Prom. Nr. 2155

Gruppenstruktur und Gruppenbild

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Hans Ulrich Krause
von Männedorf

Referent: Herr Prof. Dr. H. Hopf
Korreferent: Herr Priv.-Doz. Dr. E. Specker

Zürich 1953
Dissertationsdruckerei Leemann AG

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

Leer - Vide - Empty

Einleitung

1. Nachdem bereits *A. Cayley*[1]) Graphen (Streckenkomplexe) zur Beschreibung endlicher Gruppen benutzt hatte, hat *M. Dehn*[2]) allen Gruppen mit endlichen Erzeugendensystemen Graphen als „Gruppenbilder" zugeordnet. Die Dehnsche Definition ist äquivalent mit der folgenden[3]): Der Graph G ist ein Gruppenbild der abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn er eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe, in bezug auf die Eckpunkte von G einfach-transitive Gruppe von Automorphismen, d. h. eineindeutigen Selbstabbildungen gestattet (Beweis der Äquivalenz dieser Definition mit der Dehnschen in § 7). Als Gruppenbilder kommen also von vornherein nur solche Graphen in Betracht, welche „homogen" in dem Sinne sind, daß es zu je zwei Eckpunkten a und b einen Automorphismus gibt, der a auf b abbildet. Schließlich kann man ein Gruppenbild noch als reguläre Überlagerung definieren[4]), diese Definition wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet werden. Beispiele von Gruppenbildern findet man in den §§ 7, 11, 13, 14, 15, 16. Ferner sei auf das „Standardgruppenbild" G_n der freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}_n$ vom Range n hingewiesen:

---

[1]) *A. Cayley:* Desiderata and suggestions, Nr. 2: The theory of groups graphical representation (American Journal of Mathematics 1, 1878, S. 174—176). — On the theory of groups (Proceedings of the London Mathematical Society, 9, 1878, S. 126—133). — On the theory of groups (American Journal of Mathematics 11, 1889, S. 139—157).

[2]) *M. Dehn:* Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes (Mathematische Annalen, 69, 1910, S. 137—168). — Über unendliche diskontinuierliche Gruppen (Mathematische Annalen, 71, 1911, S. 116—144).

[3]) *W. Threlfall:* Gruppenbilder (Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften, Band 41, Nr. 6, S. 1—59).

[4]) *K. Reidemeister:* Einführung in die kombinatorische Topologie. 1932, S. 124.

Es ist das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im n-dimensionalen euklidischen Raume R^n; durch eine Kante verbunden sind je zwei Punkte, die den Abstand 1 voneinander haben, die Kanten sind also achsenparallele Strecken von der Länge 1.

2. Die Gruppenbilder G sollen dazu dienen, durch ihre geometrische Struktur algebraische Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{G}$ auszudrücken; daß sie nicht *alle* algebraischen Struktureigenschaften von $\mathfrak{G}$ ausdrücken können, ergibt sich schon aus folgender Tatsache: Zwei endliche Gruppen von gleicher Ordnung n besitzen immer ein gemeinsames Gruppenbild, nämlich das vollständige n-Eck (§ 13). Andererseits ist bekannt, daß zwei unendliche Gruppen — und zwar abzählbar unendlich, da wir nur Gruppen mit endlichen Erzeugendensystemen betrachten — im allgemeinen kein gemeinsames Gruppenbild besitzen: Dies ergibt sich aus einem Satz der Endentheorie[5]), welcher besagt, daß die Anzahl der Enden der Gruppenbilder G einer Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlichem Erzeugendensystem) eine Invariante von $\mathfrak{G}$ ist. Aus diesem Satz hat sich u. a. ergeben: Eine abelsche Gruppe vom Range 1 kann kein gemeinsames Gruppenbild mit einer abelschen Gruppe größeren Ranges haben; ferner: Eine abelsche Gruppe kann kein gemeinsames Gruppenbild mit einer freien Gruppe (von einem Range > 1) haben. Dagegen versagt die Endentheorie prinzipiell zum Beispiel für die Beantwortung der folgenden Fragen:

(1) Können für $n > m > 1$ zwei abelsche Gruppen der Ränge n und m ein gemeinsames Gruppenbild besitzen?

(2) Können für $n > m > 1$ zwei freie Gruppen $\mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{F}_m$ mit n bzw. m freien Erzeugenden ein gemeinsames Gruppenbild besitzen?

Diese speziellen Fragen ordnen sich der folgenden allgemeinen Fragestellung unter:

---

[5]) *H. Hopf:* Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen (Commentarii mathematici Helvetici, 16, 1943, S. 81—100). — *H. Freudenthal:* Über die Enden topologischer Räume und Gruppen (Mathematische Zeitschrift 33, 1931, S. 692—713). — Über die Enden diskreter Räume und Gruppen (Commentarii mathematici Helvetici, 17, 1944, S. 1—38). — *E. Specker:* Endenverbände von Räumen und Gruppen (Mathematische Annalen, 122, 1950, S. 167—174).

„Welcher Art muß die algebraische Verwandtschaft zwischen zwei abstrakten Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sein, wenn sie ein gemeinsames Gruppenbild G besitzen?"

Diese Fragestellung bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

3. Der Inhalt der Arbeit besteht im wesentlichen — abgesehen von vorbereitenden Betrachtungen und einigen Nebenergebnissen — aus der Begründung und Diskussion von drei verschiedenen Methoden, die zur Behandlung der genannten Fragen dienen können. Jede einzelne dieser Methoden führt zu folgendem *Satz* A_0 (14.2):

Zwei freie abelsche Gruppen, deren endliche Ränge verschieden voneinander sind, können kein gemeinsames Gruppenbild besitzen. Eine der Methoden liefert darüber hinaus den folgenden schärferen *Satz A* (§ 16): *Zwei abelsche Gruppen (mit endlich vielen Erzeugenden) besitzen dann und nur dann ein gemeinsames Gruppenbild, wenn sie in ihren Rängen sowie in den Anzahlen ihrer Elemente endlicher Ordnung übereinstimmen.* Durch diesen Satz wird die obige Frage (1) vollständig beantwortet; dagegen ist es uns nicht gelungen, auch die Frage (2) zu beantworten. Wir halten es aber nicht für ausgeschlossen, daß eine Weiterführung unserer Methoden für die Behandlung dieses offenen Problems sowie ähnlicher Probleme nützlich sein könnte.

Die drei erwähnten Methoden lassen sich kurz folgendermaßen beschreiben:

1. Methode (§ 14)

Für jeden Eckpunkt e eines Graphen G bilden die Automorphismen von G, welche e festhalten, eine Gruppe, die wir die Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$ nennen; ist G ein Gruppenbild, also homogen (siehe oben Nr. 1), so hängt die Struktur von $\mathfrak{D}_e = \mathfrak{D}$ nicht von e ab. Für Gruppenbilder mit *endlicher* Drehgruppe $\mathfrak{D}$ zeigt sich nun, daß die algebraischen Strukturen zweier Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche beide G als Gruppenbild besitzen, in der Tat nahe verwandt miteinander sein müssen; es gilt nämlich folgender Satz (14.1): Unter den soeben genannten Voraussetzungen enthalten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ Untergruppen $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$, die miteinander isomorph sind und unter $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ denselben endlichen Index haben. Da andererseits der Satz gilt (§ 11), daß jedes Gruppenbild einer freien abelschen Gruppe eine endliche Drehgruppe besitzt, ergibt sich hieraus leicht die Gültigkeit des oben genannten Satzes A_0 (14.2).

2. Methode (§ 15)

Unter der „Entfernung" zweier Eckpunkte a, b eines Graphen G verstehen wir die Minimalzahl von Kanten in einem Kantenzug, der a und b verbindet. Für einen festen Eckpunkt e und eine natürliche Zahl r sei $V_e(r)$ die Anzahl der Eckpunkte, deren Entfernung von e höchstens r ist; in einem Gruppenbild ist infolge der Homogenität $V_e(r) = V(r)$ unabhängig von e. Das Verhalten der Funktion $V(r)$, insbesondere für große r, dürfte aufschlußreich sein nicht nur für die geometrische Struktur von G, sondern auch für die algebraische Struktur der Gruppen $\mathfrak{G}$, deren Gruppenbild G ist. In der Tat wird für den Fall, daß $\mathfrak{G}$ eine freie abelsche Gruppe vom Range n ist, die Formel

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln r} = n$$

bewiesen, aus der unmittelbar noch einmal der Satz A_0 folgt.

3. Methode (§ 16)

Die Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mögen das gemeinsame Gruppenbild G besitzen. Dann läßt sich durch Vermittlung der Eckpunkte von G in natürlicher Weise eine eineindeutige Abbildung f der beiden Gruppen aufeinander erklären, von der man noch voraussetzen darf, daß die beiden Einselemente einander entsprechen. Man untersucht nun die Wirkung von f auf die algebraischen Strukturen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$. Für den Fall, daß $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ freie abelsche Gruppen sind, wird bewiesen, daß f ein Isomorphismus ist, womit wir einen dritten Beweis des Satzes A_0 haben. Diese Methode führt aber weiter als die beiden anderen: sie liefert auch einen Beweis des Satzes A.

4. Die folgende Tatsache dürfte aus prinzipiellen Gründen noch Interesse verdienen: Die Eigenschaft, ein gemeinsames Gruppen-

bild zu besitzen, ist keine transitive Eigenschaft der abstrakten Gruppenstrukturen; in der Tat werden in § 16 drei Gruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ derart angegeben, daß zwar $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ein gemeinsames Gruppenbild G_{12} sowie $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ ein gemeinsames Gruppenbild G_{23}, daß jedoch $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_3$ kein gemeinsames Gruppenbild besitzen.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. H. Hopf, für die mannigfaltigen Anregungen und für das Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, von Herzen danken. Auch Herrn Dr. E. Specker spreche ich für manche wertvolle Anregung meinen herzlichen Dank aus.

1. Kapitel: Graphen

§ 1. Definition des Graphen

Es seien $a, b, c, \ldots$ die Elemente einer Menge. Zeichnet man unter allen aus zweien dieser Elemente gebildeten ungeordneten Paaren gewisse aus, so nennt man die Menge mit diesen Auszeichnungen ihrer Elemente einen *Graphen* (andere Bezeichnungen: Streckenkomplex, Kantenkomplex, Liniensystem, Netz). Die Elemente $a, b, c, \ldots$ nennen wir die *Eckpunkte* des Graphen; bei einem ausgezeichneten Paar von Eckpunkten sagen wir, die beiden Eckpunkte seien durch eine *Kante* verbunden. Wir setzen fest, daß ein Eckpunkt mit sich selbst nicht durch eine Kante verbunden sein darf und daß zwei verschiedene Eckpunkte durch höchstens eine Kante verbunden sein dürfen. Sind also p, q zwei verschiedene Eckpunkte eines Graphen, so besteht folgende Alternative: Entweder sind p, q *nicht* durch eine Kante verbunden, oder sie sind durch *genau eine* Kante verbunden. Zwei Eckpunkte, die durch eine Kante verbunden sind, nennen wir auch *benachbart*. Eine endliche Folge von Eckpunkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nennen wir einen *Kantenzug*, der a_1 und a_n verbindet, wenn a_i und a_{i+1} benachbart sind für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Wir wollen auch Kantenzüge mit keiner Kante zulassen und also sagen, daß jeder Eckpunkt a mit sich selbst durch einen Kantenzug von null Kanten verbunden ist.

Unendlich heißt ein Graph, wenn in ihm unendlich viele verschiedene Eckpunkte vorkommen.

Zusammenhängend heißt ein Graph, wenn sich zwei beliebige Eckpunkte p und q durch einen Kantenzug verbinden lassen.

Endlichen Grades heißt ein Graph, wenn jeder Eckpunkt nur endlich viele Nachbarn hat. Ein endlicher Graph ist natürlich immer endlichen Grades.

In dieser Arbeit werden wir uns nur mit zusammenhängenden Graphen endlichen Grades befassen und wo wir im folgenden von einem Graphen G sprechen, so soll es sich um einen solchen handeln, auch ohne daß es jedesmal ausdrücklich gesagt wird.

Teilgraph: Wir nennen G' einen Teilgraphen von G, wenn jeder Eckpunkt von G' zu G gehört, und ein ausgezeichnetes Paar von Eckpunkten von G' auch in G ausgezeichnet ist.

Isomorphe Graphen: Zwei Graphen G und G' sind isomorph, wenn es eine eineindeutige Abbildung der Eckpunkte von G auf diejenigen von G' gibt, die benachbarte Eckpunkte und nur diese in benachbarte Eckpunkte überführt.

§ 2. Entfernung

Es sei G ein Graph; p und q seien zwei Eckpunkte von G. In jedem Kantenzug, der p mit q verbindet, tritt eine bestimmte Anzahl von Kanten auf. Die kleinste Anzahl der in den Kantenzügen von p nach q auftretenden Kanten nennen wir die Entfernung $\rho(p,q)$ von p und q.

Definition 2.1: Die Entfernung $\rho(p,q)$ der beiden Eckpunkte p und q ist die minimale Anzahl der in den Kantenzügen von p nach q auftretenden Kanten.

