

# ÜBER DAS KREISDIAGRAMM DES SCHRAGE-MOTORS

---

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN  
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER  
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

## PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

PAUL RAUHUT

AUS FRANKENTHAL (PFALZ)

---

Referent: Herr Prof. Dr. K. KUHLMANN

Korreferent: Herr Prof. E. DÜNNER

1942

Selbstverlag des Verfassers

## V O R W O R T

Herr Professor Dr.-Ing. Karl K u h l m a n n hat mir für diese Arbeit viele wertvolle Anregungen gegeben, für die ich ihm meinen wärmsten Dank ausspreche.

Ferner danke ich verbindlichst der Firma A.G. B r o w n , B o v e r i & Cie., die mir in großzügiger Weise erlaubt hat von den hier veröffentlichten Versuchsergebnissen Gebrauch zu machen, sodaß mir eine einfache und zuverlässige Nachprüfung der Theorie möglich wurde.

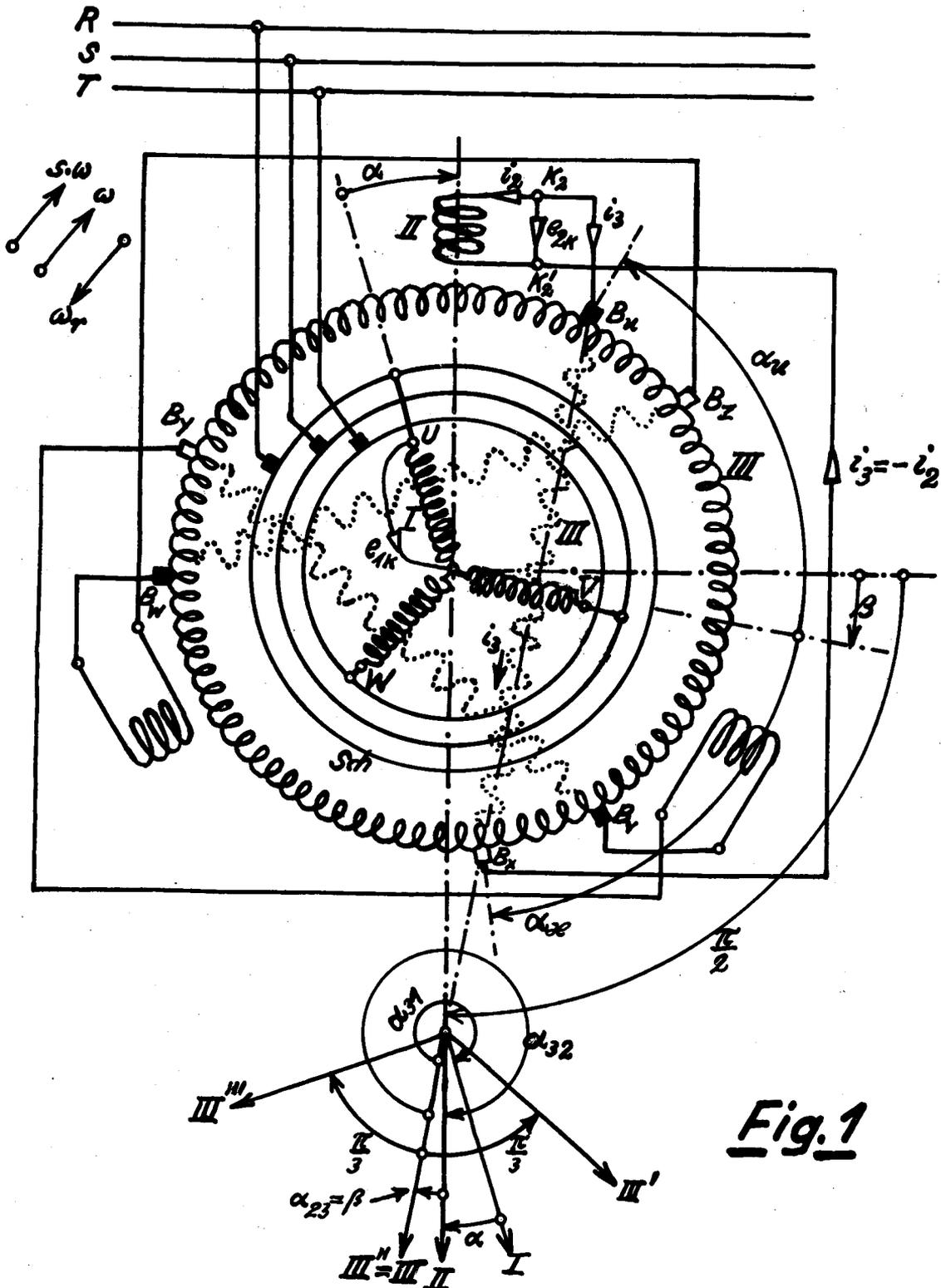
Der läufergespeiste Drehstrom-Nebenschluß-Kommutatormotor ist erstmals von Herrn Hidde K. S c h r a g e in der E T Z 1914, S.89-93 angegeben worden. Herr S c h r a g e hat dort schon das Verhalten des Motors an Hand eines Kreisdiagramms beschrieben. Er hat für die Ableitung des Diagramms die Annahme gemacht, daß zwischen Primärwicklung und Regulierwicklung, die in den gleichen Nuten liegen, keine Streuung besteht. Diese Vereinfachung erleichtert die Aufgabe außerordentlich. Man erhält jedoch nur für solche Bürstenstellungen, bei welchen der Motor in seinem Verhalten der Asynchronmaschine nahekommt, eine hinreichende Genauigkeit, während mit Zunahme des Regelbereichs das Resultat nicht mehr befriedigt.

Von S t i x wurde eine Theorie des Kreisdiagramms für den Schrage-Motor entwickelt ( Archiv für Elektrotechnik Bd.33, H.11, 10.11. 1939, S.698-716). Diese Theorie basiert auf der Annahme, daß folgende Flüsse vorhanden sind: ein Drehfeld, das mit allen 3 Wicklungen gemeinsam verkettet ist, und Streufelder. Nun ist für die Theorie des Schrage-Motors mit Rücksicht auf seine 3 Wicklungen eine genaue Definition der Streuung erforderlich. Herr Professor K u h l m a n n machte darauf aufmerksam, daß der Begriff der Streuung auf dem Vergleich zweier Wicklungen beruht und deshalb zur Annahme der Streuung einer Wicklung auch die Angabe gehört, gegenüber welcher anderen Wicklung diese Streuung zu verstehen ist. Wird für eine Wicklung ein Streufluß vorausgesetzt, so muß bei Vorhandensein von mehr als 2 Wicklungen gleichzeitig diejenige andere Wicklung angegeben werden, mit welcher der Vergleich angestellt worden ist. Für diese beiden betrachteten Wicklungen erhält man einfach und doppelt verkettete Streufelder und ein mit allen Windungen verkettetes "Hauptfeld". Weil beim Schrage-Motor 3 Wicklungen vorhanden sind, können auch 3 solcher Hauptfelder definiert werden.

Man kann aus dieser Schwierigkeit herauskommen, wenn man die Voraussetzung eines einzigen Hauptfeldes verläßt. Eine Möglichkeit zum Aufbau einer exakten Theorie bietet die von Herrn Prof. K u h l m a n n benutzte Methode, welche sich auf die Induktivitäten stützt. Es soll im folgenden eine Theorie des Schrage-Motors nach dieser Methode entwickelt werden, wobei noch folgendes Ziel verfolgt wird: Die Streuung soll erschöpfend behandelt werden. Es sollen die H e y l a n d - schen Streukoeffizienten eingeführt werden, um eine allgemeinere Verwertbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen. Die Überlagerung von Strömen verschiedener Phasen in der Regulierwicklung soll studiert werden. Es soll der Einfluß der Kommutation auf das Arbeitsdiagramm

untersucht werden. Das Kreisdiagramm soll für die Ableseung der charakteristischen Größen eingerichtet werden; hierbei wird sich die Ableseung des Sekundärstroms und des Flusses als wertvoll erweisen, weil dadurch die Veränderlichkeit des Bürstenübergangswiderstandes und die Krümmung der Magnetisierungskurve berücksichtigt werden können.

Zum besseren Verständnis wird zunächst eine summarische Beschreibung des Schrage-Motors vorausgeschickt.



**Fig. 1**

### S c h a l t u n g

Sie geht aus Fig. 1 hervor. Vom Netz R S T wird die Primärwicklung I über die Schleifringe Sch gespeist. Die Primärwicklung ist als normale Mehrphasenwicklung ausgebildet und liegt unten in den Nuten des Rotors. Oben in den Rotornuten, also nahe am Luftspalt befindet sich die Regulierwicklung III, die als normale Gleichstromwicklung ausgeführt und mit einem Kommutator verbunden ist. Letzterer wurde im Schema nicht gezeichnet. An die Kommutatorbürsten ist die Statorwicklung II angeschlossen, die auch Sekundärwicklung genannt wird. Sie ist eine mehrphasige Wicklung in offener Schaltung. Die sekundäre Phasenzahl wird oft größer als die primäre gewählt. Im Schema ist die sekundäre Phasenzahl gleich 3 angenommen. Die Bürsten sitzen auf 2 Bürstenbrücken, die in entgegengesetztem Sinn bewegt werden. Alle Bürsten der einen Bürstenbrücke (z.B. die schwarz gezeichneten) sind mit den Anfängen der Sekundärwicklung verbunden, alle Bürsten der anderen Bürstenbrücke (z.B. die weiß gezeichneten) mit den Enden. Die extreme Bürstenverschiebung beträgt im allgemeinen etwa  $\alpha_{20} = \pm 90^\circ$  el. (Durchmesserstellung).

### W i r k u n g s w e i s e

Der Schrage-Motor ist am leichtesten zu verstehen, wenn man von derjenigen Bürstenstellung ausgeht, bei welcher sich die Bürsten ein und derselben Phase auf einer Lamelle begegnen. Bei dieser Bürstenstellung sind alle Sekundärphasen direkt über die Bürsten kurzgeschlossen und die Regulierwicklung bleibt stromlos, also wirkungslos. Der Motor verhält sich jetzt wie eine Asynchronmaschine mit kurzgeschlossenem Sekundärkreis; nur erfolgt hier die Speisung im Rotor. Durch die mehrphasige Primärwicklung wird dem Rotor ein Drehfeld aufgedrückt. Infolge der Speisung im Rotor läuft der Motor umgekehrt zur Richtung des Drehfelds und zwar mit einem gewissen Schlupf. In Fig. 1 bedeutet  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Drehfelds gegenüber dem Rotor,  $\omega_r$  die Winkelgeschwindigkeit des Rotors selbst, die Differenz beider ( $= s \cdot \omega$ ) die Winkelgeschwindigkeit des Drehfelds gegenüber dem Stator und den Bürsten. Da der Motor bei der betrachteten Bürstenstellung ( $\alpha_{20} = 0$ ) die Eigenschaften eines Asynchronmotors annimmt, wollen wir sie "asynchrone Bürstenstellung" nennen.

Entfernt man die Bürsten voneinander, so greifen die Bürsten jeder Phase am Kommutator eine Spannung ab. Diese ist, so lange der Fluß des Motors praktisch konstant ist, im wesentlichen nur eine Funktion des Bürstenabstandes  $2\alpha_{20}$  und kann bei unveränderter Bürstenstellung als konstant angesehen werden. Wir wollen

zunächst annehmen, daß die Achse der Regulierwicklung mit der Achse der Statorwicklung zusammenfällt ( $\beta = 0$ ); dann sind die Spannungen in der Statorwicklung ( $E_2$ ) und in der Regulierwicklung ( $E_3$ ) gleichphasig. Im idealisierten Zustand muß der Motor im Leerlauf stromlos sein; es darf also keine Spannungsdifferenz im Sekundärkreis bestehen bleiben. Dies ist nur dadurch möglich, daß der Schlupf des Motors sich so lange ändert, bis in der Statorwicklung eine Schlupfspannung von einer Größe entsteht, welche der Bürstenspannung das Gleichgewicht zu halten vermag. Der Kommutator wirkt hierbei als Frequenzumformer und wandelt die Netzfrequenz in der Regulierwicklung in eine andere Frequenz an den Bürsten um, die mit der Schlupffrequenz der Statorwicklung identisch ist.

Je nachdem die Bürsten aus der asynchronen Stellung in die eine oder in die andere Richtung verschoben werden, je nachdem also der Winkel  $\alpha_{sp}$  positiv oder negativ ist, erfolgt die Regulierung unter- oder übersynchron. Bei Erhöhung der Drehzahl über die jeweilige Leerlaufdrehzahl läuft die Maschine generatorisch, unterhalb motorisch. Das Maß der Regulierung hängt ab von der Entfernung zugehöriger Bürsten voneinander, d.h. von der Größe des Winkels  $\alpha_{sp}$ . Die maximale Regulierung im einen oder im anderen Sinn ergibt sich in der sog. Durchmesserstellung, d.h. bei  $\alpha_{sp} = \pm 90^\circ$  el.

Wenn man die Achse der Kommutatorwicklung gegenüber der Achse der Statorwicklung verschiebt (z.B. um den Winkel  $\beta$ ), so erhält die Kommutatorspannung eine Komponente, die auf Phasenkompensation wirkt. Wir wollen  $\beta$  für Verdrehung gegen den Drehsinn des Rotors positiv rechnen. Eine solche Verdrehung bewirkt bei untersynchroner Drehzahlregelung Phasenverbesserung.

Da die sekundären Streuspannungen bezogen auf das Netz untersynchron wie Drosselspulen und übersynchron wie Kondensatoren wirken, so besitzt der Motor naturgemäß bei untersynchroner Regulierung einen schlechten, bei übersynchroner Regulierung einen guten Leistungsfaktor. Man gibt deswegen gerne den Bürsten bei der tiefsten untersynchronen Regeldrehzahl eine Achsverdrehung von  $\beta =$  etwa 5 bis  $10^\circ$  el., während man diesen Winkel bei der höchsten übersynchronen Regeldrehzahl meist gleich Null macht. Man erreicht dies in einfacher Weise durch passende Wahl der Zahnräder der Bürstenverstellvorrichtung, indem man die eine Bürstenbrücke einen größeren Weg zurücklegen läßt als die andere. Wenn man die Bürsten bei der extrem-übersynchronen Stellung auf  $\beta = 0$  einstellt, so entsteht durch die ungleichen Verstellwege bei Tieferregeln der Drehzahl eine zunehmende Phasenverdrehung  $\beta$  zwi-

schen den Achsen der Regulierwicklung und der Statorwicklung. Diese Achsenverdrehung  $\beta$  erreicht ihren maximalen Wert in der Bürstenstellung für die tiefste Regeldrehzahl.

Zur Wahl des Vorzeichens des Winkels  $\alpha_{2p}$  in Fig.1 wollen wir folgendes festlegen: Die Regulierwicklung denken wir uns durch die gestrichelte Spule ersetzt. Der Wickelsinn der Ersatzspule sei der gleiche wie derjenige der Statorspule. Diese Annahme entspricht bei der gewählten Bürstenstellung unterasynchroner Drehzahlregelung. Wenn nämlich in diesem Fall Regulierwicklung und Statorwicklung gleiche effektive Windungszahl hätten und  $\beta = 0$  wäre, müßte der Motor stehen bleiben; d.h. er hätte eine Regulierung von 100% im unterasynchronen Sinn. Negatives  $\alpha_{2p}$  entspricht übersynchroner Regulierung.

Bei Betrachtung der Fig.1 fällt auf, daß sich in der Regulierwicklung im allgemeinen Ströme verschiedener Phasen überlagern. Zum besseren Verständnis betrachten wir zunächst den

Fall a: Keine Überlagerung von Phasenströmen in der Regulierwicklung.

Dieser Fall ist in Fig.2 dargestellt. Er liegt vor, wenn

$$\alpha_{2p} < \frac{\pi}{m_2} \quad (m_2 = \text{sekundäre Phasenzahl, hier} = 3).$$

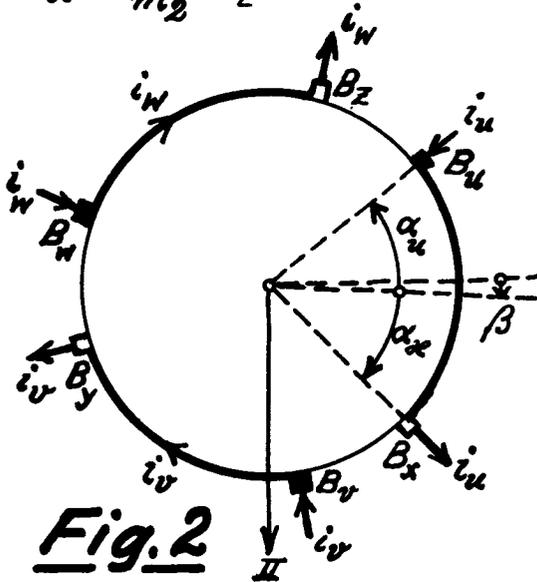


Fig. 2

Zur Erleichterung der Aufgabe studieren wir zunächst die Gesetzmäßigkeiten von Mehrphasenströmen. Gestützt auf die Vorlesungen von Herrn Prof. K u h l m a n n werden die Drehinduktivitäten abgeleitet und die Speisung eines Kommutatorankers mit Mehrphasenstrom behandelt.

1) Drehinduktivitäten:

Auf irgend einem Eisenkern möge sich eine 3-phasige Wicklung u,v,w und irgend eine Sekundärwicklung a, die gegen Wicklung u um den Winkel  $\beta$  verschoben sein möge, befinden (vergl. Fig.3). Die Dreiphasenwicklung möge von folgenden Strömen gespeist werden:

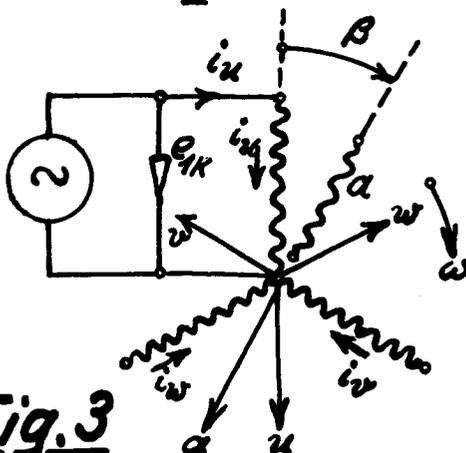


Fig. 3

$$(1) \begin{cases} i_u = \sqrt{2} F \cdot \varepsilon \cdot j(\omega t - \varphi) \\ i_v = \sqrt{2} F \cdot \varepsilon \cdot j(\omega t - \varphi - 120^\circ) \\ i_w = \sqrt{2} F \cdot \varepsilon \cdot j(\omega t - \varphi - 240^\circ) \end{cases}$$

Die Flußverkettung der stromlosen Wicklung a ist:

$$(2) \Psi_a = i_u \cdot L_{ua} + i_v \cdot L_{va} + i_w \cdot L_{wa}.$$

Für die hierin vorkommenden Induktivitäten können wir schreiben:

$$(3) \begin{cases} L_{ua} = L_{12} \cdot \cos \beta = L_{12} \cdot \frac{\epsilon^{+j\beta} + \epsilon^{-j\beta}}{2} \\ L_{va} = L_{12} \cdot \cos(240^\circ + \beta) = L_{12} \cdot \frac{\epsilon^{+j(240^\circ + \beta)} + \epsilon^{-j(240^\circ + \beta)}}{2} \\ L_{wa} = L_{12} \cdot \cos(120^\circ + \beta) = L_{12} \cdot \frac{\epsilon^{+j(120^\circ + \beta)} + \epsilon^{-j(120^\circ + \beta)}}{2} \end{cases}$$

worin:  $L_{uamax} = L_{vamax} = L_{wamax} = L_{12}.$

(1) und (3) in (2) ergibt:  $\Psi_a = \sqrt{2} \cdot I \cdot \epsilon^{j(\omega t - \varphi)} \cdot L_{12} \cdot \frac{1}{2} \left[ (\epsilon^{+j\beta} + \epsilon^{-j\beta}) + \dots + (\epsilon^{+j(240^\circ + \beta)} + \epsilon^{-j(240^\circ + \beta)}) \cdot \epsilon^{-j120^\circ} + (\epsilon^{+j(120^\circ + \beta)} + \epsilon^{-j(120^\circ + \beta)}) \cdot \epsilon^{-j240^\circ} \right]$

$$(4) \underline{\Psi_a = i_u \cdot \frac{3}{2} L_{12} \epsilon^{-j\beta} = i_u \cdot \frac{m_1}{2} L_{12} \epsilon^{-j\beta} = i_u L_{12\Delta} \epsilon^{-j\beta}.}$$

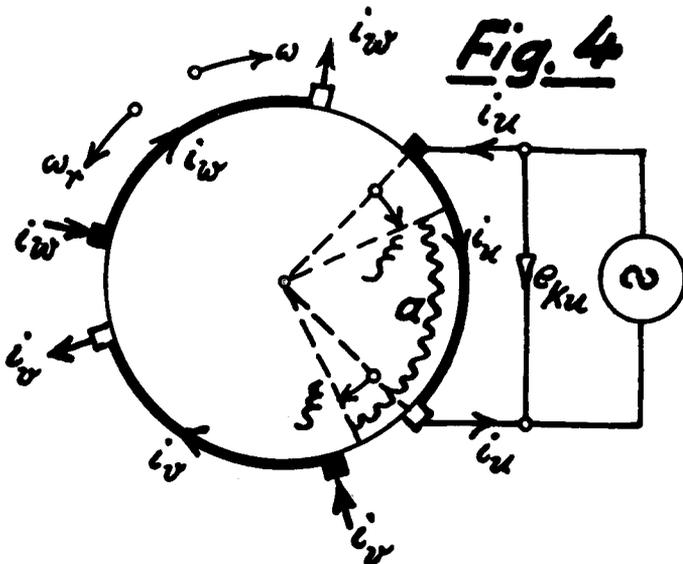
Lassen wir die Spule a mit der Spule u zusammenfallen, so erhalten wir für die Flußverkettung der Spule u:

$$(5) \underline{\Psi_u = i_u \cdot (\lambda_{s1} + \frac{m_1}{2} l'_{M1}) = i_u \cdot (\lambda_{s1} + l'_{M\Delta}) = i_u \cdot L_{M\Delta},}$$

worin  $\lambda_{s1}$  die einfach verkettete Streuung wiedergibt; vergl. (68)!

2) Speisung eines Kommutatorankers:

Ein beliebiger Kommutatoranker möge in der Anordnung nach Fig.4 mit 3-phasigem Strom gespeist werden. Die 3 Ströme mögen durch die Gleichungen (1) gegeben sein.



Die Bürsten der Phase u schneiden aus der Ankerwicklung einen Teil heraus, der in der Figur durch dicken Strich hervorgehoben ist. Wir betrachten nun einen gleichartigen Wicklungsteil a, der gegenüber u um  $\beta$  verschoben sein möge. Das Drehfeld ergibt für a nach (4) und (5) folgende Flußverkettung,

wenn von der Streuung erster Ordnung abgesehen wird:

$$(6) \Psi_{a\Delta} = \sqrt{2} \cdot I \cdot \epsilon^{j(\omega t - \varphi)} \cdot L_{M\Delta} \cdot \epsilon^{-j\beta}, \text{ worin: } L_{M\Delta} = \frac{3}{2} l'_{M1} = \frac{m_1}{2} l'_{M1}.$$

Demnach erhalten wir:

$$e_{ku} - i_u r = \frac{d}{dt} \Psi_u = \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_u}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} \right)_{\xi=0}$$

$$= \frac{\partial (i_u \lambda_{s1})}{\partial t} + j\omega \sqrt{2} F_\xi j(\omega t - \varphi) L'_{M\Delta} - j\sqrt{2} F_\xi j(\omega t - \varphi) L'_{M\Delta} \frac{d\xi}{dt}$$

Nun ist nach den angenommenen Richtungen für  $\xi$  und  $\omega_r$

$-\frac{d\xi}{dt} = +\omega_r =$  Drehgeschwindigkeit des Ankers. Damit wird:

$$(7) e_{ku} - i_u r = j\omega \sqrt{2} F_\xi j(\omega t - \varphi) \lambda_{s1} + j(\omega + \omega_r) \sqrt{2} F_\xi j(\omega t - \varphi) L'_{M\Delta}$$

Setzen wir wieder:

$$(8) L_{M\Delta} = L'_{M\Delta} + \lambda_{s1}, \text{ so wird:}$$

$$(9) e_{ku} - i_u r = j(\omega + \omega_r) \sqrt{2} F_\xi j(\omega t - \varphi) L_{M\Delta} - j\omega_r \sqrt{2} F_\xi j(\omega t - \varphi) \lambda_{s1}$$

### 3). Ableitung der 3 Grundgleichungen des Schrage-Motors:

Die prinzipielle Schaltung des Motors geht aus Fig. 1 hervor. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß sich die Sekundärströme verschiedener Phasen in der Regulierwicklung nicht überlagern, also  $\alpha_{22} < \frac{\pi}{3}$ . Die Verallgemeinerung für beliebiges  $\alpha_{22}$  folgt später. Ferner wollen wir eine beliebige Stellung des Rotors voraussetzen. Es möge also die Phase U der Primärwicklung um den Winkel  $\alpha$  gegen die Phase U der Sekundärwicklung gedreht sein.

#### Spannung der Primärwicklung:

Die Wicklung wird 3-phasig gespeist. Von den Strömen der 3 Phasen betrachten wir denjenigen der Phase U und bezeichnen ihn mit  $i_1$ . Wir machen für  $i_1$  den Ansatz:

$$(10) i_1 = \sqrt{2} F_1 \varepsilon j(\omega t - \varphi_1) \equiv i_u$$

Die Primärwicklung erzeugt ein Drehfeld, das mit der Geschwindigkeit  $\omega$  im Uhrzeigersinn umläuft.

Aus Symmetriegründen müssen auch die Ströme in den Wicklungen II und III ein Drehstromsystem bilden. Dessen Umlaufsinn und Geschwindigkeit kennen wir noch nicht. Wir wollen die Kreisfrequenz dieser Ströme mit  $\omega_2$  bezeichnen, welches wieder im Uhrzeigersinn positiv sein soll.

Wir greifen eine Phase des Sekundärkreises heraus. Für dessen Strom können wir schreiben:

$$(11) i_2 = \sqrt{2} F_2 \varepsilon j(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Dieser Strom fließt sowohl in der Sekundärwicklung als auch in der Regulierwicklung:  $i_3 = -i_2$ .

