten des Testbeispiels mit den mittleren Neigungen 1:2 und 1:3 können Verschiebungen und Spannungen im Bereiche dieser Böschungsneigungen abgeschätzt werden.

Die Höhe des Dammes  $H_1$  und das Feuchtraumgewicht  $\gamma_e^*$  sind Proportionalitätsfaktoren in den Resultaten. Für einen Damm mit der Höhe  $H$  respektive dem Raumgewicht  $\gamma_e^*$  lauten die Umrechnungsformeln aus den Lösungen:

$$\sigma_H \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right] = \sigma_{H_1} \cdot \frac{H \text{ [m]}}{100} \cdot \frac{\gamma_e^* \text{ [t/m}^3\text{]}}{2,1} \quad (3,4)$$

$$v_H \text{ [mm]} = v_{H_1} \cdot \frac{H^2 \text{ [m]}^2}{10\,000} \cdot \frac{\gamma_e^* \text{ [t/m}^3\text{]}}{2,1} \quad v_H \text{ prop. } H^2 \text{ siehe z.B. (3,2)} \quad (3,5)$$

c) Der Einfluss des Elastizitätsmoduls.

Kein Baustoff, insbesondere kein Dammschüttmaterial, erfüllt die Voraussetzungen des Hooke'schen Gesetzes (konstanter E-Modul, konstante Poissonziffer). Selbst bei Annahme eines homogenen Materials fallen in bezug auf den E-Modul eines Erddammes zwei Abweichungen von der Theorie stark ins Gewicht. Einerseits ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm nur in einem beschränkten Bereich linear, und andererseits ist der Elastizitätsmodul Funktion des Spannungszustandes.

Der elastische Bereich eines Bodenmaterials kann aus dem Triaxialversuch bestimmt werden. Nach Terzaghi [24, S.375] besteht zwischen der bezogenen Volumenveränderung einer Probe ( $\Delta V = \Delta V_o / V_o$ ) und der Zusatzspannung  $\Delta \sigma = \sigma_1 - \sigma_3$  die lineare Beziehung

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} \cdot \Delta \sigma \quad (3,6)$$

Zeichnet man die  $\Delta \sigma / \Delta V$ -Kurve eines Triaxialversuches auf, so ergibt sich jedoch nur in einem kleinen Bereich eine Gerade. An der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau in Zürich wurde am Göschenalpdammaterial eine eingehende Untersuchung der Verformungseigenschaften durchgeführt. In Fig.7 sind die Verformungskurven lockeren und verdichteten Materials dargestellt. Als Mittelwerte ergaben sich folgende den elastischen Bereich begrenzende Dehnungen:

lockeres Material  $\epsilon_1 = 1\%$

dichtes Material  $\epsilon_1 = 2\%$

Bei grösseren Dehnungen geht das Material in einen Uebergangszustand über, bevor es schliesslich zum Bruch kommt. Die 3 Bereiche elastisch, Uebergang, plastisch werden in der Mohr'schen Darstellung

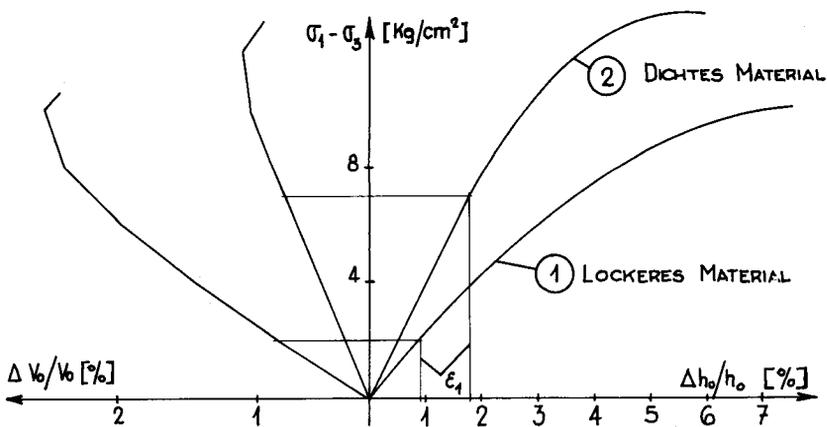


Fig.7 Verformungskurven des Göschenalpmaterials.

approximativ durch 2 Geraden getrennt (Fig.8). Im Testdamm ergeben sich daraus die in Fig.9 gezeichneten Bereiche bei folgenden Annahmen: Kohäsion  $c=0$ ; Winkel der inneren Reibung  $\varphi$  Bruch =  $34^\circ$ ;  $\varphi$  El =  $30^\circ$ , was ungefähr den Deformationseigenschaften des lockeren

Göschenealdammmaterials entspricht. Der Elastizitätsmodul ist, wie Bishop [2] gezeigt hat, eine lineare Funktion der Hauptspannung  $\sigma_3$ :

$$E = K_0 \sigma_3 + K_1 \quad (3,7)$$

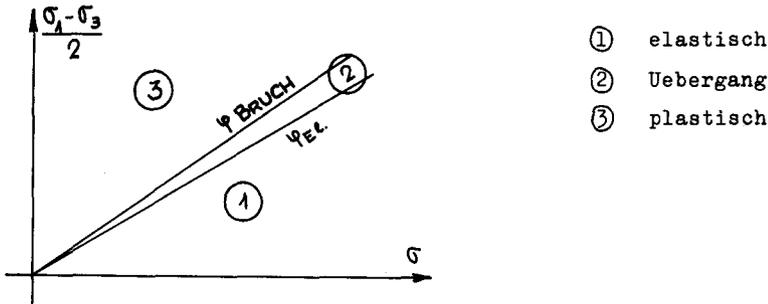


Fig. 8 Zustandsbereiche.

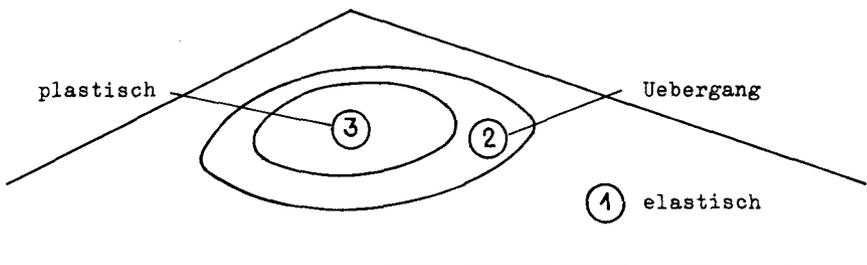
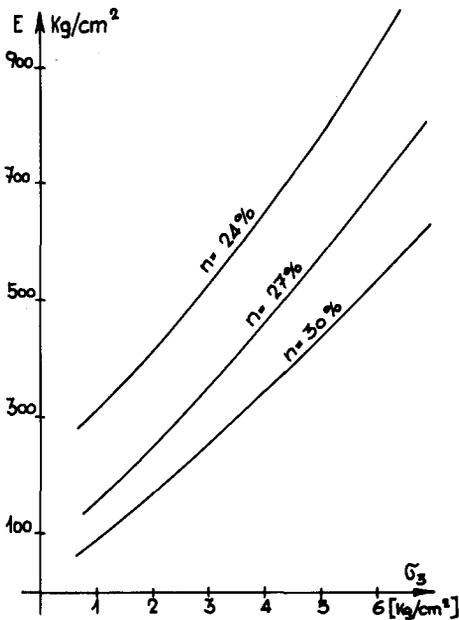


Fig. 9 Zustandsbereiche im Damm auf fester Unterlage.

In Fig. 10 sind 3 Kurven des untersuchten Materials eingezeichnet, welche diese Proportionalität bestätigen und zeigen, wie gross die Variation von  $E$  ist; denn beispielsweise in einem Erddamm von 100m Höhe treten Horizontalspannungen  $\sigma_x > 7 \text{ kg/cm}^2$  auf (Fig. 5).

Trotz diesen Abweichungen von der Theorie wird mit einem konstanten  $E$ -Modul gerechnet. Eine Verbesserung der Methode kann nur erreicht



werden, wenn in einem Schritt-für-Schritt-Verfahren, ausgehend von der homogenen Lösung, einerseits in der plastischen Zone die plastischen Gesetze verwendet werden, andererseits der E-Modul gemäss (3,7) an den Spannungszustand angeglichen wird. Das erste Verfahren wird im dritten Abschnitt genauer erläutert werden.

Fig.10 E-Modul in Funktion von  $\sigma_3$ .

Bei Durchführung der Berechnung mit einem konstanten E-Modul sind die Verschiebungen  $u, v$  - d.h. die Lösung des Gleichungssystems (2,20) -

$$\sum a_{jk} \cdot x_k = b_j \cdot \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu) \cdot E} \quad (3,8)$$

indirekt proportional zum E-Modul. Löst man das Stoffgesetz (2,1) nach den Spannungen auf, so erhält man:

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \frac{\delta v}{\delta y} + \mu \frac{\delta u}{\delta x} \right]$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \frac{\delta u}{\delta x} + \mu \frac{\delta v}{\delta y} \right] \quad (3,9)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right)$$

d.h. die Spannungen sind unabhängig vom E-Modul; da die Verzerrungen umgekehrt proportional zum E-Modul sind, fällt bei der Ausrechnung nach (3,9) der E-Modul heraus.

d) Einfluss der Poissonziffer  $\mu$ .

Die Ziffer  $\mu$  gibt das Verhältnis der Querverformung zur Längsverformung bei axialer Belastung an. Sie kann für ein Bodenmaterial im Labor bestimmt werden durch Messung des Ruhedruckbeiwertes  $\lambda_0$ . Wird in einem Triaxialversuch bei einer Vertikalspannung  $\sigma_1$  die Horizontalspannung  $\sigma_3$  so gewählt, dass die Probe keine seitliche Verformung erleidet, so gilt mit

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad (3,10)$$

gemäss Gleichung (3,1) mit  $\sigma_3 = \sigma_x$  und  $\sigma_1 = \sigma_y$

$$\mu = \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (3,11)$$

Untersuchungen zeigen, dass  $\mu$  mit dem Winkel der inneren Reibung  $\varphi$  in Zusammenhang steht. Als empirische Beziehung gibt Brinch Hansen [9] folgendes Gesetz an:

$$\mu = \frac{1 - \sin \varphi}{2 - \sin \varphi} \quad (3,12)$$

De Wet [5] hat theoretisch eine ähnliche Formel hergeleitet:

$$\mu = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{2 + \sin^2 \varphi} \quad (3,13)$$

und Yamaguchi [26] hat gezeigt, dass unter Verwendung der Potentialtheorie im plastischen Bereich gilt:

$$\mu = \frac{1 + \sin^2 \varphi}{2} \quad (3,14)$$

Diese Beziehungen (Fig.11) wurden durch Versuche erhärtet und zeigen übereinstimmend, dass  $\mu = 0,5$  einem  $\varphi = 0$ -Material entspricht.

Die von De Wet [5] beschriebenen Versuche ergaben, dass  $\mu$  im elastischen Bereich ziemlich konstant ist. Geht das Material allmählich in den plastischen Zustand über, so wird  $\mu$  grösser, bis es im eigentlichen plastischen Fliessen wiederum einen konstanten Wert  $\cong 0,5$  annimmt (3,14). Die Variation ist dabei, wie man Fig.11 entnehmen kann, ungefähr  $2(0,5 - \mu_{El})$ . Diese Frage ist aber noch nicht definitiv abgeklärt. Wie wirkt sich die Wahl von  $\mu$  auf die Rechenergebnisse aus? Beginnend mit den Verschiebungen zeigt Formel (3,8), dass die

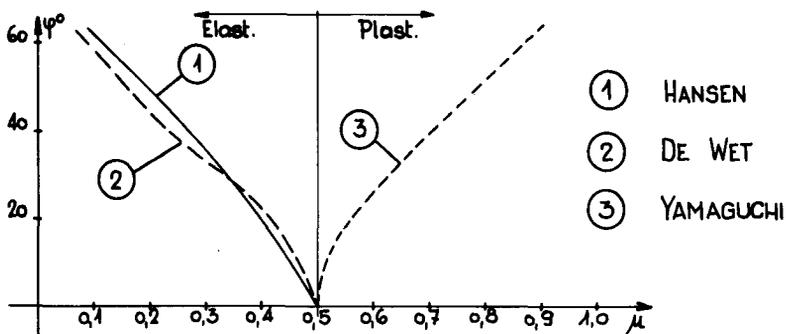


Fig.11 Poissonziffer in Funktion von  $\mu$ .

rechte Seite des Gleichungssystems proportional zum Faktor ist:

$$F_{\mu} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)} \quad (3,15)$$

Da die Lösungen eines Gleichungssystems proportional zur rechten Seite sind, lässt sich vermuten, dass die Verschiebungen  $u, v$  proportional zu  $F_{\mu}$  sind. Die Koeffizienten  $a_{jk}$  sind aber auch von  $\mu$  abhängig, so dass kein strenger Beweis möglich ist.

Um den Einfluss von  $\mu$  abzuklären, haben wir unter denselben Voraussetzungen wie für das Testbeispiel den Damm mit  $\mu=0$ ,  $\mu=0,15$  und  $\mu=0,45$  berechnet (Beilagen 1,2). Trägt man für einige Punkte, z.B. A und B (Fig.12), die Verschiebungen in Funktion von  $\mu$  auf, wobei die grösste Verschiebung gleich 100% gesetzt wird, so ergibt sich folgendes (Fig.13):

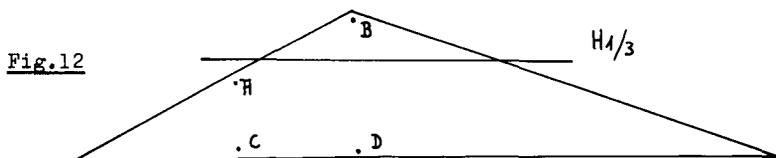


Fig.12

In bezug auf die Vertikalverschiebungen ist Formel (3,15) eine gute Näherung zur Bestimmung der Proportionalität. Die Horizontalverschiebungen jedoch verhalten sich ganz anders. Ein Schnitt in  $H_{1/3}$  zeigt, dass für  $\mu=0$  die Dammflanken sich nach innen verschieben, während bei wachsendem  $\mu$  der Damm immer mehr eine Spreizverschie-

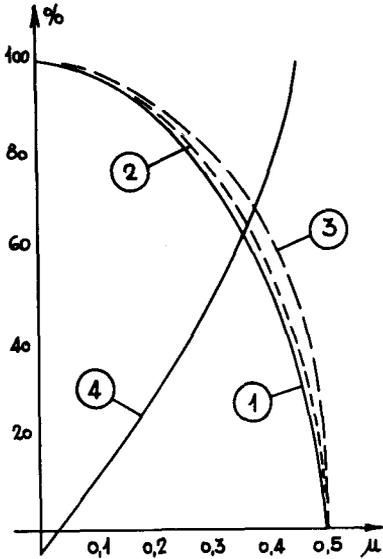


Fig.13 Verschiebungen in Funktion von  $\mu$ .

- 1 Theoretischer Verlauf
- 2 Pt.A v-Verschiebung
- 3 Pt.B v-Verschiebung
- 4 Pt.A u-Verschiebung

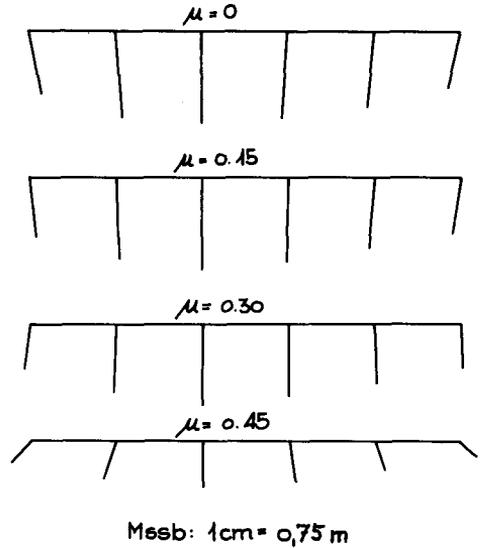


Fig.14 Verschiebungen in  $H_{1/3}$  in Funktion von  $\mu$ .

bung erhält.

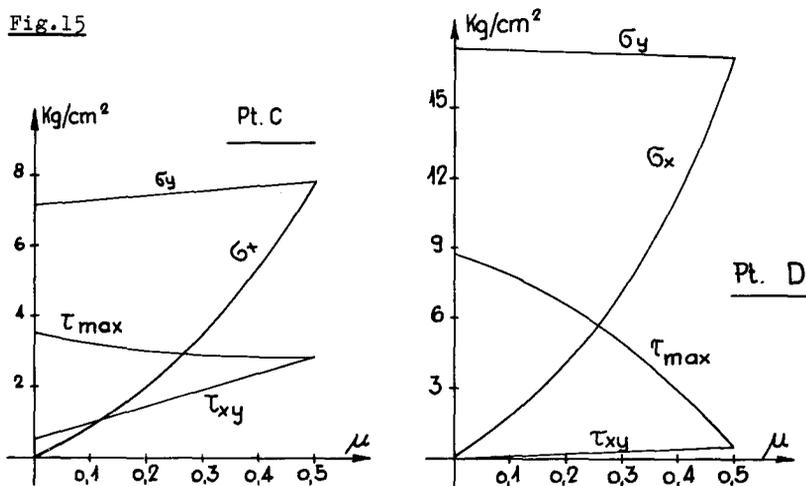
Der Einfluss von  $\mu$  auf die einzelnen Spannungen ist unterschiedlich. Trägt man für die Punkte C und D die Spannungen in Funktion von  $\mu$  auf (Fig.15), so zeigt sich, dass die Vertikalspannung  $\sigma_y$  nur wenig variiert. Die horizontalen Schubspannungen  $\tau_{xy}$  nehmen mit  $\mu$  linear zu, und zwar haben die Unterschiede dort ihr Maximum, wo die Spannungen an und für sich am grössten sind, d.h. unter der Mitte der Böschungen (Punkt C).

Die Horizontalspannungen  $\sigma_x$  an der Kontaktfläche lassen sich gemäss (3,1) berechnen:

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y$$

Fig.15 bestätigt diese Proportionalität. Je grösser jedoch der Abstand von der Kontaktfläche, desto flacher wird die  $\sigma_x$ -Kurve.

Fig.15



Diese starke Abhängigkeit der  $\sigma_x$ -Kurve von  $\mu$  ist von grosser Bedeutung. Gemäss dem Bruchkriterium von Rankine geht ein kohäsionsloses Material in den Bruchzustand über, wenn das Verhältnis der Hauptspannungen folgenden Wert erreicht:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \tan^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3,16)$$

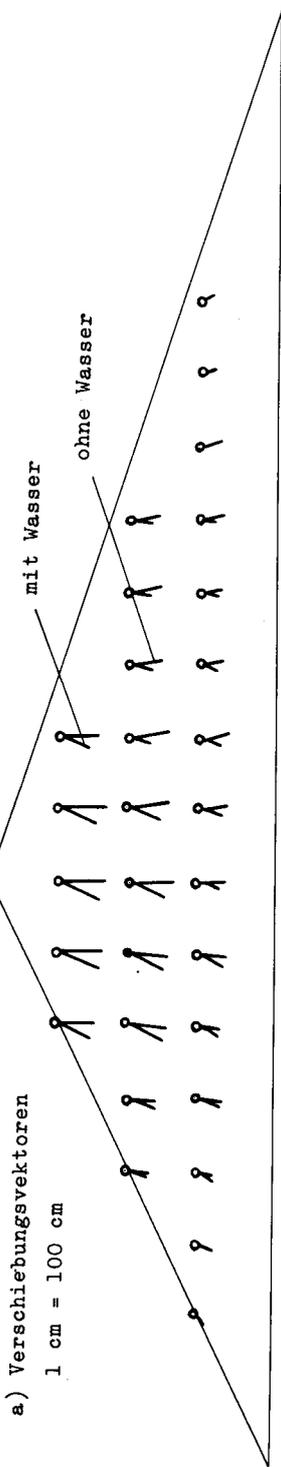
In erster Näherung sind  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  Hauptspannungen zum mindesten im zentralen Bereich des Dammes, und Gleichung (3,16) zeigt somit, dass das Entstehen plastischer Zonen wesentlich durch die Horizontalspannungen beeinflusst wird.

Zusammenfassend wird vorgeschlagen, die Berechnung mit einem  $\mu$  gemäss Formel (3,12) oder (3,13) durchzuführen. In der vorliegenden Arbeit wird mit  $\mu = 0,3$  ( $\varphi \sim 34^\circ$ ) gerechnet.

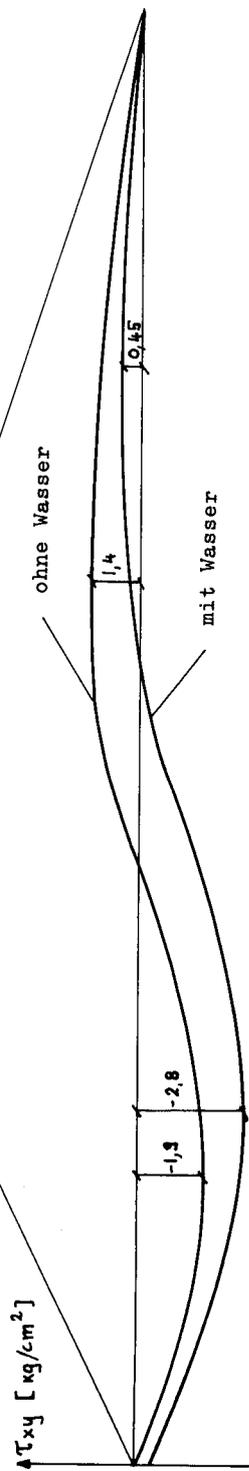
e) Einfluss des Wasserdrucks.

Durch den Aufstau wird der Kern eines Erddammes unter hydrostatischen Druck gesetzt. Gleichzeitig wird infolge des Auftriebes das wirksame Eigengewicht der Wasserseite von  $\gamma_e^*$  auf  $\gamma_e''$  vermindert. Aus diesem veränderten Kräftespiel resultieren einerseits Horizontalverschiebungen des gesamten Dammes talabwärts, andererseits weist die Wasserseite infolge Entlastung Hebungen auf. In Fig.16a

**Fig.16** Vergleich mit und ohne Wasserdruk.



b) Schubspannungen an der Schichtgrenze in  $\text{kg/cm}^2$



sind die Verschiebungsvektoren der beiden Belastungszustände (Eigengewicht, resp. Eigengewicht + Wasserdruck) aufgezeichnet.

Die Schubspannungen an der Kontaktfläche Fels-Schüttmaterial (Fig. 16b) werden unter Wasserdruck auf der Luftseite grösser, wogegen sie auf der Wasserseite nahezu verschwinden. Die Normalspannungen und die Horizontalspannungen weisen in der Dammitte eine ausgeprägte Diskontinuität auf. Dies ist eine Folge der Idealisierung des Kernes als einer Membran. In Wirklichkeit hat der Kern einen beträchtlichen Querschnitt, und die Spannungen verändern sich kontinuierlich innerhalb dieser Zone. Das Bild der Abweichungen der Normalspannungen vom Ueberlagerungsgewicht hat sich stark verändert (Fig.17b). Auf der Luftseite nehmen die Abweichungen nur quantitativ zu, wogegen sie auf der Wasserseite im zentralen Bereich ein anderes Vorzeichen aufweisen.

Die grössten Veränderungen ergeben sich für die Horizontalspannungen, die in Fig.18a dargestellt sind. Daraus geht hervor, dass auf der Wasserseite eine grosse Zone mit Zugspannungen auftritt. Diese Tatsache kann in Anbetracht der Hypothese eines vollelastischen Materials nicht überraschen. In Wirklichkeit kann jedoch ein kohäsionsloses Bodenmaterial nicht nur keine Zugspannungen aufnehmen, sondern, wie aus Kriterium (3,16) hervorgeht, müssen die Horizontalspannungen einen gewissen Minimalwert aufweisen, damit das Material nicht zum Bruch kommt.

