Epimorphismen von kommutativen Ringen

Abhandlung
zur
Erlangung der Würde eines
Doktors der Mathematik
der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HANS HEINRICH STORRER
dipl. Math. ETH
geboren am 25. November 1939
von Siblingen, Kanton Schaffhausen

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. ECKMANN, Referent
Prof. Dr. J. LAMBEK, (Mc Gill University Montreal), Korreferent

Basel
Birkhäuser Verlag
1968

Epimorphismen von kommutativen Ringen

HANS HEINER STORRER

Einleitung

Die vorliegende Arbeit untersucht Fragen, die sich aus der wohlbekannten Tatsache ergeben, dass ein Epimorphismus in der Kategorie der Ringe keine surjektive Abbildung zu sein braucht. So ist zum Beispiel die Einbettung des Ringes $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen in den Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen ein Epimorphismus, denn jeder Ring-Homomorphismus, der auf $\mathbf{Q}$ definiert ist, ist offensichtlich schon durch seine Werte auf $\mathbf{Z}$ bestimmt.

Wir werden ausschliesslich kommutative Ringe mit Einselement betrachten, obwohl einige Resultate auch auf nichtkommutative Ringe übertragen werden könnten.

Im ersten Kapitel bringen wir die grundlegenden Definitionen und eine Reihe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Homomorphismus $f: R \to S$ ein Epimorphismus ist.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir hauptsächlich epimorphe Erweiterungen $R \subset S$, das sind Monomorphismen $f: R \to S$, die zugleich Epimorphismen sind.

ISBELL [12] hat in diesem Zusammenhang folgende Definitionen aufgestellt: Ein Element d aus S wird von R dominiert, wenn für jeden Homomorphismus f mit Definitionsbereich S der Wert $f(d)$ durch die Werte von f auf R bestimmt ist. Die Menge aller dominierten Elemente heisst das Dominion $\mathrm{Dom}(R, S)$. Die Erweiterung $R \subset S$ ist genau dann epimorph, wenn $\mathrm{Dom}(R, S) = S$ ist.

Ein Ring R heisst dominant, wenn für alle $S \supset R$ stets $\mathrm{Dom}(R, S) = R$ ist und saturiert, wenn wenigstens stets $\mathrm{Dom}(R, S) \neq S$ ist, d.h. wenn R keine echten epimorphen Erweiterungen besitzt.

Wir geben verschiedene notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen dafür an, dass ein Ring dominant oder saturiert ist. Es scheint aber schwierig zu sein, Bedingungen zu finden, die notwendig und hinreichend zugleich sind und die für alle Ringe gelten.

Dies ist aber sehr wohl möglich, wenn wir uns auf bestimmte Klassen von Ringen beschränken. Wir erhalten dann zum Beispiel folgende Resultate: Ein noetherscher Ring ist genau dann saturiert, wenn er artinsch ist. Ein semiprimer Ring ist genau dann saturiert, wenn er regulär ist.

Einige unserer Resultate haben Analoga in der Kategorie der Halbgruppen, welche in den Arbeiten von ISBELL [12] und HOWIE und ISBELL [11] untersucht worden ist.

Das dritte Kapitel befasst sich mit Quotientenringen. Wir gehen von der anfangs gemachten Feststellung aus, dass $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ ein Epimorphismus ist. Allgemeiner ist die

Einbettung eines Ringes R in seinen (klassischen) Quotientenring $Q_{cl}(R)$ stets ein Epimorphismus.

Da der Körper $\mathbf{Q}$ saturiert ist, ist $\mathbf{Q}$ eine maximale epimorphe Erweiterung von $\mathbf{Z}$ und die Frage liegt nahe, ob nicht der Quotientenring eines Ringes auf diese Weise charakterisiert werden könnte.

In dieser Allgemeinheit ist die Frage zu verneinen. Man sieht nämlich, dass etwa auch die Erweiterung $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}_2$ ein Epimorphismus ist, dabei ist $\mathbf{Q}\times\mathbf{Z}_2$ regulär und daher saturiert.

Man gelangt aber zu gewissen Resultaten, wenn man nur wesentliche epimorphe Erweiterungen $R\subset S$ betrachtet, d.h. Erweiterungen, bei denen jedes von Null verschiedene Ideal von S einen von Null verschiedenen Durchschnitt mit R hat. Dies ist keine allzugrosse Einschränkung, denn wenn $R\subset S$ epimorph ist, dann gibt es stets ein Ideal I von S, sodass S/I eine wesentliche epimorphe Erweiterung von R ist.

Wenn es eine maximale wesentliche epimorphe Erweiterung von R gibt, die bis auf Isomorphie eindeutig ist, dann nennen wir sie eine epimorphe Hülle von R. Diese Definition hat natürlich in beliebigen Kategorien einen Sinn (man beachte, dass der Begriff „wesentlich" in jeder Kategorie definiert werden kann). Am Ende des dritten Kapitels geben wir einige Anwendungen auf verschiedene Kategorien, die zeigen, dass wohlbekannte Begriffe, wie zum Beispiel die vollkommene Hülle eines Körpers oder die Vervollständigung eines metrischen Raumes Spezialfälle der epimorphen Hülle sind.

In der Kategorie der Ringe ist die Situation aber recht kompliziert. Wir sind nicht in der Lage, die Existenz der epimorphen Hülle $E(R)$ eines Ringes R im allgemeinen nachzuweisen; die Schwierigkeit liegt dabei im Beweis der Eindeutigkeit. Immerhin haben wir folgende Hauptresultate:

Wenn der klassische Quotientenring $Q_{cl}(R)$ saturiert ist, dann existiert $E(R)$ und ist gleich $Q_{cl}(R)$. Dies ist insbesondere für Integritätsbereiche richtig, wir haben somit eine Definition des Quotientenkörpers gefunden, welche nur Aussagen über Abbildungen verwendet. Das zweite Hauptergebnis lautet wie folgt:

Es sei R ein semiprimer Ring (d.h. ein Ring ohne nilpotente Elemente $\neq 0$), dann existiert $E(R)$ und es gilt $R\subset Q_{cl}(R)\subset E(R)\subset Q(R)$. Dabei ist $Q(R)$ der vollständige Quotientenring im Sinn von UTUMI und LAMBEK.

In Bezug auf die Terminologie halten wir uns an das Buch von LAMBEK [13], in welchem sämtliche hier nicht explizit definierten Begriffe erläutert sind.

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren B. ECKMANN und J. LAMBEK für ihre Unterstützung und ihr Interesse recht herzlich danken.

I. Allgemeines über Ring-Epimorphismen

1. *Definitionen*

In der ganzen Arbeit sollen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt ist,