Nach (4) und (5) erhalten wir jetzt für die Flußverkettung der Phase U der Primärwicklung:

$$(12) \Psi_1 = i_1 L_{11\Delta} + i_2 L_{21\Delta} \varepsilon^{+j\alpha} + i_3 L_{31\Delta} \varepsilon^{+j(\alpha+\beta)}$$

$$= \sqrt{2} \mathcal{F}_1 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_1)} L_{11\Delta} + \sqrt{2} \mathcal{F}_2 \varepsilon^{j(\omega_2 t - \varphi_2)} [L_{21\Delta} \varepsilon^{+j\alpha} - L_{31\Delta} \varepsilon^{+j(\alpha+\beta)}]$$

Es ist:  $e_{1K} - i_1 r_1 = \frac{d}{dt} \Psi_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \omega_r \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha}$ , da:

$$(13) \alpha = \omega_r \cdot t \text{ und } \frac{d\alpha}{dt} = \omega_r; \text{ somit:}$$

$$(14) e_{1K} - i_1 r_1 = j\omega \sqrt{2} \mathcal{F}_1 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_1)} L_{11\Delta} + j(\omega_2 + \omega_r) \sqrt{2} \mathcal{F}_2 \varepsilon^{j(\omega_2 + \omega_r)t - \varphi_2} [L_{21\Delta} - L_{31\Delta} \varepsilon^{+j\beta}].$$

In dieser Gleichung hat nur eine Spannungskomponente die Frequenz  $\omega_2 + \omega_r$ , alle anderen Glieder die Frequenz  $\omega$ . Somit muß im Beharrungszustand sein:  $\omega_2 + \omega_r = \omega$ . Wir definieren:

$$(15) s = \frac{\omega - \omega_r}{\omega} = \text{Schlupf, also } \omega_2 = s \cdot \omega, \text{ womit}$$

$$(11a) i_2 = \sqrt{2} \mathcal{F}_2 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_2)} \text{ wird.}$$

Gleichung (14) können wir in folgender Form schreiben:

$$(14a) e_{1K} - i_1 r_1 = j\omega \sqrt{2} \mathcal{F}_1 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_1)} L_{11\Delta} + j\omega \sqrt{2} \mathcal{F}_2 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_2)} (L_{21\Delta} - L_{31\Delta} \varepsilon^{+j\beta})$$

oder in der symbolischen Schreibweise:

$$(16) \underline{\underline{e_{1K} = (r_1 + j\omega L_{11\Delta}) \mathcal{F}_1 + j\omega (L_{21\Delta} - L_{31\Delta} \varepsilon^{+j\beta}) \mathcal{F}_2}}$$

### Spannung der Sekundärwicklung:

Analog erhalten wir für die Flußverkettung der Sekundärwicklung für die Phase U:

$$(17) \Psi_2 = i_1 L_{12\Delta} \varepsilon^{-j\alpha} + i_2 L_{22\Delta} + i_3 L_{32\Delta} \varepsilon^{+j\beta}$$

$$= \sqrt{2} \mathcal{F}_1 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_1)} L_{12\Delta} \varepsilon^{-j\alpha} + \sqrt{2} \mathcal{F}_2 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_2)} (L_{22\Delta} - L_{32\Delta} \varepsilon^{+j\beta}).$$

Es ist wieder:  $e_{2K} - i_2 r_2 = \frac{d}{dt} \Psi_2 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \omega_r \frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha}$  und da  $\omega - \omega_r = s\omega$  ist:

$$(18) e_{2K} - i_2 r_2 = j s \omega \sqrt{2} \mathcal{F}_1 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_1)} L_{12\Delta} + j s \omega \sqrt{2} \mathcal{F}_2 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_2)} (L_{22\Delta} - L_{32\Delta} \varepsilon^{+j\beta}).$$

Wie von der Theorie der Asynchronmaschine her zu erwarten war, haben alle Glieder Schlupffrequenz ( $= s\omega$ ).

Gleichung (18) können wir in der symbolischen Form schreiben:

$$(19) \underline{\underline{e_{2K} = [r_2 + j s \omega (L_{22\Delta} - L_{32\Delta} \varepsilon^{+j\beta})] \mathcal{F}_2 + j s \omega L_{12\Delta} \mathcal{F}_1}}$$

### Spannung der Regulierwicklung:

Für die Flußverkettung der Phase U der Regulierwicklung ergibt sich:

$$(20) \Psi_3 = i_1 L_{13\Delta} \varepsilon^{-j(\alpha+\beta)} + i_2 L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta} + i_3 L_{33\Delta}$$

$$\Psi_3 = \sqrt{2} F_1 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_1)} L_{13\Delta} \varepsilon^{-j\beta} + \sqrt{2} F_2 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_2)} (L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta} - L_{33\Delta}).$$

Daraus folgt nach (9):

$$e_{2k} - i_3 r_3 = j(s\omega + \omega_r) \sqrt{2} F_1 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_1)} L_{13\Delta} \varepsilon^{-j\beta} + \dots \\ \dots + j(s\omega + \omega_r) \sqrt{2} F_2 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_2)} (L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta} - L_{33\Delta}) + \dots \\ \dots + j\omega_r \sqrt{2} F_2 \varepsilon^{j(s\omega t - \varphi_2)} \lambda_{s3}.$$

Auch hiernach hat  $e_{2k}$  Schlupffrequenz. In symbolischer Schreibweise ist:

$$(21) \underline{e_{2k}} = -\left[ r_3 + j\omega(L_{33\Delta} - L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta}) \right] j_2 + j\omega L_{13\Delta} \varepsilon^{-j\beta} j_1 + j(1-s)\omega \lambda_{s3} j_2.$$

Die Gleichungen (16), (19) und (21) sind die Grundgleichungen.

Wir setzen:

$$(22) r_{II} = r_2 + r_3; \text{ hierin ist } r_2 \text{ konstant und } r_3 \text{ eine Funktion von } \alpha_{20}.$$

Aus (19), (21) und (22) folgt:

$$(23) \frac{j_2}{j_1} = \frac{j\omega(L_{13\Delta} \varepsilon^{-j\beta} - s L_{12\Delta})}{r_{II} + j\omega[(L_{33\Delta} - \lambda_{s3} - L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta}) + s(L_{22\Delta} + \lambda_{s3} - L_{32\Delta} \varepsilon^{+j\beta})]}.$$

Einsatz von (23) in (16) ergibt:

$$(24) \underline{j} = \frac{e_{2k}}{j_1} = r_1 + j\omega L_{11\Delta} + \frac{\omega^2(s L_{12\Delta} - L_{13\Delta} \varepsilon^{-j\beta}) \cdot (L_{21\Delta} - L_{31\Delta} \varepsilon^{+j\beta})}{r_{II} + j\omega[(L_{33\Delta} - \lambda_{s3} - L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta}) + s(L_{22\Delta} + \lambda_{s3} - L_{32\Delta} \varepsilon^{+j\beta})]}.$$

Man erkennt sofort, daß  $\underline{j}$  für  $\alpha_{20} = \text{konstant}$  (d.h. konstante Induktivitäten),  $\beta = \text{konstant}$  und  $s = \text{variabel}$  einen Kreis darstellt. Demnach muß auch die Inversion, nämlich die Admittanz  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{j}}$  einen Kreis ergeben.

Wir gehen nun über zu

Fall b: Überlagerung von Phasenströmen in der Regulierwicklung

bei  $m_2 = 3$ .

Zur Erläuterung dient Fig.5. Für den Bürstenverschiebungswinkel gilt jetzt die Bedingung:  $\frac{\pi}{3} < \alpha_{20} < \frac{\pi}{2}$ .

Wenn wir den Weg von Bürste  $B_u$  zu Bürste  $B_x$  verfolgen, so sehen wir, daß wir die Bürsten  $B_z$  und  $B_v$  überqueren müssen. In den überquerten Wicklungsteilen fließt nun nicht mehr stets der Bürstenstrom  $i_u$ . Wir wollen die Ströme in den einzelnen Wicklungsabschnitten zwischen je 2 Bürsten wie folgt bezeichnen: den Strom zwischen Bürste  $B_u$  und Bürste  $B_z$  mit  $i_{uz}$  usw.

Nach dem 1. Kirchhoff'schen Gesetz muß für die Verzweigungspunkte an den einzelnen Bürsten sein:

$$(25) \quad i_u = i_{uz} - i_{yu}$$

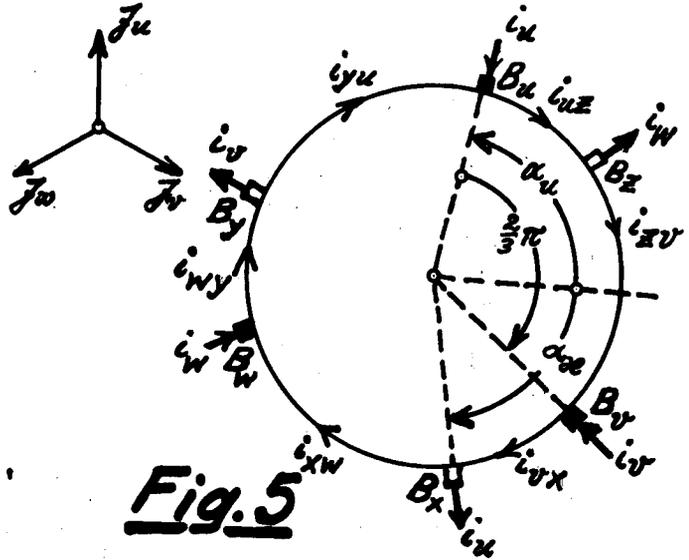
$$(26) \quad i_w = i_{uz} - i_{zv}$$

$$(27) \quad i_v = i_{vx} - i_{zv}$$

$$(28) \quad i_u = i_{vx} - i_{xw}$$

$$(29) \quad i_w = i_{wy} - i_{xw}$$

$$(30) \quad i_v = i_{wy} - i_{yu}$$



**Fig. 5**

Aus dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz folgt noch:

$$(31) \quad r_a i_{uz} + r_b i_{zv} + r_a i_{vx} + r_b i_{xw} + r_a i_{wy} + r_b i_{yu} = 0.$$

Da  $i_u$ ,  $i_v$  und  $i_w$  einem symmetrischen Dreiphasensystem angehören, muß auch sein:

$$(32) \quad i_u + i_v + i_w = 0.$$

Aus (25) + (26) + (27) + (28) + (29) + (30) folgt nun mit Rücksicht auf (32):  $2(i_{uz} + i_{vx} + i_{wy}) - 2(i_{zv} + i_{xw} + i_{yu}) = 0.$

Mit Rücksicht auf (31) ergibt sich daraus:

$$(33) \quad \begin{cases} i_{uz} + i_{vx} + i_{wy} = 0 \\ i_{zv} + i_{xw} + i_{yu} = 0 \end{cases}$$

Aus (25) = (28), (26) = (29), (27) = (30) findet man

mit Rücksicht auf (33):

$$(34) \quad \begin{cases} i_{zv} + i_{wy} = 0 \\ i_{vx} + i_{yu} = 0 \\ i_{uz} + i_{xw} = 0 \end{cases}$$

(25) - (26) ergibt mit Rücksicht auf (34):  $i_u - i_w = i_{zv} + i_{vx}.$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von (27):

$$i_{vx} = \frac{i_u + i_v - i_w}{2} = -i_{yu}; \quad i_{zv} = \frac{i_u - i_v - i_w}{2} = -i_{wy}.$$

Schließlich erhalten wir mit diesen beiden Gleichungen aus (26):

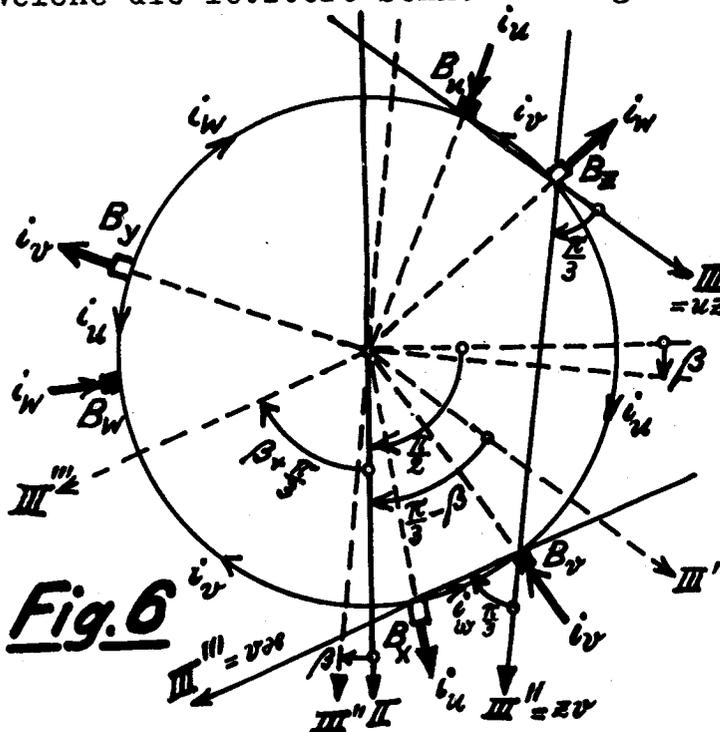
$$i_{uz} = \frac{i_u - i_v + i_w}{2} = -i_{xw}$$

Diese Ströme können wir nun mit Rücksicht auf das Vektordiagramm der Ströme  $J_u, J_v, J_w$  vektoriell wie folgt schreiben:

$$(35) \quad \begin{cases} J_{uz} = -J_{xw} = \frac{J_u - J_v + J_w}{2} = -J_v \\ J_{zv} = -J_{wy} = \frac{J_u - J_v - J_w}{2} = +J_u \\ J_{wx} = -J_{yu} = \frac{J_u + J_v - J_w}{2} = -J_w \end{cases}$$

Die einzelnen Wicklungsabschnitte können durch Sehnen

dargestellt werden, welche durch die Bürsten abgeschnitten werden. Außerdem schneiden je 2 zu irgend einer Phase gehörenden Bürsten Sehnen heraus. Nun ist jede der ersteren Sehnen parallel zu einer der letzteren und führt auch den gleichen (nach Richtung und Größe) Strom, welcher denjenigen Bürsten zufließt, durch welche die letztere Sehne herausgeschnitten wird.



**Fig. 6**

Die soeben ermittelte Stromverteilung für den Fall b ist in Fig. 6 eingetragen. Bei Betrachtung dieser Figur fällt folgendes auf. Die Regulierwicklung zerfällt in 6 Abschnitte, die zu 2 Dreiphasensystemen zusammengefaßt werden können. Das eine Dreiphasensystem umfaßt die größeren Abschnitte

$B_z B_v$  ;  $B_x B_w$  ;  $B_y B_u$  ;  
das andere Dreiphasensystem

besteht aus den kleineren Abschnitten  $B_u B_z$  ;  $B_v B_x$  ;  $B_w B_y$ . Wir können also für die Regulierwicklung die Vorstellung zu Grunde legen, daß sie in 2 getrennte Dreiphasensysteme zerfällt. Jedem dieser Dreiphasensysteme kommt dann eine Drehinduktivität und ein Ohm'scher Widerstand zu. Die Drehinduktivitäten und den Ohm'schen Widerstand des ersteren Systems mit den größeren Abschnitten wollen wir durch den Index a kennzeichnen, während wir für das andere System mit den kleineren Abschnitten den Index b wählen. Als Bezugsachse legen wir für das System a die Achse  $III''$  zu Grunde, welche durch die Lage der Bürsten  $B_z B_v$  festgelegt wird. Für das andere System könnten wir z.B. die Bezugsachse  $III'$  durch die Bürsten  $B_u B_z$  oder die Bezugsachse  $III'''$  durch die Bürsten  $B_v B_x$  wählen; wir entscheiden uns für die erstere. Die Achse  $III''$  durch die Bürsten  $B_z B_v$  ist mit der Achse  $III$  durch die Bürsten  $B_u B_x$  identisch. Die Achse  $III'$  ist dagegen um  $\frac{\pi}{3}$  entgegen dem Drehfeld gedreht.

Aus der Fig. 6 lesen wir für die gegenseitige Verdrehung der Achsen folgende Winkel ab:

Achse II gegen  $III''$  :  $\alpha_{2,3''} = \alpha_{2,3} = +\beta$

Achse II gegen  $III'$  :  $\alpha_{2,3'} = \alpha_{2,3} - \frac{\pi}{3} = +\beta - \frac{\pi}{3}$

Analog:

Achse III'' gegen II:  $\alpha_{3''2} = -\beta$

Achse III' gegen II:  $\alpha_{3'2} = -\beta + \frac{\pi}{3}$

Das System a verhält sich ebenso wie die Regulierwicklung im Fall a, bei welchem in der Sekundärwicklung keine Überlagerung von Strömen verschiedener Phasen stattfand. Der Strom bezogen auf die Achse III'' ist also gleich  $I_{3''} = I_3 = -I_2$

zu setzen. Der Strom im Abschnitt B<sub>u</sub> B<sub>z</sub> ist gleich  $-I_v = +I_u \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}}$ .

Für das System b mit der Achse III' ist somit der Strom  $I_{3'} = I_3 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}} = -I_2 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}}$  einzusetzen.

Jetzt können wir statt der Gleichungen (16), (19) und (21) im verallgemeinerten Fall b schreiben:

Für die Primärwicklung:

$$E_{2K} = (r_1 + j\omega L_{11\Delta}) I_1 + j\omega L_{21\Delta} I_2 - j\omega L_{31\Delta} \epsilon^{+j\beta} I_2 - j\omega L_{31\Delta} \epsilon^{+j(\beta-\frac{\pi}{3})} I_2 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}};$$

$$(36) \quad E_{1K} = (r_1 + j\omega L_{11\Delta}) I_1 + j\omega L_{21\Delta} I_2 - j\omega (L_{31\Delta\Delta} + L_{31\Delta}) \epsilon^{+j\beta} I_2.$$

Analog erhalten wir für die Sekundärwicklung:

$$(37) \quad E_{2K} = [r_2 + j\omega \{L_{22\Delta} - (L_{32\Delta\Delta} + L_{32\Delta}) \epsilon^{+j\beta}\}] I_2 + j\omega L_{12\Delta} I_1.$$

Für die Regulierwicklung ist zu beachten, daß jetzt auch eine gegenseitige Induktion der beiden Dreiphasensysteme a und b stattfindet. Die gegenseitige Induktivität bezeichnen wir mit  $L_{3a,3b\Delta} \equiv L_{ab\Delta}$  bzw.  $L_{ba\Delta}$ . Zu beachten ist hierbei, daß für das System a die Achse durch III'' und für das System b die Achse durch III' festliegt. Die Verdrehung dieser Achsen gegeneinander wird durch folgende Winkel beschrieben:

für die Verdrehung von Achse III'' gegen III' durch  $\alpha_{3''3'} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ ;  
 " " " " " III' " III'' "  $\alpha_{3'3''} = +\frac{\pi}{3}$ .

Nach diesen Überlegungen findet man für die Spannung des Abschnitts B<sub>z</sub> B<sub>v</sub>:

$$(38) \quad E_{2K} = -r_{2v} I_2 - j\omega L_{33a\Delta} I_2 + j\omega L_{23a\Delta} \epsilon^{+j\beta} I_2 + j\omega L_{13a\Delta} \epsilon^{+j(\beta-\frac{\pi}{3})} I_2 + j\omega L_{33a\Delta} I_2 - j\omega L_{23a\Delta} \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}} I_2 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}}.$$

Analog ergibt sich für die Spannung des Abschnitts B<sub>u</sub> B<sub>x</sub>:

$$(39) \quad E_{2K} = -r_{2x} I_2 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}} - j\omega L_{33b\Delta} I_2 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}} + j\omega L_{23b\Delta} \epsilon^{+j(\beta-\frac{\pi}{3})} I_2 + j\omega L_{13b\Delta} \epsilon^{+j(\beta-\frac{\pi}{3})} I_2 \dots \\ \dots + j\omega (1-s) \omega L_{23b\Delta} I_2 \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}} - j\omega L_{ab\Delta} \epsilon^{+j\frac{\pi}{3}} I_2.$$

Die Spannung des Abschnitts B<sub>v</sub> B<sub>x</sub> ist mit Rücksicht auf die Verdrehung der Achse III''' gegen die Achse III':

$$(40) \quad E_{2K}''' = E_{2K}' \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}}$$

Somit wird die Spannung zwischen den Bürsten B<sub>u</sub> und B<sub>x</sub>:

$$(41) \quad E_{2K} = E_{2K}' + E_{2K}'' + E_{2K}'''.$$

Einsatz von (38), (39) und (40) in (41) ergibt:

$$(42) \mathcal{E}_K = - (r_{3a} + r_{3b}) J_2 - j\omega(L_{33a\Delta} + L_{33b\Delta}) J_2 - j\omega(L_{ba\Delta} + L_{ab\Delta}) J_2 + \dots$$

$$\dots + j\omega(L_{23a\Delta} + L_{23b\Delta}) \varepsilon^{-j\beta} J_2 + j\omega(L_{13a\Delta} + L_{13b\Delta}) \varepsilon^{-j\beta} J_1 + \dots$$

$$\dots + j(1-s)\omega(\lambda_{s3a} + \lambda_{s3b}) J_2.$$

Für den Fall b der Überlagerung von Phasenströmen in der Regulierwicklung machen wir jetzt folgende Definitionen:

$$(43) \begin{cases} L_{13\Delta} = L_{13a\Delta} + L_{13b\Delta}; & L_{23\Delta} = L_{23a\Delta} + L_{23b\Delta}; \\ L_{31\Delta} = L_{31a\Delta} + L_{31b\Delta}; & L_{32\Delta} = L_{32a\Delta} + L_{32b\Delta}; \\ L_{33\Delta} = L_{33a\Delta} + L_{33b\Delta} + L_{ab\Delta} + L_{ba\Delta}; \\ r_3 = r_{3a} + r_{3b}; & \lambda_{s3} = \lambda_{s3a} + \lambda_{s3b}. \end{cases}$$

Mit diesen Werten behalten formal die Gleichungen (16), (19) und (21) und die anschließenden Ableitungen auch für den "Fall b" Gültigkeit.

Wir gehen nun über zu

Fall c: Sekundäre Phasenzahl  $m_2$  und Bürstenverschiebungswinkel

$\alpha_x$  beliebig.

Bei beliebiger Bürstenstellung entstehen in der Regulierwicklung  $2m_2$  Wicklungsabschnitte und zwar  $m_2$  von der Größe  $\gamma$  (im Bogenmaß) und  $m_2$  von der Bogenlänge  $\delta$ . Es ist

$$(44) \varphi = \gamma + \delta = \frac{2\pi}{m_2}. \quad (\text{Vergl. Fig. 7})$$

Die Wicklungsabschnitte können wir wieder durch Sehnen ersetzen. Wir betrachten wieder denjenigen Wicklungsabschnitt, welcher zur Achse  $B_u B_x$  parallel liegt. Nach dem vorhergehenden Kapitel müßte der Strom in diesem Abschnitt ( $i_{y,k}$ ) dem Strom  $i_u$  phasengleich und proportional sein.

Für die beiden Endpunkte des betrachteten Wicklungsabschnitts folgt aus dem Kirchhoff'schen Gesetz:

$$(45) i_{k-1,y} = i_y + i_{y,k}$$

$$(46) i_{y,k} + i_k = i_{k,y+1}$$

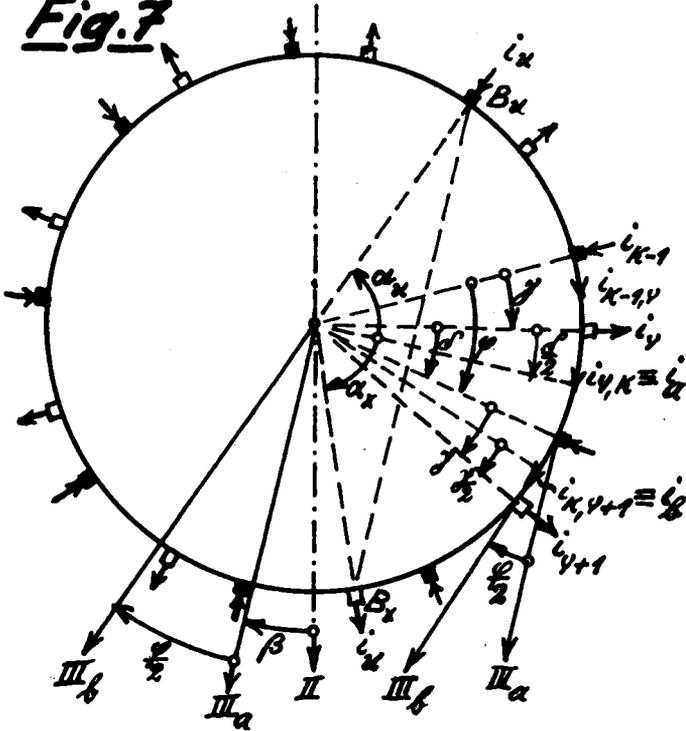
Da die Bürstenströme einem symmetrischen  $m_2$  - Phasensystem angehören, muß sein:

$$J_k = J_u \varepsilon^{-j(\alpha_x + \frac{\varphi}{2})}; \quad J_y = J_u \varepsilon^{+j(\alpha_x + \frac{\varphi}{2})}$$

Aus Symmetriegründen müssen die Ströme in allen gleichartigen Abschnitten der Größe nach einander gleich sein und gegen den jeweils folgenden Abschnitt um  $\varphi$  voreilen. Deswegen können wir schreiben:  $J_{k-1,y} = J_{k,y+1} \varepsilon^{+j\varphi}$ .

Den Abschnitt  $y,k$  betrachten wir als Abschnitt "a" und schreiben  $J_{y,k} \equiv J_a$ ; den Abschnitt  $k,y+1$  bezeichnen wir mit

**Fig. 7**



"b" und schreiben  $J_{k,y+1} \equiv J_b$ .

Damit wird aus

(45) und (46):

$$(47) J_b e^{+j\varphi} = J_a e^{+j(\alpha_x + \frac{\varphi}{2})} + J_a$$

$$(48) J_a + J_a e^{-j(\alpha_x + \frac{\varphi}{2})} = J_b$$

Daraus folgt:

$$(49) J_a = c_a J_b$$

$$(50) J_b = c_b J_a e^{-j\frac{\pi}{m_2}}$$

$$(51) c_a = \frac{\sin(\alpha_x + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{m_2})}{\sin \frac{\pi}{m_2}};$$

allgemein:

$$c_a = \frac{\sin(\alpha_x \pm \frac{\varphi}{2} \mp \frac{\pi}{m_2})}{\sin \frac{\pi}{m_2}}$$

$$(52) c_b = \frac{\sin(\alpha_x + \frac{\varphi}{2})}{\sin \frac{\pi}{m_2}}$$

$\alpha_x$  kann im Fall c (Überlagerung von Phasenströmen)

folgende Werte annehmen:

(53)  $\alpha_x = n \cdot \varphi \mp \frac{\varphi}{2}$ , worin n eine ganze Zahl ist, die sich innerhalb der Grenzen

(54)  $1 \leq n < \frac{m_2}{4} + \frac{1}{2}$  bewegen kann. Mit (53) können wir (51) und (52) auch in folgender Form schreiben:

$$(55) c_a = \frac{\sin(2n \mp 1) \frac{\pi}{m_2}}{\sin \frac{\pi}{m_2}}$$

$$(56) c_b = \frac{\sin 2n \frac{\pi}{m_2}}{\sin \frac{\pi}{m_2}}$$

Aus den Gleichungen (49) und (50) erkennen wir das erwartete Gesetz für die Phase und Richtung der Ströme: Die Ströme in den  $m_2$  Wicklungsabschnitten, welche zu denjenigen Sehnen parallel liegen, die jeweils durch die 2 Bürsten gleicher Phase gehen, stimmen mit den Strömen dieser Phasen in der Richtung überein. In den dazwischenliegenden Wicklungsabschnitten, die um  $\frac{\pi}{m_2}$  gegen erstere verdreht sind, sind auch die Ströme gegen die der benachbarten Wicklungsabschnitte um  $\frac{\pi}{m_2}$  phasenverschoben.