Ihrer Bedeutung nach ist die Entfernung eine natürliche Zahl oder, wenn die beiden Eckpunkte zusammenfallen, gleich null. Im allgemeinen wird es von p nach q mehrere Kantenzüge mit der minimalen Kantenanzahl $\rho(p,q)$ geben. Der auf diese Art definierte Entfernungsbegriff erfüllt die Axiome des metrischen Raumes, nämlich

1. Identitätsaxiom: $\rho(p,p)=0$.
   $\rho(p,q)>0$, wenn $p \neq q$
2. Symmetrieaxiom: $\rho(p,q)=\rho(q,p)$
3. Dreiecksaxiom: $\rho(p,r)+\rho(r,q) \geqq \rho(p,q)$

Zeichnen wir im Graphen G einen festen Eckpunkt e aus, so wollen wir die Entfernung eines Eckpunktes p von e als den Betrag von p bezeichnen:

$$\rho(p,e)=|p|.$$

Satz 2.1: Ist $|p| = n$, so gibt es einen Nachbarn q von p, für welchen gilt: $|q| = n - 1$.

Beweis: Da $|p| = n$, gibt es von e nach p einen Kantenzug $e, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, p$ mit minimaler Kantenanzahl n. Wir setzen $a_{n-1} = q$ und wollen zeigen, daß $|q| = n - 1$.

Sicher ist $e, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$, q ein Kantenzug von e nach q mit $(n-1)$ Kanten. Es kann aber keinen Kantenzug von e nach q mit weniger als $(n-1)$ Kanten geben. Wäre nämlich $e, b_1, \ldots, b_{r-1}$, q ein solcher mit $r < (n-1)$ Kanten, so wäre $e, b_1, \ldots, b_{r-1}, q, p$ ein Kantenzug von e nach p mit $r + 1 < n$ Kanten, während doch n die minimale Kantenanzahl eines Kantenzuges von e nach p ist.

Satz 2.2: In einem zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades gibt es nach Auszeichnung eines festen Eckpunktes e nur endlich viele Eckpunkte, welche den festen Betrag n haben.

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Es gibt nur endlich viele Eckpunkte vom Betrage 0, nämlich den einzigen Eckpunkt e. Nach Induktionsvoraussetzung gebe es nur endlich viele Eckpunkte vom Betrage $(n-1)$, wobei $(n-1) \geqq 0$. Wir betrachten die Gesamtheit N ihrer Nachbarn. Da G von endlichem Grade ist, so enthält N nur endlich viele Eckpunkte. Es sei a ein Eckpunkt mit $|a| = n$. Nach Satz 2.1 hat a einen Nachbarn a' mit $|a'| = n - 1$. Da a auch Nachbar von a' ist, so ist a ein Eckpunkt aus der Menge N. Sämtliche Eckpunkte vom Betrage n sind also in der Menge N enthalten, es gibt also nur endlich viele Eckpunkte vom Betrage n.

Korollar 2.1: In einem zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades gibt es nach Auszeichnung eines festen Eckpunktes e nur endlich viele Eckpunkte, welche einen Betrag $\leqq n$ haben, wenn n eine feste Zahl ist.

§ 3. Die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$

Ein Automorphismus A eines Graphen G ist eine Abbildung von G auf sich selbst mit folgenden Eigenschaften:

1. A bildet die Eckpunkte von G eineindeutig auf sich selbst ab.
2. A führt benachbarte Eckpunkte und nur diese in benachbarte Eckpunkte über.

Die Gesamtheit der Automorphismen von G bildet eine Gruppe, die wir die *volle Automorphismengruppe* $\mathfrak{A}$ nennen. Es sei e ein fester Eckpunkt von G. Alle Automorphismen von $\mathfrak{A}$ mit Fixpunkt e, d. h. alle Automorphismen, welche e fest lassen, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die *Drehgruppe* $\mathfrak{D}_e$. Einen Automorphismus $D \in \mathfrak{D}_e$ nennen wir eine Drehung.

Ein Graph G heißt *homogen*, wenn die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von G in bezug auf die Eckpunkte von G *transitiv* ist, d. h. wenn es zu je zwei Eckpunkten p und q von G einen Automorphismus A gibt, der p in q überführt.

Eine Untergruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{A}$ heißt in bezug auf die Eckpunkte von G *einfach-transitiv*, wenn es zu je zwei Eckpunkten p und q von G genau einen Automorphismus $T \in \mathfrak{T}$ gibt, der p in q überführt.

Satz 3.1: Die Entfernung $\rho(p,q)$ zweier Eckpunkte p und q eines Graphen G ist invariant gegenüber einem Automorphismus A von G.

Beweis: Es sei $A(p)=p'$, $A(q)=q'$. Der Automorphismus A vermittelt eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Kantenzügen von p nach q und den Kantenzügen von p' nach q'; insbesondere ist die Anzahl der Kanten in zwei durch A einander zugeordneten Kantenzügen dieselbe. Da aber die Entfernung die kleinste dieser Anzahlen ist, gilt $\rho(p,q)=\rho(p',q')$.

§ 4. Sätze über die Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$

Es sei $\mathfrak{D}_e$ die Drehgruppe eines zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades im Eckpunkte e. G_n sei derjenige Teilgraph von G, dessen Eckpunkte aus denjenigen Eckpunkten von G bestehen, die bei Auszeichnung des Eckpunktes e einen Betrag $\leqq n$ haben; zwei Eckpunkte von G_n sollen genau dann benachbart sein, wenn sie in G benachbart sind. Wir nennen bei fester natürlicher Zahl n die Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$ „n-variabel", wenn jede Drehung $D \in \mathfrak{D}_e$, die von der Identität E verschieden ist, mindestens einen Eckpunkt von G_n nicht fest läßt.

Satz 4.1: Es gibt genau dann ein n, für das $\mathfrak{D}_e$ n-variabel ist, wenn $\mathfrak{D}_e$ endlich ist.

Beweis: I. Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung notwendig ist, setzen also voraus, $\mathfrak{D}_e$ sei n-variabel für ein gewisses n. Nach Satz 3.1 führt jede Drehung $D \in \mathfrak{D}_e$ den Teilgraphen G_n in sich über. Da nach Korollar 2.1 der Teilgraph G_n nur endlich viele Eckpunkte besitzt, kann es auch nur endlich viele verschiedene Drehungen von G_n geben. Es seien $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}_e$ zwei Drehungen, die in G_n dieselbe Drehung bewirken. Die Drehung $D_2^{-1} D_1$ läßt daher G_n invariant, ist also, da $\mathfrak{D}_e$ n-variabel ist, die Identität E: $D_2^{-1} D_1 = E$, also $D_1 = D_2$, d.h. die beiden Drehungen sind nicht nur in G_n, sondern auch in G identisch. $\mathfrak{D}_e$ enthält also höchstens so viele verschiedene Drehungen, wie der Teilgraph G_n von sich gestattet, also endlich viele.

II. Jetzt zeigen wir, daß die Bedingung auch hinreichend ist, setzen also voraus, $\mathfrak{D}_e$ sei endlich, und zwar seien $D_1, D_2, \ldots, D_g$ die endlich vielen, von der Identität verschiedenen Drehungen von $\mathfrak{D}_e$. Für jede Drehung D_i $(i = 1, 2, \ldots, g)$ wählen wir einen Eckpunkt a_i, welchen D_i nicht fest läßt. Es sei $|a_i| = d_i$ und m sei das Maximum der d_i $(1 = 1, 2, \ldots, g)$. Dann ist $\mathfrak{D}_e$ n-variabel für ein festes $n \geqq m$, da dann der Teilgraph G_n alle Eckpunkte a_i $(i = 1, 2, \ldots, g)$ enthält.

Satz 4.2: Ist der Graph G homogen, so sind die Drehgruppen $\mathfrak{D}_p$ und $\mathfrak{D}_q$ in den Eckpunkten p und q von G zueinander konjugiert.

Beweis: Da G homogen ist, gibt es einen Automorphismus A von G, so daß $A(p) = q$. Es sei $D \in \mathfrak{D}_p$, $D' \in \mathfrak{D}_q$.

I. $A D A^{-1}(q) = A D(p) = A(p) = q$, also $A \mathfrak{D}_p A^{-1} \subset \mathfrak{D}_q$.

II. $A^{-1} D' A(p) = A^{-1} D'(q) = A^{-1}(q) = p$, also $A^{-1} \mathfrak{D}_q A \subset \mathfrak{D}_p$, und somit $\mathfrak{D}_q \subset A \mathfrak{D}_p A^{-1}$. Aus I und II folgt $A \mathfrak{D}_p A^{-1} = \mathfrak{D}_q$.

In einem homogenen Graphen G darf man also von *der* abstrakten Drehgruppe $\mathfrak{D}$ sprechen, da die Drehgruppen in den verschiedenen Eckpunkten von G zueinander konjugiert und somit isomorph sind.

Satz 4.3: Ist die Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$ des Graphen G nicht endlich, so ist sie unendlich von der Mächtigkeit des Kontinuums[6]).

Beweis: Es sei D_1 eine beliebige, von der Identität verschiedene Drehung von $\mathfrak{D}_e, a_1$ vom Betrage n_1 (Entfernung von e) sei ein

[6]) Von diesem Satz wird im folgenden kein Gebrauch gemacht.

Eckpunkt von G, den D_1 nicht fest läßt. Wir konstruieren nun eine unendliche Folge von Drehungen $D_1, D_2, D_3, \ldots \in \mathfrak{D}_e$ auf folgende Weise: Es sei D_{i-1} $(i \geqq 2)$ eine Drehung aus der Folge, welche den Eckpunkt a_{i-1} vom Betrage n_{i-1} nicht fest läßt. Nun gibt es sicher von der Identität verschiedene Drehungen in $\mathfrak{D}_e$, die den Teilgraphen $G_{n_{i-1}}$ fest lassen, da $\mathfrak{D}_e$ sonst n_{i-1}-variabel und damit nach Satz 4.1 endlich wäre entgegen der Voraussetzung. Unter diesen wählen wir eine beliebige aus, die Drehung D_i. Die unendliche Folge von Drehungen $D_1, D_2, D_3, \ldots \in \mathfrak{D}_e$ hat also die Eigenschaften:

E 1. a_i vom Betrage n_i ist ein Eckpunkt, den D_i nicht fest läßt.
E 2. $n_{i-1} < n_i$ für $i = 2, 3, \ldots$
E 3. D_i läßt den Teilgraphen $G_{n_{i-1}}$ fest, also a fortiori alle Teilgraphen G_{n_j} mit $j < i$.

Wir benennen die Drehungen $D_1, D_2, D_3, \ldots$ neu mit $D_{11}, D_{21}, D_{31}, \ldots$, weiter sollen alle Drehungen $D_{10}, D_{20}, D_{30}, \ldots$ die Identität E bedeuten. Es sei $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots$ eine unendliche Folge, wobei die ϵ_i nur die Werte 0 oder 1 haben können. Nun definieren wir folgende Abbildung der Eckpunkte von G auf sich:

$\bar{D}(a) = D_{i\,\epsilon_i} \cdot D_{i-1,\,\epsilon_{i-1}} \cdot \ldots \cdot D_{1\,\epsilon_1}(a)$ für $a \in G_{n_i} - G_{n_{i-1}}$. Nach Satz 3.1 läßt $\bar{D}$ den Betrag von a invariant, es ist also auch $\bar{D}(a) \in G_{n_i} - G_{n_{i-1}}$. Ist $k > i$, so gilt auch $\bar{D}(a) = D_{k\,\epsilon_k} \cdot D_{k-1,\,\epsilon_{k-1}} \cdot \ldots \cdot D_{1\,\epsilon_1}(a)$, da $\bar{D}(a) \in G_{n_i}$ und nach $E\,3$ $D_{k\,\epsilon_k}$ für $k > i$ den Teilgraphen G_{n_i} fest läßt. Sind nun a und b zwei beliebige Eckpunkte von G, so gibt es nach $E\,2$ immer ein k, so daß $a, b \in G_{n_k}$. Dann ist also $\bar{D}(a) = D_{k\,\epsilon_k} \cdot D_{k-1,\,\epsilon_{k-1}} \cdot \ldots \cdot D_{1\,\epsilon_1}(a)$ und $\bar{D}(b) = D_{k\,\epsilon_k} \cdot D_{k-1,\,\epsilon_{k-1}} \cdot \ldots \cdot D_{1\,\epsilon_1}(b)$. Daraus folgt, daß die Abbildung $\bar{D}$ eineindeutig ist und zwei benachbarte Eckpunkte und nur solche wieder in benachbarte Eckpunkte überführt; schließlich ist $\bar{D}(e) = e$. Die Abbildung $\bar{D}$ ist also eine Drehung von G. Zu jeder unendlichen Folge $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots$ gibt es also eine eindeutig bestimmte Drehung $\bar{D}$ von G. Es sei $\epsilon_1', \epsilon_2', \epsilon_3', \ldots$ eine weitere unendliche Folge, wobei die ϵ_i' nur die Werte 0 oder 1 haben können, $\bar{D}'$ sei die dazugehörige Drehung von G. Wir wollen zeigen, daß $\bar{D}' \neq \bar{D}$, falls die beiden Folgen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots$ und $\epsilon_1', \epsilon_2', \epsilon_3', \ldots$ verschieden sind. Es sei $\epsilon_i' = \epsilon_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $\epsilon_k' \neq \epsilon_k$, also etwa $\epsilon_k' = 0$, $\epsilon_k = 1$. Dann ist $D_{k\,\epsilon_k'} = E$,

$D_{k\,\epsilon_k} = D_k \neq E$. Von den Eckpunkten $a \epsilon G_{n_k} - G_{n_{k-1}}$ läßt $D_{k\,\epsilon_k'}$ jeden fest, $D_{k\,\epsilon_k}$ läßt aber mindestens den Eckpunkt a_k vom Betrage n_k nicht fest. Also sind auch die Drehungen $\bar{D}'$ und $\bar{D}$ verschieden, und zwar unterscheiden sie sich mindestens in der Abbildung der Eckpunkte von $G_{n_k} - G_{n_{k-1}}$. Es gibt also genau so viele verschiedene Drehungen $\bar{D}$, als es verschiedene unendliche Folgen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots$ gibt, die nur aus der 0 und der 1 bestehen. Von diesen gibt es aber unendlich viele von der Mächtigkeit des Kontinuums. Andererseits kann die Mächtigkeit der Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$ nicht größer sein, da die Anzahl aller Automorphismen des Graphen G höchstens von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Die Anzahl aller Eckpunkte eines zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades ist nämlich abzählbar, die Anzahl aller eineindeutigen Abbildungen einer solchen Menge auf sich ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.