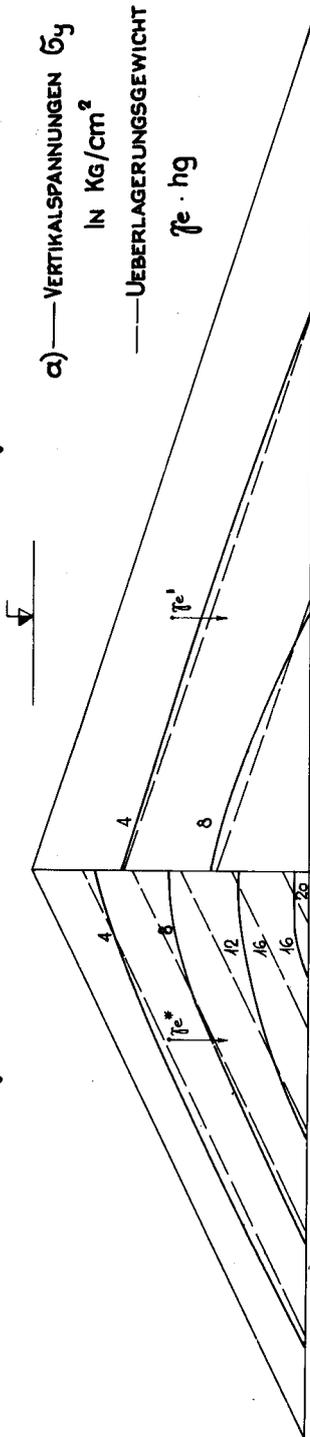
Die Annahme, dass dieser ganze Bereich plastisch ist, kann nicht befriedigen; denn es ist möglich, von einer Oberfläche zur andern durchgehende Gleitlinien in dieser Zone zu ziehen, womit die Voraussetzungen einer Rutschung erfüllt wären, was im Widerspruch zur Erfahrung steht. Vermutlich entsteht entlang des Kernes eine Art Fuge. Die Luftseite verformt sich unter dem Einfluss des Wasserdrucks und des infolge der Fuge aktivierten Erddrucks der Wasserseite. Letztere macht zwar die Horizontalverformungen mit, lehnt sich aber an die Luftseite wie an eine raue Stützmauer an, ohne Horizontalspannungen aufzunehmen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit war es nicht möglich, diese Hypothese rechnerisch zu untersuchen. Auf der Luftseite bewirkt der Wasserdruck grössere Horizontalspannungen, so dass der

**FIGUR 17:**

$\gamma_e^* = 2,10 \text{ To/m}^3$   
 $\gamma_e^1 = 4,20 \text{ To/m}^3$

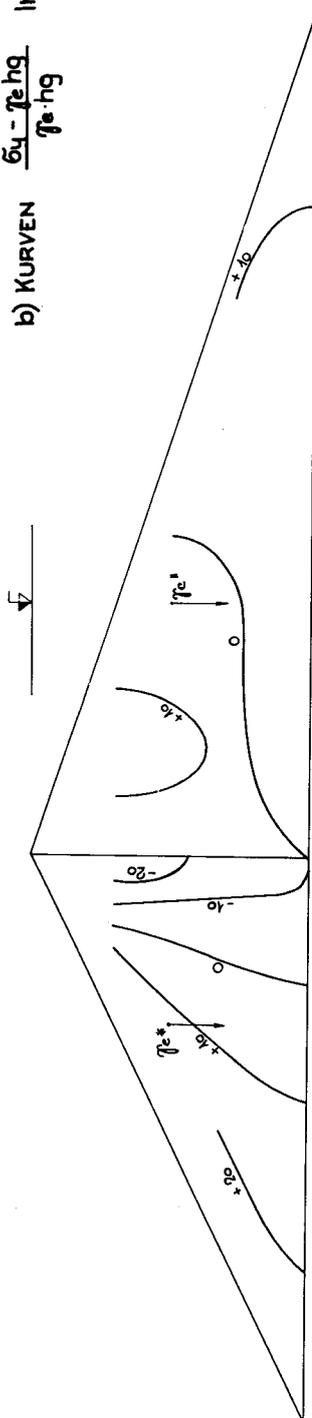
$E = 1000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $H = 100 \text{ m}$

$\mu = 0,3$   
 $W = \gamma_w \cdot h$



a) — VERTIKALSPANNUNGEN  $\sigma_y$   
 IN  $\text{Kg/cm}^2$   
 --- UEBERLAGERUNGSGEWICHT  
 $\gamma_e \cdot hg$

b) KURVEN  $\frac{\sigma_y - \gamma_e \cdot hg}{\gamma_e \cdot hg}$  IN %



**FIGUR 18:**

$\tau_c^* = 2.10 \text{ To/m}^3$   
 $\tau_e^* = 1.20 \text{ To/m}^3$

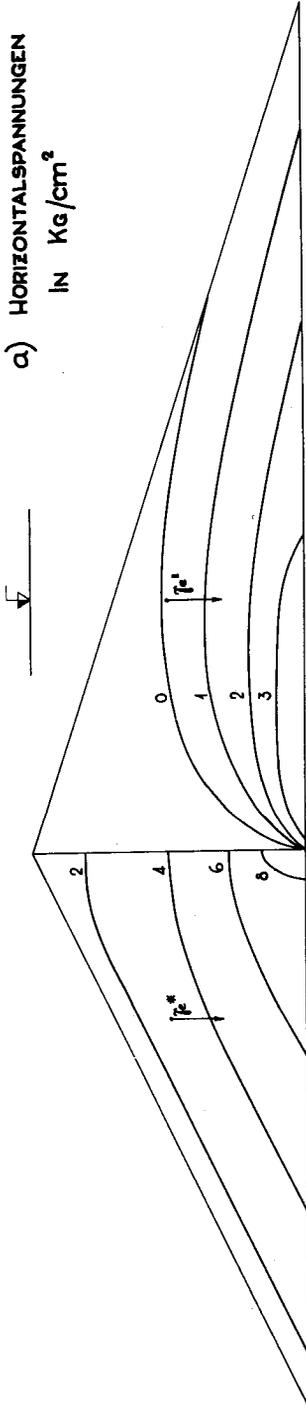
$E = 1000 \text{ Kg/cm}^2$

$\mu = 0.3$

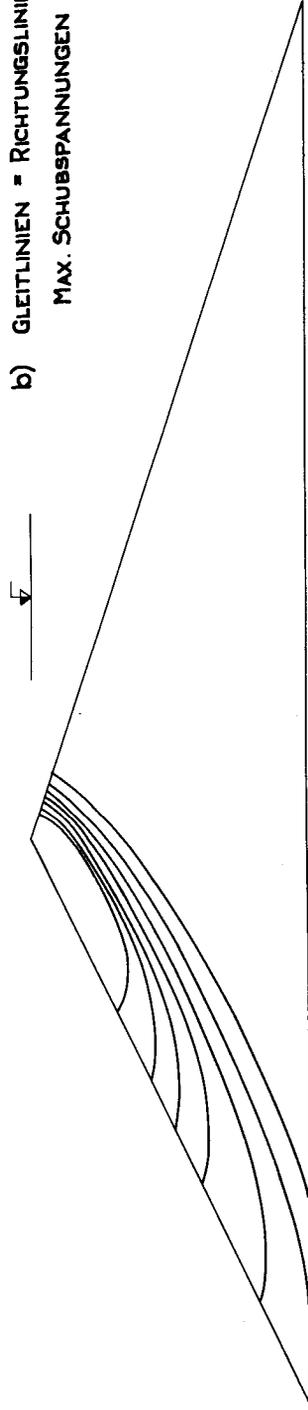
$H = 100 \text{ m}$

$W = \tau_w \cdot h$

a) HORIZONTALSPANNUNGEN  
IN  $\text{Kg/cm}^2$



b) GLEITLINIEN = RICHTUNGSLINIEN  
MAX. SCHUBSPANNUNGEN



Sicherheitsfaktor gegen eine Rutschung grösser wird. Dies zeigen auch die Gleitlinien, die einen kleineren Krümmungsradius haben und dementsprechend tiefer in den Dammkörper eingreifen (Fig.18b).

Es stellt sich die Frage, ob Verschiebungen und Spannungen der Luftseite infolge Wasserangriffs mit denjenigen an einem elastischen, unendlichen Keil vergleichbar sind. Die Lösung dieses Problems stammt von Lévy [15], und ergibt in einem Horizontalschnitt geradlinige Spannungen (Fig.19).

$$\sigma_y = \frac{\gamma_w}{\text{tg}^2 \Theta} \left( y - \frac{2x}{\text{tg} \Theta} \right); \quad \sigma_x = -\gamma_w \cdot y; \quad \tau_{xy} = -\frac{\gamma_w \cdot x}{\text{tg}^2 \Theta} \quad (3,17)$$

Die Integration dieser Spannungen ergibt für die Verschiebungen der Dammkrone, unter Annahme, dass Punkt A keine Verschiebungen aufweist:

$$u_k = \frac{\gamma_w \cdot (1-\mu^2) \cdot H_1^2}{E \cdot \text{tg}^3 \Theta}; \quad v = \frac{\gamma_w \cdot (1-\mu^2) \cdot H_1^2}{2E} \cdot \left[ \frac{\mu}{1-\mu} + \frac{1}{2\text{tg}^2 \Theta} \right] \quad (3,18)$$

Für die Ableitung dieser Formeln im ebenen Spannungszustand siehe [12]. Die Spannungen in einem unendlichen Keil und in einem Damm auf fester Unterlage sind in Fig.19 eingezeichnet. Ihr Verlauf

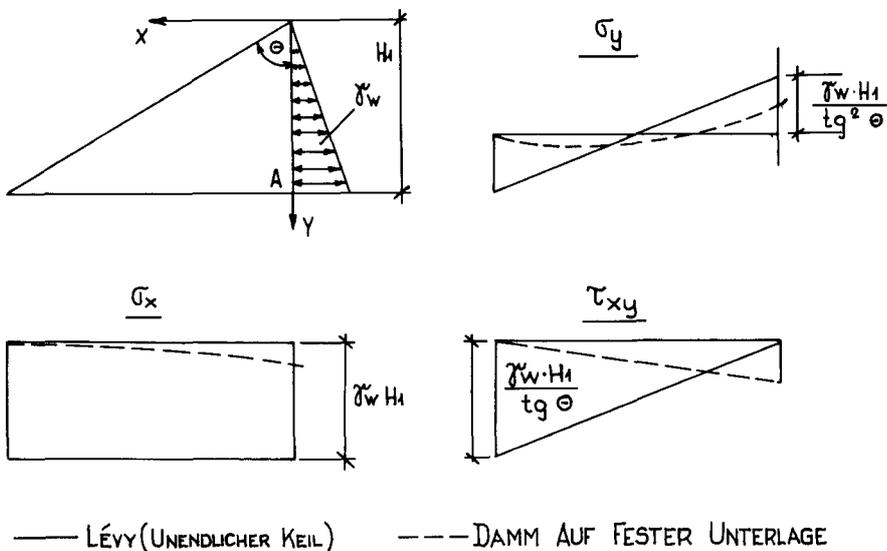


Fig.19 Spannungen im unendlichen Keil - Damm auf Fels.

weist nur für  $\sigma_y$  eine gewisse Aehnlichkeit auf. Die Verschiebungen gemäss (3,18) ergeben:  $u_k = -11,3$  und  $v_k = +25$  cm, wogegen die genaue Rechnung  $u_k = -30$  und  $v_k = +17$  cm ergibt.

Die vorliegende Berechnung liefert unter den gewählten Annahmen bei Wasserdruck nur für Verschiebungen und Schub- resp. Vertikalspannungen befriedigende Ergebnisse. Die Formeln (3,17) und (3,18) können unter Betrachtung eines unendlichen, elastischen Keils (Annahme Lévy) auch für eine grobe Schätzung nicht verwendet werden.

#### 4. Kapitel: Dämme auf elastischer Unterlage.

##### a) Spannungen und Verschiebungen in einer elastischen Schicht auf starrer, rauher Unterlage.

Erddämme werden oft auf einer deformierbaren Unterlage erstellt, die durch ihre Verformungen die Spannungen und Verschiebungen des Dammes beeinflusst. Es ist möglich, diese Verhältnisse rechnerisch zu erfassen, wenn der Untergrund in der Tiefe  $H_2$  von einer horizontalen Felsoberfläche begrenzt wird. Dazu muss vorerst der Spannungszustand in einer elastischen Schicht unter einer senkrecht resp. horizontal angreifenden Streckenlast abgeleitet werden. Zwei Annahmen können getroffen werden: Entweder setzt man zwischen der elastischen Schicht und ihrer Unterlage (AB, Fig.20) eine reibungsfreie

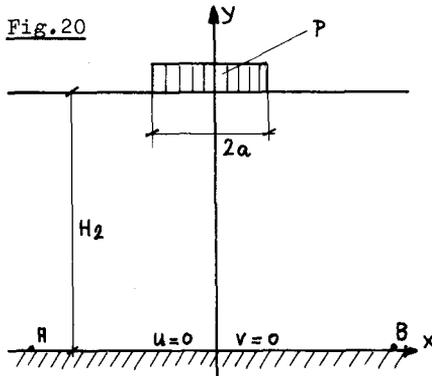


Fig.20

Lagerung oder vollkommene Haftung voraus. Dieses Problem wurde für eine vertikale Einzellast bei reibungsfreier Unterlage von Melan [17], bei voller Haftung von Biot [1] und für eine vertikale Linienlast bei reibungsfreier Unterlage von Melan und bei voller Haftung von Marguerre [16] gelöst. In diesem Kapitel wird, als zusätzliche Entwicklung, die Lösung

für eine über die Breite  $2a$  verteilte, gleichförmige vertikale Streckenlast  $p$  und eine ebensolche horizontale Streckenlast  $\tau$  unter Annahme voller Haftung der elastischen Schicht an der Felsoberfläche abgeleitet. Die Lösung wird nach dem von Marguerre ausführlich beschriebenen Verfahren gewonnen, so dass wir uns auf eine knappe Darstellung der Ableitung beschränken.

Für die Bipotentialgleichung  $\nabla^4 \Psi = 0$  (2,7) lässt sich für das vorliegende Problem ein günstiger Lösungsansatz in Form eines Fourierintegrals anschreiben:

$$\Psi_1(x,y) = \int_0^{\infty} [\bar{A}_1(\lambda) \cos \lambda y + B_1(\lambda) \sin \lambda y + C_1(\lambda) \lambda y \cos \lambda y + D_1(\lambda) \lambda y \sin \lambda y] \cos \lambda x d\lambda$$

$$\Psi_2(x,y) = \int_0^{\infty} [\bar{A}_2(\lambda) \cos \lambda y + B_2(\lambda) \sin \lambda y + C_2(\lambda) \lambda y \cos \lambda y + D_2(\lambda) \lambda y \sin \lambda y] \sin \lambda x d\lambda \quad (4,1)$$

wobei  $\Psi_1(x,y)$  für bezüglich x symmetrische Belastungsfälle,  $\Psi_2(x,y)$  für bezüglich x antisymmetrische Belastungsfälle anzusetzen ist.

$A_1(\lambda) \dots D_2(\lambda)$  müssen jeweils aus den Randbedingungen bestimmt werden. Spannungen und Verschiebungen lassen sich gemäss (2,6) resp. (2,1) wie folgt darstellen:

Vertikale Last (4,2)

$$\sigma_y = \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta x^2} = - \int_0^{\infty} \lambda^2 [\bar{A}_1 \cos \lambda y + B_1 \sin \lambda y + C_1 \lambda y \cos \lambda y + D_1 \lambda y \sin \lambda y] \cos \lambda x d\lambda$$

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta y^2} = \int_0^{\infty} \lambda^2 [\bar{A}_1 \cos \lambda y + B_1 \sin \lambda y + C_1 (2 \sin \lambda y + \lambda y \cos \lambda y) + D_1 (2 \cos \lambda y + \lambda y \sin \lambda y)] \cos \lambda x d\lambda$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta x \delta y} = \int_0^{\infty} \lambda^2 [\bar{A}_1 \sin \lambda y + B_1 \cos \lambda y + C_1 (\cos \lambda y + \lambda y \sin \lambda y) + D_1 (\sin \lambda y + \lambda y \cos \lambda y)] \sin \lambda x d\lambda$$

$$E u = \int [ (1-\mu^2) \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta y^2} - \mu (1+\mu) \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta x^2} ] dx = (1+\mu) \int_0^{\infty} \lambda \left\{ \bar{A}_1 \cos \lambda y + B_1 \sin \lambda y + C_1 [2(1-\mu) \sin \lambda y + \lambda y \cos \lambda y] + D_1 [2(1-\mu) \cos \lambda y + \lambda y \sin \lambda y] \right\} \sin \lambda x d\lambda$$

$$E v = \int [ (1-\mu^2) \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta x^2} - \mu (1+\mu) \frac{\delta^2 \Psi_1}{\delta y^2} ] dy = (1+\mu) \int_0^{\infty} \lambda \left\{ \bar{A}_1 \sin \lambda y - B_1 \cos \lambda y + C_1 [(1-2\mu) \cos \lambda y - \lambda y \sin \lambda y] + D_1 [(1-2\mu) \sin \lambda y - \lambda y \cos \lambda y] \right\} \cos \lambda x d\lambda$$

$$\sigma_y = \frac{\delta^2 \psi_2}{\delta x^2} = - \int_0^\infty \lambda^2 [A_2 \cos \lambda y + B_2 \sin \lambda y + C_2 \lambda y \cos \lambda y + D_2 \lambda y \sin \lambda y] \sin \lambda x \, d\lambda$$

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 \psi_2}{\delta y^2} = \int_0^\infty \lambda^2 [A_2 \cos \lambda y + B_2 \sin \lambda y + C_2 (2 \sin \lambda y + \lambda y \cos \lambda y) + D_2 (2 \cos \lambda y + \lambda y \sin \lambda y)] \sin \lambda x \, d\lambda$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\delta^2 \psi_2}{\delta x \delta y} = - \int_0^\infty \lambda^2 [A_2 \sin \lambda y + B_2 \cos \lambda y + C_2 (\cos \lambda y + \lambda y \sin \lambda y) + D_2 (\sin \lambda y + \lambda y \cos \lambda y)] \cos \lambda x \, d\lambda$$

$$E u = -(1 + \mu) \int_0^\infty \lambda \left\{ A_2 \cos \lambda y + B_2 \sin \lambda y + C_2 [2(1 - \mu) \sin \lambda y + \lambda y \cos \lambda y] + D_2 [2(1 - \mu) \cos \lambda y + \lambda y \sin \lambda y] \right\} \cos \lambda x \, d\lambda$$

$$E v = (1 + \mu) \int_0^\infty \lambda \left\{ -A_2 \sin \lambda y - B_2 \cos \lambda y + C_2 [(1 - 2\mu) \cos \lambda y - \lambda y \sin \lambda y] + D_2 [(1 - 2\mu) \sin \lambda y - \lambda y \cos \lambda y] \right\} \sin \lambda x \, d\lambda$$

Die Randbedingungen lauten wie folgt:

Vertikale Last

$$y=0 \left\{ \begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array} \right\} \quad y=H_2 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = f(x) \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \quad (4,4)$$

### Horizontale Last

$$y=0 \left\{ \begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array} \right\} \quad y=H_2 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_y=0 \\ \tau_{xy}=g(x) \end{array} \right\} \quad (4,5)$$

Nach der Theorie der Fourierintegrale [7] lassen sich die Belastungen  $f(x)$  resp.  $g(x)$  darstellen als

$$f(x) = \frac{2pa}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda a} \cdot \cos \lambda x d\lambda \quad (4,6)$$

$$g(x) = \frac{2\tau a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda a} \cdot \cos \lambda x d\lambda \quad (4,7)$$

Setzt man nun die Gleichungen (4,2) und (4,6) in (4,4) ein, resp. (4,3) und (4,7) in (4,5), so erhält man 2 Gleichungssysteme mit 4 Unbekannten, aus denen sich die Grössen  $A_1(\lambda) \dots D_2(\lambda)$  berechnen lassen. Man erhält:

$$H_1 = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda^3} \cdot \frac{2(1-\mu)}{\Delta} [2(1-\mu) \cos \lambda H_2 + \lambda H_2 \sin \lambda H_2]$$

$$B_1 = -\frac{2p}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda^3} \cdot \frac{2(1-\mu)}{\Delta} [(1-2\mu) \sin \lambda H_2 - \lambda H_2 \cos \lambda H_2] \quad (4,8)$$

$$C_1 = \frac{B_1}{1-2\mu}$$

$$D_1 = -\frac{H_1}{2(1-\mu)}$$

$$H_2 = -\frac{2\tau}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda^3} \cdot \frac{2(1-\mu)}{\Delta} [(1-2\mu) \sin \lambda H_2 + \lambda H_2 \cos \lambda H_2]$$

$$B_2 = \frac{2\tau}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda^3} \cdot \frac{2(1-\mu)}{\Delta} [2(1-\mu) \cos \lambda H_2 - \lambda H_2 \sin \lambda H_2]$$

$$C_2 = \frac{B_2}{1-2\mu} \quad (4,9)$$

$$D_2 = -\frac{H_2}{2(1-\mu)}$$

wobei die Determinante des Systems lautet:

$$\Delta = 4(1-\mu)^2 \cos^2 \lambda H_2 - (1-2\mu)^2 \sin^2 \lambda H_2 + \lambda^2 H_2^2$$

Um die Schreibweise etwas übersichtlicher zu gestalten, führen wir dimensionslose Variablen sowie einige Abkürzungen ein:

$$z = \frac{H_2}{H_2}$$

$$M = 2(1-\mu) \cos z + z \sin z$$

$$X = \frac{x}{H_2}$$

$$N = (1-2\mu) \sin z - z \cos z$$

$$\Phi = \frac{y}{H_2}$$

$$O = 2(1-\mu) \cos z - z \sin z$$

$$\eta = \frac{a}{H_2} + X \quad (4,10)$$

$$P = (1-2\mu) \sin z + z \cos z \quad (4,11)$$

$$\xi = \frac{a}{H_2} - X$$

$$\Delta = 4(1-\mu)^2 \cos^2 z - (1-2\mu)^2 \sin^2 z + z^2$$

$$\chi = 1 - \Phi$$

Setzt man (4,8) in (4,2) und (4,9) in (4,3) ein, unter Berücksichtigung von (4,10) und (4,11), so erhält man folgende Ausdrücke für die Spannungen:

$$\sigma_y = -\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[ 2(1-\mu) \cdot M \cdot \cos \phi z - (1-2\mu) N \cdot \sin \phi z - M \cdot \phi \cdot z \cdot \sin \phi z - N \phi z \cdot \cos \phi z \right] \cdot \frac{(\sin \delta z + \sin \gamma z)}{z} dz$$

Vertikale Last

(4,12)

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[ 2\mu \cdot M \cdot \cos \phi z + (3-2\mu) N \cdot \sin \phi z + M \cdot \phi \cdot z \cdot \sin \phi z + N \phi z \cdot \cos \phi z \right] \cdot \frac{(\sin \delta z + \sin \gamma z)}{z} dz$$

$$\tau_{xy} = \frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[ (1-2\mu) \cdot M \cdot \sin \phi z - 2(1-\mu) N \cdot \cos \phi z - M \cdot \phi \cdot z \cdot \cos \phi z - N \cdot \phi \cdot z \cdot \sin \phi z \right] \cdot \frac{(\cos \delta z - \cos \gamma z)}{z} dz$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[ -2(1-\mu) \cdot P \cdot \cos \phi z + (1-2\mu) \cdot O \cdot \sin \phi z + P \cdot \phi \cdot z \cdot \sin \phi z + O \cdot \phi \cdot z \cdot \cos \phi z \right] \cdot \frac{(\cos \delta z - \cos \gamma z)}{z} dz$$

Horizontale Last

(4,13)

$$\sigma_x = \frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[ 2\mu \cdot P \cdot \cos \phi z + (3-2\mu) \cdot O \cdot \sin \phi z + P \cdot \phi \cdot z \cdot \sin \phi z + O \cdot \phi \cdot z \cdot \cos \phi z \right] \cdot \frac{(\cos \delta z - \cos \gamma z)}{z} dz$$

$$\tau_{xy} = \frac{p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left[ -(1-2\mu) \cdot P \cdot \sin \phi z + 2(1-\mu) \cdot O \cdot \cos \phi z + P \cdot \phi \cdot z \cdot \cos \phi z + O \cdot \phi \cdot z \cdot \sin \phi z \right] \cdot \frac{(\sin \delta z + \sin \gamma z)}{z} dz$$

Die Richtigkeit der Ausdrücke (4,12) und (4,13) kann man überprüfen, indem man den Ursprung des Koordinatennetzes in den oberen Rand der Schicht verlegt und  $H_2$  gegen  $\infty$  streben lässt. Dann erhält man die Lösungen für die unendliche Halbebene (siehe z.B. Girkmann, S.59). Der Beweis, der für alle Ausdrücke durchgeführt wurde, wird hier seines Umfanges wegen ausgelassen.

Die Auswertung der Integrale muss punktweise erfolgen, wobei  $\mu$ ,  $\Phi$  und  $\chi$  als Parameter auftreten. Der Integrationsbereich wird in 2 Intervalle aufgeteilt: für  $0 \leq z \leq 5$  verwendet man die Simpson'sche Regel, für  $z > 5$  werden die Integranden vereinfacht mit der Beziehung

$$\cos z \sim \sin z \sim \frac{1}{2}e^z \quad (4,14)$$

wobei die Ausdrücke entstehen:

#### Vertikale Last

$$\text{Rest } \sigma_y = -\frac{p}{\pi} \int_5^{\infty} \frac{1-\chi z}{e^{\chi z}} \cdot \frac{(\sin \xi z + \sin \eta z)}{z} dz$$

$$\text{Rest } \sigma_x = -\frac{p}{\pi} \int_5^{\infty} \frac{1-\chi z}{e^{\chi z}} \cdot \frac{(\sin \xi z + \sin \eta z)}{z} dz \quad (4,15)$$

$$\text{Rest } \tau_{xy} = \frac{\chi p}{\pi} \int_5^{\infty} \frac{(\cos \xi z - \cos \eta z)}{e^{\chi z}} dz$$

#### Horizontale Last

$$\text{Rest } \sigma_y = \frac{\chi p}{\pi} \int_5^{\infty} \frac{(\cos \xi z - \cos \eta z)}{e^{\chi z}} dz$$

$$\text{Rest } \sigma_x = \frac{p}{\pi} \int_5^{\infty} \frac{2-\chi z}{e^{\chi z}} \cdot \frac{(\cos \xi z - \cos \eta z)}{z} dz \quad (4,16)$$

$$\text{Rest } \tau_{xy} = \frac{p}{\pi} \int_5^{\infty} \frac{1-\chi z}{e^{\chi z}} \cdot \frac{(\sin \xi z + \sin \eta z)}{z} dz$$

In den Ausdrücken (3,15) und (3,16) treten die 2 Integrale

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin \xi z}{z} \cdot e^{-\chi z} dz \quad \text{und} \quad \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\cos \xi z}{z} \cdot e^{-\chi z} dz$$

auf, die nicht geschlossen integriert werden können. Durch fortgesetzte partielle Integration erhält man folgende Reihe:

$$\text{Int.} = e^{-\varepsilon X} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! (K_n \cdot \sin \varepsilon \xi + L_n \cdot \cos \varepsilon \xi)}{(\chi^2 + \xi^2)^n \cdot \varepsilon^n} \quad (4,17)$$

wobei sich die Koeffizienten  $K_n$  und  $L_n$  aus den Rekursionsformeln ergeben:

$$\begin{aligned} K_n &= -K_{n-1} \cdot \chi + L_{n-1} \cdot \xi \\ L_n &= -K_{n-1} \cdot \xi - L_{n-1} \cdot \chi \end{aligned} \quad (4,18)$$

Die Anfangswerte sind: für das Sinusintegral  $K_0 = 1$   
 $L_0 = 0$   
 für das Cosinusintegral  $K_0 = 0$   
 $L_0 = 1$

Diese Reihen weisen oft ein semikonvergentes Verhalten auf. Zu ihrer Berechnung wurde ein Wynnscher Algorithmus verwendet. [25]

In Fig.21 sind die Spannungen (4,12) und (4,13) für  $\mu = 0,3$  an der Felsoberfläche ( $\Phi = 0$ ) und in der Mitte der elastischen Schicht ( $\Phi = 0,5$ ) dargestellt. Vergleichshalber wurden die Boussinesq'schen Lösungen für den elastischen Halbraum eingezeichnet.