Das Verhältnis der Effektivwerte der Ströme benachbarter Wicklungsabschnitte ist:

$$(57) \frac{J_a}{J_b} = \frac{\sin(\alpha_x \pm \frac{\varphi}{2} \mp \frac{\pi}{m_2})}{\sin(\alpha_x + \frac{\varphi}{2})} = \frac{\sin(2n \mp 1) \frac{\pi}{m_2}}{\sin 2n \frac{\pi}{m_2}}.$$

Für diese Verhältniszahl erhält man die folgende Tabelle:

$m_2 =$	3	4	5	6	7	8	9	$\infty$
$(\frac{I_a}{I_b})_{min} =$	1	0,707	0,619	0,577	0,555	0,541	0,532	0,5
$(\frac{I_a}{I_b})_{max} =$	1	0,707	1	1,155	1	0,924	1	1

In dieser Tabelle deckt sich der Wert  $\frac{I_a}{I_b} = 1$  für  $m_2 = 3$  mit den Ableitungen des vorhergehenden Kapitels ("Fall b").

Für sehr große Phasenzahl geht (51) und (52) über in:

$$(58) \quad r_a = r_b = \frac{m_2}{\pi} \sin \alpha_x.$$

Der Wicklungsabschnitt a hat die gleiche Achsenrichtung wie die Spule der Regulierwicklung im Fall a (keine Stromüberlagerung). Die Achse des Abschnitts b ist dagegen um  $\frac{\pi}{m_2}$  gedreht. Wir erhalten daher in Analogie zu dem vorhergehenden Kapitel:

$$\mathcal{L}_K = (r_1 + j\omega L_{11\Delta}) I_1 + j\omega L_{21\Delta} I_2 - j\omega L_{31a\Delta} \epsilon^{+j\beta} I_2 - j\omega L_{31b\Delta} \epsilon^{+j(\beta+\frac{\pi}{m_2})} I_2 \epsilon^{-j\frac{\pi}{m_2}}.$$

Daraus folgt:

$$(59) \quad \mathcal{L}_K = (r_1 + j\omega L_{11\Delta}) I_1 + j\omega L_{21\Delta} I_2 - j\omega (r_a L_{31a\Delta} + r_b L_{31b\Delta}) \epsilon^{+j\beta} I_2.$$

Analog ergibt sich für die Sekundärwicklung:

$$(60) \quad \mathcal{L}_K = (r_2 + j\omega L_{22\Delta}) I_2 - j\omega (r_a L_{32a\Delta} + r_b L_{32b\Delta}) \epsilon^{+j\beta} I_2 + j\omega L_{12\Delta} I_1.$$

Die Spannung des Abschnitts a ist:

$$\mathcal{L}_a = -r_{3a} r_a I_2 - j\omega L_{33a\Delta} r_a I_2 + j\omega L_{23a\Delta} \epsilon^{-j\beta} I_2 + j\omega L_{13a\Delta} \epsilon^{-j\beta} I_1 - \dots$$

$$\dots - j\omega L_{ba\Delta} \epsilon^{+j\frac{\pi}{m_2}} r_b I_2 \epsilon^{-j\frac{\pi}{m_2}} + j(1-s)\omega \lambda_{s3a} r_a I_2.$$

und die Spannung des Abschnitts b:

$$\mathcal{L}_b = -r_{3b} r_b I_2 \epsilon^{-j\frac{\pi}{m_2}} - j\omega L_{33b\Delta} r_b I_2 \epsilon^{-j\frac{\pi}{m_2}} + j\omega L_{23b\Delta} \epsilon^{-j(\beta+\frac{\pi}{m_2})} I_2 + \dots$$

$$\dots + j\omega L_{13b\Delta} \epsilon^{-j(\beta+\frac{\pi}{m_2})} I_1 - j\omega L_{ab\Delta} \epsilon^{-j\frac{\pi}{m_2}} r_a I_2 + j(1-s)\omega \lambda_{s3b} r_b I_2 \epsilon^{-j\frac{\pi}{m_2}}.$$

Demnach ist die Spannung zwischen den Bürsten  $B_u$  und  $B_x$ :

$$\mathcal{L}_{ex} = \mathcal{L}_a [\epsilon^{+j(n-1)\varphi} + \dots + \epsilon^{+j^2\varphi} + \epsilon^{+j\varphi} + 1 + \epsilon^{-j\varphi} + \epsilon^{-j^2\varphi} + \dots + \epsilon^{-j(n-1)\varphi}] + \dots$$

$$\dots + \mathcal{L}_b [\epsilon^{+jn\varphi} + \dots + \epsilon^{+j^2\varphi} + \epsilon^{+j\varphi} + 1 + \epsilon^{-j\varphi} + \epsilon^{-j^2\varphi} + \dots + \epsilon^{-j(n-1)\varphi}];$$

$$(61) \quad \mathcal{L}_{ex} = r_a \mathcal{L}_a + r_b \mathcal{L}_b \epsilon^{+j\frac{\pi}{m_2}}.$$

Daraus folgt:

$$(62) \quad \mathcal{L}_{ex} = -(r_a^2 r_{3a} + r_b^2 r_{3b}) I_2 - j\omega (r_a^2 L_{33a\Delta} + r_b^2 L_{33b\Delta}) I_2 - j\omega r_a r_b (L_{2a\Delta} + L_{2b\Delta}) I_2$$

$$+ j\omega (r_a L_{23a\Delta} + r_b L_{23b\Delta}) \epsilon^{-j\beta} I_2 + j(1-s)\omega (r_a^2 \lambda_{s3a} + r_b^2 \lambda_{s3b}) I_2$$

$$+ j\omega (r_a L_{13a\Delta} + r_b L_{13b\Delta}) \epsilon^{-j\beta} I_1.$$

Wir definieren:

$$(63) \begin{cases} L_{13\Delta} = c_a L_{13a\Delta} + c_b L_{13b\Delta}; & L_{23\Delta} = c_a L_{23a\Delta} + c_b L_{23b\Delta}; \\ L_{31\Delta} = c_a L_{31a\Delta} + c_b L_{31b\Delta}; & L_{32\Delta} = c_a L_{32a\Delta} + c_b L_{32b\Delta}; \\ L_{33\Delta} = c_a^2 L_{33a\Delta} + c_b^2 L_{33b\Delta} + 2c_a c_b L_{ab\Delta}; \\ \lambda_{s3} = c_a^2 \lambda_{s3a} + c_b^2 \lambda_{s3b}; & r_3 = c_a^2 r_{3a} + c_b^2 r_{3b}. \end{cases}$$

Mit der Substitution (63) behalten formal die Gleichungen (16), (19) und (21) und die anschließenden Ableitungen auch für den allgemeinen Fall c Gültigkeit.

Wir wollen noch Formeln für den Grenzfall  $m_2 \cong \infty$  aufstellen. Hierfür wird:

$$(63a) L_{13\Delta} \cong \frac{m_2}{\pi} \sin \alpha_{\infty} (L_{13a\Delta} + L_{13b\Delta}); \quad L_{23\Delta} \cong \frac{m_2}{\pi} \sin \alpha_{\infty} (L_{23a\Delta} + L_{23b\Delta}) \text{ u.s.w.}$$

Wir führen jetzt die  $m_2$ -phasigen Drehinduktivitäten bzw. den Ohm'schen Widerstand der Regulierwicklung pro Windung ein und kennzeichnen diese Größen durch den Index ". Beim Umlauf um die ganze Regulierwicklung werden  $2w_3$  Windungen durchlaufen; somit umfaßt ein Abschnitt a + ein Abschnitt b  $\frac{2w_3}{m_2}$  Windungen und wir erhalten folgende Beziehungen:

$$(64) \begin{cases} \frac{L''_{13\Delta}}{L_{13a\Delta} + L_{13b\Delta}} = \frac{L''_{23\Delta}}{L_{23a\Delta} + L_{23b\Delta}} = \dots = \frac{r_3''}{r_{3a} + r_{3b}} = \frac{m_2}{2w_3}; \\ \frac{L''_{33\Delta}}{L_{33a\Delta} + L_{33b\Delta} + 2L_{ab\Delta}} = \left( \frac{m_2}{2w_3} \right)^2 \end{cases}$$

Wir führen noch den Ohm'schen Widerstand der Regulierwicklung in Durchmesserstellung der Bürsten ein; er ist:

$$(65) r_{3m} = \frac{m_2}{4} (r_{3a} + r_{3b}) = \frac{r_3'' \cdot w_3}{2}.$$

Mit (64) und (65) gehen die Gleichungen (63a) über in:

$$(66) \begin{cases} L_{13\Delta} \cong \left( \frac{2}{\pi} \sin \alpha_{\infty} w_3 \right) \cdot L''_{13\Delta} \dots \\ L_{33\Delta} \cong \left( \frac{2}{\pi} \sin \alpha_{\infty} w_3 \right)^2 \cdot L''_{33\Delta} \dots \\ r_3 = \left( \frac{2}{\pi} \sin \alpha_{\infty} \right)^2 m_2 r_{3m} \end{cases}$$

Wir bezeichnen

$$(67) w'_3 = w_3 \frac{2}{\pi} \sin \alpha_{\infty}$$

als reduzierte Windungszahl der Regulierwicklung. Sie tritt im Fall der Stromüberlagerung an die Stelle von  $w_3$ .

Der Vorlesung von Herrn Prof. K u h l m a n n entnehmen wir folgende Definitionen:

a) Ansatz für die Induktivitätskoeffizienten zweier Spulen:

$$(68) \begin{cases} L_{11} = l'_{11} + \lambda_{s1} = l_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{s1} = l_{11} + \lambda_{11}; \\ L_{22} = l'_{22} + \lambda_{s2} = l_{22} + \lambda_{21} + \lambda_{s2} = l_{22} + \lambda_{22} \end{cases}$$

Hierin entsteht  $\lambda_{s1}$  durch die einfach verkettete Streuung und  $\lambda_{12}$  durch die doppelt verkettete Streuung.

b) Wir bezeichnen mit  $w_1$  bzw.  $w_2$  die "elektrische" Windungszahl der Wicklung I bzw. II, d.h. die vom Gesamtstrom durchflossen zu denkende und pro Polpaar in Reihe liegende Windungszahl (welche mit der pro Pol in Reihe liegenden Stabzahl identisch ist).

Ferner setzen wir:

$$(69) \quad \overset{''}{u}_{12} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Daraus folgt:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{''}{u}_{12} \cdot \overset{''}{u}_{23} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{w_2}{w_3} = \frac{w_1}{w_3} = \overset{''}{u}_{13}; \\ \frac{\overset{''}{u}_{12}}{\overset{''}{u}_{13}} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{w_3}{w_1} = \frac{w_3}{w_2} = \overset{''}{u}_{32}; \end{array} \right. \quad \overset{''}{u}_{12} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{\overset{''}{u}_{21}}.$$

Wir können schreiben:

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_{11} = \frac{w_1}{w_2} L_{12} = \overset{''}{u}_{12} L_{12}; \quad l_{22} = \frac{w_2}{w_1} L_{21} = \overset{''}{u}_{21} L_{21} = \overset{''}{u}_{21}^2 L_{12}; \\ L_{12} = L_{21}; \quad l_{11} \cdot l_{22} = L_{12} \cdot L_{21} = L_{12}^2 = L_{21}^2. \end{array} \right.$$

Wir gehen nun zum Studium der S t r e u u n g über. Hierbei ist zu beachten, daß 3 Wicklungen vorhanden sind. Man könnte den Motor gewissermaßen als "allgemeinen Dreiwicklungs-Transformator" bezeichnen. Wir müssen jetzt die Induktivitätskoeffizienten genauer definieren. Es ist nämlich nicht gleichgültig, ob wir z.B.  $l_{11}$  durch Vergleich der Wicklung I mit der Wicklung II oder durch Vergleich der Wicklung I mit der Wicklung III gefunden haben. Im ersten Fall wollen wir schreiben  $l_{11II}$  und im zweiten Fall  $l_{11III}$ . Die römischen Indices sollen also anzeigen, mit welcher Wicklung ein Vergleich angestellt wurde. Wir erhalten somit an Stelle der Gleichungen (68) und (71):

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{11} = l'_{11II} + \lambda_{s1II} = l_{11II} + \lambda_{12} + \lambda_{s1II} = l_{11II} + \lambda_{11II}; \\ L_{22} = l'_{22I} + \lambda'_{s2I} = l_{22I} + \lambda_{21} + \lambda_{s2I} = l_{22I} + \lambda_{22I}; \\ l_{11II} = \frac{w_1}{w_2} L_{12} = \overset{''}{u}_{12} L_{12}; \\ l_{22I} = \frac{w_2}{w_1} L_{21} = \overset{''}{u}_{21} L_{21}; \quad l_{11II} \cdot l_{22I} = L_{12} L_{21} = L_{12}^2 = L_{21}^2. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (72) sind folgendermaßen zu verstehen:

Die Eigeninduktivität  $L_{11}$  der Primärwicklung bzw.  $L_{22}$  der Sekundärwicklung werden in die Haupt- und Streuinduktivitäten aufgeteilt. Hierbei ist als Feldbild dasjenige zugrunde zu legen, das sich ergeben würde, wenn die dritte Wicklung (also in diesem Fall die Regulierwicklung) gar nicht vorhanden, bzw. wenn diese

stromlos wäre. Wir betrachten also nur die beiden Wicklungen I und II als stromdurchflossen, suchen dafür in üblicher Weise die Streufelder und finden so die Streuinduktivitäten, wobei wir uns um die dritte Wicklung gar nicht kümmern. In der Formel (72) für  $L_{11}$  bedeutet demnach der Index II, daß wir außer der Wicklung I nur noch die Wicklung II als stromdurchflossen vorausgesetzt und für diesen Fall in bekannter Weise die Streuinduktivitäten ermittelt haben. Analog ist der Index I in der Formel (72) für  $L_{22}$  zu deuten.

Die entsprechenden Streuungskoeffizienten müssen wir sinngemäß wie folgt schreiben:

$$(73) \quad \begin{cases} \tau_{S1II} = \frac{\lambda_{S1II}}{L_{MII}}; & \tau_{12} = \frac{\lambda_{12}}{L_{11II}}; & \tau_{11II} = \tau_{12} + \tau_{S1II} = \frac{\lambda_{11II}}{L_{11II}}; \\ \tau_{S2I} = \frac{\lambda_{S2I}}{L_{22I}}; & \tau_{21} = \frac{\lambda_{21}}{L_{22I}}; & \tau_{22I} = \tau_{21} + \tau_{S2I} = \frac{\lambda_{22I}}{L_{22I}}; \\ (1 + \tau_{11II}) \cdot (1 + \tau_{22I}) = 1 + \tau_{11II} + \tau_{22I} + \tau_{11II} \tau_{22I} = 1 + \tau; & \sigma = \frac{\tau}{1 + \tau}. \end{cases}$$

Analog schreiben wir:

$$(74) \quad L_{M} = L'_{MIII} + \lambda_{S1III} = L_{MIII} + \lambda_{13} + \lambda_{S1III} = L_{MIII} + \lambda_{11III}.$$

Hierin deutet der Index III an, daß wir außer der Wicklung I nur noch die Wicklung III als stromführend betrachten, also die Wicklung II als stromlos ansehen müssen. Naturgemäß ergibt jetzt die Aufteilung von  $L_{11}$  andere Teilinduktivitäten als zuvor.

Der Vergleich von (74) mit (72) liefert:

$$L_{MIII} = L_{MII} + \lambda_{11II} - \lambda_{11III}.$$

Wir wollen noch einige R e c h e n g e s e t z e ableiten, wobei wir, um eine allgemeine Verwertbarkeit der Formeln zu erzielen, die 3 Wicklungen mit a, b und c bezeichnen. Die Vergleichsindices wollen wir dabei mit großen lateinischen Buchstaben A, B und C wiedergeben. Es gilt also:

$$(75) \quad \begin{cases} L_{aa} = L_{aaB} (1 + \tau_{aAB}) = L_{aaC} (1 + \tau_{aAC}) \\ L_{bb} = L_{bbA} (1 + \tau_{bBA}) = L_{bbC} (1 + \tau_{bBC}) \\ L_{cc} = L_{ccA} (1 + \tau_{cCA}) = L_{ccB} (1 + \tau_{cCB}) \end{cases}$$

Aus (75) folgt:

$$(76) \quad \frac{L_{aAB}}{L_{aAC}} = \frac{1 + \tau_{aAC}}{1 + \tau_{aAB}} = \frac{L_{aAB\Delta}}{L_{aAC\Delta}}$$

$$(77) \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{b\Delta\Delta}} = \frac{m_a}{m_b} \cdot \frac{1 + \tau_{a\Delta B}}{1 + \tau_{b\Delta A}} \cdot \overset{''2}{u}_{ab}$$

$$(78) \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{a\Delta\Delta}} = \frac{1}{1 + \tau_{a\Delta B}} \cdot \overset{''2}{u}_{ba}; \quad \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{b\Delta\Delta}} = \frac{m_a}{m_b} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{b\Delta A}} \cdot \overset{''2}{u}_{ab}$$

$$(79) \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{b\Delta\Delta}} = \frac{m_a}{m_b}$$

Aus (75) folgt ferner:

$$\begin{aligned} L_{aa} \cdot L_{bb} \cdot L_{cc} &= l_{a\Delta B} (1 + \tau_{a\Delta B}) \cdot l_{b\Delta C} (1 + \tau_{b\Delta C}) \cdot l_{c\Delta A} (1 + \tau_{c\Delta A}) \\ &= l_{b\Delta A} (1 + \tau_{b\Delta A}) \cdot l_{c\Delta B} (1 + \tau_{c\Delta B}) \cdot l_{a\Delta C} (1 + \tau_{a\Delta C}). \end{aligned}$$

Nun ist  $\frac{l_{a\Delta B}}{l_{b\Delta A}} \cdot \frac{l_{b\Delta C}}{l_{c\Delta B}} \cdot \frac{l_{c\Delta A}}{l_{a\Delta C}} = \overset{''2}{u}_{ab} \cdot \overset{''2}{u}_{bc} \cdot \overset{''2}{u}_{ca} = 1$ . Somit:

$$(80) (1 + \tau_{a\Delta B})(1 + \tau_{b\Delta C})(1 + \tau_{c\Delta A}) = (1 + \tau_{b\Delta A})(1 + \tau_{c\Delta B})(1 + \tau_{a\Delta C}).$$

$$\frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{c\Delta\Delta}} = \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{a\Delta\Delta}} \cdot \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{c\Delta\Delta}} = \frac{1}{1 + \tau_{a\Delta B}} \overset{''2}{u}_{ba} \frac{m_a}{m_c} \overset{''2}{u}_{ac} \frac{1 + \tau_{a\Delta C}}{1 + \tau_{c\Delta A}} \quad \text{oder auch:}$$

$$\frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{c\Delta\Delta}} = \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{b\Delta\Delta}} \cdot \frac{L_{b\Delta\Delta}}{L_{c\Delta\Delta}} = \frac{m_a}{m_b} \overset{''2}{u}_{ab} \frac{1}{1 + \tau_{b\Delta A}} \cdot \frac{m_b}{m_c} \cdot \frac{1 + \tau_{b\Delta C}}{1 + \tau_{c\Delta B}} \cdot \overset{''2}{u}_{bc}; \quad \text{somit:}$$

$$(81) \frac{L_{a\Delta\Delta}}{L_{c\Delta\Delta}} = \frac{m_a}{m_c} \overset{''2}{u}_{ac} \overset{''2}{u}_{bc} \frac{1 + \tau_{a\Delta C}}{(1 + \tau_{a\Delta B})(1 + \tau_{c\Delta A})} = \frac{m_a}{m_c} \overset{''2}{u}_{ac} \overset{''2}{u}_{bc} \frac{1 + \tau_{b\Delta C}}{(1 + \tau_{b\Delta A})(1 + \tau_{c\Delta B})}$$

Die beiden Schreibweisen für die Formel (81) decken sich mit Formel (80).

Wir wollen jetzt Gleichung (24) umformen.

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$(82) \mathcal{Z} = \tau_{II} + j\omega L_{11\Delta} \cdot \sigma_{15}, \quad \text{worin:}$$

$$\left( \frac{L_{21\Delta}}{L_{11\Delta}} - \frac{L_{31\Delta}}{L_{11\Delta}} \cdot \varepsilon + j\beta \right) \cdot \left( s \cdot \frac{L_{12\Delta}}{L_{22\Delta}} - \frac{L_{13\Delta}}{L_{22\Delta}} \cdot \varepsilon^{-j\beta} \right)$$

$$\sigma_{15} = 1 - j \frac{\frac{\tau_{II}}{\omega L_{22\Delta}} + js \left( 1 + \frac{\lambda_{S3}}{L_{22\Delta}} - \frac{L_{32\Delta}}{L_{22\Delta}} \varepsilon + j\beta \right) + j \left( \frac{L_{13\Delta}}{L_{22\Delta}} - \frac{\lambda_{S3}}{L_{22\Delta}} - \frac{L_{23\Delta}}{L_{22\Delta}} \varepsilon^{-j\beta} \right)}{1}$$

Mit (76) bis (81) wird:

$$(83) \sigma_{15} = 1 - j \frac{s \frac{1}{1 + \tau} - s \frac{\overset{''2}{u}_{32} \varepsilon + j\beta}{(1 + \tau_{11\Delta})(1 + \tau_{22\Delta})} - \frac{\overset{''2}{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta}}{(1 + \tau_{11\Delta})(1 + \tau_{22\Delta})} + \overset{''2}{u}_{32} \frac{1 + \tau_{11\Delta}}{(1 + \tau_{11\Delta})^2 (1 + \tau_{22\Delta})}}{\frac{\tau_{II}}{\omega L_{22\Delta}} + js - js \frac{\overset{''2}{u}_{32} \varepsilon + j\beta}{1 + \tau_{22\Delta\text{III}}} + js \frac{\tau_{S3\text{II}} \cdot \overset{''2}{u}_{32}}{1 + \tau_{22\Delta\text{III}}} - j \frac{\overset{''2}{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta}}{1 + \tau_{22\Delta\text{III}}} + j \frac{1 + \tau_{32}}{1 + \tau_{22\Delta\text{III}}} \overset{''2}{u}_{32}}$$

Für die weitere Rechnung beachten wir, daß die Streuung der Statorwicklung bei Vergleich mit der Primärwicklung ungefähr ebenso groß sein muß wie bei Vergleich mit der Regulierwicklung. Wir können also mit großer Annäherung setzen:

$$(84) \quad l_{22I\Delta} \cong l_{22III\Delta} \cong l_{22\Delta}; \quad \tau_{22I} \cong \tau_{22III} \cong \tau_{22}.$$

Aus (80) und (84) folgt:

$$(85) \quad (1 + \tau_{11II})(1 + \tau_{33I}) \cong (1 + \tau_{33II})(1 + \tau_{11III}).$$

Ferner wollen wir zur Abkürzung schreiben:

$$(86) \quad \rho_2 = \frac{\tau_{II}}{\omega l_{22\Delta}}.$$

Nunmehr können wir Gleichung (83) in der folgenden Form schreiben:

$$(87) \quad \sigma_{75} \cong \frac{\mathcal{L} + s \cdot \mathcal{V}}{\mathcal{A} + s \cdot \mathcal{B}}, \quad \text{worin:}$$

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \rho_2 - j \ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta} + j \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2} \\ \mathcal{B} = j(1 + \tau_{22} - \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta} + \tau_{33II} \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2}) \\ \mathcal{L} = \rho_2 - j \frac{\tau_{11III}}{1 + \tau_{11III}} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta} + j \frac{\tau_{11III}(2 + \tau_{11III}) - \tau_{11II} \cdot \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2}}{(1 + \tau_{11III})^2} \\ \mathcal{V} = j \left[ (1 + \tau_{22}) \sigma - \frac{\tau_{11III}}{1 + \tau_{11III}} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta} + \tau_{33II} \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2} \right] \end{array} \right.$$

Zu (88) ist folgendes zu bemerken:  $\rho_2$  können wir leicht berechnen.  $\sigma$  können wir wie für einen Asynchronmotor experimentell wie rechnerisch bestimmen, nämlich für die asynchrone Bürstenstellung. Mit  $\sigma$  kennen wir  $\tau$ , da  $\sigma = \frac{\tau}{1 + \tau}$ .  $\tau$  teilen wir in  $\tau_{11II}$  und  $\tau_{22}$  auf, wozu wir die Rechnung oder Schätzung zu Hilfe nehmen können. Die Wicklung III liegt in den gleichen Nuten wie die Wicklung I, letztere unten, erstere oben in der Nut. Somit ist  $\tau_{33II} < \tau_{11II}$ . Wir setzen:

$$(89) \quad \mu = \frac{\tau_{33II}}{\tau_{11II}}.$$

$\mu$  können wir aus der Rechnung oder Schätzung entnehmen. Ange-nähert ist  $\mu = 0,6$  (siehe Kapitel "Induktivitäten" !)

Die Verkettung der Primärwicklung mit der Regulierwicklung ist keinesfalls streuungslos; sie muß sogar als ziemlich schlecht bezeichnet werden, obwohl beide Wicklungen in den gleichen Nuten liegen. Wir wollen setzen:

$$(90) \quad \nu = \frac{\tau_{11III}}{\tau_{11II}}.$$

$\nu$  liegt in der Größenordnung von 0,5 - 0,6 (vergl. Kapitel "Induktivitäten" !)

Bestimmung der Konstanten.

Aus dem Leerlaufversuch (als Asynchronmotor) oder aus der Rechnung kennen wir  $\omega L_{11\Delta}$ . Aus dem Kurzschlußversuch (Schaltung ebenfalls als Asynchronmotor) kennen wir  $\sigma$ .

$$(91) \tau = \frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Wir setzen:

$$(92) \kappa = \frac{\tau_{22}}{\tau_{11\text{II}}}.$$

Annähernd ist  $\kappa = 0,55 - 0,6$  (vergl. Kapitel "Induktivitäten" !)

Aus (92) folgt:  $(1+\kappa)\tau_{11\text{II}} + \kappa\tau_{11\text{II}}^2 = \tau;$

$$\tau_{11\text{II}} = \frac{-(1+\kappa) + \sqrt{(1+\kappa)^2 + 4\kappa\tau}}{2\kappa} = \frac{1+\kappa}{2\kappa} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\kappa\tau}{(1+\kappa)^2}} \right)$$

Wir dürfen eine Reihe ansetzen und erhalten:

$$\tau_{11\text{II}} = \frac{1+\kappa}{2\kappa} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{4\kappa\tau}{(1+\kappa)^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{4\kappa\tau}{(1+\kappa)^2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{4\kappa\tau}{(1+\kappa)^2} \right)^3 - \dots \right].$$

Setzen wir als Beispiel  $\kappa = 0,55$  und  $\sigma = 0,09$ , so wird:

$$\frac{4\kappa\tau}{(1+\kappa)^2} = 0,091, \text{ somit: } \tau_{11\text{II}} = \frac{1+\kappa}{2\kappa} \left[ 0,0455 - 0,0010 + 0,00005 - \dots \right].$$

Mithin brauchen wir höchstens das lineare und das quadratische Glied zu berücksichtigen. Wir können also schreiben:

$$(93) \tau_{11\text{II}} = \frac{1}{1+\kappa} \tau \left[ 1 - \frac{\kappa}{(1+\kappa)^2} \tau \right]; \quad \tau_{22} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \tau \left[ 1 - \frac{\kappa}{(1+\kappa)^2} \tau \right].$$

Mit genügender Genauigkeit können wir setzen:

$$(93a) \tau_{11\text{II}} \cong 0,98 \cdot \frac{1}{1+\kappa} \cdot \tau; \quad \tau_{22} \cong 0,98 \cdot \frac{\kappa}{1+\kappa} \cdot \tau.$$

Die Gleichungen (93) und (93a) ermöglichen es uns die beiden Streuungskoeffizienten  $\tau_{11\text{II}}$  und  $\tau_{22}$  auszurechnen. Nach Kenntnis von  $\tau_{11\text{II}}$  erhalten wir:

$$(94) \ell_{11\text{II}\Delta} = \frac{L_{11\Delta}}{1+\tau_{11\text{II}}}; \quad \ell_{22\Delta} = \frac{m_2}{m_1} \mu_{21}^2 \ell_{11\text{II}\Delta}; \quad \rho_2 = \frac{\tau_{\text{II}}}{\omega \ell_{22\Delta}}.$$

Aus (89) und (90) ergibt sich:  $\tau_{33\text{II}} = \mu \cdot \tau_{11\text{II}}; \quad \tau_{11\text{III}} = \nu \cdot \tau_{11\text{II}}.$

Jetzt haben wir alle Konstanten ermittelt, die zur Konstruktion des Kreisdiagramms notwendig sind. Wir brauchen sie nur noch in die Gleichungen (88), (87) und (82) einzusetzen.