§ 5. Satz über eine harmonische Funktion auf einem Graphen G mit Funktionswerten in einer geordneten abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$

Es sei G ein zusammenhängender Graph endlichen Grades (Eckpunkte: $a, b, c, \ldots$). Wir nennen die Funktion f auf G harmonisch, wenn in jedem Eckpunkte a der Funktionswert $f(a)$ das Mittel der Funktionswerte in allen Nachbarn von a ist: $n \cdot f(a) = f(a_1) + f(a_2) + + \ldots + f(a_n)$, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sämtliche Nachbarn von a sind. Sind f und f' zwei harmonische Funktionen, so sind auch $f + f'$ und $f - f'$ harmonische Funktionen.

Wir nennen eine abelsche Gruppe (Elemente: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$) geordnet, wenn es zwischen gewissen Paaren von Elementen $\bar{a}, \bar{b}$ eine Relation $\bar{a} > \bar{b}$ ($\bar{a}$ ist größer als $\bar{b}$) gibt mit folgenden Eigenschaften:

E 1. Ist $\bar{a} \neq \bar{b}$, so ist $\bar{a} > \bar{b}$ oder $\bar{b} > \bar{a}$;
ist $\bar{a} > \bar{b}$, $\bar{b} > \bar{c}$, so ist $\bar{a} > \bar{c}$; es ist nicht $\bar{a} > \bar{a}$.

E 2. Ist $\bar{a} > \bar{b}$, so ist $\bar{a} + \bar{c} > \bar{b} + \bar{c}$.
$\bar{a} \geqq \bar{b}$ gilt, wenn $\bar{a} > \bar{b}$ oder $\bar{a} = \bar{b}$. Aus *E* 1 und *E* 2 folgt

E 3. Ist $\bar{a} \geqq \bar{b}$, $\bar{c} > \bar{d}$, so ist $\bar{a} + \bar{c} > \bar{b} + \bar{d}$.

Es sei nämlich $\bar{a} > \bar{b}$, dann ist nach *E* 2 $\bar{a} + \bar{c} > \bar{b} + \bar{c}$ und $\bar{c} + \bar{b} > \bar{d} + \bar{b}$, also, da $\mathfrak{G}$ abelsch ist und wegen *E* 1 $\bar{a} + \bar{c} > \bar{b} + \bar{d}$. Ist $\bar{a} = \bar{b}$, so folgt aus *E* 2 $\bar{a} + \bar{c} > \bar{b} + \bar{d}$.

Satz 5.1. Wenn eine harmonische Funktion f auf einem zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades mit Funktionswerten in einer geordneten abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ihr Maximum annimmt, so ist sie eine Konstante.

Beweis: Es sei $\bar{a}$ das Maximum von f, A die Menge der Eckpunkte a von G mit $f(a) = \bar{a}$. Wir zeigen: Ist $a \in A$, so gilt für jeden Nachbarn $a_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ von a: $a_i \in A$. Es ist $f(a) \geqq f(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Summieren wir über diese n Relationen, so folgt aus $E\,2$ und $E\,3$ $n \cdot f(a) \geqq \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$, und zwar ist wegen $E\,3$ $n \cdot f(a) > \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$, wenn für mindestens ein k gilt: $f(a) > f(a_k)$. Da f harmonisch ist, gilt $n \cdot f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$, also muß $f(a) = f(a_i) = \bar{a}$ sein für $i = 1, 2, \ldots, n$. Da mit $a \in A$ auch $a_i \in A$ für jeden Nachbarn a_i von a, und der Graph G zusammenhängend ist, enthält A alle Eckpunkte von G, also ist f eine Konstante.

Korollar 5.1: Eine endlichwertige harmonische Funktion f auf einem zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades mit Funktionswerten in einer geordneten abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine Konstante.

Wir zeigen noch, daß eine freie abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Range n geordnet werden kann. Es sei $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n$ eine Basis von $\mathfrak{G}$; jedes Element von $\mathfrak{G}$ ist somit eindeutig darstellbar in der Form $\sum_{i=1}^{n} s_i \bar{g}_i$ (s_i ganze Zahl). Ist $\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} s_i \bar{g}_i$, $\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{g}_i$, $s_i = t_i$ für $i \leqq p-1$, $s_p > t_p$, so nennen wir $\bar{a}$ größer als $\bar{b}: \bar{a} > \bar{b}$. Diese Relation hat die Eigenschaften $E\,1$ und $E\,2$.

2. Kapitel: Gruppenbilder

§ 6. Definitionen

Definition 6.1 des Gruppenbildes: Einfach-transitive Automorphismengruppe.

$\mathfrak{A}$ sei die volle Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades. $\mathfrak{G}$ sei eine beliebige abstrakte Gruppe. Besitzt $\mathfrak{A}$ eine in bezug auf die Eckpunkte von G einfach-transitive Untergruppe $\mathfrak{T}$, welche isomorph ist zu $\mathfrak{G}$, so nennen wir G ein Gruppenbild von $\mathfrak{G}$.

Definition 6.2 des Gruppenbildes: Dehnsches Gruppenbild.

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden. $a, b, c, \ldots$ seien die Elemente von $\mathfrak{G}$, e sei das Einselement. $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sei ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$; dabei enthalte $\mathfrak{E}$ mit jeder Erzeugenden e_i auch ihr inverses Element e_i^{-1}, das Einselement e komme aber nicht in $\mathfrak{E}$ vor. Wir konstruieren folgendermaßen einen Graphen G: Als Eckpunkte von G nehmen wir die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$. Ein Paar a, b von Eckpunkten verbinden wir dann und nur dann mit einer Kante, wenn $a^{-1} b \in \mathfrak{E}$. Diese Auszeichnung gewisser Paare ist unabhängig von der Reihenfolge: Mit a, b ist auch b, a ausgezeichnet, da $b^{-1} a = (a^{-1} b)^{-1} \in \mathfrak{E}$. Den auf diese Weise definierten Graphen G nennt man ein Dehnsches Gruppenbild G der Gruppe $\mathfrak{G}$. Es ist nicht durch $\mathfrak{G}$ allein bestimmt, sondern erst durch das Erzeugendensystem, das wir in $\mathfrak{G}$ einführen. Dann ist es aber der Struktur nach eindeutig bestimmt.

Eigenschaften eines Dehnschen Gruppenbildes G:

E 1. G ist zusammenhängend.

Durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden, durch die ein Element von $\mathfrak{G}$ dargestellt werden kann, wollen wir zeigen, daß jeder Eckpunkt von G mit dem Einselement e durch einen Kantenzug verbunden werden kann. Die Elemente von $\mathfrak{G}$, die durch 1 Erzeugende dargestellt werden können, nämlich die e_i selbst, sind wegen $e^{-1}e_i = e_i \in \mathfrak{E}$ mit e durch einen Kantenzug von einer Kante verbunden. Nach der Induktionsvoraussetzung könne man jedes Element $x \in \mathfrak{G}$, welches durch n Erzeugende ($n \geqq 1$) dargestellt werden kann, mit e durch einen Kantenzug verbinden. $a \in \mathfrak{G}$ sei ein Element, das durch $(n+1)$ Erzeugende dargestellt werden kann, und zwar sei $a = x \cdot e_i$ die betreffende Darstellung, wobei für das Produkt der ersten n Faktoren x gesetzt ist. Es ist $x^{-1}a = e_i \in \mathfrak{E}$, x und a sind also durch eine Kante verbunden; da x nach Induktionsvoraussetzung mit e durch einen Kantenzug verbunden werden kann, so ist dies auch für a als Nachbar von x der Fall.

E 2. G ist von endlichem Grade.

Der Eckpunkt a von G hat nämlich nur die endlich vielen Nachbarn $a e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Bemerkung 6.1: Um ein Dehnsches Gruppenbild noch anschaulicher zu machen, kann man jedem Paar von Erzeugenden e_i, e_i^{-1} eineindeutig eine Farbe $\underline{e_i}$ zuordnen. Sind dann a, b zwei benachbarte Eckpunkte, und zwar sei $a^{-1}b = e_i$, also $b^{-1}a = e_i^{-1}$, so wollen wir die Kante zwischen a und b mit der Farbe $\underline{e_i}$ färben. Sind keine Erzeugenden der Ordnung 2 vorhanden, so gehen von jedem Eckpunkte des Graphen G genau n Kanten aus, von denen je zwei dieselbe Farbe haben. Sind aber k Erzeugende der Ordnung 2 vorhanden, so sind bei $(n-k)$ Kanten, die von einem Eckpunkt ausgehen, je zwei gleich gefärbt, bei den übrigen k Kanten, die den Erzeugenden der Ordnung 2 entsprechen, tritt jede Farbe nur einmal auf.

§ 7. Äquivalenz der beiden Definitionen

I. Voraussetzung: G' ist ein zusammenhängender Graph endlichen Grades. Die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von G' besitzt eine in bezug auf die Eckpunkte von G' einfach-transitive Untergruppe $\mathfrak{T}$, welche isomorph ist zu einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$.

Behauptung: G' ist isomorph zu einem Dehnschen Gruppenbild G der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Beweis: 1. Wir konstruieren zuerst den Graphen G. Es seien $a, b, c, \ldots$ die Elemente von $\mathfrak{G}$; $A, B, C, \ldots$ die ihnen durch den Isomorphismus $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{G}$ zugeordneten Automorphismen von $\mathfrak{T}$. Als Eckpunkte von G nehmen wir die Elemente von $\mathfrak{G}$. Dem Einselement $e \in \mathfrak{G}$ ordnen wir einen beliebigen Eckpunkt von G' zu und bezeichnen ihn mit e'. Dem Element $a \in \mathfrak{G}$ ordnen wir denjenigen Eckpunkt von G' zu, in welchen e' beim Automorphismus A übergeht, und bezeichnen ihn mit a', also $A(e') = a'$. Da $\mathfrak{T}$ isomorph ist zu $\mathfrak{G}$ und einfach-transitiv in bezug auf die Eckpunkte von G', ist diese Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}$, also den Eckpunkten von G und den Eckpunkten von G' eineindeutig. Wir setzen weiter fest, daß zwei Eckpunkte a, b von G genau dann durch eine Kante verbunden sein sollen, wenn es die zugeordneten Eckpunkte a', b' von G' sind, und haben damit einen Graphen G konstruiert, dessen Eckpunkte die Elemente von $\mathfrak{G}$ sind und der isomorph zu G' ist.

Wir leiten noch eine Beziehung her. Es ist

$$(a\,b)' = A\,B\,(e') = A\,(B\,(e')) = A\,(b'), \text{ also}$$

$$(a\,b)' = A\,(b') \tag{7,1}$$

2. Wir zeichnen in $\mathfrak{G}$ folgende Elemente aus und bezeichnen sie jetzt schon als „Erzeugende", obwohl sich erst später ergeben wird, daß diese Elemente $\mathfrak{G}$ auch wirklich erzeugen:

Diejenigen Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_n$, welche in G Nachbarn von e sind. Es sei $E_i(e') = e_i'$, dann ist $E_i^{-1}(e_i') = e'$; weiter sei $E_i^{-1}(e') = (e_i^{-1})'$. Die beiden benachbarten Eckpunkte e' und e_i' gehen also bei E_i^{-1} in die beiden Eckpunkte $(e_i^{-1})'$ und e' über. Da aber E_i^{-1} ein Automorphismus von G ist, müssen auch $(e_i^{-1})'$ und e' benachbart sein und damit auch e_i^{-1} und e, e_i^{-1} kommt also unter den $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vor. Im System $\mathfrak{E}$ der Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_n$ kommt also mit jedem Element auch sein Inverses vor, wie wir dies in der Definition 6.2 für ein Erzeugendensystem gefordert hatten. Weiter ist e nicht in $\mathfrak{E}$, da e nicht mit sich selbst benachbart ist.