Eine interessante Zusammenstellung ergibt sich für die Druckverteilung auf der Unterlage infolge einer Vertikallast. Die 4 eingezeichneten Kurven entsprechen den folgenden Annahmen und ergeben in der Lastmitte folgende Maximalwerte:

Elastischer Halbraum (Boussinesq)	$\sigma_y = 0,67 \cdot \frac{2ap}{H_2}$
Starre Unterlage mit reibungsloser Oberfläche (Melan)	$\sigma_y = 0,95 \cdot \frac{2ap}{H_2}$
Starre Unterlage mit Haftung (strenge Lösung)	$\sigma_y = 0,78 \cdot \frac{2ap}{H_2}$
Starre Unterlage mit Haftung (Näherung)	$\sigma_y = 0,83 \cdot \frac{2ap}{H_2}$

Von Terzaghi wird eine Näherung empfohlen (S.424), die darin besteht,

die Boussinesq'sche Lösung mit einer reduzierten Höhe zu verwenden. Die Schubspannungen stimmen mit der Lösung von Boussinesq gut überein, wogegen die Horizontalspannungen einen ganz anderen Verlauf haben. Für  $\Phi = 0,5$  sind die Abweichungen allgemein nur noch klein, was gemäss dem Prinzip von St. Venant zu erwarten war. Für die Berechnung empfiehlt sich deshalb die Verwendung der exakten Lösung (4,12) und (4,13) für  $\Phi < 0,5$ , wogegen für  $\Phi > 0,5$  die wesentlich einfacheren Boussinesq'schen Gleichungen mit guter Näherung verwendet werden können.

Für die Rechnung benötigt man die Verschiebungen am oberen Rand der elastischen Schicht. Setzt man in den Gleichungen (4,2) und (4,3) unter Verwendung von (4,8) resp. (4,9)  $y = H_2$  ( $\Phi = 1$ ), so erhält man die folgenden Ausdrücke:

#### Vertikale Last

$$u_p = -\frac{2pa}{\pi E} (1+\mu) \cdot \frac{H_2}{2a} \int_0^\infty \frac{(1-2\mu)(3-4\mu)\sin^2 z - z^2}{\Delta} \cdot \frac{(\cos \xi z - \cos \eta z)}{z^2} dz \quad (4,19)$$

$$v_p = -\frac{2pa}{\pi E} (1+\mu) \cdot \frac{H_2}{2a} \int_0^\infty \frac{2(1-\mu)(3-4\mu)\sin z (\cos z - 2(1-\mu)z)}{\Delta} \cdot \frac{(\sin \xi z + \sin \eta z)}{z^2} dz$$

#### Horizontale Last

$$u_T = \frac{2pT}{\pi E} (1+\mu) \cdot \frac{H_2}{2a} \int_0^\infty \frac{2(1-\mu)(3-4\mu)\sin z (\cos z + 2(1-\mu)z)}{\Delta} \cdot \frac{(\sin \xi z + \sin \eta z)}{z^2} dz \quad (4,20)$$

$$v_T = -u_p$$

Diese Integrale sind von  $\frac{H_2}{2a}$  unabhängig; denn der Wert des Ausdruckes unter dem Integralzeichen ist umgekehrt proportional zu  $\frac{H_2}{2a}$ . Die einzigen Parameter sind  $\mu$  und  $X = \frac{x}{H_2}$ .

Macht man die Vereinfachung gemäss (4,14) und vernachlässigt  $z$  gegenüber  $e^{2z}$ , so erhält man:

$$\text{Rest } u_p = -v_\tau = \frac{-2pa}{\pi E} \cdot (1+\mu)(1-2\mu) \cdot \frac{H_2}{2a} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\cos \xi z - \cos \eta z}{z^2} dz$$

$$\text{Rest } v_p = -u_\tau = \frac{-2ap}{\pi E} \cdot (1+\mu) \cdot 2(1-\mu) \cdot \frac{H_2}{2a} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin \xi z + \sin \eta z}{z^2} dz \quad (4,21)$$

also Integralsinus- und Integralcosinusausdrücke, die in vielen Werken tabelliert sind. Die Grenzübergänge für  $H_2 \rightarrow \infty$  führen auf die Lösungen für den elastischen Halbraum, die z.B. bei Hondermarcq [11] für eine vertikale Streifenlast angegeben sind.

$$u_y = H_2 = \frac{-2ap}{E} \cdot \frac{1}{2} (1+\mu)(1-2\mu) \quad (4,22)$$

$$v_y = H_2 = \frac{2ap}{\pi E} \cdot (1+\mu) \cdot 2(1-\mu) \frac{H}{2a} \left[ \frac{x}{H_2} \text{Log} \frac{x-a}{x+a} + \frac{a}{H_2} \cdot \text{Log} (x+a)(x-a) \right] + CH_2$$

Die u-Verschiebungen der Oberfläche des elastischen Halbraumes sind somit konstant und entsprechen dem Wert aus Gleichung (4,19) in der Lastmitte. Die v-Verschiebungen können nur auf eine additive Konstante genau bestimmt werden, d.h. als Relativverschiebungen gegenüber einem beliebig wählbaren Fixpunkt. Wir verzichten deshalb auf eine zeichnerische Wiedergabe dieser Kurven.

Da die Einflusslinien der Verschiebungen für die Relaxation benötigt werden, sind in der Tabelle I die genauen Werte verzeichnet. In Fig.21 sind sie für  $\mu = 0,3$  und  $\mu = 0,15$  aufgezeichnet.

In Anhang B ist als Beispiel die Programmierung der Einflusslinie der  $\sigma_y$ -Spannung unter vertikaler Last beschrieben.

Tabelle I

Oberflächenverschiebungen einer elastischen Schicht ( $H_2$ ) infolge einer vertikalen (p) resp. horizontalen ( $\tau$ ) gleichförmigen Streckenlast 2a). $\mu=0,3$ .									
$\chi = x/H_2$	$v E / 2ap$	$u E / 2a\tau$	$v\tau = \mu p$		$\chi = x/H_2$	$v E / 2ap$	$u E / 2a\tau$	$v\tau = \mu p$	
0,05	1,6097	2,1568	0,2413		2,25	-0,0057	0,1265	-0,0204	
0,15	0,8148	1,3574	0,2042		2,35	-0,0048	0,1158	-0,0187	
0,25	0,5277	1,0616	0,1685		2,45	-0,0040	0,1059	-0,0171	
0,35	0,3540	0,8754	0,1349		2,55	-0,0034	0,0969	-0,0156	
0,45	0,2373	0,7425	0,1041		2,65	-0,0029	0,0885	-0,0142	
0,55	0,1557	0,6418	0,0765		2,75	-0,0025	0,0809	-0,0129	
0,65	0,0980	0,5625	0,0525		2,85	-0,0022	0,0739	-0,0118	
0,75	0,0574	0,4984	0,0321		2,95	-0,0019	0,0675	-0,0107	
0,85	0,0293	0,4456	0,0153		3,05	-0,0017	0,0616	-0,0098	
0,95	0,0103	0,4012	0,0019		3,15	-0,0014	0,0563	-0,0089	
1,05	-0,0021	0,3633	-0,0085		3,25	-0,0012	0,0514	-0,0081	
1,15	-0,0096	0,3304	-0,0162		3,35	-0,0010	0,0470	-0,0074	
1,25	-0,0139	0,3015	-0,0217		3,45	-0,0009	0,0429	-0,0067	
1,35	-0,0158	0,2757	-0,0253		3,55	-0,0008	0,0392	-0,0060	
1,45	-0,0161	0,2525	-0,0274		3,65	-0,0007	0,0357	-0,0055	
1,55	-0,0155	0,2315	-0,0283		3,75	-0,0007	0,0326	-0,0049	
1,65	-0,0143	0,2124	-0,0284		3,85	-0,0007	0,0297	-0,0045	
1,75	-0,0129	0,1949	-0,0278		3,95	-0,0006	0,0271	-0,0041	
1,85	-0,0112	0,1789	-0,0268		4,05	-0,0006	0,0247	-0,0038	
1,95	-0,0097	0,1641	-0,0254		4,15	-0,0006	0,0225	-0,0035	
2,05	-0,0082	0,1505	-0,0238		4,25	-0,0005	0,0206	-0,0032	
2,15	-0,0068	0,1380	-0,0221		4,35	-0,0005	0,0188	-0,0029	

Fig. 21: Einflusslinien in einer elastischen Schicht

a) Verschiebungen an der Schichtoberfläche

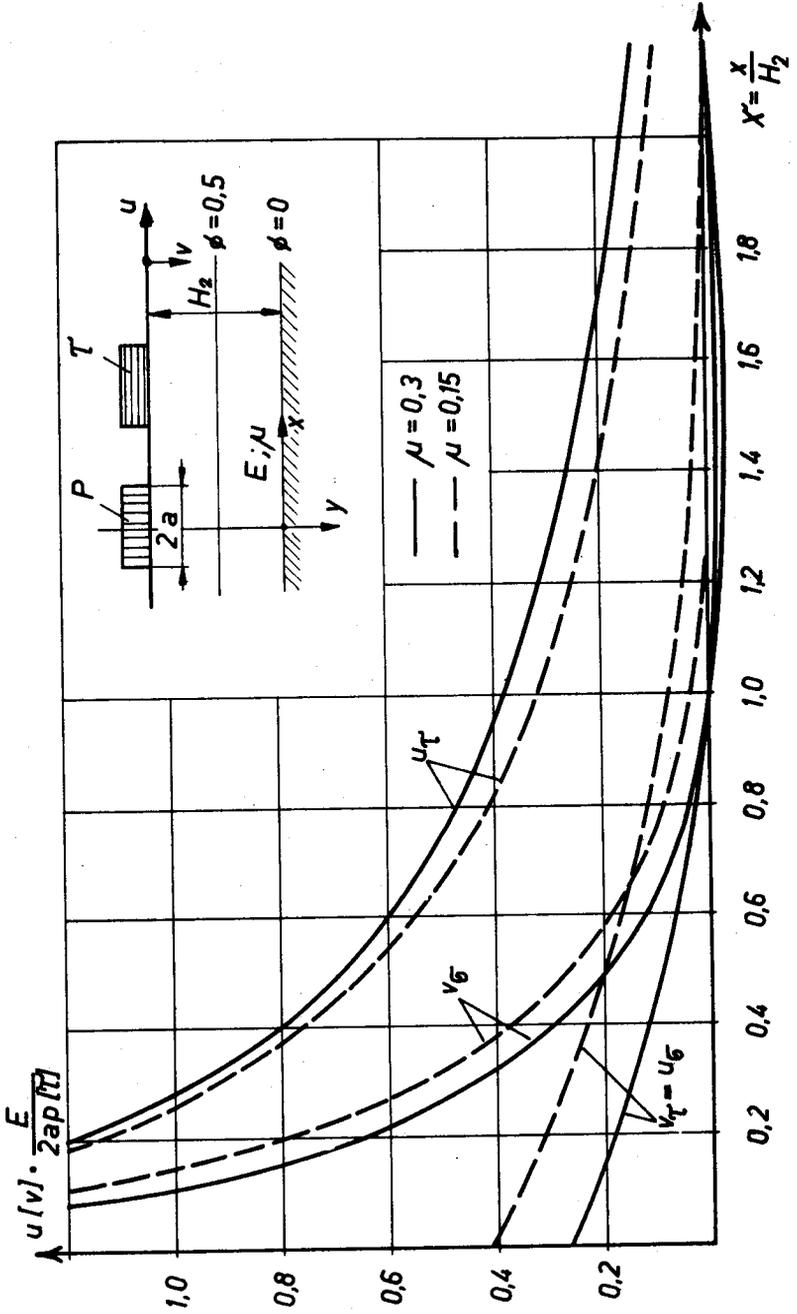


Fig. 21b : Spannungen in der Schicht

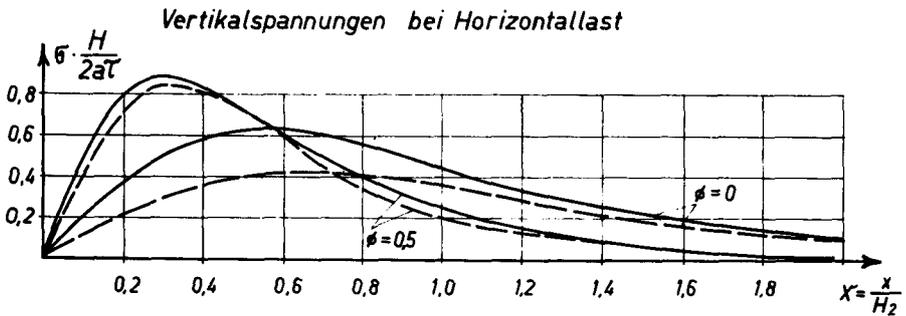
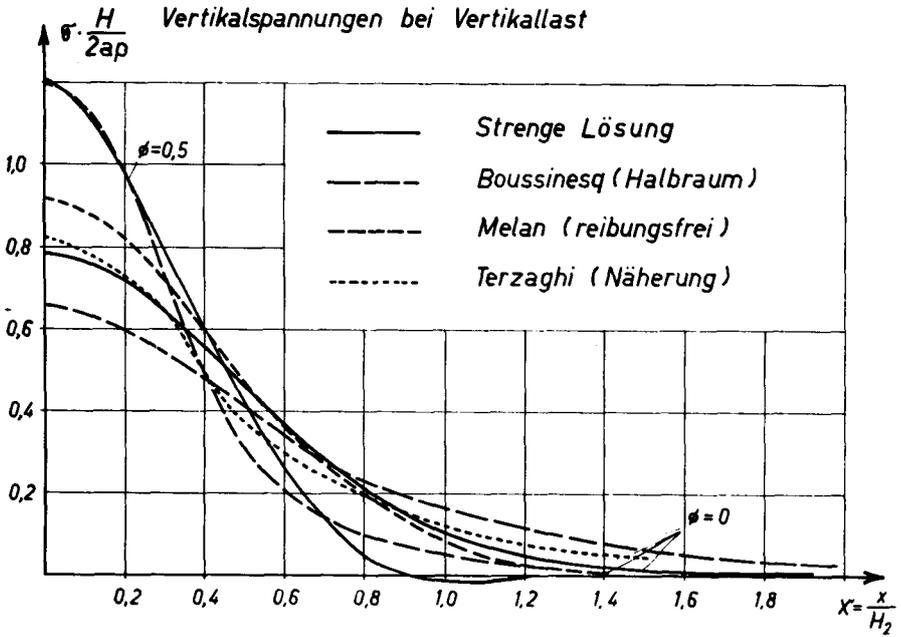
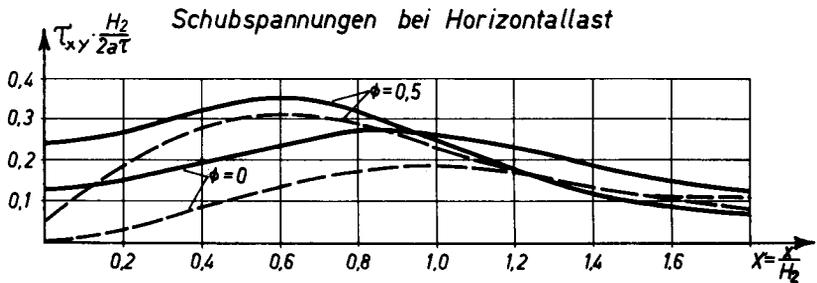
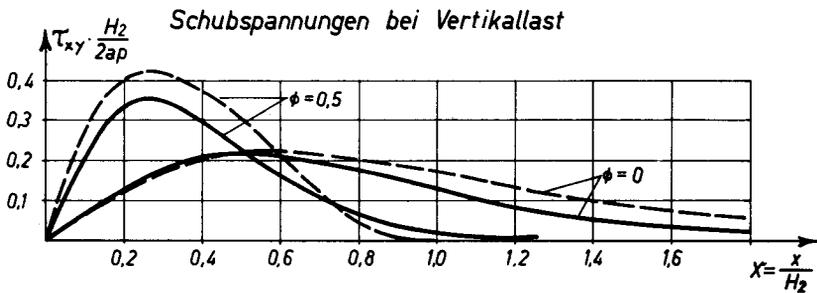
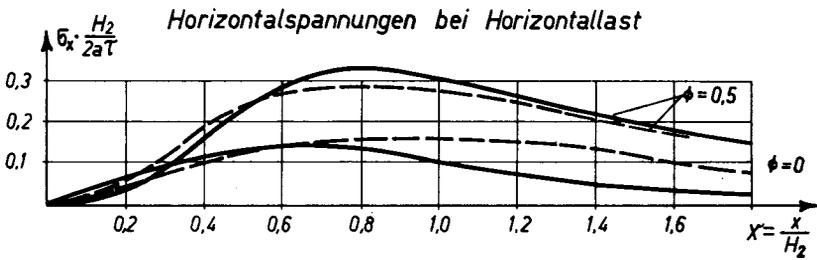
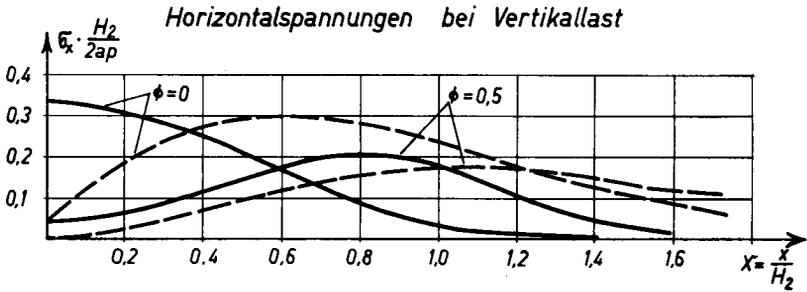


Fig. 21c: Spannungen in der Schicht



b) Beschreibung eines Testbeispiels.

Befindet sich unter dem Erddamm nicht der inkompressible Fels, sondern eine elastische Schicht, so verformt sich diese unter der Einwirkung des Dammes. Die Horizontal- und Vertikalverschiebungen der Schicht können mit den Formeln (4,19) und (4,20) berechnet werden, indem man die vom Erddamm an der Schichtgrenze übertragenen Vertikal- und Schubspannungen durch eine Abtreppung approximiert (Fig.22).

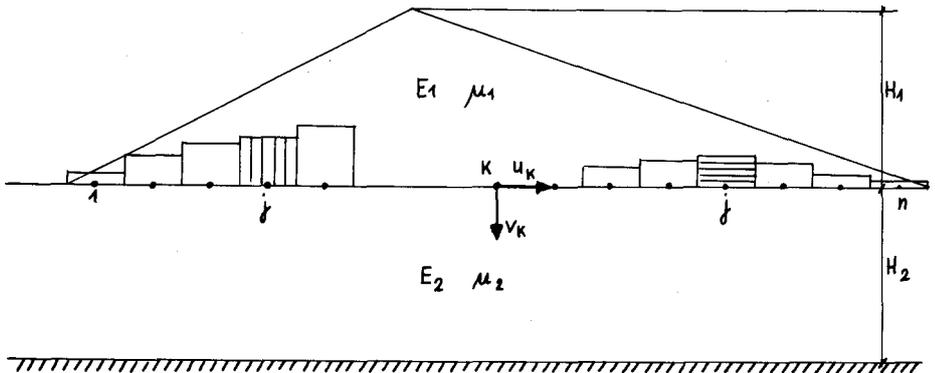


Fig.22 Berechnung der Unterlageverschiebungen.

Bezeichnet man die Verschiebung im Punkt K infolge einer gleichförmigen Last im Abschnitt j mit  $u_{kj}^{\sigma}$ ;  $v_{kj}^{\sigma}$  respektive  $u_{kj}^{\tau}$ ;  $v_{kj}^{\tau}$ , so ergibt das SuperpositionsGesetz:

$$u_k = \sum_{j=1}^n \sigma_j \cdot u_{kj}^{\sigma} + \sum_{j=1}^n \tau_j \cdot u_{kj}^{\tau} \quad (4,23)$$

$$v_k = \sum_{j=1}^n \sigma_j \cdot v_{kj}^{\sigma} + \sum_{j=1}^n \tau_j \cdot v_{kj}^{\tau}$$

Der Erddamm macht diese Verschiebungen mit, und dadurch wird sein Spannungszustand verändert. Die Berechnung des gesamten Körpers, Damm plus Untergrund, erfolgt deshalb etappenweise.

Zuerst wird der Spannungszustand im Erddamm unter Annahme einer inkompressiblen Unterlage ermittelt. Die daraus resultierenden Spannungen an der Schichtgrenze ergeben gemäss den Formeln (4,23) eine deformierte Unterlage, die die Randbedingungen für die Berechnung

des Spannungszustandes der 2. Phase darstellt. Diese sich daraus ergebende wechselseitige Anpassung von Spannungszustand im Erddamm und Verformungen der Unterlage konvergiert gegen die Lösung des Gesamtkörpers. Aus Rechnungszeitgründen empfiehlt es sich, den Spannungszustand für eine bestimmte Unterlageform nicht auszurelaxieren, sondern die Unterlageverformungen nach wenigen Relaxationsschritten auszugleichen.

Verwendet man zur Berechnung der Unterlageverschiebungen im Verlauf der Relaxation denselben Ueberrelaxationsfaktor wie im Damminnern ( $\omega_1 \sim 1,7$ ), wird das Verfahren divergent.  $\omega_2$  muss deshalb vermindert werden, bei grossen Verformungen der Unterlage sogar ganz beträchtlich. Für die Parameter des im folgenden besprochenen Testbeispiels wurde der Ueberrelaxationsfaktor auf  $\omega_2 = 0,17$  reduziert, um eine Konvergenz zu erhalten.

Folgende Annahmen sind dem Testbeispiel zugrundegelegt:

Form des Dammes:	wie Damm auf fester Unterlage.
Materialkonstanten:	$\mu_1 = \mu_2 = 0,3$ $E_1 = E_2 = 10000 \text{ t/m}^2$
Angriffskräfte:	Eigengewicht $\gamma_e^* = 2,1 \text{ t/m}^3$ Wasserdruck $w = 0$
Unterlage:	$H_1 = H_2 = 100 \text{ m}$
Randbedingung an der Unterlage:	volle Haftung
	$u_{\text{Damm}} = u_{\text{Untergrund}}$ $v_{\text{Damm}} = v_{\text{Untergrund}}$

Aus der Lösung (Beilage 3) geht hervor, dass die elastische Schicht muldenförmig verformt wird (Fig.23). Die maximale Setzung unter der

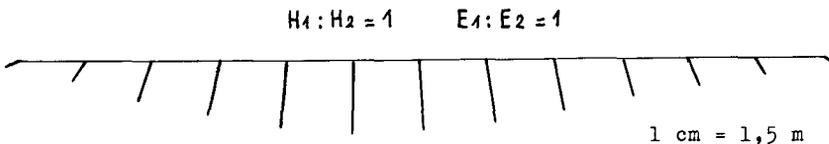
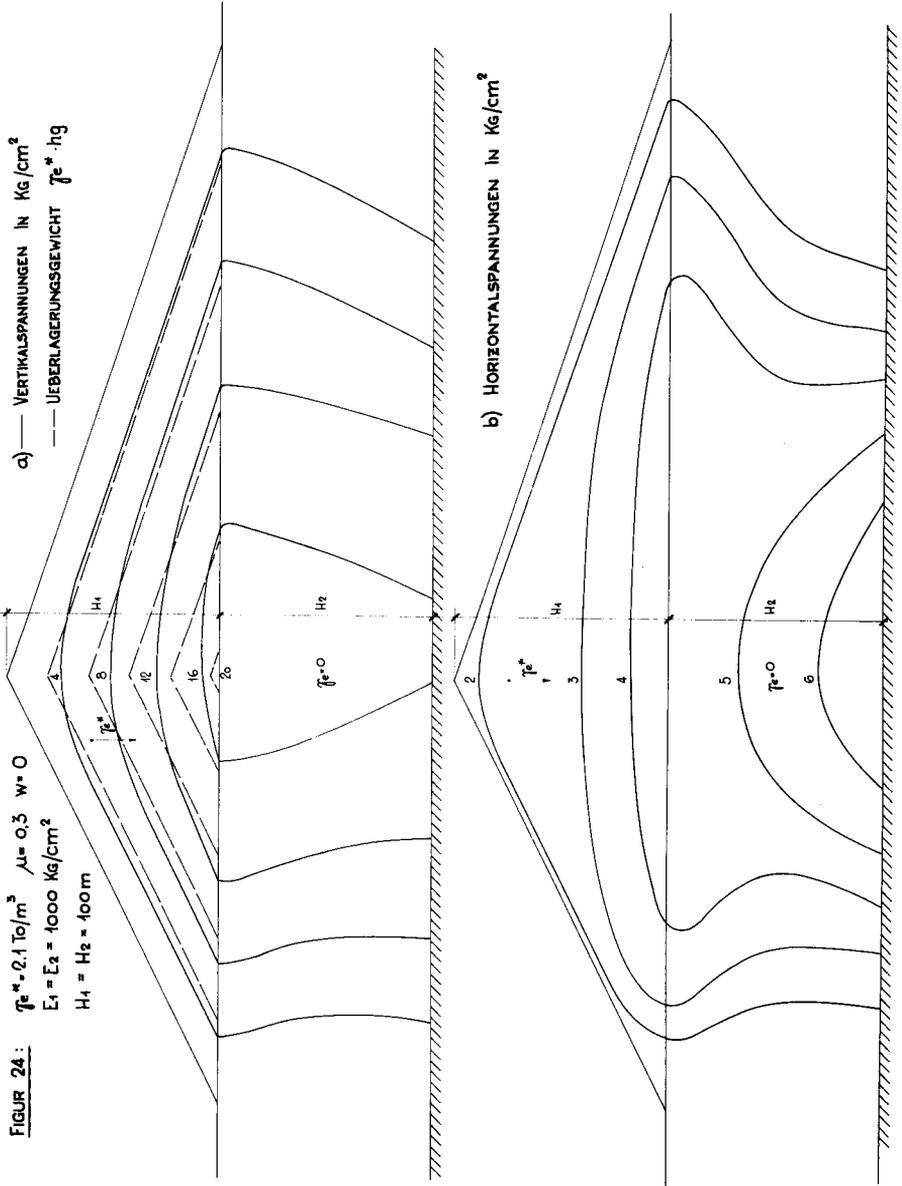


Fig.23 Verformungsmulde der Schichtgrenze.