Berücksichtigung der Eisenverluste.

Herr Professor Dr. K. K u h l m a n n hat im Elektro-Journal August 1924, S.194-198 eine Methode zur Berücksichtigung der Eisenverluste angegeben. Er weist dort darauf hin, daß die übliche Annahme einer Wirkkomponente des Magnetisierungsstroms,

die jedoch nicht magnetisierend wirken soll, gegen das Gesetz vom magnetischen Kreis verstößt. Nach Herrn Prof. K u h l m a n n wird diese Unstimmigkeit dadurch vermieden, daß man die Ströme in ihrer vollen Stärke als magnetisierend betrachtet und die Eisenverluste durch Annahme einer Voreilung der Feldstärke  $\mathcal{H}$  gegen die Induktion  $\mathcal{L}$  um den sog. Eisenverlustwinkel  $\psi$  berücksichtigt. Wir können damit folgenden Ansatz machen, wobei wir bisher benutzte Induktivitäten jetzt durch einen Strich über dem Buchstaben kennzeichnen:

$$(95) \begin{cases} \underline{\underline{L}}_{11II} = \underline{\underline{L}}_{11II} \cdot \varepsilon^{-j\psi} = L_{112} \cdot \frac{u_2}{\omega_2} = \underline{\underline{L}}_{112} \cdot \varepsilon^{-j\psi} \frac{u_2}{\omega_2}; & L_{112} = \underline{\underline{L}}_{112} \cdot \varepsilon^{-j\psi}; \\ L_{1I} = \underline{\underline{L}}_{11II} + \lambda_{1I} = \underline{\underline{L}}_{11II} \cdot \varepsilon^{-j\psi} + \lambda_{1I} = \underline{\underline{L}}_{11II} \cdot (\varepsilon^{-j\psi} + \tau_{11II}) \text{ u.s.w.} \end{cases}$$

Der Winkel  $\psi$  ist infolge des Luftspalts außerordentlich klein und hat die Größe von etwa  $3^\circ$ . Wir können deswegen mit sehr großer Annäherung setzen:

$$(96) \varepsilon^{-j\psi} = \cos \psi - j \sin \psi \cong 1 - j\psi,$$

worin  $\psi$  im Bogenmaß zu messen ist. Die Einführung des Eisenverlustwinkels  $\psi$  läuft mithin darauf hinaus, daß in den früheren Gleichungen der Ausdruck  $1 + \tau_{xxY}$  durch  $\varepsilon^{-j\psi} + \tau_{xxY} = 1 + \tau_{xxY} - j\psi$  zu ersetzen ist, d.h. wir müssen  $\tau_{xxY}$  durch  $\tau_{xxY} - j\psi$  ersetzen. Es wird also:

$$(97) \begin{cases} \tau = (1 + \tau_{11II} - j\psi)(1 + \tau_{22I} - j\psi) - 1 \\ = (1 - j\psi)(\tau_{11II} + \tau_{22I}) + \tau_{11II} \tau_{22I} - \psi^2 - 2j\psi; \end{cases} \quad \sigma = \frac{\tau}{1 + \tau}$$

Ferner müssen wir  $\rho_2$  ersetzen durch

$$(98) \rho_2' = \frac{r_{II}}{\omega \underline{\underline{L}}_{22\Delta} (1 - j\psi)}.$$

Wir erhalten somit:

$$(82) \mathcal{Z} = r_1 + j\omega L_{11\Delta} \sigma_{15}$$

$$(87) \sigma_{15} = \frac{\alpha + s \cdot \mathcal{V}}{\alpha + s \cdot \mathcal{L}}, \text{ worin:}$$

$$(88a) \begin{cases} \alpha = \rho_2' - j \ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta} + j \ddot{u}_{32} \\ \mathcal{L} = j(1 + \tau_{22} - j\psi - \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta}) + j(\tau_{33II} - j\psi) \ddot{u}_{32} \\ \alpha = \rho_2' - j \frac{\tau_{11III} - j\psi}{1 + \tau_{11III} - j\psi} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta} + j \frac{2\tau_{11III}(1 - j\psi) - \tau_{11II} - j\psi + \tau_{11III}^2 - \psi^2}{(1 + \tau_{11III} - j\psi)^2} \ddot{u}_{32} \\ \mathcal{V} = j(1 + \tau_{22} - j\psi) \sigma - j \frac{\tau_{11III} - j\psi}{1 + \tau_{11III} - j\psi} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta} + j(\tau_{33II} - j\psi) \ddot{u}_{32} \end{cases}$$

Kreisdiagramm.

Nachdem wir nun in die Lage versetzt sind das Kreisdiagramm des Primärstroms aufzuzeichnen, wollen wir uns zunächst in diesem etwas genauer orientieren. Es ist:

$$Z = r_1 + j\omega L_{M\Delta} \frac{\alpha + s \cdot \vartheta}{\alpha + s \cdot \mathcal{L}} = \omega L_{M\Delta} \left( \rho_1 + j \frac{\alpha + s \cdot \vartheta}{\alpha + s \cdot \mathcal{L}} \right), \text{ worin:}$$

$$(99) \rho_1 = \frac{r_1}{\omega L_{M\Delta}}$$

Wir können schreiben:  $Z = \omega L_{M\Delta} \frac{f + s \cdot g}{\alpha + s \cdot \mathcal{L}}$ , worin:

$$(100) f = \rho_1 \alpha + j \mathcal{L}; \quad g = \rho_1 \mathcal{L} + j \vartheta.$$

Statt den Primärstrom zu betrachten, können wir ebenso gut den Admittanzkreis konstruieren, da der Primärstrom der Admittanz bei konstanter Klemmenspannung proportional ist. Die Admittanz ist gleich  $\mathcal{Y} = \frac{1}{Z}$ . Um dimensionslose Größen zu erhalten, die für einen allgemeinen Vergleich von Diagrammen zweckmäßig sind, definieren wir:

$$(101) \mathcal{Y}' = \omega L_{M\Delta} \mathcal{Y} = \omega L_{M\Delta} \frac{1}{Z} = \frac{\alpha + s \cdot \mathcal{L}}{f + s \cdot g} = \mathcal{Y}'_1 = \frac{\omega L_{M\Delta}}{E_{1K}} \mathcal{Y}_1.$$

Auf diese Weise haben wir die Admittanz und den Primärstrom dimensionslos gemacht. Wir erhalten dadurch Werte, die nicht mehr von der Netzspannung, der Netzfrequenz, der Phasenzahl u.s.w. abhängen, und die Resultate gewinnen an Wert, da sie leicht vergleichbar und von dem betreffenden Sonderfall unabhängig werden. Die neuen Werte für die Admittanz bzw. den Primärstrom  $= \mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'_1$  sind reine Zahlenwerte; wir wollen sie nach Vorschlag von Herrn Prof. K u h l m a n n als "Admittanzzahl" bzw. "Stromzahl" bezeichnen.

Für die Schlupfwerte  $s = 0$  bzw.  $\infty$  bzw.  $+1$  erhalten wir die charakteristischen Punkte: Synchronismuspunkt, "theoretischer" Kurzschlußpunkt, "praktischer" Kurzschlußpunkt. Für die Admittanz- bzw. Strom-Zahlen ergibt sich somit:

$$(102) \begin{cases} \text{für } s = 0: & \mathcal{Y}'_0 = \mathcal{Y}'_{10} = \frac{\alpha}{f} \\ \text{für } s = \infty: & \mathcal{Y}'_{\infty} = \mathcal{Y}'_{1\infty} = \frac{\mathcal{L}}{g} \\ \text{für } s = +1: & \mathcal{Y}'_K = \mathcal{Y}'_{1K} = \frac{\alpha + \mathcal{L}}{f + g} \end{cases}$$

Bezeichnen wir konjugiert komplexe Vektoren durch den Index "k", so können wir ohne weiteres anschreiben:

a) für den Vektor vom Ursprung zum Kreismittelpunkt:

$$(103) \mathcal{M} = \frac{g_k \cdot \alpha - f_k \cdot \mathcal{L}}{f \cdot g_k - f_k \cdot g};$$

b) für den Kreisradius:

$$(104) \quad R = \left| \frac{g\alpha - f\beta}{f g_k - f_k g} \right|.$$

Mit Hilfe von (103) und (104) kann der Kreis gezeichnet werden. Für den praktischen Gebrauch ist jedoch folgende Methode besser geeignet:

Wir suchen den Synchronismuspunkt ( $P_0$ ) und den theoretischen Kurzschlußpunkt ( $P_\infty$ ). Mit den dabei gefundenen Winkeln der zugehörigen Admittanzen können wir dann ohne weiteres das Dreieck aus  $P_0$ ,  $P_\infty$  und dem Kreismittelpunkt  $M$  konstruieren. Damit ist der Kreis gefunden. Diese Methode ist deswegen sehr praktisch, weil die Formeln für  $\eta'_0$  und  $\eta'_{\infty}$  sehr einfach sind und die Lage der Punkte  $P_0$  und  $P_\infty$  auf dem Kreis so wie so von Interesse ist.

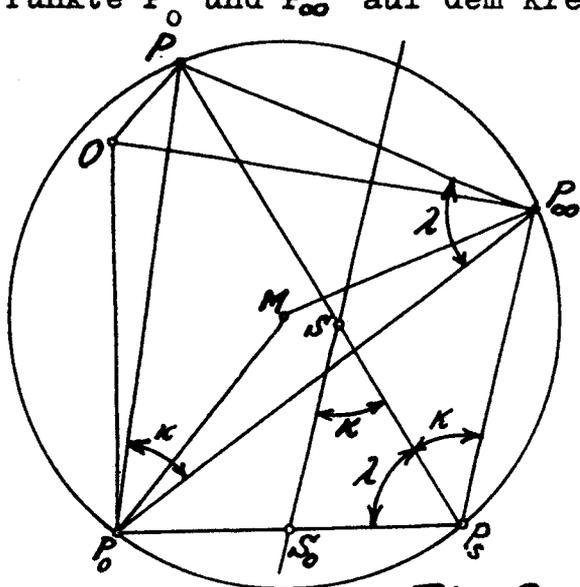


Fig. 8

Für die Ableitung dieses Verfahrens bedienen wir uns der Fig. 8, die den Admittanzkreis darstellen möge.  $O$  ist der Ursprung,  $P$  ein beliebiger Kreispunkt.

$$\vec{OP} = \eta'; \quad \vec{OP}_0 = \eta'_0; \quad \vec{OP}_\infty = \eta'_{\infty}.$$

Verbinden wir den Punkt  $P$  mit  $P_0$  und  $P_\infty$ , so ergeben sich für diese Strahlen:

$$\vec{PP}_0 = \eta'_0 - \eta' = \frac{\alpha}{f} - \frac{\alpha + s\beta}{f + sg}i;$$

$$\vec{PP}_\infty = \eta'_{\infty} - \eta' = \frac{\beta}{g} - \frac{\alpha + s\beta}{f + sg}.$$

Daraus folgt:

$$(105) \quad \frac{\vec{PP}_0}{\vec{PP}_\infty} = -s \frac{g}{f} = -s \frac{G}{F} \varepsilon^{j(\alpha_g - \alpha_f)} = s \frac{G}{F} \varepsilon^{-j[\pi - (\alpha_g - \alpha_f)]}.$$

Diese Gleichung sagt zunächst aus, daß die Strecke  $P_0 P_\infty$  von einem beliebigen Punkt des Arbeitsdiagramms aus immer unter dem Winkel  $[\pi - (\alpha_g - \alpha_f)]$  gesehen wird. Dies ist bekanntlich der Beweis dafür, daß das Arbeitsdiagramm ein Kreis ist. Weiterhin können wir der Gleichung (105) entnehmen, daß der Vektor  $\vec{PP}_0$  bei positivem Schlupf dem Vektor  $\vec{PP}_\infty$  um den Winkel  $[\pi - (\alpha_g - \alpha_f)]$  nacheilt. Daraus folgt, daß der Vektor  $\vec{MP}_0$  dem Vektor  $\vec{MP}_\infty$  um den Winkel  $2[\pi - (\alpha_g - \alpha_f)]$  nacheilt. Aus dieser Erkenntnis ergibt sich für die Konstruktion des Dreiecks ( $MP_0 P_\infty$ ) folgende Regel:

In  $P_0$  ziehen wir einen Strahl, der um den Winkel  $(\alpha_g - \alpha_f - \frac{\pi}{2})$  gegenüber  $\vec{P_0 P_\infty}$  voreilt; analog ziehen wir in  $P_\infty$  einen Strahl, der um den gleichen Winkel gegenüber  $\vec{P_\infty P_0}$  nacheilt.

Die beiden Strahlen schneiden sich im gesuchten Kreismittelpunkt M. Statt des zweiten Strahls in  $P_{\infty}$  hätten wir auch die Mittelsenkrechte zu  $P_0 P_{\infty}$  verwenden können, welche den ersten Strahl ebenfalls in M schneidet.

Letzten Endes macht die Gleichung (105) noch eine Aussage über die Größe des Schlupfes. Praktischer ist jedoch die direkte Ablesung des Schlupfes auf der Schlupfgeraden. Zu ihrer Ableitung wählen wir zunächst auf dem Kreis einen beliebigen Punkt  $P_s$ . Diesen Punkt können wir der Bequemlichkeit halber auch vertikal unterhalb  $P_{\infty}$  legen oder mit  $P_{\infty}$  zusammenfallen lassen. Wir verbinden  $P_s$  mit  $P_0, P_{\infty}$  und P. Auf  $P_0 P_s$  wählen wir einen Punkt  $S_0$ . Durch  $S_0$  ziehen wir eine Parallele zu  $P_s P_{\infty}$ . Es ist dies die "Schlupfgerade". Sie wird von  $PP_s$  in S geschnitten. Zur Abkürzung bezeichnen wir vorübergehend den Winkel  $(PP_0 P_{\infty})$  mit  $\kappa$  und den Winkel  $(PP_{\infty} P_0)$  mit  $\lambda$ . Nach dem Sinus-Satz gilt:  $\frac{PP_0}{PP_{\infty}} = \frac{\sin \lambda}{\sin \kappa}$ . Als Peripheriewinkel ist auch der Winkel  $(PP_s P_0) = \lambda$  und analog Winkel  $(PP_s P_{\infty}) = \kappa$ . Somit ist auch der Winkel  $(S_0 S P_s) = \kappa$ . Nach dem Sinus-Satz erhalten wir wiederum:  $\frac{SS_0}{S_0 P_s} = \frac{\sin \lambda}{\sin \kappa}$ . Somit ist unter Beachtung von (105):  $SS_0 = (S_0 P_s) \cdot s \cdot \frac{G}{F}$ . Wenn wir die Annahme machen, daß  $S_0 P_s$  den Wert  $\frac{F}{G}$  darstellen soll, so stellt  $(SS_0)$  im gleichen Maßstab direkt den Schlupf dar.

Das Kreisdiagramm wollen wir jetzt für die Ablesung weiterer wichtiger Größen einrichten. Zunächst betrachten wir den

S e k u n d ä r s t r o m .

Nach (16) ist: 
$$I_1 = \frac{E_{1K} - j\omega(L_{21\Delta} - L_{31\Delta} \epsilon + j\beta) I_2}{r_1 + j\omega L_{11\Delta}}$$

Wir setzen:

(106) 
$$I_{100} = \frac{E_{1K}}{r_1 + j\omega L_{11\Delta}} = \text{Leerlaufstrom als Asynchronmotor.}$$

Damit wird: 
$$I_1 = I_{100} - j \frac{\frac{m_2}{m_1} \ddot{u}_{21} - \frac{m_2}{m_1} \ddot{u}_{31} \frac{1 + \epsilon_{MII}}{1 + \epsilon_{MIII}} \epsilon + j\beta}{(r_1 + j)(1 + \epsilon_{MIII})} I_2$$
. Als den

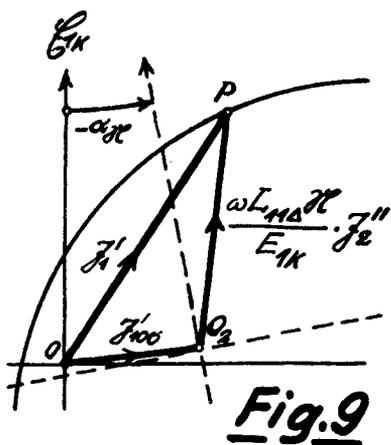
auf den Primärkreis reduzierten Sekundärstrom bezeichnen wir:

(107) 
$$I_2'' = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{u}_{21} I_2$$
 und erhalten somit:

(108) 
$$I_1 = I_{100} + \mathcal{H} I_2''$$
 bzw. 
$$I_1' = I_{100}' + \frac{\omega L_{11\Delta} \mathcal{H}}{E_{1K}} I_2''$$
 mit:

(109) 
$$\mathcal{H} = \frac{1 - \ddot{u}_{32} \frac{1 + \epsilon_{MII}}{1 + \epsilon_{MIII}} \epsilon + j\beta}{(1 + \epsilon_{MII})(1 - j\beta_1)}$$

Die Größe des Winkels  $\alpha_{\mathcal{H}}$  ist im allgemeinen ohne Interesse; sie könnte jedoch leicht aus Gleichung (107) errechnet



**Fig. 9**

werden. Die Gleichung (108) ist in Fig. 9 dargestellt. P sei ein beliebiger Punkt der Kreisperipherie und  $O_2$  der Endpunkt des Vektors  $J_{100}'$ , wobei  $\operatorname{tg} \alpha_{\pi} = \frac{\eta}{\omega L_{110} \mathcal{H}}$ . Somit stellt  $\vec{O_2 P}$  den Vektor  $\frac{\omega L_{110} \mathcal{H}}{E_{1K}} \cdot J_2''$  dar. Mit anderen Worten: Betrachten wir  $O_2$  als den Ursprung eines neuen Koordinatensystems, so ist der Abstand eines Kreispunktes P von  $O_2$  direkt ein Maß für den Sekundärstrom und zwar ist die Größe desselben gleich der Strecke  $O_2 P$  gemessen im  $J_1'$ -Maßstab (Maßstab der Stromzahl) und multipliziert mit dem Faktor  $\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{E_{1K}}{\omega L_{110} N}$ .

Die Richtungen des neuen Koordinatensystems sind im allgemeinen ohne Interesse. Der Vollständigkeit halber sei noch hinzugefügt, daß sie entgegen dem Winkel  $\alpha_{\pi}$  gegen die alten Koordinatenachsen zu drehen sind.

H a u p t f l u ß .

Als Hauptfluß wollen wir denjenigen Fluß  $\hat{\Phi}$  bezeichnen, der sowohl mit allen Windungen der Primärwicklung als auch mit allen Windungen der Sekundärwicklung verkettet ist. Für die Komponente des Hauptflusses, welche auf die Flußverkettung der Regulierwicklung zurückgeht, ist in diesem Falle als gegenseitige Induktivität der Wert  $\frac{L_{110}}{1 + \tau_{11II}} \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{E_{1K}}{\omega L_{110} N} \cdot \varepsilon^{+j\beta}$  einzuführen. Wir erhalten somit für die Flußverkettung folgende Vektorgleichung:

$$(110) \quad \hat{\Psi} = k \omega_1 \hat{\Phi} = \frac{L_{110}}{1 + \tau_{11II}} J_1 + L_{210} J_2 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{E_{1K}}{\omega L_{110} N} \cdot \varepsilon^{+j\beta} J_2.$$

Nach (78) und (107) wird daraus:

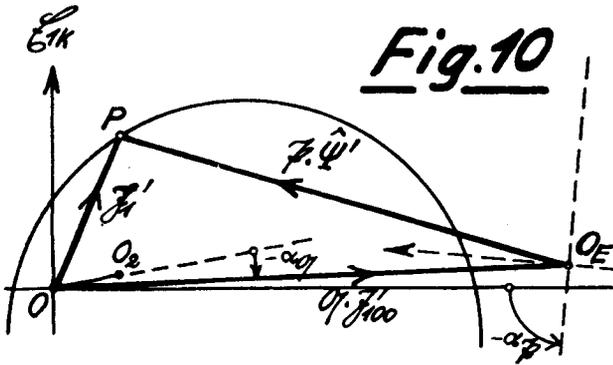
$$(111) \quad J_1 - (1 - \varepsilon^{+j\beta}) J_2 = \frac{1 + \tau_{11II}}{L_{110}} \cdot \hat{\Psi}.$$

Elimination von  $J_2$  aus (111) und (108) ergibt:

$$(112) \quad J_1' = \mathcal{H} \hat{\Psi}' + \mathcal{Q} J_{100}', \text{ worin } \hat{\Psi}' = \frac{\omega}{E_{1K}} \cdot \hat{\Psi} \text{ und}$$

$$(113) \quad \mathcal{H} = \frac{(1 + \tau_{11II}) \mathcal{H}}{\mathcal{H} - (1 - \varepsilon^{+j\beta})}; \quad \mathcal{Q} = - \frac{1 - \varepsilon^{+j\beta}}{\mathcal{H} - (1 - \varepsilon^{+j\beta})}.$$

In Fig. 10 sind die 3 Vektoren der Gleichung (112) aufgetragen. P ist ein beliebiger Punkt der Kreisperipherie. Der Vektor  $\vec{O O_E}$  ist um den Winkel  $\alpha_{\mathcal{Q}}$  gegen den Vektor  $J_{100}'$  gedreht. Seine Größe ist  $\mathcal{Q} \cdot J_{100}'$ . Jetzt ist  $\vec{O_E P}$  ohne weiteres ein Maß für die Flußverkettungszahl  $\hat{\Psi}'$ . Somit ist  $O_E$  der Ursprung des neuen Koordinatensystems. Die Richtung der neuen Koordinaten-



achsen ist im allgemeinen ohne Interesse. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß sie um den Winkel  $-\alpha_p$  gegen die alten Koordinatenachsen zu drehen sind.

Die soeben entwickelte Methode zur Bestimmung der Flußverkettung kann dazu benutzt werden, bei einem Kreisdiagramm, das ohne Berücksichtigung der Eisenverluste aufgezeichnet wurde, nachträglich eine Korrektur zur näherungsweise Berücksichtigung derselben vorzunehmen. Man braucht zu dem jeweils betrachteten Kreisbogen nur eine Wirkkomponente hinzuzufügen, die den zugehörigen Eisenverlusten entspricht. Da diese Korrektur nur sehr klein ist und der Pol  $O_E$  nahezu auf der Abszissenachse liegt, genügt es für die meisten Fälle, das ursprüngliche Koordinatensystem ein wenig zu verändern und zwar derart, daß man den Ursprung etwas entgegen der Richtung von  $E_k$  um diejenige Wirkkomponente des Magnetisierungsstroms verschiebt, welche dem Kreisbogen mit der Abszisse Null entspricht; gleichzeitig legt man die neue Abszissenachse so, daß sie die alte in demjenigen Punkt schneidet, welchem die dem Pol  $O_E$  zugehörige Abszisse zugeordnet ist. Das neue Koordinatensystem ist etwas entgegen dem Uhrzeigersinn gegen das alte gedreht. Dieses Verfahren ist allerdings nicht einwandfrei. Will man es vermeiden, so kann man auf die weiter vorn beschriebene Methode nach Herrn Prof. K u h l m a n n zurückgreifen, wobei man wegen der variablen Ummagnetisierungsfrequenz des Stators annimmt, daß die Reibungsverluste + Eisenverluste in Stator + Rotor konstant sind.