3. Wir müssen jetzt zeigen: Zwei Eckpunkte a und b von $\mathfrak{G}$ sind genau dann mit einer Kante verbunden, wenn $a^{-1} b \in \mathfrak{E}$.

α) Es seien a und b benachbart, a' und b' die ihnen in G' entsprechenden Eckpunkte, ferner sei $A(e') = a'$. Wir üben auf G' den Automorphismus A^{-1} aus: $A^{-1}(a') = e'$, $A^{-1}(b') = c'$. Da a' und b' benachbart sind, müssen auch e' und c' benachbart sein, es ist also $c' = e_i'$ für ein gewisses i. Dann ist $A(e_i') = b'$, nach (7, 1) also $(a e_i)' = b'$, somit $a e_i = b$, also $a^{-1} b = e_i \in \mathfrak{E}$.

β) Es sei $a^{-1} b = e_i \in \mathfrak{E}$. Dann ist in G': $(a^{-1} b)' = e_i'$. Wir üben auf G' wieder den Automorphismus A^{-1} aus: $A^{-1}(a') = e'$; nach (7, 1) $A^{-1}(b') = (a^{-1} b)' = e_i'$. e' und e_i' sind aber benachbart, sie gehen beim Automorphismus A in a' und b' über, also müssen auch a' und b' benachbart sein, und damit auch a und b.

4. Jetzt weisen wir durch vollständige Induktion nach dem Betrag $|a|$ (siehe § 2) nach, daß das System $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ein Erzeugendensystem ist. Das Einselement $e = e_i e_i^{-1}$ und die Elemente vom Betrage 1, nämlich die e_i, können trivialerweise als Produkt der e_i dargestellt werden. Nach Induktionsvoraussetzung könne jedes $x \in \mathfrak{G}$ mit einem Betrage $|x| = n$, wobei $n \geqq 1$, als Produkt der e_i dargestellt werden. Es sei $|a| = n + 1$; nach Satz 2.1 hat a einen Nachbarn x mit $|x| = n$. Da x und a Nachbarn sind, gilt $x^{-1} a = e_k$, also $a = x e_k$, a kann also als Produkt der e_i dargestellt werden, da dies nach Induktionsvoraussetzung für x der Fall ist.

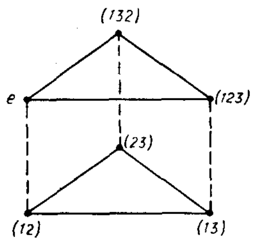
II. Voraussetzung: G ist ein Dehnsches Gruppenbild von $\mathfrak{G}$.
Behauptung: Die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von G besitzt eine in bezug auf die Eckpunkte von G einfach-transitive Untergruppe $\mathfrak{T}$, welche isomorph ist zu $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei $a \in \mathfrak{G}$. Weiter sei P_a diejenige Permutation der Elemente von $\mathfrak{G}$, welche $x \in \mathfrak{G}$ auf $a x$ abbildet. Zwischen diesen Permutationen und den Elementen von $\mathfrak{G}$ läßt sich eine eineindeutige Zuordnung herstellen: $P_a \longleftrightarrow a$. Es gilt $P_a \cdot P_b = P_{ab}$. Die Permutationen P_a bilden eine Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$, die einfach-transitiv ist und isomorph mit der Gruppe $\mathfrak{G}$. Es ist dies die reguläre Darstellung von $\mathfrak{G}$. Da die Eckpunkte des Gruppenbildes G die Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, ist die Permutation P_a auch eine eineindeutige

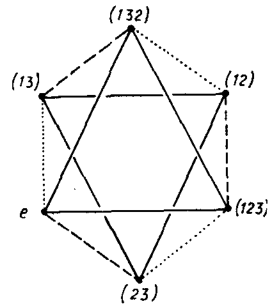
Abbildung der Eckpunkte von G auf sich. Es seien x, y zwei Nachbarn, also $x^{-1} y \in \mathfrak{E}$. Diese Eckpunkte gehen bei P_a über in $P_a(x) = a x$ und $P_a(y) = a y$. Es ist $(P_a(x))^{-1} \cdot P_a(y) = (a x)^{-1} \cdot (a y) = x^{-1} a^{-1} a y = x^{-1} y \in \mathfrak{E}$, die Bildpunkte $P_a(x)$ und $P_a(y)$ sind also wieder benachbart. Die Permutation P_a ist also ein Automorphismus von G. $\mathfrak{P}$ ist also die gesuchte Automorphismengruppe $\mathfrak{T}$.

Beispiele von Gruppenbildern

Gruppe $\mathfrak{S}_3$ = volle Permutationsgruppe von 3 Objekten

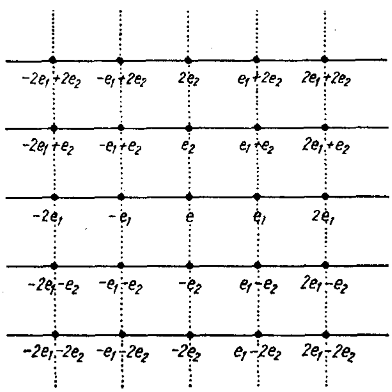


Gruppenbild G_1 von $\mathfrak{S}_3$:
Erzeugende: (123), (12)



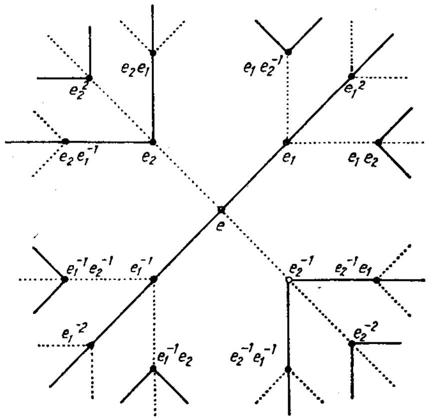
Gruppenbild G_2 von $\mathfrak{S}_3$:
Erzeugende: (123), (13), (23)

Gruppe $\mathfrak{G}_2$: Freie abelsche Gruppe von 2 Erzeugenden e_1, e_2



Gruppenbild G von $\mathfrak{G}_2$: Erzeugende: e_1, e_2

Gruppe $\mathfrak{F}_2$: Freie Gruppe von 2 Erzeugenden e_1, e_2



Gruppenbild G von $\mathfrak{F}_2$: Erzeugende: e_1, e_2

§ 8. Konstruktion eines Gruppenbildes $\overline{G}$ des direkten Produktes $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$ aus einem Gruppenbild G von $\mathfrak{G}$ und einem Gruppenbild G' von $\mathfrak{G}'$

Es seien $a, b, c, \ldots$ bzw. $a', b', c', \ldots$ die Elemente, e bzw. e' das Einselement der Gruppe $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}'$. Ein Element des direkten Produktes $\overline{\mathfrak{G}}$ können wir in der Form (a, a') darstellen, wobei $a \in \mathfrak{G}$, $a' \in \mathfrak{G}'$. Das Produkt der beiden Elemente (a, a') und (b, b') ist das Element $(ab, a'b')$. Wir identifizieren (a, e') mit a und (e, a') mit a'. Es sei G das Dehnsche Gruppenbild von $\mathfrak{G}$, wenn wir in $\mathfrak{G}$ das Erzeugendensystem $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ zugrunde legen, G' das Dehnsche Gruppenbild von $\mathfrak{G}'$, wenn wir in $\mathfrak{G}'$ das Erzeugendensystem $\mathfrak{E}' = \{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ zugrunde legen. Wir konstruieren nun auf folgende Art ein Gruppenbild $\overline{G}$ des direkten Produktes $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$:

Als Eckpunkte von $\overline{G}$ nehmen wir die Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$ und verbinden zwei Eckpunkte (a, a') und (b, b') genau dann mit einer Kante, wenn einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

1. Es ist $a = b$ und $a'^{-1} b' \in \mathfrak{E}'$, d. h. a' und b' sind in G' mit einer Kante verbunden.

2. Es ist $a' = b'$ und $a^{-1} b \in \mathfrak{E}$, d. h. a und b sind in G mit einer Kante verbunden.

$\bar{G}$ ist das Dehnsche Gruppenbild von $\bar{\mathfrak{G}}$, wenn man $\bar{\mathfrak{G}}$ das Erzeugendensystem $\bar{\mathfrak{E}} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ zugrunde legt. Unsere Konstruktion zeigt jedoch, wie man den Graphen $\bar{G}$ rein geometrisch aus den Graphen G und G' erhalten kann, $\bar{G}$ ist nämlich nichts anderes als das 1-dimensionale Kantengerüst des 2-dimensionalen kartesischen Produktes $G \times G'$.

Es sei $\rho[(a, a'), (b, b')]$ die Entfernung zweier Eckpunkte in $\bar{G}$, $\rho(a, b)$ bzw. $\rho(a', b')$ die Entfernung zweier Eckpunkte in G bzw. G'. Aus der Konstruktion von $\bar{G}$ ergibt sich folgende Beziehung:

$$\rho[(a, a'), (b, b')] = \rho(a, b) + \rho(a', b') \tag{8, 1}$$

Der Betrag $|(a, a')|$ des Eckpunktes (a, a') sei seine Entfernung vom Eckpunkte $(e, e') = e = e'$ in $\bar{G}$, $|a|$ bzw. $|a'|$ sei die Entfernung des Eckpunktes a bzw. a' vom Eckpunkte e bzw. e' in G bzw. G'. Dann folgt aus (8, 1):

$$|a, a'| = |a| + |a'| \tag{8, 2}$$

§ 9. Erzeugung der vollen Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ durch eine Translationengruppe $\mathfrak{T}$ und die Drehgruppe $\mathfrak{D}$

Es sei $\mathfrak{A}$ die volle Automorphismengruppe eines Gruppenbildes G. Da G ein Gruppenbild ist, besitzt $\mathfrak{A}$ eine in bezug auf die Eckpunkte von G einfach-transitive Untergruppe $\mathfrak{T}$. Wir nennen die Automorphismen von $\mathfrak{T}$ „Translationen" und die Gruppe $\mathfrak{T}$ eine Translationengruppe, da wegen der einfachen Transitivität außer der Identität E kein Element von $\mathfrak{T}$ einen Fixpunkt besitzt. Es sei $A \in \mathfrak{A}$ ein beliebiger Automorphismus von G und es sei $A(e) = a$. Da $\mathfrak{T}$ einfach-transitiv ist, gibt es genau eine Translation $T \in \mathfrak{T}$, so daß $T(e) = a$. Der Automorphismus $T^{-1}A$ hat die Eigenschaft, daß er den Eckpunkt e fest läßt: $T^{-1}A(e) = T^{-1}(A(e)) = T^{-1}(a) = e$. $T^{-1}A = D$ gehört somit zur Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$, die wir kurz die Drehgruppe $\mathfrak{D}$ nennen wollen. Die Drehgruppe $\mathfrak{D}_a$ in einem beliebigen Eckpunkte a ist übrigens nach Satz 4.2 zu $\mathfrak{D}$ konjugiert, also zu $\mathfrak{D}$ isomorph, da ein Gruppenbild G immer homogen ist. Aus $T^{-1}A = D$ folgt aber $A = TD$. Es gibt also für jeden Automorphismus A eine eindeutige Darstellung $A = TD$ mit $T \in \mathfrak{T}$ und $D \in \mathfrak{D}$. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ wird also von den beiden Untergruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{D}$ erzeugt: $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{D}$, wobei $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{D}$ außer der Identität E kein gemeinsames Element haben.

Aus $A^{-1} = T_1 D_1$ folgt $A = D_1^{-1} T_1^{-1} = D' T'$; es gibt also auch für jeden Automorphismus A eine eindeutige Darstellung $A = D' T'$ mit $T' \in \mathfrak{T}$, $D' \in \mathfrak{D}$, und es gilt folglich auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{T}$.

§ 10. Die Beziehung zwischen „geometrischen“ und „algebraischen“ Automorphismen

Es sei G ein Gruppenbild der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Automorphismen des Graphen G, also die Elemente der vollen Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von G, wollen wir „geometrische“, die Automorphismen der Gruppe $\mathfrak{G}$ „algebraische“ nennen. Die geometrischen Automorphismen permutieren die Eckpunkte von G, die algebraischen die Elemente von $\mathfrak{G}$. Da aber die Eckpunkte von G identisch mit den Elementen von $\mathfrak{G}$ sind, so erhebt sich die Frage, welche Beziehung zwischen den beiden Automorphismengruppen bestehe. Da jeder algebraische Automorphismus das Einselement e fest läßt, so können wir sie nur mit denjenigen geometrischen Automorphismen in Beziehung bringen, die den Eckpunkt e fest lassen, also mit den Drehungen der Drehgruppe $\mathfrak{D}$.