Dammitte beträgt 126 cm, während an den Dammdenden nur noch kleine

FIGUR 24:

$\gamma_e = 2.1 \text{ To/m}^3$   $\mu = 0.3$   $w = 0$   
 $E_1 = E_2 = 1000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $H_1 = H_2 = 100 \text{ m}$



Setzungen von 7 resp. 4 cm auftreten. Die grössten Horizontalverschiebungen entstehen ungefähr unter der Mitte der Böschungen und betragen -24 resp. +21 cm. Die Spannungen im Damminnern werden mit den Formeln (3,9) aus den Verschiebungen berechnet. In der Unterlagenschicht sind die Einflusslinien (4,12) und (4,13) zu verwenden. Die Belastung ist durch die vom Damm auf die Unterlage übertragenen Vertikal- und Schubspannungen gegeben. Man erhält so im Untergrund nur die Zusatzspannungen infolge Auflast. Für die effektiven Spannungen sind diejenigen infolge Eigengewicht des Untergrundes zu überlagern. In den folgenden Diagrammen sind im Untergrund nur die Zusatzspannungen dargestellt, da die Eigengewichtsverhältnisse von Fall zu Fall variieren.

Die Vertikalspannungen (Fig.24a) ergeben ein ähnliches Bild wie beim Damm auf fester Unterlage. Die Abweichungen gegenüber den  $\gamma_e^* h_g$ -Kurven sind etwas grösser; das Maximum in der Dammitte beträgt -18%. Die Lastausbreitung im Untergrund ist klein. Die Lastspitze auf der Felsoberfläche hat sich gegenüber der Schichtgrenze nur um 10% vermindert, wogegen z.B. im elastischen Halbraum für eine dreieckförmige Auflast eine Reduktion um 25% auftritt. Einen stark veränderten Verlauf weisen die Horizontalspannungen (Fig.24b) auf. Vor allem gegen die Schichtgrenze zu werden sie kleiner. In der Dammitte hat sich  $\sigma_x$  von 7,9 auf 4,3 kg/cm<sup>2</sup> vermindert. Zeichnet man, wie in Kapitel 3c, die 3 Bereiche Elastisch, Uebergang, Plastisch auf, unter Annahme von  $\varphi = 30^\circ$  resp.  $\varphi = 34^\circ$  als Grenzkurve, so zeigt Fig.25, dass die plastische Zone grösser geworden ist, dass sie sich nach unten verschoben hat und in den Untergrund hineinreicht.

Die maximalen Schubspannungen (Fig.26a) haben vor allem in der Nähe der Schichtgrenze zugenommen. Ihr absolutes Maximum liegt in der Unterlagenschicht unter der Dammitte. Die Gleitlinien (Fig.26b) haben nicht stark geändert. Ihre Fortsetzung im Untergrund ergibt eine ähnliche Form, wie sie die Gleitflächen aufweisen, mit denen der Grundbruch einer Böschung gerechnet wird. Dieser tritt nur bei Materialien mit sehr kleinen Reibungswinkeln auf. Die dem Grundbruch entsprechenden Gleitlinien müssen deshalb mit  $\mu = 0,45-0,5$  gerechnet werden.

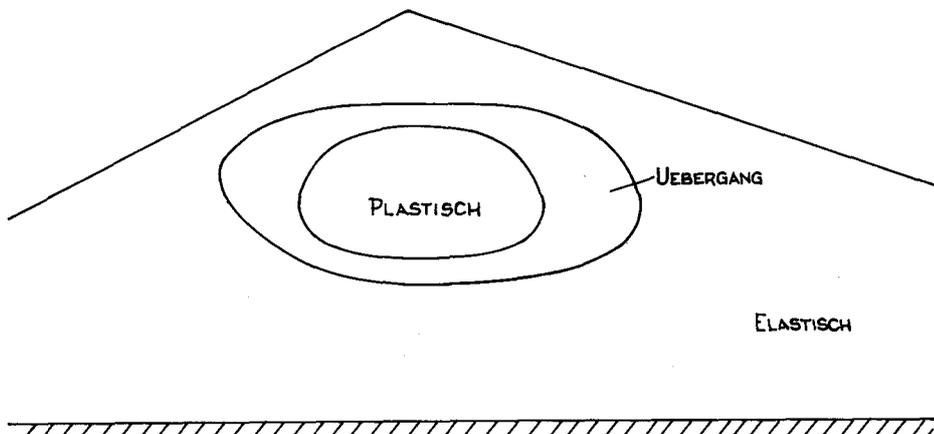


Fig.25

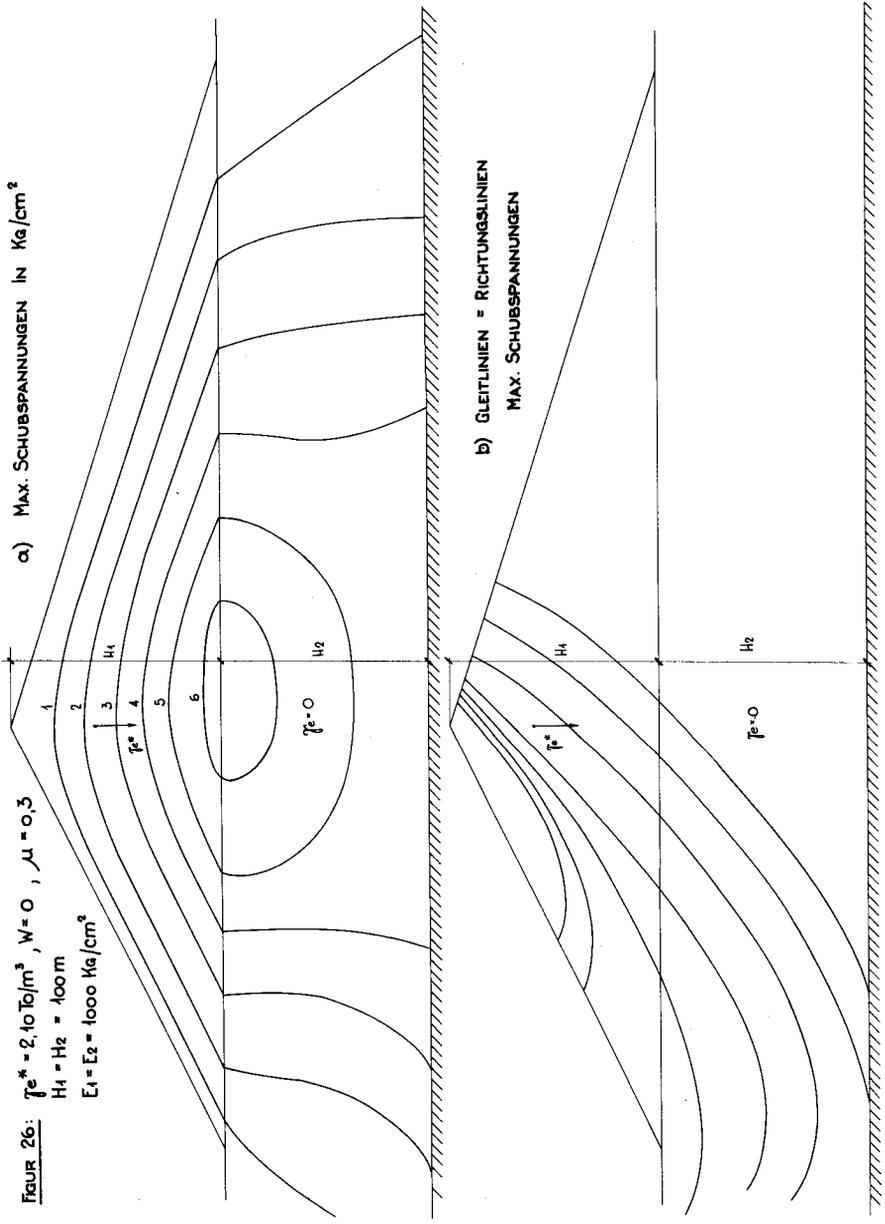
c) Einfluss der Unterlageschicht.

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Unterlageschicht auf Verschiebungen und Spannungen des Erddamms untersucht, wobei als Parameter gleichzeitig die Schichtdicke  $H_2$  und der Elastizitätsmodul  $E_2$  betrachtet werden. Berechnungen wurden durchgeführt für  $E_1:E_2=0,2; 1; 2$ , bei  $H_1:H_2=1$ , und für  $H_1:H_2=2,5; 1; 0,4$  bei  $E_1:E_2=1$ . Die numerischen Lösungen sind in den Beilagen 4/5 angegeben.

Die interessanteste Verschiebung ist die maximale Setzung des Untergrundes unter der Dammitte. Für deren Berechnung kann eine gute Näherungsformel angegeben werden, deren Ableitung in Anhang A wiedergegeben ist. Der Spannungszustand im elastischen Halbraum unter einer dreieckförmigen Normallast wurde von Bishop [2] hergeleitet. Durch Integration erhält man daraus die Verschiebungen des Halbraumes auf eine additive Konstante genau. Wählt man als Fixpunkt den Punkt senkrecht unter der Dammitte in der Tiefe  $H_2$ , so wird die gesuchte Setzung (Bezeichnungen siehe Figur Anhang):

$$v_z = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{\gamma_e H_1 H_2}{\pi} \cdot \left\{ (1-2\mu) \left( \text{Arctg} \frac{m}{H_2} + \text{Arctg} \frac{\ell}{H_2} \right) + \frac{\mu H_2}{2m\ell} \left( \ell \cdot \text{Log} \frac{m^2 + H_2^2}{H_2^2} + m \cdot \text{Log} \frac{\ell^2 + H_2^2}{H_2^2} \right) + \frac{(1-\mu)}{2H_2} \left( m \cdot \text{Log} \frac{m^2 + H_2^2}{m^2} + \ell \cdot \text{Log} \frac{\ell^2 + H_2^2}{\ell^2} \right) \right\} \quad (4,24)$$

FIGUR 26:  $\gamma_e^* = 2,10 \text{ t/m}^3$ ,  $W = 0$ ,  $\mu = 0,3$   
 $H_1 = H_2 = 100 \text{ m}$   
 $E_1 = E_2 = 1000 \text{ Kg/cm}^2$



In Tabelle II sind die Resultate gemäss strenger Lösung und gemäss Formel (4,24) zusammengestellt.

Tabelle II

$H_1:H_2$ für $\frac{E_1}{E_2} = 1$	$v_z$ [cm] strenge Lösung	$v_z$ [cm] (4,24)	$E_1:E_2$ für $\frac{H_1}{H_2} = 1$	$v_z$ [cm] strenge Lösung	$v_z$ [cm] (4,24)
$\infty$	0	0	0	0	0
2,5	51	48,7	0,2	25,9	25
1	126	125	1	126	125
0,4	282	283	2	241	250

Die Uebereinstimmung ist sowohl in bezug auf den Einfluss von  $H_2$  als auch von  $E_2$  sehr gut. Die Abweichungen sind kleiner als 4%.

Es ist festzuhalten, dass mit dieser Methode nur die Setzung der Dammitte berechnet werden kann. Der Grund dazu ist folgender: Zur Ableitung der Formel (4,24) wurde erstens der Einfluss der Schubspannungen an der Schichtgrenze vernachlässigt, und zweitens ist nur der zentrale Punkt in der Tiefe  $H_2$  verschiebungsfrei, wogegen bei der strengen Lösung der ganze Schnitt als starr vorausgesetzt wurde. Diese Annahmen beeinflussen offenbar die Verschiebung der Dammitte nur sehr wenig, ergeben aber im übrigen völlig andere Verschiebungen. In Fig.27 sind einige Setzungsmulden nach der strengen Lösung dargestellt, die zeigen, dass vor allem bei einer weichen Unterlage-schicht beträchtliche Horizontalverschiebungen auftreten können.

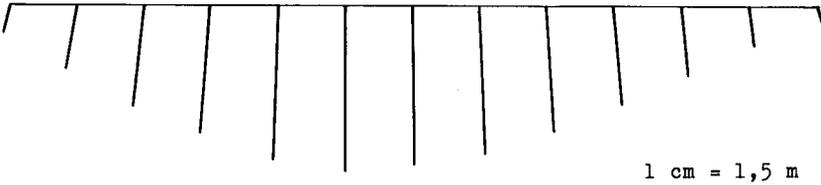
Wird ein Erddamm auf einer elastischen Schicht fundiert, so kommt den Schubspannungen in der Kontaktfläche eine grosse Bedeutung zu. Zu ihrer Berechnung wird meistens angenommen, dass sich der Damm in einem aktiven Rankine'schen Plastizitätszustand befindet. Diese Annahme führt zur Formel:

$$\tau_{xy\max} = \rho \cdot \frac{\gamma_e H_1^2}{2\ell} \cdot \operatorname{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4,25)$$

$\ell$  = Breite der Dammschulter an der Basis.

Zur Bestimmung von  $\rho$  wurden mehrere Beispiele nach dem Verfahren

$$H_1 : H_2 = 2,5 \quad E_1 : E_2 = 1$$



$$H_1 : H_2 = 1 \quad E_1 : E_2 = 0,5$$

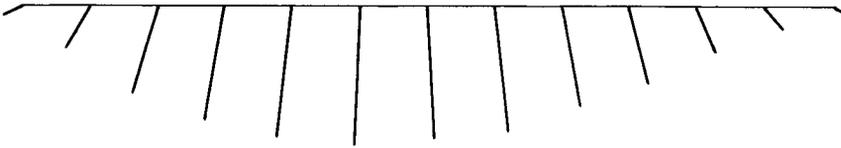
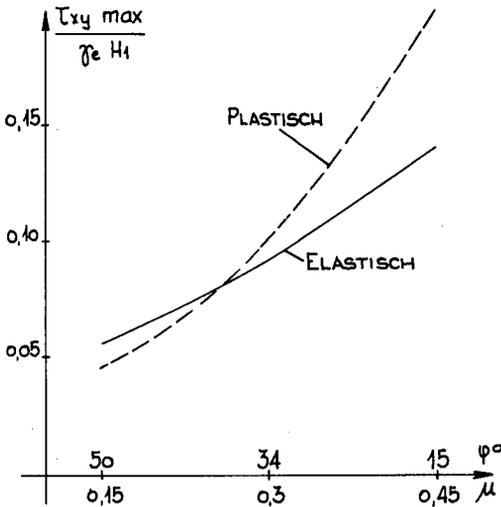


Fig.27

von Engesser-Rendulic [19] durchgerechnet mit dem Ergebnis  $\varphi = 1,6-1,7$ , während Creager [14] aufgrund photoelastischer Versuche den Wert  $\varphi = 1,4$  angibt. In Kapitel 3d wurde dargelegt, dass zwischen  $\mu$  und  $\varphi$  eine Relation besteht. In Fig.28 haben wir die maximalen  $\tau_{xy}$ -Spannungen an der Kontakt-



fläche der Luftseite - plastisch gemäss Formel (4,25) in Funktion von  $\varphi$  mit denjenigen nach der Elastizitätstheorie in Funktion von  $\mu$  unter Verwendung der Gleichung (3,13) - verglichen. Die Uebereinstimmung ist, zum mindesten im praktisch vorkommenden Bereich ( $\mu = 0,2-0,4$ ), annehmbar.

Fig.28 Max. Schubspannungen in Fkt. des Dammaterials.

Formel (4,25) liefert die Kontaktspannungen unabhängig vom Untergrund. Wie Fig.29 zeigt, ist diese Annahme in bezug auf einen variablen E-Modul des Untergrundes gerechtfertigt.

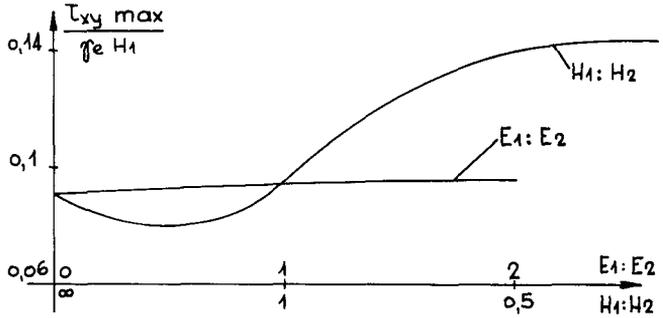


Fig.29 Max. Schubspannungen in Fkt. der Unterlage.

Hingegen hat die Schichtdicke  $H_2$  einen wesentlichen Einfluss auf die Schubspannungen, die bei wachsendem  $H_2$  zunehmen.

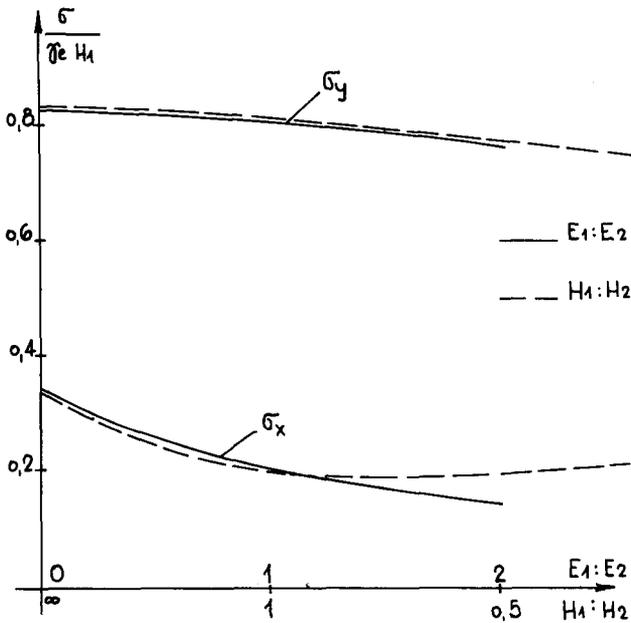


Fig.30 Normalspannungen in Fkt. der Unterlage.

In Fig.30 sind die Normalspannungen im Kontaktpunkt in der Dammitte dargestellt. Die Vertikalspannungen nehmen nur unbedeutend ab, während die Horizontalspannungen eine starke Abhängigkeit vom Untergrund erkennen lassen. Die Kurve des  $\tau_{\max}$  (siehe Fig.31) hat in Funktion der Schichtdicke ein

Maximum, in Funktion des E-Moduls ist sie jedoch monoton steigend. Erstere Kurve strebt asymptotisch gegen den aus der Literatur bekannten Wert für den elastischen Halbraum (Jürgenson: 0,256 [13];

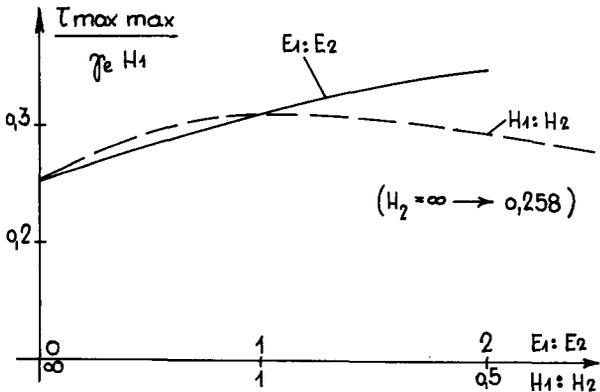


Fig. 31

Max. Schubspannungen in Fkt. der Unterlage.

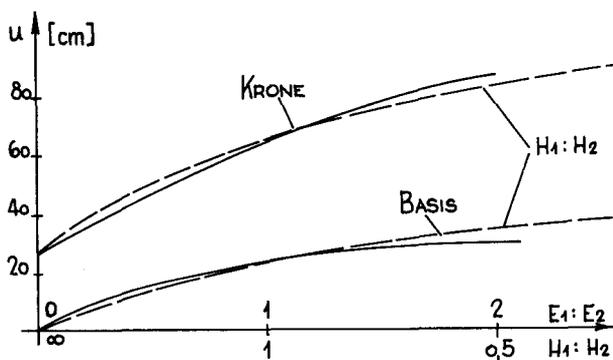
Bishop: 0,258). Der Punkt, in dem  $\tau_{\max\max}$  auftritt, liegt in der Dammitte, verschiebt sich jedoch bei zunehmender Schichtdicke von der Kontaktfläche bis zu  $2/3 H_1$  in den Untergrund. Ein variabler E-Modul jedoch verändert die Position des  $\tau_{\max\max}$  nicht.

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass die Differentialgleichung eines elastischen Scheibenproblems (2,7) die Elastizitätskonstanten  $E$  und  $\mu$  nicht enthält. Sind am Rand einer Scheibe nur Spannungsbedingungen zu erfüllen, so können diese Probleme unabhängig von  $E$  und  $\mu$  gelöst werden. Dies ist der Fall für einen Damm auf elastischem Halbraum bei Annahme gleicher Elastizitätseigenschaften von Damm und Untergrund. Sind aber Verschiebungsbedingungen zu erfüllen, wie z.B. das Vorhandensein einer inkompressiblen Schicht, müssen  $E$  und  $\mu$  für Damm und Untergrund explizit gewählt werden und beeinflussen Spannungen und Verschiebungen. Es ist klar, dass dieser Einfluss mit wachsender Schichtdicke kleiner wird. Die Resultate streben schliesslich für ein beliebiges  $\mu$  (bei  $E_1:E_2=1$ ) gegen die Lösung im elastischen Halbraum. Die Untersuchungen für  $\mu = 0,3$  zeigen aber, dass die meisten Spannungskurven in Funktion von  $H_1:H_2$  beträchtlich variieren. Die Spannungen sind auch vom Verhältnis  $E_1:E_2$  abhängig, wobei in diesem Falle keine asymptotischen Werte vorhanden sind. Will man sich also ein klares Bild von Spannungen und Verschiebungen in Damm und Untergrund verschaffen, ist es unerlässlich, den Gesamtkörper zu berechnen unter Verwendung der ent-

sprechenden elastischen Werte.

d) Einfluss des Wasserdrucks.

Das Wasser wird in den im folgenden besprochenen Rechenbeispielen in derselben Weise in die Rechnung einbezogen wie beim Damm auf fester Unterlage. Auf der Wasserseite ist das Eigengewicht  $\gamma_e'' = 1,2 \text{ t/m}^3$ , auf der Luftseite  $\gamma_e^* = 2,1 \text{ t/m}^3$ . Auf den als Membran idealisierten Kern wirkt ein hydrostatischer Druck. Als Parameter für die Unterlage wurden dieselben Verhältnisse  $E_1:E_2$  und  $H_1:H_2$  gewählt wie im vorhergehenden Kapitel (Beilagen 6 und 7).

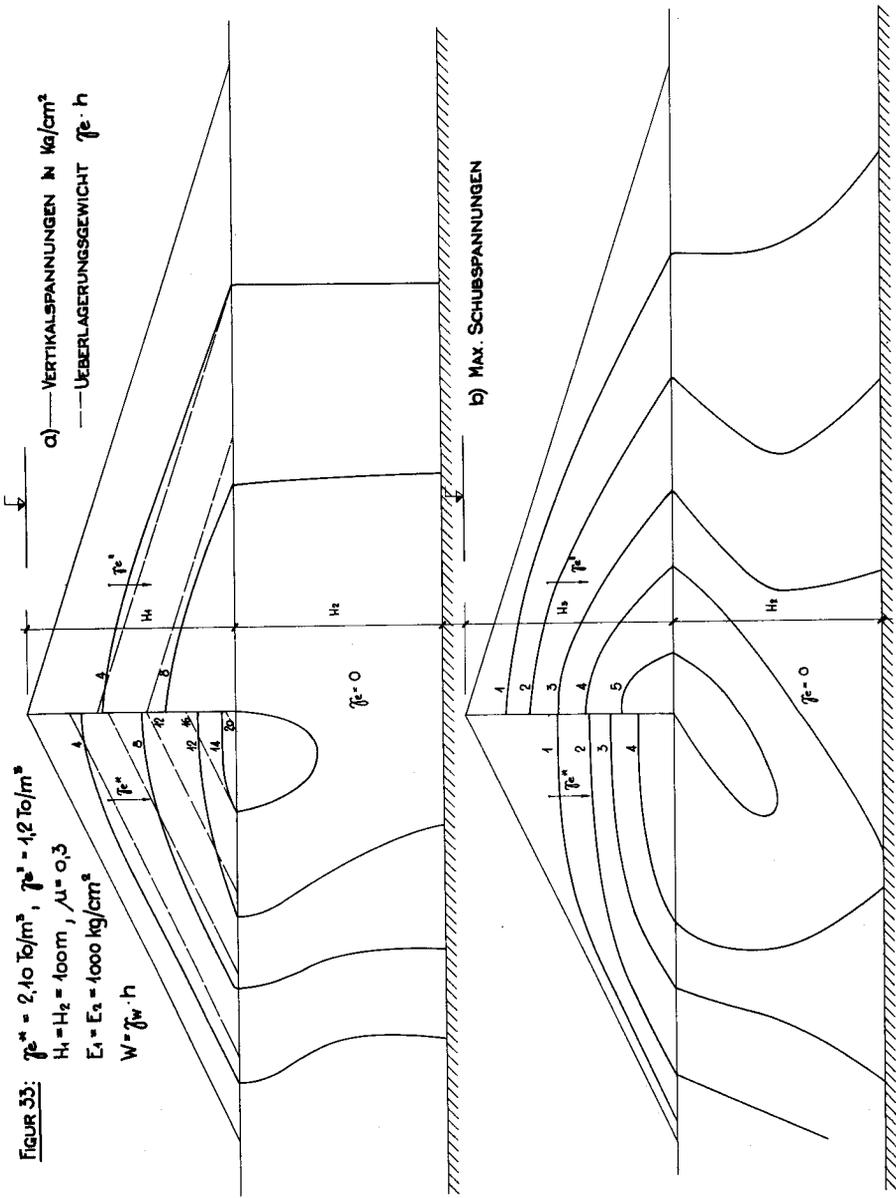


Der Einfluss der Unterlageschicht auf die Horizontalverschiebungen ist ganz beträchtlich. In Fig.32 sind sie für zwei Punkte der Dammmitte (Krone und Basis) dargestellt. Daraus geht hervor, dass bei einer weichen oder tiefen Unter-

Fig.32 Horizontalverschiebungen infolge Wasserdrucks.

lage an einem 100 m hohen Damm Verschiebungen der Basis bis zu 40 cm auftreten können. An der Krone sind sie entsprechend grösser und erreichen bei extremen Verhältnissen 90 cm.

In Fig.33 sind die Vertikal- und max. Schubspannungen für die Verhältnisse  $E_1:E_2=1$ ;  $H_1:H_2=1$  dargestellt. Sie weisen in der Mitte wiederum eine starke Diskontinuität auf, die auch im Untergrund zu einem dissymmetrischen Spannungszustand führt. Ihre Maximalwerte bei veränderlicher Unterlage sind in Fig.34 zusammengestellt und zeigen interessanterweise, dass die Maximalwerte von  $\bar{\sigma}_y$  und  $\tau_{\max}$  mit Wasserdruck kleiner sind als diejenigen ohne Wasser (vergl. Fig.30/31).