D r e h m o m e n t

Der Vorlesung von Herrn Prof. K u h l m a n n entnehmen wir folgende Formel für den Momentanwert des Drehmoments einer Maschine:

$$(114) \quad T_{\alpha t} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} i_{\kappa} i_{\lambda} \frac{d}{d\alpha} L_{(\kappa\lambda)} \alpha'$$

Da wir es hier mit einem Drehfeld zu tun haben, können wir nach Auswertung von (114) für das mittlere Drehmoment folgende Gleichungen anschreiben:

$$(115) \quad T_{\alpha \Delta} = T_{\alpha \Delta 21} + T_{\alpha \Delta 23}, \text{ worin:}$$

$$(116) \quad \begin{cases} T_{\alpha \Delta 21} = [L_{21\Delta} \overline{f}_{21}, m_1 \overline{f}_1] \text{ und} \\ T_{\alpha \Delta 23} = [L_{23\Delta} \varepsilon^{-j\beta}, m_2 \overline{f}_3] = m_2 L_{23\Delta} [\overline{f}_{21}, -\overline{f}_2 \varepsilon^{+j\beta}] = -m_2 L_{23\Delta} \overline{f}_2^2 \sin\beta. \end{cases}$$

Aus (23) erhalten wir unter Beachtung von (76) - (81) und (84):

$$\frac{J_2}{J_1} \approx \frac{m_1}{m_2} \frac{u_{12}''}{u_{12}''} j \cdot \frac{\frac{1+\tau_{11II}}{1+\tau_{11III}} u_{32}'' \varepsilon^{-j\beta} - s}{\rho_2 + j \left[ u_{32}''^2 - u_{32}'' \varepsilon^{-j\beta} + s(1+\tau_{22} - u_{32}'' \varepsilon^{+j\beta} + \tau_{33II} u_{32}''^2) \right]}$$

Hierin entspricht der Nenner des letzten Ausdrucks dem Wert  $\alpha + s\mathcal{L}$ , wie leicht durch Vergleich mit (88) ersichtlich wird. Wir können also schreiben:

$$(117) \quad \frac{J_2}{J_1} = \frac{m_1}{m_2} \frac{u_{12}''}{u_{12}''} j \cdot \frac{\frac{1+\tau_{11II}}{1+\tau_{11III}} u_{32}'' \varepsilon^{-j\beta} - s}{\alpha + s\mathcal{L}}$$

Einsatz von (101) in (117) ergibt:

$$(118) \quad J_2 = \frac{E_{1K}}{\omega L_{11\Delta}} \cdot \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{u_{12}''}{u_{12}''} j \cdot \frac{\frac{1+\tau_{11II}}{1+\tau_{11III}} u_{32}'' \varepsilon^{-j\beta} - s}{f + s\mathcal{G}}$$

Wir setzen (118) in (116) ein und erhalten:

$$(119) \quad T_{\alpha\Delta 21} = m_1 L_{21\Delta} \left( \frac{E_{1K}}{\omega L_{11\Delta}} \right)^2 \frac{m_1}{m_2} \frac{u_{12}''}{u_{12}''} j \cdot \left[ \frac{\frac{1+\tau_{11II}}{1+\tau_{11III}} u_{32}'' \varepsilon^{-j\beta} - s}{f + s\mathcal{G}} \cdot \frac{\alpha + s\mathcal{L}}{f + s\mathcal{G}} \right]$$

Im weiteren machen wir von folgender Terminologie Gebrauch:

$$(120) \quad \mathcal{V} = V_1 + jV_2 = V(\cos \alpha_{\mathcal{V}} + j \sin \alpha_{\mathcal{V}}) = V \cdot \varepsilon^{j\alpha_{\mathcal{V}}}$$

Ferner benutzen wir zur Auswertung von (119) folgende Regel:

$$(121) \quad \mathcal{L} = [\alpha, \mathcal{L}] = [(A_1 + jA_2), (B_1 + jB_2)]; \quad C = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Damit erhalten wir:

$$T_{\alpha\Delta 21} = m_1 \frac{E_{1K}^2}{\omega^2 L_{11\Delta}} \cdot \frac{\left[ j \left( \frac{1}{1+\tau_{11III}} u_{32}'' \varepsilon^{-j\beta} - \frac{1}{1+\tau_{11II}} s \right), (\alpha + s\mathcal{L}) \right]}{(F_1 + sG_1)^2 + (F_2 + sG_2)^2}$$

$$= \frac{m_1}{L_{11\Delta}} \left( \frac{E_{1K}}{\omega} \right)^2 \cdot \frac{\left\{ \begin{aligned} & s^2 \frac{u_{32}''^2 \sin \beta}{1+\tau_{11II}} \\ & + s \left[ \frac{u_{32}''^3 \sin \beta \cdot \tau_{33II}}{1+\tau_{11III}} - \frac{u_{32}''^2 \sin 2\beta}{1+\tau_{11III}} + u_{32}'' \sin \beta \left( \frac{1+\tau_{22}}{1+\tau_{11III}} - \frac{1}{1+\tau_{11II}} \right) + \frac{\rho_2}{1+\tau_{11II}} \right] \\ & + u_{32}''^3 \sin \beta \frac{1}{1+\tau_{11III}} - u_{32}'' \cos \beta \rho_2 \frac{1}{1+\tau_{11III}} \end{aligned} \right\}}{(F_1 + sG_1)^2 + (F_2 + sG_2)^2}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{L_{32\Delta}}{L_{11\Delta}} = \frac{m_2}{m_1} \frac{u_{31}''}{u_{31}''} \frac{u_{21}''}{u_{21}''} \frac{1+\tau_{22I}}{(1+\tau_{22III})(1+\tau_{11II})} \approx \frac{m_2}{m_1} \frac{u_{31}''}{u_{31}''} \frac{u_{21}''}{u_{21}''} \frac{1}{1+\tau_{11II}}$$

finden wir durch Einsatz von (118) in (116):

$$T_{\alpha\Delta 23} = -\frac{m_2^2}{m_1} \frac{u_{31}''}{u_{31}''} \frac{u_{21}''}{u_{21}''} \frac{L_{11\Delta}}{1+\tau_{11II}} \sin \beta \cdot J_2^2$$

$$= -\frac{m_1}{L_{11\Delta}} \left( \frac{E_{1K}}{\omega} \right)^2 \frac{s^2 \frac{u_{32}'' \sin \beta}{1+\tau_{11II}} - s \frac{u_{32}''^2 \sin 2\beta}{1+\tau_{11III}} + u_{32}''^3 \sin \beta \frac{1+\tau_{11II}}{(1+\tau_{11III})^2}}{(F_1 + sG_1)^2 + (F_2 + sG_2)^2}$$

Schließlich erhalten wir:  $T_{\alpha\Delta} = T_{\alpha\Delta 21} + T_{\alpha\Delta 23}$ ; also

$$(122) \quad T_{\alpha\Delta} = \frac{m_1}{L_{M\Delta}(1+\tau_{MII})} \cdot \left( \frac{E_M}{\omega} \right)^2 \cdot \frac{\left\{ \begin{aligned} & s \left( \rho_2 + \ddot{u}_{32} \sin \beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} + \ddot{u}_{32}^3 \sin \beta \tau_{33II} \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}} \right) \\ & - \rho_2 \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}} \ddot{u}_{32} \cos \beta + \ddot{u}_{32}^3 \sin \beta \frac{(\tau_{MIII} - \tau_{MII})(1 + \tau_{MII})}{(1 + \tau_{MIII})^2} \end{aligned} \right\}}{(F_1 + sG_1)^2 + (F_2 + sG_2)^2}$$

Aus dieser Gleichung können wir sofort den Leerlaufschlupf ablesen. Er ergibt sich für  $T_{\alpha\Delta} = 0$  zu:

$$(123) \quad s_l = \frac{\ddot{u}_{32} \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}} \left( \rho_2 \cos \beta - \ddot{u}_{32}^2 \sin \beta \frac{\tau_{MIII} - \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}} \right)}{\rho_2 + \ddot{u}_{32} \sin \beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} + \ddot{u}_{32}^3 \sin \beta \tau_{33II} \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}}}$$

Mit großer Annäherung ist:

$$(123a) \quad s_l \approx \frac{\ddot{u}_{32} \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}} \cos \beta}{1 + \frac{\ddot{u}_{32} \sin \beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}}}{\rho_2}}$$

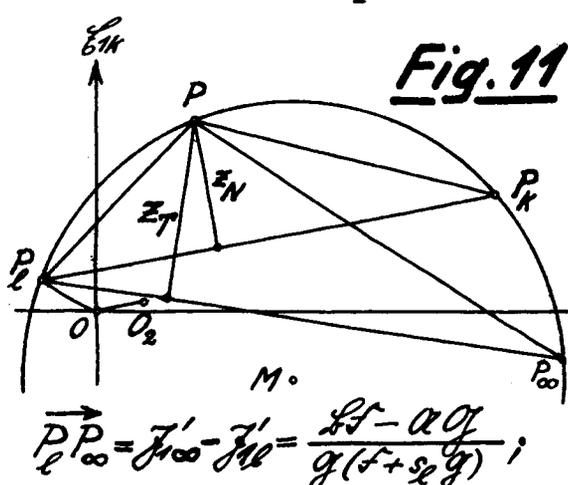
Mit grober Annäherung können wir schreiben:

$$(123b) \quad s_l \approx \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}} \ddot{u}_{32} \cos \beta \approx \ddot{u}_{32}$$

Somit ist der Leerlaufschlupf im wesentlichen durch die Größe von  $\ddot{u}_{32}$  gegeben, mindestens bei kleinem Wert von  $\beta$ .

Naheliegender ist die Vermutung, daß das Drehmoment unmittelbar im Kreisdiagramm abgelesen werden kann, ähnlich wie dies bei der Asynchronmaschine der Fall ist. In Analogie müßte dann das Drehmoment dem Abstand eines Punktes P der Kreisperipherie von der "Drehmomentgeraden" proportional sein. Da das Drehmoment im ideellen Leerlauf (Punkt  $P_1$ ) und im theoretischen Kurzschluß ( $s = \infty$ ; Punkt  $P_\infty$ ) zu Null wird, müßte die Drehmomentgerade durch die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_\infty$  gehen.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 11 dargestellt. Der Abstand des beliebigen Punktes P der Kreisperipherie von der Drehmomentgeraden ist mit  $z_T$  bezeichnet. Es ist:



$$(124) \quad \begin{cases} \vec{OP} = \vec{J}'_1 = \frac{\alpha + s_2 \mathcal{L}}{f + s_2 g} ; \\ \vec{OP}_2 = \vec{J}'_2 = \frac{\alpha + s_l \mathcal{L}}{f + s_l g} ; \\ \vec{OP}_\infty = \vec{J}'_{100} = \frac{\mathcal{L}}{g} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\vec{PP}_2 = \vec{J}'_1 - \vec{J}'_2 = (s - s_2) \frac{\mathcal{L}f - \alpha g}{(f + s_2 g)(f + s_l g)}$$

$$\vec{PP}_\infty = \left| \frac{\mathcal{L}f - \alpha g}{f + s_2 g} \right| \cdot \frac{1}{g}$$

Wir denken uns in das Kreisdiagramm ein neues Koordinatensystem gelegt. Der Ursprung desselben möge  $P_1$  sein und die Abszissenachse möge in die Richtung von  $\overline{P_1 P_\infty}$  fallen. Dann wird  $z_T$  zur Ordinate. Der Einheitsvektor in der Richtung der neuen Koordinatenachse ist  $j \frac{\overline{P_1 P_\infty}}{\overline{P_2 P_\infty}}$ . Somit hat die neue Ordinate  $z_T$  die Größe:

$$\begin{aligned} z_T &= \left( \frac{\overline{P_1 P_\infty}}{\overline{P_2 P_\infty}} \cdot j \frac{\overline{P_2 P_\infty}}{\overline{P_2 P_\infty}} \right) = \frac{(s-s_2) \cdot \left| \frac{2f-2g}{f+s_2g} \right|^2 \cdot \left( \frac{1}{f+s_2g} \cdot j \frac{1}{g} \right)}{\overline{P_2 P_\infty}} \\ &= \frac{(s-s_2) \cdot \left| \frac{2f-2g}{f+s_2g} \right|^2 \cdot (f+s_2g) \cdot jg}{\overline{P_2 P_\infty} \cdot G^2 \cdot |f+s_2g|^2} = (s-s_2) \frac{\overline{P_2 P_\infty} \cdot (f-jg)}{(F_1+sG_1)^2 + (F_2+sG_2)^2} \\ &= (s-s_2) \frac{\overline{P_2 P_\infty} \cdot (F_1G_2 - G_1F_2)}{(F_1+sG_1)^2 + (F_2+sG_2)^2} \\ &= \frac{L_{MD}(1+\tau_{MII})}{m_1} \cdot \left( \frac{\omega}{E_{IK}} \right)^2 \cdot \frac{\overline{P_2 P_\infty} \cdot (F_1G_2 - G_1F_2) \cdot T_{\alpha\Delta}}{\rho_2 + \ddot{u}_{32} \sin\beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} + \ddot{u}_{32}^3 \sin\beta \cdot \tau_{33III} \cdot \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}}} \end{aligned}$$

Wir können setzen:

$$(125) \quad \begin{cases} T_{\alpha\Delta} = C_T \cdot z_T, \text{ worin} \\ C_T = \frac{m_1}{L_{MD}(1+\tau_{MII})} \cdot \left( \frac{E_{IK}}{\omega} \right)^2 \cdot \frac{\rho_2 + \ddot{u}_{32} \sin\beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} + \ddot{u}_{32}^3 \sin\beta \tau_{33III} \frac{1 + \tau_{MII}}{1 + \tau_{MIII}}}{\overline{P_2 P_\infty} \cdot (F_1G_2 - G_1F_2)} \end{cases}$$

( $C_T$  müssen wir noch mit  $\frac{D}{9,81}$  multiplizieren, wenn wir das Drehmoment unmittelbar in kgm erhalten wollen.)

Hiermit ist der Beweis erbracht, daß  $z_T$  dem Drehmoment proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor läßt sich leicht errechnen. Für  $P_1 P_\infty$  findet man:

$$(126) \quad \overline{P_1 P_\infty} = \frac{1}{G} \cdot \sqrt{\frac{A^2G^2 + B^2F^2 - 2ABFG \cos[(\alpha_a + \alpha_g) - (\alpha_f + \alpha_s)]}{F^2 + s_2^2 G^2 + 2s_2FG \cos(\alpha_f - \alpha_g)}}$$

Für die Bestimmung des Drehmoments brauchen wir aber die Strecke  $P_1 P_\infty$  nicht aus der Gleichung (126) auszurechnen; vielmehr können wir diese Strecke einfach aus dem Kreisdiagramm abgreifen. Setzen wir  $P_1 P_\infty$  im Längenmaß (z.B. in mm) ein, so müssen wir auch  $z_T$  mit dem gleichen Maß einführen.

Zur Einzeichnung der Drehmomentgeraden in das Kreisdiagramm benötigen wir den theoretischen Kurzschlußpunkt und den Leerlaufpunkt. Die Lage des ersteren ist uns bereits aus der Konstruktion des Kreisdiagramms bekannt. Wollten wir die Lage der Drehmomentgeraden mathematisch genau festlegen, so müßten wir eigentlich auch die Lage des Leerlaufpunkts genau aufsuchen. Dies wäre auch möglich, da ja der Leerlaufschlupf aus (123) bekannt

ist und mit diesem aus (101) der Leerlaufpunkt bestimmt werden kann. Immerhin ist hiermit eine umständliche Rechenoperation verbunden. Der Arbeitsaufwand ist im allgemeinen gar nicht gerechtfertigt. Bei Aufzeichnung des Kreisdiagramms zeigt sich, daß die Drehmomentgerade praktisch durch den Punkt  $O_2$  geht. Es genügt daher die Drehmomentgerade durch die Punkte  $P_\infty$  und  $O_2$  zu ziehen; höchstens kann man sie bei tief-untersynchroner Bürstenstellung knapp oberhalb des letzteren Punktes vorbei gehen lassen. Die richtige Wahl der Lage der Drehmomentgeraden kann man leicht durch Einzeichnung der dem Leerlaufpunkt und den Kippunkten zugehörigen Schlupfwerte auf der Schlupfgeraden kontrollieren; diese 3 Schlupfwerte müssen nämlich zu ein und demselben Maßstab auf der Schlupfgeraden führen.

### K i p p s c h l u p f

Das Kippmoment, d.h. das maximale Drehmoment erhalten wir durch Nullsetzung des Differentialquotienten des Drehmoments. Somit finden wir aus (122) und (123):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{s - s_L}{(F_1 + s G_1)^2 + (F_2 + s G_2)^2} \right\} = 0.$$

Bezeichnen wir mit  $s_k$  den Kippschlupf, so finden wir diesen aus folgender Gleichung:

$$(F_1 + s_k G_1)^2 + (F_2 + s_k G_2)^2 - (s_k - s_L)^2 [G_1 (F_1 + s_k G_1) + G_2 (F_2 + s_k G_2)] = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$(127) \quad \underline{s_k = s_L \pm \frac{1}{G} \sqrt{(F_1 + s_L G_1)^2 + (F_2 + s_L G_2)^2}}.$$

Der Leerlaufpunkt und die Kippunkte sind im Kreisdiagramm leicht aufzufinden. Die Gleichungen (123) und (127) können daher mit Vorteil dazu benutzt werden um den Maßstab auf der Schlupfgeraden aus dem Leerlaufschlupf und den Kippschlupfen festzulegen. Auch ergibt sich hierbei, wie bereits erwähnt, eine Kontrolle für die richtige Lage der Drehmomentgeraden.

In analoger Weise, wie wir dies für das Drehmoment und die Drehmomentgerade getan haben, wollen wir jetzt die Formel für die abgegebene Leistung und die Leistungsgerade ableiten.

### L e i s t u n g s g e r a d e .

Als Leistung wollen wir hier die totale mechanische Leistung verstehen, also einschließlich Reibungsverluste. Wir erhalten somit für die Abgabe:

$$(128) \quad N_m \text{ (Watt)} = 1,025 n T = 1,025 (1-s) n_g T \text{ (T in kgm), worin:}$$

$$(129) n_s = \frac{60 f}{p} = \frac{30 \omega}{\pi p} = \text{synchrone Drehzahl.}$$

Wir vermuten, daß es eine Gerade, nämlich die "Leistungsgerade" gibt, deren Abstände von den Punkten der Kreisperipherie den jeweiligen, diesen Punkten zugeordneten abgegebenen Leistungen proportional sind. Diese Gerade müßte demnach durch den Leerlaufpunkt  $P_1$  (Drehmoment = Null) und den praktischen Kurzschlußpunkt  $P_k$  (Drehzahl = Null) gehen.

Diese Verhältnisse wollen wir an Hand der Fig. 11 näher untersuchen. Der Abstand des beliebigen Kreispunktes  $P$  von der Leistungsgeraden ist dort mit  $z_N$  bezeichnet. Es ist:

$$(130) \overline{OP}_k = \overline{J}'_k = \frac{a + b}{f + g}.$$

Aus (124) und (130) folgt:

$$\overline{PP} = \overline{J}'_1 - \overline{J}'_k = (s - s_2) \frac{sf - ag}{(f + sg)(f + s_2g)}$$

$$\overline{PP}_k = \overline{J}'_k - \overline{J}'_k = (1 - s) \frac{sf - ag}{(f + g)(f + s_2g)}; \quad \overline{PP}_k = |1 - s_2| \cdot \left| \frac{sf - ag}{f + s_2g} \right| \cdot \frac{1}{|f + g|}$$

In Analogie zur Berechnung von  $z_T$  erhalten wir:

$$z_N = \left( \overline{PP}, \overline{PP}_k \right). \quad \text{Daraus folgt:}$$

$$z_N = \frac{(1-s)(s-s_2)}{(1-s_2)} \cdot \frac{\overline{PP}_k \cdot (F_1 G_2 - G_1 F_2)}{(F_1 + s G_1)^2 + (F_2 + s G_2)^2}$$

$$= \left( \frac{\omega}{E_{1k}} \right)^2 \cdot \frac{L_{M\Delta} (1 + \tau_{MII}) \cdot N_m \cdot \overline{PP}_k \cdot (F_1 G_2 - G_1 F_2)}{m_1 (1 - s_2) \cdot 1,025 \cdot n_s \cdot \left( s_2 + u_{32}'' \sin \beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} + u_{32}''^3 \sin \beta \cdot \tau_{33II} \frac{1 + \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} \right)}$$

Wir können setzen:

$$(131) \begin{cases} N_m = C_N z_N, \text{ worin} \\ C_N = \left( \frac{E_{1k}}{\omega} \right)^2 \cdot \frac{1,025 (1 - s_2) n_s m_1 \left( s_2 + u_{32}'' \sin \beta \frac{\tau - \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} + u_{32}''^3 \sin \beta \cdot \tau_{33II} \frac{1 + \tau_{MIII}}{1 + \tau_{MIII}} \right)}{L_{M\Delta} (1 + \tau_{MII}) \cdot \overline{PP}_k \cdot (F_1 G_2 - G_1 F_2)} \end{cases}$$

Hiermit ist der Beweis erbracht, daß  $z_N$  der Leistungsabgabe proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist leicht zu errechnen. Für  $\overline{P}_1 \overline{P}_k$  erhalten wir:

$$(132) \overline{PP}_k = |1 - s_2| \cdot \sqrt{\frac{A^2 G^2 + B^2 F^2 - 2ABFG \cos[(\alpha_a + \alpha_g) - (\alpha_b + \alpha_f)]}{[(F_1 + G_1)^2 + (F_2 + G_2)^2] \cdot [F^2 + s_2^2 G^2 + 2s_2 FG \cos(\alpha_f - \alpha_g)]}}$$

Für die Bestimmung der Leistung brauchen wir aber  $\overline{P}_1 \overline{P}_k$  nicht aus dieser Gleichung auszurechnen; in Analogie zu unserem Vorgehen beim Drehmoment können wir die Strecke  $P_1 P_k$  einfach aus dem Kreisdiagramm abgreifen. Setzen wir  $P_1 P_k$  im Längenmaß (z.B. in mm) ein, so müssen wir auch  $z_N$  mit dem gleichen Maß einführen.

Durch Vergleich von (125) und (131), bzw. (126) und (132) finden wir:

$$(133) C_N = 1,025 n_s (1 - \xi) \frac{P_L P_\infty}{P_L P_K} \cdot C_T = 1,025 n_s \frac{\sqrt{(F_1 + G_1)^2 + (F_2 + G_2)^2}}{G} \cdot C_T.$$

### K o m m u t a t i o n

Wir wollen noch den Einfluß der Kommutation auf das Arbeitsdiagramm untersuchen.

Auf dem Integrationsweg durch die Regulierwicklung von einer Bürste einer Sekundärphase (z.B.  $B_u$  in Fig.1) zur andern Bürste derselben Phase ( $B_x$ ) durchlaufen wir Wicklungsteile, die mit kommutierenden Lamellen entweder direkt oder indirekt gekoppelt sind (z.B. die von den Bürsten  $B_z$  und  $B_v$  kurzgeschlossenen Spulen). Die indirekte Kopplung kommt dadurch zustande, daß die Flußverkettung von kommutierenden Wicklungsteilen und anderen nicht kommutierenden Wicklungsteilen, die mit ersteren in gleichen Nuten liegen, praktisch vollständig ist. Die Anzahl der Kommutierungsstellen, über die der Integrationsweg führt, ist in der Regel sehr groß, insbesondere deswegen, weil beim Schrage-Motor die sekundäre Phasenzahl oft groß gewählt wird und durch die Bürstenverschiebung und eine eventuelle Schrittverkürzung der Regulierwicklung die Kommutierungsstellen auseinander gezogen werden.

In jeder Kommutierungsstelle der Regulierwicklung kommt eine zusätzliche Spannungskomponente dadurch zustande, daß dort während der Kommutierung der Sekundärstrom von einem Wert in einen anderen geändert werden muß. Wir wollen zunächst diesen Vorgang der Stromänderung studieren.

Die Fig.12 stellt einen Ausschnitt aus der Abwicklung der Regulierwicklung dar. Es ist hier zum besseren Verständnis eine Ringwicklung gezeichnet; die Übertragung der gewonnenen Erkenntnisse auf die Schleifenwicklung bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

Der Kommutator möge sich von links nach rechts bewegen! Bevor die Lamellen auf die Bürste auflaufen, möge der Strom in den zugehörigen Stäben der Regulierwicklung die Stärke  $i_I$ , nach dem Ablauen die Stärke  $i_{II}$  haben! Im gezeichneten Zeitpunkt sei der Strom in der kommutierenden Spule  $i_4$ ! Der Bürstenstrom  $i_B$  möge sich in die Teile  $i_{1B}$  und  $i_{2B}$  aufspalten. Dann bestehen nach dem Kirchhoff'schen Gesetz für die 3 Verzweigungsstellen A, C und D folgende Beziehungen:

$$(134) i_{1B} + i_{2B} = i_B;$$

$$(135) i_I + i_{1B} = i_4;$$

$$(136) i_4 + i_{2B} = i_{II}.$$

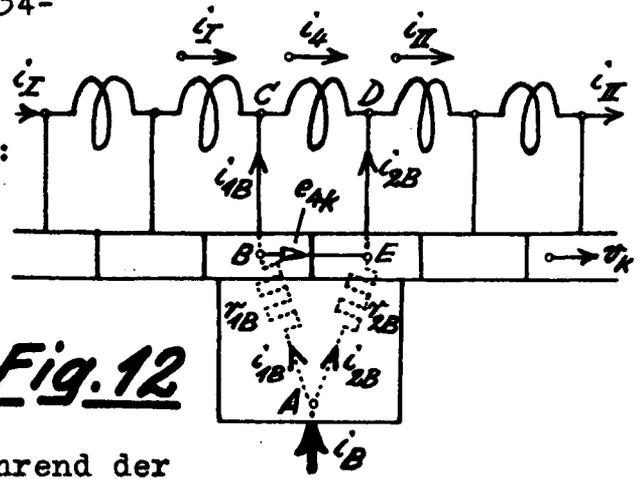
Aus (135) und (136) folgt sofort:

$$i_I + i_{1B} + i_{2B} = i_{II}$$

und daraus mit Berücksichtigung von (134):

$$(137) \underline{i_I + i_B = i_{II}}.$$

**Fig. 12**



Demnach ändert sich der Strom in der Regulierwicklung während der Kommutierung um den Betrag des Bürstenstromes. Dieses Gesetz gilt allgemein und ist unabhängig von der Bürstenbreite, der Kommutierungszeit u.s.w.

Für eine kommutierende Spule wollen wir das Umlaufintegral bilden. Der Integrationsweg ist A B C D E A. Beim Schrage-Motor, der keine Wendepole besitzt, werden stets harte Bürsten mit einem großen Übergangswiderstand verwendet. Wir sind daher berechtigt im betrachteten Integrationsweg lediglich den Ohm'schen Widerstand ( $r_{1B}$  und  $r_{2B}$ ), der in den Übergangsstellen zwischen Bürste und Kommutator bzw. in der Bürste selbst seinen Sitz hat, zu berücksichtigen, während wir demgegenüber den kleinen Ohm'schen Widerstand der Wicklung und der Verbindungen zwischen Wicklung und Kommutator vernachlässigen können. Aus dem Umlaufintegral folgt:

$$(138) i_{1B} r_{1B} - i_{2B} r_{2B} = - \frac{d\psi_4}{dt}.$$

Die Spannung zwischen den beiden kommutierenden Lamellen, also zwischen den Punkten B und E möge gleich  $e_{4k}$  sein. In (138) sind  $r_{1B}$  und  $r_{2B}$  komplizierte Funktionen der Stellung der Bürste gegenüber den Lamellen und der Stromdichte. Das gleiche gilt demnach auch für die Teilströme  $i_{1B}$  und  $i_{2B}$ . Welches Gesetz darin steckt, wollen wir hier nicht untersuchen. Es genügt, wenn wir die Lamellenspannung  $e_{4k}$  aus der Beziehung

$$(139) e_{4k} = \frac{d\psi_4}{dt} \quad \text{berechnen.}$$

Da die Streuung gegenüber den anderen kommutierenden Spulen groß ist, können wir, wenigstens zunächst, die Gegeninduktivität gegenüber diesen vernachlässigen.

Für die Induktivität der Phase U der Primärwicklung gegen die betrachtete kommutierende Spule schreiben wir:

$$L_{1U,4} = L_{1,4} \max \cos(\alpha_{1U,4}). \quad \text{Analog: } L_{1V,4} = L_{1,4} \max \cos(\alpha_{1V,4})$$

u.s.w. Dann erhalten wir:

$$\psi_4 = i_4 L_{44} + i_{1U} L_{1U,4} + i_{1V} L_{1V,4} + i_{1W} L_{1W,4} + i_{2U} L_{2U,4} + \dots + i_{3U} L_{3U,4} + \dots;$$

$$(140) \quad \Psi_4 = i_4 L_{44} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} \sum_{X=U}^{X=W} i_{(\alpha X)} L_{(\alpha X, 4)}$$

Einsatz von (140) in (139) ergibt:

$$(141) \quad e_{4k} = L_{44} \frac{di_4}{dt} + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} \sum_{X=U}^{X=W} i_{(\alpha X)} L_{(\alpha X, 4)}$$

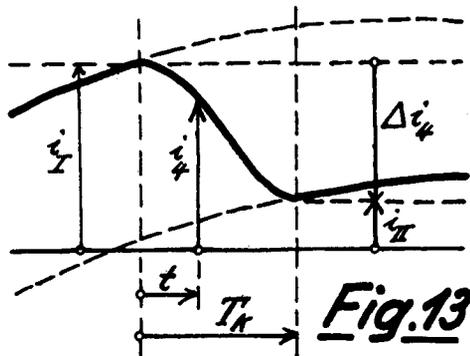
Wir setzen:

$$(142) \quad e_{4k} = e_r + e_t, \text{ worin}$$

$$(143) \quad e_r = L_{44} \frac{di_4}{dt} \quad \text{und}$$

$$(144) \quad e_t = \frac{d}{dt} \sum \sum i L.$$

Zunächst betrachten wir das Glied  $e_r$ . Es ist eine Funktion von  $i_4$ , welches seinerseits eine sehr komplizierte Funktion ist, da die Kommutierung wegen des Fehlens von Wendepolen sicher nicht "geradlinig" erfolgt. Damit ist auch das Gesetz für  $\frac{di_4}{dt}$  und  $e_r$



schwer zu erfassen. In Fig. 13 ist für  $i_4$  eine beliebige Funktion der Zeit angenommen. Von dieser sind nur die Grenzwerte am Anfang und Ende der Kommutierungszeit  $T_k$  bekannt; sie sind  $i_I$  und  $i_{II}$ . Weil man stets schmale Bürsten verwendet, ist die Kommutierungszeit  $T_k$  sehr klein. Mit Rücksicht darauf können

wir für  $\frac{di_4}{dt}$  den Mittelwert während dieses Zeitintervalls einführen. Er ist:

$$(145) \quad \left(\frac{di_4}{dt}\right)_{\text{mittel}} = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \frac{di_4}{dt} dt = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} di_4 = \frac{1}{T_k} (i_{II} - i_I) = \frac{i_B}{T_k}$$

Damit wird aus (143):

$$(146) \quad \underline{e_r} \approx L_{44} \frac{i_B}{T_k}$$

Das Glied  $e_r$  ist somit nichts anderes als die Stromwende-  
spannung oder Reaktanzspannung, die durch die Stromänderung in  
der kommutierenden Spule induziert wird.