1. Wir wollen zuerst untersuchen, welche algebraischen Automorphismen Drehungen sind. Dem Gruppenbild G sei das Erzeugendensystem $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ von $\mathfrak{G}$ zugrunde gelegt. Einen algebraischen Automorphismus, der eine Permutation $P(e_i) = e_i'$ der Erzeugenden bewirkt, nennen wir einen P-Automorphismus.

Satz 10.1: Die P-Automorphismen und nur diese sind Drehungen des Gruppenbildes G.

Beweis: Ein P-Automorphismus bewirkt eine eineindeutige Abbildung der Eckpunkte von G auf sich. Sind a und b benachbart, ist also $a^{-1} b = e_i \in \mathfrak{E}$, so muß für die durch den P-Automorphismus zugeordneten Elemente a' und b' gelten: $(a^{-1})' b' = e_i'$. Da ein P-Automorphismus aber die Erzeugende e_i in die Erzeugende e_i' überführt, ist $(a^{-1})' b' = (a')^{-1} b' \in \mathfrak{E}$, also sind auch a' und b' benachbart. Sind aber a und b nicht benachbart, so können es auch a' und b' nicht sein, da sonst der inverse Automorphismus, der auch ein P-Automorphismus ist, ergäbe, daß a und b benachbart seien. Damit ist also der P-Automorphismus ein geometrischer Automorphismus, und zwar eine Drehung, da e fest bleibt. Diese P-Automorphismen sind auch die einzigen, die Drehungen sind, denn ein algebraischer Automorphismus, der die Erzeugenden nicht unter sich permutiert, führt einen Nachbarn von e in einen Eckpunkt über, der ihm nicht benachbart ist, kann also keine Drehung sein.

2. Jetzt wollen wir untersuchen, welche Drehungen des Gruppenbildes G von $\mathfrak{G}$ algebraische Automorphismen von $\mathfrak{G}$ sind. Die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von G enthält eine in bezug auf die Eckpunkte von G einfach-transitive Untergruppe $\mathfrak{T}$, die zur Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorph ist, die zu $\mathfrak{G}$ gehörende Translationengruppe. Wir betrachten den Normalisator $\mathfrak{N}$ dieser Translationengruppe $\mathfrak{T}$. Eine Drehung $D \in \mathfrak{N}$ nennen wir eine N-Drehung.

Satz 10.2: Die N-Drehungen und nur diese sind algebraische Automorphismen der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei $T_a \in \mathfrak{T}$ diejenige Translation, welche bestimmt ist durch $T_a(e) = a$; dann ist nach § 7 $T_a(b) = ab$.

α) Es sei D eine N-Drehung, also $D T_a D^{-1} = T_{a'}$. Da $D T_a D^{-1}(e) = D(a)$, ist auch $T_{a'}(e) = D(a)$, also $a' = D(a)$. Nun ist einerseits $D T_a D^{-1}[D(b)] = D(ab)$, andererseits $T_{a'}[(D(b)] = a' \cdot D(b) = D(a) \cdot D(b)$, also ist $D(ab) = D(a) \cdot D(b)$, das bedeutet aber, daß D ein algebraischer Automorphismus ist.

β) Es sei D ein algebraischer Automorphismus, also $D(ab) = D(a) \cdot D(b)$. Dann ist $D T_a D^{-1}[D(b)] = D T_a(b) = D(ab) = D(a) \cdot D(b) = T_{D(a)}[D(b)]$. Da jedes Element in der Form $D(b)$ dargestellt werden kann, so folgt daraus, $D T_a D^{-1} = T_{D(a)}$, das bedeutet aber, daß D eine N-Drehung ist.

Korollar 10.1: Die Translationengruppe $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{G}$ eines Gruppenbildes G der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann Normalteiler in der vollen Automorphismengruppe, wenn jede Drehung D von G ein algebraischer Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist.

Wir müssen zur Begründung nur noch darauf hinweisen, daß, wenn jede Drehung mit $\mathfrak{T}$ vertauschbar ist, auch ein beliebiger Automorphismus $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{T}$ vertauschbar ist, denn A läßt sich nach § 9 immer in der Form darstellen: $A = TD$, wobei $T \in \mathfrak{T}$, $D \in \mathfrak{D}$.

§ 11. Ein Satz über die Drehgruppe $\mathfrak{D}$ eines Gruppenbildes einer freien abelschen Gruppe

Satz 11.1: Jedes Gruppenbild G einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ hat eine endliche Drehgruppe $\mathfrak{D}$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ das Erzeugendensystem, das dem Gruppenbild G zugrunde gelegt ist. Da $\mathfrak{G}$ abelsch ist, wollen wir die additive Schreibweise verwenden und für das Einselement 0 schreiben. Die Entfernung eines Eckpunktes a vom Eckpunkte 0 nennen wir den Betrag von a (§ 2). Wir wollen zunächst zeigen, daß eine Drehung $D \in \mathfrak{D}$, welche alle Eckpunkte vom Betrage 1 fest läßt, auch alle Eckpunkte von einem beliebigen Betrage k fest läßt, d. h. wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{D}$ 1-variabel ist. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach dem Betrage k der Eckpunkte. Nach Induktionsvoraussetzung lasse D alle Eckpunkte vom Betrage $\leqq k$ fest ($k \geqq 1$). Nach Satz 3.1 läßt die Drehung D die Entfernung zweier Eckpunkte und somit auch den Betrag eines Eckpunktes invariant. Wir müssen also zeigen: Sind b, c zwei beliebige Eckpunkte vom Betrage $(k+1)$, so folgt aus $D(b) = c$, daß $b = c$. Nun gibt es nach Satz 2.1 immer einen Eckpunkt a vom Betrage $(k-1)$ mit der Eigenschaft: $a + e_i + e_{j_i} = b$. Im Falle $k = 1$ ist $a = 0$. Es seien $a + e_i + e_{j_i} = b$ alle solchen Relationen mit festem a und festem b. Da $\mathfrak{G}$ abelsch ist, so gilt mit $a + e_i + e_{j_i} = b$ auch $a + e_{j_i} + e_i = b$, d. h. die Gesamtheit der e_i stimmt überein mit der Gesamtheit der e_{j_i}. Bei geeigneter Numerierung seien dies die Erzeugenden $e_1, e_2, \ldots, e_r$, $r \leqq n$. Die Eckpunkte $a + e_1$, $a + e_2, \ldots, a + e_r$ bleiben bei D fest. Es sind Nachbarn von b. Da $D(b) = c$, so müssen diese Eckpunkte auch Nachbarn von c sein. Es muß also gelten: $a + e_i + e_{k_i} = c$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Wie vorhin gilt mit $a + e_i + e_{k_i} = c$ auch $a + e_{k_i} + e_i = c$, d. h. die Gesamtheit der e_i stimmt überein mit der Gesamtheit der e_{k_i}.

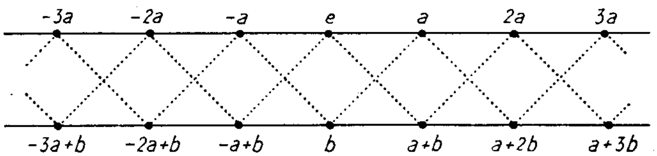
$$a+e_i+e_{j_i}=b,\ i=1,2,\ldots,r;$$
$$a+e_i+e_{k_i}=c,\ i=1,2,\ldots,r;$$
somit
$$e_{k_i}-e_{j_i}=c-b=d.$$

Es ist $r\cdot d=\sum_{i=1}^{r}(e_{k_i}-e_{j_i})=\sum_{i=1}^{r}e_i-\sum_{i=1}^{r}e_i=0.$

Das Element $d\in\mathfrak{G}$ hat also eine endliche Ordnung, nämlich r oder einen Teiler von r. In einer freien abelschen Gruppe hat aber außer dem Nullelement 0 kein Element eine endliche Ordnung, also ist $d=0$, d.h. $b=c$. Damit haben wir bewiesen, daß D auch alle Eckpunkte vom Betrage $(k+1)$ fest läßt. Die Eckpunkte vom Betrage 1 läßt D aber nach Voraussetzung fest. Damit ist gezeigt, daß D die Identität ist: $D=E$.

Wir haben also gezeigt, daß bei einem Gruppenbild einer freien abelschen Gruppe die Drehgruppe $\mathfrak{D}$ 1-variabel ist. Dann folgt aus Satz 4.1, daß $\mathfrak{D}$ endlich ist, und damit ist der Satz 11.1 bewiesen.

Der Satz 11.1 gilt nicht für beliebige abelsche Gruppen. Als Gegenbeispiel führen wir ein Gruppenbild der Gruppe $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}_2$ an, des direkten Produktes der unendlichen zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}$ (Erzeugende a) und der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 (Erzeugende b). Wir betrachten das Gruppenbild G, welches entsteht, wenn wir die Erzeugenden $a, a+b$ zugrunde legen:



Dabei sollen nur die speziell markierten und angeschriebenen Punkte Eckpunkte des Graphen G sein. Eine Drehung D von G (mit Fixpunkt e) ist z.B. eine Vertauschung von 2 gegenüberliegenden Eckpunkten (z.B. a und $a+b$) unter Festhaltung aller übrigen Eckpunkte. Daraus ersieht man, daß es kein n geben kann, für welches die Drehgruppe $\mathfrak{D}$ n-variabel ist, $\mathfrak{D}$ ist also nach Satz 4.1 unendlich.

3. Kapitel: Gemeinsame Gruppenbilder zweier Gruppen

§ 12. Definition, Formulierung des Hauptproblems

Definition 12.1: Besitzt die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ eines zusammenhängenden Graphen G endlichen Grades zwei in bezug auf die Eckpunkte von G einfach-transitive Untergruppen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, die zu den abstrakten Gruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ isomorph sind, so nennen wir G ein gemeinsames Gruppenbild von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$.

Definition 12.2: Sind die beiden Dehnschen Gruppenbilder G_1 und G_2 zweier Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ isomorph, so sagen wir, daß $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ein gemeinsames Gruppenbild haben. Wir können natürlich die beiden isomorphen Graphen G_1 und G_2 identifizieren und diesen einzigen Graphen G ein gemeinsames Gruppenbild von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ nennen.

Da die Definition 12.1 bzw. 12.2 des gemeinsamen Gruppenbildes zweier Gruppen auf der Definition 6.1 bzw. 6.2 des Gruppenbildes beruht, und wir in § 7 die Äquivalenz der Definitionen 6.1 und 6.2 nachgewiesen haben, so müssen auch die Definitionen 12.1 und 12.2 äquivalent sein.

Der Begriff des gemeinsamen Gruppenbildes legt nun die Frage nahe, welche algebraische Verwandtschaft zwischen zwei abstrakten Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ bestehen müsse, wenn sie ein gemeinsames Gruppenbild besitzen.

Damit kommen wir zum *Hauptproblem:* Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß zwei Gruppen ein gemeinsames Gruppenbild besitzen. Wir werden dabei vor allem drei verschiedene Methoden entwickeln, die zur Behandlung des Problems dienen können. Jede der drei Methoden löst das Hauptproblem für freie abelsche Gruppen; die 3. Methode löst es für beliebige abelsche Gruppen (mit endlich vielen Erzeugenden).

§ 13. Lösung des Hauptproblems für endliche Gruppen

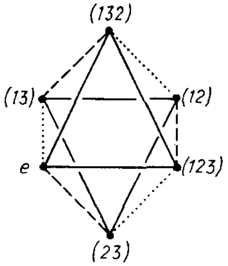
Satz 13.1: Zwei endliche Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ besitzen genau dann ein gemeinsames Gruppenbild, wenn sie dieselbe Ordnung haben.

Wir legen dem Beweis den Begriff des Dehnschen Gruppenbildes zugrunde.

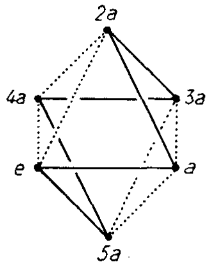
I. Die Bedingung ist notwendig: Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ isomorphe Gruppenbilder G_1 und G_2 besitzen. Da G_1 und G_2 isomorph sind, stimmen sie in der Anzahl ihrer Eckpunkte überein, und damit $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ in der Anzahl ihrer Elemente.

II. Die Bedingung ist hinreichend: Wir setzen somit voraus, daß $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ dieselbe Ordnung n haben. In $\mathfrak{G}_i$ $(i=1,2)$ wählen wir alle Elemente als Erzeugende außer dem Einselement e. Das Gruppenbild G_i wird dann ein vollständiger Graph mit n Eckpunkten, d.h. ein Graph mit n Eckpunkten, bei dem alle Paare von Eckpunkten durch je eine Kante verbunden sind. Zwei solche Graphen G_1 und G_2 sind aber isomorph.

Beispiel. Gemeinsames Gruppenbild der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ von 3 Objekten und der zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_6$ der Ordnung 6.