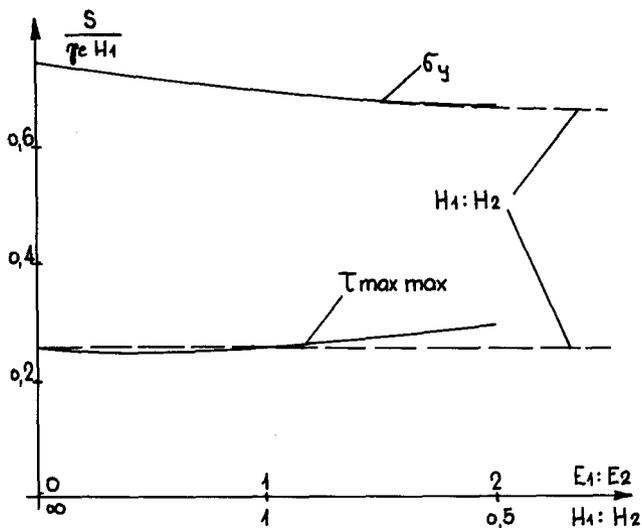


Fig.34 Spannungsmaximalwerte bei Wasserdruck.

Einen grossen Einfluss hat der Wasserdruck auf die Schubspannungen der Kontaktfläche. Ihrer Berechnung wurde bis anhin nur wenig Beachtung geschenkt. Die einzigen dem Autor bekannten Theorien basieren auf der Plastizitätstheorie. Den einfachsten Lösungsweg gibt Fagnoul [6] an, dessen Resultate gute Uebereinstimmung mit der Theorie von Rendulic ergeben. Der Erddamm wird nach Fagnoul in 3 Zonen eingeteilt. (Fig.35).

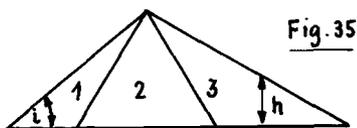


Fig.35

In den Zonen 1 und 3 herrscht Rankine'sches aktives plastisches Gleichgewicht. Die auf die Unterlage übertragenen Spannungen sind in diesen Zonen linear:

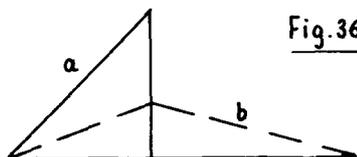


Fig.36

$$\sigma_y = \gamma_e \cdot h \cdot f(i, \varphi) \quad (4,26)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_e \cdot h \cdot g(i, \varphi)$$

In der mittleren Zone, deren Begrenzungslinien aus dem Mohr'schen Kreis ermittelt werden, schlägt Fagnoul eine parabolische Verteilung der Spannungen vor. Vergleicht man diese Lösung mit derjenigen

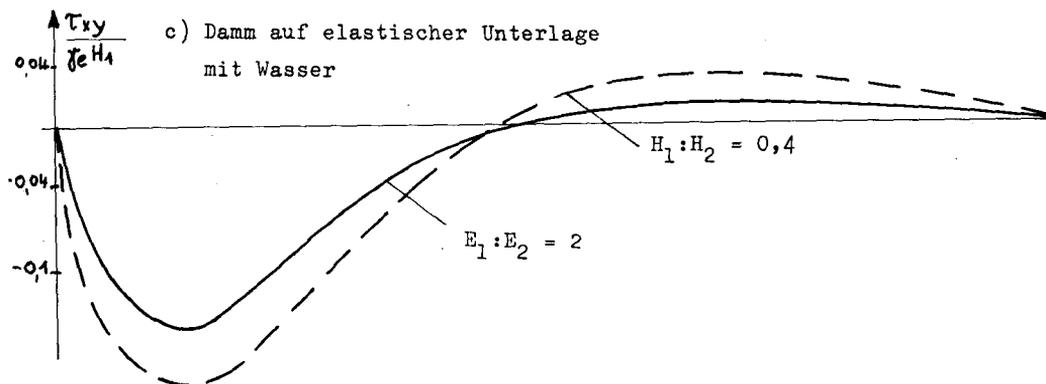
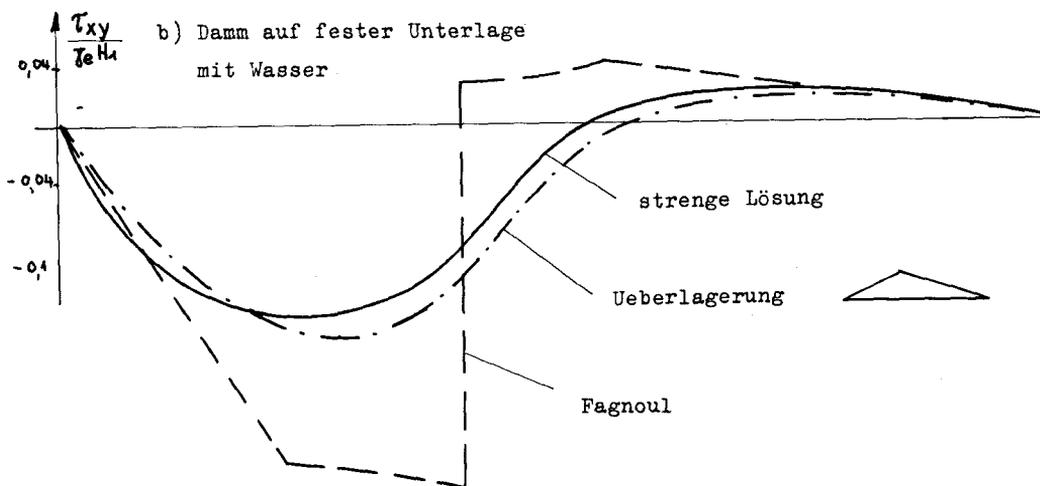
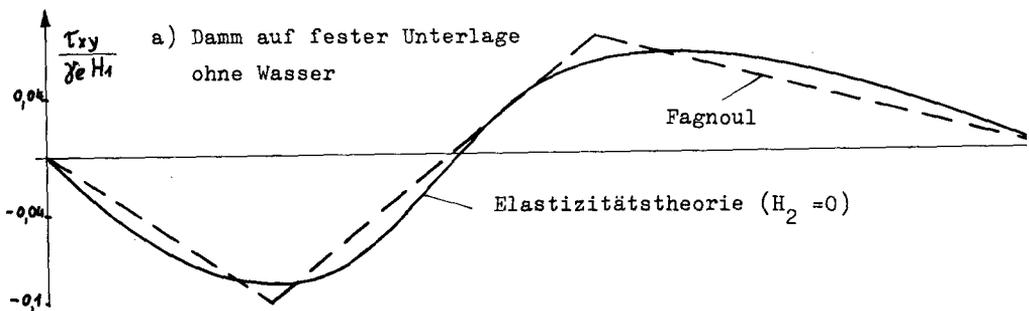
gemäss Elastizitätstheorie (Damm auf fester Unterlage), so konstatiert man gute Uebereinstimmung (Fig.37a). Den Wasserdruck berücksichtigt Fagnoul, indem er eine dreieckförmige Verteilung der gesamten Wasserlast gemäss Fig.36a auf der Luftseite den Spannungen infolge Eigengewicht überlagert. Diese Annahme führt in der Dammitte zu einer starken Diskontinuität (Fig.37b) und ergibt auf der Luftseite im Vergleich zur Elastizitätstheorie zu grosse Schubspannungen. Wir haben deshalb eine dreieckförmige Verteilung der Wasserlast über die gesamte Basis (36b) untersucht. Die Uebereinstimmung bei diesem Vorgehen mit der exakten Lösung ist im Allgemeinen befriedigend, im Spezialfall  $H_2=0$  gut (37b).

Auch bei Wasserdruck sind die Schubspannungen vom elastischen Untergrund abhängig. Fig.37c zeigt, dass die  $\tau_{xy\max}$  mit der Deformierbarkeit der Unterlage zunehmen. Wichtig ist auch die Tatsache, dass dieses Maximum nach aussen wandert. Rendulic [19] hat 1938 eine noch heute verwendete Dimensionierungsmethode von Erddämmen vorgeschlagen, die als Bedingung festlegt, dass der vom Damm auf die Unterlage übertragene Lastwinkel  $tq\psi = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y}$  kleiner als der Reibungswinkel des Untergrundmaterials sein muss. Daraus geht sofort die Bedeutung der Position von  $\tau_{xy\max}$  hervor.

Die Folgerungen aus diesem Kapitel sind, dass eine elastische Unterlage einen Erddamm massgebend beeinflusst. Nebst den Verschiebungen sind vor allem die Kontaktspannungen zwischen Damm und Untergrund empfindlich vom Untergrund abhängig. In diesem Zusammenhang mag darauf hingewiesen werden, dass allein in den Jahren 1937/38 in den USA 5 Dambrüche auf Versagen des Untergrundes [14] zurückgeführt werden, darunter die grosse Katastrophe von Fort Peck.

Bei allen Vorbehalten gegenüber der Elastizitätstheorie darf als Resultat dieses Abschnittes festgehalten werden, dass qualitative Untersuchungen viele wertvolle Hinweise liefern und dass die quantitativen Ergebnisse mit Beobachtungen und erhärteten Dimensionierungsmethoden sehr oft in durchaus befriedigender Uebereinstimmung sind.

Fig. 37 Schubspannungen an der Schichtgrenze



III Die Berechnung von Erddämmen nach der  
Plastizitätstheorie

---

5. Kapitel: Allgemeine Theorie.

---

a) Grundgleichungen der Plastizitätstheorie.

Wird eine zylindrische Bodenprobe axial belastet, so erhält man ein in Fig.38 dargestelltes Verformungsdiagramm. Bis zu einer als

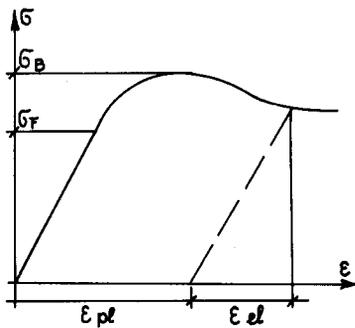


Fig.38 Verformungsdiagramm einer Bodenprobe.

Fließgrenze bezeichneten Spannung  $\sigma_F$  ist die Kurve einigermaßen linear. Wächst die Belastung bis zur Bruchspannung  $\sigma_B$ , so erleidet das Material starke Deformationen, die auch bei völliger Entlastung nicht mehr verschwinden. Man nennt sie plastische Deformationen, im Gegensatz zu den elastischen Deformationen, die proportional zur Belastung zu- oder abnehmen. Bei den Berechnungen im vorhergehenden Abschnitt haben wir gemäss Elastizitätstheorie

das Verformungsdiagramm 1 längs OF (Fig.39) angenommen. Treten im Material grössere Spannungen als die Fließgrenze auf, so ist diese Voraussetzung unkorrekt, und es muss ein der Wirklichkeit angepasstes Verformungsdiagramm verwendet werden. Von den in der ein-

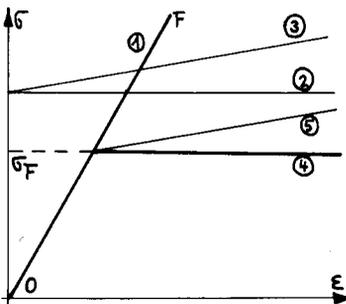


Fig.39

- ① Elastisch
- ② Starr - ideal plastisch
- ③ Starr - plastisch mit Verfestigung
- ④ Elastisch - ideal plastisch
- ⑤ Elastisch - plastisch mit Verfestigung

schlägigen Literatur über Plastizitätstheorie vorgeschlagenen Approximationen ist die Annahme eines elastisch-idealplastischen Verhaltens für Bodenmaterialien wohl die beste Näherung (Fig.39, Kurve 4).

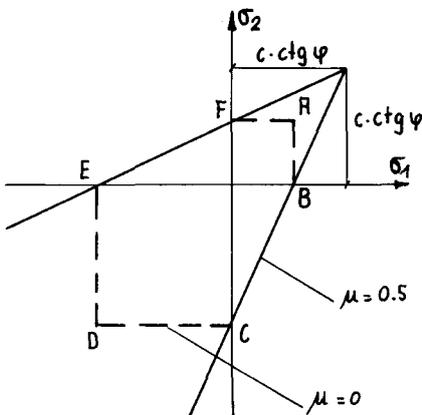
Liegt ein mehrdimensionaler Spannungszustand vor, so ist die Fließgrenze  $\sigma_F$  Funktion sämtlicher Spannungen. Man nennt diese Funktion Fließfunktion. In der Bodenmechanik verwendet man als Fließfunktion  $f$  das Mohr-Coulomb'sche Gesetz, welches, in Hauptspannungen ausgedrückt, wie folgt lautet:

$$f = -\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = 0 \quad (5,1)$$

wobei  $\sigma_1$  die grösste und  $\sigma_2$  die kleinste Hauptspannung ist. Da jede Hauptspannung sowohl den grössten als auch den kleinsten Wert haben kann, sind 6 Kombinationen möglich, somit 6 Fließfunktionen zu berücksichtigen. Gleichung (5,1) stellt im Hauptspannungsraum eine hexagonale gerade Pyramide dar mit dem Scheitel im Punkt  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi$ . Im ebenen Verformungszustand gilt:

$$\sigma_3 = \mu (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5,2)$$

Die Schnittfläche zwischen der Ebene (5,2) und der Pyramide (5,1) ist der Bereich, innerhalb welchem ein Spannungspunkt sein kann. In Fig.40 ist die Projektion dieser Schnittfläche für die beiden Extrem-



werte  $\mu=0$  (d.h.  $\sigma_3=0$ ; entspricht dem ebenen Spannungszustand) und  $\mu=0,5$  aufgezeichnet. Liegt ein Spannungspunkt innerhalb des Sektors ABCDEF, so verhält sich das Material elastisch, und es ist im plastischen Zustand, wenn der Spannungspunkt auf den Begrenzungsgeraden liegt; ausserhalb dieses Sektors kann der Punkt nicht sein.

Fig.40 Schnitt von (5,2) mit der Fließpyramide.

In bezug auf die Formulierung des Stoffgesetzes bestehen gegenwärtig zwei wichtige Theorien: diejenige der elastisch-plastischen Deformationen und diejenige des plastischen Fließens. In der ersteren wird eine Gesetzmässigkeit zwischen Spannungen und Verzerrungen, in der letzteren eine solche zwischen Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten angenommen. Erst weitere Versuche werden zeigen, welche Theorie der Wirklichkeit am besten entspricht. In der vorliegenden Arbeit wird ein Stoffgesetz des plastischen Fließens verwendet: die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten sind proportional dem Gradienten der Fließfunktion. Diese erhält somit die Bedeutung eines plastischen Potentials. Die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten lauten

$$\dot{\epsilon}_{i,pl} = \dot{K} \frac{\delta f}{\delta \sigma_i} \quad (5,3)$$

f = Fließfunktion       $\dot{K}$  = positiver unbestimmter Faktor

Die totalen Verzerrungsgeschwindigkeiten setzen sich aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen, und das Stoffgesetz eines elastisch-idealplastischen Körpers lautet in bezug auf Hauptspannungen und Hauptverzerrungen wie folgt:

$$\dot{\epsilon}_i = B_{ij} \dot{\sigma}_j + \dot{K} \frac{\delta f}{\delta \sigma_i} \quad (5,4)$$

i, j = 1, 2, 3

$B_{ij}$  = Matrix resultierend aus dem Hooke'schen Gesetz.

$\dot{\phantom{x}}$  = Ableitung nach der Zeit oder einer andern monoton variierenden Grösse. Im Falle eines Erddammes wählt man vorteilhafterweise die Belastung als Variable, d.h. während der Bauphase die Aufbauhöhe, während des Stauens die Stauhöhe.

Die Gleichungen (5,4) sind in den seltensten Fällen geschlossen integrierbar. Die Zeit resp. die Belastung tritt somit als Variable auf, und das Berechnungsproblem eines elastisch-idealplastischen Damms stellt sich wie folgt:

In einem bestimmten Belastungsmoment sind Verschiebungen und Spannungen bekannt. Werden entlang der Oberfläche F die Spannungsgeschwindigkeiten  $\dot{\sigma}_1$  verändert, so sind Spannungen und Verschiebungen des Damms unter der neuen Belastung zu bestimmen. Als statische Gesetze können dazu entweder die Differentialgleichungen des

Gleichgewichts (2,4) oder ein Extremalprinzip verwendet werden. Zu dessen Formulierung definieren wir vorerst:

Man nennt ein Verzerrungsgeschwindigkeitsfeld  $\dot{\epsilon}_i$  kinematisch zulässig, wenn es aus einem Verschiebungsfeld  $x_i$  abgeleitet ist, das die Randbedingungen erfüllt. Dann lautet das Extremalprinzip: Unter allen kinematisch zulässigen Verzerrungsgeschwindigkeitsfeldern macht das wirklich vorhandene den Ausdruck

$$J = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_i \cdot \dot{\epsilon}_i \cdot dV - \int_F \dot{s}_i \cdot \dot{x}_i \cdot dF \quad (5,5)$$

zu einem Minimum. Darin bedeutet  $\dot{\sigma}_i$  ein Spannungsgeschwindigkeitsfeld, das durch die Gleichungen (5,4) dem Verzerrungsgeschwindigkeitsfeld  $\dot{\epsilon}_i$  zugeordnet ist.

Sind die Gleichungen (5,4) nicht geschlossen integrierbar, können nur Spannungszustände berechnet werden, die sich um infinitesimale Zeit- resp. Belastungsintervalle unterscheiden. Praktisch geht man so vor, dass man die Gleichungen (5,4) intervallweise integriert und die Spannungszustände sukzessive berechnet.

#### b) Ableitung der numerischen Operatoren.

Wir setzen für die folgende Ableitung einen ebenen Verformungszustand und kohäsionsloses Material voraus. Die Fließfunktion (5,1) lautet in cartesischen Koordinaten

$$- \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} + \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \cdot \sin \varphi = 0 \quad (5,6)$$

Fügt man die beiden Gleichgewichtsbedingungen (2,4) hinzu, so erhält man im plastischen Bereich ein System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ). Scheinbar kann also die Lösung gewonnen werden ohne Berücksichtigung der Spannungs-Verformungsbeziehungen. Nun hat aber Hill [10] nachgewiesen, dass dies nur unter gewissen zusätzlichen Bedingungen korrekt ist; so z.B. dürfen die Gleitlinien im plastischen Bereich die elastisch-plastische Grenze nur einmal schneiden. Wie Fig.9 zu entnehmen ist, entstehen in einem Erdamm

geschlossene innere plastische Zonen, so dass die Gleitlinien die Grenze stets zweimal schneiden. Eine Lösung, welche die Gleichungen (5,6) und (2,4) erfüllt, ist somit zwar statisch korrekt; ob aber ein damit verträgliches Verschiebungsfeld gefunden werden kann, muss zusätzlich geprüft werden und ist sehr fraglich. Aus diesem Grunde ist es auch für elastisch-plastische Probleme vorteilhaft, die Lösung mittels des Extremalprinzips (5,5) zu suchen.

Die Fließfunktion lautet:

$$-\sigma_1 + A\sigma_2 = 0 \quad A = t_0^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5,7)$$

Sie gehört somit in die Klasse der stückweise linearen Fließfunktionen, deren Theorie in [8] dargelegt ist. Die Hauptverzerrungsgeschwindigkeiten werden gemäss (5,4)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\dot{\sigma}_1 - \mu\dot{\sigma}_2] - \dot{K} \\ \dot{\epsilon}_2 &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\dot{\sigma}_2 - \mu\dot{\sigma}_1] + A\dot{K} \\ \dot{\epsilon}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5,8)$$

Diese Gleichungen können integriert werden für ein Belastungsintervall, innerhalb dessen

- die Hauptspannungsrichtungen konstant bleiben,
- jeder Punkt des Dammes entweder elastisch ist und bleibt, oder plastisch wird und bleibt, oder plastisch ist und bleibt.

Die Hauptverzerrungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_1 - \mu\sigma_2] - K \\ \epsilon_2 &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_2 - \mu\sigma_1] + AK \\ \epsilon_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5,9)$$

Die Integrationskonstante wird berücksichtigt, indem man entlang der elastisch-plastischen Grenze  $K=0$  wählt, womit auch die Kontinuität

mit den elastischen Verzerrungen gewahrt ist. Aus (5,7) und (5,9) kann K eliminiert werden, und die Hauptspannungen lauten:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{A}{[(1-\mu)A + \frac{1-\mu}{A} - 2\mu]} \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{A}\right) = A \cdot E' \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{A}\right) \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_1}{A} = E' \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{A}\right)\end{aligned}\quad (5,10)$$

$$\text{mit } E' = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{1}{[(1-\mu)A + \frac{1-\mu}{A} - 2\mu]}$$

Die potentielle Energie im plastischen Bereich wird unter Verwendung der Relation (5,9)

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \int_{V_{pl}} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2) dV = \frac{1}{2} \int_{V_{pl}} (\varepsilon_{1el} \sigma_1 + \varepsilon_{2el} \sigma_2) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_{pl}} (-K \sigma_1 + A K \sigma_2) dV = L_{el} + 0\end{aligned}\quad (5,11)$$

Die plastische potentielle Energie ist also gleich Null. Führt man die Relationen (5,10) in (5,11) ein, so erhält man die potentielle Energie im plastischen Bereich in Funktion der Hauptverzerrungen

$$L = \frac{E'}{2} \int_{V_{pl}} \left( A \varepsilon_1^2 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2^2}{A} \right) dV \quad (5,12)$$

Die eigentliche Rechnung wird in Abhängigkeit der Verschiebungen  $u, v$  durchgeführt. Diese sind mit den cartesischen Verzerrungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  gemäss (2,2) verknüpft. Wir schreiben deshalb die potentielle Energie in Funktion dieser Grössen:

$$\begin{aligned}L &= \frac{E'}{2} \int_{V_{pl}} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_x^2 \left[ A + \frac{1}{A} - \frac{1}{\cos 2\alpha_w} \left( A - \frac{1}{A} \right) \right] + \frac{1}{2} \varepsilon_y^2 \left[ A + \frac{1}{A} + \frac{1}{\cos 2\alpha_w} \left( A - \frac{1}{A} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 \left( A + \frac{1}{A} - 2 \right) \right\} dV\end{aligned}\quad (5,13)$$

wobei  $\alpha_w$  den Winkel zwischen der x-Achse und der algebraisch grösseren Hauptverzerrung darstellt.  $\alpha_w$  ist von der x-Achse aus im Gegen-  
 uhrzeigersinn abzutragen. Die potentielle Energie lässt sich somit  
 im elastischen wie im plastischen Bereich in der Form ausdrücken:

$$L = \frac{E^*}{2} \int (\alpha \cdot \varepsilon_x^2 + \beta \cdot \varepsilon_y^2 + \gamma \cdot \varepsilon_x \varepsilon_y + \delta \cdot \gamma_{xy}^2) dV \quad (5,14)$$

mit den Abkürzungen  $[A = \tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})]$

Elastischer Bereich:

$$E^* = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma = \frac{2\mu}{1-\mu}$$

$$\delta = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$$

Plastischer Bereich:

$$E^* = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{1}{[(1-\mu)A + \frac{1-\mu}{A} - 2\mu]}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} [A + \frac{1}{A} - \frac{1}{\cos 2\alpha_w} (A - \frac{1}{A})]$$

$$\beta = \frac{1}{2} [A + \frac{1}{A} + \frac{1}{\cos 2\alpha_w} (A - \frac{1}{A})]$$

$$\gamma = 2$$

$$\delta = \frac{1}{4} (A + \frac{1}{A} - 2)$$

Dadurch wird die Bildung der Operatoren stark vereinfacht, indem im  
 gesamten Damm dieselben formellen Operatoren (2,24) verwendet werden  
 können, nur mit verschiedenen numerischen Koeffizienten. Eine gros-  
 se Unannehmlichkeit ist hingegen der Umstand, dass in den Operatoren  
 des plastischen Bereichs die Hauptspannungsrichtung  $\alpha_w$  auftritt.  
 Dies bedeutet, dass in jedem plastischen Funktionspunkt spezielle  
 Koeffizienten verwendet werden müssen. Für ein neues Belastungsinter-  
 vall ändern die Koeffizienten in jedem plastischen Punkt. Zwi-  
 schen 2 Berechnungsphasen muss deshalb ein spezielles Programm ein-  
 geschaltet werden, mit welchem

- die neue plastische Zone festgelegt wird,
- die Koeffizienten in jedem plastischen Punkt gebildet werden,
- die Operatorziffernliste entsprechend abgeändert wird.

## 6. Kapitel: Beschreibung eines Testbeispiels.

Als Testbeispiel haben wir denselben Damm auf fester Unterlage gewählt wie in Kapitel 3a. Das kohäsionslose Material hat einen Reibungswinkel von  $\varphi = 34^\circ$  ( $\mu \sim 0,3$ ). Dann lautet die Plastizitätsbedingung:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0,283 \quad (6,1)$$

- > das Material ist elastisch.
- = das Material ist plastisch.

In einem horizontal gelagerten Material gilt approximativ

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \sim \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \lambda_0 = \frac{\mu}{1-\mu} \sim \frac{0,3}{0,7} = 0,428 \quad (6,2)$$

$\lambda_0$  = Ruhedruckziffer.