Das zweite Glied  $e_t$  ist die Spannung, die durch den mit  
der Regulierwicklung verketteten Drehfluß induziert wird; sie  
wird oft Transformatorspannung genannt. Wenn wir bei der Berech-  
nung der Spannung  $\mathcal{E}_{2k}$  den Integrationsweg über sämtliche Spulen  
der Regulierwicklung zwischen den Bürsten  $B_u$  und  $B_x$  (s. Fig. 1)  
erstrecken, also auch über sämtliche kommutierende Spulen, über  
die der Integrationsweg führt, so sind in der Spannung  $\mathcal{E}_{2k}$  die  
Glieder  $e_t$  sämtlicher kommutierenden Spulen bereits enthalten.  
Wir brauchen uns daher um diese Spannungskomponente gar nicht

mehr zu kümmern, da sie durch die Spannung  $e_{2k}$  bereits berücksichtigt wird. (Dabei vernachlässigen wir den Einfluß des Kurzschlußstroms, welcher durch Kurzschluß der Transformatorspannung über die Bürste entsteht.) Wir studieren im folgenden die durch die Kommutierung neu hinzukommende Spannungskomponente  $e_r$ .

Für die Kommutierungszeit können wir auch schreiben:

$$(147) T_k = \frac{b}{v_k}, \text{ worin}$$

$b$  = Bürstenbreite in cm,

$v_k = \pi D_k \frac{n}{60}$  = Kommutatorumfangsgeschwindigkeit in  $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ,

$D_k$  = Kommutatordurchmesser,

$n = (1-s) \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{60}{f}$  = Drehzahl, somit

$v_k = (1-s) \omega \frac{D_k}{2f}$  und

$$(148) T_k = \frac{b}{D_k} \frac{2f}{(1-s)\omega}$$

Damit wird:

$$(149) e_r = c_r (1-s) \omega i_B, \text{ worin}$$

$$(150) c_r = L_{44} \frac{D_k}{b \cdot 2f}$$

Aus Gleichung (149) geht hervor, daß die Reaktanzspannung sowohl die Frequenz als auch die Phase des zugehörigen Bürstenstromes besitzt. Daher bilden alle Reaktanzspannungen zusammen ein mehrphasiges System von gleicher Phasenzahl und Frequenz wie die Sekundärwicklung. Wir können nun sämtliche kommutierende Spulen als ein Drehsystem betrachten und für dieses Drehinduktivitäten einführen.

Wir wollen untersuchen, wie in dem Beispiel der Fig.1 auf dem Integrationsweg der Spannung  $e_{2k}$  die Reaktanzspannungen in Erscheinung treten. In Fig.12 haben wir die Lamellenspannung von B nach E, also im Umlaufsinn des Kommutators positiv gezählt. Dementsprechend müssen wir den Integrationsweg für  $e_{2k}$  im Drehsinn des Motors durchlaufen, also in der Reihenfolge  $B_u B_y B_w B_x$ . Die Summe aller Reaktanzspannungen auf diesem Wege ist:

$$\sum e_r = c_r (1-s) \omega \left( \frac{1}{2} i_{B_u} + i_{B_y} + i_{B_w} + \frac{1}{2} i_{B_x} \right).$$

Für diese Spannung können wir vektoriell schreiben:

$$e_r = c_r (1-s) \omega \left( \frac{1}{2} j_{3u} - j_{3v} + j_{3w} - \frac{1}{2} j_{3x} \right),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(151) e_r = c_r (1-s) \omega j\sqrt{3} j_{3u}$$

Da die kommutierenden Spulen ein Drehsystem darstellen, können wir symbolisch setzen:

$$(152) L_{44\Delta} = \sqrt{3} \cdot r_r$$

und erhalten damit:

$$(153) \underline{E_r} = j(1-s)\omega L_{44\Delta} \underline{I}_3$$

Die Stromwendung kommt somit in der Klemmenspannung der Regulierwicklung wie eine Streuinduktivität, deren Achse mit derjenigen der Regulierwicklung III zusammenfällt, in Erscheinung.

Es muß auch eine Rückwirkung der Kommutierungsstellen auf die 3 Wicklungen des Motors stattfinden. Die Gegeninduktivitäten der kommutierenden Spulen mit diesen Wicklungen bezeichnen wir mit  $L_{43\Delta}$ ,  $L_{42\Delta} \epsilon^{+j\beta}$ ,  $L_{41\Delta} \epsilon^{+j\beta}$ . Zu  $L_{43\Delta}$  ist noch zu bemerken, daß es die induktive Verkettung der kommutierenden Spulen der Regulierwicklung mit den nicht kommutierenden Spulen derselben Wicklung darstellt.

Mit diesen Induktivitäten gehen die Gleichungen (16), (19) und (21) über in:

$$(154) \underline{E}_{1K} = (r_1 + j\omega L_{11\Delta}) \underline{I}_1 + j\omega [L_{21\Delta} - (L_{31\Delta} + L_{41\Delta}) \epsilon^{+j\beta}] \underline{I}_2$$

$$(155) \underline{E}_{2K} = \{r_2 + j s \omega [L_{22\Delta} - (L_{32\Delta} + L_{42\Delta}) \epsilon^{+j\beta}]\} \underline{I}_2 + j s \omega L_{42\Delta} \underline{I}_1$$

$$(156) \underline{E}_{3K} = -\{r_3 + j\omega [L_{33\Delta} + (1-s)L_{44\Delta} - L_{23\Delta} \epsilon^{-j\beta} + L_{43\Delta}]\} \underline{I}_2 + j\omega L_{43\Delta} \epsilon^{-j\beta} \underline{I}_1 + j(1-s)\omega L_{33\Delta} \underline{I}_2$$

Durch Vergleich der 3 neuen Gleichungen (154), (155) und (156) mit den 3 alten Gleichungen (16), (19) und (21) gewinnen wir folgende Erkenntnis: Die Stromwendung kommt in den Gleichungen dadurch zur Geltung, daß

- zum Glied  $L_{33\Delta}$  ein Glied  $(1-s) L_{44\Delta}$  hinzukommt und
- zu allen Gliedern  $L_{3x\Delta}$  je ein Glied  $L_{4x\Delta}$  hinzutritt (mit  $x = 1$  oder 2 oder 3).

Zur Gesetzmäßigkeit unter b) ist zu bemerken, daß stets  $L_{4x\Delta}$  sehr klein gegenüber  $L_{3x\Delta}$  ist. Wir können daher einfach setzen:  $L'_{3x\Delta} = L_{3x\Delta} + L_{4x\Delta}$  worin  $L'_{3x\Delta}$  um einen geringen Prozentsatz größer als  $L_{3x\Delta}$  ist. Oder wir können  $L_{4x\Delta}$  einfach vernachlässigen und erhalten  $L'_{3x\Delta} \cong L_{3x\Delta}$ . Damit gewinnen wir folgende Regel: Unsere alte Ableitung können wir ohne weiteres wieder verwenden, indem wir ersetzen:

- $L_{33\Delta}$  durch  $L_{33\Delta} + (1-s) L_{44\Delta}$  und gegebenenfalls für genaue Rechnung noch
- $L_{3x\Delta}$  durch  $L'_{3x\Delta}$ .

Somit erhalten wir aus Gleichung (24):

$$(157) \underline{I} = r_1 + j\omega L_{11\Delta} + \frac{\omega^2 (s L_{12\Delta} - L_{13\Delta} \epsilon^{-j\beta}) (L_{21\Delta} - L'_{31\Delta} \epsilon^{+j\beta})}{r_2 + j\omega [L'_{33\Delta} - \lambda + L_{44\Delta} - L_{23\Delta} \epsilon^{-j\beta}] + s(L_{22\Delta} + \lambda_{s3} - L_{44\Delta} - L'_{32\Delta} \epsilon^{+j\beta})}$$

Wir erkennen, daß das Arbeitsdiagramm für Impedanz und Admittanz wiederum je ein Kreis ist.

In Analogie zu unserer früheren Rechnung wollen wir nun die Streuungskoeffizienten einführen. Wir definieren noch als eine Art Streuungskoeffizient:

$$(158) \tau_r = \frac{L_{44\Delta}}{L_{22\Delta}}$$

Mit genügender Genauigkeit können wir setzen:

$$(159) \frac{L_{41\Delta}}{L_{31\Delta}} = \frac{L_{42\Delta}}{L_{32\Delta}} = \frac{L_{43\Delta}}{L_{33\Delta}} = \tau_x$$

Hierzu ist zu bemerken, daß  $\tau_x$  einen sehr kleinen Wert darstellt.

Analog zu Gleichung (82) schreiben wir:

$$(160) Z = r_1 + j\omega L_{11\Delta} \sigma_{15}^*, \text{ worin:}$$

$$(161) \sigma_{15}^* = \frac{a^* + s \mathcal{L}^*}{\alpha^* + s \mathcal{L}^*} \text{ mit:}$$

$$(162) \begin{cases} \alpha^* = \rho_2 + j\tau_r - j\ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta} + j(1+\tau_x) \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2} \\ \mathcal{L}^* = j \left[ 1 + \tau_{22} - \tau_r - (1+\tau_x) \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta} + \tau_{33II} \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2} \right] \\ \mathcal{L}^{*'} = \rho_2 + j\tau_r - j \frac{\tau_{11III} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta}}{1+\tau_{11III}} + j(1+\tau_x) \left[ 1 - \frac{1+\tau_{11III}}{(1+\tau_{11III})^2} \right] \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2} \\ \mathcal{V}^* = j(1+\tau_{22})\sigma - j\tau_r - j(1+\tau_x) \frac{\tau_{11III}}{1+\tau_{11III}} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta} + j\tau_{33II} \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2} \end{cases}$$

Die Gleichungen (162) können wir auch in folgender Form schreiben:

$$(163) \begin{cases} \alpha^* = \alpha + j(\tau_r + \tau_x \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2}) \\ \mathcal{L}^* = \mathcal{L} - j(\tau_r + \tau_x \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta}) \\ \mathcal{L}^{*'} = \mathcal{L} + j \left[ \tau_r + \tau_x \frac{\tau_{11III}(2+\tau_{11III}) - \tau_{11II} \ddot{u}_{32}^{\prime\prime 2}}{(1+\tau_{11III})^2} \right] \\ \mathcal{V}^* = \mathcal{V} - j(\tau_r + \tau_x \frac{\tau_{11III}}{1+\tau_{11III}} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{+j\beta}) \end{cases}$$

$\tau_x$  ist sehr klein und spielt gegenüber  $\alpha$  und  $\mathcal{L}$  keine Rolle. In den Ausdrücken für  $\mathcal{L}^*$  und  $\mathcal{V}^*$  erscheint es noch mit weiteren Streuungskoeffizienten behaftet, sodaß es auch dort vernachlässigt werden kann. Somit können wir mit großer Genauigkeit setzen:

$$(164) \alpha^* = \alpha + j\tau_r; \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{L} - j\tau_r; \quad \mathcal{L}^{*'} = \mathcal{L} + j\tau_r; \quad \mathcal{V}^* = \mathcal{V} - j\tau_r$$

Für die primäre Stromzahl erhalten wir wie früher:

$$(165) f_1' = \frac{\alpha^* + s \mathcal{L}^*}{f^* + s g^*}, \text{ worin}$$

$$(166) f^* = \rho_1 \alpha^* + j \mathcal{L}^*; \quad g^* = \rho_1 \mathcal{L}^* + j \mathcal{V}^*$$

Bisher haben wir uns darauf beschränkt den Einfluß der Kommutation auf den Primärstrom zu untersuchen. Wir wollen nun noch prüfen, in welcher Weise die Reaktanzspannung bei den anderen Maschinengrößen in Erscheinung tritt.

In den Ableitungen für den Sekundärstrom und den Hauptfluß tritt lediglich an die Stelle von  $L_{31\Delta}$  der Wert  $L'_{31\Delta}$ , während  $L_{44\Delta}$  nicht hinzukommt. Da wir aber  $L'_{31\Delta} \cong L_{31\Delta}$  setzen konnten, dürfen wir die Ableitungen unverändert übernehmen; die Gleichungen (109) und (113) behalten somit ihre Gültigkeit.

In der Ableitung für das Drehmoment behalten die Gleichungen (117) und (118) Gültigkeit, wenn man statt  $\alpha, \beta, f$  und  $g$  die Werte  $\alpha^*, \beta^*, f^*$  und  $g^*$  einsetzt. Somit tritt im Zähler von (122) folgender Ausdruck hinzu:

$$\left[ j \left( \frac{1}{1+\tau_{11III}} \ddot{u}_{32} \varepsilon^{-j\beta} - \frac{1}{1+\tau_{11II}} s \right), (j\tau_r - j's\tau_r) \right] = + \frac{\ddot{u}_{32} \sin\beta}{1+\tau_{11III}} \tau_r (1-s).$$

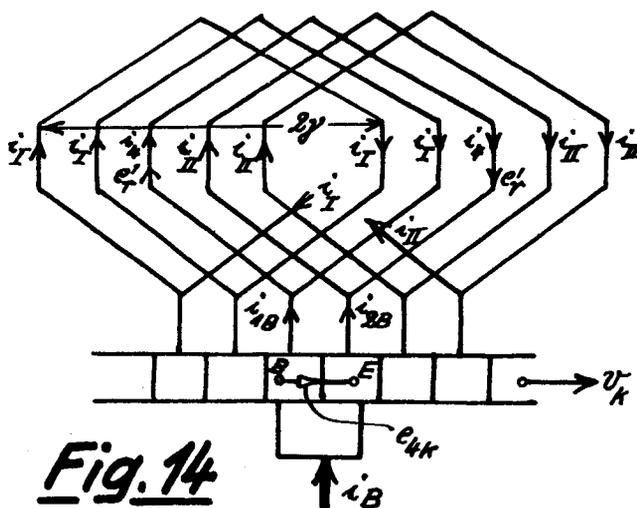
Demnach treten in (125) für  $C_T$  und in (131) für  $C_N$  folgende Änderungen ein:  $F_1, F_2, G_1, G_2$  sind zu ersetzen durch  $F_1^*, F_2^*, G_1^*, G_2^*$ .

Die zugehörigen Zähler sind zu ergänzen durch:  $-\ddot{u}_{32} \sin\beta \frac{\tau_r}{1+\tau_{11III}}$ .

In der Formel (123) für den Leerlaufschlupf treten hinzu: im Zähler  $-\frac{\tau_r \sin\beta}{1+\tau_{11II}}$ , im Nenner  $-\ddot{u}_{32} \sin\beta \frac{\tau_r}{1+\tau_{11III}}$ .

Die Formel (127) für den Kippschlupf bleibt unverändert, sofern statt  $f$  und  $g$  die Werte  $f^*$  und  $g^*$  eingesetzt werden.

Die Formeln (152) und (153) haben sich auf eine Ringwicklung mit  $m_2 = 3$  bezogen. Wir wollen noch untersuchen, wie sich die Verhältnisse für eine Schleifenwicklung bei beliebiger Phasenzahl und bei beliebiger Bürstenverschiebung gestalten.



**Fig. 14**

Zunächst wollen wir die Fig. 12 auf die Schleifenwicklung übertragen. Das entsprechende Schema zeigt die Fig. 14. Sie stellt einen Ausschnitt aus der Abwicklung dar. Angenommen ist eine ungekreuzte, also vorwärtsschreitende Schleifenwicklung. Der Windungsschritt ist mit  $2\gamma^0$  el. eingezeichnet. (Ein un verkürzter Schritt würde  $2\gamma = \pi$

entsprechen.) Im übrigen entsprechen die Bezeichnungen der Fig. 14 denen der Fig. 12. Die Komponente  $e_r$  von  $e_{4k}$ , d.h. die Reaktanzspannung, wollen wir in der kommutierenden Windung auf jeden Stab

aufteilen. Für die Reaktanzspannung pro Stab schreiben wir  $e'_r$ . Sie ist ebenfalls in Fig.14 eingetragen.

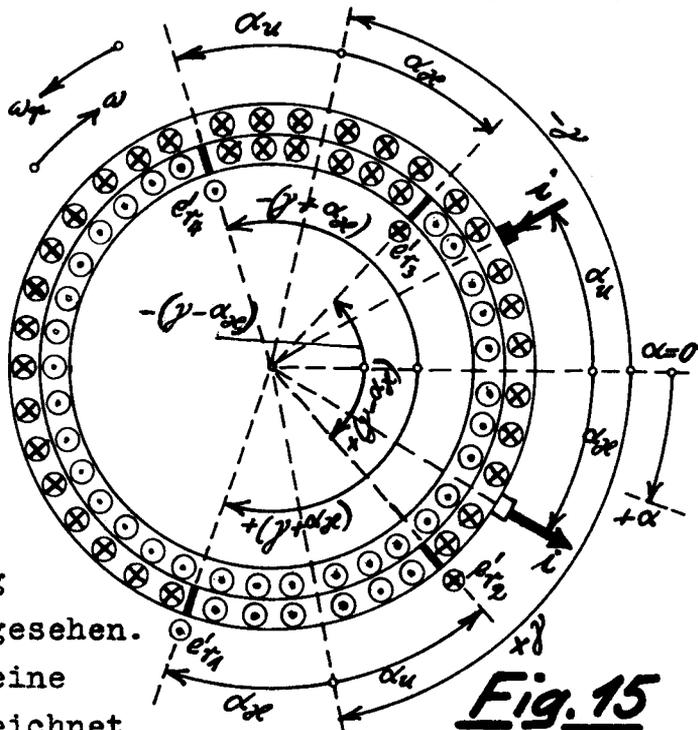
Für die Reaktanzspannung pro Stab können wir gemäß (149) und (150) schreiben:

(167)  $e'_r = c_r(1-s)\omega i_3$ , worin

(168)  $c_r = \Lambda_r k \frac{D_k}{b 2p}$  und

(169)  $\Lambda_r =$  Streuleitwert einer Nut pro cm Eisenlänge für die Regulierwicklung.

Nun übertragen wir die Abwicklung Fig.14 in das Schema der ganzen Regulierwicklung Fig.15. Die Wicklung ist von Kommutatorseite aus gesehen. Es sind die Bürsten nur für eine einzige Sekundärphase eingezeichnet



**Fig.15**

und für diesen Fall ist der Stromverlauf in der Regulierwicklung dargestellt. Die resultierende Stromverteilung in der Regulierwicklung wird dann durch Superposition von den Strombildern, die sich für jede Phase in analoger Weise ergeben, erhalten.

Zunächst betrachten wir nur die gezeichnete Phase. Ferner machen wir vorerst noch die Einschränkung, daß sich in einer Nut höchstens 1 kommutierender Stab befinden möge. Die Reaktanzspannung pro Stab  $e'_r$  wollen wir positiv rechnen, wenn sie an der betrachteten Stelle von Nichtkommutatorseite nach Kommutatorseite gerichtet ist. Es sind 4 Kommutierungsstellen vorhanden; die Reaktanzspannungen an diesen Punkten wollen wir folgendermaßen bezeichnen:

- 1) im Punkt  $\alpha = +(\gamma + \alpha_{xp})$ : Komponente der 1. Art =  $e'_{r1} = -c_r(1-s)\omega i$
- 2) " "  $\alpha = +(\gamma - \alpha_x)$ : " " 2. " =  $e'_{r2} = +c_r(1-s)\omega i$
- 3) " "  $\alpha = -(\gamma - \alpha_{xp})$ : " " 3. " =  $e'_{r3} = +c_r(1-s)\omega i$
- 4) " "  $\alpha = -(\gamma + \alpha_x)$ : " " 4. " =  $e'_{r4} = -c_r(1-s)\omega i$

Für die weitere Untersuchung wollen wir zunächst die Annahme machen, daß die sekundäre Phasenzahl  $m_2$  sehr groß sein soll. Wir können sie in diesem Fall als unendlich groß betrachten, da die Zahl der Kommutierungsstellen pro doppelte Polteilung gleich  $4 m_2$  ist.

Der Strom der gezeichneten Phase möge den Wert  $i_3$  bzw. als Vektor die Größe  $\vec{I}_3$  haben. Eine Phase, die um den Winkel  $\alpha$

im Zählsinn (Uhrzeigersinn) gegenüber der gezeichneten Phase gedreht ist, führt dann den Strom  $\tilde{f}_3 \varepsilon^{-j\alpha}$ .

Wir wollen jetzt die totale Reaktanzspannung im Punkt  $\alpha = \alpha$  berechnen. Sie ist die vektorielle Summe von 4 Komponenten, die jeweils von einem Strom der Sekundärphase von entsprechender Phasenverschiebung herrühren. Es sind dies die folgenden 4 Komponenten:

Komponente der 1. Art:  $\mathcal{E}'_{r1} = -L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{+j(\gamma + \alpha_x - \alpha)}$   
 " " 2. " :  $\mathcal{E}'_{r2} = +L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{+j(\gamma - \alpha_x - \alpha)}$   
 " " 3. " :  $\mathcal{E}'_{r3} = +L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{-j(\gamma - \alpha_x + \alpha)}$   
 " " 4. " :  $\mathcal{E}'_{r4} = -L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{-j(\gamma + \alpha_x + \alpha)}$

Die totale Reaktanzspannung im Punkt  $\alpha = \alpha$  ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{r\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \mathcal{E}'_{r\alpha} = L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \left[ -\varepsilon^{+j(\gamma + \alpha_x - \alpha)} + \varepsilon^{+j(\gamma - \alpha_x - \alpha)} - \varepsilon^{-j(\gamma - \alpha_x + \alpha)} + \varepsilon^{-j(\gamma + \alpha_x + \alpha)} \right] \\ &= L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{-j\alpha} \left[ 2 \cos(\gamma - \alpha_x) - 2 \cos(\gamma + \alpha_x) \right] \\ (170) \mathcal{E}'_{r\alpha} &= 4L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{-j\alpha} \sin \alpha_x \sin \gamma. \end{aligned}$$

Auf eine doppelte Polteilung treffen  $4m_2$  Kommutierungsstellen. Auf den Bogen  $d\alpha$  entfallen somit  $4m_2 \frac{d\alpha}{2\pi}$  Kommutierungsstellen. Die Reaktanzspannung pro Bogen  $d\alpha$  an der Stelle  $\alpha = \alpha$  ist demnach:

$$d\mathcal{E}'_{r\alpha} = 4L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \varepsilon^{-j\alpha} \sin \alpha_x \sin \gamma \cdot m_2 \frac{d\alpha}{2\pi}.$$

Die totale Reaktanzspannung pro Phase  $\mathcal{E}'_r$  ist die vektorielle Differenz aus der Resultierenden in der Unterschicht und der Resultierenden in der Oberschicht. Demnach ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_r &= \frac{2}{\pi} m_2 L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \sin \alpha_x \sin \gamma \left[ - \int_{-(\gamma + \alpha_x)}^{-(\gamma - \alpha_x)} \varepsilon^{-j\alpha} d\alpha + \int_{+(\gamma - \alpha_x)}^{+(\gamma + \alpha_x)} \varepsilon^{-j\alpha} d\alpha \right] \\ &= j \frac{2}{\pi} m_2 L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \sin \alpha_x \sin \gamma \left[ \varepsilon^{+j(\gamma - \alpha_x)} - \varepsilon^{+j(\gamma + \alpha_x)} + \varepsilon^{-j(\gamma + \alpha_x)} - \varepsilon^{-j(\gamma - \alpha_x)} \right] \\ &= j \frac{4}{\pi} m_2 L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \sin \alpha_x \sin \gamma \left[ \cos(\gamma - \alpha_x) - \cos(\gamma + \alpha_x) \right]. \end{aligned}$$

$$(171) \mathcal{E}'_r = +j \frac{8}{\pi} m_2 L_r(1-s)\omega \tilde{f}_3 \sin^2 \alpha_x \sin^2 \gamma.$$

Hierfür können wir schreiben:

$$(172) \mathcal{E}'_r = j(1-s)\omega L_{44\Delta} \tilde{f}_3, \text{ worin}$$

$$(173) L_{44\Delta} = L_r \frac{8}{\pi} m_2 \sin^2 \alpha_x \sin^2 \gamma.$$

Unter Berücksichtigung von (168) erhalten wir:

$$(174) \underline{L_{44\Delta} = \Lambda_r \frac{\ell_{DK}}{b_p} 2 \frac{2}{\pi} m_2 \sin^2 \alpha_x \sin^2 \gamma 10^{-8}}$$

Demnach ist  $L_{44\Delta}$  und nach (158) auch  $\tau_r$  proportional zu  $\sin^2 \alpha_x$  und zu  $\sin^2 \gamma$ .

Wenn in gewissen Nuten mehr als je ein kommutierender Stab vorhanden ist, so kann  $L_{44\Delta}$  und  $\tau_r$  beträchtlich größer werden. Dieser Fall entsteht dadurch, daß an manchen Stellen ein kommutierender Stab der Oberschicht in der gleichen Nut wie ein kommutierender Stab der Unterschicht liegt. Dadurch könnte  $L_{44\Delta}$  und  $\tau_r$  doppelt so groß werden. Man kann diesen Umstand durch einen Zuschlag von entsprechender Größe berücksichtigen.