G_1 Gruppenbild von $\mathfrak{S}_3$
Erzeugende: (123), (13), (23)



G_2 Gruppenbild von $\mathfrak{Z}_6$
Erzeugende: a, 2a

Will man den beiden Gruppen den vollständigen Graphen mit 6 Eckpunkten als Gruppenbild zuordnen, so muß man in $\mathfrak{S}_3$ als weitere Erzeugende das Element (12), in $\mathfrak{Z}_6$ als weitere Erzeugende das Element $3a$ einführen.

§ 14. 1. Methode: Allgemeiner Satz über eine notwendige Bedingung

Wir brauchen folgenden gruppentheoretischen *Hilfssatz:* Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und hat $\mathfrak{U}$ endlichen Index in $\mathfrak{G}$, so ist der Index des Durchschnitts $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ in $\mathfrak{V}$ nicht größer als der Index von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\, x_1 + \mathfrak{U}\, x_2 + \ldots + \mathfrak{U}\, x_g$ die Restklaßzerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{U}$. Wir bilden den Durchschnitt mit $\mathfrak{V}$:

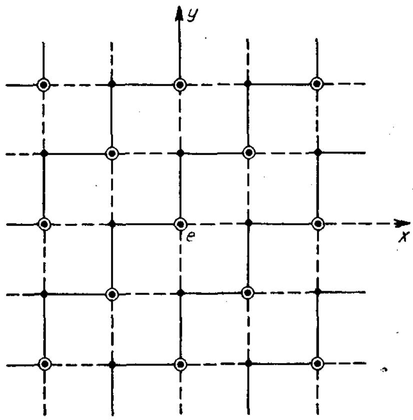
$$\mathfrak{V} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{V} = \mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}\, x_1 + \mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}\, x_2 + \ldots + \mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}\, x_g .$$

Es seien v_1, v_2 zwei Elemente von $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}\, x_i$, also $v_1, v_2 \in \mathfrak{V}$ und $v_1, v_2 \in \mathfrak{U}\, x_i$, somit $v_1 v_2^{-1} \in \mathfrak{U}$; da auch $v_1 v_2^{-1} \in \mathfrak{V}$, so $v_1 v_2^{-1} \in \mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}$, d. h. v_1, v_2 sind in derselben Restklasse $(\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}) \cdot y_i$ von $\mathfrak{V}$ nach $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}$. Die Elemente von $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}\, x_i$ gehören also alle derselben Restklasse von $\mathfrak{V}$ nach $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{U}$ an, es gibt also höchstens g solche Restklassen.

Satz 14.1: Ist der Graph G gemeinsames Gruppenbild von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, besitzt er also zwei in bezug auf seine Eckpunkte einfach-transitive Automorphismengruppen $\mathfrak{T}_1 \cong \mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{T}_2 \cong \mathfrak{G}_2$, und ist die Drehgruppe $\mathfrak{D}$ von G endlich, so hat der Durchschnitt $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{T}_1$ und in $\mathfrak{T}_2$ denselben endlichen Index.

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}$ die volle Automorphismengruppe von G. $D_1, D_2, \ldots, D_d$ seien die endlich vielen voneinander verschiedenen Elemente von $\mathfrak{D}$. Nach § 9 ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_i \cdot \mathfrak{D}$, $i = 1, 2$. Wir zeigen, daß in der Restklaßzerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_i \cdot D_1 + \mathfrak{T}_i \cdot D_2 + \ldots + \mathfrak{T}_i \cdot D_d$ die d Restklassen paarweise voneinander verschieden sind. Aus $\mathfrak{T}_i \cdot D_h = \mathfrak{T}_i \cdot D_k$ folgt $D_h D_k^{-1} \in \mathfrak{T}_i$; da $D_h D_k^{-1} \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{D}$ aber nur das Einselement gemeinsam haben, folgt $D_h D_k^{-1} = E$, also $D_h = D_k$. $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ haben also in $\mathfrak{A}$ denselben endlichen Index d. Nach dem Hilfssatz ist der Index $i_{\mathfrak{T}_1}$ von $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{T}_1$ nicht größer als der Index von $\mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{A}$ und der Index $i_{\mathfrak{T}_2}$ von $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2$ in $\mathfrak{T}_2$ nicht größer als der Index von $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{A}$, $i_{\mathfrak{T}_1}$ und $i_{\mathfrak{T}_2}$ sind also beide endlich. Es ist $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{A}$. Der Index von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{A}$ ist also einerseits $i_{\mathfrak{T}_1} \cdot d$, andererseits $i_{\mathfrak{T}_2} \cdot d$, daraus folgt $i_{\mathfrak{T}_1} = i_{\mathfrak{T}_2}$.

Beispiel zu Satz 14.1. $\mathfrak{G}_1$: Gruppe mit den Erzeugenden a, b und der Relation $a^2 b^{-2} = e$. Als Gruppenbild G bei Zugrundelegung dieser Erzeugenden wählen wir in der euklidischen Ebene das Quadratnetz, dessen Punkte ganzzahlige Koordinaten haben.



Die Translationengruppe $\mathfrak{T}_1 \cong \mathfrak{G}_1$ wird erzeugt durch

$$A\colon \begin{array}{l} x' = y+1 \\ y' = x \end{array} \quad \text{und } B\colon \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x+1 \end{array}$$

G ist auch Gruppenbild der freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}_2$ vom Range 2 (Seite 22). Die Translationengruppe $\mathfrak{T}_2 \cong \mathfrak{G}_2$ wird erzeugt durch

$$E_1\colon \begin{array}{l} x' = x+1 \\ y' = y \end{array} \quad \text{und } E_2\colon \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y+1 \end{array}$$

Der Durchschnitt $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ wird von denjenigen Translationen gebildet, die e in die speziell markierten Punkte überführt.

$\mathfrak{U}$, als Untergruppe von $\mathfrak{T}_1$ aufgefaßt, wird erzeugt durch

$$AB\colon \begin{array}{l} x' = x+2 \\ y' = y \end{array} \quad \text{und } A^2\colon \begin{array}{l} x' = x+1 \\ y' = y+1 \end{array}$$

$\mathfrak{U}$, als Untergruppe von $\mathfrak{T}_2$ aufgefaßt, wird erzeugt durch

$$E_1{}^2\colon \begin{array}{l} x' = x+2 \\ y' = y \end{array} \quad E_1 E_2\colon \begin{array}{l} x' = x+1 \\ y' = y+1 \end{array}$$

$\mathfrak{U}$ hat in $\mathfrak{T}_1$ und in $\mathfrak{T}_2$ den Index 2.

Korollar 14.1: Besitzen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ein gemeinsames Gruppenbild G mit endlicher Drehgruppe, so besitzen sie isomorphe Untergruppen $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ von demselben endlichen Index in $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$.

Das Korollar 14.1 und damit der Satz 14.1 sind nicht umkehrbar. Gegenbeispiel: Die unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}$ und das direkte Produkt einer unendlichen zyklischen Gruppe mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2, $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}_2$, haben beide eine unendliche zyklische Untergruppe vom Index 2. Nach Satz 16.1 besitzen aber $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}_2$ kein gemeinsames Gruppenbild.

Satz 14.2: Zwei freie abelsche Gruppen $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{G}_m$ vom Range n bzw. m besitzen genau dann ein gemeinsames Gruppenbild, wenn $n=m$.

Beweis: Daß $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{G}_m$ ein gemeinsames Gruppenbild besitzen, falls $n=m$, ist trivial, denn dann sind die beiden Gruppen isomorph. Jetzt setzen wir voraus, daß $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{G}_m$ ein gemeinsames Gruppenbild besitzen. Der Satz 14.1 und somit das Korollar 14.1 ist auf jedes Gruppenbild einer freien abelschen Gruppe anwendbar, da nach Satz 11.1 die Drehgruppe eines solchen Gruppenbildes immer endlich ist. Nach Korollar 14.1 besitzen $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{G}_m$ isomorphe Untergruppen $\mathfrak{U}_n$ bzw. $\mathfrak{U}_m$ mit endlichem Index in $\mathfrak{G}_n$ bzw. $\mathfrak{G}_m$. Da $\mathfrak{U}_n$ endlichen Index in $\mathfrak{G}_n$ hat, ist $\mathfrak{U}_n \cong \mathfrak{G}_n$, ebenso $\mathfrak{U}_m \cong \mathfrak{G}_m$, und da $\mathfrak{U}_n \cong \mathfrak{U}_m$, so folgt $\mathfrak{G}_n \cong \mathfrak{G}_m$, also $n=m$.

§ 15. 2. Methode: Geometrische Anzahlfunktionen

1. Definitionen. Es sei G ein zusammenhängender Graph endlichen Grades, e sei ein ausgezeichneter Eckpunkt von G. Als Betrag eines Eckpunktes a bezeichnen wir seine Entfernung (§ 2) vom Eckpunkte e.

Definition 15.1: $\mathrm{V}_e(r)$ ist die Anzahl aller Eckpunkte von G, deren Betrag nicht größer als r ist.

Definition 15.2: $0_e(r)$ ist die Anzahl aller Eckpunkte von G, deren Betrag genau gleich r ist.

Wenn der Graph G homogen ist, also speziell wenn G ein Gruppenbild ist, so sind wegen Satz 3.1 die Funktionen $\mathrm{V}_e(r)$ und $0_e(r)$ in jedem Eckpunkte e dieselben, man kann also von $V(r)$ und von

$0(r)$ sprechen, unabhängig von dem Eckpunkte, in welchem die Funktionen bestimmt wurden. Das Argument r kann seiner Bedeutung nach die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$ annehmen. Die Bezeichnung $V(r)$ bzw. $0(r)$ soll an das Volumen bzw. die Oberfläche einer Kugel mit Radius r erinnern. Aus den beiden Definitionen folgen sofort die Beziehungen

$$0(r) = V(r) - V(r-1) \tag{15,1}$$

und
$$V(r) = \sum_{i=0}^{r} 0(i) \tag{15,2}$$

2. Im § 8 haben wir aus den Gruppenbildern G von $\mathfrak{G}$ und G' von $\mathfrak{G}'$ ein Gruppenbild $\overline{G}$ des direkten Produktes $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$ konstruiert. Es seien $0(r)$, $0'(r)$, $\overline{0}(r)$ die zu G, G', $\overline{G}$ gehörenden Anzahlfunktionen. Aus (8, 2) entnimmt man, daß folgende Beziehung gilt:

$$\overline{0}(r) = \sum_{i=0}^{r} 0(i) \cdot 0'(r-i) \tag{15,3}$$

3. Es sei $\mathfrak{G}_n$ die freie abelsche Gruppe vom Range n. Legt man einem Gruppenbild von $\mathfrak{G}_n$ gerade n linear unabhängige Erzeugende $e_1, e_2, \ldots, e_n$ samt ihren Inversen zugrunde, so nennen wir das Gruppenbild G_n „Standardgruppenbild" von $\mathfrak{G}_n$. Die Anzahlfunktionen von G_n seien $0_n(r)$ und $V_n(r)$. Die Erzeugenden $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ samt ihren Inversen erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{n-1}$ vom Range $(n-1)$ mit zugehörigem Standardgruppenbild G_{n-1}, die Erzeugende e_n mit ihrer Inversen $-e_n$ erzeugt eine unendliche zyklische Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ vom Range 1 mit zugehörigem Standard-Gruppenbild G_1. Dann ist $\mathfrak{G}_n$ das direkte Produkt von $\mathfrak{G}_{n-1}$ und $\mathfrak{G}_1$, man kann also das Gruppenbild G_n von $\mathfrak{G}_n$ nach der Methode des § 8 aus den Gruppenbildern G_{n-1} von $\mathfrak{G}_{n-1}$ und G_1 von $\mathfrak{G}_1$ konstruieren. Dies gestattet uns, die Anzahlfunktionen von G_n aus denjenigen von G_{n-1} rekursiv zu berechnen.

Es ist $\quad 0_1(r) = 2$ für $r \geqq 1$, $\; 0_1(o) = 1$

Nach (15, 2) ist $V_1(r) = \sum_{i=0}^{r} 0_1(i) = 2r + 1.$

Nach (15, 3) ist $0_n(r) = \sum_{i=0}^{r} 0_1(i) \cdot 0_{n-1}(r-i) =$

$$= 0_{n-1}(r) + 2 \cdot 0_{n-1}(r-1) + \ldots + 2 \cdot 0_{n-1}(1) + 2 \cdot 0_{n-1}(o).$$

Unter Benützung von (15, 2) ergibt sich daraus folgende Rekursionsformel für $0_n(r)$:

$$0_n(r) = 0_{n-1}(r) + 2 \cdot V_{n-1}(r-1). \tag{15,4}$$

Danach ist $0_2(r) = 0_1(r) + 2 \cdot V_1(r-1) = 4r$ für $r \geqq 1$; $0_2(o) = 1$.