Wird der Erddamm aufgeböscht, so nimmt das Verhältnis  $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  allmählich ab. Berechnet man den Damm rein elastisch, so verläuft das Minimum des Spannungsverhältnisses in Funktion der Aufbauhöhe gemäss Fig.41. Bei einer Aufbauhöhe von 90 m entsteht die erste grössere plastische Zone im Testdamm. Bis zu diesem Belastungsmoment muss nur eine Lösung gesucht werden, da im elastischen Bereich in jedem Punkt Spannung und Verzerrung proportional sind. Die Schwierigkeit beim weiteren Vorgehen liegt in der Festlegung der elastisch-plastischen Grenze. Man kann annehmen, dass bei jeder Belastungszunahme der neue plastische Kern den vorhergehenden voll umfasst. So beeinflusst also die Entwicklungsgeschichte die Form der plastischen Zone. Daraus ergibt sich auch die Forderung, dass die Belastungsstufen nur so gross gewählt werden sollen, dass die Ungenauigkeit bei der Festlegung der Grenze nicht grösser ist als die Ungenauigkeit der numerischen Approximation [10]. Im vorliegenden Problem wurden 3 Stufen  $H_1 = 90, 95, 100$  m betrachtet, welche die in Fig.42 dargestellten plastischen Bereiche ergeben. Ihre Entwicklung ist deshalb wichtig, weil eine Böschung instabil wird, wenn eine durchgehende plastische Zone von einer Böschungsfäche zur andern entstanden ist. Aus Fig.42 geht deutlich die Progression der Vergrösserung der plasti-

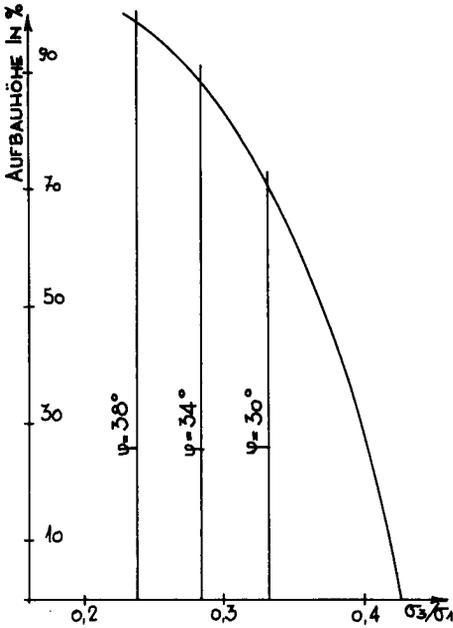


Fig.41

Minimum des Spannungsverhältnisses in Funktion der Aufbauhöhe.

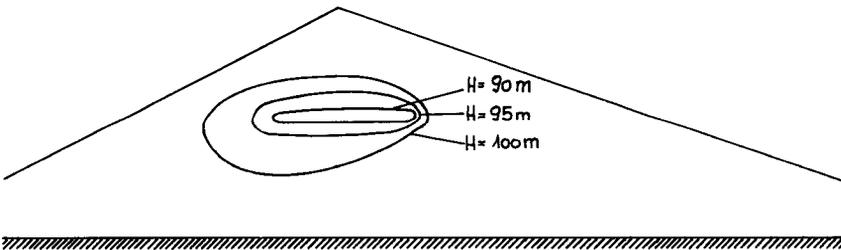


Fig.42 Plastische Bereiche in Funktion der Aufbauhöhe.

schen Zone bei gleicher Last-Erhöhung hervor.  
 In Beilage 8 ist die Lösung für die Endphase  $H = 100$  m in Funktion der Verschiebungen angegeben. Zum Vergleich mit der Lösung gemäss Elastizitätstheorie sind in Fig.43 die Unterschiede zwischen den Verschiebungsvektoren aufgezeichnet. Daraus geht hervor, dass der Damm bei Berücksichtigung der Plastizität in der zentralen Zone grössere Setzungen mitmacht, wogegen die Flanken nach aussen gepresst und teilweise gehoben werden. Die Spannungen variieren am

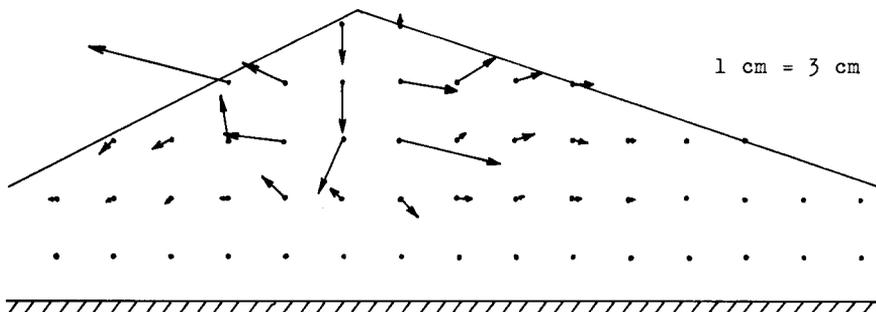


Fig.43 Verschiebungsvektorenunterschiede zwischen den Lösungen  
gemäss Elastizitätstheorie resp. Plastizitätstheorie.

meisten in der plastischen Zone. Die Vertikalspannungen bleiben zwar ziemlich konstant, hingegen nehmen die Horizontalspannungen zu. In der elastischen Zone ändern die Spannungen nur in dem an den plastischen Kern grenzenden Bereich ein wenig.

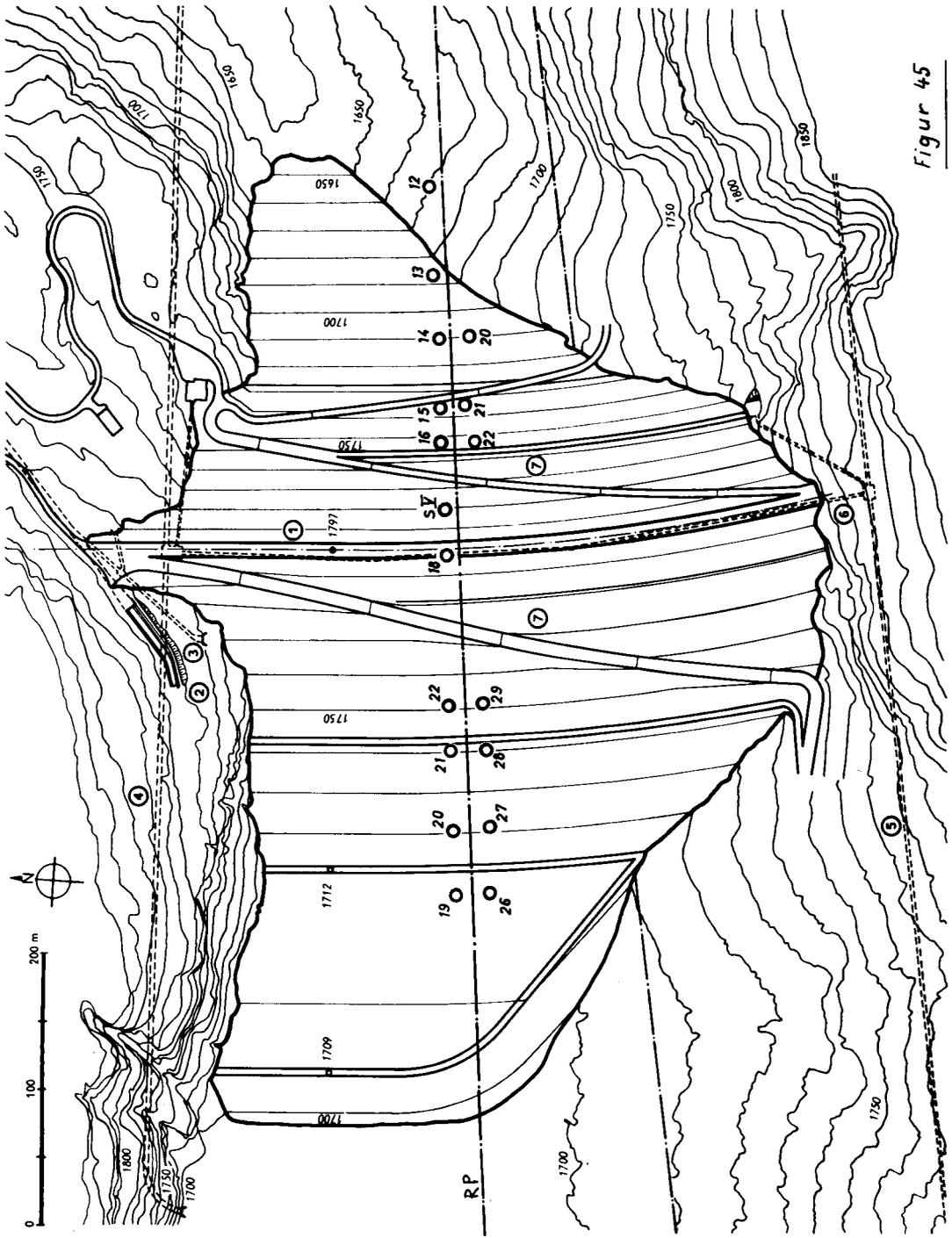
IV Beispiel eines ausgeführten Dammes:  
Die Goeschenenalp

---

7. Kapitel: Allgemeine Beschreibung und Annahmen für die  
Berechnung.

In den Jahren 1955/60 wurde auf der Goeschenenalp im Einzugsgebiet der Reuss ein 155 m hoher Erddamm erstellt. Projekt und Bauleitung lagen in den Händen der Elektro-Watt in Zürich, welche für die bodenmechanischen Probleme die Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau der ETH zuzog. Eine detaillierte Beschreibung des Dammes wurde von G. Schnitter [21] veröffentlicht. Während des Baues wurden im Damm zahlreiche Dispositive eingebaut, um Verschiebungen und Spannungen zu messen. Zur Interpretation der Messresultate wurde eine Berechnung nach der in dieser Arbeit beschriebenen Methode durchgeführt.

Die erste Schwierigkeit betraf die Wahl eines repräsentativen Profils; denn der Goeschenenalpdamm hat einen komplizierten Grundriss (Fig.45). Ausserdem hat der Felsuntergrund eine sehr unregelmässige Oberfläche. In der Dammitte befindet sich ein Felsbuckel, auf dem der Damm rittlings aufsitzt. Um den Einfluss dieses Keils auf die Horizontalverschiebungen abzuschätzen, wurde das Rechenprofil durch diesen Buckel gewählt. Der Rand des Rechenprofils wird durch Fels- und Dammoberfläche und durch eine seitliche Begrenzung gebildet. Zwar liegt nur der Kern des Dammes auf dem Fels; im übrigen wird die Unterlage durch heterogene Alluvionen gebildet. Da aber eine analytische Erfassung der Materialeigenschaften dieser Alluvionen unmöglich war, wurden für Damm und Alluvionen die gleichen elastischen Kennziffern angenommen. Fels- und Dammoberfläche wurden durch eine Abtreppung approximiert (Fig.47) mit folgenden Neigungswinkeln:  
Dammoberfläche  $\theta = 0^\circ / \theta = 45^\circ$   
Felsoberfläche  $\theta = 0^\circ / \text{tg } \theta = 1:2$   
Die seitliche Begrenzung wurde so weit von der Dammachse weg gewählt (je 500 m), dass ihr Einfluss nur noch klein sein kann.



Figur 45

Die Randbedingungen sind wie folgt angenommen:

Seitlicher Rand:

Es sind feste Verschiebungen eingeführt.

$$u = 0 \quad v = \frac{\gamma e^*}{2E} \cdot \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)} [H^2 - h_g^2] \quad (3,2)$$

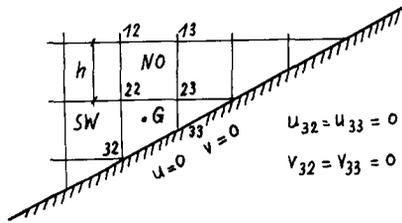
H = Höhe der Alluvionen;  $h_g$  = Ueberlagerungshöhe.

Damtoberfläche:

In jedem Punkt der Oberfläche ist die Normal- und die Tangentialspannung gleich Null.

Felsoberfläche:

Das Material häftet voll an der Felsoberfläche; d.h.  $u=0, v=0$ . Dem Fels und der Damtoberfläche entlang müssen spezielle Operatoren formuliert werden, einerseits, weil in der Energiesumme (2,12) nur effektiv vorhandene Flächen berücksichtigt werden dürfen, andererseits weil die Festwerte  $u=v=0$  die Operatoren verändern. Als Beispiel sei der Operator im Punkt 22 der Fig.46 an der Felsoberfläche abgeleitet.



Aus SW, NW, NO erhält der Operator die Normalanteile (2,16).

Im Schwerpunkt des Trapezes 22, 23, 32, 33 approximieren wir die Differentiale  $\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$ ;  $\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen wie folgt:

Fig.46 Ableitung eines Randoperators.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)G &= \frac{11}{18h} (u_{23} - u_{22}) \\ \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)G &= \frac{1}{9h} (5v_{22} + 4v_{23}) \end{aligned} \quad (7,1)$$

Mit  $\Delta f = \frac{3}{4}h^2$  wird der Anteil des Trapezes an der Energiesumme

$$\begin{aligned} \Delta J_L &= \frac{3}{8} \left\{ \frac{121}{324} (u_{23} - u_{22})^2 + \frac{1}{81} (5v_{22} + 4v_{23})^2 + \gamma \cdot \frac{11}{162} (u_{23} - u_{22}) \right. \\ &\quad \left. (5v_{22} + 4v_{23}) + \delta \left[ \frac{1}{9} (5u_{22} + 4u_{23}) + \frac{11}{18} (v_{23} - v_{22}) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (7,2)$$

Leitet man  $\Delta J_L$  nach  $u_{22}$  ab und addiert die Normalanteile aus SW, NW, NO, so ergibt sich folgender u-Operator im Punkt 22:

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2(1+\delta) & 4(1-\delta) & -2(1+\delta) \\ 4(1-\delta) & \frac{1335+1272\delta}{162} & \frac{-687+564\delta}{162} \\ -2(1+\delta) & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \gamma+2\delta & 0 & -(\gamma+2\delta) \\ 0 & \frac{-3}{162}(\gamma+2\delta) & \frac{6}{162}(5\gamma+\delta) \\ -(\gamma+2\delta) & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

(7,3)

Es ergeben sich 18 u- und 18 v-Operatoren, deren Ableitung und Programmierung zwar einfach, aber langwierig ist. Das Netz umfasst 100 Kolonnen mit total 650 Gitterpunkten; das Gleichungssystem hat somit 1300 Unbekannte. Als Blockdiagramm kann man das Schema 1 verwenden. Die einzigen Änderungen betreffen die Geometrie des Damms (Anzahl Kolonnen (K), Anzahl Punkte pro Kolonne I (K)), sowie die Operatorziffern.

## 8. Kapitel: Berechnung und Messung.

Nur wenige Messdispositive können am Anfang einer Dammschüttung eingebaut werden. Die meisten werden erst im Verlauf des Aufbaus bei der jeweiligen Schütthöhe versetzt. Daraus ergibt sich, dass hauptsächlich Relativwerte zwischen zwei bestimmten Phasen gemessen werden. Um mit den Messungen vergleichbare Resultate zu erhalten, müssen auch die Berechnungen für verschiedene Bau- und Stauhöhen durchgeführt werden. Für den Goeschenenalpdamms wurden folgende 4 Zustände gerechnet:

Schütthöhe  $H = 60/80/120\text{m}$  (in der Dammitte ab Felskote gerechnet)

Stauhöhe  $H = 120\text{m}$

Die Resultate sind als Verschiebungsvektoren in Fig.47 eingetragen - unter Annahme folgender Materialwerte:

Feuchtraumgewicht  $\gamma_e^* = 2,35 \text{ t/m}^3$ ;  $E = 600 \text{ kg/cm}^2$ ;

gesättigt unter Wasser  $\gamma_e'' = 1,35 \text{ t/m}^3$ ;  $\mu = 0,3$

Die den Berechnungen am besten entsprechenden Messhöhen sind:

Schütthöhe  $H = 65/83/120\text{m}$

Stauhöhe  $H = 115\text{m}$

Die in dieser Arbeit interessierenden Messvorrichtungen umfassen Spannungsgeber, Setzungspegel und Oberflächenfixpunkte. Die Lage der ersteren geht aus Fig.48, diejenige der Fixpunkte aus der Situation (Fig.45) hervor. Wir reproduzieren hier nur die Resultate der Messpunkte in der Nähe des Rechenprofils, wobei, sofern sich mehrere Geber in der Nähe befinden, nur die Mittelwerte angegeben sind.

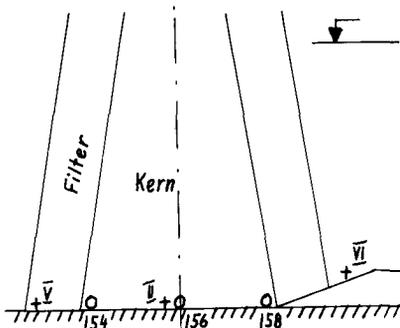
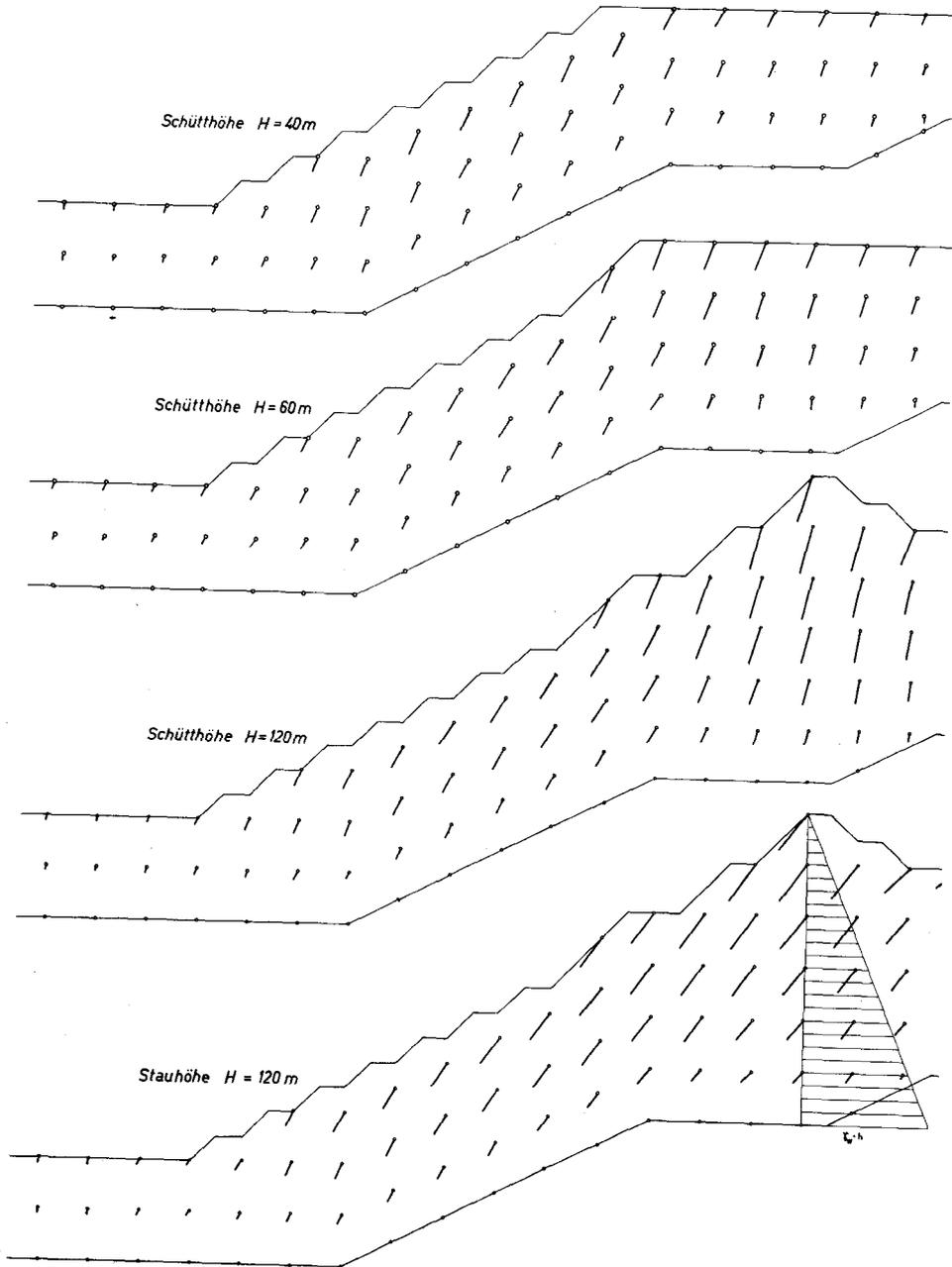


Fig.48

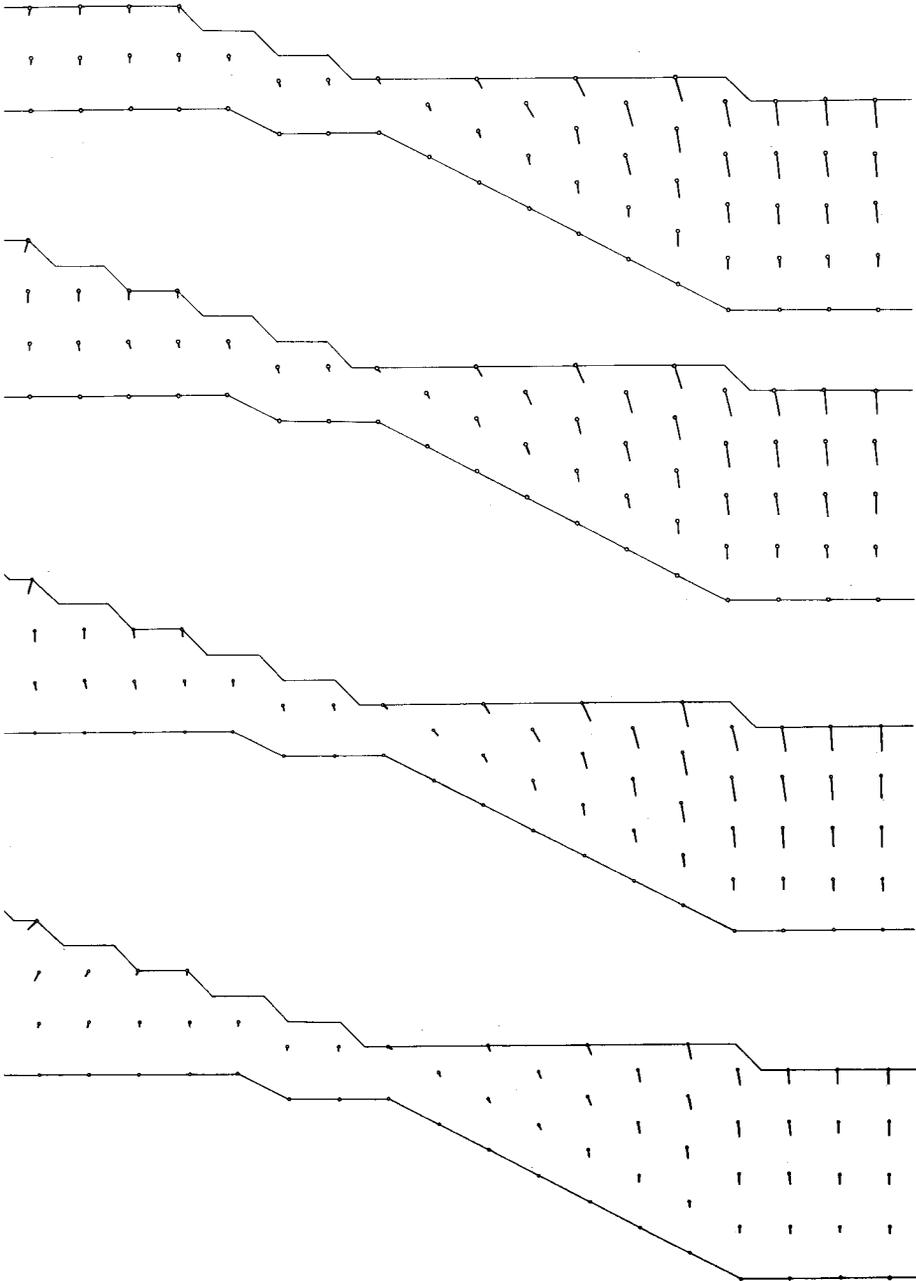
Messdispositive  
o Spannungsgeber  
+ Setzungspegel

Beginnen wir mit den Spannungsmessungen. Die 3 Druckdosen liegen auf dem Fels in Dammitte innerhalb des Kerns und zeigen den totalen

Goeschenealp  
Verschiebungsvektoren  
 $E = 600 \text{ kg/cm}^2$      $\mu = 0,3$



Figur 47



Ueberlagerungsdruck an. In Tabelle III sind die Resultate zusammengestellt.

Tabelle III  
Spannungsmessungen/Spannungsberechnungen

Werte in kg/cm<sup>2</sup>      $\frac{M}{R} = \frac{\text{Messung}}{\text{Rechnung}}$  in %

Geber	Schütthöhe H = 60 m				Schütthöhe H = 80 m			
	$\gamma_e^* \cdot h_g$	Rechn.	Messung	$\frac{M}{R}$	$\gamma_e^* \cdot h_g$	Rechn.	Messung	$\frac{M}{R}$
154	9,9	9,9	7,5	76	14,5	14,3	12	84
156	10,5	10,0	7,5	75	15,2	14,5	12,5	86
158	9,4	9,8	12	122	14,1	14,2	17	120
	Schütthöhe H = 120 m				Stauhöhe H = 115 m			
	$\gamma_e^* \cdot h_g$	Rechn.	Messung	$\frac{M}{R}$	$\gamma_e^* \cdot h_g$	Rechn.	Messung	$\frac{M}{R}$
154	24,0	19,2	15,0	78	24,0	17,7	17,2	97
156	24,7	19,4	17,0	87,5	24,7	18,0	18,7	104
158	23,5	18,9	21,0	111	23,5	17,2	17,2	100

Die Uebereinstimmung der Absolutwerte zwischen Messung und Rechnung ist befriedigend. Beachtenswert ist die Konstanz der  $\frac{M}{R}$ -Werte während der Bauphase, interessant auch der Vergleich mit dem Ueberlagerungsgewicht ( $\gamma_e^* \cdot h_g$ ). In den unteren Bauabschnitten, d.h. solange die Ueberlagerung über den Druckdosen horizontal ist, entsprechen Messung und Rechnung dem  $\gamma_e^* \cdot h_g$ -Wert. Ist der Damm aufgeböscht, so haben wir schon im Testbeispiel (Fig.4) eine Entlastung der Vertikalspannungen in der Dammitte festgestellt, die jetzt durch die Messungen sehr schön bestätigt wird. Der Vergleich der Resultate bei Wasserdruck ist etwas erschwert, weil die Geber im Kern gelagert sind, der in der Rechnung nur als Membran berücksichtigt ist. Wir haben die Zahlen ausgewertet unter der Annahme, dass sich diese Geber auf der Luftseite befinden ( $\gamma_e^* = 2,35 \text{ t/m}^3$ ).