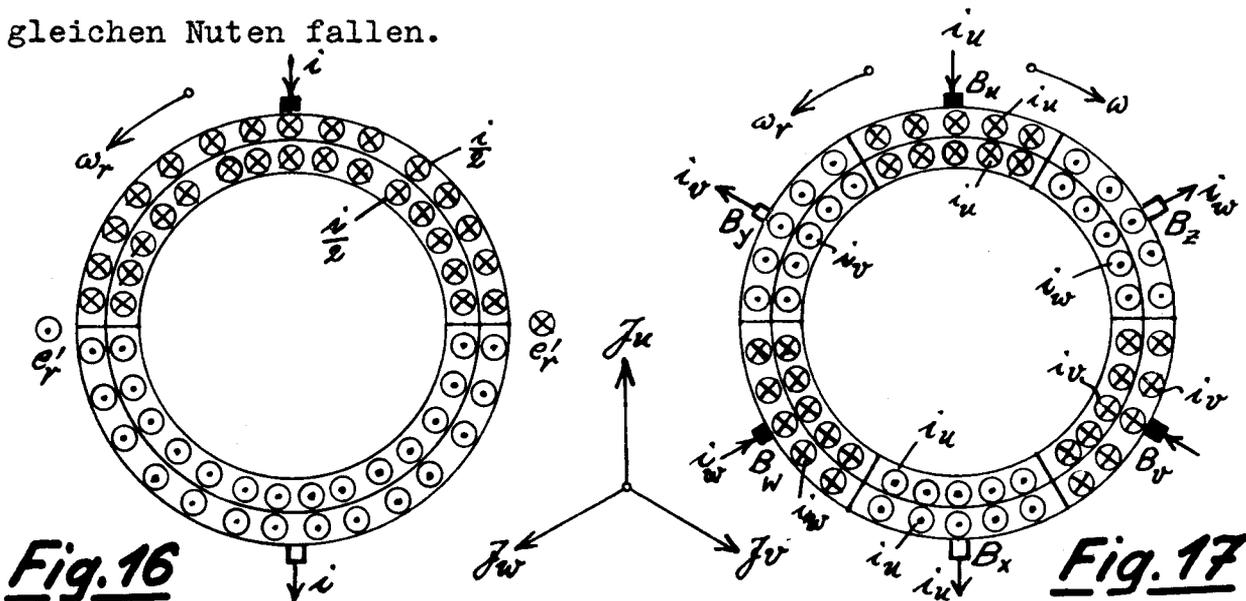
Bisher haben wir die Formeln für unendlich große sekundäre Phasenzahl aufgestellt. Wenn wir diesen Fall als den Idealfall betrachten, müssen wir für kleinere Phasenzahlen noch einen Korrekturfaktor einführen. Wir setzen:

$$(175) L_{44\Delta} = c_r \cdot L_{44\Delta\infty}; \quad \tau_r = c_r \cdot \tau_{r\infty}.$$

Wir wollen diesen Korrekturfaktor  $c_r$  für  $m_2 = 3/6/9$  ausrechnen.

a) Sonderfall:  $m_2 = 3$ .

Der Einfachheit halber führen wir die Rechnung für  $\alpha_x = \frac{\pi}{2}$  und  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  durch (Bürsten in Durchmesserstellung; Schritt unverkürzt). Analog zu Fig.15 ergibt sich die Stromverteilung nach Fig.16. Durch Superposition aller 3 Sekundärphasen folgt daraus die Fig.17. Damit das Resultat mit den zuvor gewonnenen vergleichbar wird, wollen wir wie dort die Annahme machen, daß an allen Kommutierungsstellen die kommutierenden Stäbe nicht in die gleichen Nuten fallen.



Aus der Fig.17 können wir jetzt die resultierende Reaktanzspannung ablesen. Wir erhalten für den Integrationsweg zwischen den Bürsten  $B_u$  und  $B_x$ :

$$L_r = 2 c_r (1-s) \omega \left( -\frac{1}{2} J_{3u} - \frac{1}{2} J_{3u} + J_{3w} + J_{3w} - J_{3v} - J_{3v} + \frac{1}{2} J_{3u} + \frac{1}{2} J_{3u} \right)$$

$$\mathcal{L}_r = j\sqrt{3} \cdot 4 \cdot c_r (1-s) \omega \mathcal{J}_{3u}, \quad \text{worin wir } \mathcal{J}_{3u} = \mathcal{J}_3 \text{ setzen können.}$$

Durch Vergleich mit (172) finden wir:  $L_{44\Delta(m_2=3)} = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot c_r$

Nach (173) und (175) müßte sein:  $L_{44\Delta(m_2=3)} = c_r \cdot \frac{8}{\pi} \cdot 3 \cdot c_r$

Daraus folgt:  $c_r = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,907$ . Da bei 6 Sekundärphasen die Verhältnisse ebenso liegen, halten wir fest:

$$c_r = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,907 \quad \text{für } m_2 = 3 \text{ oder } 6.$$

b) Sonderfall:  $m_2 = 9$ .

Auch hier wollen wir der Einfachheit halber die Rechnung für  $\alpha_{20} = \gamma = \frac{\pi}{2}$  durchführen.

Für eine einzige Sekundärphase gilt wieder die Fig.16. Für die andern Phasen sind die Bürsten und die Stromverteilungen jeweils um  $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$  zu verschieben (s. Fig.18). Wir erhalten für die Reaktanzspannung:

$$\mathcal{L}_r = 4 \cdot c_r (1-s) \omega \mathcal{J}_3 \left( +\varepsilon \begin{matrix} -j200^\circ & -j40^\circ & -j240^\circ & -j80^\circ & -j280^\circ & -j120^\circ & -j320^\circ \\ -\varepsilon & +\varepsilon & -\varepsilon & +\varepsilon & -\varepsilon & +\varepsilon & -\varepsilon \end{matrix} -j160^\circ \right)$$

$$\mathcal{L}_r = j8 c_r (1-s) \omega \mathcal{J}_3 \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cos 10^\circ \right).$$

Durch Vergleich mit (172) ergibt sich:  $L_{44(m_2=9)} = 8 \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cos 10^\circ \right) c_r$

Nach (173) und (175) müßte sein:

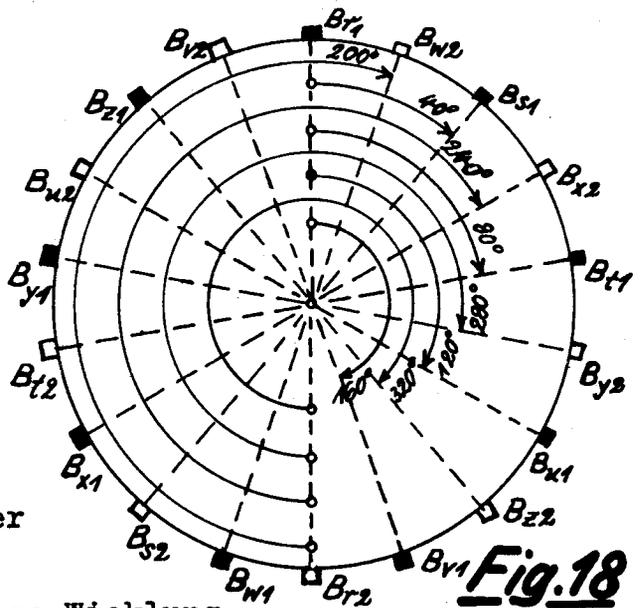
$$L_{44\Delta(m_2=9)} = c_r \frac{8}{\pi} 9 c_r.$$

Daraus folgt:

$$c_r = \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 \cos 10^\circ \right) \frac{\pi}{9} = 0,99$$

für  $m_2 = 9$ .

Aus diesem Zahlenwert, der nur um 1% von 1 verschieden ist, ersieht man, daß sich die 9-phasige Wicklung mit großer Genauigkeit wie eine Wicklung mit unendlich großer Phasenzahl verhält.



### I n d u k t i v i t ä t e n .

Wir wollen noch studieren, welchen Gesetzmäßigkeiten die Induktivitäten unterliegen. Außerdem benötigen wir noch Formeln für die charakteristischen Koeffizienten  $\kappa$ ,  $\mu$  und  $\nu$ . Aus  $\kappa$ ,  $\mu$  und  $\nu$  können die einzelnen Streukoeffizienten leicht berechnet werden.

#### 1) Induktivitäten des Hauptflusses.

Die gegenseitigen Induktivitäten folgen aus dem Drehfeld, welches mit den beiden betrachteten mehrphasigen Wicklungen verkettet ist. Um eine allgemein verwendbare Lösung zu erhalten, bezeichnen wir die beiden mehrphasigen Wicklungen mit a und b.

Wenn die Wicklung a vom Strom  $I_a$  durchflossen wird, so entsteht dadurch ein Drehfeld. Die maximale Induktion desselben ist:

$$(176) B_{\Delta} = \frac{m_a}{2} \cdot \frac{F_a \omega_a \sqrt{2}}{2 \delta'} k_a \gamma_0 \frac{4}{\pi}.$$

Hierin ist  $\delta' = K' \delta =$  reduzierter Luftspalt, in welchem durch den Faktor  $k'$  die Nutung und eventuell auch noch die Eisensättigung berücksichtigt wird;

$$\gamma_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} = \frac{4\pi}{10} \cdot 10^{-8};$$

$$k_a = \frac{\sin \frac{q_a \gamma_a}{2}}{q_a \cdot \sin \frac{\gamma_a}{2}};$$

$q_a =$  Zahl der Nuten pro Pol und Phase;

$\gamma_a =$  Nutenabstand in  $^{\circ}$ el.

Ferner sei:  $l =$  Eisenlänge;

$r =$  Radius, gemessen im Luftspalt.

Dann ist die Größe des totalen Drehflusses von  $p$  Polpaaren:

$$\begin{aligned} \Phi_{ab\Delta} &= \left(\frac{2}{\pi} \cdot B_{\Delta}\right) \cdot r\pi \cdot l = \frac{m_a}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \sqrt{2} \cdot \omega_a k_a \cdot \left(\frac{r\pi l}{2\delta'} \gamma_0\right) \cdot F_a \\ &= \frac{m_a}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \sqrt{2} \cdot K \cdot \omega_a k_a \cdot F_a, \text{ worin:} \end{aligned}$$

$$(177) K = \frac{r\pi l}{2\delta'} \cdot \gamma_0.$$

Der Drehfluß induziert in der mehrphasigen Wicklung b eine Spannung von der Größe:  $E_b = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \cdot \omega_b k_b \cdot \Phi_{ab\Delta} = \omega L_{ab\Delta} \cdot F_a.$

$$(178) L_{ab\Delta} = \frac{\omega_b k_b \Phi_{ab\Delta}}{\sqrt{2} \cdot F_a} = \frac{m_a}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot K \cdot (\omega_a k_a) \cdot (\omega_b k_b).$$

Daraus folgt:

$$(179) L_{11\Delta} = \frac{m_1}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot K \cdot \omega_1^2 \cdot k_1 k_2; \quad L_{22\Delta} = \frac{m_2}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot K \cdot \omega_2^2 \cdot k_1 k_2.$$

## 2) Berechnung von $K$ .

Nach (92) und (73) ist:  $K = \frac{\tau_{22\Delta}}{\tau_{11\Delta}} = \frac{\tau_{21\Delta} + \tau_{22I}}{\tau_{12\Delta} + \tau_{11II}}.$

Bei Einführung der Wickelfaktoren erhalten wir:

$$\lambda_{12} = \frac{(K'_{11} - K_{12}) \cdot \Phi_{12} \cdot \omega_1}{i_1}; \quad L_{11II} = \frac{K_{12} \cdot \Phi_{12} \cdot \omega_1}{i_1}$$

$$\lambda_{21} = \frac{(K'_{22} - K_{21}) \cdot \Phi_{21} \cdot \omega_2}{i_2}; \quad L_{22I} = \frac{K_{21} \cdot \Phi_{21} \cdot \omega_2}{i_2}$$

Daraus folgt:

$$(180) \tau_{12\Delta} = \frac{\lambda_{12}}{L_{11II}} = \frac{K'_{11} - K_{12}}{K_{12}}; \quad \tau_{21\Delta} = \frac{\lambda_{21}}{L_{22I}} = \frac{K'_{22} - K_{21}}{K_{21}}.$$

Aus (180) geht hervor, daß die Koeffizienten der doppelt verkette-

ten Streuung lediglich von konstruktiven Abmessungen abhängen.

Für die einfach verkettete Streuung gilt:

$$\tau_{s1II} = \frac{\lambda_{s1II}}{l_{11II\Delta}} ; \quad \tau_{s2I} = \frac{\lambda_{s2I}}{l_{22I\Delta}}$$

Wir bezeichnen allgemein:

$\Lambda$  = Streuleitwert pro Halbwindung und  $p$  Polpaare;

$s$  = Zahl der in Reihe geschalteten Drähte pro Nut; also  $w = sq$ .

Dann ist die Streuinduktivität:

$$(181) \quad \lambda = 2qs^2\Lambda = \frac{2}{q}w^2\Lambda.$$

Somit erhalten wir:

$$(182) \quad \lambda_{s1II} = \frac{2}{q_1}w_1^2\Lambda_{s1II} \quad \text{und mit (179)}$$

$$(183) \quad \tau_{s1II} = \frac{\Lambda_{s1II}}{q_1 \cdot \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot K \cdot k_1 k_2}$$

Analog ist:

$$(183a) \quad \tau_{s2I} = \frac{\Lambda_{s2I}}{q_2 \cdot \frac{m_2}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot K \cdot k_1 k_2}$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, daß auch die Koeffizienten der einfach verketteten Streuung im wesentlichen von konstruktiven Daten abhängen.

Somit hängt auch  $\kappa$  im wesentlichen nur von konstruktiven Daten ab. Es ist unabhängig von  $\alpha_{2e}$  und  $\beta$ .

Es möge bezeichnen:

$N_1$  = totale Nutzahl des Rotors;  $N_2$  = totale Nutzahl des Stators.

Dann muß sein:

(184)  $N_1 = m_1 \cdot 2p \cdot q_1$ ;  $N_2 = m_2 \cdot 2p \cdot q_2$  und wir erhalten bei Vernachlässigung der doppelt verketteten Streuung:

$$(185) \quad \kappa \cong \frac{\Lambda_{s2I}}{\Lambda_{s1II}} \cdot \frac{N_1}{N_2}$$

$\kappa$  liegt meist in der Größenordnung von 0,55 - 0,6.

### 3) Berechnung von $\mu$ .

Nach (89) und (73) ist:  $\mu = \frac{\tau_{33II\Delta}}{\tau_{11II\Delta}} = \frac{\tau_{32\Delta} + \tau_{s3II}}{\tau_{12\Delta} + \tau_{s1II}}$ .

Mit den Wickelfaktoren können wir sofort die Koeffizienten der doppelt verketteten Streuung anschreiben:

$$(186) \quad \tau_{32\Delta} = \frac{K'_{33} - K_{32}}{K_{32}} ; \quad (180) \quad \tau_{12\Delta} = \frac{K'_{11} - K_{12}}{K_{12}}$$

Bei der Untersuchung der Überlagerung von Strömen verschiedener Phasen in der Regulierwicklung haben wir diese in  $2m_2$  Wicklungsabschnitte  $a$  und  $b$  zerlegt. Die Windungszahl eines

Abschnitts (a + b) ist:  $\frac{2w_2}{m_2}$ . Die zugehörige Drehinduktivität ist:

$$(187) \quad \mathcal{L}_{33II\Delta} = \frac{m_2}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot K \cdot \left(\frac{2w_2}{m_2}\right)^2 \cdot K_2 \cdot K_3.$$

In (187) ist:  $w_2 = \frac{N_1 \cdot s_3}{4r}$ ;  $\frac{2w_2}{m_2} = \frac{N_1 \cdot s_3}{2r \cdot m_2}$ .

Für die Induktivität der einfach verketteten Streuung ergibt sich:

$$\lambda_{s3II} = \frac{N_1}{m_2} \cdot (s_3)^2 \cdot \frac{\Lambda_{s3II}}{r} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{2}{q_1} \cdot \left(\frac{2w_2}{m_2}\right)^2 \cdot \Lambda_{s3II}.$$

Daraus folgt:

$$(188) \quad \tau_{s3II} = \frac{\lambda_{s3II}}{\mathcal{L}_{33II\Delta}} = \frac{\Lambda_{s3II}}{q_1 \cdot \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot K \cdot K_2 \cdot K_3}.$$

$$(183) \quad \tau_{s1II} = \frac{\Lambda_{s1II}}{q_1 \cdot \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot K \cdot K_1 \cdot K_2}.$$

Aus Obigem folgt, daß die Streuungskoeffizienten, die in der Größe  $\mu$  stecken, im wesentlichen nur von konstruktiven Daten abhängig sind. Das Gleiche gilt dann auch von der Größe  $\mu$  selbst.  $\mu$  ist unabhängig von  $\alpha_{20}$  und  $\beta$ .

Bei Vernachlässigung der doppelt verketteten Streuung folgt aus (188) und (183):

$$(189) \quad \mu \cong \frac{\Lambda_{s3II}}{\Lambda_{s1II}} \cdot \frac{K_1}{K_3}.$$

$\mu$  liegt in der Größenordnung von 0,6.

#### 4) Berechnung von $\nu$ .

Nach (89) und (73) ist:  $\nu = \frac{\tau_{11III\Delta}}{\tau_{11II\Delta}} = \frac{\tau_{13\Delta} + \tau_{s1III}}{\tau_{12\Delta} + \tau_{s1II}}.$

Mit den Wickelfaktoren schreiben sich die Koeffizienten der doppelt verketteten Streuung folgendermaßen:

$$(190) \quad \tau_{13\Delta} = \frac{K'_{11} - K_{13}}{K_{13}}; \quad (180) \quad \tau_{12\Delta} = \frac{K'_{11} - K_{12}}{K_{12}}.$$

Für die Koeffizienten der einfach verketteten Streuung ergeben sich in Analogie zu den vorstehenden Ableitungen:

$$(191) \quad \tau_{s1III} = \frac{\Lambda_{s1III}}{q_1 \cdot \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot K \cdot K_1 \cdot K_3};$$

$$(183) \quad \tau_{s1II} = \frac{\Lambda_{s1II}}{q_1 \cdot \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot K \cdot K_1 \cdot K_2}.$$

Demnach sind die Streuungskoeffizienten, von denen  $\nu$  abhängt, und somit auch  $\nu$  selbst im wesentlichen nur von konstruktiven Daten abhängig.  $\nu$  ist unabhängig von  $\alpha_{20}$  und  $\beta$ .

Bei Vernachlässigung der doppelt verketteten Streuung folgt aus (191) und (183):

$$(192) \quad \nu \cong \frac{\Lambda_{s1III}}{\Lambda_{s1II}} \cdot \frac{K_2}{K_3}.$$

$\nu$  liegt meist in der Größenordnung von 0,5 - 0,6.

Erstes Beispiel: Sehr niedrige Sättigung.

Daten des Motors:

35/11,7 PS 1400/470 Umdr./Min. 550 Volt 50 Hz

2p = 6; N<sub>1</sub> = 54; N<sub>2</sub> = 72;

Primärwicklung: 22 Leiter pro Nut; m<sub>1</sub> = 3; Dreieck - Serie.

Regulierwicklung: 10 Leiter pro Nut; Schritt = 4/9.

Statorwicklung: 18 Leiter pro Nut; m<sub>2</sub> = 6; 3 parallele Gruppen.

Bei der Messung betrug die Klemmenspannung nur 200 Volt, also 36,4 % der Nennspannung. Die Kreisdiagramme wurden für die gleiche Spannung aufgezeichnet. Bei dieser geringen Spannung spielt die Eisensättigung keine Rolle und die Induktivitäten können als konstant angesehen werden.

Bei Kurzschluß der Statorwicklung (Schaltung als Asynchronmaschine) wurden folgende Werte bei 200 Volt Klemmenspannung gemessen:

Leerlaufstrom = I<sub>00</sub> = 3,9 Amp;

Kurzschlußstrom = I<sub>k</sub> = 49 Amp (cos φ<sub>k</sub> = 0,19).

Daraus folgt:  $\omega L_{M\Delta} = \frac{200\sqrt{3}}{3,9} = 89$  Ohm pro Phase;

I<sub>∞</sub> = 51,5 Amp für s = ∞ aus dem Ossanna-Kreis.

Somit  $\sigma = \frac{3,9}{51,5} = 0,076$  und  $\tau = \frac{0,076}{1 - 0,076} = 0,0823$ .

Die Rechnung ergab: κ = 0,54; μ = 0,55; γ = 0,7.

Es ist:  $\omega_1 = \frac{54 \cdot 22}{2 \cdot 3 \cdot 3} = 66$  und  $\omega_2 = \frac{72 \cdot 18}{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3} = 12$ .

Also:  $\alpha_{12} = \frac{66}{12} = 5,5$ .

Für die Streukoeffizienten ergibt sich:

$\tau_{II} = 0,98 \cdot \frac{1}{1 + 0,54} \cdot 0,0823 = 0,052$ ;  $\tau_{22} = 0,98 \cdot \frac{0,54}{1 + 0,54} \cdot 0,0823 = 0,029$ .

Probe:  $\tau = 0,052 + 0,029 + 0,052 \cdot 0,029 = 0,0825$  (stimmt!)

$\tau_{33II} = 0,052 \cdot 0,55 = 0,0286$ ;  $\tau_{III} = 0,052 \cdot 0,7 = 0,0364$ .

$\omega L_{MII\Delta} = \frac{89}{1,052} = 84,5$ ;  $\omega L_{22\Delta} = \frac{6}{3} \cdot \frac{84,5}{(5,5)^2} = 5,6$ .

Aus den Eisenabmessungen folgt nach (177) mit  $\frac{d'}{d} = 1,35$ :  $K = 56 \cdot 10^{-6}$ .

Daraus ergibt sich:

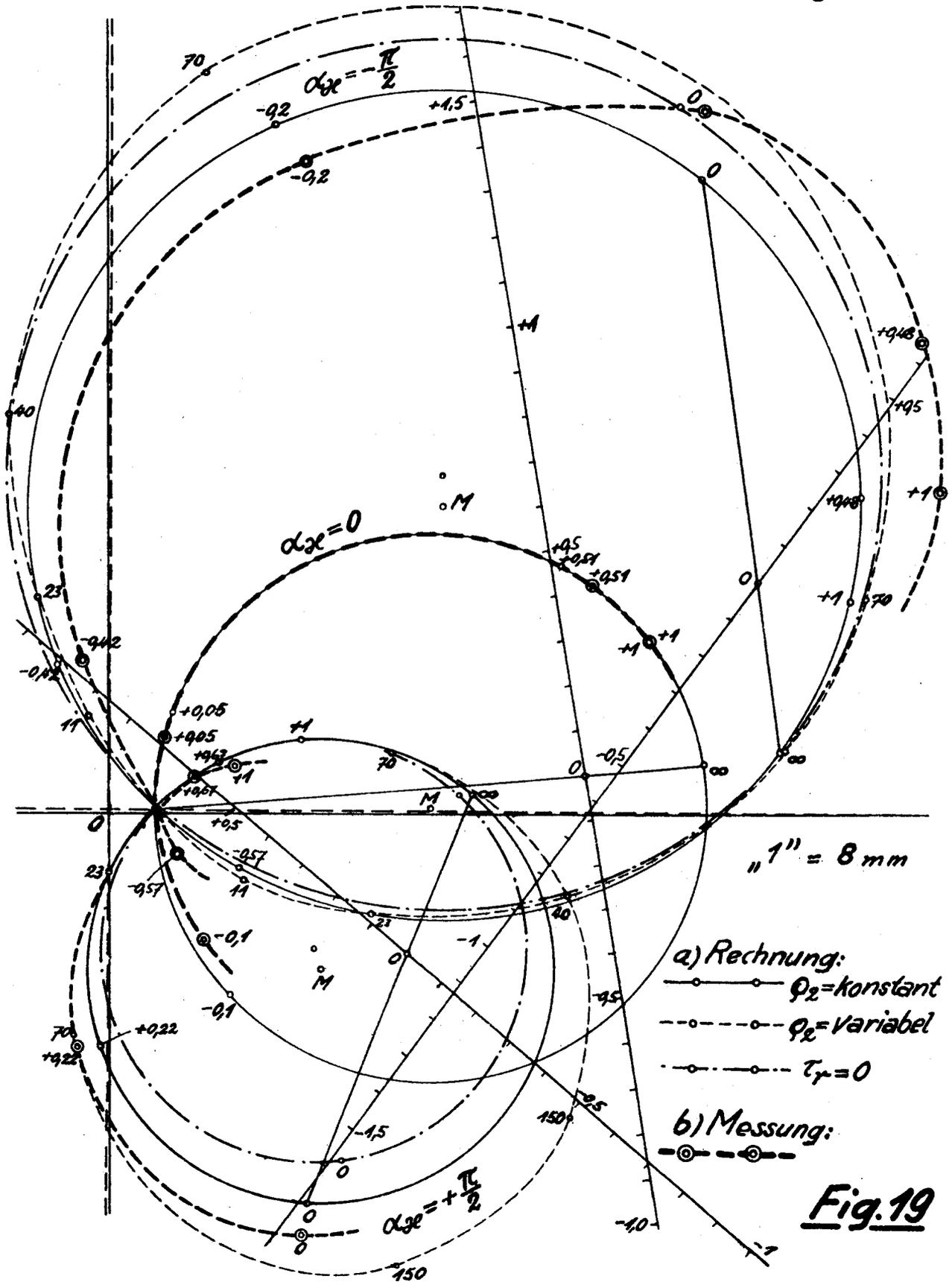
$\omega L_{12\Delta} = 314 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot 56 \cdot 10^{-6} \cdot (66 \cdot 0,956) \cdot (12 \cdot 0,956) = 15,3$

$\omega L_{MII\Delta} = 15,3 \cdot 5,5 = 84,5$  Ohm  
 $\omega L_{22\Delta} = \frac{6}{3} \cdot \frac{15,3}{5,5} = 5,6$  Ohm } stimmt mit oben!

Mit r<sub>1</sub> = 0,56 Ohm pro Phase folgt:  $\rho_1 = \frac{0,56}{89} = 0,0063$ .

Die Arbeitsdiagramme wurden für 3 verschiedene, jeweils konstante Bürstenverschiebungswinkel  $\alpha_x = +\frac{\pi}{2}$ , 0 und  $-\frac{\pi}{2}$  kon-

struiert und durch Messung aufgenommen. Hierbei war die Achsverschiebung  $\beta = 0$ . Für die verschiedenen Winkel  $\alpha_{ze}$  ergeben sich noch die in der folgenden Tabelle aufgeführten Konstanten. Hierbei wurde zunächst der Bürstenübergangswiderstand konstant, also unabhängig von der Stromdichte angenommen und ein Mittelwert eingesetzt.