Nach (15, 2) ist $V_2(r) = \sum_{i=0}^{r} 0_2(i) = 2r^2 + 2r + 1$

Nach (15, 4) $0_3(r) = 0_2(r) + 2V_2(r-1) = 4r^2 + 2$ für $r \geqq 1$; $0_3(o) = 1$

Nach (15, 2) ist $V_3(r) = \sum_{i=0}^{r} 0_3(i) = \frac{2}{3}(2r^3 + 3r^2 + 4r) + 1$

Die Berechnung zeigt, daß $0_1(r)$, $0_2(r)$, $0_3(r)$ Polynome 0., 1., 2. Grades in r sind, und daß $V_1(r)$, $V_2(r)$, $V_3(r)$ Polynome 1., 2., 3. Grades in r sind. Durch vollständige Induktion läßt sich zeigen, daß allgemein $0_n(r)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades, $V_n(r)$ ein Polynom n-ten Grades in r ist. Es sei nämlich $0_{n-1}(r)$ $(n \geqq 2)$ ein Polynom $(n-2)$-ten Grades in r. Nach (15, 2) erhält man $V_{n-1}(r)$ durch Summation einer arithmetischen Reihe $(n-2)$-ten Grades, was eine arithmetische Reihe $(n-1)$-ten Grades ergibt. $V_{n-1}(r)$ ist also ein Polynom $(n-1)$-ten Grades in r. Nach (15,4) erhält man $0_n(r)$ durch Addition eines Polynoms $(n-2)$-ten Grades und eines Polynoms $(n-1)$-ten Grades, was ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ergibt.

Zusammenstellung der Anzahlfunktionen für die Standardgruppenbilder G_1, G_2, G_3, G_4:

$$\left.\begin{aligned} 0_1(r) &= 2 \\ 0_2(r) &= 4r \\ 0_3(r) &= 4r^2 + 2 \\ 0_4(r) &= \tfrac{8}{3}(r^3 + 2r) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für } r \geqq 1 \\ &0_i(o) = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V_1(r) &= 2r + 1 \\ V_2(r) &= 2r^2 + 2r + 1 \\ V_3(r) &= \tfrac{2}{3}(2r^3 + 3r^2 + 4r) + 1 \\ V_4(r) &= \tfrac{2}{3}(r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 4r) + 1 \end{aligned}$$

4. Abschätzungen. Es sei $\mathfrak{G}_n$ die freie abelsche Gruppe vom Range n. Ein Standardgruppenbild von $\mathfrak{G}_n$ bezeichnen wir jetzt mit ${}_{st}G_n$, seine Anzahlfunktion mit ${}_{st}V_n(r)$.

Weiter sei G_n ein beliebiges Gruppenbild von $\mathfrak{G}_n$ mit der Anzahlfunktion $V_n(r)$. Wir geben für $V_n(r)$ eine Abschätzung nach unten und nach oben.

α) Unter allen Erzeugenden, die dem Gruppenbild G_n zugrunde gelegt sind, gibt es immer n linear unabhängige, die eine Untergruppe $\mathfrak{G}_n'$ von $\mathfrak{G}_n$ erzeugen von demselben Range n. Das von diesen n Erzeugenden samt ihren Inversen bestimmte Gruppenbild ist ein Standardgruppenbild ${}_{st}G_n'$ von $\mathfrak{G}_n'$ mit der Anzahlfunktion ${}_{st}V_n(r)$. Da $\mathfrak{G}_n' \subset \mathfrak{G}_n$ und da die Erzeugenden, welche ${}_{st}G_n'$ bestimmen, unter den Erzeugenden, die G_n bestimmen, vorkommen, ist ${}_{st}G_n'$ ein Teilgraph von G_n. Daraus folgt

$$V_n(r) \geqq {}_{st}V_n(r) \tag{15,5}$$

β) Zwischen den Eckpunkten von G_n und denjenigen eines Standardgruppenbildes ${}_{st}G_n$ von $\mathfrak{G}_n$ besteht eine eineindeutige Zuordnung vermöge der Vermittlung durch die Gruppenelemente von $\mathfrak{G}_n$. Wir betrachten in G_n alle Eckpunkte, die (in G_n) den Betrag 1 haben. Weiter betrachten wir in ${}_{st}G_n$ die diesen Eckpunkten zugeordneten. Einer oder mehrere von ihnen haben (in ${}_{st}G_n$) den maximalen Betrag m. Dann gilt $V_n(1) \leqq {}_{st}V_n(m)$. Nach dem Dreiecksaxiom (§ 2) gilt dann weiter $V_n(2) \leqq {}_{st}V_n(2m)$, usw.

$$V_n(r) \leqq {}_{st}V_n(rm). \tag{15,6}$$

Nach (15, 5) und (15, 6) haben wir also für ein beliebiges Gruppenbild G_n von $\mathfrak{G}_n$ die folgende beidseitige Abschätzung der Anzahlfunktion $V_n(r)$:

$${}_{st}V_n(r) \leqq V_n(r) \leqq {}_{st}V_n(mr) \tag{15,7}$$

Dabei ist m für ein bestimmtes Gruppenbild konstant, m ist abhängig vom Erzeugendensystem.

Unter 3. hatten wir festgestellt, daß ${}_{st}V_n(r)$ ein Polynom n-ten Grades in r ist. Dann ist auch ${}_{st}V_n(mr)$, m konstant, ein Polynom n-ten Grades in r. Es ist also möglich, die Abschätzung (15, 7) für $r \geqq 1$ in folgender Form zu schreiben:

$$0 < c_n < \frac{V_n(r)}{r^n} < d_n, \text{ wobei } c_n,\ d_n \text{ konstant sind.}$$

Wir formen diese Abschätzung weiter um:

$$\ln c_n < \ln V_n(r) - n \ln r < \ln d_n$$

$$\frac{\ln c_n}{\ln r} < \frac{\ln V_n(r)}{\ln r} - n < \frac{\ln d_n}{\ln r}$$

somit
$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\ln V_n(r)}{\ln r} - n\right] = 0$$
und weiter:

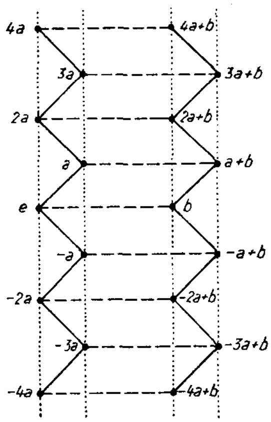
$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln V_n(r)}{\ln r} = n \tag{15, 8}$$

Diese Formel drückt einen Zusammenhang aus zwischen der Anzahlfunktion $V_n(r)$, die durch die geometrische Struktur des Graphen G_n bestimmt ist, und dem Range n, der durch die algebraische Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ bestimmt ist.

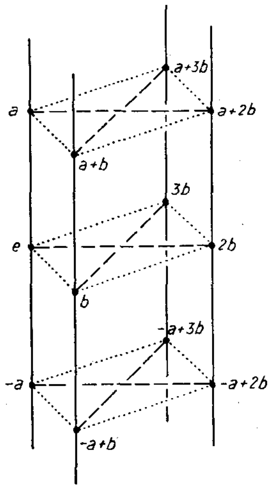
Aus (15, 8) folgt unmittelbar nochmals der Satz: Zwei freie abelsche Gruppen, die ein gemeinsames Gruppenbild besitzen, haben denselben Rang.

5. Es ist nicht möglich, das Hauptproblem für beliebige abelsche Gruppen mit Hilfe der Anzahlfunktion $V(r)$ zu lösen. Wir zeigen dies an einem Gegenbeispiel.

Wir betrachten die beiden Gruppen $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{Z}_4$, also direktes Produkt der unendlichen zyklischen Gruppe (Erzeugende a) mit der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 bzw. 4 (Erzeugende b).



Gruppenbild G_1 von $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{Z}_2$
Erzeugende: a, 2a, b



Gruppenbild G_2 von $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{Z}_4$
Erzeugende: a, b, 2b

G_1 und G_2 haben beide die Anzahlfunktion $V(r) = 8r - 2\ (r \geqq 1)$. Aus Satz 16.1 folgt aber, daß $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{Z}_4$ kein gemeinsames Gruppenbild besitzen.

§ 16. 3. Methode

Es sei $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden; die Elemente endlicher Ordnung bilden eine endliche Untergruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$, die Torsionsgruppe. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ ist eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges; $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ haben denselben Rang.

Satz 16.1: Zwei abelsche Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ besitzen genau dann ein gemeinsames Gruppenbild, wenn sie selbst denselben Rang und ihre Torsionsgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ dieselbe Ordnung haben.

Beweis: Wir legen der Beweisführung den Begriff des Dehnschen Gruppenbildes zugrunde.

I. Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung notwendig ist und setzen somit voraus, daß $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ isomorphe Gruppenbilder G und G' besitzen. Ist c' ein festes Element von $\mathfrak{G}'$, so ist die Zuordnung $x' \to x' + c'$ ein Automorphismus von G'; es gibt somit einen geometrischen Isomorphismus f von G auf G', bei dem die Nullelemente sich entsprechen. Es sei φ die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$, F die zusammengesetzte Abbildung $\varphi f : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$. Wir leiten einige Eigenschaften der Abbildung F her. Da bei f die Nullelemente sich entsprechen und φ ein Homomorphismus ist, ist

E 1. $\quad F(0) = \varphi f(0) = \bar{0}$, das Nullelement von $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$.

F bildet diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$ auf $\bar{0}$ ab, welche bei f auf $\mathfrak{T}'$, den Kern des Homomorphismus φ, abgebildet werden; da f eineindeutig ist, ergibt sich:

E 2. F bildet soviele Elemente von $\mathfrak{G}$ auf $\bar{0}$ ab, wie die Ordnung von $\mathfrak{T}'$ beträgt.

Dem Gruppenbild G von $\mathfrak{G}$ sei das Erzeugendensystem $\mathfrak{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, dem Gruppenbild G' von $\mathfrak{G}'$ das Erzeugendensystem $\mathfrak{E}' = \{e_1', \ldots, e_m'\}$ zugrunde gelegt. Beim Isomorphismus f werden die Elemente e_i (die Nachbarn des Nullelementes von $\mathfrak{G}$) in die Elemente e_j' (die Nachbarn des Nullelementes von $\mathfrak{G}'$) abgebildet; es ist somit $m = n$ und bei geeigneter Numerierung

$$f(e_i) = e_i',\ i = 1, \ldots, n. \text{ Ferner sei } F(e_i) = \varphi(e_i') = \bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Da bei f allgemein benachbarte Eckpunkte von $\mathfrak{G}$ in benachbarte Eckpunkte von $\mathfrak{G}'$ abgebildet werden, ist für geeignetes k: $f(a + e_i) = = f(a) + e_k'$; der Index k hängt von i und a ab, d.h.

$$f(a + e_i) = f(a) + e'_{k(i,a)}. \tag{16,1}$$

Mit i durchläuft $k(i, a)$ die Zahlen von 1 bis n. Summieren wir über diese n Gleichungen, so erhalten wir $\sum\limits_{i=1}^{n} f(a + e_i) = n \cdot f(a) + \sum\limits_{i=1}^{n} e_k'$. Mit einer Erzeugenden e_k' ist stets $-e_k' \in \mathfrak{E}'$. Für eine Erzeugende, die nicht von der Ordnung 2 ist, ist $e_k' \neq -e_k'$, solche Erzeugende treten also paarweise auf. $\sum\limits_{i=1}^{n} e_k'$ ist somit eine Summe von Elementen der Ordnung 2, d.h. ein Element von $\mathfrak{T}'$. Da φ ein Homomorphismus mit dem Kern $\mathfrak{T}'$ ist, so folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} F(a + e_i) = n \cdot F(a)$, d.h.

$$F(a) \text{ ist harmonisch.} \tag{16,2}$$

Aus (16, 1) folgt, da φ ein Homomorphismus ist,

$$F(a + e_i) = F(a) + \bar{e}_{k(i,a)}. \tag{16,3}$$

Es sei $b = \sum\limits_{j=1}^{l} e_{i_j}$ ein festes Element von $\mathfrak{G}$. Durch l-malige Anwendung von (16, 3) erhalten wir $F(a + b) = F(a + \sum\limits_{j=1}^{l} e_{i_j}) = F(a) + \sum\limits_{j=1}^{l} \bar{e}_{k_j}$, wobei k_j von a und b abhängt. $F(a + b) - F(a)$ ist somit eine Summe von l Elementen $\bar{e}_i$; bei variablem a durchläuft $F(a + b) - F(a)$ nur endlich viele Elemente:

$$F(a + b) - F(a) = \Phi(a) \text{ ist endlichwertig.} \tag{16,4}$$

Mit $F(a)$ ist auch $F(a + b)$ bei festem b harmonisch, also ist nach § 5 auch $F(a + b) - F(a) = \Phi(a)$ harmonisch:

$$\Phi(a) \text{ ist harmonisch.} \tag{16,5}$$

Wegen (16, 4) und (16, 5) und der Tatsache, daß eine freie abelsche Gruppe geordnet werden kann, erfüllt $\Phi(a)$ die Voraussetzungen von Korollar 5.1 und ist somit eine Konstante:

$$\Phi(a) = F(a+b) - F(a) = \bar{c} \text{ für alle } a \in \mathfrak{G}. \qquad (16, 6)$$

Für $a=0$: $F(b) - F(0) = F(b) = \bar{c}$ und somit

$E\,3.$ $$F(a+b) = F(a) + F(b)$$

F ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$.