Die Setzungspegel wurden wie folgt verlegt: Jeweils nach Einbau einer im Durchschnitt 9 m dicken Schicht wurde ein neues Messkreuz

eingesetzt. Dadurch konnten die Setzungen jeder einzelnen Schicht verfolgt werden. Zur Auswertung der Messwerte wurde angenommen, dass sich jede Schicht isoliert wie ein eindimensionaler elastischer Körper verformt. Daraus folgt:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = \epsilon_1 \quad (7,4)$$

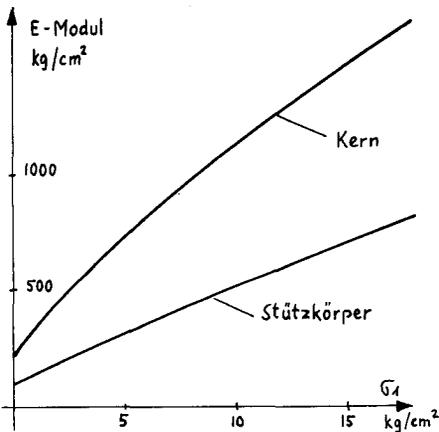
$S_0$  = ursprüngliche Schichtdicke.

$V_0$  = ursprüngliches Volumen.

Der E-Modul berechnet sich folgendermassen:

$$E = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} \quad (7,5)$$

Die Auswertung der Messungen ergibt eine Schar ähnlicher  $\sigma_1/E$ -Kurven. In Fig.49 haben wir eine mittlere Kurve für das Stützkörper- und das Kernmaterial aufgezeichnet. Das Verhältnis E Stützkörper : E Kern



ist ungefähr 1 : (2-2,5). Aus diesem Diagramm muss ein mittlerer E-Modul bestimmt werden, um die Oberflächenverschiebungen zu interpretieren. Wir sind dabei so vorgegangen, dass wir den Damm in Zonen gleicher Spannung einteilten, diese Zonen mit einem Gewicht in Funktion der Fläche versahen und so eine gemittelte Spannung berechneten, worauf aus Fig.49 der entsprechende E-Modul herausgelesen wurde.

Fig.49 E-Modul in Fkt. der Vertikalspannung.

In Tabelle IV und in Fig.50 sind die Mess- und Rechenwerte der Oberflächen deformationen verglichen.

Tabelle IV

Deformationsmessungen am Goeschenenalpdam. Index bedeuten:

L = Luftseite    W = Wasserseite    M = Messung    R = Rechnung

1. Deformationen während des Baues. (Werte in mm).

Phase 1 (Kräfte $\gamma_e^*$ )		Rechenhöhe 1: 60 m		Rechenhöhe 2: 80 m			
E-Modul = 400 kg/cm <sup>2</sup>		Messhöhe 1: 65 m		Messhöhe 2: 83 m			
Messpunkt	Kote	$\Delta u_M$	$\Delta u_R$	$\frac{\Delta u_M}{\Delta u_R}$	$\Delta v_M$	$\Delta v_R$	$\frac{\Delta v_M}{\Delta v_R}$
12 <sub>L</sub>	1660	0	-15	-	0	0	-
13 <sub>L</sub>	1685	-32	-81	40	19	15	127
14/20 <sub>L</sub>	1710	-92	-132	70	79	36	219
15/21 <sub>L</sub>	1735	-120	-145	83	226	105	215
Phase 2 (Kräfte $\gamma_e^*$ )		Rechenhöhe 1: 80 m		Rechenhöhe 2: 120 m			
E-Modul = 500 kg/cm <sup>2</sup>		Messhöhe 1: 83 m		Messhöhe 2: 120 m			
Messpunkt	Kote	$\Delta u_M$	$\Delta u_R$	$\frac{\Delta u_M}{\Delta u_R}$	$\Delta v_M$	$\Delta v_R$	$\frac{\Delta v_M}{\Delta v_R}$
12 <sub>L</sub>	1660	0	-12	-	0	4	-
13 <sub>L</sub>	1685	-25	-43	58	10	10	100
14/20 <sub>L</sub>	1710	-98	-92	106	58	29	200
15/21 <sub>L</sub>	1735	-183	-187	98	148	69	215
16/22 <sub>L</sub>	1755	-172	-170	101	235	106	222
19/26 <sub>W</sub>	1710	+10	+3	-	18	0	-
20/27 <sub>W</sub>	1720	+33	+8	-	30	3	-
21/28 <sub>W</sub>	1740	+18	+29	-	18	0	-
22/29 <sub>W</sub>	1750	+3	+3	-	85	33	-

Die Verschiebungen sind auf der Wasserseite bedeutend kleiner als auf der Luftseite. Aus diesem Grunde haben wir darauf verzichtet, die Quotienten  $\frac{M}{R}$  zu berechnen. Als hervorstechendstes Ergebnis be-

merkt man die Konstanz dieser Quotienten auf der Luftseite sowohl innerhalb einer Phase als auch von Phase zu Phase. Die Absolutwerte der Horizontalverschiebungen stimmen allgemein sehr gut überein. Für die Vertikalverschiebungen ist das Verhältnis  $\frac{M}{R} \sim 200\%$ . Dies deutet vermutlich darauf hin, dass die Annahme eines konstanten E-Moduls für die Vertikalverschiebungen eine schlechtere Näherung darstellt als für die Horizontalverschiebungen.

## 2. Deformationen während des ersten Stauzyklus.

Stauphase (1. September 1961 - 15. Februar 1962)							
Staukote 1750 - 1790 E-Modul = 900 kg/cm <sup>2</sup>							
Messpunkt	Kote	$\Delta u_M$	$\Delta u_R$	$\frac{\Delta u_M}{\Delta u_R}$	$\Delta v_M$	$\Delta v_R$	$\frac{\Delta v_M}{\Delta v_R}$
14 <sub>L</sub>	1710	-72	-55	130	27	17	-
16 <sub>L</sub>	1755	-263	-245	107	133	13	-
SPV <sub>L</sub>	1780	-370	-398	93	130	40	-
18 <sub>L</sub>	1797	-103	-433	24	290	59	-
Absenkphase (15. Februar - 6. Mai 1962)							
Staukote 1790 - 1715 E-Modul = 5000 kg/cm <sup>2</sup>							
Messpunkt	Kote	$\Delta u_M$	$\Delta u_R$	$\frac{\Delta u_M}{\Delta u_R}$	$\Delta v_M$	$\Delta v_R$	$\frac{\Delta v_M}{\Delta v_R}$
14 <sub>L</sub>	1710	+12	+10	120	0	-3	-
16 <sub>L</sub>	1755	+34	+44	78	+10	-2	-
SPV <sub>L</sub>	1780	+80	+72	111	+55	-8	-
18 <sub>L</sub>	1797	+75	+78	104	+138	-11	-

Die Horizontalverschiebungen stimmen mit der Berechnung sehr gut überein. Eine Ausnahme bildet die Verschiebung des Kronenpunktes (18<sub>L</sub>) anlässlich des Aufstaus. Sie ist beträchtlich kleiner als auf Grund der Berechnung und der übrigen Messpunkte (z.B. SP V) zu erwarten ist. Dieses Verhalten spricht für unsere Hypothese (Kapitel 3e), wonach den Kern entlang eine Fuge entstehen muss, weil das was-

serseitige Material keine Zugspannungen aufzunehmen vermag. Einige (für die Stabilität des Dammes unbedeutende) Längsrisse den Kern entlang scheinen ebenfalls auf diesen Vorgang hinzuweisen. Auffällig ist auch die grosse Vertikalverschiebung dieses Punktes, vermutlich weil das Material die entstehenden Hohlräume durch Setzungen auffüllt.

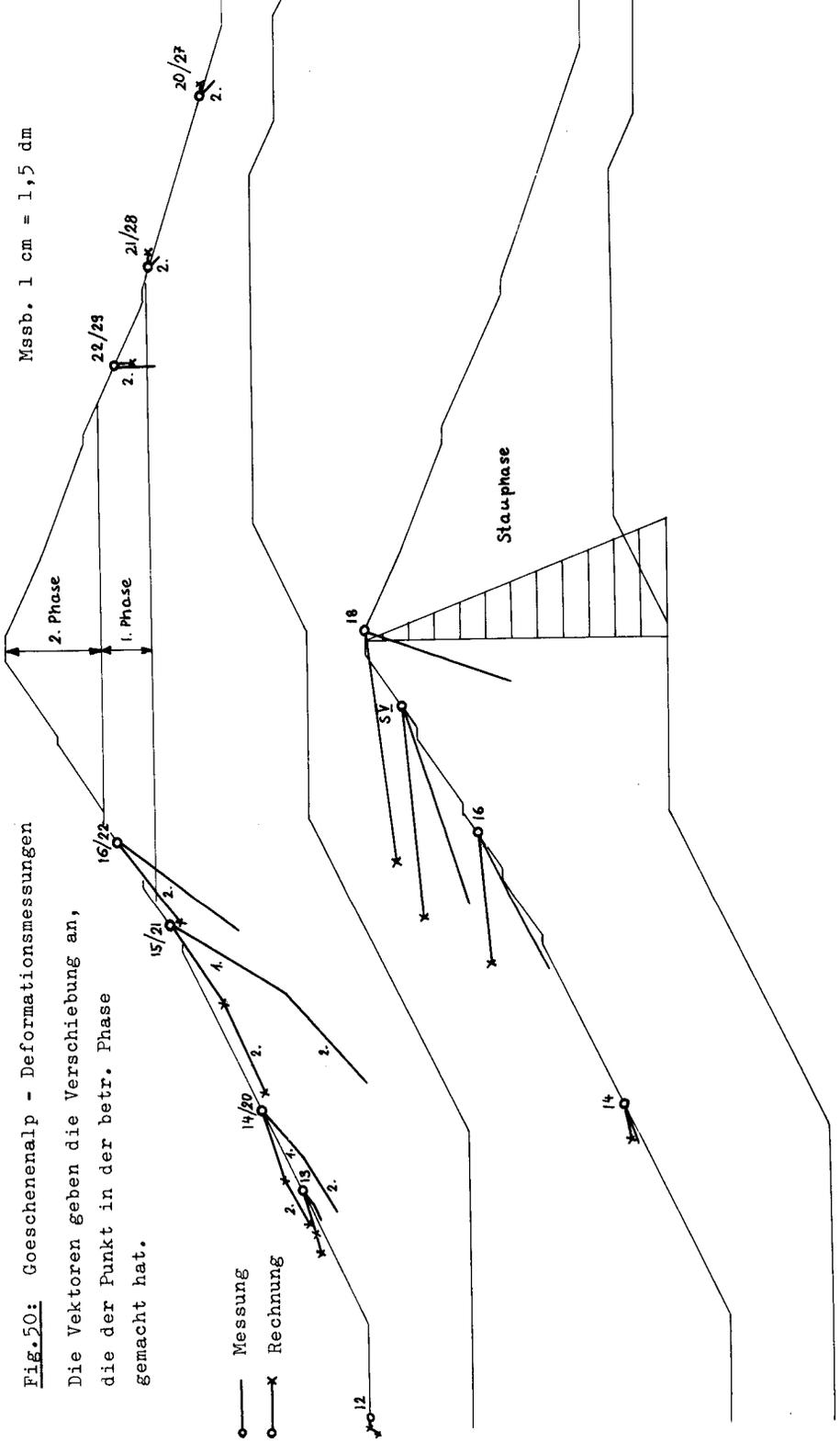
Das Verhältnis  $\frac{E_{\text{Stau}}}{E_{\text{Absenk.}}}$  ist =  $\frac{5000}{900} \sim 5,5$ . Dies entspricht einem Mittelwert, wie er aus zahlreichen Plattenversuchen und Oedometerkurven bekannt ist.

Die gemessenen Vertikalverschiebungen sind allgemein viel grösser als die gerechneten. Dies dürfte vermutlich eine Folge der noch andauernden Konsolidation des Dammes sein. Vermehrten Aufschluss darüber werden die Messungen der folgenden Stauzyklen liefern.

Fig. 50: Goeschenealp - Deformationsmessungen

Die Vektoren geben die Verschiebung an, die der Punkt in der betr. Phase gemacht hat.

Mssb. 1 cm = 1,5 dm



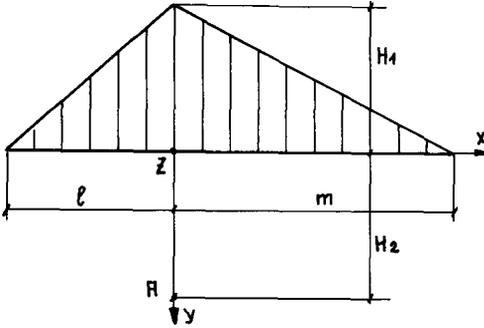
## V Schlussbemerkungen

Das Ziel dieser Arbeit war aufzuzeigen, dass mit dem Einsatz von elektronischen Rechenmaschinen Erddämme auf neue Art untersucht werden können. Theorie und Aufwand mögen vielleicht für ein erdbaumechanisches Problem überdimensioniert erscheinen. Dem kann jedoch entgegnet werden, dass der Anstoss zu dieser Arbeit aus einem rein praktischen Bedürfnis heraus erfolgte, und dass die Resultate der Berechnung die Beurteilung der Verhältnisse in einem Grossdamm in hohem Masse beeinflussten. Gestützt auf die für bodenmechanische Verhältnisse sehr zufriedenstellende Uebereinstimmung von Theorie und Wirklichkeit, kann diese Methode als sehr nützlich bezeichnet werden. Falls sie zur Dimensionierung von Dämmen weitere Verwendung oder eine Weiterentwicklung erfahren sollte, sieht der Autor die Behandlung folgender Fragen als vordringlich:

- Randbedingungen und Randformen müssen mit genauern numerischen Approximationen erfasst werden, z.B. durch Vermehrung der Gitterpunkte oder durch eine maschinelle Programmierung von exakten Operatoren.
- Nebst den Bruchcharakteristika  $c$  und  $\varphi$  müssen die elastischen Werte  $E$  und  $\mu$  im Labor bestimmt werden. Die Ueberprüfung der Formel (3,12) ist in diesem Zusammenhang von allergrösstem Interesse.
- Die Annahme eines konstanten E-Moduls und eines rein elastischen Verformungsgesetzes ist unzutreffend aber sehr nützlich, um den gesamten Damm als monolithischen Körper zu berechnen. Wünscht man eine grössere Genauigkeit, so ist eine sukzessive Berechnung nach Belastungsphasen zu empfehlen, wobei in jeder Phase der Spannungszustand in Abhängigkeit der materialtechnischen Werte schrittweise approximiert wird. Bei diesem Vorgehen erhält man auch Grundlagen, um während des Baues Spannungen und Verschiebungen im Damm zu kontrollieren.

## Anhang A

Ableitung der Formel (4,24).



Der Spannungszustand eines elastischen Halbraumes unter einer dreieckförmigen Auflast ist durch folgende Airy-Funktion gegeben (Bishop):

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{\delta e H_1}{6\pi m} \left\{ -y^3 \left[ -\frac{m+l}{l} \cdot \text{Log}(x^2+y^2) + \frac{m}{l} \cdot \text{Log}(x+l^2+y^2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{m+l}{l} [x^3+3xy^2] \cdot \text{Arctg} \frac{x}{y} + \frac{m}{l} \left[ \frac{x+l^3+3y^2 \cdot x+l}{x+l^2+y^2} \right] \cdot \text{Arctg} \frac{x+l}{y} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{x-m^3+3y^2 \cdot x-m}{x-m^2+y^2} \right] \cdot \text{Arctg} \frac{x-m}{y} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A,1})$$

Log = Logarithmus naturalis      Arctg = Hauptwert des arctg.

Diese Funktion  $\Psi$  kann für die Rechnung übersichtlicher dargestellt werden durch Einführung der Hilfsfunktion  $\psi'$ :

$$\psi' = \frac{\delta e H_1}{6\pi m} \left[ -y^3 \text{Log}(x^2+y^2) + (x^3+3xy^2) \cdot \text{Arctg} \frac{x}{y} \right] \quad (\text{A,2})$$

mit folgendem Zusammenhang zwischen  $\Psi$  und  $\psi'$ :

$$\Psi = \psi' \frac{1}{x-m} - \frac{m}{l} \psi' \frac{1}{x+l} - \frac{m+l}{l} \psi' x \quad (\text{A,3})$$

Die Verschiebungen der Hilfsfunktion können wie folgt berechnet werden:

$$\frac{E u'}{1+\mu} = \int (1-\mu) \frac{\delta^2 \Psi'}{\delta y^2} dx - \int \mu \frac{\delta^2 \Psi'}{\delta x^2} dx = \frac{\delta e H_1}{\pi m} \left\{ -(1-\mu)xy \cdot \text{Log}(x^2+y^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(1-2\mu)x^2 - (3-2\mu)y^2] \cdot \text{Arctg} \frac{x}{y} - \frac{1}{6} xy (1-3\mu) \right\} + C_u$$

$$\frac{E v'}{1+\mu} = \int (1-\mu) \frac{\delta^2 \Psi'}{\delta x^2} dy - \int \mu \frac{\delta^2 \Psi'}{\delta y^2} dx = -\frac{\delta e H_1}{\pi m} \left\{ (1-2\mu)xy \cdot \text{Arctg} \frac{x}{y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [(1-\mu)x^2 + \mu y^2] \cdot \text{Log}(x^2+y^2) - \frac{\mu}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^2 \right\} + C_v \quad (\text{A,4})$$

Durch Einsetzen von (A,4) in (A,3) erhält man die effektiven Verschiebungen. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten wählen wir den Punkt A unter der Dammitte in der Tiefe  $H_2$  als Fixpunkt. Man erhält:

$$C_u = 0$$

$$C_v = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E} \cdot \frac{\delta e H_1 H_2}{\pi} (\text{Arctg} \frac{\ell}{H_2} + \text{Arctg} \frac{m}{H_2}) + \frac{(1+\mu)}{E} \cdot \frac{\delta e H_1}{2\pi m} \cdot \quad (\text{A,5}) \\ \left\{ \mu H_2^2 \cdot \left( \text{Log} \frac{m^2+H_2^2}{H_2^2} + \frac{m}{\ell} \cdot \text{Log} \frac{\ell^2+H_2^2}{H_2^2} \right) + (1-\mu)m^2 \left[ \text{Log}(m^2+H_2^2) + \frac{\ell}{m} \cdot \text{Log}(\ell^2+H_2^2) \right] \right\}$$

In diesem Zusammenhang interessieren nur die Verschiebungen am oberen Rand der Schicht.

$$u_{y=0} = \pm \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{2E} \cdot \frac{\delta e H_1 (\ell+m)}{2} \pm \begin{matrix} x < 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
v_{y=0} &= \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E} \cdot \frac{\gamma_e H_1 H_2}{\pi} \left( \operatorname{Arctg} \frac{\ell}{H_2} + \operatorname{Arctg} \frac{m}{H_2} \right) + \\
&+ \frac{(1+\mu)}{E} \cdot \frac{\gamma_e H_1 H_2}{2\pi} \left\{ \frac{\mu H_2}{m} \left( \operatorname{Log} \frac{m^2 + H_2^2}{H_2^2} + \frac{m}{\ell} \cdot \operatorname{Log} \frac{\ell^2 + H_2^2}{H_2^2} \right) + \right. \\
&+ (1-\mu) \left[ \frac{m}{H_2} \cdot \operatorname{Log} (m^2 + H_2^2) - \frac{\overline{x-m^2}}{m H_2} \cdot \operatorname{Log} \overline{x-m^2} + \frac{\ell}{H_2} \cdot \operatorname{Log} (\ell^2 + H_2^2) - \right. \\
&\left. \left. - \frac{\overline{x+\ell^2}}{\ell H_2} \cdot \operatorname{Log} \overline{x+\ell^2} + \frac{(m+\ell)}{\ell m} \cdot \frac{x^2}{H_2} \cdot \operatorname{Log} x^2 \right] \right\} \quad (A,6)
\end{aligned}$$

Für  $x=0$  erhält man die Setzung der Dammitte

$$\begin{aligned}
v_z &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{\gamma_e H_1 H_2}{\pi} \left[ (1-2\mu) \left( \operatorname{Arctg} \frac{m}{H_2} + \operatorname{Arctg} \frac{\ell}{H_2} \right) + \frac{\mu H_2}{2m\ell} \left( \ell \operatorname{Log} \frac{m^2 + H_2^2}{H_2^2} + \right. \right. \\
&\left. \left. + m \cdot \operatorname{Log} \frac{\ell^2 + H_2^2}{H_2^2} \right) + \frac{(1-\mu)}{2H_2} \left( m \cdot \operatorname{Log} \frac{m^2 + H_2^2}{m^2} + \ell \cdot \operatorname{Log} \frac{\ell^2 + H_2^2}{\ell^2} \right) \right] \quad (A,7)
\end{aligned}$$

## Anhang B

### Programmierung der Einflusslinien.

Wir beschreiben die Berechnung der Einflusslinie der  $\sigma_y$ -Spannung unter vertikaler Last (4,12). Der schematische Ablauf bleibt für die andern Spannungen resp. die Verschiebungen derselbe. Es empfiehlt sich, für eine bestimmte Parameterkonstellation sämtliche Spannungen miteinander zu berechnen. Die ganze Rechnung zerfällt in 3 aufeinanderfolgende Zyklen (Schema 2). Im ersten Zyklus wird im Bereich  $0 < z < 5$  in (z.B.) 256 Punkten der Integrand berechnet, soweit er von  $\xi$  und  $\eta$  unabhängig ist.

$$f(z) = \frac{1}{\Delta \cdot z} [2(1-\mu) \cdot M \cos \Phi z - (1-2\mu)N \cdot \sin \Phi z - M \Phi z \cdot \sin \Phi z - N \Phi z \cdot \cos \Phi z] \quad (B,1)$$

Im zweiten Zyklus wird das Integral im Bereich (0-5) nach der Simpson'schen Regel in einem Rekursionsverfahren bis zur Genauigkeit  $\epsilon$  approximiert. Der Ausgangswert lautet:

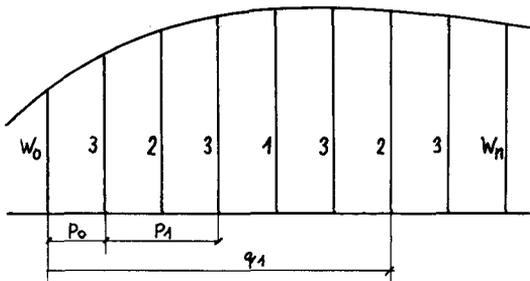
$$J_0 = \frac{5}{3} (w_0 + w_n) \quad (B,2)$$

In jedem Schritt wird die Summe der Zwischenwerte (s.Figur) gebildet:

$$j_k = q_0 \cdot \sum w_i \quad i = p_0 [p_1] q_1 \quad (B,3)$$

$i = p_0(p_1)q_1$  bedeutet:  $i$  muss alle Werte von  $p_0$  bis  $q_1$  in Schritten von  $p_1$  durchlaufen.  $q_0$  = Faktor. Das verbesserte Integral lautet dann:

$$J_{k+1} = \frac{J_k}{2} - j_{k-1} + 4j_k \quad (B,4)$$



1: Erster Schritt  
2: Zweiter Schritt  
.....

Im dritten Zyklus wird der Rest des Integrals (4,15) nach Vereinfachung des Integranden im Bereich ( $5 < z < \infty$ ) gemäss einem Algorithmus von Wynn berechnet. Gegeben ist die semikonvergente Reihe

$$S = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \dots \quad (B,5)$$

Man bildet zuerst die Teilsummen

$$t_0^0 = s_0 \quad t_0^1 = s_0 + s_1 \quad t_0^2 = s_0 + s_1 + s_2 \quad (B,6)$$

Die weiteren Glieder des Schemas werden wie folgt berechnet:

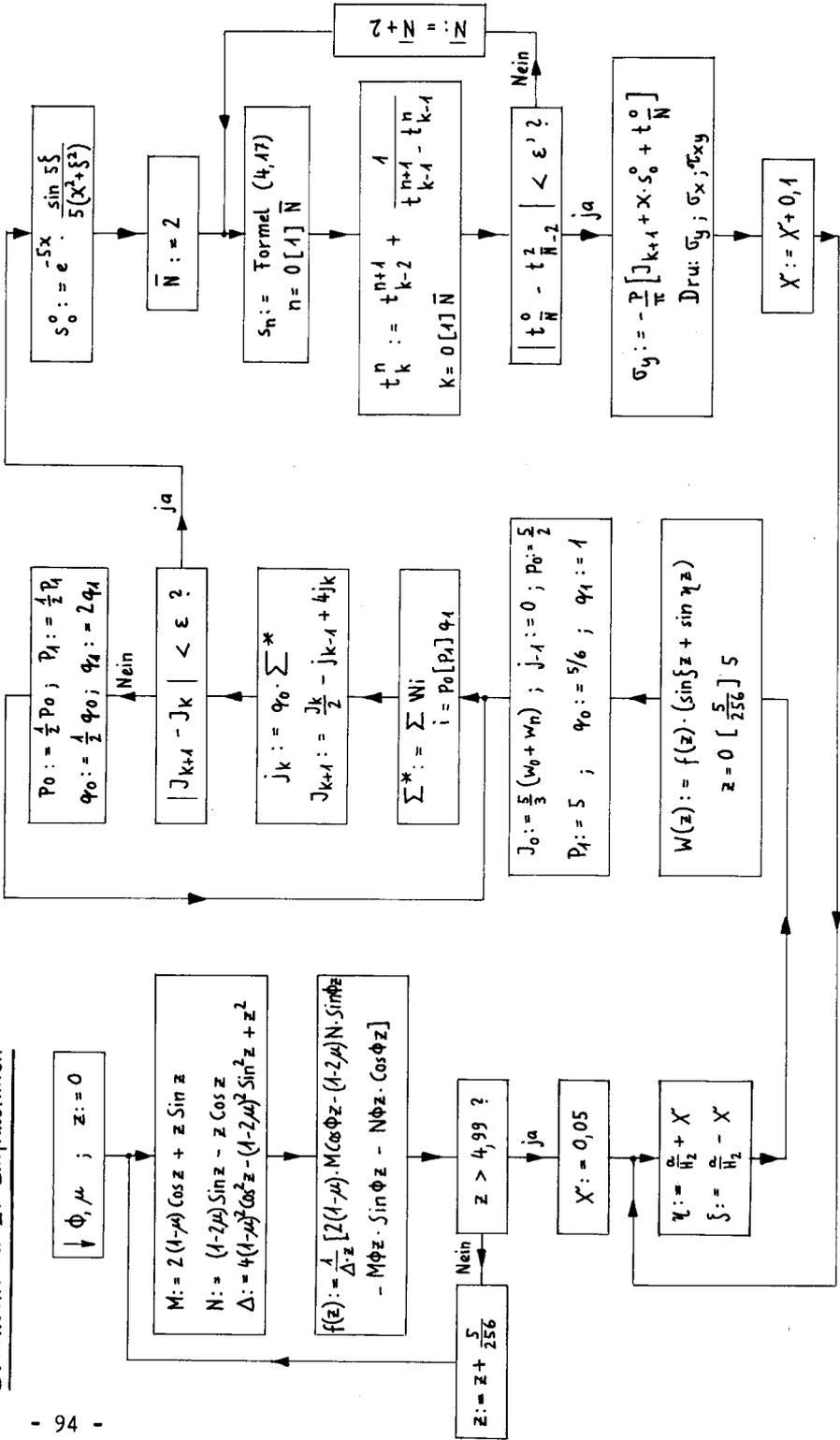
$$t_1^n = 0 + \frac{1}{t_0^{n+1} - t_0^n} \quad t_k^n = t_{k-2}^{n+1} + \frac{1}{t_{k-1}^{n+1} - t_{k-1}^n} \quad (B,7)$$

Das Schema sieht so aus:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_0^0 & & & & & & \\
 & t_1^0 & & & & & \\
 t_0^1 & & t_2^0 & & & & \\
 & t_1^1 & & t_3^0 & & & \\
 t_0^2 & & t_2^1 & & t_4^0 & & \\
 & t_1^2 & & t_3^1 & & & \\
 t_0^3 & & t_2^2 & & & & \\
 & t_1^3 & & & & & \\
 t_0^4 & & & & & & \\
 \underline{t_0^4} & & & & & & 
 \end{array} \quad (B,8)$$

Dann konvergiert die Folge  $t_0^4, t_2^2, t_4^0$  gegen den Wert der Reihe S.