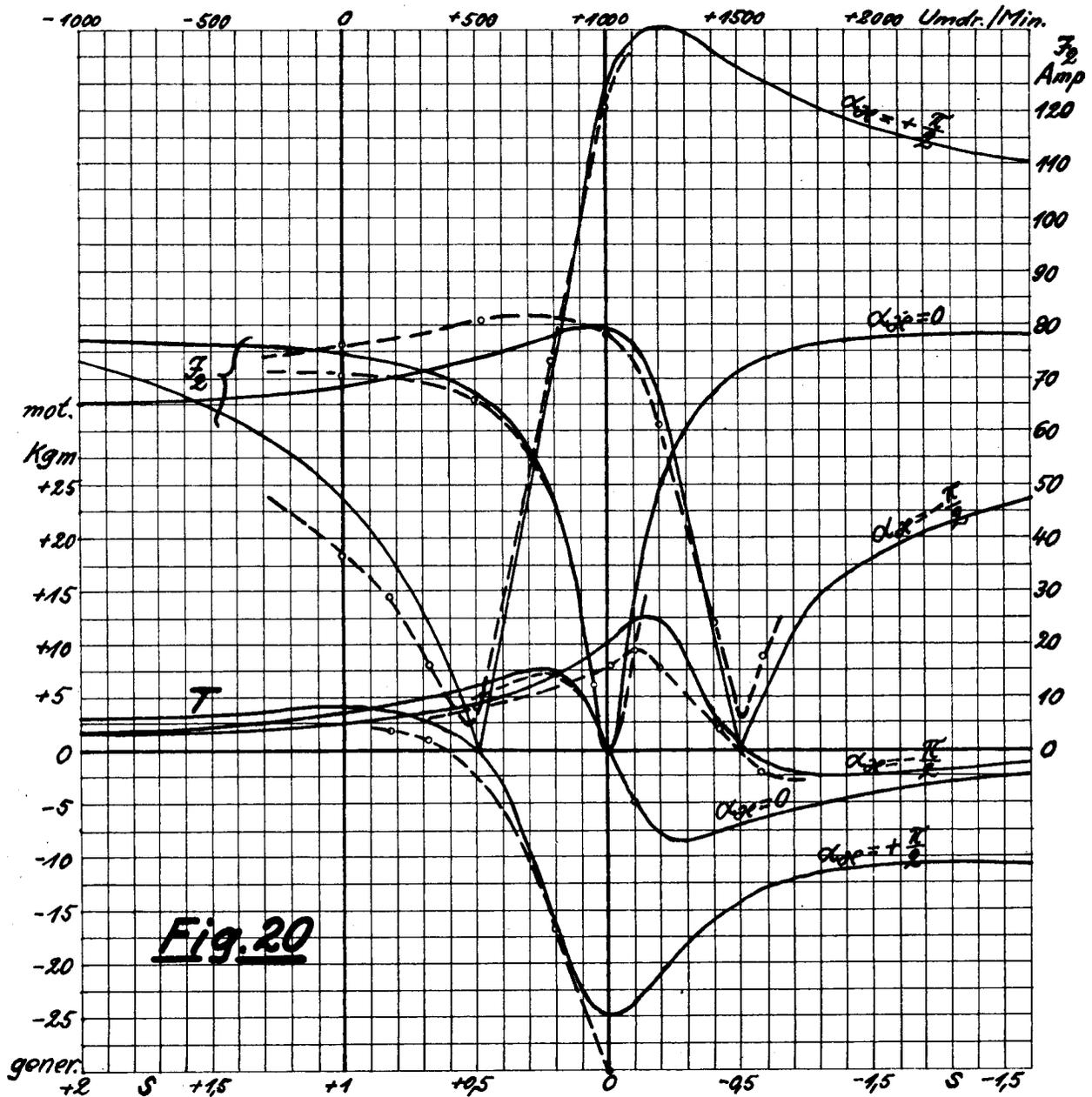


$\alpha_{32}$	$r_{II}$	$\rho_2$	$i_{32}$	$\omega L_{44\Delta}$	$\tau_r$
$\pm \frac{\pi}{2}$	0,142	0,0254	0,5	0,0187	0,0033
0	0,115	0,0206	0	0	0

Mit den vorstehenden Werten wurden die Kreisdiagramme Fig.19 aufgezeichnet. Der Rechnung entsprechen die dünn ausgezogenen Linien. Da der Eisenverlustwinkel in der Größenordnung von nur  $3\frac{1}{2}^\circ$  liegt, können die Eisenverluste einfach durch geringe Verschiebung der Koordinatenachsen berücksichtigt werden.

Zum Vergleich wurden auch die Messungen eingetragen. Die Meßpunkte sind durch kleine Doppelkreise gekennzeichnet und durch dick gestrichelte Linien miteinander verbunden.

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist sehr gut. Eine vollkommene Übereinstimmung ist von vorneherein nicht zu erwarten, da man stets zu gewissen Vernachlässigungen gezwungen ist. So wurde z.B. die Wirkung der höheren Harmonischen



**Fig.20**

und die Veränderlichkeit des Bürstenübergangswiderstands nicht berücksichtigt.

Die Parameter bei den Punkten dieser Arbeitsdiagramme bedeuten den zugehörigen Schlupf.

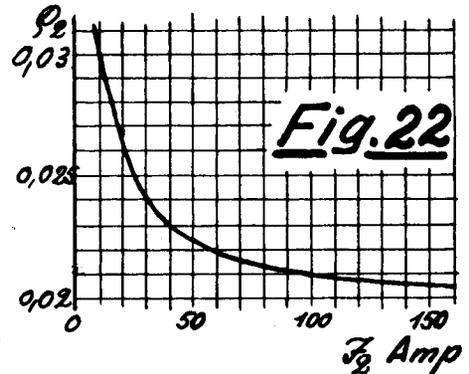
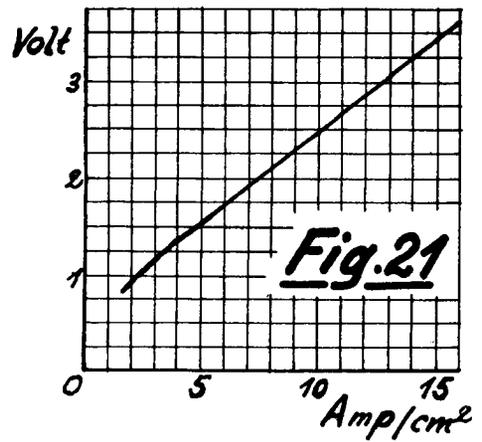
Primärstrom, Leistungsfaktor und Leistung an den Primärklemmen können unmittelbar aus den Arbeitsdiagrammen abgelesen werden. Aus den Kreisdiagrammen wurden noch der Sekundärstrom und das Drehmoment entnommen und in Fig.20 aufgetragen: ausgezogene Linien. Die Messungen wurden durch gestrichelte Linien dargestellt. Zu den gerechneten Kurven für das Drehmoment ist noch zu bemerken, daß das der Lager- und Luft-Reibung entsprechende Drehmoment nicht abgezogen bzw. addiert wurde; diese Komponente ist nur klein (Rollenlager!) und hätte eine unangenehme Unstetigkeit in die Kurven gebracht.

In die Fig.19 wurden mit strichpunktierten Linien auch die Kreise eingezeichnet, die sich bei Vernachlässigung der Kommutation ergeben würden. Man erkennt, daß dabei das Ergebnis im allgemeinen schlechter wird, besonders untersynchron. Es ist hier allerdings zu erwähnen, daß bei dem betrachteten Motor der Einfluß der Kommutation nicht groß ist, weil der Motor keine große Leistung hat und infolgedessen nur geringe Kommutierungsbeanspruchungen aufweist.

Es wurde noch untersucht, in welcher Richtung der Einfluß der Veränderlichkeit des Bürstenübergangswiderstands liegt. Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß das Arbeitsdiagramm des Schrage-Motors bei Veränderung des Sekundärwiderstands  $r_{II}$  seine Gestalt ändert; eine Ausnahme bildet nur die asynchrone Bürstenstellung. Nun ist es verhältnismäßig leicht möglich das Arbeitsdiagramm auch für einen veränderlichen Sekundärwiderstand aufzuzeichnen, sobald die Funktion des Sekundärwiderstands vom Sekundärstrom vorliegt. Man kann nämlich für irgend einen Wert des Sekundärwiderstands das Kreisdiagramm konstruieren und darin diejenigen Punkte der Kreisperipherie ermitteln, die dem diesem Sekundärwiderstand zugehörigen Sekundärstrom entsprechen. Man erhält so 2 Punkte des wahren Arbeitsdiagramms. Dann kann man ein zweites Kreisdiagramm für einen zweiten Wert des Sekundärwiderstands konstruieren und erhält so 2 weitere Punkte des gesuchten Arbeitsdiagramms. So kann man beliebig fortfahren. Man braucht aber nur wenige Punkte zu konstruieren, da in der Nähe der jeweils gefundenen Punkte das wahre Arbeitsdiagramm sich den jeweiligen Kreisen anschmiegt.

Als Kurve für die Bürstenübergangsspannung wurde die

Fig.21 zugrunde gelegt. Die Kurve entspricht den Angaben des Bürstenlieferanten; sie basiert allerdings auf Messungen mit Gleichstrom. Aufgetragen ist die Summe der Übergangsspannungen an der positiven und negativen Bürste in Funktion der Stromdichte. Mangels Messungen mit Wechselstrom mußte diese Kurve verwendet werden; sie dürfte somit nur eine rohe Annäherung darstellen. Aus Fig.21 wurden die Kurven für den spezifischen Sekundärwiderstand  $\rho_2$  bei  $\alpha_{ax} = \pm \frac{\pi}{2}$  abgeleitet: Fig.22. Mit diesen Kurven wurden die dünn gestrichelten Arbeitsdiagramme in Fig.19 gefunden. Die Parameter bedeuten die Werte des Sekundärstroms für die jeweils aus Kreisdiagrammen ermittelten Punkte.



Zweites Beispiel: Hohe Sättigung.

Daten des Motors:

60/20 PS 1420/470 Umdr./Min. 230 Volt 50 Hz

Die Rechnungen und Messungen wurden mit Nennspannung durchgeführt. Hierbei ist der Motor hoch gesättigt.

Die Fig.23 zeigt in Funktion der Spannung die folgenden Meßwerte für den Betrieb als Asynchronmotor:

Leerlaufstrom  $I_{00}$ , Kurzschlußstrom  $I_k$  und daraus ermittelt:  $\omega L_{11\Delta}$ ,  $f_{\infty}$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  und schließlich  $\omega L_{22\Delta}$ .

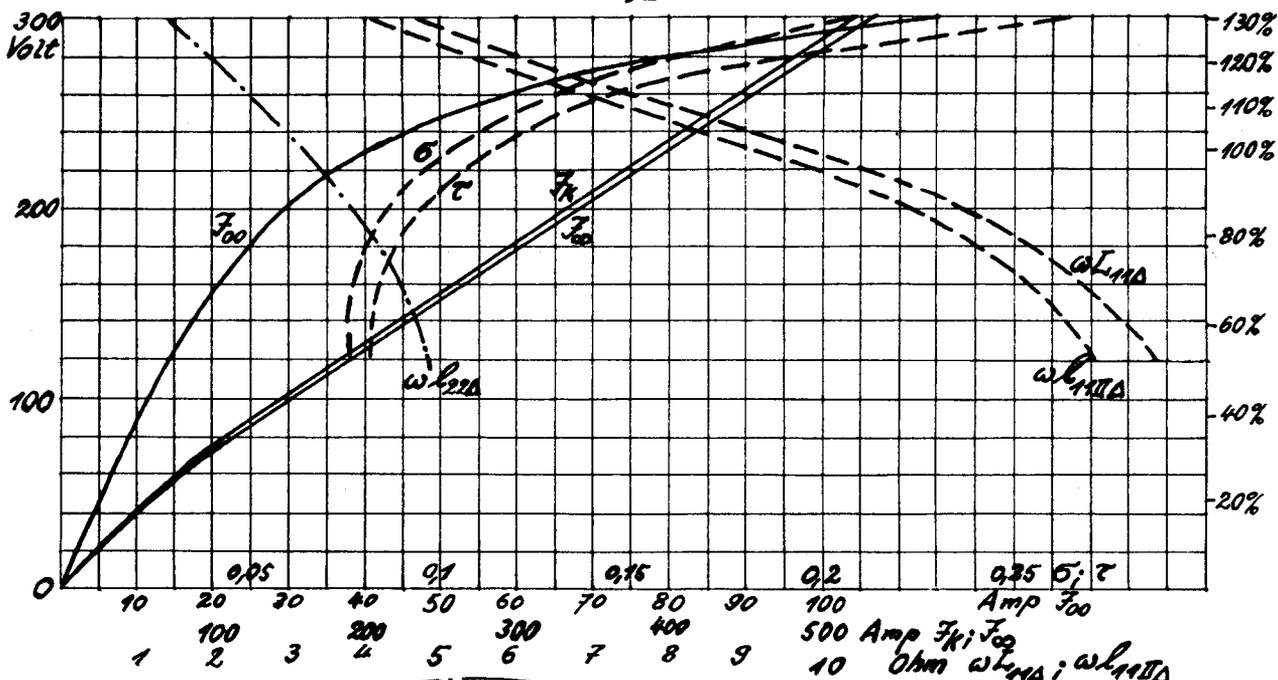
Man erkennt die starke Krümmung der Magnetisierungskurve.

Die Konstanten sind:  $\kappa = 0,54$ ,  $\mu = 0,55$  und  $\nu = 0,7$ ; ferner:  $\ddot{u}_{12} = 2,38$ .

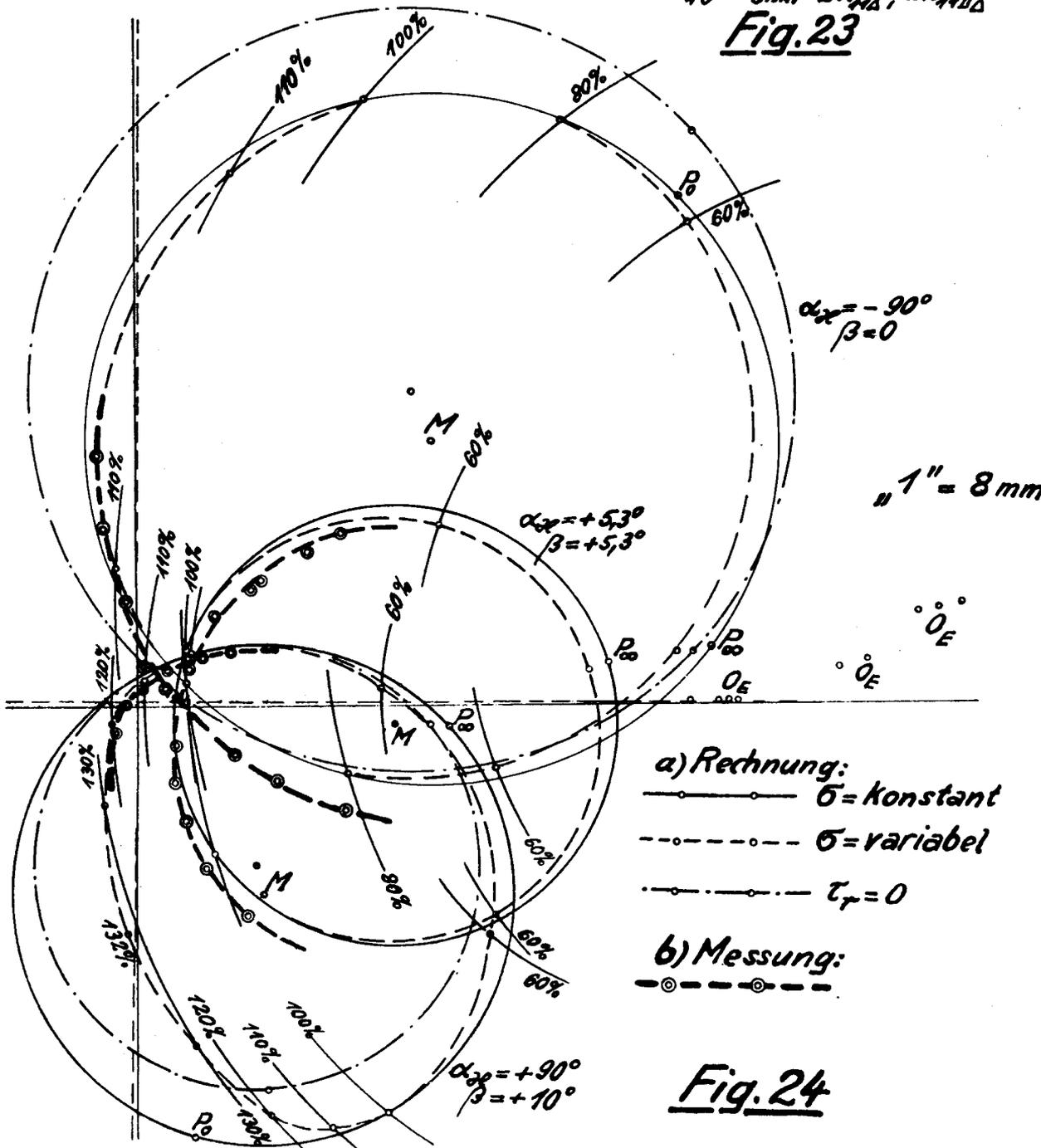
Zunächst wurden die Kreisdiagramme für 3 verschiedene Bürstenstellungen unter der Annahme der Konstanz der für 100 % Spannung aus Fig.23 entnommenen Werte und der Konstanz des jeweiligen Wertes für  $\rho_2$  konstruiert. Hierbei wurden noch folgende Werte zu Grunde gelegt:  $r_1 = 0,085$ ;  $\rho_1 = 0,0087$ ; ferner:

$\alpha_{ax}$	$\beta$	$\ddot{u}_{32}$	$r_{II}$	$\rho_2$	$\omega L_{44\Delta}$	$\tau_r$
+90°	+10°	+0,528	0,104	0,0325	0,0187	0,0059
+5,3°	+5,3°	+0,049	0,08	0,025	0	0
-90°	0°	-0,528	0,104	0,0325	0,0187	0,0059

Mit diesen Konstanten wurden die Kreisdiagramme Fig.24 aufgezeichnet. Der Rechnung entsprechen die dünn ausgezogenen Linien. Auch



**Fig. 23**



**Fig. 24**

hier durften die Eisenverluste wegen ihrer Kleinheit durch geringe Verschiebung der Koordinatenachsen berücksichtigt werden.

Die Meßpunkte sind durch kleine Doppelkreise markiert, die durch dick gestrichelte Linien miteinander verbunden sind. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist recht gut.

Da die Magnetisierungskurve hier stark gekrümmt ist, wurde noch versucht diese Krümmung zu berücksichtigen. Es kann dies in analoger Weise wie im ersten Beispiel für den Sekundärwiderstand geschehen und zwar punktweise. Man entnimmt aus Fig.23 für irgend einen Wert der Spannung die zugehörigen Koeffizienten und betrachtet diese vorübergehend als konstant. Man kann dann noch im Kreisdiagramm diejenigen 2 Punkte bestimmen, für welche die gewählte Flußverkettung auch wirklich zutrifft. Hierdurch erhält man dann 2 Punkte des wahren Arbeitsdiagramms. Auf diese Weise kann man sich beliebig viele Punkte konstruieren. Die Aufzeichnung des Arbeitsdiagramms wird dadurch erleichtert, daß in der Nähe der konstruierten Punkte die zugehörigen Kreisdiagramme immer noch annähernd richtig bleiben. Infolgedessen kann man sich mit wenigen Kreisdiagrammen und wenigen Punkten begnügen.

Auf diese Weise wurde die dünn gestrichelte Kurve erhalten. Die Parameter bei den einzelnen Punkten sind die jeweiligen der Magnetisierungskurve entsprechenden Flußverkettungen bzw. Sättigungen in %. Man erkennt, daß eigentlich nur für größere positive Werte von  $\alpha_{20}$  die Sättigung wesentlich in Erscheinung tritt und zwar um so mehr, je größer  $\beta$  ist. Es tritt eine starke Deformation des Arbeitsdiagrammes ein; sie wird auch durch die Messung bestätigt. Die maximale Sättigung liegt bei 132 %, kann also im generatorischen Bereich trotz des Nebenschlußcharakters sehr hoch werden.

Schließlich wurden auch die Kreisdiagramme eingetragen, die man bei Vernachlässigung der Kommutation erhalten würde; sie sind wieder strichpunktiert gezeichnet. Die Kommutation gewinnt hier schon einen beachtlichen Einfluß. Bei Berücksichtigung der Kommutation erhält man dementsprechend auch eine bessere Annäherung an die Messungen.

Der Vergleich zwischen Messung und Rechnung erlaubt noch eine K r i t i k an der zuvor entwickelten Theorie.

Zunächst wird die eingangs gemachte Bemerkung bestätigt, daß es beim Schrage-Motor, der mit 3 Wicklungen ausgestattet ist, nicht zulässig ist die Streuung zwischen 2 Wicklungen zu vernachlässigen; es muß also auch die Streuung zwischen Regulierwicklung

und Primärwicklung berücksichtigt werden, obwohl diese beiden Wicklungen in den gleichen Nuten liegen.

Die Eisenverluste dürfen in Anbetracht des sehr kleinen Eisenverlustwinkels  $\psi$  durch ein Näherungsverfahren eingeführt werden. Es wurden aber auch exakte Formeln hergeleitet, die auf die von Herrn Prof. Dr. K. K u h l m a n n entwickelte Methode zurückgehen.

Im allgemeinen interessiert nur das Arbeitsdiagramm für konstante Bürstenstellung. Unter Zuhilfenahme der Vorlesungen von Herrn Prof. K u h l m a n n wurde eine Theorie des Kreisdiagramms entwickelt, deren Richtigkeit durch Vergleich mit den Messungen an einem schwach gesättigten Motor bestätigt werden konnte.

Es liegt auf der Hand, daß bei Motoren größerer Leistung die Kommutation im Arbeitsdiagramm zur Geltung kommen muß, da man ja bei solchen Motoren bis an die Grenze der Kommutierungsbeanspruchungen gehen muß. Es ist möglich die Stromwendespannung theoretisch zu erfassen, wobei sich zeigt, daß das Arbeitsdiagramm die Kreisform beibehält. Dadurch wird die Berücksichtigung der Kommutation wesentlich erleichtert, sodaß man sie bei allen stark ausgenützten Motoren berücksichtigen sollte. Besonders zur Geltung kommt die Stromwendung naturgemäß bei höheren Drehzahlen, also namentlich bei übersynchroner Bürstenverschiebung.

Es sind noch 2 andere Größen von Bedeutung; jedoch lassen sie sich nicht so leicht erfassen, da sie eine mehr oder weniger große Abweichung von der Kreisform zur Folge haben. Es sind dies der Bürstenübergangswiderstand und die Krümmung der Magnetisierungskurve. Diese beiden Größen folgen nicht linearen Gesetzen; trotzdem können sie erfaßt werden, da man im Kreisdiagramm einerseits den Sekundärstrom, andererseits den Fluß ablesen kann, sodaß das Arbeitsdiagramm punktweise konstruiert werden kann. Es zeigt sich, daß der Einfluß des veränderlichen Bürstenübergangswiderstands gering ist. Die Krümmung der Magnetisierungskurve kommt naturgemäß nur in solchen Gebieten des Arbeitsdiagramms zur Wirkung, die einem stark erhöhten Fluß entsprechen. Sehr auffallend ist die Wirkung bei untersynchronen Bürstenstellungen und zwar besonders in der Nähe des Synchronismuspunkts, wo eine Flußsteigerung bis etwa 32 % gegenüber dem asynchronen Leerlaufpunkt vorkommt.

L i t e r a t u r

- 1) A.H.M. Arnold: The circle diagrams of the three-phase shunt commutator motor. The Journal of the Institution of Electrical Engineers, Nov. 1926, vol.64, Nr.359, S.1139-1151.
- 2) Efim Bindler: Die kompensierte Einphasenasynchronmaschine. Promotionsarbeit ETH-Zürich.
- 3) Otto Bloch: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik 1917, Verlag von Rascher & Co. in Zürich.
- 4) F. Brabec: Diagramme du courant et étude du couple électromagnétique du moteur à collecteur triphasé à caractéristique shunt alimenté par le rotor. Revue Générale de l'Electricité, tome 43, Nr.10, 5.3.1938, S.291-300 und Nr.11, 12.3.1938, S.323-333.
- 5) L. Dreyfus: Kommutatorkaskaden und Phasenschieber, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1931, S.1-20.
- 6) M.K. Kostenko: Die mehrphasigen Kollektor- und Induktionsmaschinen als Sonderfall des "allgemeinen Transformators". Archiv für Elektrotechnik, 23. Bd., 4. H., 1929/30, S.413-434.
- 7) Michael Kostenko und Dimitri Sawalischin: Experimentelle und theoretische Kreisdiagramme der mehrphasigen Kollektormaschinen nach der Methode des "allgemeinen Transformators". E. u. M., 49. Jahrgang, Heft 6, 8.2.1931, S.101-107.
- 8) K. Kuhlmann: Die Berücksichtigung der Eisenverluste im Kreisdiagramm des Transformators. Elektro-Journal, 4. Jahrgang, Nr.8, August 1924, S. 194-198.
- 9) K. Kuhlmann: Das Impedanzdiagramm des Einphasenmotors. Bulletin SEV 1922, Heft 4.
- 10) Laible: Spannung und Frequenz am Kommutatoranker. E. u. M., 15.2.1931, Jahrgang 49, Heft 7, S.121-125.
- 11) G. Ossanna: Berechnung der Dynamomaschinen und Transformatoren aus Starkstromtechnik von E.v.Rziha und J.Seidener, Band I, 6. Auflage, Berlin 1922, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.
- 12) M. Paris: Sulla macchina trifase a collettore in derivazione con alimentazione rotorica. L'Elettrotecnica, Band 21, Nr.9, 25.3.1934, S.186-196.
- 13) J.J. Rudra: Diagramme exact et diagramme approximatif du moteur Schrage. Revue Générale de l'Electricité, tome 35, Nr.25, 23.6.1934, S.843-847.
- 14) J.J. Rudra: Théorie généralisée du moteur Schrage. Revue Générale de l'Electricité, tome 46, Nr.2, 15.7.1939, S.49-54.
- 15) Hans Schack-Nielsen: Das Kreisdiagramm des läufergespeisten Drehstromkommutatormotors. Archiv für Elektrotechnik, Band 32, Heft 3, 12.3.1938, S.187-190.
- 16) L. Schombourger: Diagramme du moteur à collecteur polyphasé, à caractéristique shunt et réglage de vitesse par décalage des balais. Rev. Gén. de l'Electricité, tome 31, Nr.21, S.693-699.
- 17) L. Schombourger: Un effet remarquable des harmoniques de champ sur le fonctionnement d'un moteur à collecteur polyphasé à caractéristique shunt. Revue Générale de l'Electricité, 21.1.1933, tome 33, Nr.3, S.77-82.
- 18) L. Schombourger: Moteurs à collecteur à caractéristique shunt et à vitesse réglable par décalage des balais. Revue Générale de l'Electricité, 13.10.1934, tome 36, Nr.15, S.499-508.
- 19) H.K. Schrage: Ein neuer Drehstrom-Kommutatormotor mit Nebenschlußregulierung durch Bürstenverschiebung. ETZ 1914, 35. Jahrgang, Heft 4, S.89-93.
- 20) R. Stix: Das Arbeitsdiagramm des läufergespeisten Drehstrom-Nebenschlußmotors. Archiv für Elektrotechnik, Band 33, Heft 11, 10.11.1939, S.698-716.

## L e b e n s l a u f

Am 2. Februar 1902 wurde ich in Frankenthal (Pfalz) geboren.

Ich besuchte 9 Klassen des humanistischen Gymnasiums Landau / Pfalz. Nach Ablegung der Reifeprüfung studierte ich 8 Semester an der Technischen Hochschule München und bestand dort die Diplomprüfung für Elektroingenieure.

Seither bin ich in der Praxis tätig und zwar wie folgt:

- a) 1. 4. 1926 - 31. 12. 1929 bei der Firma Brown, Boveri & Cie. A.G. Mannheim - Käfertal: Prüffeld und Montage aller dort gebauten Arten von elektrischen Maschinen;
- b) 1. 1. 1930 - 31. 3. 1935 bei der Firma A.G. Brown, Boveri & Cie. Baden (Aargau): Berechnung von Wechselstrom-Kommutatormaschinen, insbesondere von Regelsätzen;
- c) 1. 4. 1935 - 31. 3. 1938 bei der Firma Julius Pintsch K.G. Berlin: Entwicklungsarbeiten auf den Gebieten der Kommutatormaschinen und Regeltransformatoren;
- d) seit 1. 4. 1938 bei der A.G. Brown, Boveri & Cie. Baden (Aargau): Berechnung von Wechselstrom-Kommutatormaschinen, insbesondere von Schrage-Motoren.

Meine theoretische Ausbildung ergänzte ich durch Studien an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, denen ich während 3 Semestern neben meiner beruflichen Tätigkeit oblag.