Wir zeigen, daß der Kern $\mathfrak{K}$ dieses Homomorphismus $\mathfrak{T}$ ist. Es sei $t \in \mathfrak{T}$, d. h. $n\,t = 0$ für eine natürliche Zahl $n \neq 0$, $F(n\,t) = n\,F(t) = \bar{0}$, d. h. $F(t) = \bar{0}$, da $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$ keine Elemente endlicher Ordnung besitzt, also $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{T}$. Nach $E\,2$ enthält $\mathfrak{K}$ gleich viele Elemente wie $\mathfrak{T}'$. $\mathfrak{K}$ ist somit endlich und kann deshalb kein Element von unendlicher Ordnung enthalten. Es ist daher $\mathfrak{K} = \mathfrak{T}$, und $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ haben dieselbe Ordnung. Die Gruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$ sind isomorph, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ haben denselben Rang. Damit ist gezeigt, daß die Bedingung im Satz 16.1 notwendig ist.

II. Jetzt wollen wir zeigen, daß die Bedingung auch hinreichend ist und setzen somit voraus, daß $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ selbst denselben Rang und ihre Torsionsgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ dieselbe Ordnung haben. Dann haben die freien abelschen Gruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$ auch denselben Rang, sind also isomorph und besitzen somit ein gemeinsames Gruppenbild G'. Nach Satz 13.1 haben die Torsionsgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ ebenfalls ein gemeinsames Gruppenbild G''. Jetzt konstruieren wir nach dem Verfahren von § 8 aus G' und G'' den Graphen G. Fassen wir G' als Gruppenbild von $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$, G'' als Gruppenbild von $\mathfrak{T}$ auf, so ist G nach § 8 ein Gruppenbild des direkten Produktes $\mathfrak{G}/\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$, das isomorph ist zu $\mathfrak{G}$. Fassen wir aber G' als Gruppenbild von $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$, G'' als Gruppenbild von $\mathfrak{T}'$ auf, so ist G ein Gruppenbild des direkten Produktes $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}'$, das isomorph ist zu $\mathfrak{G}'$. G ist also ein gemeinsames Gruppenbild von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$. Damit ist gezeigt, daß die Bedingung im Satz 16.1 auch hinreichend ist, der Satz 16.1 ist somit vollständig bewiesen.

Wenden wir den Satz 16.1 auf den Spezialfall an, bei dem $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ freie abelsche Gruppen, die Torsionsgruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ also nur das Nullelement enthalten, so ergibt er einen neuen Beweis des Satzes: Zwei freie abelsche Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ besitzen genau dann ein gemeinsames Gruppenbild, wenn sie denselben Rang haben.

Wir wollen den Beweisgang I zu Satz 16.1 noch auf folgenden Spezialfall anwenden: Es sei $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'$ eine freie abelsche Gruppe, $G=G'$ sei ein Gruppenbild von $\mathfrak{G}$. f sei ein geometrischer Automorphismus von G auf sich selbst, der das Nullelement auf sich selbst abbilde, f sei also eine Drehung von G. Dann ist φ die Identität, $F=f$ und $E\,3$ besagt somit $f(a+b)=f(a)+f(b)$, d.h. f ist ein algebraischer Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Es ergibt sich also der

Satz 16.2: Jede Drehung in einem Gruppenbild G einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein algebraischer Automorphismus von $\mathfrak{G}$.

Korollar 16.1: In einem Gruppenbild G einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die Translationengruppe $\mathfrak{T}\cong\mathfrak{G}$ Normalteiler in der vollen Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$.

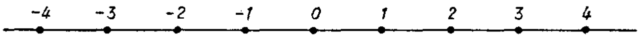
Dies ist eine unmittelbare Folge von Korollar 10.1 und Satz 16.2.

Wir wollen weiter zeigen, daß der Satz 11.1 eine Folge von Satz 16.2 ist. Es sei G das Gruppenbild einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$. Da eine Drehung D von G die Nachbarn des Nullelementes unter sich abbildet, bewirkt sie eine Permutation der Erzeugenden von $\mathfrak{G}$. Nach Satz 16.2 ist D ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Dieser ist durch die Permutation der Erzeugenden eindeutig gegeben. Jeder Drehung ist also eindeutig eine Permutation der Erzeugenden von $\mathfrak{G}$ zugeordnet. Da es nur endlich viele solche Permutationen gibt, so ist die Drehgruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ endlich, was die Aussage von Satz 11.1 ist. Damit hat sich zugleich ergeben, daß eine Drehung D in einem Gruppenbild G einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Permutation der Erzeugenden eindeutig bestimmt ist.

Da der Satz 11.1 nicht für eine beliebige abelsche Gruppe gilt, kann auch der Satz 16.2 nicht für eine beliebige abelsche Gruppe gelten. In dem Gruppenbild von $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}_2$ (Seite 28), das wir bei Satz 11.1 als Gegenbeispiel angeführt haben, ist z.B. die Vertauschung der beiden Eckpunkte a und $a+b$ bei Festhaltung aller übrigen Eckpunkte eine Drehung. Diese Drehung ist aber kein algebraischer Automorphismus der Elemente von $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}_2$.

Satz 16.3: In jedem Gruppenbild der unendlichen zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}$ ist die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ isomorph zum freien Produkt von zwei zyklischen Gruppen der Ordnung 2: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{Z}_2 \circ \mathfrak{Z}_2'$.

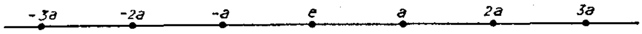
Beweis: Wir denken uns $\mathfrak{Z}$ durch die ganzen Zahlen, verknüpft durch die Addition, realisiert. Wir betrachten zuerst das „Standardgruppenbild" G, welches entsteht, wenn wir $\mathfrak{Z}$ als einzige Erzeugende 1 zugrunde legen.



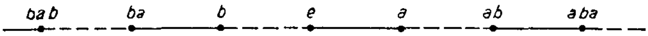
Die Translation $T(n) = n + 1$ erzeugt die Translationengruppe $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{Z}$, die Drehung $D(n) = -n$ erzeugt die Drehgruppe $\mathfrak{D}$, die isomorph ist zu einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2. $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{D}$ erzeugen die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$, welche isomorph ist zu $\mathfrak{Z}_2 \circ \mathfrak{Z}_2'$. Als Erzeugende von $\mathfrak{Z}_2$ kann man den Automorphismus $D(n) = -n$, als Erzeugende von $\mathfrak{Z}_2'$ den Automorphismus $TD(n) = -n + 1$ nehmen. Es sei nun G' ein beliebiges Gruppenbild von $\mathfrak{Z}$ mit der vollen Automorphismengruppe $\mathfrak{A}'$. Da G' Gruppenbild von $\mathfrak{Z}$ ist, so gestattet G' eine Translationengruppe $\mathfrak{T}' \cong \mathfrak{Z}$ mit dem erzeugenden Element $T'(n) = n + 1$. Der algebraische Automorphismus $D'(n) = -n$ von $\mathfrak{Z}$ ist ein P-Automorphismus, denn er führt jede Erzeugende von $\mathfrak{Z}$ in die zu ihr inverse über, bewirkt also eine Permutation der Erzeugenden. Nach Satz 10.1 ist $D'(n) = -n$ eine Drehung von G'. Diejenigen Permutationen der Elemente von $\mathfrak{Z}$, die Automorphismen von G sind, sind also auch Automorphismen von G': $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_1' \subset \mathfrak{A}'$. Nun sei $A' \in \mathfrak{A}'$ ein beliebiger Automorphismus von G'. Da $\mathfrak{T}'$ einfach-transitiv in bezug auf die Eckpunkte von G' ist, gibt es ein $T_1' \in \mathfrak{T}'$, so daß $T_1' A'$ eine Drehung ist. Es ist $D'(n) = -n$ außer der Identität der einzige algebraische Automorphismus von $\mathfrak{Z}$, also ist es nach Satz 16.2 außer der Identität auch die einzige Drehung von G'. Somit ist $T_1' A' = D'$ oder $T_1' A' = E$, also $A' = T_1'^{-1} D'$ oder $A' = T_1'^{-1}$, d. h. $A' \in \mathfrak{A}_1'$, also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1' \cong \mathfrak{A}$.

Satz 16.4: Die Eigenschaft, ein gemeinsames Gruppenbild zu besitzen, ist keine transitive Eigenschaft der abstrakten Gruppen.

Wir führen den Beweis durch ein Gegenbeispiel. Es sei $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{Z}$ die unendliche zyklische Gruppe der Erzeugenden a, $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{Z}_2 \circ \mathfrak{Z}_2'$ das freie Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2 mit den Erzeugenden a bzw. b, $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}_2$ das direkte Produkt einer unendlichen zyklischen Gruppe (Erzeugende a) mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 (Erzeugende b).

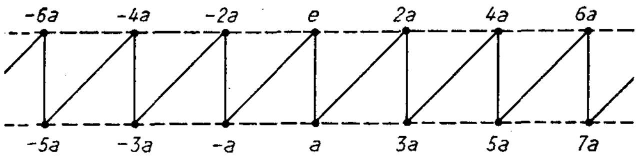


Gruppenbild G_1 von $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{Z}$. Erzeugende: a

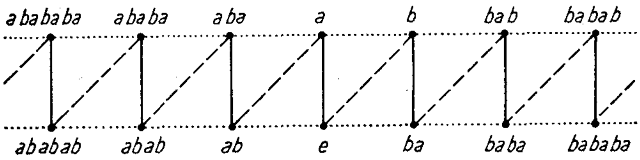


Gruppenbild G_2 von $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{Z}_2 \circ \mathfrak{Z}_2'$. Erzeugende: a, b

Die beiden Gruppenbilder G_1 und G_2 sind isomorph, $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ besitzen also ein gemeinsames Gruppenbild. Wir führen noch ein zweites gemeinsames Gruppenbild an.

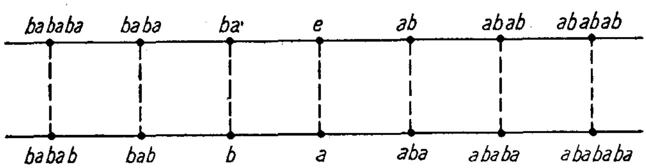


Gruppenbild G_1' von $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{Z}$. Erzeugende: a, 2a

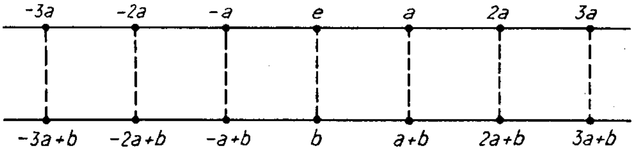


Gruppenbild G_2' von $G_2 = \mathfrak{Z}_2 \circ \mathfrak{Z}_2'$. Erzeugende: a, b, a b

G_1' und G_2' sind isomorph



Gruppenbild G_2'' von $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{Z}_2 \circ \mathfrak{Z}_2'$. Erzeugende: ab, a



Gruppenbild G_3'' von $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}_2$. Erzeugende: a, b

Die beiden Gruppenbilder G_2'' und G_3'' sind isomorph, $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ besitzen also ein gemeinsames Gruppenbild.

Wir stellen also fest, daß sowohl $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ als auch $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ ein gemeinsames Gruppenbild besitzen. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_3$ besitzen aber nach Satz 16.1 kein gemeinsames Gruppenbild, da sie wohl denselben Rang 1 haben, die Torsionsgruppe von $\mathfrak{G}_1$ aber die Ordnung 1, diejenige von $\mathfrak{G}_3$ die Ordnung 2 hat.

Lebenslauf

Am 12. Juni 1918 wurde ich als Sohn eines Ingenieurs und Bürger von Männedorf geboren. Nachdem ich meine Primarschulzeit in den Kantonen Aargau, Bern und Schwyz verbracht hatte, absolvierte ich von 1931 bis 1937 das Kantonale Gymnasium Zürich und schloß meine Mittelschulzeit im Herbst 1937 mit der Maturität, Typus A, ab. Daran anschließend trat ich in die Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule ein, wo ich 1939 die Vordiplomprüfung bestand. Durch im ganzen drei Jahre aktiven Militärdienst und Instruktionsdienst wurde mein weiteres Studium stark zerrissen, so daß ich erst im Herbst 1944 bei Herrn Prof. H. Hopf mit dem Diplom als Mathematiker abschloß. Von 1943 bis 1947 war ich im ganzen 5 Semester Assistent für Darstellende Geometrie bei Herrn Prof. E. Stiefel. Von 1945 bis 1950 hatte ich Stellvertretungen an der Kantonsschule Winterthur, der Schweizerischen Alpinen Mittelschule Davos und der Oberrealschule Zürich und war Hilfslehrer an der Oberrealschule Zürich, am Kantonalen Unterseminar Küsnacht und am Literargymnasium Zürich. Seit Anfang 1951 bin ich Hauptlehrer für Mathematik und Physik an der Schweizerischen Alpinen Mittelschule Davos.

Davos, Mai 1952 *Hans Ulrich Krause*