# Blockschema 2: Einflusslinien









Beilage 4



$E_1 = 1000 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_2 = 5000 \text{ kg/cm}^2$   
 $H_1 = 100 \text{ m}$   
 $H_2 = 100 \text{ m}$   
 $\mu = 0.3$   
 $W = 0$

14	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124	134	144	154	164	174	184	194	204	214	224	234	244	254	264	274	284	294	304	314	324	334	344	354	364	374	384	394	404	414	424	434	444	454	464	474	484	494	504	514	524	534	544	554	564	574	584	594	604	614	624	634	644	654	664	674	684	694	704	714	724	734	744	754	764	774	784	794	804	814	824	834	844	854	864	874	884	894	904	914	924	934	944	954	964	974	984	994	1004	1014	1024	1034	1044	1054	1064	1074	1084	1094	1104	1114	1124	1134	1144	1154	1164	1174	1184	1194	1204	1214	1224	1234	1244	1254	1264	1274	1284	1294	1304	1314	1324	1334	1344	1354	1364	1374	1384	1394	1404	1414	1424	1434	1444	1454	1464	1474	1484	1494	1504	1514	1524	1534	1544	1554	1564	1574	1584	1594	1604	1614	1624	1634	1644	1654	1664	1674	1684	1694	1704	1714	1724	1734	1744	1754	1764	1774	1784	1794	1804	1814	1824	1834	1844	1854	1864	1874	1884	1894	1904	1914	1924	1934	1944	1954	1964	1974	1984	1994	2004	2014	2024	2034	2044	2054	2064	2074	2084	2094	2104	2114	2124	2134	2144	2154	2164	2174	2184	2194	2204	2214	2224	2234	2244	2254	2264	2274	2284	2294	2304	2314	2324	2334	2344	2354	2364	2374	2384	2394	2404	2414	2424	2434	2444	2454	2464	2474	2484	2494	2504	2514	2524	2534	2544	2554	2564	2574	2584	2594	2604	2614	2624	2634	2644	2654	2664	2674	2684	2694	2704	2714	2724	2734	2744	2754	2764	2774	2784	2794	2804	2814	2824	2834	2844	2854	2864	2874	2884	2894	2904	2914	2924	2934	2944	2954	2964	2974	2984	2994	3004	3014	3024	3034	3044	3054	3064	3074	3084	3094	3104	3114	3124	3134	3144	3154	3164	3174	3184	3194	3204	3214	3224	3234	3244	3254	3264	3274	3284	3294	3304	3314	3324	3334	3344	3354	3364	3374	3384	3394	3404	3414	3424	3434	3444	3454	3464	3474	3484	3494	3504	3514	3524	3534	3544	3554	3564	3574	3584	3594	3604	3614	3624	3634	3644	3654	3664	3674	3684	3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784	3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3874	3884	3894	3904	3914	3924	3934	3944	3954	3964	3974	3984	3994	4004	4014	4024	4034	4044	4054	4064	4074	4084	4094	4104	4114	4124	4134	4144	4154	4164	4174	4184	4194	4204	4214	4224	4234	4244	4254	4264	4274	4284	4294	4304	4314	4324	4334	4344	4354	4364	4374	4384	4394	4404	4414	4424	4434	4444	4454	4464	4474	4484	4494	4504	4514	4524	4534	4544	4554	4564	4574	4584	4594	4604	4614	4624	4634	4644	4654	4664	4674	4684	4694	4704	4714	4724	4734	4744	4754	4764	4774	4784	4794	4804	4814	4824	4834	4844	4854	4864	4874	4884	4894	4904	4914	4924	4934	4944	4954	4964	4974	4984	4994	5004	5014	5024	5034	5044	5054	5064	5074	5084	5094	5104	5114	5124	5134	5144	5154	5164	5174	5184	5194	5204	5214	5224	5234	5244	5254	5264	5274	5284	5294	5304	5314	5324	5334	5344	5354	5364	5374	5384	5394	5404	5414	5424	5434	5444	5454	5464	5474	5484	5494	5504	5514	5524	5534	5544	5554	5564	5574	5584	5594	5604	5614	5624	5634	5644	5654	5664	5674	5684	5694	5704	5714	5724	5734	5744	5754	5764	5774	5784	5794	5804	5814	5824	5834	5844	5854	5864	5874	5884	5894	5904	5914	5924	5934	5944	5954	5964	5974	5984	5994	6004	6014	6024	6034	6044	6054	6064	6074	6084	6094	6104	6114	6124	6134	6144	6154	6164	6174	6184	6194	6204	6214	6224	6234	6244	6254	6264	6274	6284	6294	6304	6314	6324	6334	6344	6354	6364	6374	6384	6394	6404	6414	6424	6434	6444	6454	6464	6474	6484	6494	6504	6514	6524	6534	6544	6554	6564	6574	6584	6594	6604	6614	6624	6634	6644	6654	6664	6674	6684	6694	6704	6714	6724	6734	6744	6754	6764	6774	6784	6794	6804	6814	6824	6834	6844	6854	6864	6874	6884	6894	6904	6914	6924	6934	6944	6954	6964	6974	6984	6994	7004	7014	7024	7034	7044	7054	7064	7074	7084	7094	7104	7114	7124	7134	7144	7154	7164	7174	7184	7194	7204	7214	7224	7234	7244	7254	7264	7274	7284	7294	7304	7314	7324	7334	7344	7354	7364	7374	7384	7394	7404	7414	7424	7434	7444	7454	7464	7474	7484	7494	7504	7514	7524	7534	7544	7554	7564	7574	7584	7594	7604	7614	7624	7634	7644	7654	7664	7674	7684	7694	7704	7714	7724	7734	7744	7754	7764	7774	7784	7794	7804	7814	7824	7834	7844	7854	7864	7874	7884	7894	7904	7914	7924	7934	7944	7954	7964	7974	7984	7994	8004	8014	8024	8034	8044	8054	8064	8074	8084	8094	8104	8114	8124	8134	8144	8154	8164	8174	8184	8194	8204	8214	8224	8234	8244	8254	8264	8274	8284	8294	8304	8314	8324	8334	8344	8354	8364	8374	8384	8394	8404	8414	8424	8434	8444	8454	8464	8474	8484	8494	8504	8514	8524	8534	8544	8554	8564	8574	8584	8594	8604	8614	8624	8634	8644	8654	8664	8674	8684	8694	8704	8714	8724	8734	8744	8754	8764	8774	8784	8794	8804	8814	8824	8834	8844	8854	8864	8874	8884	8894	8904	8914	8924	8934	8944	8954	8964	8974	8984	8994	9004	9014	9024	9034	9044	9054	9064	9074	9084	9094	9104	9114	9124	9134	9144	9154	9164	9174	9184	9194	9204	9214	9224	9234	9244	9254	9264	9274	9284	9294	9304	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9374	9384	9394	9404	9414	9424	9434	9444	9454	9464	9474	9484	9494	9504	9514	9524	9534	9544	9554	9564	9574	9584	9594	9604	9614	9624	9634	9644	9654	9664	9674	9684	9694	9704	9714	9724	9734	9744	9754	9764	9774	9784	9794	9804	9814	9824	9834	9844	9854	9864	9874	9884	9894	9904	9914	9924	9934	9944	9954	9964	9974	9984	9994	10004	10014	10024	10034	10044	10054	10064	10074	10084	10094	10104	10114	10124	10134	10144	10154	10164	10174	10184	10194	10204	10214	10224	10234	10244	10254	10264	10274	10284	10294	10304	10314	10324	10334	10344	10354	10364	10374	10384	10394	10404	10414	10424	10434	10444	10454	10464	10474	10484	10494	10504	10514	10524	10534	10544	10554	10564	10574	10584	10594	10604	10614	10624	10634	10644	10654	10664	10674	10684	10694	10704	10714	10724	10734	10744	10754	10764	10774	10784	10794	10804	10814	10824	10834	10844	10854	10864	10874	10884	10894	10904	10914	10924	10934	10944	10954	10964	10974	10984	10994	11004	11014	11024	11034	11044	11054	11064	11074	11084	11094	11104	11114	11124	11134	11144	11154	11164	11174	11184	11194	11204	11214	11224	11234	11244	11254	11264	11274	11284	11294	11304	11314	11324	11334	11344	11354	11364	11374	11384	11394	11404	11414	11424	11434	11444	11454	11464	11474	11484	11494	11504	11514	11524	11534	11544	11554	11564	11574	11584	11594	11604	11614	11624	11634	11644	11654	11664	11674	11684	11694	11704	11714	11724	11734	11744	11754	11764	11774	11784	11794	11804	11814	11824	11834	11844	11854	11864	11874	11884	11894	11904	11914	11924	11934	11944	11954	11964	11974	11984	11994	12004	12014	12024	12034	12044	12054	12064	12074	12084	12094	12104	12114	12124	12134	12144	12154	12164	12174	12184	12194	12204	12214	12224	12234	12244	12254	12264	12274	12284	12294	12304	12314	12324	12334	12344	12354	12364	12374	12384	12394	12404	12414	12424	12434	12444	12454	12464	12474	12484	12494	12504	12514	12524	12534	12544	12554	12564	12574	12584	12594	12604	12614	12624	12634	12644	12654	12664	12674	12684	12694	12704	12714	12724	12734	12744	12754	12764	12774	12784	12794	12804	12814	12824	12834	12844	12854	12864	12874	12884	12894	12904	12914	12924	12934	12944	12954	12964	12974	12984	12994	13004	13014	13024	13034	13044	13054	13064	13074	13084	13094	13104	13114	13124	13134	13144	13154	13164	13174	13184	13194	1
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	---



Boilage 6



$H_1 = 100 \text{ m}$   
 $H_2 = 100 \text{ m}$   
 $\Delta L = 0.3$   
 $W = \delta_w \cdot h$

$E_1 = 10000 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_2 = 1000 \text{ kg/cm}^2$

$E_1 = 10000 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_2 = 500 \text{ kg/cm}^2$

$H_1 = 100 \text{ m}$   
 $H_2 = 100 \text{ m}$   
 $\Delta L = 0.3$   
 $W = \delta_w \cdot h$

687	643	644	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Beilage 7

$\frac{u}{V} [mm]$   
 $\frac{V}{V} [mm]$

$H_1 = 100\text{ m}$   
 $H_2 = 40\text{ m}$   
 $\mu = 0.3$   
 $W = \gamma_w \cdot h$

22	45	81	120	153	181	230	257	317	373	385	414	428	468	483	513	475	452	481	484	470	471	388	4
148	115	138	188	204	219	274	291	349	407	423	454	470	500	516	547	509	484	513	516	510	504	414	10
231	173	211	247	264	274	330	347	405	463	479	510	526	556	572	603	565	540	569	572	564	474	16	
313	233	281	317	334	344	400	417	475	533	549	580	596	626	642	673	635	610	639	642	634	544	22	
395	293	351	387	404	414	470	487	545	603	619	650	666	696	712	743	705	680	709	712	704	614	28	
477	353	421	457	474	484	540	557	615	673	689	720	736	766	782	813	775	750	779	782	774	684	34	
559	415	493	529	546	556	612	629	687	745	761	792	808	838	854	885	847	822	851	854	846	756	40	
641	475	563	600	617	627	683	700	758	816	832	863	879	909	925	956	918	893	922	925	917	827	46	
723	535	633	670	687	697	753	770	828	886	902	933	949	979	995	1026	988	963	992	995	987	897	52	
805	597	705	742	759	769	825	842	900	958	974	1005	1021	1051	1067	1098	1060	1035	1064	1067	1059	969	58	
887	659	777	814	831	841	897	914	972	1030	1046	1077	1093	1123	1139	1170	1132	1107	1136	1139	1131	1041	64	
969	721	839	876	893	903	959	976	1034	1092	1108	1139	1155	1185	1201	1232	1194	1169	1198	1201	1193	1103	70	
1051	783	901	938	955	965	1021	1038	1096	1154	1170	1201	1217	1247	1263	1294	1256	1231	1260	1263	1255	1165	76	
1133	845	963	1000	1017	1027	1083	1100	1158	1216	1232	1263	1279	1309	1325	1356	1318	1293	1322	1325	1317	1227	82	
1215	907	1025	1062	1079	1089	1145	1162	1220	1278	1294	1325	1341	1371	1387	1418	1380	1355	1384	1387	1379	1287	88	
1297	969	1087	1124	1141	1151	1207	1224	1282	1340	1356	1387	1403	1433	1449	1480	1442	1417	1446	1449	1441	1341	94	
1379	1031	1149	1186	1203	1213	1269	1286	1344	1402	1418	1449	1465	1495	1511	1542	1504	1479	1508	1511	1503	1413	100	
1461	1093	1211	1248	1265	1275	1331	1348	1406	1464	1480	1511	1527	1557	1573	1604	1566	1541	1570	1573	1565	1465	106	
1543	1155	1273	1310	1327	1337	1393	1410	1468	1526	1542	1573	1589	1619	1635	1666	1628	1603	1632	1635	1627	1527	112	
1625	1217	1335	1372	1389	1399	1455	1472	1530	1588	1604	1635	1651	1681	1697	1728	1690	1665	1694	1697	1689	1589	118	
1707	1279	1397	1434	1451	1461	1517	1534	1592	1650	1666	1697	1713	1743	1759	1790	1752	1727	1756	1759	1751	1651	124	
1789	1341	1459	1496	1513	1523	1579	1596	1654	1712	1728	1759	1775	1805	1821	1852	1814	1789	1818	1821	1813	1713	130	
1871	1403	1521	1558	1575	1585	1641	1658	1716	1774	1790	1821	1837	1867	1883	1914	1876	1851	1880	1883	1875	1775	136	
1953	1465	1583	1620	1637	1647	1703	1720	1778	1836	1852	1883	1899	1929	1945	1976	1938	1913	1942	1945	1937	1837	142	
2035	1527	1645	1682	1699	1709	1765	1782	1840	1898	1914	1945	1961	1991	2007	2038	1999	1974	2003	2007	1999	1899	148	
2117	1589	1707	1744	1761	1771	1827	1844	1902	1960	1976	2007	2023	2053	2069	2100	2061	2036	2065	2069	2061	1961	154	
2199	1651	1769	1806	1823	1833	1889	1906	1964	2022	2038	2069	2085	2115	2131	2162	2123	2098	2127	2131	2123	2023	160	
2281	1713	1831	1868	1885	1895	1951	1968	2026	2084	2100	2131	2147	2177	2193	2224	2185	2160	2189	2193	2185	2085	166	
2363	1775	1893	1930	1947	1957	2013	2030	2088	2146	2162	2193	2209	2239	2255	2286	2247	2222	2251	2255	2247	2147	172	
2445	1837	1955	1992	2009	2019	2075	2092	2150	2208	2224	2255	2271	2301	2317	2348	2309	2284	2313	2317	2309	2209	178	
2527	1899	2017	2054	2071	2081	2137	2154	2212	2270	2286	2317	2333	2363	2379	2410	2371	2346	2375	2379	2371	2271	184	
2609	1961	2079	2116	2133	2143	2200	2217	2275	2333	2349	2380	2396	2426	2442	2473	2434	2409	2438	2442	2434	2334	190	
2691	2023	2141	2178	2195	2205	2261	2278	2336	2394	2410	2441	2457	2487	2503	2534	2495	2470	2500	2503	2495	2395	196	
2773	2085	2203	2240	2257	2267	2323	2340	2398	2456	2472	2503	2519	2549	2565	2596	2557	2532	2562	2565	2557	2457	202	
2855	2147	2265	2302	2319	2329	2385	2402	2460	2518	2534	2565	2581	2611	2627	2658	2619	2594	2624	2627	2619	2519	208	
2937	2209	2327	2364	2381	2391	2447	2464	2522	2580	2596	2627	2643	2673	2689	2720	2681	2656	2685	2689	2681	2581	214	
3019	2271	2389	2426	2443	2453	2509	2526	2584	2642	2658	2689	2705	2735	2751	2782	2743	2718	2747	2751	2743	2643	220	
3101	2333	2451	2488	2505	2515	2571	2588	2646	2704	2720	2751	2767	2797	2813	2844	2805	2780	2809	2813	2805	2705	226	
3183	2395	2513	2550	2567	2577	2633	2650	2708	2766	2782	2813	2829	2859	2875	2906	2867	2842	2871	2875	2867	2767	232	
3265	2457	2575	2612	2629	2639	2695	2712	2770	2828	2844	2875	2891	2921	2937	2968	2929	2904	2933	2937	2929	2829	238	
3347	2519	2637	2674	2691	2701	2757	2774	2832	2890	2906	2937	2953	2983	2999	3030	2991	2966	2995	2999	2991	2891	244	
3429	2581	2700	2737	2754	2764	2820	2837	2895	2953	2969	2999	3015	3045	3061	3092	3053	3028	3057	3061	3053	2953	250	
3511	2643	2762	2800	2817	2827	2883	2900	2958	3016	3032	3063	3079	3109	3125	3156	3117	3092	3121	3125	3117	3017	256	
3593	2705	2824	2862	2879	2889	2945	2962	3020	3078	3094	3125	3141	3171	3187	3218	3179	3154	3183	3187	3179	3079	262	
3675	2767	2886	2924	2941	2951	3007	3024	3082	3140	3156	3187	3203	3233	3249	3280	3241	3216	3245	3249	3241	3141	268	
3757	2829	2948	2986	3003	3013	3069	3086	3144	3202	3218	3249	3265	3295	3311	3342	3303	3278	3307	3311	3303	3203	274	
3839	2891	3010	3048	3065	3075	3131	3148	3206	3264	3280	3311	3327	3357	3373	3404	3365	3340	3369	3373	3365	3265	280	
3921	2953	3072	3110	3127	3137	3193	3210	3268	3326	3342	3373	3389	3419	3435	3466	3427	3402	3431	3435	3427	3327	286	
4003	3015	3134	3172	3189	3199	3255	3272	3330	3388	3404	3435	3451	3481	3497	3528	3489	3464	3493	3497	3489	3389	292	
4085	3077	3196	3234	3251	3261	3317	3334	3392	3450	3466	3497	3513	3543	3559	3590	3551	3526	3555	3559	3551	3451	298	
4167	3139	3258	3296	3313	3323	3379	3396	3454	3512	3528	3559	3575	3605	3621	3652	3613	3588	3617	3621	3613	3513	304	
4249	3201	3320	3358	3375	3385	3441	3458	3516	3574	3590	3621	3637	3667	3683	3714	3675	3650	3679	3683	3675	3575	310	
4331	3263	3382	3420	3437	3447	3503	3520	3578	3636	3652	3683	3699	3729	3745	3776	3737	3712	3741	3745	3737	3637	316	
4413	3325	3444	3482	3500	3510	3566	3583	3641	3699	3715	3746	3762	3792	3808	3839	3799	3774	3803	3808	3799	3699	322	
4495	3387	3506	3544	3561	3571	3627	3644	3702	3760	3776	3807	3823	3853	3869	3900	3861	3836	3865	3869	3861	3761	328	
4577	3449	3568	3606	3623	3633	3689	3706	3764	3822	3838	3869	3885	3915	3931	3962	3923	3898	3927	3931	3923	3823	334	
4659	3511	3630	3668	3685	3695	3751	3768	3826	3884	3900	3931	3947	3977	3993	4024	3985	3960	3989	3993	3985	3885	340	
4741	3573	3692	3730	3747	3757	3813	3830	3888	3946	3962	3993	4009	4039	4055	4086	4047	4022	4051	4055	4047	3947	346	
4823	3635	3754	3792	3809	3819	3875	3892	3950	4008	4024													



## Bibliographie

- [1] Biot, M.A.: Effect of Certain Discontinuities on the Pressure Distribution in a Loaded Soil. *Physics* H.6, S.367-375, 1935.
- [2] Bishop, A.W.: The Stability of Earth Dams. Ph. D. Thesis, London, 1952.
- [3] Brahtz, J.H.A.: Pressures due to Percolating Water and the Influence upon Stresses in Hydraulic Structures. *Trans. Sec. Cong. Large Dams* 5, S.43-71, 1936.
- [4] Collatz, L.: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer Verlag, 1955.
- [5] De Wet, J.A.: The Use of the Energy Concept in Soil Mechanics. *C. R. 5<sup>e</sup> Cong. Intern. Méc. de Sol et des Trav. de Fond. Paris*, 1/68, 1960.
- [6] Fagnoul, A.: *Etude de la construction et de la stabilité des barrages en terre ou en enrochements*. Liège, 1961.
- [7] Girkmann, K.: *Flächentragwerke*, Springer Verlag, 1948.
- [8] Goodier-Hodge: *Elasticity and Plasticity. Advances in Applied Mechanics I*, 1960.
- [9] Hansen-Lundgren: *Hauptprobleme der Bodenmechanik*. Springer-Verlag, 1960.
- [10] Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Clarendon Press, 1950.
- [11] Hondermarcq: *Contraintes et déformations planes*, Dunod, Paris, 1954.
- [12] Juillard, H.: *Observations des contraintes et déformations*

dans les barrages, leurs fondations et leurs appuis. 6<sup>e</sup> Congrès des grands barrages New York, S.1063-1081, 1958.

- [13] Jürgenson, L.: The Application of Theories of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems. J. Boston Soc. Civ. Eng. 21, S.206-241, 1934.
- [14] Justin, Hinds, Creager: Engineering for Dams III. John Wiley, New York, 1944.
- [15] Lévy, M.: Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie. C. R. hebdomadaire Acad. Sci. Paris 126, S.1235-1240, 1898.
- [16] Marguerre, K.: Druckverteilung durch eine elastische Schicht auf starrer rauher Unterlage. Ing. Archiv 2, S.108, 1931.
- [17] Melan, E.: Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht. Beton und Eisen, H.18, S.83, 1919.
- [18] Rellich, F.: Die Randbedingungen der Airy'schen Spannungsfunktion bei vorgegebenen Randverschiebungen. Zeitschrift Angew. Math. & Mech. 4, S.13, 1947.
- [19] Rendulic, L.: Der Erddruck im Strassenbau und Brückenbau. Forschungsarbeiten aus dem Strassenwesen Bd.10, Berlin, 1938.
- [20] Richardson, L.F.: The Lines of Flow of Water in Saturated Soils. Scient. Proc. Royal Dublin Soc. XI: XXVII, S.295, 1908.
- [21] Schnitter, G.: Diques en terre ou en enrochements. Wasser- und Energiewirtschaft 6/7, S.206-215, 1961.
- [22] Southwell, R.: Relaxation Methods in Theoretical Physics. Oxford, 1946.
- [23] Stiefel, Engeli, Ginsburg, Rutishauser: Refined Iterative Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of

Self-Adjoint Boundary Value Problems. Mitteilungen aus dem  
Inst. für Ang. Math. Nr.8, Zürich, 1959.

- [24] Terzaghi, K.: Theoretische Bodenmechanik. Springer Verlag,  
1954.
- [25] Wynn, P.: The Rational Approximation of Functions which are  
Formally Defined by a Power Series Expansion. Math. of Compu-  
tation Nr.14, S.147-186, 1960.
- [26] Yamaguchi, H.: Strain Increments and Volume Change in the  
Plastic Flow of a Granular Material. C. R. du 5<sup>e</sup> Cong. Int.  
Méc. Sol et Trav. Fond. Paris, 1/70, 1960.
- [27] Zienkiewicz, O.C.: The Stress Distribution in Gravity Dams.  
J. Inst. Civ. Eng. 27, S.244, 1945.

## Lebenslauf

des Hermann Gustav Bendel, heimatberechtigt in Schaffhausen, geb. den 15. April 1933 in Luzern als drittes Kind von Louis Bendel, Dr. sc. nat. und Rosa Bendel-Häberlin. Ich besuchte während 5 Jahren die Primarschule in Luzern. Im Jahre 1952 bestand ich nach 7-jähriger Kantonsschulzeit die humanistische Reifeprüfung des Gymnasiums Luzern. Ich immatrikulierte mich hierauf an der Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, section génie civil. Ich erhielt das Diplom dieser Schule als Bauingenieur im Januar 1957 und studierte anschliessend Mathematik an der Faculté de Sciences in Lausanne, wo ich im Juli 1958 mit der licence ès sciences mathématiques abschloss.

Nach einem durch einen kurzen Auslandsaufenthalt und durch den Militärdienst bedingten Unterbruch trat ich am 9. Februar 1959 als wissenschaftlicher Mitarbeiter in die Versuchsanstalt für Wasser- und Erdbau in Zürich ein, während welcher Tätigkeit auch die vorliegende Arbeit entstand. Verheiratet seit 4 Jahren.